Università degli Studi di Verona

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Analisi di Sistemi informatici

Riassunto dei principali argomenti

Autore:
Davide Bianchi

Anno Accademico 2017/2018

Indice

1 Preliminari matematici

1.1 Ordini parziali

1.2 Reticoli

1.3 Teoremi di punto fisso

2 Interpretazione astratta

2.1 Introduzione

Lo scopo è quello di trovare un'approssimazione di una semantica $\langle P \rangle$ di $[\![P]\!]$ tale per cui valgano:

- *correttezza:* $[\![P]\!] \subseteq \langle P \rangle$;
- *decidibilità:* $\langle P \rangle \subseteq Q$ è decidibile (Q è un insieme di semantiche che soddisfa la proprietà di interesse).

Se entrambe le proprietà sono soddisfatte, allora vale che

$$(\langle P \rangle \subseteq Q) \Rightarrow ([\![P]\!] \subseteq Q)$$

La semantica è data da una coppia $\langle D, f \rangle$ dove D è una coppia $\langle D, \leq_D$ rappresentante un dominio semantico e $f : D \to D$ è una funzione di trasferimento con una soluzione a punto fisso.

Dato un oggetto concreto, definiamo:

- un **oggetto astratto** come una rappresentazione matematica sovra-approssimata del corrispondente concreto;
- un **dominio astratto** come un insieme di oggetti astratti con delle operazioni astratte, che approssimano quelle concrete;
- una funzione di **astrazione** α che mappa oggetti concreti in oggetti astratti;
- una funzione di **concretizzazione** γ che mappa oggetti astratti in oggetti concreti.

La caratteristica peculiare delle astrazioni è che solo alcune proprietà vengono osservate con esattezza, le altre vengono solo approssimate. In sostanza, dato un dominio astratto A, gli elementi di A sono osservati con esattezza, gli altri sono approssimati o l'informazione è persa del tutto.

Proprietà. L'insieme delle proprietà $\mathcal{P}(\Sigma)$ di oggetti in Σ è l'insieme di elementi che gode di quella proprietà. Questo insieme di proprietà costituisce un reticolo completo

$$\langle \mathcal{P}(\Sigma), \subseteq, \emptyset, \cup, \cap, \neg \rangle$$

dove:

- $\subseteq$ è l'implicazione logica;
- Σ è `true`;
- $\cup$ è la disgiunzione (oggetti che godono di P o di Q appartengono a $P \cup Q$);
- $\cap$ è la congiunzione (oggetti che godono di P e di Q appartengono a $P \cap Q$);
- $\neg$ è la negazione (oggetti che non godono di P stanno in $\Sigma \setminus P$).

Direzione dell'astrazione. Quando si approssima una proprietà concreta $P \in \mathcal{P}(\Sigma)$ usando una proprietà astratta $\overline{P}$, deve essere stabilito un criterio per definire quando $\overline{P}$ è un'approssimazione di P.

Si distinguono quindi i seguenti casi:

- approssimazione *da sopra*: $P \subseteq \overline{P}$;
- approssimazione *da sotto*: $P \supseteq \overline{P}$.

Dato un oggetto o, si vuole quindi sapere se $o \in P$:

$$P \supseteq \overline{P} : \begin{cases} \text{"Si"} & o \in \overline{P} \\ \text{"Non lo so"} & o \notin \overline{P} \end{cases} \qquad P \subseteq \overline{P} : \begin{cases} \text{"No"} & o \notin \overline{P} \\ \text{"Non lo so"} & o \in \overline{P} \end{cases}$$

Migliore approssimazione. Definiamo come *migliore approssimazione* di una proprietà P in A il glb delle over-approximation di P in A, ossia:

$$\overline{P} = \bigcap\{\overline{P'} \in A | P \subseteq \overline{P'}\} \in A$$

2.2 Connessione di Galois

Imponiamo il vincolo che α e γ siano monotone, allora concludiamo che:

- $\gamma \circ \alpha : C \to C$ è **estensiva**: $\gamma(\alpha(c)) \geq c$;
- $\alpha \circ \gamma : A \to A$ è **riduttiva**: $\alpha(\gamma(a)) \leq a$.

Le definizioni qui sopra dicono rispettivamente che:

- α perde informazione, e γ non la può recuperare;
- γ non perde informazione.

Definizione 2.2.1 (Connessione di Galois). *Dati due poset $\langle A, \leq_A\rangle$ e $\langle C, \leq_C\rangle$, e due funzioni monotone $\alpha : C \to A$ e $\gamma : A \to C$, diciamo che $\langle C, \alpha, \gamma, A\rangle$ è una connessione di Galois se:*

- $\forall c \in \mathcal{C} : c \leq_C \gamma(\alpha(c))$
- $\forall a \in \mathcal{A} : \alpha(\gamma(a)) \leq_A a$

Se inoltre vale che $\forall a \in \mathcal{A} : \alpha(\gamma(a)) = a$, allora $\langle C, \alpha, \gamma, A\rangle$ è un'inserzione di Galois.

Una connessione e un'inserzione di Galois sono rappresentate rispettivamente come

$$C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A \qquad C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows\!\!\!\!\rightarrow}} A$$

La funzione α è detta *aggiunta sinistra*, mentre la funzione γ è detta *aggiunta destra.*

Teorema 2.2.1. *Data una connessione di Galois $C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$, sono equivalenti:*

- $C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows\!\!\!\!\rightarrow}} A$*;*
- *α è suriettiva;*
- *γ è iniettiva.*

Inoltre, dati due domini astratti, non esistono due coppie (α, γ) che formino una connessione di Galois; quindi la connessione di Galois tra due domini è **unica**, e le funzioni sono identificabili attraverso:

$$\alpha(c) = \bigwedge\{a \in A | c \leq_C \gamma(a)\}$$
$$\gamma(a) = \bigvee\{c \in C | \alpha(c) \leq_A a\}$$

2.3 Famiglie di Moore

Definizione 2.3.1 (Famiglia di Moore)**.** *Sia L un reticolo completo. $X \subseteq L$ è una famiglia di Moore di L se*

$$X = \mathcal{M}(X) = \left\{ \bigwedge S \mid S \subseteq X \right\}$$

dove

$$\bigwedge \emptyset = \top \in \mathcal{M}(X)$$

Da questa definizione segue che, ipotizzando che ogni proprietà concreta abbia una migliore astrazione $\overline{P} \in A$, implica che il dominio A è una famiglia di Moore.

2.4 Upper closure operator

Definizione 2.4.1 (Upper closure operator)**.** *Una funzione $f : P \to P$ su un poset $\langle P, \leq_P \rangle$ è un upper closure operator (uco) se soddisfa le seguenti proprietà:*

- *estensività:* $\forall x \in P : x \leq_P \rho(x)$
- *monotonia:* $\forall x, y \in P : (x \leq_P y) \Rightarrow (\rho(x) \leq_P \rho(y))$
- *idempotenza:* $\forall x \in P : \rho(x) = \rho(\rho(x))$

I lower closure operator sono definiti in modo duale, specificando che ρ deve essere *riduttiva*, ovvero che $\forall x \in P : x \geq_P \rho(x)$.

Teorema 2.4.1. *Data una connessione di Galois $C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$ si ha che $\gamma \circ \alpha$ è un uco e $\alpha \circ \gamma$ è un lco.*

Teorema 2.4.2. *$C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$ se e solo se A è isomorfo [1] ad una Moore family di C.*

Teorema 2.4.3. *Sia $\rho \in uco(c)$. Allora $\forall A \simeq \rho(C)$ si ha che $\exists \alpha, \gamma : C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$*

2.5 Reticolo delle interpretazioni astratte

I vari domini astratti possono essere comparati sulla base della loro precisione. In generale si può dire che un dominio astratto A_1 è più preciso di A_2 (indicato attraverso $A_1 \sqsubseteq A_2$) quando

$$\forall a_2 \in A_2, \exists a_1 \in A_1 \quad \text{tali che} \quad \gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$$

ovvero quando

$$\gamma(A_2) \subseteq \gamma(A_1)$$

Collegando agli uco, possiamo dire che

$$A_1 \sqsubseteq A_2 \Leftrightarrow \rho_1 \sqsubseteq \rho_2 \Leftrightarrow \rho_2(C) \subseteq \rho_1(C)$$

Definizione 2.5.1 (Reticolo delle int. astratte)**.** *Se C è un reticolo completo o un cpo, allora*

$$\langle uco(C), \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \lambda x.\top, \lambda x.x \rangle$$

è un reticolo completo dove $\forall \rho, \eta \in uco(C), \{\rho_i\}_{i \in I} \subseteq uco(C)$ e $x \in C$:

- $\rho \sqsubseteq \eta \Leftrightarrow \forall y \in C.\rho(y) \leq \eta(y) \Leftrightarrow \eta(C) \subseteq \rho(C)$
- $\left(\bigsqcap_{i \in I} \rho_i\right)(x) = \bigwedge_{i \in I} \rho_i(x)$
- $\left(\bigsqcup_{i \in I} \rho_i\right)(x) = x \Leftrightarrow \forall i \in I.\rho_i(x) = x$
- $\lambda x.\top, \lambda x.x$ *sono rispettivamente top e bottom.*

[1]Con isomorofismo si intendono reticoli con la stessa struttura.

2.6 Computazioni astratte e concrete

Definizione 2.6.1 (Correttezza). *Data un'inserzione di Galois* $C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$*, una funzione concreta* $f : C \to C$ *e una funzione astratta* $f^\sharp : A \to A$ *diciamo che* $f^\sharp$ *è un'approssimazione corretta di* f *se*

$$\forall c \in C : \alpha(f(c)) \leq_A f^\sharp(\alpha(c)) \quad \textit{backward}$$

o equivalentemente

$$\forall a \in A : f(\gamma(a)) \leq_C \gamma(f^\sharp(a) \quad \textit{forward}$$

Rinforzando la definizione e imponendo uguaglianza si perde l'equivalenza delle due espressioni sopra.

Definizione 2.6.2 (Completezza). *Data un'inserzione di Galois* $C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$*, una funzione concreta* $f : C \to C$ *e una funzione astratta* $f^\sharp : A \to A$ *diciamo che* $f^\sharp$ *è:*

- *backward-completa per* f *se* $\forall c \in C : \alpha(f(c)) = f^\sharp(\alpha(c))$
- *forward-completa per* f *se* $\forall a \in A : f(\gamma(a)) = \gamma(f^\sharp(a)$

La definizione rappresenta una situazione ideale in cui non si ha perdita di precisione durante il calcolo astratto. Inoltre la backward-completezza lavora sull'astrazione dell'input delle operazioni, la forward-completezza sull'output.

Le definizioni di completezza possono essere date anche usando gli uco:

- $\rho \in uco(C)$ è backward-completo per f se $\rho \circ f = \rho \circ f \circ \rho$
- $\rho \in uco(C)$ è forward-completo per f se $f \circ \rho = \rho \circ f \circ \rho$

Inoltre quando ρ è sia backward che forward-completo allora vale che $\rho \circ f = f \circ \rho$.

Teorema 2.6.1. *Data* $C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$*, una funzione concreta* $f : C \to C$ *e una funzione astratta* $f^\sharp : A \to A$ *allora*

$$\forall c \in C : \alpha(f(c)) \leq_A f^\sharp(\alpha(c)) \Leftrightarrow \alpha \circ f \circ \gamma \sqsubseteq f^\sharp$$

Definizione 2.6.3 (Best correct approximation). *Data* $C \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} A$ *e una funzione concreta* $f : C \to C$ *allora* $\alpha \circ f \circ \gamma : A \to A$ *è la best correct approximation di* f *in* A.

2.7 Accelerazione della convergenza

2.7.1 Widening

Un widening

$$\nabla \in P \times P \to P$$

su un poset $\langle P, \leq_P \rangle$ è una funzione che soddisfa:

- $\forall x, y \in P : x \sqsubseteq (x \nabla y) \wedge y \sqsubseteq (x \nabla y)$
- per ogni catena ascendente $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq ... \sqsubseteq x_n$ la catena definita come $y_0 = x_0, ..., y_{n+1} = y_n \nabla x_{n+1}$ non è strettamente crescente.

Dato che in interpretazione astratta è necessario garantire/accelerare la convergenza, viene usato il widening (che si sostituisce al least upper bound), dal momento che anche il calcolo astratto può divergere. Il risultato di un widening è un post-puntofisso di F^{∇}, ovvero una sovra-approssimazione del punto fisso più piccolo di f $lfp^{\sqsubseteq}F$.

Ad esempio, il widening su intervalli funziona come segue:

$$[a, b] \; \nabla \; [c, d] = [e, f] \qquad \text{tale che}$$

$$e = \begin{cases} -\infty & \text{se } c < a \\ a & \text{altrimenti} \end{cases} \text{ e } f = \begin{cases} +\infty & \text{se } b < d \\ b & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2.7.2 Narrowing

Dato che il widening raggiunge un post-fixpoint, piuò capitare che si abbiano eccessive perdite di informazione, in questo caso viene usato il narrowing.

Definizione 2.7.1. *Il narrowing è una funzione* $\triangle : P \times P \rightarrow P$ *tale che:*

- $\forall x, y \in \mathcal{P} : y \leq x \implies y \leq x \triangle y \leq x$
- *Per ogni catena discendente* $x_0 \geq x_1 \geq ...$*, la catena discendente* $y_0 = x_0, ..., y_{i+1} = y_i \triangle x_{i+1}$ *non è strettamente decrescente.*

Per gli intervalli il narrowing funziona come segue:

$$[a, b] \triangle [c, d] = [e, f] \qquad \text{tale che}$$

$$e = \begin{cases} c & \text{se } a = -\infty \\ a & \text{altrimenti} \end{cases} \text{ e } f = \begin{cases} d & \text{se } b = +\infty \\ b & \text{altrimenti} \end{cases}$$