

## **Sistemi Dinamici**

Riassunto dei principali argomenti

Autore:

**Danzi Matteo**

Matricola VR424987

# Indice

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>  | <b>2</b> |
| 1.1      | Sistema . . . . .  | 2        |
| 1.2      | Descrizione ingresso-uscita . . . . .                          | 2        |
| 1.3      | Descrizione in variabili di stato . . . . .                    | 2        |
| <b>2</b> | <b>Modello matematico di un sistema</b>                        | <b>3</b> |
| 2.1      | Modello ingresso-uscita . . . . .                              | 3        |
| 2.2      | Modello in variabili di stato . . . . .                        | 4        |
| <b>3</b> | <b>Proprietà dei sistemi</b>                                   | <b>4</b> |
| 3.1      | Sistemi dinamici o istantanei . . . . .                        | 4        |
| 3.2      | Sistemi lineari o non lineari . . . . .                        | 5        |
| 3.3      | Tempo-invarianza . . . . .                                     | 6        |
| <b>4</b> | <b>Analisi nel dominio del tempo delle rappresentazioni VS</b> | <b>7</b> |
| 4.1      | Matrice di transizione di stato . . . . .                      | 7        |
| 4.2      | Sviluppo di Sylvester . . . . .                                | 7        |
| 4.2.1    | Autovalori di molteplicità unitaria . . . . .                  | 8        |
| 4.2.2    | Autovalori di molteplicità non unitaria . . . . .              | 8        |
| 4.2.3    | Autovalori complessi . . . . .                                 | 9        |
| 4.3      | Formula di Lagrange . . . . .                                  | 9        |
| 4.3.1    | Evoluzione libera e evoluzione forzata . . . . .               | 10       |
| 4.3.2    | Risposta impulsiva di una rappresentazione in VS . . . . .     | 10       |
| 4.4      | Trasformazione di similitudine . . . . .                       | 10       |
| 4.5      | Diagonalizzazione . . . . .                                    | 11       |
| 4.6      | Forma di Jordan . . . . .                                      | 12       |
| 4.6.1    | Teorema di Cayley-Hamilton . . . . .                           | 13       |
| 4.6.2    | Condizioni di diagonalizzabilità . . . . .                     | 14       |

# 1 Introduzione

## 1.1 Sistema

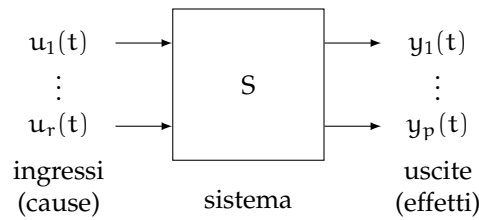
**Definizione 1.1.1.** Un sistema è un ente fisico, tipicamente formato da diverse componenti tra loro interagenti, che risponde a sollecitazioni esterne producendo un determinato comportamento.

**Esempio 1.1.** Un circuito elettrico costituito da componenti quali resistori, capacitori, induttori, diodi, generatori di corrente e tensione, ecc., costituisce un semplice esempio di sistema dinamico. Il comportamento del sistema può venire descritto dal valore dei segnali di tensione e di corrente nei rami del circuito. Le sollecitazioni che agiscono sul sistema sono le tensioni e le correnti applicate dai generatori, che possono essere imposte dall'esterno.

## 1.2 Descrizione ingresso-uscita

Le grandezze alla base di una descrizione IU sono le *cause esterne* al sistema e gli *effetti*. Le cause esterne sono delle grandezze che si generano al di fuori del sistema; la loro evoluzione influenza il comportamento del sistema ma non dipende da esso. Gli effetti invece sono delle grandezze la cui evoluzione dipende dalle cause esterne al sistema e dalla natura del sistema stesso. Di solito si usa la convenzione di definire come *ingressi* al sistema le cause esterne, e come *uscite* gli effetti. In generale su un sistema possono agire più ingressi così come più di una possono essere le grandezze in uscita.

La classica rappresentazione grafica di un sistema per il quale siano stati individuati ingressi e uscite è quella mostrata in **Fig. 1.** dove può venire considerato come un operatore che assegna uno specifico andamento alle grandezze in uscita in corrispondenza ad ogni possibile andamento degli ingressi.



**Fig. 1.** Descrizione in ingresso-uscita

Di solito si usa la convenzione di indicare con

$$\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \dots u_r(t)]^T \in \mathbb{R}^r$$

il vettore degli ingressi e con

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \dots y_p(t)]^T \in \mathbb{R}^p$$

il vettore delle uscite.

## 1.3 Descrizione in variabili di stato

È facile rendersi conto che in generale l'uscita di un sistema in un certo istante di tempo non dipende dal solo ingresso al tempo, ma dipende anche dall'evoluzione precedente del sistema.

Di questo fatto è possibile tenere conto introducendo una grandezza intermedia tra ingressi e uscite, chiamata *stato* del sistema. Lo stato del sistema gode della proprietà di concentrare in sé l'informazione sul passato e sul presente del sistema. Così come le grandezze di ingresso e uscita, anche lo stato è in generale una grandezza vettoriale e viene indicato mediante un vettore di stato

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$$

dove il numero di componenti del vettore di stato si indica con  $n$  e viene detto *ordine* del sistema.

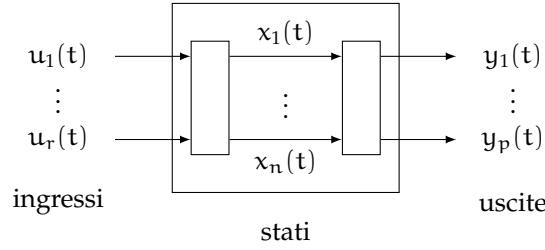


Fig. 2. Descrizione in variabili di stato

**Definizione 1.3.1.** Lo stato di un sistema all'istante di tempo è la grandezza che contiene l'informazione necessaria per determinare univocamente l'andamento dell'uscita  $y(t)$ , per ogni  $t \geq t_0$ , sulla base della conoscenza dell'andamento dell'ingresso  $u(t)$ , per  $t \geq t_0$  e appunto dello stato in  $t_0$ .

## 2 Modello matematico di un sistema

L'obiettivo dell'Analisi dei Sistemi consiste nel studiare il legame esistente tra gli ingressi e le uscite di un sistema e/o tra gli stati, gli ingressi e le uscite del sistema. In altri termini, risolvere un problema di analisi significa capire, dati certi segnali in ingresso al sistema, come evolveranno gli stati e le uscite di tale sistema.

Questo rende necessaria la definizione di un modello matematico che descriva in maniera quantitativa il comportamento del sistema allo studio, ossia fornisca una descrizione matematica esatta del legame tra ingressi (stati) e uscite. A seconda del tipo di descrizione che si vuole dare al sistema (IU o VS) è necessario formulare due diversi tipi di modello.

### 2.1 Modello ingresso-uscita

Il modello IU per un sistema MIMO, ossia un sistema con  $p$  uscite e  $r$  ingressi, è espresso mediante  $p$  equazioni differenziali del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = \left( \underbrace{y_1(t), \dots, y_1^{(n_1)}(t)}_{\text{uscita 1}}, \underbrace{u_1(t), \dots, u_1^{(m_{1,1})}(t)}_{\text{ingresso 1}}, \dots, \underbrace{u_r(t), \dots, u_r^{(m_{1,r})}(t)}_{\text{ingresso r}}, t \right) = 0 \\ h_2 = \left( \underbrace{y_2(t), \dots, y_2^{(n_2)}(t)}_{\text{uscita 2}}, \underbrace{u_1(t), \dots, u_1^{(m_{2,1})}(t)}_{\text{ingresso 1}}, \dots, \underbrace{u_r(t), \dots, u_r^{(m_{2,r})}(t)}_{\text{ingresso r}}, t \right) = 0 \\ \vdots \\ h_p = \left( \underbrace{y_p(t), \dots, y_p^{(n_p)}(t)}_{\text{uscita p}}, \underbrace{u_1(t), \dots, u_1^{(m_{p,1})}(t)}_{\text{ingresso 1}}, \dots, \underbrace{u_r(t), \dots, u_r^{(m_{p,r})}(t)}_{\text{ingresso r}}, t \right) = 0 \end{array} \right.$$

dove:

- $h_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  sono funzioni di più parametri che dipendono dal particolare sistema allo studio,
- $n_i$  è il grado massimo di derivazione della  $i$ -esima componente dell'uscita  $y_i(t)$ ,
- $m_i$  è il grado massimo di derivazione della  $i$ -esima componente dell'ingresso  $u_i(t)$ .

## 2.2 Modello in variabili di stato

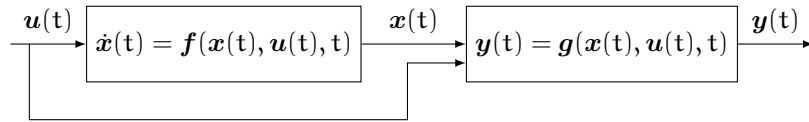
Il modello in VS per un sistema MIMO con  $r$  ingressi e  $p$  uscite ha invece una struttura del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \\ y_1(t) = g_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \\ \vdots \\ y_p(t) = g_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \end{cases}$$

che riscritto in forma matriciale diviene

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases}$$

L'equazione di stato è pertanto un sistema di  $n$  equazioni differenziali del primo ordine, a prescindere dal fatto che il sistema sia SISO o MIMO. La *trasformazione in uscita* è invece una equazione algebrica, scalare o vettoriale a seconda del numero delle variabili in uscita. La rappresentazione schematica che si può dare di un modello in VS è pertanto quella riportata in **Fig. 3**.



**Fig. 3.** Rappresentazione schematica di un modello in variabili di stato

## 3 Proprietà dei sistemi

### 3.1 Sistemi dinamici o istantanei

La prima importante distinzione che si può fare è tra sistemi istantanei e sistemi dinamici.

**Definizione 3.1.1.** Un sistema è detto

- *Istantaneo*: se il valore  $\mathbf{y}(t)$  assunto dall'uscita al tempo  $t$  dipende solo dal valore  $\mathbf{u}(t)$  assunto dall'ingresso al tempo  $t$ ;
- *Dinamico*: in caso contrario.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema MIMO con  $r$  ingressi e  $p$  uscite sia istantaneo è che il legame **IU** sia espresso da un insieme di equazioni della forma:

$$\begin{cases} h_1(y_1(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t), t) = 0 \\ h_2(y_2(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t), t) = 0 \\ \vdots \\ h_p(y_p(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t), t) = 0. \end{cases}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia istantaneo è che il modello in **VS** abbia ordine zero ovvero che *non esista il vettore di stato*.

### 3.2 Sistemi lineari o non lineari

Una delle proprietà fondamentali di cui gode un'ampia classe di sistemi (o più precisamente di modelli) è la linearità. È proprio su questa classe di sistemi che focalizzeremo la nostra attenzione in questo volume. L'importanza dei sistemi lineari deriva da una serie di considerazioni pratiche.

La prima è che tali sistemi sono facili da studiare. Per essi sono state proposte efficienti tecniche di analisi e di sintesi, non più applicabili se la linearità viene meno. In secondo luogo, un modello lineare si rivela una buona approssimazione del comportamento di numerosi sistemi reali purché questi siano sottoposti a piccoli ingressi.

**Definizione 3.2.1.** Un sistema è detto

- *Lineare*: se per esso vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Ciò significa che se il sistema risponde alla causa  $c_1$  con l'effetto  $e_1$  e alla causa  $c_2$  con l'effetto  $e_2$ , allora la risposta del sistema alla causa  $ac_1 + bc_2$  è  $ae_1 + be_2$  qualunque siano i valori assunti dalle costanti  $a$  e  $b$ . Il seguente schema riassume tale proprietà:

$$\left. \begin{array}{l} \text{causa } c_1 \rightsquigarrow \text{effetto } e_1 \\ \text{causa } c_2 \rightsquigarrow \text{effetto } e_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{causa } (ac_1 + bc_2) \rightsquigarrow \text{effetto } (ae_1 + be_2);$$

- *Non lineare*: in caso contrario.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia lineare è che il legame **IU** sia espresso da una equazione differenziale lineare, cioè per un sistema SISO:

$$a_0(t)y(t) + a_1(t)\dot{y}(t) + \dots + a_n(t)y^{(n)}(t) = b_0(t)u(t) + b_1(t)\dot{u}(t) + \dots + b_m(t)u^{(m)}(t)$$

Un sistema MIMO invece è lineare se e solo se ciascuna delle funzioni  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , esprime una combinazione lineare tra la  $i$ -esima componente dell'uscita e le sue  $n_i$  derivate e le variabili di ingresso con le loro derivate.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia lineare è che nel modello in **VS** sia l'equazione di stato che la trasformazione di uscita siano equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = a_{1,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{1,n}(t)x_n(t) + b_{1,1}u_1(t) + \dots + b_{1,r}u_r(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{n,n}(t)x_n(t) + b_{n,1}u_1(t) + \dots + b_{n,r}u_r(t) \\ y_1(t) = c_{1,1}(t)x_1(t) + \dots + c_{1,n}(t)x_n(t) + d_{1,1}u_1(t) + \dots + d_{1,r}u_r(t) \\ \vdots \\ y_p(t) = c_{p,1}(t)x_1(t) + \dots + c_{p,n}(t)x_n(t) + d_{p,1}u_1(t) + \dots + d_{p,r}u_r(t) \end{array} \right.$$

ovvero

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

dove

$$\mathbf{A}(t) = \{a_{i,j}(t)\} \text{ matrice } n \times n;$$

$$\mathbf{C}(t) = \{c_{i,j}(t)\} \text{ matrice } p \times n;$$

$$\mathbf{B}(t) = \{b_{i,j}(t)\} \text{ matrice } n \times r;$$

$$\mathbf{D}(t) = \{d_{i,j}(t)\} \text{ matrice } p \times r;$$

### 3.3 Tempo-invarianza

Un'altra importante proprietà di cui gode un'ampia classe di sistemi è la *tempo-invarianza* o stazionarietà. In particolare, in questo testo ci occuperemo proprio dell'analisi dei sistemi lineari e stazionari.

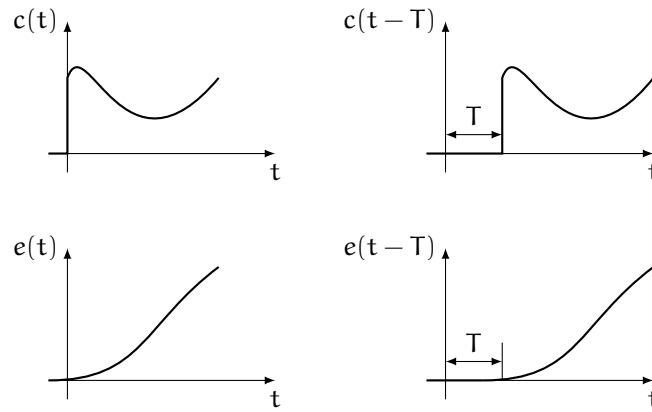
**Definizione 3.3.1.** Un sistema è detto

- *Tempo-invariante*: se per esso vale il principio di traslazione causa-effetto nel tempo, cioè se il sistema risponde sempre con lo stesso effetto ad una data causa, a prescindere dall'istante di tempo in cui tale causa agisca sul sistema.  
Il seguente schema riassume tale proprietà:

$$\text{causa } c(t) \rightsquigarrow \text{effetto } e(t) \implies \text{causa } c(t-T) \rightsquigarrow \text{effetto } e(t-T);$$

- *Tempo-variante*: in caso contrario.

La **Fig. 4.** mostra il comportamento tipico di un sistema lineare sollecitato dalla stessa causa applicata in due diversi intervalli di tempo, ossia a partire da  $t = 0$  e a partire da  $t = T$ : nei due casi l'effetto risultante è analogo ma ha semplicemente origine da istanti di tempo che differiscono tra di loro proprio di una quantità pari a  $T$ .



**Fig. 4.** Traslazione causa-effetto nel tempo

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia stazionario è che il legame **IU** non dipenda esplicitamente dal tempo, cioè per un sistema SISO:

$$h\left(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(m)}(t)\right) = 0$$

che nel caso dei sistemi lineari si riduce a una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$a_0 y(t) + a_1 \dot{y}(t) + \dots + a_n y^{(n)}(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \dots + b_m u^{(m)}(t).$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia stazionario è che nel modello in **VS** l'equazione di stato e la trasformazione di uscita non dipendano esplicitamente dal tempo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

che nel caso dei sistemi lineari si riduce a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove  $A, B, C$  e  $D$  sono matrici costanti.

## 4 Analisi nel dominio del tempo delle rappresentazioni VS

Un sistema lineare e stazionario di ordine  $n$ , con  $r$  ingressi e  $p$  uscite, ha la seguente rappresentazione in VS:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1)$$

Il problema fondamentale dell'analisi dei sistemi per un tale sistema consiste nel determinare l'andamento dello stato  $\mathbf{x}(t)$  e dell'uscita  $\mathbf{y}(t)$  per  $t \geq t_0$  noto:

- il valore dello stato iniziale  $\mathbf{x}(t_0)$ ;
- l'andamento dell'ingresso  $\mathbf{u}(t)$  per  $t \geq t_0$ .

### 4.1 Matrice di transizione di stato

Data una matrice quadrata  $\mathbf{A}$  il suo esponenziale è la matrice

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$$

La matrice di transizione dello stato  $e^{\mathbf{A}t}$  è una particolare matrice esponenziale i cui elementi sono funzioni del tempo di dimensione  $n \times n$  e anche  $\mathbf{A}$  è  $n \times n$

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

Se  $\mathbf{A}$  è una matrice **diagonale** di dimensione  $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{vale} \quad e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

### 4.2 Sviluppo di Sylvester

Ci si pone ora il problema di determinare l'espressione analitica della matrice di transizione dello stato  $e^{\mathbf{A}t}$  senza dover necessariamente calcolare la serie infinita che la definisce. Tale procedura si basa sullo sviluppo di Sylvester, esiste una seconda procedura, basata sul passaggio alla forma diagonale o alla forma di Jordan e una terza procedura, basata sull'uso delle trasformate di Laplace.

**Definizione 4.2.1.** Se  $\mathbf{A}$  è una matrice di dimensione  $n \times n$ , la corrispondente matrice di transizione dello stato  $e^{\mathbf{A}t}$  può essere scritta come:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(t) \mathbf{A}^i = \beta_0(t) \mathbf{I} + \beta_1(t) \mathbf{A} + \dots + \beta_{n-1}(t) \mathbf{A}^{n-1}$$

dove i coefficienti dello sviluppo  $\beta_i(t)$  sono opportune funzioni scalari nel tempo.

I coefficienti dello sviluppo di Sylvester possono venire determinati risolvendo un sistema di equazioni lineari. Esistono sostanzialmente tre diversi casi che vengono discussi di seguito.



#### 4.2.1 Autovalori di molteplicità unitaria

Se la matrice  $A$  ha autovalori tutti distinti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , le  $n$  funzioni incognite  $\beta_i(t)$  si ricavano risolvendo il seguente sistema di  $n$  equazioni (tante equazioni quanti sono gli autovalori):

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \lambda_1 \beta_1(t) + \lambda_1^2 \beta_2(t) + \dots + \lambda_1^{n-1} \beta_{n-1}(t) = e^{\lambda_1 t} \\ \beta_0(t) + \lambda_2 \beta_1(t) + \lambda_2^2 \beta_2(t) + \dots + \lambda_2^{n-1} \beta_{n-1}(t) = e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \beta_0(t) + \lambda_n \beta_1(t) + \lambda_n^2 \beta_2(t) + \dots + \lambda_n^{n-1} \beta_{n-1}(t) = e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

ovvero risolvendo il sistema di equazioni lineari

$$V\beta = \eta$$

dove

- $\beta = [\beta_0(t) \ \beta_1(t) \ \dots \ \beta_{n-1}(t)]^T$  è il vettore delle incognite
- La matrice dei coefficienti vale

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

- $\eta = [e^{\lambda_1 t} \ e^{\lambda_2 t} \ \dots \ e^{\lambda_n t}]^T$  è il vettore dei termini noti.

Viene detta **modo della matrice**  $A$  associato all'autovalore  $\lambda$  la generica componente  $e^{\lambda t}$  (una funzione nel tempo) del vettore  $\eta$ .

#### 4.2.2 Autovalori di molteplicità non unitaria

Se la matrice  $A$  ha autovlari di molteplicità non unitaria, si costruisce un sistema in cui ad ogni autovalore  $\lambda$  di molteplicità  $v$  corrispondono  $v$  equazioni della forma:

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \lambda \beta_1(t) + \dots + \lambda^{n-1} \beta_{n-1}(t) = e^{\lambda t} \\ \frac{d}{d\lambda} (\beta_0(t) + \lambda \beta_1(t) + \dots + \lambda^{n-1} \beta_{n-1}(t)) = \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t} \\ \vdots \\ \frac{d^{v-1}}{d\lambda^{v-1}} (\beta_0(t) + \lambda \beta_1(t) + \dots + \lambda^{n-1} \beta_{n-1}(t)) = \frac{d^{v-1}}{d\lambda^{v-1}} e^{\lambda t} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \lambda \beta_1(t) + \dots + \lambda^{n-1} \beta_{n-1}(t) = e^{\lambda t} \\ \beta_1(t) + 2\lambda \beta_2(t) + \dots + (n-1)\lambda^{n-2} \beta_{n-1}(t) = t e^{\lambda t} \\ \vdots \\ \frac{(v-1)!}{0!} \beta_{v-1}(t) + \dots + \frac{(n-1)!}{(n-v)!} \lambda^{n-v} \beta_{n-1}(t) = t^{v-1} e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Anche in tal caso è possibile scrivere un sistema lineare in cui ad ogni autovalore  $\lambda$  i molteplicità  $v$  sono associate  $v$  righe della matrice dei coefficienti  $V$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^{v-1} & \cdots & \lambda^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda & \cdots & (v-1)\lambda^{v-2} & \cdots & (n-1)\lambda^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (v-1)! & \cdots & \frac{(n-1)!}{(n-v)!}\lambda^{n-v} \end{bmatrix}$$

e  $v$  righe del vettore dei termini noti  $\eta = [e^{\lambda t} \quad te^{\lambda t} \quad \cdots \quad t^{v-1}e^{\lambda t}]^T$ .

#### 4.2.3 Autovalori complessi

Anche nel caso in cui vi siano autovalori complessi è possibile determinare i coefficienti dello sviluppo di Sylvester come sopra indicato.

Per evitare, tuttavia, di lavorare con numeri complessi conviene modificare la procedura per il calcolo dei coefficienti  $\beta$  come segue (tratteremo solo il caso di autovalori di molteplicità unitaria per semplicità). Supponiamo che fra gli  $n$  autovalori della matrice ve ne siano 2 complessi e coniugati  $\lambda, \lambda' = \alpha \pm j\omega$ .

In tal caso nel sistema di equazioni dovrebbero comparire le due equazioni

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \lambda_1\beta_1(t) + \lambda_1^2\beta_2(t) + \cdots + \lambda_1^{n-1}\beta_{n-1}(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t}e^{j\omega t} \\ \beta_0(t) + \lambda'\beta_1(t) + (\lambda')^2\beta_2(t) + \cdots + (\lambda')^{n-1}\beta_{n-1}(t) = e^{\lambda' t} = e^{\alpha t}e^{-j\omega t} \end{cases}$$

Possiamo tuttavia sostituire queste due equazioni con due equazioni equivalenti in cui non compaiono termini complessi:

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \operatorname{Re}(\lambda)\beta_1(t) + \operatorname{Re}(\lambda^2)\beta_2(t) + \cdots + \operatorname{Re}(\lambda^{n-1})\beta_{n-1}(t) = e^{\lambda_1 t} \cos(\omega t) \\ \operatorname{Im}(\lambda)\beta_1(t) + \operatorname{Im}(\lambda^2)\beta_2(t) + \cdots + \operatorname{Im}(\lambda^{n-1})\beta_{n-1}(t) = e^{\lambda_1 t} \sin(\omega t) \end{cases}$$

dove  $\operatorname{Re}$  e  $\operatorname{Im}$  indicano la parte reale e immaginaria di un numero complesso. In particolare dunque vale  $\operatorname{Re}(\lambda) = \alpha$  e  $\operatorname{Im}(\lambda) = \omega$

### 4.3 Formula di Lagrange

Possiamo finalmente dimostrare un importante risultato che determina la soluzione al problema di analisi per i sistemi MIMO precedentemente enunciato. Tale risultato è noto con il nome di formula di Lagrange.

**Definizione 4.3.1.** La soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

con stato iniziale  $\mathbf{x}(t_0)$  e andamento dell'ingresso  $\mathbf{u}(t)$  (per  $t \geq t_0$ ) vale per  $t \geq t_0$ :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{C} \int_{t_0}^t \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

### 4.3.1 Evoluzione libera e evoluzione forzata

In base al precedente risultato possiamo anche scrivere l'**evoluzione dello stato** per  $t \geq t_0$  come la somma di due termini:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_f(t).$$

- Il termine

$$\mathbf{x}_l(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0)$$

corrisponde all'*evoluzione libera dello stato* a partire dalle condizioni iniziali  $\mathbf{x}(t_0)$ . Si noti che  $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$  indica appunto come avviene la transizione dallo stato  $\mathbf{x}(t_0)$  allo stato  $\mathbf{x}(t)$  in assenza di contributi dovuti all'ingresso.

- Il termine

$$\mathbf{x}_f(t) = \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau = \int_0^{t-t_0} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(t-\tau) d\tau$$

corrisponde all'*evoluzione forzata dello stato* (la seconda equazione si dimostra per cambiamento di variabile). Si osservi che in tale integrale il contributo di  $\mathbf{u}(\tau)$  allo stato  $\mathbf{x}(t)$  è pesato tramite la funzione ponderatrice  $e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}$ .

Anche l'**evoluzione dell'uscita** per  $t \geq t_0$  si può scrivere come la somma di due termini:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_l(t) + \mathbf{y}_f(t).$$

- Il termine

$$\mathbf{y}_l(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}_l(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0)$$

corrisponde all'*evoluzione libera dell'uscita* a partire dalle condizioni iniziali  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t_0)$ .

- Il termine

$$\mathbf{y}_f(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}_f(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) = \mathbf{C} \int_{t_0}^t \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$$

corrisponde all'*evoluzione forzata dell'uscita*.

### 4.3.2 Risposta impulsiva di una rappresentazione in VS

La risposta impulsiva  $\omega(t)$  di un sistema SISO è la risposta forzata che consegue all'applicazione di un impulso unitario e dunque, posto  $u(t) = \delta(t)$ , in base alla formula di Lagrange vale:

$$\omega(t) = \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \delta(t-\tau) d\tau + \mathbf{D} \delta(t).$$

Ricordando la fondamentale proprietà della funzione di Dirac per cui se  $f$  è una funzione continua in  $[t_a, t_b]$  e  $t$  appartiene a questo intervallo vale

$$\int_{t_a}^{t_b} f(\tau) \delta(\tau-t) d\tau = \int_{t_a}^{t_b} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = f(t)$$

si ottiene finalmente

$$\omega(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t)$$

## 4.4 Trasformazione di similitudine

La forma assunta da una rappresentazione in VS di un dato sistema dipende dalla scelta delle grandezze che si considerano come variabili di stato. Tale scelta non è unica e infatti si possono dare infinite diverse rappresentazioni dello stesso sistema, tutte legate da un particolare tipo di trasformazione detta di similitudine.

Uno dei principali vantaggi di questa procedura consiste nel fatto che attraverso particolari trasformazioni è possibile passare a nuove rappresentazioni in cui la matrice di stato assume una *forma canonica* particolarmente facile da studiare.

Esempi di forme canoniche sono la *forma diagonale* e la *forma di Jordan*.

**Definizione 4.4.1.** Data una rappresentazione della forma (1) si consideri il vettore  $z(t)$  legato a  $x(t)$  dalla trasformazione

$$x(t) = Pz(t)$$

dove  $P$  è una qualunque matrice di costanti  $n \times n$  non-singolare. Dunque esiste sempre l'inversa di  $P$  e vale anche  $z(t) = P^{-1}x(t)$ . Tale trasformazione è la **trasformazione di similitudine** e la matrice  $P$  è detta *matrice di similitudine*.

La trasformazione di similitudine porta ad una nuova rappresentazione.

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A'z(t) + B'u(t) \\ y(t) = C'z(t) + D'u(t) \end{cases}$$

dove

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP; & B' &= P^{-1}B; \\ C' &= CP; & D' &= D. \end{aligned}$$

## 4.5 Diagonalizzazione

Si considera adesso il caso di una particolare trasformazione di similitudine che, sotto opportune ipotesi, permette di passare ad una matrice  $A = P^{-1}AP$  in forma diagonale.

Una rappresentazione in cui la matrice di stato è in forma diagonale è detta *forma canonica diagonale* ed essa si presta ad una semplice interpretazione fisica. Si consideri ad esempio un sistema SISO la cui equazione vale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t)$$

L'evoluzione della  $i$ -esima componente dello stato è retta dall'equazione

$$\dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t) + b_i u(t)$$

dalla quale si vede che la derivata della componente  $i$ -esima non è influenzata dal valore delle altre componenti.

Possiamo dunque pensare a questo sistema come ad una collezione di sottosistemi di ordine 1, ciascuno descritto da una componente del vettore di stato, che evolvono indipendentemente. Il sistema corrispondente alla componente  $i$ -esima ha polinomio caratteristico  $P_i = (s - \lambda_i)$  e ad esso corrisponde il modo  $e^{\lambda_i t}$ . Talvolta si è anche soliti definire una rappresentazione diagonale con il termine *disaccoppiata* per indicare appunto l'indipendenza fra i diversi nodi.

Il passaggio da una rappresentazione generica ad una rappresentazione in forma diagonale richiede una particolare matrice di similitudine.

**Definizione 4.5.1.** Data una matrice  $A$  di dimensione  $n \times n$  siano  $v_1, v_2, \dots, v_n$  un insieme di autovettori linearmente indipendenti corrispondenti agli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Definiamo *matrice modale* di  $A$  la matrice  $n \times n$

$$V = [v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_n]$$

Ogni matrice che ammette matrice modale è *diagonalizzabile*:

**Proposizione 4.5.1.** Data una matrice  $A$  di dimensione  $n \times n$  e autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  e  $V$  una sua matrice modale. La matrice  $A$  ottenuta attraverso la trasformazione di similitudine

$$A = P^{-1}AP$$

è diagonale.

## 4.6 Forma di Jordan

Si consideri una matrice  $A$  di dimensione  $n \times n$  i cui autovalori hanno molteplicità non unitaria. In tal caso non vi è garanzia che esistano  $n$  autovettori linearmente indipendenti con cui costruire una matrice modale: dunque non è sempre possibile determinare una trasformazione di similitudine che porti ad una forma diagonale.

Si dimostra, tuttavia, che è sempre possibile, estendendo il concetto di autovettore, determinare un insieme di  $n$  *autovettori generalizzati* linearmente indipendenti.

Tali vettori possono venire usati per costruire una *matrice modale generalizzata* che consente, per similitudine, di passare ad una matrice in *forma di Jordan*, una forma canonica diagonale a blocchi che generalizza la forma diagonale.

**Definizione 4.6.1.** Dato un numero complesso  $\lambda \in \mathbb{C}$  e un numero intero  $p \geq 1$  definiamo **blocco di Jordan** di ordine  $p$  associato a  $\lambda$  la matrice quadrata

$$J = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}}_p \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}} \right\} p$$

Ogni elemento lungo la diagonale di tale matrice vale  $\lambda$ , mentre ogni elemento lungo la sopra diagonale vale 1; ogni altro elemento è nullo. Dunque  $\lambda$  è un autovalore di molteplicità algebrica  $p$  del blocco  $J$ .

Possiamo ora definire la forma canonica di Jordan.

**Definizione 4.6.2.** (Forma di Jordan) Una matrice  $A$  è detta in **forma di Jordan** se essa è una matrice diagonale a blocchi

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_q \end{bmatrix}$$

In cui ogni blocco  $J_i$  lungo la diagonale è un blocco di Jordan associato ad un autovalore  $\lambda_i$  (per  $i = 1, \dots, q$ ).

**Matrice di Jordan:**

$$J = \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{J_q} \end{bmatrix}}_{\mu_{a_1}} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{J_q} \end{bmatrix}} \right\} \mu_{a_q}$$

**Blocco di Jordan:**

$$J_i = \left. \begin{bmatrix} \boxed{J_{1,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_{2,2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{J_{1,q_i}} \end{bmatrix} \right\} \mu_{a_i}$$

**Mini blocco di Jordan:**

$$J_{i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{i-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

dove

- $q$  è il numero di autovalori  $\lambda_i$  distinti
- $i \rightarrow \lambda_i$
- $j \rightarrow i, \dots, q_i$
- $\mu_{a_i}$  è la dimensione del blocco di Jordan  $J_i$  ed è la molteplicità algebrica che coincide con il rango di  $J_i$ .
- $\mu_{g_i}$  è il numero di mini blocchi  $J_{i,j}$  ed è la molteplicità geometrica dell'autovalore  $\lambda_i$
- $1 \leq \mu_g \leq \mu_a \leq n$

**Definizione 4.6.3** (Struttura di autovettori generalizzati). Sia  $A$  una matrice  $n \times n$  e sia  $\lambda$  un autovalore di molteplicità  $\nu$  a cui corrispondono  $\mu$  autovettori linearmente indipendenti (con  $1 \leq \mu \leq \nu$ ). A tale autovalore compete una struttura di  $\nu$  autovettori generalizzati linearmente indipendenti costituita da  $\mu$  catene:

$$\begin{cases} v_{p_1}^{(1)} \rightarrow \cdots \rightarrow v_2^{(1)} \rightarrow v_1^{(1)} & \text{catena 1} \\ v_{p_2}^{(2)} \rightarrow \cdots \rightarrow v_2^{(2)} \rightarrow v_1^{(2)} & \text{catena 2} \\ \vdots & \vdots \\ v_{p_\mu}^{(\mu)} \rightarrow \cdots \rightarrow v_2^{(\mu)} \rightarrow v_1^{(\mu)} & \text{catena } \mu \end{cases}$$

il numero di catene  $\mu$  è detto **molteplicità geometrica** dell'autovalore  $\lambda$ . La  $i$ -esima catena ha lunghezza  $p_i$  e termina con un autovettore  $v_1^{(i)}$ . Gli altri autovettori della catena sono autovettori generalizzati ma non sono autovettori. Poiché in totale gli autovettori generalizzati sono  $\nu$  vale anche

$$\sum_{i=1}^{\mu} p_i = \nu$$

La lunghezza della catena più lunga  $\pi = \max\{p_1, p_2, \dots, p_\mu\}$  è detta **indice** dell'autovalore  $\lambda$ .

#### 4.6.1 Teorema di Cayley-Hamilton

Il seguente teorema di Cayley-Hamilton definisce il concetto di funzione polinomiale di una matrice quadrata e afferma che *una matrice è radice del proprio polinomio caratteristico*.

**Teorema 1** (Cayley-Hamilton). Data una matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$ , sia

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

il suo **polinomio caratteristico**. La matrice  $A$  è **radice** del suo stesso polinomio caratteristico, ovvero soddisfa la seguente equazione:

$$P(A) \triangleq A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + A_1s + a_0I = 0$$

dove  $0$  è una matrice quadrata di ordine  $n$  i cui elementi valgono tutti zero.

#### 4.6.2 Condizioni di diagonalizzabilità

La matrice  $A$   $n \times n$  è diagonalizzabile se e solo se è verificata una delle seguenti condizioni:

- Esistono  $n$  autovettori linearmente indipendenti.
- Se  $\mu_{a_i}$  dell'autovalore  $\lambda_i$  è uguale alla sua molteplicità geometrica  $\mu_{g_i}$ .
- Se la dimensione di tutti i mini blocchi di Jordan associato a  $\lambda_i$  è unitaria.
- Se per ogni  $\lambda_i$  la dimensione  $m_i$  del più grande mini blocco di Jordan è unitaria.
- Se il grado di molteplicità di ogni  $\lambda_i$  nel polinomio minimo  $m(\lambda)$  è unitario.