

Sistemi Dinamici

Riassunto dei principali argomenti

Autore:

Danzi Matteo

Matricola VR424987

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Sistema	2
1.2	Descrizione ingresso-uscita	2
1.3	Descrizione in variabili di stato	2
2	Modello matematico di un sistema	3
2.1	Modello ingresso-uscita	3
2.2	Modello in variabili di stato	4
3	Proprietà dei sistemi	4
3.1	Sistemi dinamici o istantanei	4
3.2	Sistemi lineari o non lineari	5
3.3	Tempo-invarianza	6
4	Analisi nel dominio del tempo delle rappresentazioni VS	7
4.1	Matrice di transizione di stato	7
4.2	Sviluppo di Sylvester	7
4.2.1	Autovalori di molteplicità unitaria	8
4.2.2	Autovalori di molteplicità non unitaria	8
4.2.3	Autovalori complessi	9
4.3	Formula di Lagrange	9
4.3.1	Evoluzione libera e evoluzione forzata	10
4.3.2	Risposta impulsiva di una rappresentazione in VS	10
4.4	Trasformazione di similitudine	10
4.5	Diagonalizzazione	11
4.6	Forma di Jordan	12
4.6.1	Teorema di Cayley-Hamilton	13
4.6.2	Condizioni di diagonalizzabilità	14
5	Jordan e cambiamento di base tutorial	14
6	Stabilità	17
6.1	Stabilità BIBO	17
6.2	Lyapunov in termini di variabili di stato	17
6.3	Lyapunov per sistemi lineari e stazionari	18
6.4	Stabilità con la funzione di Lyapunov	18
6.5	Matrice di linearizzazione o Jacobiana	19
7	Controllabilità	20

1 Introduzione

1.1 Sistema

Definizione 1.1.1. Un sistema è un ente fisico, tipicamente formato da diverse componenti tra loro interagenti, che risponde a sollecitazioni esterne producendo un determinato comportamento.

Esempio 1.1. Un circuito elettrico costituito da componenti quali resistori, capacitori, induttori, diodi, generatori di corrente e tensione, ecc., costituisce un semplice esempio di sistema dinamico. Il comportamento del sistema può venire descritto dal valore dei segnali di tensione e di corrente nei rami del circuito. Le sollecitazioni che agiscono sul sistema sono le tensioni e le correnti applicate dai generatori, che possono essere imposte dall'esterno.

1.2 Descrizione ingresso-uscita

Le grandezze alla base di una descrizione IU sono le *cause esterne* al sistema e gli *effetti*. Le cause esterne sono delle grandezze che si generano al di fuori del sistema; la loro evoluzione influenza il comportamento del sistema ma non dipende da esso. Gli effetti invece sono delle grandezze la cui evoluzione dipende dalle cause esterne al sistema e dalla natura del sistema stesso. Di solito si usa la convenzione di definire come *ingressi* al sistema le cause esterne, e come *uscite* gli effetti. In generale su un sistema possono agire più ingressi così come più di una possono essere le grandezze in uscita.

La classica rappresentazione grafica di un sistema per il quale siano stati individuati ingressi e uscite è quella mostrata in **Fig. 1.** dove può venire considerato come un operatore che assegna uno specifico andamento alle grandezze in uscita in corrispondenza ad ogni possibile andamento degli ingressi.

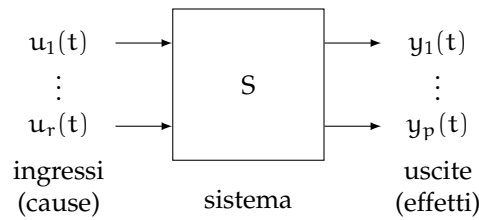


Fig. 1. Descrizione in ingresso-uscita

Di solito si usa la convenzione di indicare con

$$\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \dots u_r(t)]^T \in \mathbb{R}^r$$

il vettore degli ingressi e con

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \dots y_p(t)]^T \in \mathbb{R}^p$$

il vettore delle uscite.

1.3 Descrizione in variabili di stato

È facile rendersi conto che in generale l'uscita di un sistema in un certo istante di tempo non dipende dal solo ingresso al tempo, ma dipende anche dall'evoluzione precedente del sistema.

Di questo fatto è possibile tenere conto introducendo una grandezza intermedia tra ingressi e uscite, chiamata *stato* del sistema. Lo stato del sistema gode della proprietà di concentrare in sé l'informazione sul passato e sul presente del sistema. Così come le grandezze di ingresso e uscita, anche lo stato è in generale una grandezza vettoriale e viene indicato mediante un vettore di stato

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$$

dove il numero di componenti del vettore di stato si indica con n e viene detto *ordine* del sistema.

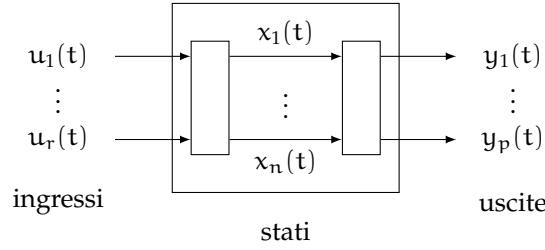


Fig. 2. Descrizione in variabili di stato

Definizione 1.3.1. Lo stato di un sistema all'istante di tempo è la grandezza che contiene l'informazione necessaria per determinare univocamente l'andamento dell'uscita $y(t)$, per ogni $t \geq t_0$, sulla base della conoscenza dell'andamento dell'ingresso $u(t)$, per $t \geq t_0$ e appunto dello stato in t_0 .

2 Modello matematico di un sistema

L'obiettivo dell'Analisi dei Sistemi consiste nel studiare il legame esistente tra gli ingressi e le uscite di un sistema e/o tra gli stati, gli ingressi e le uscite del sistema. In altri termini, risolvere un problema di analisi significa capire, dati certi segnali in ingresso al sistema, come evolveranno gli stati e le uscite di tale sistema.

Questo rende necessaria la definizione di un modello matematico che descriva in maniera quantitativa il comportamento del sistema allo studio, ossia fornisca una descrizione matematica esatta del legame tra ingressi (stati) e uscite. A seconda del tipo di descrizione che si vuole dare al sistema (IU o VS) è necessario formulare due diversi tipi di modello.

2.1 Modello ingresso-uscita

Il modello IU per un sistema MIMO, ossia un sistema con p uscite e r ingressi, è espresso mediante p equazioni differenziali del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = \left(\underbrace{y_1(t), \dots, y_1^{(n_1)}(t)}_{\text{uscita 1}}, \underbrace{u_1(t), \dots, u_1^{(m_{1,1})}(t)}_{\text{ingresso 1}}, \dots, \underbrace{u_r(t), \dots, u_r^{(m_{1,r})}(t)}_{\text{ingresso r}}, t \right) = 0 \\ h_2 = \left(\underbrace{y_2(t), \dots, y_2^{(n_2)}(t)}_{\text{uscita 2}}, \underbrace{u_1(t), \dots, u_1^{(m_{2,1})}(t)}_{\text{ingresso 1}}, \dots, \underbrace{u_r(t), \dots, u_r^{(m_{2,r})}(t)}_{\text{ingresso r}}, t \right) = 0 \\ \vdots \\ h_p = \left(\underbrace{y_p(t), \dots, y_p^{(n_p)}(t)}_{\text{uscita p}}, \underbrace{u_1(t), \dots, u_1^{(m_{p,1})}(t)}_{\text{ingresso 1}}, \dots, \underbrace{u_r(t), \dots, u_r^{(m_{p,r})}(t)}_{\text{ingresso r}}, t \right) = 0 \end{array} \right.$$

dove:

- h_i , $i = 1, \dots, p$ sono funzioni di più parametri che dipendono dal particolare sistema allo studio,
- n_i è il grado massimo di derivazione della i -esima componente dell'uscita $y_i(t)$,
- m_i è il grado massimo di derivazione della i -esima componente dell'ingresso $u_i(t)$.

2.2 Modello in variabili di stato

Il modello in VS per un sistema MIMO con r ingressi e p uscite ha invece una struttura del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \\ y_1(t) = g_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \\ \vdots \\ y_p(t) = g_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \end{cases}$$

che riscritto in forma matriciale diviene

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases}$$

L'equazione di stato è pertanto un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine, a prescindere dal fatto che il sistema sia SISO o MIMO. La *trasformazione in uscita* è invece una equazione algebrica, scalare o vettoriale a seconda del numero delle variabili in uscita. La rappresentazione schematica che si può dare di un modello in VS è pertanto quella riportata in **Fig. 3**.

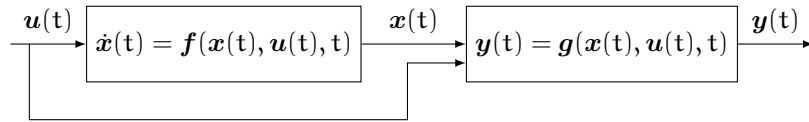


Fig. 3. Rappresentazione schematica di un modello in variabili di stato

3 Proprietà dei sistemi

3.1 Sistemi dinamici o istantanei

La prima importante distinzione che si può fare è tra sistemi istantanei e sistemi dinamici.

Definizione 3.1.1. Un sistema è detto

- *Istantaneo*: se il valore $y(t)$ assunto dall'uscita al tempo t dipende solo dal valore $u(t)$ assunto dall'ingresso al tempo t ;
- *Dinamico*: in caso contrario.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema MIMO con r ingressi e p uscite sia istantaneo è che il legame **IU** sia espresso da un insieme di equazioni della forma:

$$\begin{cases} h_1(y_1(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t), t) = 0 \\ h_2(y_2(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t), t) = 0 \\ \vdots \\ h_p(y_p(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t), t) = 0. \end{cases}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia istantaneo è che il modello in **VS** abbia ordine zero ovvero che *non esista il vettore di stato*.

3.2 Sistemi lineari o non lineari

Una delle proprietà fondamentali di cui gode un'ampia classe di sistemi (o più precisamente di modelli) è la linearità. È proprio su questa classe di sistemi che focalizzeremo la nostra attenzione in questo volume. L'importanza dei sistemi lineari deriva da una serie di considerazioni pratiche.

La prima è che tali sistemi sono facili da studiare. Per essi sono state proposte efficienti tecniche di analisi e di sintesi, non più applicabili se la linearità viene meno. In secondo luogo, un modello lineare si rivela una buona approssimazione del comportamento di numerosi sistemi reali purché questi siano sottoposti a piccoli ingressi.

Definizione 3.2.1. Un sistema è detto

- *Lineare*: se per esso vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Ciò significa che se il sistema risponde alla causa c_1 con l'effetto e_1 e alla causa c_2 con l'effetto e_2 , allora la risposta del sistema alla causa $ac_1 + bc_2$ è $ae_1 + be_2$ qualunque siano i valori assunti dalle costanti a e b . Il seguente schema riassume tale proprietà:

$$\left. \begin{array}{l} \text{causa } c_1 \rightsquigarrow \text{effetto } e_1 \\ \text{causa } c_2 \rightsquigarrow \text{effetto } e_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{causa } (ac_1 + bc_2) \rightsquigarrow \text{effetto } (ae_1 + be_2);$$

- *Non lineare*: in caso contrario.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia lineare è che il legame **IU** sia espresso da una equazione differenziale lineare, cioè per un sistema SISO:

$$a_0(t)y(t) + a_1(t)\dot{y}(t) + \dots + a_n(t)y^{(n)}(t) = b_0(t)u(t) + b_1(t)\dot{u}(t) + \dots + b_m(t)u^{(m)}(t)$$

Un sistema MIMO invece è lineare se e solo se ciascuna delle funzioni h_i , $i = 1, \dots, p$, esprime una combinazione lineare tra la i -esima componente dell'uscita e le sue n_i derivate e le variabili di ingresso con le loro derivate.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia lineare è che nel modello in **VS** sia l'equazione di stato che la trasformazione di uscita siano equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = a_{1,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{1,n}(t)x_n(t) + b_{1,1}u_1(t) + \dots + b_{1,r}u_r(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{n,n}(t)x_n(t) + b_{n,1}u_1(t) + \dots + b_{n,r}u_r(t) \\ y_1(t) = c_{1,1}(t)x_1(t) + \dots + c_{1,n}(t)x_n(t) + d_{1,1}u_1(t) + \dots + d_{1,r}u_r(t) \\ \vdots \\ y_p(t) = c_{p,1}(t)x_1(t) + \dots + c_{p,n}(t)x_n(t) + d_{p,1}u_1(t) + \dots + d_{p,r}u_r(t) \end{array} \right.$$

ovvero

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \{a_{i,j}(t)\} \text{ matrice } n \times n; \\ \mathbf{C}(t) &= \{c_{i,j}(t)\} \text{ matrice } p \times n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(t) &= \{b_{i,j}(t)\} \text{ matrice } n \times r; \\ \mathbf{D}(t) &= \{d_{i,j}(t)\} \text{ matrice } p \times r; \end{aligned}$$

3.3 Tempo-invarianza

Un'altra importante proprietà di cui gode un'ampia classe di sistemi è la *tempo-invarianza* o stazionarietà. In particolare, in questo testo ci occuperemo proprio dell'analisi dei sistemi lineari e stazionari.

Definizione 3.3.1. Un sistema è detto

- *Tempo-invariante*: se per esso vale il principio di traslazione causa-effetto nel tempo, cioè se il sistema risponde sempre con lo stesso effetto ad una data causa, a prescindere dall'istante di tempo in cui tale causa agisca sul sistema.
Il seguente schema riassume tale proprietà:

$$\text{causa } c(t) \rightsquigarrow \text{effetto } e(t) \implies \text{causa } c(t - T) \rightsquigarrow \text{effetto } e(t - T);$$

- *Tempo-variante*: in caso contrario.

La **Fig. 4.** mostra il comportamento tipico di un sistema lineare sollecitato dalla stessa causa applicata in due diversi intervalli di tempo, ossia a partire da $t = 0$ e a partire da $t = T$: nei due casi l'effetto risultante è analogo ma ha semplicemente origine da istanti di tempo che differiscono tra di loro proprio di una quantità pari a T .

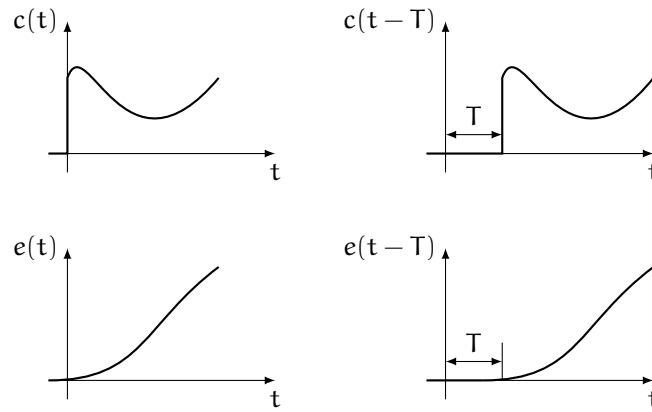


Fig. 4. Traslazione causa-effetto nel tempo

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia stazionario è che il legame **IU** non dipenda esplicitamente dal tempo, cioè per un sistema SISO:

$$h\left(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(m)}(t)\right) = 0$$

che nel caso dei sistemi lineari si riduce a una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$a_0 y(t) + a_1 \dot{y}(t) + \dots + a_n y^{(n)}(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \dots + b_m u^{(m)}(t).$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia stazionario è che nel modello in **VS** l'equazione di stato e la trasformazione di uscita non dipendano esplicitamente dal tempo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

che nel caso dei sistemi lineari si riduce a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

dove A, B, C e D sono matrici costanti.

4 Analisi nel dominio del tempo delle rappresentazioni VS

Un sistema lineare e stazionario di ordine n , con r ingressi e p uscite, ha la seguente rappresentazione in VS:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1)$$

Il problema fondamentale dell'analisi dei sistemi per un tale sistema consiste nel determinare l'andamento dello stato $\mathbf{x}(t)$ e dell'uscita $\mathbf{y}(t)$ per $t \geq t_0$ noto:

- il valore dello stato iniziale $\mathbf{x}(t_0)$;
- l'andamento dell'ingresso $\mathbf{u}(t)$ per $t \geq t_0$.

4.1 Matrice di transizione di stato

Data una matrice quadrata \mathbf{A} il suo esponenziale è la matrice

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$$

La matrice di transizione dello stato $e^{\mathbf{A}t}$ è una particolare matrice esponenziale i cui elementi sono funzioni del tempo di dimensione $n \times n$ e anche \mathbf{A} è $n \times n$

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

Se \mathbf{A} è una matrice **diagonale** di dimensione $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{vale} \quad e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

4.2 Sviluppo di Sylvester

Ci si pone ora il problema di determinare l'espressione analitica della matrice di transizione dello stato $e^{\mathbf{A}t}$ senza dover necessariamente calcolare la serie infinita che la definisce. Tale procedura si basa sullo sviluppo di Sylvester, esiste una seconda procedura, basata sul passaggio alla forma diagonale o alla forma di Jordan e una terza procedura, basata sull'uso delle trasformate di Laplace.

Definizione 4.2.1. Se \mathbf{A} è una matrice di dimensione $n \times n$, la corrispondente matrice di transizione dello stato $e^{\mathbf{A}t}$ può essere scritta come:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(t) \mathbf{A}^i = \beta_0(t) \mathbf{I} + \beta_1(t) \mathbf{A} + \dots + \beta_{n-1}(t) \mathbf{A}^{n-1}$$

dove i coefficienti dello sviluppo $\beta_i(t)$ sono opportune funzioni scalari nel tempo.

I coefficienti dello sviluppo di Sylvester possono venire determinati risolvendo un sistema di equazioni lineari. Esistono sostanzialmente tre diversi casi che vengono discussi di seguito.

4.2.1 Autovalori di molteplicità unitaria

Se la matrice A ha autovalori tutti distinti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, le n funzioni incognite $\beta_i(t)$ si ricavano risolvendo il seguente sistema di n equazioni (tante equazioni quanti sono gli autovalori):

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \lambda_1 \beta_1(t) + \lambda_1^2 \beta_2(t) + \dots + \lambda_1^{n-1} \beta_{n-1}(t) = e^{\lambda_1 t} \\ \beta_0(t) + \lambda_2 \beta_1(t) + \lambda_2^2 \beta_2(t) + \dots + \lambda_2^{n-1} \beta_{n-1}(t) = e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \beta_0(t) + \lambda_n \beta_1(t) + \lambda_n^2 \beta_2(t) + \dots + \lambda_n^{n-1} \beta_{n-1}(t) = e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

ovvero risolvendo il sistema di equazioni lineari

$$V\beta = \eta$$

dove

- $\beta = [\beta_0(t) \ \beta_1(t) \ \dots \ \beta_{n-1}(t)]^T$ è il vettore delle incognite
- La matrice dei coefficienti vale

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

- $\eta = [e^{\lambda_1 t} \ e^{\lambda_2 t} \ \dots \ e^{\lambda_n t}]^T$ è il vettore dei termini noti.

Viene detta **modo della matrice A** associato all'autovalore λ la generica componente $e^{\lambda t}$ (una funzione nel tempo) del vettore η .

4.2.2 Autovalori di molteplicità non unitaria

Se la matrice A ha autovlari di molteplicità non unitaria, si costruisce un sistema in cui ad ogni autovalore λ di molteplicità v corrispondono v equazioni della forma:

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \lambda \beta_1(t) + \dots + \lambda^{n-1} \beta_{n-1}(t) = e^{\lambda t} \\ \frac{d}{d\lambda} (\beta_0(t) + \lambda \beta_1(t) + \dots + \lambda^{n-1} \beta_{n-1}(t)) = \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t} \\ \vdots \\ \frac{d^{v-1}}{d\lambda^{v-1}} (\beta_0(t) + \lambda \beta_1(t) + \dots + \lambda^{n-1} \beta_{n-1}(t)) = \frac{d^{v-1}}{d\lambda^{v-1}} e^{\lambda t} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \lambda \beta_1(t) + \dots + \lambda^{n-1} \beta_{n-1}(t) = e^{\lambda t} \\ \beta_1(t) + 2\lambda \beta_2(t) + \dots + (n-1)\lambda^{n-2} \beta_{n-1}(t) = t e^{\lambda t} \\ \vdots \\ \frac{(v-1)!}{0!} \beta_{v-1}(t) + \dots + \frac{(n-1)!}{(n-v)!} \lambda^{n-v} \beta_{n-1}(t) = t^{v-1} e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Anche in tal caso è possibile scrivere un sistema lineare in cui ad ogni autovalore λ i molteplicità v sono associate v righe della matrice dei coefficienti V :

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^{v-1} & \cdots & \lambda^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda & \cdots & (v-1)\lambda^{v-2} & \cdots & (n-1)\lambda^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (v-1)! & \cdots & \frac{(n-1)!}{(n-v)!}\lambda^{n-v} \end{bmatrix}$$

e v righe del vettore dei termini noti $\eta = [e^{\lambda t} \quad te^{\lambda t} \quad \cdots \quad t^{v-1}e^{\lambda t}]^T$.

4.2.3 Autovalori complessi

Anche nel caso in cui vi siano autovalori complessi è possibile determinare i coefficienti dello sviluppo di Sylvester come sopra indicato.

Per evitare, tuttavia, di lavorare con numeri complessi conviene modificare la procedura per il calcolo dei coefficienti β come segue (tratteremo solo il caso di autovalori di molteplicità unitaria per semplicità). Supponiamo che fra gli n autovalori della matrice ve ne siano 2 complessi e coniugati $\lambda, \lambda' = \alpha \pm j\omega$.

In tal caso nel sistema di equazioni dovrebbero comparire le due equazioni

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \lambda_1\beta_1(t) + \lambda_1^2\beta_2(t) + \cdots + \lambda_1^{n-1}\beta_{n-1}(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t}e^{j\omega t} \\ \beta_0(t) + \lambda'\beta_1(t) + (\lambda')^2\beta_2(t) + \cdots + (\lambda')^{n-1}\beta_{n-1}(t) = e^{\lambda' t} = e^{\alpha t}e^{-j\omega t} \end{cases}$$

Possiamo tuttavia sostituire queste due equazioni con due equazioni equivalenti in cui non compaiono termini complessi:

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \operatorname{Re}(\lambda)\beta_1(t) + \operatorname{Re}(\lambda^2)\beta_2(t) + \cdots + \operatorname{Re}(\lambda^{n-1})\beta_{n-1}(t) = e^{\lambda_1 t} \cos(\omega t) \\ \beta_0(t) + \operatorname{Im}(\lambda)\beta_1(t) + \operatorname{Im}(\lambda^2)\beta_2(t) + \cdots + \operatorname{Im}(\lambda^{n-1})\beta_{n-1}(t) = e^{\lambda_1 t} \sin(\omega t) \end{cases}$$

dove Re e Im indicano la parte reale e immaginaria di un numero complesso. In particolare dunque vale $\operatorname{Re}(\lambda) = \alpha$ e $\operatorname{Im}(\lambda) = \omega$

4.3 Formula di Lagrange

Possiamo finalmente dimostrare un importante risultato che determina la soluzione al problema di analisi per i sistemi MIMO precedentemente enunciato. Tale risultato è noto con il nome di formula di Lagrange.

Definizione 4.3.1. La soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con stato iniziale $x(t_0)$ e andamento dell'ingresso $u(t)$ (per $t \geq t_0$) vale per $t \geq t_0$:

$$\begin{cases} x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + C \int_{t_0}^t Bu(\tau)d\tau + Du(t) \end{cases}$$

4.3.1 Evoluzione libera e evoluzione forzata

In base al precedente risultato possiamo anche scrivere l'**evoluzione dello stato** per $t \geq t_0$ come la somma di due termini:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_f(t).$$

- Il termine

$$\mathbf{x}_l(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0)$$

corrisponde all'*evoluzione libera dello stato* a partire dalle condizioni iniziali $\mathbf{x}(t_0)$. Si noti che $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ indica appunto come avviene la transizione dallo stato $\mathbf{x}(t_0)$ allo stato $\mathbf{x}(t)$ in assenza di contributi dovuti all'ingresso.

- Il termine

$$\mathbf{x}_f(t) = \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau = \int_0^{t-t_0} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(t-\tau) d\tau$$

corrisponde all'*evoluzione forzata dello stato* (la seconda equazione si dimostra per cambiamento di variabile). Si osservi che in tale integrale il contributo di $\mathbf{u}(\tau)$ allo stato $\mathbf{x}(t)$ è pesato tramite la funzione ponderatrice $e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}$.

Anche l'**evoluzione dell'uscita** per $t \geq t_0$ si può scrivere come la somma di due termini:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_l(t) + \mathbf{y}_f(t).$$

- Il termine

$$\mathbf{y}_l(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}_l(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0)$$

corrisponde all'*evoluzione libera dell'uscita* a partire dalle condizioni iniziali $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t_0)$.

- Il termine

$$\mathbf{y}_f(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}_f(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) = \mathbf{C} \int_{t_0}^t \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$$

corrisponde all'*evoluzione forzata dell'uscita*.

4.3.2 Risposta impulsiva di una rappresentazione in VS

La risposta impulsiva $\omega(t)$ di un sistema SISO è la risposta forzata che consegue all'applicazione di un impulso unitario e dunque, posto $u(t) = \delta(t)$, in base alla formula di Lagrange vale:

$$\omega(t) = \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \delta(t-\tau) d\tau + \mathbf{D} \delta(t).$$

Ricordando la fondamentale proprietà della funzione di Dirac per cui se f è una funzione continua in $[t_a, t_b]$ e t appartiene a questo intervallo vale

$$\int_{t_a}^{t_b} f(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = \int_{t_a}^{t_b} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

si ottiene finalmente

$$\omega(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t)$$

4.4 Trasformazione di similitudine

La forma assunta da una rappresentazione in VS di un dato sistema dipende dalla scelta delle grandezze che si considerano come variabili di stato. Tale scelta non è unica e infatti si possono dare infinite diverse rappresentazioni dello stesso sistema, tutte legate da un particolare tipo di trasformazione detta di similitudine.

Uno dei principali vantaggi di questa procedura consiste nel fatto che attraverso particolari trasformazioni è possibile passare a nuove rappresentazioni in cui la matrice di stato assume una *forma canonica* particolarmente facile da studiare.

Esempi di forme canoniche sono la *forma diagonale* e la *forma di Jordan*.

Definizione 4.4.1. Data una rappresentazione della forma (1) si consideri il vettore $z(t)$ legato a $x(t)$ dalla trasformazione

$$x(t) = Pz(t)$$

dove P è una qualunque matrice di costanti $n \times n$ non-singolare. Dunque esiste sempre l'inversa di P e vale anche $z(t) = P^{-1}x(t)$. Tale trasformazione è la **trasformazione di similitudine** e la matrice P è detta *matrice di similitudine*.

La trasformazione di similitudine porta ad una nuova rappresentazione.

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A'z(t) + B'u(t) \\ y(t) = C'z(t) + D'u(t) \end{cases}$$

dove

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP; & B' &= P^{-1}B; \\ C' &= CP; & D' &= D. \end{aligned}$$

4.5 Diagonalizzazione

Si considera adesso il caso di una particolare trasformazione di similitudine che, sotto opportune ipotesi, permette di passare ad una matrice $A = P^{-1}AP$ in forma diagonale.

Una rappresentazione in cui la matrice di stato è in forma diagonale è detta *forma canonica diagonale* ed essa si presta ad una semplice interpretazione fisica. Si consideri ad esempio un sistema SISO la cui equazione vale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t)$$

L'evoluzione della i -esima componente dello stato è retta dall'equazione

$$\dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t) + b_i u(t)$$

dalla quale si vede che la derivata della componente i -esima non è influenzata dal valore delle altre componenti.

Possiamo dunque pensare a questo sistema come ad una collezione di sottosistemi di ordine 1, ciascuno descritto da una componente del vettore di stato, che evolvono indipendentemente. Il sistema corrispondente alla componente i -esima ha polinomio caratteristico $P_i = (s - \lambda_i)$ e ad esso corrisponde il modo $e^{\lambda_i t}$. Talvolta si è anche soliti definire una rappresentazione diagonale con il termine *disaccoppiata* per indicare appunto l'indipendenza fra i diversi nodi.

Il passaggio da una rappresentazione generica ad una rappresentazione in forma diagonale richiede una particolare matrice di similitudine.

Definizione 4.5.1. Data una matrice A di dimensione $n \times n$ siano v_1, v_2, \dots, v_n un insieme di autovettori linearmente indipendenti corrispondenti agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Definiamo *matrice modale* di A la matrice $n \times n$

$$V = [v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_n]$$

Ogni matrice che ammette matrice modale è *diagonalizzabile*:

Proposizione 4.5.1. Data una matrice A di dimensione $n \times n$ e autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e V una sua matrice modale. La matrice A ottenuta attraverso la trasformazione di similitudine

$$A = P^{-1}AP$$

è diagonale.

4.6 Forma di Jordan

Si consideri una matrice A di dimensione $n \times n$ i cui autovalori hanno molteplicità non unitaria. In tal caso non vi è garanzia che esistano n autovettori linearmente indipendenti con cui costruire una matrice modale: dunque non è sempre possibile determinare una trasformazione di similitudine che porti ad una forma diagonale.

Si dimostra, tuttavia, che è sempre possibile, estendendo il concetto di autovettore, determinare un insieme di n *autovettori generalizzati* linearmente indipendenti.

Tali vettori possono venire usati per costruire una *matrice modale generalizzata* che consente, per similitudine, di passare ad una matrice in *forma di Jordan*, una forma canonica diagonale a blocchi che generalizza la forma diagonale.

Definizione 4.6.1. Dato un numero complesso $\lambda \in \mathbb{C}$ e un numero intero $p \geq 1$ definiamo **blocco di Jordan** di ordine p associato a λ la matrice quadrata

$$J = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}}_p \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}} \right\} p$$

Ogni elemento lungo la diagonale di tale matrice vale λ , mentre ogni elemento lungo la sopra diagonale vale 1; ogni altro elemento è nullo. Dunque λ è un autovalore di molteplicità algebrica p del blocco J .

Possiamo ora definire la forma canonica di Jordan.

Definizione 4.6.2. (Forma di Jordan) Una matrice A è detta in **forma di Jordan** se essa è una matrice diagonale a blocchi

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_q \end{bmatrix}$$

In cui ogni blocco J_i lungo la diagonale è un blocco di Jordan associato ad un autovalore λ_i (per $i = 1, \dots, q$).

Matrice di Jordan:

$$J = \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{J_q} \end{bmatrix}}_{\mu_{a_1}} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{J_q} \end{bmatrix}} \right\} \mu_{a_q}$$

Blocco di Jordan:

$$J_i = \left. \begin{bmatrix} \boxed{J_{1,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_{2,2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{J_{1,q_i}} \end{bmatrix} \right\} \mu_{a_i}$$

Mini blocco di Jordan:

$$J_{i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{i-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

dove

- q è il numero di autovalori λ_i distinti
- $i \rightarrow \lambda_i$
- $j \rightarrow i, \dots, q_i$
- μ_{a_i} è la dimensione del blocco di Jordan J_i ed è la molteplicità algebrica che coincide con il rango di J_i .
- μ_{g_i} è il numero di mini blocchi $J_{i,j}$ ed è la molteplicità geometrica dell'autovalore λ_i
- $1 \leq \mu_g \leq \mu_a \leq n$

Definizione 4.6.3 (Struttura di autovettori generalizzati). Sia A una matrice $n \times n$ e sia λ un autovalore di molteplicità ν a cui corrispondono μ autovettori linearmente indipendenti (con $1 \leq \mu \leq \nu$). A tale autovalore compete una struttura di ν autovettori generalizzati linearmente indipendenti costituita da μ catene:

$$\begin{cases} v_{p_1}^{(1)} \rightarrow \cdots \rightarrow v_2^{(1)} \rightarrow v_1^{(1)} & \text{catena 1} \\ v_{p_2}^{(2)} \rightarrow \cdots \rightarrow v_2^{(2)} \rightarrow v_1^{(2)} & \text{catena 2} \\ \vdots & \vdots \\ v_{p_\mu}^{(\mu)} \rightarrow \cdots \rightarrow v_2^{(\mu)} \rightarrow v_1^{(\mu)} & \text{catena } \mu \end{cases}$$

il numero di catene μ è detto **molteplicità geometrica** dell'autovalore λ . La i -esima catena ha lunghezza p_i e termina con un autovettore $v_1^{(i)}$. Gli altri autovettori della catena sono autovettori generalizzati ma non sono autovettori. Poiché in totale gli autovettori generalizzati sono ν vale anche

$$\sum_{i=1}^{\mu} p_i = \nu$$

La lunghezza della catena più lunga $\pi = \max\{p_1, p_2, \dots, p_\mu\}$ è detta **indice** dell'autovalore λ .

4.6.1 Teorema di Cayley-Hamilton

Il seguente teorema di Cayley-Hamilton definisce il concetto di funzione polinomiale di una matrice quadrata e afferma che *una matrice è radice del proprio polinomio caratteristico*.

Teorema 4.6.1 (Cayley-Hamilton). Data una matrice quadrata A di ordine n , sia

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

il suo **polinomio caratteristico**. La matrice A è **radice** del suo stesso polinomio caratteristico, ovvero soddisfa la seguente equazione:

$$P(A) \triangleq A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + A_1s + a_0I = 0$$

dove 0 è una matrice quadrata di ordine n i cui elementi valgono tutti zero.

4.6.2 Condizioni di diagonalizzabilità

La matrice A $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se è verificata una delle seguenti condizioni:

- Esistono n autovettori linearmente indipendenti.
- Se μ_{α_i} dell'autovalore λ_i è uguale alla sua molteplicità geometrica μ_{g_i} .
- Se la dimensione di tutti i mini blocchi di Jordan associato a λ_i è unitaria.
- Se per ogni λ_i la dimensione m_i del più grande mini blocco di Jordan è unitaria.
- Se il grado di molteplicità di ogni λ_i nel polinomio minimo $m(\lambda)$ è unitario.

5 Jordan e cambiamento di base tutorial

Data una matrice A per ricavare la matrice T di cambiamento di base (matrice modale) e poi la matrice di Jordan J si eseguono i seguenti passi:

1. Calcolo del polinomio caratteristico $P_A = \det(A - \lambda I)$. Da questo mi ricavo gli autovalori λ_n e la molteplicità algebrica μ_α .
2. Per ogni autovalore λ_i , $i = 1 \dots n$ calcolo lo spazio nullo $N(A - \lambda_i I)$ e ricavo quindi la dimensione dello spazio nullo $\dim(N)$.
3. Se $\dim(N) < \mu_\alpha$ allora calcolo $N(A - \lambda_i I)^p$ finché $\dim(N) = \mu_\alpha$.
4. Una volta trovato p , scelgo un vettore v che non è presente nello spazio nullo precedente.
5. Calcolo così la catena di Jordan a ritroso ricavando gli altri vettori: $v_{n-1} = (A - \lambda_n)v_n$.
6. Ottengo così la matrice di trasformazione T fatta in questo modo:

$$T = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]$$

Esempio 5.1. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

calcolare la matrice T di cambiamento di base e poi la A in forma di Jordan data dalla formula

$$A = T^{-1}JT$$

1. Calcolo il polinomio caratteristico P_A :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -3 & 2-\lambda & -1 \\ -3 & 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2-\lambda & -1 \\ -3 & 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} + 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1-\lambda & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda) \left((1-\lambda)[(2-\lambda)(-1-\lambda) + 2] + 3[(1+\lambda) - 2] - 3[1 - (2-\lambda)] \right) - 1 \left(0 + 3[(1+\lambda) - 2] - 3[1 - (2-\lambda)] \right) \\ &\quad + 1 \left(0 - (1-\lambda)[(1+\lambda) - 2] - 0 \right) = (2-\lambda)(1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda) - 0 + (\lambda - 1)^2 = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 \\ &= (\lambda - 1)^4 \end{aligned}$$

Ho quindi che: $P_A = (\lambda - 1)^4$ $\lambda_{1,2,3,4} = 1$ $\mu_a = 4$.

2. Procedo con il calcolo della molteplicità geometrica μ_g dell'autovalore $\lambda = 1$ calcolando lo spazio nullo generato:

$$N(A - 1I) = N \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Devo quindi trovare una base che mi rappresenta lo spazio nullo. Utilizzo il metodo di *Echelon* per portare il sistema in forma triangolare.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{43}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(-1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ho quindi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = 0 \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i vettori che rappresentano la base dello spazio nullo *normalizzati* risultano essere quindi

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Ricavo quindi che $\mu_g = 2$ per λ_1 . Perciò so che avrò due catene di Jordan e che la matrice di Jordan avrà due mini-blocchi.

3. Siccome $\dim(N)(=2) < \mu_a(=4)$ allora calcolo $N(A - 1I)^2$:

$$\begin{aligned} N(A - 1I)^2 &= N \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}^2 \right) = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{42}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ho quindi il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + x_4 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \gamma \end{cases} \quad \text{perciò la base di } N \text{ è } \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Però $\dim(N)(=3) < \mu_a(=4)$ perciò calcolo $N(A - 1I)^3$:

$$N(A - 1I)^3 = N \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \right) = N \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \emptyset$$

Quindi abbiamo che la base per lo spazio nullo è:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

posso quindi fermarmi dato che $\dim(N) = \mu_a$.

4. Scelgo un vettore $v \in N(A - 1I)^3$ che non è presente (non è combinazione lineare di) nello spazio nullo $N(A - 1I)^2$.

Perciò scelgo $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. Calcolo a ritroso la catena di Jordan ricavando gli altri vettori sapendo che $v_{n-1} = (A - 1I)v_n$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

aggiungo poi un altro vettore linearmente indipendente dagli altri: $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = v_0$

6. Ottengo così la matrice di trasformazione T :

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = [v_0 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3]$$

6 Stabilità

L'importanza di tale proprietà deriva dal fatto che la stabilità è una specifica imposta a quasi ogni sistema fisico controllato perché implica la possibilità di lavorare intorno a certe condizioni nominali senza discostarsi troppo da esse.

Nel seguito verranno introdotte due diverse definizioni di stabilità: la prima relativa al legame ingresso-uscita (stabilità BIBO), la seconda relativa ad una rappresentazione in termini di variabili di stato (stabilità alla Lyapunov).

6.1 Stabilità BIBO

Definizione 6.1.1 (stabilità BIBO). Un sistema SISO è detto BIBO (bounded-input bounded-output) stabile se e solo se a partire da una condizione di riposo, ad ogni ingresso limitato risponde con un'uscita anch'essa limitata.

Teorema 6.1.1 (condizione necessaria e sufficiente per la BIBO stabilità). Si consideri un sistema SISO lineare e stazionario. La *condizione necessaria e sufficiente* affinché tale sistema sia BIBO stabile è che la sua risposta impulsiva sia **assolutamente sommabile**, ovvero:

$$\exists M > 0 \text{ t.c. } \int_0^{\infty} |\omega(\tau)| d\tau \leq M < \infty$$

Proposizione 6.1.1 (condizione necessaria e sufficiente per l'assoluta sommabilità di $\omega(t)$). La condizione necessaria e sufficiente per l'assoluta sommabilità di $\omega(t)$ è che $\omega(t)$ contenga tutti i modi del sistema, ovvero $A_{i,k} \neq 0 \quad \forall i \in 1, \dots, r \quad \forall k = 0, 1, \dots, v_i - 1$

Teorema 6.1.2. La *condizione necessaria e sufficiente* affinché un sistema SISO, lineare, stazionario a parametri concentrati e in forma minima sia BIBO stabile:

- Tutte le **radici** del *polinomio caratteristico* siano a *parte reale negativa*.
- Tutti i **poli** della *funzione caratteristica* siano a *parte reale strettamente negativa*.

6.2 Lyapunov in termini di variabili di stato

Definizione 6.2.1 (Sistema Autonomo). Un sistema nella forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

è **autonomo** se:

- $\mathbf{u}(t)$ è identicamente *nullo*.
- è *stazionario*, ovvero \mathbf{f} non dipende esplicitamente dal tempo.

Quindi il sistema diventa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

Definizione 6.2.2 (Stato di equilibrio). Uno stato \mathbf{x}_e è uno **stato di equilibrio** (o punto di equilibrio) per il sistema se vale:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_e \Rightarrow (\forall t \geq \tau) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$$

Ovvero se ogni traiettoria che parte da \mathbf{x}_e in tempo τ resta in \mathbf{x}_e all'istante successivo.

- Uno stato di equilibrio è **stabile** se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ t.c. se } \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_e\| \leq \delta(\epsilon) \text{ allora } \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

- L'*origine* di uno stato di equilibrio è **stabile** se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ t.c. se } \|\mathbf{x}(0)\| \leq \delta(\epsilon) \text{ allora } \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

- Uno stato di equilibrio è **asintoticamente stabile** se è *stabile* e $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$
- L'origine di uno stato di equilibrio è **asintoticamente stabile** se è *stabile* e $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$

Proposizione 6.2.1. Se uno stato di equilibrio x_e è *asintoticamente stabile*, qualunque sia lo stato iniziale da cui la traiettoria ha origine, allora x_e è **globalmente asintoticamente stabile**. Ne deriva che x_e è l'unico stato di equilibrio del sistema.

6.3 Lyapunov per sistemi lineari e stazionari

Proposizione 6.3.1. Se $\dot{x} = Ax(t)$ è un sistema *lineare autonomo*, x_e è un punto di equilibrio sse vale

$$Ax_e = 0$$

dove x_e è la soluzione di tale sistema lineare omogeneo.

Ricaviamo dunque che:

- Se A non è singolare (determinante $\neq 0$), l'unico punto di equilibrio è $x_e = 0$ (l'origine).
- Se A è singolare, il sistema ha un numero infinito di stati di equilibrio che descrivono uno **spazio lineare**: tutti questi stati sono contenuti nello spazio nullo $N(A)$.

Proposizione 6.3.2. Dato un sistema *lineare autonomo*:

- Se uno stato di equilibrio è *stabile* (instabile) \Rightarrow tutti gli altri x_e sono *stabili* (instabili).
- Se uno stato di equilibrio è *asintoticamente stabile* allora valgono:
 - $x_e = 0$.
 - x_e è l'unico stato di equilibrio.
 - x_e è globalmente asintoticamente stabile.

Proposizione 6.3.3. Dato il sistema lineare *stazionario*: $\dot{x}(t) = Ax(t)$:

- È **asintoticamente stabile** sse tutti gli *autovalori* di A hanno *parte reale negativa*.
- È **stabile** sse A non ha autovalori a *parte reale positiva* e gli eventuali autovalori nulli hanno **indice unitario** (molteplicità $\mu_g = 1$).
- È **instabile** sse A ha *almeno un* autovalore a *parte reale positiva oppure* *parte reale nulla e* *indice non unitario*.

6.4 Stabilità con la funzione di Lyapunov

Definizione 6.4.1 (Funzione definita positiva). La funzione $V(x)$ scalare, continua è **definita positiva** in x' se \exists una regione Ω dello spazio di stato (intorno circolare di x') tale che

$$V(x) > 0 \quad \forall \text{ stato } x \neq x' \text{ in } \Omega \text{ e } V(x') = 0$$

Se Ω coincide con l'intero spazio di stato allora $V(x)$ è **globalmente definita positiva**.

Definizione 6.4.2 (Funzione semi-definita positiva). La funzione $V(x)$ scalare, continua è **semi-definita positiva** in x' se \exists una regione Ω dello spazio di stato (intorno circolare di x') tale che

$$V(x) \geq 0 \quad \forall \text{ stato } x \neq x' \text{ in } \Omega \text{ e } V(x') = 0$$

Se Ω coincide con l'intero spazio di stato allora $V(x)$ è **globalmente semi-definita positiva**.

Definizione 6.4.3 (Funzione (globalmente) (semi-)definita negativa). La funzione $V(x)$ scalare, continua è **(globalmente) (semi)-definita negativa** in x' se $-V(x)$ è (globalmente) (semi-)definita positiva in x' .

Teorema 6.4.1 (Metodo di Lyapunov). Considero il sistema autonomo $\dot{x}(t) = f(x(t))$ dove $f(\cdot)$ è continuo, con le derivate parziali prime $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $i = 1, \dots, n$.

Sia x_e un punto di equilibrio per il sistema, cioè $f(x_e) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

Se esiste una *funzione scalare continua* $V(x)$ continua insieme alle sue derivate parziali prime, *definita positiva* in x_e e tale che

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot f(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n$$

- Se $\dot{V}(x)$ è **semi-definita negativa** in $x_e \Rightarrow x_e$ è uno *stato di equilibrio stabile*.
- Se $\dot{V}(x)$ è **definita negativa** in $x_e \Rightarrow x_e$ è uno *stato di equilibrio asintoticamente stabile*.
- Se $\dot{V}(x)$ è **definita positiva** in $x_e \Rightarrow x_e$ è uno *stato di equilibrio instabile*.

6.5 Matrice di linearizzazione o Jacobiana

La matrice di linearizzazione o matrice Jacobiana o Jacobiano di $f(\cdot)$ calcolata in x_e è definita nel seguente modo:

$$J(x_e) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x_e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_e}$$

- Se J ha autovalori *tutti* a parte reale *negativa* $\Rightarrow x_e$ è **asintoticamente stabile**.
- Se J ha *almeno un* autovalore a parte reale *positiva* $\Rightarrow x_e$ è **instabile**.

7 Controllabilità

Definizione 7.0.1 (Sistema controllabile). Un sistema *lineare stazionario*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

è **controllabile** sse è possibile, agendo sull'ingresso, trasferire lo stato del sistema da un qualunque stato iniziale $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ ad un qualunque altro stato $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}(t_f)$, detto *stato zero* o *stato obiettivo*, in un tempo finito $t_f \geq 0$.

Definizione 7.0.2 (Gramiano di controllabilità). Dato un sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$, il **gramiano di controllabilità** è la matrice $n \times n$:

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau$$

Il sistema è **controllabile** se il gramiano non è singolare $\forall t > 0$.

Definizione 7.0.3 (Matrice di controllabilità). La matrice di controllabilità è una $(n) \times (r \cdot n)$ definita come segue:

$$\mathcal{T} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

Condizione *necessaria e sufficiente* affinché il sistema sia controllabile:

$$n_c \stackrel{\text{def}}{=} \text{rango}(\mathcal{T}) = n$$

Proposizione 7.0.1. Dato il sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t)$$

dove \mathbf{A} è in forma diagonale con autovalori tutti distinti, la condizione necessaria e sufficiente affinché sia **controllabile** è che \mathbf{B} non abbia righe identicamente nulle.

Proposizione 7.0.2. La trasformazione di **similitudine** preserva la controllabilità.

Definizione 7.0.4 (Forma canonica di Kalman). Dato il sistema

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}'\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}'\mathbf{u}(t)$$

è nella forma canonica di Kalman se:

$$\mathbf{A}' = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}'_c & \mathbf{A}'_1 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}'_{nc} \end{array} \right] \quad \mathbf{B}' = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}'_c \\ \hline \mathbf{0} \end{array} \right]$$

dove:

- \mathbf{A}'_c è quadrata con ordine uguale al rango n_c della matrice di controllabilità \mathcal{T} .
- \mathbf{B}'_c ha numero di *righe* uguale al rango n_c della matrice di controllabilità \mathcal{T} .

In particolare la coppia (A'_c, B'_c) è controllabile.

Il vettore z può essere riscritto come:

$$z = \left[\begin{array}{c} z_c \\ \hline z_{nc} \end{array} \right] \begin{array}{l} \longrightarrow \in \mathbb{R}^{n_c} \\ \longrightarrow \in \mathbb{R}^{n-n_c} \end{array}$$

Quindi il sistema può essere decomposto in due parti:

- Parte controllabile di ordine n_c : $\dot{z}_c(t) = A'_c z_c(t) + A'_1 z_{nc}(t) + B'_c u(t)$
- Parte non controllabile di ordine $n - n_c$: $\dot{z}_{nc}(t) = A'_{nc} z_{nc}(t)$