Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Programmstrukturen und Datenorganisation

Prof. Dr.-Ing. Gregor Snelting — gregor.snelting@kit.edu

Prof. Dr. Ralf Reussner — reussner@kit.edu

Programmierparadigmen – WS 2021/22

https://pp.ipd.kit.edu/lehre/WS202122/paradigmen/uebung

Blatt 9: Unifikation, Typinferenz, `let`-Polymorphismus

Abgabe:	14.01.2022, 14:00
Besprechung:	17.01 – 18.01.2022

Reichen Sie Ihre Abgabe bis zum 14.01.2022 um 14:00 in unserer Praktomat-Instanz unter https://praktomat.cs.kit.edu/pp_2021_WS ein.

1 Unifikation

1. Gegeben ist folgendes Term-Gleichungssystem (in Prolog-Notation):

$$\begin{aligned} \mathtt{X}_1 &= \mathtt{X}_2 \\ \mathtt{X}_2 &= \mathtt{X}_3 \end{aligned}$$

   Es seien außerdem folgende Substitutionen gegeben:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= [\mathtt{X}_1 \Leftarrow \mathtt{X}_2, \mathtt{X}_2 \Leftarrow \mathtt{X}_3] \\ \sigma_2 &= [\mathtt{X}_2 \Leftarrow \mathtt{X}_3] \circ [\mathtt{X}_1 \Leftarrow \mathtt{X}_2] \\ \sigma_3 &= [\mathtt{X}_1 \Leftarrow a, \mathtt{X}_2 \Leftarrow a, \mathtt{X}_3 \Leftarrow a] \end{aligned}$$

   Welche der Substitutionen ist

   - ein Unifikator für das gegebene Gleichungssystem?
   - ein allgemeinster Unfikator für das gegebene Gleichungssystem?

2. Berechnen Sie für das folgende Gleichungssystem einen allgemeinsten Unifikator:

$$\begin{aligned} \mathtt{a}(\mathtt{t}_1, \mathtt{a}(\mathtt{X}_3, \mathtt{X}_4)) &= \mathtt{a}(\mathtt{X}_1, \mathtt{X}_2) \\ \mathtt{X}_3 &= \mathtt{t}_2 \\ \mathtt{X}_4 &= \mathtt{X}_1 \end{aligned}$$

   Rechnen Sie den Unifikator vollständig aus, d.h. geben Sie ihn in der Form

$$[\mathtt{X}_1 \Leftarrow \dots, \mathtt{X}_2 \Leftarrow \dots, \mathtt{X}_3 \Leftarrow \dots, \mathtt{X}_4 \Leftarrow \dots]$$

   an.

3. Geben Sie einen allgemeinsten Unifikator für die folgende Gleichung an (ohne Rechenweg):

$$\mathtt{a}([1, 2, 3], [3, 4], \mathtt{L}) = \mathtt{a}([\mathtt{X}|\mathtt{Xs}], [\mathtt{Y}|\mathtt{Ys}], \mathtt{L2})$$

   Gehen Sie von Prolog-Notation aus: X, Xs, Y, Ys, L, L2 sind Variablen, `[_|_]`, `[_,_,_]` etc. Listen.

2 λ-Terme und ihre allgemeinsten Typen

Gegeben seien folgende λ-Terme[1]:

$$
\begin{aligned}
t_1 &= \lambda\texttt{z}.\ \texttt{z} \\
t_2 &= \lambda\texttt{f}.\ \lambda\texttt{x}.\ \texttt{f x} \\
t_3 &= \lambda\texttt{f}.\ \lambda\texttt{x}.\ \texttt{f (f x)} \\
t_4 &= \lambda\texttt{x}.\ \lambda\texttt{y}.\ \texttt{y (x y)}
\end{aligned}
$$

Führen Sie für jeden dieser Terme eine Typinferenz durch. Gehen Sie dabei vor, wie auf den Folien 328ff. beschrieben:

1. Erstellen Sie zum gegebenen Term t_j zunächst einen Herleitungsbaum, verwenden Sie dabei frische Typvariablen α_i.
2. Extrahieren Sie gemäß der Typisierungsregeln ein Gleichungssystem C für die α_i.
3. Bestimmen Sie einen allgemeinsten Unifikator σ_C, der C löst.
4. Bestimmen Sie einen allgemeinsten Typen von t_j als $\sigma_C(\alpha_1)$, wobei α_1 die für t_j gewählte Typvariable ist.

3 Typabstraktion

In der Typabstraktion $ta(\tau, \Gamma)$ werden nicht *alle* freien Typvariablen von τ quantifiziert, sondern nur die, die nicht frei in den Typannahmen Γ vorkommen.

Überlegen Sie anhand des λ-Terms λx. **let** y = x **in** y x, was passiert, wenn man diese Beschränkung aufhebt!

[1] Falls Ihnen diese Terme bekannt vorkommen: Sie entsprechen den Termen A–D von Blatt 5, Aufgabe 2.

4 Typinferenz, `let`-Polymorphismus

Bestimmen Sie einen allgemeinsten Typ für den Ausdruck **`let`** `k` = λ`x`. λ`y`. `x` **`in`** `k a (k b c)` unter der Typannahme $\Gamma = \texttt{a} : \mathsf{int}, \texttt{b} : \mathsf{bool}, \texttt{c} : \mathsf{char}$. Gehen Sie hierzu vor, wie auf den Folien 340ff. beschrieben: Extrahieren Sie für das abgedruckte Skelett einer Typherleitung die Constraint-Menge C_{let} und berechnen Sie einen allgemeinsten Unifikator $mgu\,(C_{let}) =: \sigma_{let}$ für die linke Teilherleitung der `let`-Regel. Bestimmen Sie dann die vereinfachte Constraint-Menge C'_{let}, Γ' sowie die Constraint-Menge C_{body} für den Rest des Herleitungsbaums unter Γ'. Geben Sie anschließend einen allgemeinsten Unifikator σ_C von $C := C'_{let} \cup C_{body} \cup \{\alpha_1 = \alpha_7\}$ an.

$$\text{Let}\ \dfrac{\text{Abs}\ \dfrac{\text{Abs}\ \dfrac{\text{Var}\ \dfrac{\begin{array}{c}(\Gamma, \texttt{x} : \alpha_3, y : \alpha_5)\,(\texttt{x}) = \alpha_3 \\ \alpha_3 \succeq \alpha_3\end{array}}{(\Gamma, \texttt{x} : \alpha_3, y : \alpha_5) \vdash \texttt{x} : \alpha_6}}{\Gamma, \texttt{x} : \alpha_3 \vdash \lambda\texttt{y}.\ \texttt{x} : \alpha_4}}{\Gamma \vdash \lambda\texttt{x}.\ \lambda\texttt{y}.\ \texttt{x} : \alpha_2} \qquad \text{App}\ \dfrac{\text{App}\ \dfrac{\text{Var}\ \dfrac{\boxed{} \succeq \boxed{}}{\Gamma' \vdash \texttt{k} : \alpha_9} \quad \text{Var}\ \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma'\,(\texttt{a}) = \mathsf{int} \\ \mathsf{int} \succeq \mathsf{int}\end{array}}{\Gamma' \vdash \texttt{a} : \alpha_{10}}}{\Gamma' \vdash \texttt{k a} : \alpha_8} \quad \text{App}\ \dfrac{\text{App}\ \dfrac{\text{Var}\ \dfrac{\boxed{} \succeq \boxed{}}{\Gamma' \vdash \texttt{k} : \alpha_{13}} \quad \text{Var}\ \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma'\,(\texttt{b}) = \mathsf{bool} \\ \mathsf{bool} \succeq \mathsf{bool}\end{array}}{\Gamma' \vdash \texttt{b} : \alpha_{14}}}{\Gamma' \vdash \texttt{k b} : \alpha_{12}} \quad \text{Var}\ \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma'\,(\texttt{c}) = \mathsf{char} \\ \mathsf{char} \succeq \mathsf{char}\end{array}}{\Gamma' \vdash \texttt{c} : \alpha_{15}}}{\Gamma' \vdash \texttt{k b c} : \alpha_{11}}}{\Gamma' \vdash \texttt{k a (k b c)} : \alpha_7}}{\Gamma \vdash \textbf{let}\ \texttt{k} = \lambda\texttt{x}.\ \lambda\texttt{y}.\ \texttt{x}\ \textbf{in}\ \texttt{k a (k b c)} : \alpha_1}$$

$\Gamma'(\texttt{k}) = \boxed{}$

$\Gamma'(\texttt{k}) = \boxed{}$

$C_{let} =$

$\sigma_{let} := mgu\,(C_{let}) =$

$\sigma_{let}\,(\alpha_2) =$

$\Gamma' =$

$C'_{let} =$

$C_0 \cup C_1 =$

$\sigma := mgu\left(C'_{let} \cup C_0 \cup C_1\right) =$

$\sigma\,(\alpha_1) =$

Verifizieren Sie schließlich, dass durch Anwendung von σ_{let} und σ aus dem Herleitungsbaum ein korrekter Lösungsbaum entsteht.