Indice

1 Introduzione **2**
1.1 Storia . . . 2
1.2 Applicazioni . . . 3
1.3 Computer Graphics vs Computer Vision . . . 3
1.4 Visual Computing . . . 3

2 Applicazioni **4**
2.1 Grafica vettoriale . . . 4
2.2 Immagini Raster o bitmap . . . 5
2.3 Aliasing . . . 6
2.4 Caratteristiche Immagini raster . . . 6
2.4.1 Colore . . . 6
2.4.2 Legge di Grassman . . . 7
2.4.3 Funzioni di Matching . . . 7

3 Schema di un'applicazione grafica **8**
3.1 Modello della scena . . . 8
3.2 Rendering della scena . . . 8

4 Modellare lo spazio **9**
4.1 Scalari . . . 9
4.2 Vettori . . . 9
4.2.1 Indipendenza lineare . . . 10
4.2.2 Rappresentazione in componenti . . . 10
4.3 Punti . . . 10
4.4 Combinazioni affini . . . 11

1 Introduzione

Cos'è grafica al calcolatore ? Intuitivamente è l'uso di un calcolatore per produrre un'immagine o una sequenza di immagini, non necessariamente realistica o in 3D, non necessariamente interattiva.
Per **computer grafica**, **grafica digitale** o **grafica computerizzata** (in inglese **computer graphics**) si intende:

- Creazione immagini 2d sintetiche e animazioni
- Modellazione 2D, 3D, anche con comportamenti fisici
- Computer Aided Design
- Rendering delle scene, cioè creazione delle immagini simulando la proiezione ottica delle scene sulla camera
- Animazione
- Interfacce grafiche dei computer
- Realtà virtuale
- Enhancement video televisivo
- Visualizzazione scientifica e dell'informazione

1.1 Storia

Nasce con i primi display per calcolatori.
Nel 1960 William Fetter introduce il termine **Computer Graphics** per descrivere la ricerca che stava conducendo alla Boeing. Questa ricerca ha portato alla realizzazione di un modello 3D del corpo umano per progettare la carlinga degli aerei. Nasce quindi l'idea della modellazione 3D che rappresenta una parte rilevante della moderna CG.
Nel 1963 assistiamo alla nascita della **Computer Grafica interattiva**: sistema sketchpad di Ivan Sutherland. In questo caso si tratta della prima **interfaccia grafica** interattiva.
Negli anni '60 inoltre nascono i primi terminali grafici e i primi giochi, si impara quindi a disegnare sullo schermo 2D. Nel 1961 Steve Russell at MIT crea il primo video game, Spacewar.
Negli anni '70 nascono le moderne **interfacce grafiche interattive** dei computer (WIMP - *Window*, *Icon*, *Menu and Pointing device*). La grafica interattiva, in questo caso 2D diventa parte integrante del sistema di interazione uomo-macchina.
Nel 1972 nasce il videogioco Pong (Atari). Anche oggi una delle maggiori applicazioni della grafica interattiva è nel mondo dei **videogiochi**.
Negli anni settanta nascono gli algoritmi per creare immagini da modelli 3D (**rendering**). Nel 1972 Catmull (Univ. Utah) crea la prima animazione di grafica 3D. Si tratta di un modello della sua mano formato da 350 poligoni. Catmull diventerà un cofondatore della *Pixar* (oggi presidente).
Gli algoritmi per creare linee raster, riempire poligoni, proiettare oggetti 3D su telecamere virtuali vengono via via sviluppati negli anni '60-70-80. Questi argomenti sono il cuore della grafica 3D e di questo corso.
Si creano standard e implementazioni di sistemi grafici e si arriva alla situazione attuale:

- 1992 Silicon Graphics crea lo standard **OpenGL**
- 1995 Microsoft rilascia Direct 3D

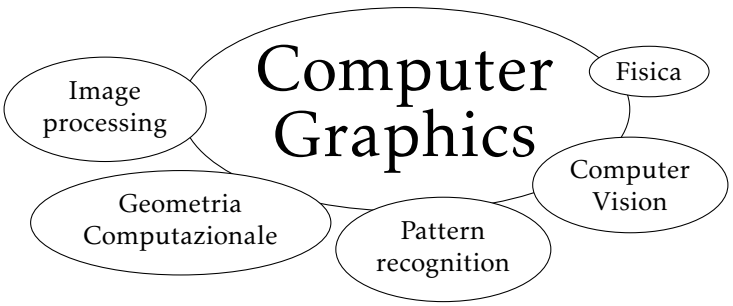
La grafica ha pesantemente condizionato lo sviluppo dell'hardware e l'architettura dei moderni calcolatori (e tablet, smartphone, ...)
Le operazioni grafiche vengono implementate su hardware specifico Inizialmente grafica raster calcolata su CPU, poi (doppio) buffer per mantenere le immagini (doppio perché il calcolo può

essere lento rispetto al refresh dello schermo) Nel 1985 esce il Commodore Amiga, uno dei primi home computer con una GPU (Graphical Processing Unit), nel 1987 il primo PC Ibm con operazioni 2D hardware.
Nel 1995 escono le prime schede video per PC con pipeline grafica 3D (S3 Virge), nel 1999 Nvidia GeForce 256 la prima scheda con transform & lightning engine.

1.2 Applicazioni

- **Modellazione 3D**: prototipazione e stampa 3D, digital manufacturing
- **Grafica non interattiva**: cinema digitale, grafica pubblicitaria, ecc.
- **Grafica interattiva**:
  - *Visualizzazione scientifica*: uso della grafica (2D-3D) per comunicare efficacemente informazione di misure o simulazioni
  - *Visualizzazione dell'informazione*: creazione di modelli "mentali" utili per rappresentare nello spazio dati astratti
  - Realtà virtuale o aumentata e interazione uomo macchina
  - Interfacce naturali per comunicare con i computer o simulare attività reali
  - Simulatori, Videogiochi

Grafica è quindi una *disciplina che studia le tecniche e gli algoritmi per la rappresentazione visuale di informazioni numeriche prodotte o semplicemente elaborate dai computer* (da Scateni e al.).
È quindi legata a molte altre discipline.



1.3 Computer Graphics vs Computer Vision

In senso generale la grafica è il meccanismo opposto dell'**image understanding** o della **computer vision**.
Nel primo caso si passa da immagini a parametri, a interpretazione. Nel secondo si crea un'immagine da un input parametrico. Quindi sono grafica tutti i sistemi informatici che creano e usano immagini sintetiche.

1.4 Visual Computing

Oggi vista la convergenza dei due domini si parla spesso in generale di *visual computing*.
Visual computing is a generic term for all computer science disciplines handling with images and 3D models, i.e. computer graphics, image processing, visualization, computer vision, virtual and augmented reality, video processing, but also includes aspects of pattern recognition, human computer interaction, machine learning and digital libraries. The core challenges are the acquisition, processing, analysis and rendering of visual information (mainly images and video). Application areas include industrial quality control, medical image processing and visualization, surveying, robotics, multimedia systems, virtual heritage, special effects in movies and television, and computer games.

2 Applicazioni

Se lo scopo della grafica al calcolatore è quello di riprodurre un grafico, quel che dovrà fare il nostro software è preparare i valori di output da passare al nostro display.
Il display (output) può essere differente a seconda dell'applicazione. In generale sarà un **display raster** come un monitor, che riproduce una matrice di punti su cui è codificata una terna di valori di colore RGB Sono dominio della grafica le applicazioni che

- Preparano file per la stampa 2D (grafica vettoriale)
- Stampa 3D
- Display innovativi (ad esempio stereo, volumetrici)

Possiamo rappresentare la grafica in un dato digitale in due modi:

1. **Vettoriale** : utilizzando primitive di disegno
2. **Raster**: utilizzando una griglia di valori da riprodurre sul monitor

2.1 Grafica vettoriale

La rappresentazione grafica vettoriale compone le immagini come un ***insieme di primitive di disegno*** come ad esempio *Linee*, *Curve*, *Aree*.
Queste possono essere descritte con **funzioni parametriche** e **coordinate di punti**.
Dove vengono applicate:

- Disegno su display vettoriali.
- Plotter.
- Rappresentazione per la stampa, necessita di conversione a raster di solito effettuata dalla stampante.
- Rappresentazione interna nei calcolatori di forme grafiche che devono essere rappresentate a differente livello di precisione (Es. caratteri di stampa che facciamo grandi o piccoli, ecc.).

Vantaggi:

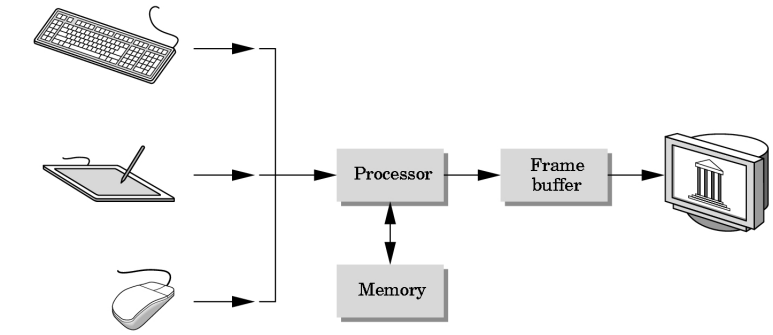
- I dati sono espressi in una forma direttamente comprensibile ad un essere umano (es. lo standard SVG);
- Compattezza di codifica rispetto all'equivalente raster;
- Possibilità di ingrandire l'immagine arbitrariamente, senza che si verifichi una perdita di risoluzione dell'immagine stessa.

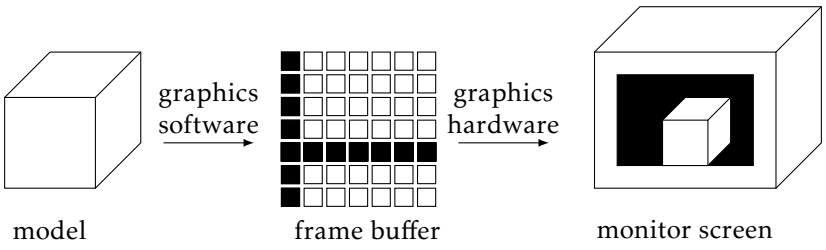
Limiti: per la rappresentazione sulla maggior parte dei display occorre poi convertire a raster.

Figura 1: Differenza di scalatura tra raster(sx) e vettoriale(dx)

2.2 Immagini Raster o bitmap

Le immagini digitali cui siamo abituati con i monitor immagini **raster** e consistono di una matrice di elementi denominati **pixel** dove ogni cella della matrice rappresenta un colore in rgb.
Il nostro software scriverà quindi un *frame buffer*: memoria contenente l'immagine, array di valori per i pixel, che viene modificato direttamente dal programma di grafica video controller il quale legge il frame buffer e costruisce l'immagine sul display.





Le immagini raster sono **matrici** che contengono valori che rappresentano il colore nella casella corrispondente agli indici con valori discretizzati.
Di solito ci sono componenti di colore: i monitor generano il colore con sovrapposizione di luce rossa, verde e blu (Perché?)
Caratteristiche principali (non le uniche):

- **risoluzione** (dimensioni della matrice di pixel)
- **profondità di colore** (bit di memoria per pixel).

8-bit significano 256 colori, mentre 24-bit (o truecolor) rappresentano all'incirca 32 milioni di colori
Nota: è la rappresentazione di uscita tipica di quasi tutti i display odierni, ma non è ovviamente l'unica possibile

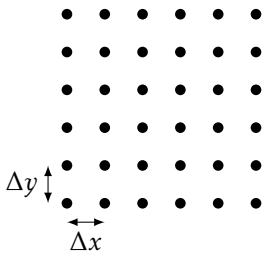
- Es.: display vettoriali: riproducono disegni
- Il formato digitale creato internamente deve ovviamente corrispondere alla capacità del display scelto di riprodurlo

Nel processo di rasterizzazione delle immagini vettoriali la qualità della conversione dipende dalla risoluzione dell'immagine originale (numero di punti o punti per pollice).
Un effetto possibile può essere la scalettatura: effetto dell'**aliasing** delle alte frequenze. Si può ridurre tale effetto sfumando la luminosità e facendo quindi *antialiasing*.

2.3 Aliasing

L'aliasing accade perché l'immagine è il campionamento di un segnale "continuo" che rappresenterebbe il dato misurabile.

$$I(i,j) = I(i\Delta x, j\Delta y) = \iint F(x,y)\delta(x - i\Delta x)\delta(y - i\Delta y)$$



Per il *teorema di Shannon/Nyqvist* del campionamento, non si può ricostruire esattamente il segnale originale se la frequenza del segnale è superiore alla metà della frequenza di campionamento.

$$v_{cx} = \frac{1}{\delta x} \geq 2v_{xmax} \qquad v_{cy} = \frac{1}{\delta y} \geq 2v_{ymax}$$

Dove ci sono discontinuità del colore, ci sono componenti a frequenza alta, si creano artefatti. I filtri che fanno antialiasing attenuano le alte frequenze.

2.4 Caratteristiche Immagini raster

Le principali caratteristiche delle immagini raster sono:

- Risoluzione (numero di righe e colonne matrice)
- Range dinamico: rapporto tra minima differenza misurabile o rappresentabile e range di variabilità del segnale (luminosità). Corrisponde al numero di bit con cui codifichiamo il valore. Tipicamente 8 bit ma si può andare oltre:
  - Immagini HDR
  - Immagini mediche
  - Dato che l'occhio umano non distingue così tante sfumature, lo scopo è di poter creare da esse rendering diversi che possano dare differenti effetti o informazioni

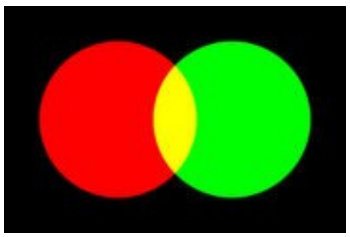
  Il valore codificato dovrebbe corrispondere alla luminosità del punto generata dal monitor o acquisita dal sensore, ma la cosa è un po' più complicata a causa della **non-linearità della percezione umana**.

Insomma quello che c'è nel file non è quello che vediamo. Il rendering ed il dispositivo determinano la visualizzazione. E poi c'è il fattore legato alla percezione umana. Ad esempio: immagini ad alto range dinamico (HDR) (Mantiuk et al 2005)
La percezione umana amplifica le differenze del range dinamico ai bassi livelli. Macchine fotografiche e monitor applicano correzioni (gamma correction)

2.4.1 Colore

Le immagini raster da inviare ai display sono in genere a colori, per simulare il modo in cui vediamo il mondo (a colori). La rappresentazione del colore è generalmente una *terna di valori RGB*. Per la riproduzione corrispondono alle intensità emesse da tre emettitori di luce a tre frequenze determinate (rosso, verde, blu) che danno origine in corrispondenza a un certo colore percepito dall'utente.

Ma cosa significa questo?
Nei monitor si generano i colori nei punti della griglia per sintesi additiva: si mescolano due o più fasci luminosi di diversa.
Nella stampa per sintesi sottrattiva: Due o più inchiostri sovrapposti assorbono diverse frequenze e cambiano la luce diretta all'occhio.
Non tutti i colori possono essere generati in mescolanza additiva o sottrattiva di tre colori primari
La scelta di **Rosso Verde Blu** come *primari additivi* e **Giallo, Magenta e Cyan (e nero)** *sottrattivi* cerca di massimizzare i colori rappresentabili



L'uso delle 3 componenti di colore RGB è convenzionale e deriva dalla fisiologia della visione, che mostra che con 3 colori base si possono approssimativamente riprodurre i colori del mondo reale.
I colori visibili però derivano invece da una variazione continua di lunghezza d'onda delle radiazioni elettromagnetiche in un intervallo percettibile di valori circa 370-730 nm.
Percezione del colore: nella retina ci sono 3 tipi di coni, che hanno differenti sensitività a diverse frequenze S,M,L Possiamo fare il matching delle frequenze con la risposta dei recettori.

Il "colore" percepito è dato da 3 grandezze scalari, funzione dello spettro della luce incidente. La corrispondenza non è iniettiva. Spettri diversi possono corrispondere allo stesso colore percepito: metamerismo Conseguenza: Per riprodurre un colore, non è necessario riprodurre lo spettro. È sufficiente che le risposte L, M, S dei coni siano uguali. Può cambiare in funzione dell'illuminazione.
Metamerismo: consiste nella possibilità di ottenere un effetto ottico tale che l'occhio percepisca la stessa sensazione di colore in presenza di luce con distribuzione spettrale diversa dal colore puro in questione. Si tratta di un'illusione ottica basata sulla natura dell'interpretazione del colore da parte dell'occhio umano, è possibile creare la sensazione di un colore "puro", formato, selezionando la sola lunghezza d'onda che genera quella determinata sensazione di colore miscelando a dovere più lunghezze d'onda differenti, un esempio è il bianco di una lampada fluorescente formato da spettri non uniformi, in questo caso la temperatura di colore che si trova sulle confezioni è la temperatura a cui deve essere un corpo nero perché l'occhio umano percepisca la stessa sensazione di colore. Il fenomeno si ha quando colori che appaiono all'occhio identici sotto una certa luce, mostrano tonalità differenti se illuminati con una luce diversa. In sostanza c'è metamerismo quando due colori si equivalgono sotto una fonte di luce, ma risultano differenti ad altre esposizioni.

2.4.2 Legge di Grassman

L'uomo è in grado di fare match di colori mischiando 3 (o più) colori detti primari. Se la luce test T ha un certo colore:

$$T = aP1 + bP2 + cP3$$

il match si verifica lineare.

2.4.3 Funzioni di Matching

Data una terna di colori di base possiamo studiare il matching dei colori sugli osservatori in funzione della frequenza. Componenti colore CIERGB ricavate dall'integrale delle frequenze dello stimolo su tutto il range.

$$L = \int \Phi(\lambda) L(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

$$M = \int \Phi(\lambda) M(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

$$S = \int \Phi(\lambda) S(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

Rappresentazione con matrice:

$$C = \begin{pmatrix} \overline{r}(\lambda_1) & \dots & \overline{r}(\lambda_N) \\ \overline{g}(\lambda_1) & \dots & \overline{g}(\lambda_N) \\ \overline{b}(\lambda_1) & \dots & \overline{b}(\lambda_N) \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi(\lambda_1) \\ \vdots \\ \phi(\lambda_N) \end{pmatrix}$$

3 Schema di un'applicazione grafica

Vi è una descrizione di qualche tipo (procedurale o meno) del mondo che deve essere rappresentato. La produzione di tale descrizione (modello) prende il nome di **modellazione**.
Da tale descrizione si ottiene una immagine visualizzabile da un display tale processo è chiamato globalmente **rendering**.
La sequenza di procedure ed algoritmi che implementano il rendering prende il nome di **pipeline grafica**.
Se l'applicazione è interattiva, il disegno dev'essere riprodotto in real time mentre l'utente interagisce con la scena mediante dei dispositivi.

3.1 Modello della scena

Nelle applicazioni 2D può essere un disegno da riprodurre sul display a meno di una trasformazione geometrica e mappatura sui pixel. Nelle applicazioni 3D di cui ci interesseremo sarà invece un vero e proprio modello del "mondo" che vogliamo vedere (e con cui vogliamo interagire) e l'immagine sarà generata simulando il processo di acquisizione di immagini di una telecamera "virtuale".
Dati gli oggetti della scena, quindi dovremo "simulare" la geometria e la fisica della formazione delle immagini (luce, colore)

3.2 Rendering della scena

Il passaggio dalla rappresentazione all'immagine si definisce *rendering*.
Comprende tutti gli algoritmi per creare l'immagine per il display, che supporremo voglia un'immagine raster.
Quindi se partiamo da una **rappresentazione 2D** (grafica vettoriale) il rendering consiste in:

1. Trasformazione delle primitive in rappresentazioni di colore sui pixel (rasterizzazione)
2. Eventuale modifica interattiva del disegno

Se partiamo da una **rappresentazione di scena 3D** il rendering consiste in:

1. Proiezione della scena sul piano immagine della telecamera virtuale
2. Trasformazione della scena proiettata in rappresentazioni di colore sui pixel (rasterizzazione)
3. Eventuale interazione con la scena e conseguenteupdate del rendering

Il rendering comprende molti calcoli da svolgere, la **complessità** dipende dall'applicazione di interesse:

- Applicazioni interattive, real-time:
  - Frame rate alto (>10 fps)
  - Tempo di rendering del singolo frame prefissato

  - Si può/deve sacrificare la qualità per garantire l'interattività

- Applicazioni non interattive (computer animation, grafica pubblicitaria)
  - l'obiettivo primario: massima qualità delle immagini di sintesi
  - Non si hanno vincoli sul tempo di generazione del singolo frame
  - Animazioni calcolate frame by frame da PC cluster, ricomposte successivamente nella successione temporale corretta

Come si implementa la fase di rendering?

- Applicazioni interattive: si avvalgono pesantemente delle moderne schede grafiche (HW dedicato al processing di dati 3D)
- Applicazioni non interattive: fanno uso di ambienti di rendering più sofisticati e flessibili (ad es. RenderMan), spesso eseguiti SW su cluster di PC

4 Modellare lo spazio

Richiamiamo le nozioni basilari di geometria per modellare lo spazio e gli oggetti:

- **Scalari**: unidimensionali, possono rappresentare grandezze fisiche con numeri
- **Punti**: rappresentano una posizione nello spazio
- **Vettori**: rappresentano le direzioni o le distanze tra punti in 2D o 3D

Per definire una posizione nello spazio dobbiamo introdurre un sistema di riferimento con un punto fisso detto origine e una terna di direzioni ortogonali

4.1 Scalari

Gli scalari S costituiscono un corpo (tipicamente useremo IR) con due operazioni, somma e moltiplicazione, che soddisfano le seguenti relazioni:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in S$$

Commutatività

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$
$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

Associatività

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\beta + \alpha) + \gamma$$
$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

Distribuzione

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Elementi neutri

$$\exists 0 \in S : \forall \alpha \in S \quad \alpha + 0 = \alpha$$
$$\exists 1 \in S : \forall \alpha \in S \quad \alpha 1 = \alpha$$

Elementi inversi

$$\forall \alpha \in S \quad \exists (-\alpha) \in S : \alpha + 0 = \alpha$$
$$\forall \alpha \in S \quad \exists \alpha^{-1} \in S : \alpha\alpha^{-1} = 1$$

4.2 Vettori

I vettori costituiscono un **gruppo abeliano** (commutativo) V in cui e definito il **prodotto di un vettore per uno scalare**.

Chiusura

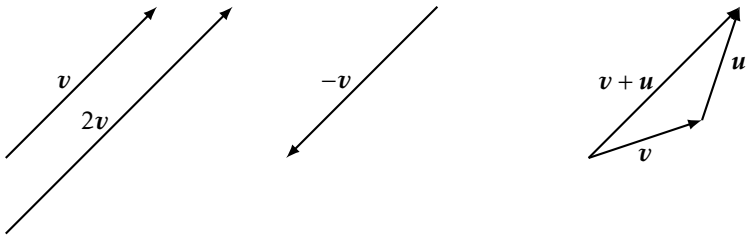
$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V \quad \forall \boldsymbol{u}\boldsymbol{v} \in V$$
$$\alpha\boldsymbol{v} \in V \quad \forall \alpha \in S \; \boldsymbol{v} \in V$$

Proprietà Algebriche

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$$
$$\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$$
$$(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}$$

$$\exists 0 \in V : \forall \boldsymbol{u} \in V \quad \boldsymbol{u} + 0 = \boldsymbol{u}$$
$$\forall \boldsymbol{u} \in V \; \exists (-\boldsymbol{u}) \in V : \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$$

La definizione è totalmente astratta, ma per semplicità conviene considerare due utili esempi di spazi vettoriali lineari: Geometrico e Algebrico.
Un esempio concreto e dato dai segmenti orientati liberi, ovvero senza un punto di applicazione specificato Il prodotto con uno scalare (numeri reali) cambia la lunghezza del vettore. La somma di due vettori e data dalla regola del parallelogramma.



Un altro esempio è dato dall'insieme delle n-ple ordinate di $\mathbb{R}^n$.

$$\boldsymbol{v} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \quad \beta_i \in \mathbb{R} \forall i$$

Il prodotto per uno scalare e la somma di due vettori sono definiti in modo del tutto naturale:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$
$$\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha\beta_1, \ldots, \alpha\beta_n)$$

E' facile vedere qual è l'elemento neutro e qual è l'inverso di un vettore.

4.2.1 Indipendenza lineare

Dati n vettori non nulli, si dicono **linearmente indipendenti** se qualsiasi loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli è diversa dal vettore nullo.

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \forall i$$

Si dice **dimensione** di uno spazio vettoriale il massimo numero di vettori linearmente indipendenti.
In uno spazio vettoriale a dimensione n, un insieme di n vettori linearmente indipendenti si dice una **base** per lo spazio. Ogni vettore può essere scritto come combinazione lineare dei vettori di una base.

4.2.2 Rappresentazione in componenti

Fissata quindi una **base in uno spazio vettoriale**, ad ogni vettore corrisponde una n-pla di scalari, ovvero i coefficienti dello sviluppo lineare del vettore nei vettori di base; tali scalari sono le componenti del vettore rispetto alla base data.
In genere il corpo è dato dai reali; abbiamo quindi ottenuto la rappresentazione concreta vista prima di uno spazio vettoriale astratto come insieme di n-ple di $\mathbb{R}^n$. Tale rappresentazione dipende dalla base scelta.

4.3 Punti

I vettori non rappresentano punti nello spazio, ma solo spostamenti. Per poter introdurre il concetto di **posizione** si deve passare agli **spazi affini** che sono degli spazi vettoriali a cui si aggiunge il concetto astratto di punto.
I punti sono definiti in senso astratto come nuovi elementi con cui e possibile effettuare solo una operazione: la sottrazione tra punti.

La differenza di due punti è un vettore: $P - Q = \boldsymbol{v}$

Dato un punto Q ed un vettore $\boldsymbol{v}$, esiste un unico punto P tale che $P - Q = \boldsymbol{v}$.

Si definisce quindi una somma tra un punto ed un vettore il cui risultato e un punto: $P = Q + \boldsymbol{v}$
Attenzione: non ho sommato Q da entrambe le parti dell'equazione precedente.
L'interpretazione geometrica è immediata; i punti sono locazioni nello spazio e la differenza di due punti e data dal vettore che li congiunge; è importante non confondere punti e vettori, sono entità geometriche ben distinte.

4.4 Combinazioni affini

Non è definita una somma tra punti e neppure un prodotto di uno scalare per un punto; in generale sono operazioni non lecite, ma c'è una eccezione.
Si prendano tre punti P, Q ed O e si consideri il seguente punto:

$$P' = \alpha(P - O) + \beta(Q - O) + O$$

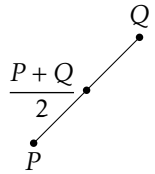
P' non dipende da O, ma solo dai punti P e Q, se e solo se $\alpha + \beta = 1$
In questo caso P' è la **combinazione affine** di P e Q, e si scrive, a volte in modo improprio, come **somma pesata dei punti**.
La combinazione affine di due punti distinti descrive la retta passante per i due punti.
La combinazione affine si estende in modo naturale a n punti.

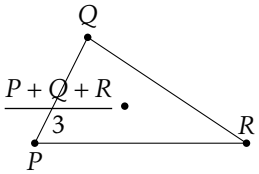
$$P' = \sum_i \alpha_i P_i, \quad \sum_i \alpha_i = 1 \;\; \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Un insieme di punti si dice **affinemente indipendente** se *nessun punto è combinazione affine degli altri*.

4.4.1 Combinazione Convessa

La combinazione convessa è una combinazione affine con pesi positivi.
Nel caso della combinazione convessa di due punti, il punto risultante giace sul segmento che congiunge i due punti. Se i pesi sono entrambi pari a 0.5, il punto risultante si trova a metà tra i due.





Nel caso di n punti che formano un poligono convesso, il punto risultante si trova all'interno del poligono. Se tutti i pesi sono uguali a $1/n$, il punto risultante si chiama **centroide** dell'insieme dei punti.

4.4.2 Guscio Convesso

Un insieme $C \in \mathbb{R}^n$ è convesso se per ogni coppia di punti $P_1, P_2 \in C$ si ha che $P' = \alpha(P_1 - P_2) + P_2$ appartiene a C per ogni $\alpha \in [0, 1]$ ovvero tutti i punti sul segmento che unisce P_1 con P_2 appartengono all'insieme C.
Il guscio convesso (*convex hull*) di un insieme di punti è la più piccola regione convessa che contiene tutti i punti dati.

4.5 Prodotto interno

In uno spazio affine non è ancora definito il concetto di distanza o di angolo tra vettori; questi si ottengono passando ad uno spazio euclideo che è uno spazio affine provvisto di un **prodotto interno tra vettori (*prodotto scalare*)** che è definito come:

Dati due vettori $a = [a_i]_1^n$ e $b = [b_i]_1^n$ di $\mathbb{R}^n$

$$\sum_1^n a_i b_i = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a'b$$

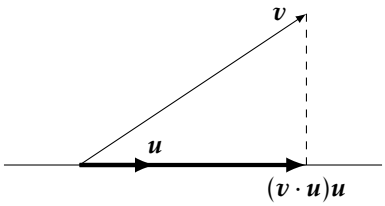
che soddisfa le seguenti relazioni:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} \in S$$
$$(\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \alpha \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \beta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$$
$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} > 0 \ (\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0})$$
$$\boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{0} = 0$$

Se il prodotto interno di due vettori è nullo, diremo che i **due vettori sono ortogonali**. Grazie al prodotto interno e possibile definire la **lunghezza di un vettore** (e quindi la distanza tra due punti) e l'**angolo** tra due vettori.
Norma di un vettore:

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} \quad \cos\theta = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{u}\|}$$

Il prodotto scalare può essere usato, ad esempio, per trovare la proiezione di un vettore lungo una retta. Sia dato il vettore $\boldsymbol{v}$ e la retta con direzione identificata dal vettore di lunghezza unitaria u; il vettore ottenuto proiettando v lungo la retta sarà della forma $\boldsymbol{v}' = t\boldsymbol{u}$ dove t è un parametro, si può dimostrare che $t = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$



4.6 Normalizzazione

Un vettore è normalizzato se la sua lunghezza è 1; dato un vettore qualsiasi lo si può normalizzare moltiplicandolo per il reciproco della sua lunghezza.
Un vettore normalizzato si dice anche ***versore***

Una base è **ortonormale** se e formata da versori a due a due ortogonali:

$$(e_1, \dots, e_n) : \|e_i\| = 1 \ \forall i \quad \text{e} \quad e_i \cdot e_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

Data una base ortonormale il prodotto interno tra due vettori si esprime come somma dei prodotti delle componenti (usuale prodotto scalare di vettori)

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{w} = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

data una base qualsiasi è sempre possibile derivare da essa una base ortonormale (procedimento di *Gram-Schmidt*)

4.7 Terne

In tre dimensioni una base ortonormale si dice **destrorsa**, se la rotazione attorno ad $\boldsymbol{e}_3$ che porta $\boldsymbol{e}_1$ a coincidere con $\boldsymbol{e}_2$ è antioraria se vista dalla parte positiva di $\boldsymbol{e}_3$. Se tale rotazione è oraria allora la base è **sinistrorsa**.
Si può usare la *prima regola della mano destra*: se si pone il pollice nella direzione di $\boldsymbol{e}_3$, la rotazione che porta $\boldsymbol{e}_1$ in $\boldsymbol{e}_2$ deve seguire il modo naturale con cui si piegano le altre dita.
Oppure la *seconda regola della mano destra* per determinare la destrorsità: se si riesce a porre i tre vettori di base in corrispondenza con pollice, indice e medio della mano destra, tenuti perpendicolari l'uno all'altro, la base e destrorsa. La scelta di un orientamento è del tutto arbitraria, basta essere coerenti. Di norma si usano basi destrorse.

4.8 Sistemi di riferimento (frame)

Il concetto di base si estende a quello di riferimento in uno spazio affine (o euclideo) specificando, oltre alla base, anche un punto O detto origine del riferimento.
Poiché ogni vettore è sviluppabile in una base data ed ogni punto esprimibile come somma di un punto dato e di un vettore, dato un riferimento $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, O)$, i punti ed i vettori dello spazio saranno esprimibili nel seguente modo:

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$$
$$P = p_1\boldsymbol{e}_1 + p_2\boldsymbol{e}_2 + p_3\boldsymbol{e}_3 + O$$

Un riferimento **cartesiano** è dato da un riferimento la cui base di vettori sia ortonormale.
Un riferimento è destrorso se lo è la sua base.

4.9 Coordinate omogenee

Definiamo il prodotto di un punto per 1 e per 0: $P \cdot 1 = P \quad P \cdot 0 = 0$.

In questo modo possiamo definire le coordinate omogenee di un punto e di un vettore rispetto al riferimento $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, O)$.

$$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3, 0)$$
$$P = (p_1, p_2, p_3, 1)$$

La scelta di 0 e 1 come ultima coordinata per vettori e punti è arbitraria, andrebbe bene qualsiasi valore:
Tale scelta però permette il **type checking**: si trattano le 4-ple delle coordinate omogenee come vettori quando si effettua una qualsiasi combinazione lineare di punti e vettori, usando le usuali regole, se l'ultima coordinata del risultato è 0, allora il risultato è un vettore; se è pari a 1 allora il risultato è un punto!
Se non è ne 0 ne 1, allora si è effettuata una operazione non lecita

4.10 Riepilogo

- Gli scalari sono numeri reali
- I vettori identificano direzioni nello spazio
- I punti determinano posizioni nello spazio
- Operazioni ammesse: somma e prodotto tra scalari, prodotto di scalari per vettori, somma di vettori, differenza di punti, somma di un punto con un un vettore, combinazioni affini.
- Il prodotto scalare permette di determinare la lunghezza dei vettori, la distanza tra punti e l'angolo tra due vettori
- Conviene lavorare in una base ortonormale; in questo caso il prodotto scalare tra due vettori e particolarmente semplice
- I tre assi che formano la base si chiamano assi coordinati e si indicano con x, y e z (a volte useremo anche 1, 2 e 3).

4.11 Prodotto vettore

Nel caso particolare delle tre dimensioni è utile introdurre un'ulteriore operazione tra vettori: **il prodotto vettore**.
Si tratta di un caso particolare di prodotto denominato **esterno**; in tre dimensioni particolarmente semplice:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (u_y v_z - u_y v_y,\ u_z v_x - u_x v_z,\ u_x v_y - u_y v_x)$$

Si dimostra che il prodotto vettore di due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ è un vettore ortogonale al piano contenente i due vettori e di modulo pari all'area definita da $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$. Il verso è scelto in modo tale che $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$ formino una terna destrorsa.
Attenzione: il prodotto vettore (a differenza delle proprietà affini dello spazio) dipende dalla scelta del tipo di base, destrorsa o sin.

Esempio: Data una direzione espressa dal vettore unitario $\boldsymbol{v}$, voglio creare un sistema di riferimento ortogonale con l'asse z coincidente con $\boldsymbol{v}$. Come faccio?

- Prendo un qualunque vettore $\boldsymbol{a}$ non parallelo a $\boldsymbol{v}$.
- Prendo la direzione dell'asse x $\boldsymbol{e}_1$ uguale a $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}$.
- Prendo la direzione dell'asse y $\boldsymbol{e}_2$ uguale a $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e}_1$.

4.12 Matrici e trasformazioni

Una matrice è essenzialmente un array bidimensionale di elementi; per i nostri scopi gli elementi saranno sempre degli scalari, tipicamente numeri reali.

Una matrice A puo essere moltiplicata per uno scalare β ottenendo una matrice $C = \beta A$ definita nel seguente modo:

$$c_{ij} = \beta a_{ij} \quad \forall i, j$$

Due matrici A e B si possono sommare se e solo se hanno lo stesso numero di righe e di colonne; in tal caso si ha $C = A + B$ data da:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$$

Il prodotto tra matrici e definito solo quando il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda. Se A è una matrice $N\times M$ e B e una matrice $M\times K$, allora si ha $C = AB$ (di dimensioni $N\times K$) data da:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{M} a_{il} b_{lj}$$

Il prodotto tra matrici è **associativo** ($(AB)C = A(BC)$), ma **non commutativo** (in generale $AB \neq BA$)

4.13 Matrice trasposta

Indicata con il simbolo A_T , è la matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne di A:

$$a^T_{ij} = a_{ji}$$

Quindi se A è $N\times M$, allora la sua trasposta è $M\times N$.
Per i vettori trasporre equivale a trasformare un vettore riga in un vettore colonna e viceversa D'ora in poi quando parleremo di **trasformazione** di un vettore $\boldsymbol{v}$ con una matrice A intenderemo sempre l'usuale *prodotto di matrici* tra A e il trasposto di $\boldsymbol{v}$ inteso come matrice con una sola colonna, es.:

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix}$$

4.14 Determinante

Importante parametro per le matrici quadrate, indicato con il simbolo $detA$ o con il simbolo $|A|$. Si definisce ricorsivamente:

Il determinante di una matrice $2x2$ è definito da:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Il determinante di una matrice $N \times N$ è dato dalla formula:

$$detA = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+k} a_{jk} detA_{jk}$$

dove k e una colonna qualsiasi di A e dove il simbolo A_{jk} indica la matrice $(N-1)\times(N-1)$ ottenuta da A eliminando la riga j e la colonna k. Si può dimostrare che $det(AB) = detA\, detB$
Si può dimostrare che una matrice e invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da 0; in tal caso si ha:

$$a_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ij}}{\det A}$$

4.15 Matrici: trasformazioni e cambiamento di base

Abbiamo visto cosa significa applicare una matrice ad un vettore

- Le matrici quadrate rappresentano quindi delle **applicazioni lineari** di uno spazio vettoriale in sé (formano un gruppo non abeliano).
- Tutte le applicazioni lineari di uno spazio vettoriale in sé sono esprimibili tramite **matrici quadrate**.
- L'applicazione di più di una matrice ad un vettore si effettua sfruttando l'algebra delle matrici; ad esempio applicare prima A, poi B ed infine C equivale ad applicare la matrice CBA.

Abbiamo detto che dato uno spazio vettoriale esistono infinite basi. Nella rappresentazione concreta il **cambiamento da una base ad un'altra** è descritto da una matrice.
In generale dato un vettore (v_1, v_2, v_3), la sua trasformazione in (v_1', v_2', v_3') tramite la matrice M puo essere vista come :

- Una trasformazione identificata da M del vettore fissata la base (**trasformazione attiva**).
- Un cambiamento di base indotto dalla matrice M^{-1} tenendo fisso il vettore (**trasformazione passiva**).

4.16 Cambio di riferimento

L'idea si ripropone negli stessi termini per i sistemi di riferimento.
Dati due riferimenti $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, O)$ e $(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3', O)$ si tratta di trovare una matrice 4×4 che permetta di ottenere le coordinate di un punto rispetto al secondo riferimento date le coordinate dello stesso punto rispetto al primo.

Come nel caso dei cambiamenti di base di un riferimento, se T è la trasformazione attiva che manda il primo riferimento nel secondo (e che manda le coordinate rispetto al secondo nelle coordinate rispetto al primo), allora T_{-1} e la matrice che trasforma le coordinate rispetto al primo riferimento nelle coordinate rispetto al secondo riferimento.

Esempio:
Determinare la rotazione che porta gli assi canonici $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ in una qualunque terna

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1' &= (e_{11}', e_{12}', e_{13}'), \\ \boldsymbol{e}_2' &= (e_{21}', e_{22}', e_{23}'), \\ \boldsymbol{e}_3' &= (e_{31}', e_{32}', e_{33}') \end{aligned}$$

La matrice di rotazione è data da:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2' & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3' \\ \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2' & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3' \\ \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2' & \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3' \end{pmatrix}$$

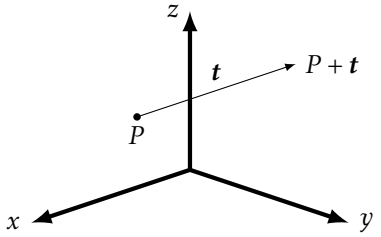
4.17 Traslazione

Una traslazione determinata dal vettore $\boldsymbol{t}$ trasforma il punto P nel punto:

$$P' = P + \boldsymbol{t}$$

In termini di componenti:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t} &= (t_x, t_y, t_z, 0) \\ P &= (p_x, p_y, p_z, 1) \\ P' &= (p_x + t_x,\ p_y + t_y,\ p_z + t_z,\ 1) \end{aligned}$$

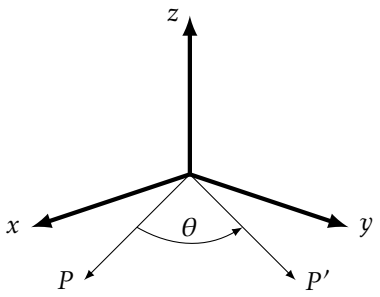


E' facile vedere che la matrice di trasformazione T t per le coordinate omogenee è:

$$T_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.18 Rotazione

Una rotazione di un angolo θ in senso **antiorario** (prima regola della mano destra) **intorno all'asse** z determina la seguente trasformazione di un punto P in P'.



$$\begin{aligned} p'_x &= p_x \cos(\theta) - p_y \sin(\theta) \\ p'_y &= p_x \sin(\theta) + p_y \cos(\theta) \\ p'_z &= p_z \end{aligned}$$

Si può facilmente dimostrare che per rotazioni intorno all'asse x e y si hanno le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} p'_y &= p_y \cos(\theta) - p_z \sin(\theta) \\ p'_z &= p_y \sin(\theta) - p_z \cos(\theta) \\ p'_x &= p_x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p'_z &= p_z \cos(\theta) - p_x \sin(\theta) \\ p'_x &= p_z \sin(\theta) - p_x \cos(\theta) \\ p'_y &= p_y \end{aligned}$$

Matrici che rappresentano le rotazioni rispetto agli assi coordinati:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservazioni:
Da notare che un *vettore viene trasformato da una rotazione* (a differenza delle traslazioni che lasciano i vettori inalterati). *Le matrici non commutano*.
Le rotazioni rispetto agli assi cartesiani non commutano; provare a ruotare un oggetto di 90 gradi prima rispetto all'asse x e poi rispetto all'asse y. Ripetete quindi l'operazione prima rispetto all'asse y e poi rispetto all'asse x. Risultato?
Da notare che le rotazioni lasciano inalterati i punti che si trovano sull'asse di rotazione.

Si può dimostrare che $R_x(\theta)^{-1} = R_x(-\theta)$ e similmente per gli altri assi.

Si può dimostrare che le matrici di rotazione date sopra sono **ortogonali**,
ad es. per l'asse x: $R_x(\theta)^{-1} = R_x(-\theta)^T$

La proprietà di ortogonalità è vera per ogni rotazione, non solo per quelle rispetto agli assi coordinati.
Tutte le rotazioni sono esprimibili con matrici.

4.19 Composizione di trasformazioni di matrici

Le trasformazioni espresse come matrici si compongono usando semplicemente l'algebra delle matrici. Date due trasformazioni rappresentate dalle matrici A e B, la composizione di A seguita da B sarà data dalla matrice BA.
Importante: notare l'ordine delle matrici; siccome si applica la matrice risultante a sinistra del vettore delle coordinate omogenee, la trasformazione che viene effettuata per prima va a destra. La composizione di trasformazione si estende immediatamente al caso di piu di due matrici: $T = T_n \dots T_1$

4.20 Non commutatività

Esempio: data una traslazione lungo il vettore $\boldsymbol{t}$ ed una rotazione di un angolo lungo l'asse $\boldsymbol{z}$, si ottiene un risultato diverso effettuando prima la rotazione e poi la traslazione o viceversa.

Per rendersene conto basta guardare come viene trasformato nei due casi un punto che in partenza si trova nell'origine.