## Semantica big-step

$$\textbf{(B-Num)}\ \frac{-}{\langle n, s\rangle \Downarrow n} \qquad \textbf{(B-Loc)}\ \frac{-}{\langle l, s\rangle \Downarrow s(l)} \qquad \textbf{(B-Skip)}\ \frac{-}{\langle \text{skip}, s\rangle \Downarrow s} \qquad \textbf{(B-Add)}\ \frac{\langle E_1, s\rangle \Downarrow n_1 \quad \langle E_2, s\rangle \Downarrow n_2}{\langle E_1 + E_2, s\rangle \Downarrow n_3} n_3 = \mathtt{add}(n_1, n_2)$$

$$\textbf{(B-Assign)}\ \frac{\langle E, s\rangle \Downarrow n}{\langle l := e, s\rangle \Downarrow s[l \mapsto n]} \qquad \textbf{(B-Assign.s)}\ \frac{\langle E, s\rangle \Downarrow n}{\langle l := e, s\rangle \Downarrow \langle \text{skip}, s[l \mapsto n]\rangle} \qquad \textbf{(B-Seq)}\ \frac{\langle C_1, s\rangle \Downarrow s_1 \quad \langle C_2, s_1\rangle \Downarrow s'}{\langle C_1; C_2, s\rangle \Downarrow s'} \qquad \textbf{(B-Seq.s)}\ \frac{\langle C_1, s\rangle \Downarrow \langle \text{skip}, s_1\rangle \quad \langle C_2, s_1\rangle \Downarrow \langle r, s'\rangle}{\langle C_1; C_2, s\rangle \Downarrow \langle r, s'\rangle}$$

$$\textbf{(B-If.T)}\ \frac{\langle B, s\rangle \Downarrow \mathtt{true} \quad \langle C_1, s\rangle \Downarrow s'}{\langle \text{if } B \text{ then } C_1 \text{ else } C_2, s\rangle \Downarrow s'} \qquad \textbf{(B-If.T)}\ \frac{\langle B, s\rangle \Downarrow \mathtt{true} \quad \langle C_1, s\rangle \Downarrow \langle r, s'\rangle}{\langle \text{if } B \text{ then } C_1 \text{ else } C_2, s\rangle \Downarrow \langle r, s'\rangle} \qquad \textbf{(B-If.F)}\ \frac{\langle B, s\rangle \Downarrow \mathtt{false} \quad \langle C_2, s\rangle \Downarrow s'}{\langle \text{if } B \text{ then } C_1 \text{ else } C_2, s\rangle \Downarrow s'} \qquad \textbf{(B-If.F)}\ \frac{\langle B, s\rangle \Downarrow \mathtt{false} \quad \langle C_2, s\rangle \Downarrow \langle r, s'\rangle}{\langle \text{if } B \text{ then } C_1 \text{ else } C_2, s\rangle \Downarrow \langle r, s\rangle}$$

$$\textbf{(B-While.T)}\ \frac{\langle B, s\rangle \Downarrow \mathtt{true} \quad \langle C, s\rangle \Downarrow s_1 \quad \langle \text{while } B \text{ do } C, s_1\rangle \Downarrow s'}{\langle \text{while } B \text{ do } C, s\rangle \Downarrow s'} \qquad \textbf{(B-While.F)}\ \frac{\langle B, s\rangle \Downarrow \mathtt{false}}{\langle \text{while } B \text{ do } C, s\rangle \Downarrow s} \qquad \textbf{(B-Do)}\ \frac{\langle B, s\rangle \Downarrow v_1 \quad \langle C, s\rangle \Downarrow v_2}{\langle \text{do } E \text{ return } C, s\rangle \Downarrow v_2}$$

$$\textbf{(B-While.UN)}\ \frac{\langle \text{if } B \text{ then } (C; \text{while } B \text{ do } C) \text{ else skip}, s\rangle \Downarrow r, s'}{\langle \text{while } B \text{ do } C, s\rangle \Downarrow r, s'} \qquad \textbf{(B-Await)}\ \frac{\langle B, s\rangle \Downarrow \mathtt{true}, s_1 \quad \langle C, s_1\rangle \rightarrow^* \langle \text{skip}, s'\rangle}{\langle \text{await } B \text{ protect } C \text{ end}, s\rangle \rightarrow \langle \text{skip}, s'\rangle}$$

$$\textbf{(B-Let-CBV)}\ \frac{P \Downarrow m \quad E\{^m/_x\} \Downarrow n}{\text{let } x = P \text{ in } E \Downarrow n} \qquad \textbf{(B-Let-CBN)}\ \frac{E\{^P/_x\} \Downarrow n}{\text{let } x = P \text{ in } E \Downarrow n} \qquad \textbf{(B-Fn)}\ \frac{-}{\langle \text{fn } x \colon T \Rightarrow e, s\rangle \rightarrow \langle \text{fn } x \colon T \Rightarrow e, s\rangle}$$

$$\textbf{(B-App-CBV)}\ \frac{E_1 \Downarrow \text{fn } x \colon T \Rightarrow E \qquad E\{^{E_2}/_x\} \Downarrow n}{E_1 E_2 \Downarrow n} \qquad \textbf{(B-App-CBN)}\ \frac{E_1 \Downarrow \text{fn } x \colon T \Rightarrow E \qquad E_2 \Downarrow v \qquad E\{^v/_x\} \Downarrow n}{E_1 E_2 \Downarrow n}$$

# Semantica small-step

## Grammatica delle espressioni

$$\text{op} \ ::= \ + \ | \ \geqslant$$

$$e \in \text{Exp} \ ::= n \ | \ b \ | \ e \text{ op } e \ | \ \text{if } e \text{ then } e \text{ else } e \ | \ \text{skip} \ | \ e; e \ | \ \text{while } e \text{ do } e \ | \ e_1 := e_2 \ | \ !e \ | \ \text{ref } e \ | \ l \ | \ \text{fn } x{:}\, T \ \Rightarrow \ e \ | \ e_1 e_2 \ | \ \text{let } x{:}\, T = e \text{ in } e \ | \ e \oplus e \ | \ e \| e \ | \ \text{await } e \text{ protect } e \text{ end} \ | \ \#\text{lab } e$$

## Regole per la semantica

$$\textbf{(S-Left)}\ \frac{E_1 \to E_1'}{E_1 + E_2 \to E_1' + E_2} \qquad \textbf{(S-N.Right)}\ \frac{E_2 \to E_2'}{n_1 + E_2 \to n_1 + E_2'} \qquad \textbf{(S-Add)}\ \frac{-}{n_1 + n_2 \to_{ch} n_3}\ n_3 = \mathsf{add}(n_1, n_2)$$

$$\textbf{(S-Left)}\ \frac{E_1 \to_{ch} E_1'}{E_1 + E_2 \to_{ch} E_1' + E_2} \qquad \textbf{(S-Right)}\ \frac{E_2 \to_{ch} E_2'}{E_1 + E_2 \to_{ch} E_1 + E_2'} \qquad \textbf{(op+)}\ \frac{-}{\langle n_1 + n_2, s\rangle \to \langle n, s\rangle}\ n = \mathsf{add}(n_1, n_2)$$

$$\textbf{(op-geq)}\ \frac{-}{\langle n_1 \geqslant n_2, s\rangle \to \langle b, s\rangle}\ b = \mathsf{geq}(n_1, n_2) \qquad \textbf{(op1)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \to \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 + e_2, s\rangle \to \langle e_1' + e_2, s'\rangle} \qquad \textbf{(op2)}\ \frac{\langle e_2, s\rangle \to \langle e_2', s'\rangle}{\langle v + e_2, s\rangle \to \langle v + e_2', s\rangle}$$

$$\textbf{(op1b)}\ \frac{\langle e_2, s\rangle \to \langle e_2', s'\rangle}{\langle e_1 + e_2, s\rangle \to \langle e_1 + e_2', s'\rangle} \qquad \textbf{(op2b)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \to \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 + v, s\rangle \to \langle e_1' + v', s'\rangle} \qquad \textbf{(deref1)}\ \frac{-}{\langle !l, s\rangle \to \langle v, s\rangle}\ \text{if } l \in \mathsf{dom}(s) \wedge s(l) = v$$

$$\textbf{(deref2)}\ \frac{\langle e, s\rangle \to \langle e', s'\rangle}{\langle !e, s\rangle \to \langle !e', s'\rangle} \qquad \textbf{(ref1)}\ \frac{-}{\langle \text{ref } v, s\rangle \to \langle l, s[l \mapsto v]\rangle}\ l \notin \mathsf{dom}(s) \qquad \textbf{(ref2)}\ \frac{\langle e, s\rangle \to \langle e', s'\rangle}{\langle \text{ref } e, s\rangle \to \langle \text{ref } e', s\rangle}$$

$$\textbf{(assign1)}\ \frac{-}{\langle l := v, s\rangle \to \langle \text{skip}, s[l \mapsto v]\rangle}\ \text{if } l \in \mathsf{dom}(s) \qquad \textbf{(assign2)}\ \frac{\langle e, s\rangle \to \langle e', s'\rangle}{\langle l := e, s\rangle \to \langle l := e', s\rangle} \qquad \textbf{(assign3)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \to \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 := e_2, s\rangle \to \langle e_1' := e_2, s'\rangle}$$

$$\textbf{(if-tt)}\ \frac{-}{\langle \text{if } \mathsf{true} \text{ then } e_1 \text{ else } e_2, s\rangle \to \langle e_1, s\rangle} \qquad \textbf{(if-ff)}\ \frac{-}{\langle \text{if } \mathsf{false} \text{ then } e_1 \text{ else } e_2, s\rangle \to \langle e_2, s\rangle} \qquad \textbf{(if)}\ \frac{\langle e, s\rangle \to \langle e', s'\rangle}{\langle \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2, s\rangle \to \langle \text{if } e' \text{ then } e_1 \text{ else } e_2, s\rangle}$$

$$\textbf{(while)}\ \frac{-}{\langle \text{while } e \text{ do } e_1, s\rangle \to \langle \text{if } e \text{ then } (e_1; \text{while } e \text{ do } e_1) \text{ else } \mathsf{skip}, s\rangle} \qquad \textbf{(assign1b)}\ \frac{-}{\langle l := n, s\rangle \to \langle n, s[l \mapsto n]\rangle}\ l \in \mathsf{dom}(s)$$

$$\textbf{(seq.skip)}\ \frac{-}{\langle \mathsf{skip}; e_2, s\rangle \to \langle e_2, s\rangle} \qquad \textbf{(seq)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \to \langle e_1', s\rangle}{\langle e_1; e_2, s\rangle \to \langle e_1'; e_2, s'\rangle} \qquad \textbf{(seq.skipb)}\ \frac{-}{\langle v; e_2, s\rangle \to \langle e_2, s\rangle}$$

$$\textbf{(record1)}\ \frac{\langle e_i, s\rangle \rightarrow \langle e_i', s'\rangle}{\langle \{\mathrm{lab}_1 = v_1, \ldots, \mathrm{lab}_i = e_i, \ldots, \mathrm{lab}_k = e_k\}, s\rangle \rightarrow \langle \{\mathrm{lab}_1 = v_1, \ldots, \mathrm{lab}_i = e_i', \ldots, \mathrm{lab}_k = e_k\}, s'\rangle}$$

$$\textbf{(record2)}\ \frac{-}{\langle \#\mathrm{lab}_i\ \{\mathrm{lab}_1 = v_1, \ldots, \mathrm{lab}_i = e_i, \ldots, \mathrm{lab}_k = e_k\}, s\rangle \rightarrow \langle v_i, s\rangle} \qquad \textbf{(record3)}\ \frac{\langle e, s\rangle \rightarrow \langle e', s'\rangle}{\langle \#\mathrm{lab}\ e, s\rangle \rightarrow \langle \#\mathrm{lab}\ e', s'\rangle}$$

$$\textbf{(par-L)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \rightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 \| e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_1' \| e_2, s'\rangle} \qquad \textbf{(par-R)}\ \frac{\langle e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_2', s'\rangle}{\langle e_1 \| e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_1 \| e_2', s'\rangle} \qquad \textbf{(end-L)}\ \frac{-}{\langle \mathrm{skip} \| e, s\rangle \rightarrow \langle e, s\rangle} \qquad \textbf{(end-R)}\ \frac{-}{\langle e \| \mathrm{skip}, s\rangle \rightarrow \langle e, s\rangle}$$

$$\textbf{(await)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \rightarrow^* \langle \mathrm{true}, s'\rangle \qquad \langle e_2, s'\rangle \rightarrow^* \langle \mathrm{skip}, s''\rangle}{\langle \mathrm{await}\ e_1\ \mathrm{protect}\ e_2\ \mathrm{end}, s\rangle \rightarrow \langle \mathrm{skip}, s''\rangle} \qquad \textbf{(ChoiceL)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \rightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 \oplus e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_1', s'\rangle} \qquad \textbf{(ChoiceR)}\ \frac{\langle e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_2', s'\rangle}{\langle e_1 \oplus e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_2', s'\rangle}$$

## Call-By-Value

$$\textbf{(CBV-app1)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \rightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_1' e_2, s'\rangle} \qquad \textbf{(CBV- app2)}\ \frac{\langle e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_2', s'\rangle}{\langle v e_2, s\rangle \rightarrow \langle v e_2', s'\rangle} \qquad \textbf{(CBV-fn)}\ \frac{-}{\langle (\mathsf{fn}\ x{:}\ \mathsf{T} \Rightarrow e) v, s\rangle \rightarrow \langle e\{^v/_x\}, s\rangle}$$

$$\textbf{(CBV-let1)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \rightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle \mathrm{let}\ x{:}\ \mathsf{T} = e_1\ \mathrm{in}\ e_2, s\rangle \rightarrow \langle \mathrm{let}\ x{:}\ \mathsf{T} = e_1'\ \mathrm{in}\ e_2, s'\rangle} \qquad \textbf{(CBV-let2)}\ \frac{-}{\langle \mathrm{let}\ x{:}\ \mathsf{T} = v\ \mathrm{in}\ e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_2\{^v/_x\}, s\rangle}$$

$$\textbf{(CBV-fix)}\ \frac{e \equiv\ \mathrm{fn}\ f{:}\ \mathsf{T}_1 \rightarrow \mathsf{T}_2\ \Rightarrow\ e_2}{\mathrm{fix}.e \rightarrow e(\mathrm{fn}\ x{:}\ \mathsf{T}_1 \Rightarrow\ (\mathrm{fix}.e)\ x)}$$

## Call-By-Name

$$\textbf{(CBN-app)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \rightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_1' e_2, s'\rangle} \qquad \textbf{(CBN-fn)}\ \frac{-}{\langle (\mathsf{fn}\ x{:}\ \mathsf{T} \Rightarrow e) e_2, s\rangle \rightarrow \langle e\{^{e_2}/_x\}, x\rangle}$$

$$\textbf{(CBN-let)}\ \frac{-}{\langle \mathrm{let}\ x{:}\ \mathsf{T} = e_1\ \mathrm{in}\ e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_2\{^{e_1}/_x\}, s\rangle}$$

$$\textbf{(CBN-fix)}\ \frac{-}{\mathrm{fix}.e \rightarrow e(\mathrm{fix}.e)}$$

## Grammatica dei tipi e type system

$$\mathsf{T} ::= \text{int} \mid \text{bool} \mid \text{unit} \mid \mathsf{T}_1 \to \mathsf{T}_2 \mid \mathsf{T}_1 + \mathsf{T}_2 \mid \mathsf{T}_1 * \mathsf{T}_2 \mid \text{ref } \mathsf{T} \mid \{lab_1 \colon \mathsf{T}_1, \dots, lab_k \colon \mathsf{T}_k\} \mid \text{proc}$$

$$\mathsf{T}_{\text{loc}} ::= \text{ref } \mathsf{T}$$

### Tipi primitivi e operatori

$$\textbf{(int)}\ \frac{-}{\Gamma \vdash n \colon \text{int}} \text{ for } n \in \mathbb{Z} \qquad \textbf{(bool)}\ \frac{-}{\Gamma \vdash b \colon \text{bool}} \text{ for } b \in \{true, false\}$$

$$\textbf{(op +)}\ \frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \text{int} \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon \text{int}}{\Gamma \vdash e_1 + e_2 \colon \text{int}} \qquad \textbf{(op *)}\ \frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \text{int} \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon \text{int}}{\Gamma \vdash e_1 * e_2 \colon \text{int}}$$

$$\textbf{(op or)}\ \frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \text{bool} \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon \text{bool}}{\Gamma \vdash e_1 \text{ or } e_2 \colon \text{bool}} \qquad \textbf{(op and)}\ \frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \text{bool} \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon \text{bool}}{\Gamma \vdash e_1 \text{ and } e_2 \colon \text{bool}}$$

$$\textbf{(op} \geqslant\textbf{)}\ \frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \text{int} \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon \text{int}}{\Gamma \vdash e_1 \geqslant e_2 \colon \text{bool}} \qquad \textbf{(skip)}\ \frac{-}{\Gamma \vdash skip \colon unit}$$

$$\textbf{(seq)}\ \frac{\Gamma \vdash e_1 \colon unit \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon \mathsf{T}}{\Gamma \vdash e_1; e_2 \colon \mathsf{T}} \qquad \textbf{(if)}\ \frac{\Gamma \colon e_1 \colon \text{bool} \quad \Gamma \vdash e_2 \colon \mathsf{T} \quad \Gamma \vdash e_3 \colon \mathsf{T}}{\Gamma \vdash \text{if } e_1 \text{ then } e_2 \text{ else } e_3 \colon \mathsf{T}}$$

$$\textbf{(while)}\ \frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \text{bool} \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon \mathsf{T}}{\Gamma \vdash \text{while } e_1 \text{ do } e_2 \colon \mathsf{T}} \qquad \textbf{(let)}\ \frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \mathsf{T} \qquad \Gamma, x \colon \mathsf{T} \vdash e_2 \colon \mathsf{T}'}{\Gamma \vdash \text{let } x \colon \mathsf{T} = e_1 \text{ in } e_2 \colon \mathsf{T}'}$$

$$\textbf{(T-fix)}\ \frac{\Gamma \vdash e \colon (\mathsf{T}_1 \to \mathsf{T}_2) \to (\mathsf{T}_1 \to \mathsf{T}_2)}{\Gamma \vdash \text{fix}.e \colon \mathsf{T}_1 \to \mathsf{T}_2}$$

### Referenze

$$\textbf{(ref)}\ \frac{\Gamma \vdash e \colon \mathsf{T}}{\Gamma \vdash \text{ref } e \colon \text{ref } \mathsf{T}} \qquad \textbf{(deref)}\ \frac{\Gamma \vdash e \colon \text{ref } \mathsf{T}}{\Gamma \vdash !e \colon \mathsf{T}}$$

$$\textbf{(assign)}\ \frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \text{ref } \mathsf{T} \quad \Gamma \vdash e_2 \colon \mathsf{T}}{\Gamma \vdash (e_1 := e_2) \colon \text{unit}} \qquad \textbf{(loc)}\ \frac{-}{\Gamma \vdash l \colon \text{ref } \mathsf{T}}\ \Gamma(l) = \text{ref } \mathsf{T}$$

### Funzioni

$$\textbf{(var)}\ \frac{-}{\Gamma \vdash x \colon \mathsf{T}} \text{ if } \Gamma(x) = \mathsf{T} \qquad \textbf{(fn)}\ \frac{\Gamma, x \colon \mathsf{T} \vdash e \colon \mathsf{T}'}{\Gamma \vdash (fn\ x \colon \mathsf{T} \Rightarrow e) \colon \mathsf{T} \to \mathsf{T}'}$$

$$\textbf{(app)}\ \frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \mathsf{T} \to \mathsf{T}' \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon \mathsf{T}}{\Gamma \vdash e_1 e_2 \colon \mathsf{T}'}$$

### Record

$$\textbf{(record)}\ \frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \mathsf{T}_1 \ \dots\ \Gamma \vdash e_k \colon \mathsf{T}_k}{\Gamma \vdash \{\text{lab}_1 = e_1, \dots, \text{lab}_k = e_k\} \colon \{\text{lab}_1 \colon \mathsf{T}_1, \dots, \text{lab}_k \colon \mathsf{T}_k\}}$$

$$\textbf{(recordproj)}\ \frac{\Gamma \vdash e \colon \{\text{lab}_1 \colon \mathsf{T}_1, \dots, \text{lab}_k \colon \mathsf{T}_k\}}{\Gamma \vdash \#\text{lab}_i\ e \colon \mathsf{T}_i}$$

### Concorrenza

$$\textbf{(T-sq1)}\ \frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \text{unit} \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon \text{unit}}{\Gamma \vdash e_1; e_2 \colon \text{unit}} \qquad \textbf{(T-sq2)}\ \frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \text{proc} \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon \text{proc}}{\Gamma \vdash e_1; e_2 \colon \text{proc}}$$

$$\textbf{(T-par)}\ \frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \mathsf{T}_1 \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon \mathsf{T}_2}{\Gamma \vdash e_1 \| e_2 \colon \text{proc}}\ \mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2 \in \{\text{unit}, \text{proc}\}$$

$$\textbf{(T-await)}\ \frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \text{bool} \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon \text{unit}}{\Gamma \vdash \text{await } e_1 \text{ protect } e_2 \text{ end} \colon \text{unit}} \qquad \textbf{(T-choice)}\ \frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \text{unit} \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon \text{unit}}{\Gamma \vdash e_1 \oplus e_2 \colon \text{unit}}$$

# Sottotipaggio

$$\textbf{(sub)}\,\frac{\Gamma \vdash e \colon \mathsf{T} \qquad \mathsf{T} <: \mathsf{T}'}{\Gamma \vdash e \colon \mathsf{T}'} \qquad \textbf{(s-refl)}\,\frac{-}{\mathsf{T} <: \mathsf{T}} \qquad \textbf{(s-trans)}\,\frac{\mathsf{T} <: \mathsf{T}' \qquad \mathsf{T}' <: \mathsf{T}''}{\mathsf{T} <: \mathsf{T}''}$$

## Sottotipaggio dei record

$$\textbf{(rec-perm)}\,\frac{\pi \text{ una permutazione di } 1, 2, \ldots, \mathrm{k}}{\{\mathrm{p}_1 \colon \mathsf{T}_1, \ldots, \mathrm{p}_\mathrm{k} \colon \mathsf{T}_\mathrm{k}\} <: \{\mathrm{p}_{\pi(1)} \colon \mathsf{T}_{\pi(1)}, \ldots, \mathrm{p}_{\pi(\mathrm{k})} \colon \mathsf{T}_{\pi(\mathrm{k})}\}} \qquad \textbf{(rec-width)}\,\frac{-}{\{\mathrm{p}_1 \colon \mathsf{T}_1, \ldots, \mathrm{p}_\mathrm{k} \colon \mathsf{T}_\mathrm{k}, \mathrm{p}_{\mathrm{k}+1} \colon \mathsf{T}_{\mathrm{k}+1}, \ldots, \mathrm{p}_z \colon \mathsf{T}_z\} <: \{\mathrm{p}_1 \colon \mathsf{T}_1, \ldots, \mathrm{p}_\mathrm{k} \colon \mathsf{T}_\mathrm{k}\}}$$

$$\textbf{(rec-depth)}\,\frac{\mathsf{T}_1 <: \mathsf{T}_1' \ \ldots \ \mathsf{T}_\mathrm{k} <: \mathsf{T}_\mathrm{k}'}{\{\mathrm{p}_1 \colon \mathsf{T}_1, \ldots, \mathrm{p}_\mathrm{k} \colon \mathsf{T}_\mathrm{k}\} <: \{\mathrm{p}_1 \colon \mathsf{T}_1', \ldots, \mathrm{p}_\mathrm{k} \colon \mathsf{T}_\mathrm{k}'\}}$$

## Sottotipaggio delle funzioni

$$\textbf{(fun-sub)}\,\frac{\mathsf{T}_1 \colon > \mathsf{T}_1' \qquad \mathsf{T}_2 <: \mathsf{T}_2'}{\mathsf{T}_1 \to \mathsf{T}_2 <: \mathsf{T}_1' \to \mathsf{T}_2'}$$

## Sottotipaggio somma e prodotto

$$\textbf{(prod-sub)}\,\frac{\mathsf{T}_1 <: \mathsf{T}_1' \qquad \mathsf{T}_2 <: \mathsf{T}_2'}{\mathsf{T}_1 * \mathsf{T}_2 <: \mathsf{T}_1' * \mathsf{T}_2'} \qquad \textbf{(sum-sub)}\,\frac{\mathsf{T}_1 <: \mathsf{T}_1' \qquad \mathsf{T}_2 <: \mathsf{T}_2'}{\mathsf{T}_1 + \mathsf{T}_2 <: \mathsf{T}_1' + \mathsf{T}_2'}$$

# Progress

**Teorema 1** (Progress)**.** *Sia* $e$ *chiusa,* $\Gamma \vdash e\colon T$ *e* $\mathrm{dom}(\Gamma) \subseteq \mathrm{dom}(s)$ *allora o* $e$ *è un valore oppure* $\exists e', s'$ *t.c.* $\langle e, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e', s'\rangle$.

**Proof 1.** Sia $\phi$ una relazione ternaria definita come segue: $\phi(\Gamma, e, T) \overset{def}{=} \forall s.\mathrm{dom}(\Gamma) \subseteq \mathrm{dom}(s) \Rightarrow \mathrm{value}(e) \vee (\exists e', s' \text{ t.c. } \langle e, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e', s'\rangle)$

Proviamo che per ogni $\Gamma, e, T$, se $\Gamma \vdash e\colon T$ allora $\phi(\Gamma, e, T)$ usando *rule induction* su $\Gamma \vdash e\colon T$.

Provare la progress sul seguente linguaggio:

$$E ::= x \mid n \mid E_1 + E_2 \mid E_1; E_2; \mid \text{fn } x\colon T \Rightarrow E \mid EE \mid \text{while } E \text{ do } E \mid E_1 := E_2 \mid$$

**Proof 2** (by *rule induction* su come ho tipato $E$ ($\Gamma \vdash E\colon T$))**.**

**Caso Base 1** (int)**.**

$$\textbf{(int)}\frac{-}{\Gamma \vdash n\colon \text{int}} \text{ for } n \in \mathbb{Z}$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E\colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(int)**. Posso concludere che $E \equiv n$, per $n \in \mathbb{Z}$, e $T \equiv$ int. Ne consegue che $\phi(\Gamma, E, T) =$ true perché value($n$) = true.

**Caso Base 2** (bool)**.**

$$\textbf{(bool)}\frac{-}{\Gamma \vdash b\colon \text{bool}} \text{ for } b \in \{\mathtt{true}, \mathtt{false}\}$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E\colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(bool)**.
Posso concludere che $E \equiv b$, per $b \in \{\text{true}, \text{false}\}$, e $T \equiv$ bool.
Ne consegue che $\phi(\Gamma, E, T) =$ true perché value($b$) = true.

**Caso Base 3** (skip)**.**

$$\textbf{(skip)}\frac{-}{\Gamma \vdash \text{skip}\colon \mathtt{unit}}$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E\colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(skip)**. Posso concludere che $E \equiv$ skip, $T \equiv \mathtt{unit}$. Ne consegue che $\phi(\Gamma, \text{skip}, \mathtt{unit}) =$ true perchè value(skip) = true.

**Caso Base 4** (var)**.**

$$\textbf{(var)}\frac{-}{\Gamma \vdash x\colon T} \text{ if } \Gamma(x) = T$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E\colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(var)**. Posso concludere che $E \equiv x$, e $T \equiv T_1 \to T_2$ oppure $T \equiv$ int. Posso dire che $E$ non è chiusa perché $x \in FV(E)$. Dato che la premessa della dimostrazione è falsa posso dedurre che $\phi(\Gamma, E, T) =$ true.

**Caso induttivo 1** (fn)**.**

$$\textbf{(fn)}\frac{\Gamma, x\colon T \vdash e\colon T'}{\Gamma \vdash (\text{fn } x\colon T \Rightarrow e)\colon T \to T'}$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E\colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(fn)**. Posso concludere che $E \equiv \text{fn } x\colon T \Rightarrow e$ e $T \equiv T \to T'$. Ne consegue che $\phi(\Gamma, E, T) =$ true perché value($\text{fn } x\colon T \Rightarrow e$) = true.

**Caso induttivo 2** (op +)**.**

$$\textbf{(op +)}\frac{\Gamma \vdash e_1\colon \text{int} \qquad \Gamma \vdash e_2\colon \text{int}}{\Gamma \vdash e_1 + e_2\colon \text{int}}$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E\colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(op +)**. Posso concludere che $E \equiv e_1 + e_2$, $T \equiv$ int, $\Gamma \vdash e_1\colon$ int e $\Gamma \vdash e_2\colon$ int. Per **ipotesi induttiva** ho che $\phi(\Gamma, e_1, \mathtt{int}) =$ true e $\phi(\Gamma, e_2, \mathtt{int}) =$ true. Perciò contraddistinguo tre casi:

1. $$\textbf{(op1)}\frac{\langle e_1, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 + e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1' + e_2, s'\rangle}$$

   Se value($e_1$) = false allora $\langle e_1, s\rangle$ fa un passo e quindi, applicando la regola della semantica small-step **(op1)**, abbiamo che $\phi(\Gamma, e_1 + e_2, \text{int}) =$ true;

2. $$\textbf{(op+)}\frac{-}{\langle n_1 + n_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle n, s\rangle} n = \mathtt{add}(n_1, n_2)$$

   Se value($e_1$) = true $\wedge$ value($e_2$) = true allora, applicando la regola della semantica small-step **(op +)**, abbiamo che $\phi(\Gamma, e_1 + e_2, \text{int}) =$ true;

3. $$\textbf{(op2)}\frac{\langle e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_2', s'\rangle}{\langle v + e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle v + e_2', s\rangle}$$

   Se value($e_1$) = true $\wedge$ value($e_2$) = false allora, applicando la regola della semantica small-step **(op2)**, abbiamo che $\phi(\Gamma, e_1 + e_2, \text{int}) =$ true.

**Caso induttivo 3** (seq)**.**

$$\textbf{(seq)}\frac{\Gamma \vdash e_1\colon \mathtt{unit} \qquad \Gamma \vdash e_2\colon T}{\Gamma \vdash e_1; e_2\colon T}$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E\colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(seq)**. Posso concludere che $E \equiv e_1; e_2$, $T \equiv$ unit, $\Gamma \vdash e_1\colon$ unit e $\Gamma \vdash e_2\colon$ unit. Per **ipotesi induttiva** ho che $\phi(\Gamma, e_1, \mathtt{unit}) =$ true e $\phi(\Gamma, e_2, \mathtt{unit}) =$ true. Perciò contraddistinguo due casi:

1.

$$\textbf{(seq)}\frac{\langle e_1, s\rangle \rightharpoondown \langle e_1', s\rangle}{\langle e_1; e_2, s\rangle \rightharpoondown \langle e_1'; e_2, s'\rangle}$$

Se value($e_1$) = false allora $\langle e_1, s\rangle$ fa un passo e quindi, applicando la regola della semantica small-step **(seq)**, abbiamo che $\phi(\Gamma, e_1; e_2, \text{unit}) = \text{true}$;

2.

$$\textbf{(seq.skip)}\frac{-}{\langle \mathsf{skip}; e_2, s\rangle \rightharpoondown \langle e_2, s\rangle}$$

Se value($e_1$) = true allora, applicando la regola della semantica small-step **(seq.skip)**, abbiamo che $\phi(\Gamma, e_1; e_2, \text{unit}) = \text{true}$.

**Caso induttivo 4** (while)**.**

$$\textbf{(while)}\frac{\Gamma \vdash e_1\colon \text{bool} \qquad \Gamma \vdash e_2\colon T}{\Gamma \vdash \text{while } e_1 \text{ do } e_2\colon T}$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E\colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(while)**. Posso concludere che $E \equiv \text{while } e_1 \text{ do } e_2$, per qualche $e_1, e_2$ tali che $\Gamma \vdash e_1\colon \text{bool}$ e $\Gamma \vdash e_2\colon T$, e $T \equiv \mathsf{unit}$. Ne consegue che $\phi(\Gamma, E, T) = \text{true}$ perché applico la regola di riscrittura, applicando la regola semantica **(while)** e quindi faccio un passo: $\langle e, s\rangle \equiv \langle \text{while } e_1 \text{ do } e_2\rangle \rightharpoondown \langle \text{if } e \text{ then } (e_1; \text{while } e \text{ do } e_1) \text{ else } \mathsf{skip}\rangle \equiv \langle e', s'\rangle$.

**Caso induttivo 5** (assign)**.**

$$\textbf{(t-assign)}\frac{\Gamma \vdash e_1\colon \text{int}}{\Gamma \vdash l\colon = e_1\colon \mathsf{unit}}\text{if}\Gamma(l) = \mathsf{intref}$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E\colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(T-assign)**. Posso concludere che $E \equiv l\colon = e_1$ per qualche locazione $l$ e qualche programma $e_1$ tali che $\Gamma \vdash e_1\colon \text{int}$, e $T \equiv \text{unit}$ e $\Gamma(l) = \mathsf{intref}$. Ne consegue che, per il fatto che l'albero di derivazione di $\Gamma \vdash e_1\colon \text{int}$ ha profondità minore di $\Gamma \vdash E\colon T$, per ipotesi induttiva $\phi(\Gamma, e_1, \mathsf{unit}) = \text{true}$. Contraddistinguo quindi due casi:

1.

$$\textbf{(assign1)}\frac{-}{\langle l := v, s\rangle \rightharpoondown \langle \text{skip}, s[l \mapsto v]\rangle}\text{if } l \in \mathsf{dom}(s)$$

Se value($e_1$) = true abbiamo che $e_1 = n$ per qualche $n$, $E \equiv l\colon = n$ per qualche $l$. Dal fatto che $\{l\} \subseteq \text{dom}(\Gamma) \subseteq \text{dom}(s)$, derivo che $s$ è definito in $l$. Posso quindi applicare la regola semantica **(assign1)** e quindi ho che $\phi(\Gamma, E, T) = \text{true}$ perché faccio un passo: $\langle e, s\rangle \equiv \langle l\colon = n, s\rangle \rightharpoondown \langle \text{skip}, s[l \mapsto n]\rangle \equiv \langle e', s'\rangle$.

2.

$$\textbf{(assign2)}\frac{\langle e_1, s\rangle \rightharpoondown \langle e_1', s'\rangle}{\langle l := e_1, s\rangle \rightharpoondown \langle l := e_1', s\rangle}$$

Se value($e_1$) = false abbiamo che $E \equiv l\colon = e_1$ per qualche $l$. Quindi $\forall s.\ \text{dom}(\Gamma) \subseteq \text{dom}(s)$ $\langle e_1, s\rangle \rightharpoondown \langle e_1', s'\rangle$ per qualche $e_1'$. Posso quindi applicare la regola semantica **(assign2)** e quindi ho che $\phi(\Gamma, E, T) = \text{true}$ perché faccio un passo: $\langle e, s\rangle \equiv \langle l\colon = e_1, s\rangle \rightharpoondown \langle l\colon = e_1', s'\rangle \equiv \langle e', s'\rangle$

# Type Preservation

**Teorema 1** (Type Preservation)**.** *Sia* $e$ *chiusa e* $\Gamma \vdash e\colon T$ *e* $dom(\Gamma) \subseteq dom(s)$ *e* $\langle e, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e', s'\rangle$ *allora* $\Gamma \vdash e'\colon T$ *e* $e'$ *è chiusa e* $dom(\Gamma) \subseteq dom(s')$.

Provare la type preservation sul seguente linguaggio:

$$E :: = x \mid n \mid E_1 + E_2 \mid \text{fn } x\colon T \Rightarrow E \mid EE$$

**Proof 1** (by *rule induction* su come ho derivato $E \to F$)**.**

**Caso Base 1** (S-Add)**.**

$$\textbf{(S-Add)}\frac{-}{\langle n_1 + n_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle n_3, s\rangle} n_3 = add(n_1, n_2)$$

Supponiamo di aver derivato $E \to F$ utilizzando la regola semantica **(S-Add)**. Ne consegue che $E \equiv n_1 + n_2$ e $F \equiv n_3$. Se $\Gamma \vdash E\colon \text{int}$ sarò stato in grado di tipare $E$ utilizzando la regola di tipaggio **(op +)**. Di conseguenza ho tipato $n_1$ e $n_2$: $\Gamma \vdash n_1\colon \text{int}$, $\Gamma \vdash n_2\colon \text{int}$. Ne consegue che $\Gamma \vdash n_3\colon \text{int}$ come richiesto.

**Caso Base 2** (CBV-fn)**.**

$$\textbf{(CBV-fn)}\frac{-}{\langle (\text{fn } x\colon T \Rightarrow e)v, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e\{v/x\}, s\rangle}$$

Supponiamo di aver derivato $E \to F$ utilizzando la regola semantica **(CBV-fn)**. Ne consegue che $E \equiv (\text{fn } x\colon T \Rightarrow e)v$ e $F \equiv e\{v/x\}$. Se $\Gamma \vdash E\colon T$ sarò stato in grado di tipare $E$ utilizzando la regola di tipaggio **(app)**. In tal caso avrò dedotto che $\Gamma \vdash v\colon T'$ e $\Gamma \vdash \text{fn } x\colon T' \Rightarrow e\colon T \to T'$. Di conseguenza sarò stato in grado di tipare il corpo di $e$: $\Gamma, x\colon T' \vdash e\colon T$. Dunque per il *substitution lemma* avrò che $\Gamma \vdash e\{v/x\} \equiv F\colon T$ come richiesto.

**Caso induttivo 1** (S-Left)**.**

$$\textbf{(S-Left)}\frac{E_1 \twoheadrightarrow E_1'}{E_1 + E_2 \twoheadrightarrow E_1' + E_2}$$

Supponiamo di aver derivato $E \to F$ utilizzando la regola semantica **(S-Left)**. Ne consegue che $E \equiv E_1 + E_2$ e $F \equiv E_1' + E_2$. Se $\Gamma \vdash E\colon T$ allora vuol dire che sarò stato in grado di tipare $E$ usando la regola di tipaggio **(op +)**. In tal caso avrò dedotto che $T \equiv \text{int}$, $\Gamma \vdash E_1\colon \text{int}$, $\Gamma \vdash E_2\colon \text{int}$. Per ipotesi induttiva da $E_1 \to E_1'$ concludo che $\Gamma \vdash E_1'\colon \text{int}$. Ma allora applicando la regola di tipaggio **(op +)** derivo che $\Gamma \vdash E_1' + E_2 \equiv F\colon \text{int}$ come richiesto.

**Caso induttivo 2** (S-Right)**.**

$$\textbf{(S-Right)}\frac{E_2 \twoheadrightarrow E_2'}{E_1 + E_2 \twoheadrightarrow E_1 + E_2'}$$

Supponiamo di aver derivato $E \to F$ utilizzando la regola semantica **(S-Right)**. Ne consegue che $E \equiv E_1 + E_2$ e $F \equiv E_1 + E_2'$. Se $\Gamma \vdash E\colon T$ allora vuol dire che sarò stato in grado di tipare $E$ usando la regola di tipaggio **(op +)**. In tal caso avrò dedotto che $T \equiv \text{int}$, $\Gamma \vdash E_1\colon \text{int}$, $\Gamma \vdash E_2\colon \text{int}$. Per ipotesi induttiva da $E_2 \to E_2'$ concludo che $\Gamma \vdash E_2'\colon \text{int}$. Ma allora applicando la regola di tipaggio **(op +)** derivo che $\Gamma \vdash E_1 + E_2' \equiv F\colon \text{int}$ come richiesto.

**Caso induttivo 3** (CBV-app1)**.**

$$\textbf{(CBV-app1)}\frac{\langle e_1, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1' e_2, s'\rangle}$$

Supponiamo di aver derivato $E \to F$ utilizzando la regola semantica **(CBV-app1)**. Ne consegue che $E \equiv E_1 E_2$ e $F \equiv E_1' E_2$ e $E_1 \to E_1'$. Se $\Gamma \vdash E\colon T$ allora vuol dire che sarò stato in grado di tipare $E$ usando la regola di tipaggio **(app)**. Quindi per ipotesi induttiva da $E_1 \to E_1'$ deduco che $\Gamma \vdash E_1'\colon T_A \to T$. Siccome $F \equiv E_1' E_2$ e $\Gamma \vdash E_2\colon T_A$, ne consegue che, applicando la regola di tipaggio **(app)**, derivo che $\Gamma \vdash E_1' E_2 \equiv F\colon T$ come richiesto.

**Caso induttivo 4** (CBV-app2)**.**

$$\textbf{(CBV- app2)}\frac{\langle e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_2', s'\rangle}{\langle v e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle v e_2', s'\rangle}$$

Supponiamo di aver derivato $E \to F$ utilizzando la regola semantica **(CBV-app2)**. Ne consegue che $E \equiv vE_2$ e $F \equiv vE_2'$ e $E_2 \to E_2'$. Se $\Gamma \vdash E\colon T$ allora vuol dire che sarò stato in grado di tipare $E$ usando la regola di tipaggio **(app)**. Quindi per ipotesi induttiva da $E_2 \to E_2'$ deduco che $\Gamma \vdash E_2'\colon T_A$. Siccome $F \equiv vE_2'$ e $\Gamma \vdash v\colon T_A \to T$, ne consegue che, applicando la regola di tipaggio **(app)**, derivo che $\Gamma \vdash vE_2' \equiv F\colon T$ come richiesto.