

Lambda

Antonia Nabuco

October 2025

Exercício 1

1a

$$a\ b\ c\ d \rightarrow (((ab)c)d)$$

1b

$$\lambda q. \lambda i. q \rightarrow \lambda q. (\lambda i. q)$$

1c

$$\lambda x. \lambda y. \lambda z. xz(yz) \rightarrow \lambda x. (\lambda y. (\lambda z. (xz)(yz)))$$

Exercício 2

2a

$$(\lambda s. s\ z)\ (\lambda q. s\ q)$$

Variáveis:

- Ligadas: s, q
- Livres: z, s

2b

$$(\lambda s. s\ z)\ (\lambda q. w)\ (\lambda w. w)\ q\ z\ s$$

Variáveis:

- Ligadas: s, q, w
- Livres: z, q, s

2c

$$(\lambda s. s) (\lambda q. q s)$$

Variáveis:

- Ligadas: s, q
- Livres: s

2d

$$\lambda z. ((\lambda s. s q) (\lambda q. q z)) \lambda z. z z$$

Variáveis:

- Ligadas: z, s, q
- Livres: q

Exercício 3

3a

Expressão inicial:

$$((\lambda z. z) (\lambda q. q q)) (\lambda s. s a)$$

Reduções passo a passo:

$$\begin{aligned} & ((\lambda z. z) (\lambda q. q q)) (\lambda s. s a) \\ & \xrightarrow{\beta} (\lambda q. q q) (\lambda s. s a) \\ & \xrightarrow{\beta} (\lambda s. s a) (\lambda s. s a) \quad (\text{substituímos } q := (\lambda s. s a) \text{ na forma } q q) \\ & \xrightarrow{\beta} (\lambda s. s a) a \\ & \xrightarrow{\beta} a a \end{aligned}$$

3b

Expressão inicial:

$$((\lambda s. \lambda q. s q q) (\lambda a. a)) b$$

Reduções passo a passo:

$$\begin{aligned} & ((\lambda s. \lambda q. s q q) (\lambda a. a)) b \\ & \xrightarrow{\beta} (\lambda q. (\lambda a. a) q q) b \\ & \xrightarrow{\beta} (\lambda a. a) b b \\ & \xrightarrow{\beta} b b \end{aligned}$$

3c

Expressão inicial:

$$((\lambda s. \lambda q. s \ q \ q) (\lambda x. x)) \ c$$

Reduções passo a passo:

$$\begin{aligned} & ((\lambda s. \lambda q. s \ q \ q) (\lambda x. x)) \ c \\ & \xrightarrow{\beta} (\lambda q. (\lambda x. x) \ q \ q) \ c \\ & \xrightarrow{\beta} (\lambda x. x) \ c \ c \\ & \xrightarrow{\beta} c \ c \end{aligned}$$

3d

Expressão inicial:

$$((\lambda s. s \ s) (\lambda q. q)) (\lambda r. r)$$

Reduções passo a passo:

$$\begin{aligned} & ((\lambda s. s \ s) (\lambda q. q)) (\lambda r. r) \\ & \xrightarrow{\beta} (\lambda q. q) (\lambda q. q) \\ & \xrightarrow{\beta} (\lambda q. q) \\ & \xrightarrow{\beta} (\lambda r. r) \end{aligned}$$

Exercício 4

4a

Expressão inicial:

$$(\lambda x. x) \ 5$$

Redução:

$$(\lambda x. x) \ 5 \rightarrow 5$$

4b

Expressão inicial:

$$(\lambda x. x + 10) \ 42$$

Redução passo a passo:

$$(\lambda x. x + 10) \ 42 \rightarrow 42 + 10 \rightarrow 52$$

4c

Expressão inicial:

$$(\lambda f.f(f\ 10))\ (\lambda x.x + 2)$$

Reduções passo a passo:

$$\begin{aligned} & (\lambda f.f(f\ 10))\ (\lambda x.x + 2) \\ & \xrightarrow{\beta} (\lambda x.x + 2)\ ((\lambda x.x + 2)\ 10) \\ & \xrightarrow{\beta} (\lambda x.x + 2)\ 12 \\ & \xrightarrow{\beta} 14 \end{aligned}$$

4d

Expressão inicial:

$$(\lambda f.f)\ (\lambda x.x)\ 51$$

Reduções passo a passo:

$$(\lambda f.f)\ (\lambda x.x)\ 51 \rightarrow (\lambda f.f)(\lambda x.x) = (\lambda x.x) \rightarrow (\lambda x.x)\ 51 = 51$$

Exercício 5

5

Expressão inicial:

$$(\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ m\ f\ (n\ f\ x))\ (\lambda c.\lambda d.\ c\ (c\ d))\ (\lambda a.\lambda b.\ a\ b)$$

Reduções passo a passo:

$$\begin{aligned} & (\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ m\ f\ (n\ f\ x))\ (\lambda c.\lambda d.\ c\ (c\ d))\ (\lambda a.\lambda b.\ a\ b) \\ & \xrightarrow{\beta} (\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ (\lambda c.\lambda d.\ c\ (c\ d))\ f\ (n\ f\ x))\ (\lambda a.\lambda b.\ a\ b) \\ & \xrightarrow{\beta} (\lambda f.\lambda x.\ (\lambda c.\lambda d.\ c\ (c\ d))\ f\ ((\lambda a.\lambda b.\ a\ b)\ f\ x)) \\ & \xrightarrow{\beta} (\lambda f.\lambda x.\ (\lambda d.\ f\ (f\ d))\ (f\ x)) \quad (\text{expansão dos Church numerals}) \\ & \xrightarrow{\beta} (\lambda f.\lambda x.\ f\ (f\ (f\ x))) \end{aligned}$$