Università degli Studi di Verona

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA
Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche

Sistemi Dinamici

Riassunto dei principali argomenti

Autore:
Danzi Matteo
Matricola VR424987

Anno Accademico 2017/2018

Indice

1 Introduzione

1.1 Sistema

Definizione 1.1. Un sistema è un ente fisico, tipicamente formato da diverse componenti tra loro interagenti, che risponde a sollecitazioni esterne producendo un determinato comportamento.

Esempio 1.1. Un circuito elettrico costituito da componenti quali resistori, capacitori, induttori, diodi, generatori di corrente e tensione, ecc., costituisce un semplice esempio di sistema dinamico. Il comportamento del sistema può venire descritto dal valore dei segnali di tensione e di corrente nei rami del circuito. Le sollecitazioni che agiscono sul sistema sono le tensioni e le correnti applicate dai generatori, che possono essere imposte dall'esterno.

1.2 Descrizione ingresso-uscita

Le grandezze alla base di una descrizione IU sono le *cause esterne* al sistema e gli *effetti*. Le cause esterne sono delle grandezze che si generano al di fuori del sistema; la loro evoluzione influenza il comportamento del sistema ma non dipende da esso. Gli effetti invece sono delle grandezze la cui evoluzione dipende dalle cause esterne al sistema e dalla natura del sistema stesso. Di solito si usa la convenzione di definire come *ingressi* al sistema le cause esterne, e come *uscite* gli effetti. In generale su un sistema possono agire più ingressi così come più di una possono essere le grandezze in uscita.
La classica rappresentazione grafica di un sistema per il quale siano stati individuati ingressi e uscite è quella mostrata in **Fig. 1.** dove può venire considerato come un operatore che assegna uno specifico andamento alle grandezze in uscita in corrispondenza ad ogni possibile andamento degli ingressi.

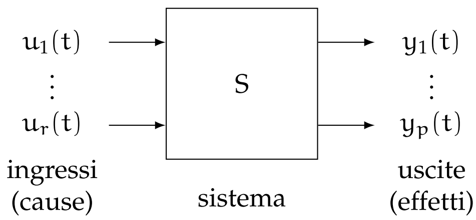

Fig. 1. Descrizione in ingresso-uscita

Di solito su usa la convenzione di indicare con

$$u(t) = \left[\, u_1(t) \;\dots\; u_r(t) \,\right]^T \in \mathbb{R}^r$$

il vettore degli ingressi e con

$$y(t) = \left[\, y_1(t) \;\dots\; y_p(t) \,\right]^T \in \mathbb{R}^p$$

il vettore delle uscite.

1.3 Descrizione in variabili di stato

È facile rendersi conto che in generale l'uscita di un sistema in un certo istante di tempo non dipende dal solo ingresso al tempo, ma dipende anche dall'evoluzione precedente del sistema.

Di questo fatto è possibile tenere conto introducendo una grandezza intermedia tra ingressi e uscite, chiamata *stato* del sistema. Lo stato del sistema gode della proprietà di concentrare in sè l'informazione sul passato e sul presente del sistema. Così come le grandezze di ingresso e uscita, anche lo stato è in generale una grandezza vettoriale e viene indicato mediante un vettore di stato

$$x(t) = \left[\, x_1(t) \;\dots\; x_n(t) \,\right]^T \in \mathbb{R}^n$$

dove il numero di componenti del vettore di stato si indica con e viene detto *ordine* del sistema.

Definizione 1.2. Lo stato di un sistema all'istante di tempo è la grandezza che contiene l'informazione necessaria per determinare univocamente l'andamento dell'uscita $y(t)$, per ogni $t \geqslant t_0$, sulla base della conoscenza dell'andamento dell'ingresso $u(t)$, per $t \geqslant t_0$ e appunto dello stato in t_0.

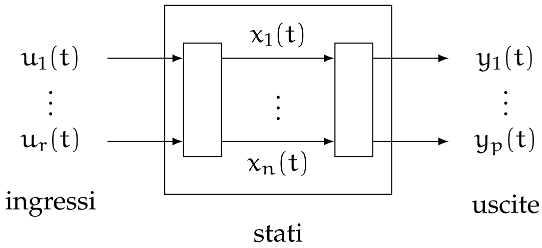

Fig. 2. Descrizione in variabili di stato

2 Modello matematico di un sistema

L'obiettivo dell'Analisi dei Sistemi consiste nel studiare il legame esistente tra gli ingressi e le uscite di un sistema e/o tra gli stati, gli ingressi e le uscite del sistema. In altri termini, risolvere un problema di analisi significa capire, dati certi segnali in ingresso al sistema, come evolveranno gli stati e le uscite di tale sistema.
Questo rende necessaria la definizione di un modello matematico che descriva in maniera quantitativa il comportamento del sistema allo studio, ossia fornisca una descrizione matematica esatta del legame tra ingressi (stati) e uscite. A seconda del tipo di descrizione che si vuole dare al sistema (IU o VS) è necessario formulare due diversi tipi di modello.

2.1 Modello ingresso-uscita

Il modello IU per un sistema MIMO, ossia un sistema con p uscite e r ingressi, è espresso mediante p equazioni differenziali del tipo:

$$\begin{cases} h_1 = \left(\underbrace{y_1(t), \dots, y_1^{(n_1)}(t)}_{\text{uscita } 1}, \underbrace{u_1(t), \dots, u_1^{(m_{1,1})}(t)}_{\text{ingresso } 1}, \dots, \underbrace{u_r(t), \dots, u_r^{(m_{1,r})}(t)}_{\text{ingresso } r}, t \right) = 0 \\ h_2 = \left(\underbrace{y_2(t), \dots, y_2^{(n_2)}(t)}_{\text{uscita } 2}, \underbrace{u_1(t), \dots, u_1^{(m_{2,1})}(t)}_{\text{ingresso } 1}, \dots, \underbrace{u_r(t), \dots, u_r^{(m_{2,r})}(t)}_{\text{ingresso } r}, t \right) = 0 \\ \quad \vdots \\ h_p = \left(\underbrace{y_p(t), \dots, y_p^{(n_p)}(t)}_{\text{uscita } p}, \underbrace{u_1(t), \dots, u_1^{(m_{p,1})}(t)}_{\text{ingresso } 1}, \dots, \underbrace{u_r(t), \dots, u_r^{(m_{p,r})}(t)}_{\text{ingresso } r}, t \right) = 0 \end{cases}$$

dove:

- $h_i,\ i = 1, \dots, p$ sono funzioni di più parametri che dipendono dal particolare sistema allo studio,
- n_i è il grado massimo di derivazione della i-esima componente dell'uscita $y_i(t)$,
- m_i è il grado massimo di derivazione della i-esima componente dell'ingresso $u_i(t)$.

2.2 Modello in variabili di stato

Il modello in VS per un sistema MIMO con r ingressi e p uscite ha invece una struttura del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \\ \\ y_1(t) = g_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \\ \qquad \vdots \\ y_p(t) = g_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \end{cases}$$

che riscritto in forma matriciale diviene

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \end{cases}$$

L'equazione di stato è pertanto un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine, a prescindere dal fatto che il sistema sia SISO o MIMO. La *trasformazione in uscita* è invece una equazione algebrica, scalare o vettoriale a seconda del numero delle variabili in uscita. La rappresentazione schematica che si può dare di un modello in VS è pertanto quella riportata in Fig. 2.5.