Università degli Studi di Verona

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA
Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche

Sistemi Dinamici

Riassunto dei principali argomenti

Autore:
Danzi Matteo
Matricola VR424987

Anno Accademico 2017/2018

Indice

1 Introduzione

1.1 Sistema

Definizione 1.1. Un sistema è un ente fisico, tipicamente formato da diverse componenti tra loro interagenti, che risponde a sollecitazioni esterne producendo un determinato comportamento.

Esempio 1.1. Un circuito elettrico costituito da componenti quali resistori, capacitori, induttori, diodi, generatori di corrente e tensione, ecc., costituisce un semplice esempio di sistema dinamico. Il comportamento del sistema può venire descritto dal valore dei segnali di tensione e di corrente nei rami del circuito. Le sollecitazioni che agiscono sul sistema sono le tensioni e le correnti applicate dai generatori, che possono essere imposte dall'esterno.

1.2 Descrizione ingresso-uscita

Le grandezze alla base di una descrizione IU sono le *cause esterne* al sistema e gli *effetti*. Le cause esterne sono delle grandezze che si generano al di fuori del sistema; la loro evoluzione influenza il comportamento del sistema ma non dipende da esso. Gli effetti invece sono delle grandezze la cui evoluzione dipende dalle cause esterne al sistema e dalla natura del sistema stesso. Di solito si usa la convenzione di definire come *ingressi* al sistema le cause esterne, e come *uscite* gli effetti. In generale su un sistema possono agire più ingressi così come più di una possono essere le grandezze in uscita.
La classica rappresentazione grafica di un sistema per il quale siano stati individuati ingressi e uscite è quella mostrata in **Fig. 1.** dove può venire considerato come un operatore che assegna uno specifico andamento alle grandezze in uscita in corrispondenza ad ogni possibile andamento degli ingressi.

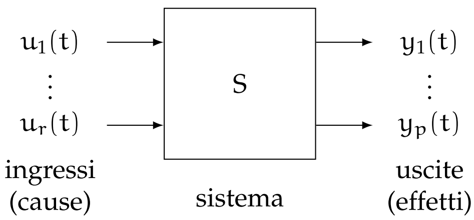

Fig. 1. Descrizione in ingresso-uscita

Di solito su usa la convenzione di indicare con

$$u(t) = \left[\, u_1(t) \ \ldots \ u_r(t) \,\right]^T \in \mathbb{R}^r$$

il vettore degli ingressi e con

$$y(t) = \left[\, y_1(t) \ \ldots \ y_p(t) \,\right]^T \in \mathbb{R}^p$$

il vettore delle uscite.

1.3 Descrizione in variabili di stato

È facile rendersi conto che in generale l'uscita di un sistema in un certo istante di tempo non dipende dal solo ingresso al tempo, ma dipende anche dall'evoluzione precedente del sistema.

Di questo fatto è possibile tenere conto introducendo una grandezza intermedia tra ingressi e uscite, chiamata *stato* del sistema. Lo stato del sistema gode della proprietà di concentrare in sè l'informazione sul passato e sul presente del sistema. Così come le grandezze di ingresso e uscita, anche lo stato è in generale una grandezza vettoriale e viene indicato mediante un vettore di stato

$$x(t) = \left[\, x_1(t) \ \ldots \ x_n(t) \,\right]^T \in \mathbb{R}^n$$

dove il numero di componenti del vettore di stato si indica con e viene detto *ordine* del sistema.

Definizione 1.2. Lo stato di un sistema all'istante di tempo è la grandezza che contiene l'informazione necessaria per determinare univocamente l'andamento dell'uscita $y(t)$, per ogni $t \geqslant t_0$, sulla base della conoscenza dell'andamento dell'ingresso $u(t)$, per $t \geqslant t_0$ e appunto dello stato in t_0.

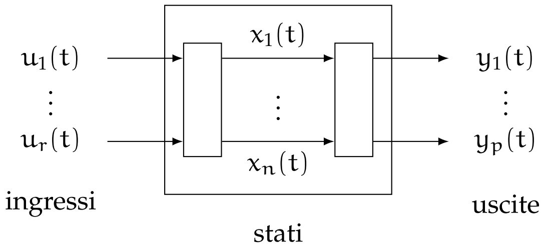

Fig. 2. Descrizione in variabili di stato

2 Modello matematico di un sistema

L'obiettivo dell'Analisi dei Sistemi consiste nel studiare il legame esistente tra gli ingressi e le uscite di un sistema e/o tra gli stati, gli ingressi e le uscite del sistema. In altri termini, risolvere un problema di analisi significa capire, dati certi segnali in ingresso al sistema, come evolveranno gli stati e le uscite di tale sistema.
Questo rende necessaria la definizione di un modello matematico che descriva in maniera quantitativa il comportamento del sistema allo studio, ossia fornisca una descrizione matematica esatta del legame tra ingressi (stati) e uscite.
A seconda del tipo di descrizione che si vuole dare al sistema (IU o VS) è necessario formulare due diversi tipi di modello.

2.1 Modello ingresso-uscita

Il modello IU per un sistema MIMO, ossia un sistema con p uscite e r ingressi, è espresso mediante p equazioni differenziali del tipo:

$$\begin{cases} h_1 = \left(\underbrace{y_1(t), \dots, y_1^{(n_1)}(t)}_{\text{uscita } 1}, \underbrace{u_1(t), \dots, u_1^{(m_{1,1})}(t)}_{\text{ingresso } 1}, \dots, \underbrace{u_r(t), \dots, u_r^{(m_{1,r})}(t)}_{\text{ingresso } r}, t \right) = 0 \\ h_2 = \left(\underbrace{y_2(t), \dots, y_2^{(n_2)}(t)}_{\text{uscita } 2}, \underbrace{u_1(t), \dots, u_1^{(m_{2,1})}(t)}_{\text{ingresso } 1}, \dots, \underbrace{u_r(t), \dots, u_r^{(m_{2,r})}(t)}_{\text{ingresso } r}, t \right) = 0 \\ \quad \vdots \\ h_p = \left(\underbrace{y_p(t), \dots, y_p^{(n_p)}(t)}_{\text{uscita } p}, \underbrace{u_1(t), \dots, u_1^{(m_{p,1})}(t)}_{\text{ingresso } 1}, \dots, \underbrace{u_r(t), \dots, u_r^{(m_{p,r})}(t)}_{\text{ingresso } r}, t \right) = 0 \end{cases}$$

dove:

- $h_i,\ i = 1, \dots, p$ sono funzioni di più parametri che dipendono dal particolare sistema allo studio,
- n_i è il grado massimo di derivazione della i-esima componente dell'uscita $y_i(t)$,
- m_i è il grado massimo di derivazione della i-esima componente dell'ingresso $u_i(t)$.

2.2 Modello in variabili di stato

Il modello in VS per un sistema MIMO con r ingressi e p uscite ha invece una struttura del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \\ \\ y_1(t) = g_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \\ \qquad \vdots \\ y_p(t) = g_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \end{cases}$$

che riscritto in forma matriciale diviene

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \end{cases}$$

L'equazione di stato è pertanto un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine, a prescindere dal fatto che il sistema sia SISO o MIMO. La *trasformazione in uscita* è invece una equazione algebrica, scalare o vettoriale a seconda del numero delle variabili in uscita. La rappresentazione schematica che si può dare di un modello in VS è pertanto quella riportata in **Fig. 3.**

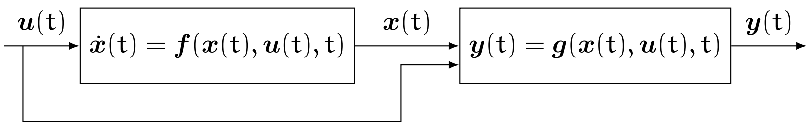

Fig. 3. Rappresentazione schematica di un modello in variabili di stato

3 Proprietà dei sistemi

3.1 Sistemi dinamici o istantanei

La prima importante distinzione che si può fare è tra sistemi istantanei e sistemi dinamici.

Definizione 3.1. Un sistema è detto

- *Istantaneo*: se il valore $\boldsymbol{y}(t)$ assunto dall'uscita al tempo t dipende solo dal valore $\boldsymbol{u}(t)$ assunto dall'ingresso al tempo t;
- *Dinamico*: in caso contrario.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema MIMO con r ingressi e p uscite sia istantaneo è che il legame **IU** sia espresso da un insieme di equazioni della forma:

$$\begin{cases} h_1(y_1(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t), t) = 0 \\ h_2(y_2(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t), t) = 0 \\ \vdots \\ h_p(y_p(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t), t) = 0. \end{cases}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia istantaneo è che il modello in **VS** abbia ordine zero ovvero che *non esista il vettore di stato*.

3.2 Sistemi lineari o non lineari

Una delle proprietà fondamentali di cui gode un'ampia classe di sistemi (o più precisamente di modelli) è la linearità. È proprio su questa classe di sistemi che focalizzeremo la nostra attenzione in questo volume. L'importanza dei sistemi lineari deriva da una serie di considerazioni pratiche.
La prima è che tali sistemi sono facili da studiare. Per essi sono state proposte efficienti tecniche di analisi e di sintesi, non più applicabili se la linearità viene meno. In secondo luogo, un modello lineare si rivela una buona approssimazione del comportamento di numerosi sistemi reali purchè questi siano sottoposti a piccoli ingressi.

Definizione 3.2. Un sistema è detto

- *Lineare*: se per esso vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Ciò significa che se il sistema risponde alla causa c_1 con l'effetto e_1 e alla causa c_2 con l'effetto e_2, allora la risposta del sistema alla causa $ac_1 + bc_2$ è $ae_1 + be_2$ qualunque siano i valori assunti dalle costanti a e b. Il seguente schema riassume tale proprietà:

$$\left.\begin{array}{l} \mathtt{causa}\ c_1 \rightsquigarrow \mathtt{effetto}\ e_1 \\ \mathtt{causa}\ c_2 \rightsquigarrow \mathtt{effetto}\ e_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathtt{causa}\ (ac_1 + bc_2) \rightsquigarrow \mathtt{effetto}\ (ae_1 + be_2);$$

- *Non lineare*: in caso contrario.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia lineare è che il legame **IU** sia espresso da una equazione differenziale lineare, cioè per un sistema SISO:

$$a_0(t)y(t) + a_1(t)\dot{y}(t) + \cdots + a_n(t)y^{(n)}(t) = b_0(t)u(t) + b_1(t)\dot{u}(t) + \cdots + b_m(t)u^{(m)}(t)$$

Un sistema MIMO invece è lineare se e solo se ciascuna delle funzioni h_i, $i = 1, \ldots, p$, esprime una combinazione lineare tra la i-esima componente dell'uscita e le sue n_i derivate e le variabili di ingresso con le loro derivate.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia lineare è che nel modello in **VS** sia l'equazione di stato che la trasformazione di uscita siano equazioni lineari:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{1,1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1,n}(t)x_n(t) + b_{1,1}u_1(t) + \cdots + b_{1,r}u_r(t) \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n,1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{n,n}(t)x_n(t) + b_{n,1}u_1(t) + \cdots + b_{n,r}u_r(t) \\ \\ y_1(t) = c_{1,1}(t)x_1(t) + \cdots + c_{1,n}(t)x_n(t) + d_{1,1}u_1(t) + \cdots + d_{1,r}u_r(t) \\ \quad\vdots \\ y_p(t) = c_{p,1}(t)x_1(t) + \cdots + c_{p,n}(t)x_n(t) + d_{p,1}u_1(t) + \cdots + d_{p,r}u_r(t) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

dove

$\boldsymbol{A}(t) = \{a_{i,j}(t)\}$ matrice $n \times n$; $\boldsymbol{B}(t) = \{b_{i,j}(t)\}$ matrice $n \times r$;
$\boldsymbol{C}(t) = \{c_{i,j}(t)\}$ matrice $p \times n$; $\boldsymbol{D}(t) = \{d_{i,j}(t)\}$ matrice $p \times r$;

3.3 Tempo-invarianza

Un'altra importante proprietà di cui gode un'ampia classe di sistemi è la *tempo-invarianza* o stazionarietà. In particolare, in questo testo ci occuperemo proprio dell'analisi dei sistemi lineari e stazionari.

Definizione 3.3. Un sistema è detto

- *Tempo-invariante*: se per esso vale il principio di traslazione causa-effetto nel tempo, cioè se il sistema risponde sempre con lo stesso effetto ad una data causa, a prescindere dall'istante di tempo in cui tale causa agisca sul sistema.
  Il seguente schema riassume tale proprietà:

$$\text{causa } c(t) \rightsquigarrow \text{ effetto } e(t) \implies \text{causa } c(t-T) \rightsquigarrow \text{ effetto } e(t-T);$$

- *Tempo-variante*: in caso contrario.

La **Fig. 4.** mostra il comportamento tipico di un sistema lineare sollecitato dalla stessa causa applicata in due diversi intervalli di tempo, ossia a partire da $t = 0$ e a partire da $t = T$: nei due casi l'effetto risultante è analogo ma ha semplicemente origine da istanti di tempo che differiscono tra di loro proprio di una quantità pari a T.

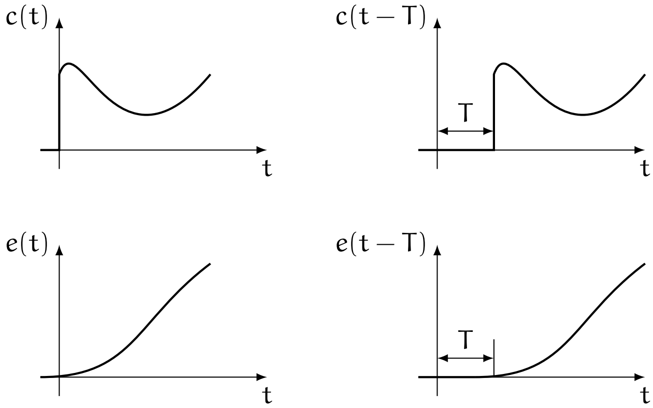

Fig. 4. Traslazione causa-effetto nel tempo

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia stazionario è che il legame **IU** non dipenda esplicitamente dal tempo, cioè per un sistema SISO:

$$h\left(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(m)}(t)\right) = 0$$

che nel caso dei sistemi lineari si riduce a una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$a_0 y(t) + a_1 \dot{y}(t) + \dots + a_n y^{(n)}(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \dots + b_n u^{(m)}(t).$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia stazionario è che nel modello in **VS** l'equazione di stato e la trasformazione di uscita non dipendano esplicitamente dal tempo:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \end{cases}$$

che nel caso dei sistemi lineari si riduce a

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ sono matrici costanti.

4 Analisi nel dominio del tempo delle rappresentazioni in variabili di stato

Un sistema lineare e stazionario di ordine n, con r ingressi e p uscite, ha la seguente rappresentazione in VS:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

Il problema fondamentale dell'analisi dei sistemi per un tale sistema consiste nel determinare l'andamento dello stato $\boldsymbol{x}(t)$ e dell'uscita $\boldsymbol{y}(t)$ per $t \geqslant t_0$ noto:

- il valore dello stato iniziale $\boldsymbol{x}(t_0)$;
- l'andamento dell'ingresso $\boldsymbol{u}(t)$ per $t \geqslant t_0$.

4.1 Matrice di transizione di stato

Data una matrice quadrata $\boldsymbol{A}$ il suo esponenziale è la matrice

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^2}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!}$$

La matrice di transizione dello stato $e^{\boldsymbol{A}}$ è una particolare matrice esponenziale i cui elementi sono funzioni del tempo di dimensione $n \times n$ e anche $\boldsymbol{A}$ è $n \times n$

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!}$$

Se $\boldsymbol{A}$ è una matrice **diagonale** di dimensione $n \times n$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \text{vale} \qquad e^{\boldsymbol{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

4.2 Sviluppo di Sylvester

Ci si pone ora il problema di determinare l'espressione analitica della matrice di transizione dello stato $e^{\boldsymbol{A}t}$ senza dover necessariamente calcolare la serie infinita che la definisce. Tale procedura si basa sullo sviluppo di Sylvester, esiste una seconda procedura, basata sul passaggio alla forma diagonale o alla forma di Jordan e una terza procedura, basata sull'uso delle trasformate di Laplace.

Definizione 4.1. Se $\boldsymbol{A}$ è una matrice di dimensione $n \times n$, la corrispondente matrice di transizione dello stato $e^{\boldsymbol{A}t}$ può essere scritta come:

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(t)\boldsymbol{A}^i = \beta_0(t)\boldsymbol{I} + \beta_1(t)\boldsymbol{A} + \cdots + \beta_{n-1}(t)\boldsymbol{A}^{n-1}$$

dove i coefficienti dello sviluppo $\beta_i(t)$ sono opportune funzioni scalari nel tempo.

I coefficienti dello sviluppo di Sylvester possono venire determinati risolvendo un sistema di equazioni lineari. Esistono sostanzialmente tre diversi casi che vengono discussi di seguito.

4.2.1 Autovalori di molteplicità unitaria

Se la matrice $\boldsymbol{A}$ ha autovalori tutti distinti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, le n funzioni incognite $\beta_i(t)$ si ricavano risolvendo il seguente sistema di n equazioni (tante equazioni quanti sono gli autovalori):

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \lambda_1\beta_1(t) + \lambda_1^2\beta_2(t) + \cdots + \lambda_1^{n-1}\beta_{n-1}(t) = e^{\lambda_1 t} \\ \beta_0(t) + \lambda_2\beta_1(t) + \lambda_2^2\beta_2(t) + \cdots + \lambda_2^{n-1}\beta_{n-1}(t) = e^{\lambda_2 t} \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ \beta_0(t) + \lambda_n\beta_1(t) + \lambda_n^2\beta_2(t) + \cdots + \lambda_n^{n-1}\beta_{n-1}(t) = e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

ovvero risolvendo il sistema di equazioni lineari

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\eta}$$

dove

- $\beta = \begin{bmatrix} \beta_0(t) & \beta_1(t) & \cdots & \beta_{n-1}(t) \end{bmatrix}^T$ è il vettore delle incognite
- La matrice dei coefficienti vale
$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$
- $\eta = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}^T$ è il vettore dei termini noti.

Viene detta **modo della matrice $\boldsymbol{A}$** associato all'autovalore λ la generica componente $e^{\lambda t}$ (una funzione nel tempo) del vettore $\boldsymbol{\eta}$.

4.2.2 Autovalori di molteplicità non unitaria

Se la matrice $\boldsymbol{A}$ ha autovlori di molteplicità non unitaria, si costruisce un sistema in cui ad ogni autovalore λ di molteplicità ν corrispondono ν equazioni della forma:

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \lambda\beta_1(t) + \cdots + \lambda^{n-1}\beta_{n-1}(t) = e^{\lambda t} \\ \dfrac{d}{d\lambda}\left(\beta_0(t) + \lambda\beta_1(t) + \cdots + \lambda^{n-1}\beta_{n-1}(t)\right) = \dfrac{d}{d\lambda}e^{\lambda t} \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{d^{\nu-1}}{d\lambda^{\nu-1}}\left(\beta_0(t) + \lambda\beta_1(t) + \cdots + \lambda^{n-1}\beta_{n-1}(t)\right) = \dfrac{d^{\nu-1}}{d\lambda^{\nu-1}}e^{\lambda t} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \lambda\beta_1(t) + \cdots + \lambda^{n-1}\beta_{n-1}(t) = e^{\lambda t} \\ \beta_1(t) + 2\lambda\beta_2(t) + \cdots + (n-1)\lambda^{n-2}\beta_{n-1}(t) = te^{\lambda t} \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{(\nu-1)!}{0!}\beta_{\nu-1}(t) + \cdots + \dfrac{(n-1)!}{(n-\nu)!}\lambda^{n-\nu}\beta_{n-1}(t) = t^{\nu-1}e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Anche in tal caso è possibile scrivere un sistema lineare in cui ad ogni autovalore λ i molteplicità ν sono associate ν righe della matrice dei coefficienti $\boldsymbol{V}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^{\nu-1} & \cdots & \lambda^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda & \cdots & (\nu-1)\lambda^{\nu-2} & \cdots & (n-1)\lambda^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (\nu-1)! & \cdots & \dfrac{(n-1)!}{(n-\nu)!}\lambda^{n-\nu} \end{bmatrix}$$

e ν righe del vettore dei termini noti $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & t^{\nu-1}e^{\lambda t} \end{bmatrix}^T$.

4.2.3 Autovalori complessi

Anche nel caso in cui vi siano autovalori complessi è possibile determinare i coefficienti dello sviluppo di Sylvester come sopra indicato.

4.3 Formula di Lagrange

4.3.1 Evoluzione libera e evoluzione forzata

4.3.2 Risposta impulsiva di una rappresentazione in VS

4.4 Trasformazione di similitudine

4.5 Diagonalizzazione

4.6 Forma di Jordan