Semantica big-step

$$\textbf{(B-Num)}\,\frac{-}{\langle n, s\rangle \Downarrow n} \qquad \textbf{(B-Loc)}\,\frac{-}{\langle l, s\rangle \Downarrow s(l)} \qquad \textbf{(B-Skip)}\,\frac{-}{\langle \text{skip}, s\rangle \Downarrow s} \qquad \textbf{(B-Add)}\,\frac{\langle E_1, s\rangle \Downarrow n_1 \quad \langle E_2, s\rangle \Downarrow n_2}{\langle E_1 + E_2, s\rangle \Downarrow n_3}\, n_3 = \mathtt{add}(n_1, n_2)$$

$$\textbf{(B-Assign)}\,\frac{\langle E, s\rangle \Downarrow n}{\langle l := e, s\rangle \Downarrow s[l \mapsto n]} \qquad \textbf{(B-Assign.s)}\,\frac{\langle E, s\rangle \Downarrow n}{\langle l := e, s\rangle \Downarrow \langle \text{skip}, s[l \mapsto n]\rangle} \qquad \textbf{(B-Seq)}\,\frac{\langle C_1, s\rangle \Downarrow s_1 \quad \langle C_2, s_1\rangle \Downarrow s'}{\langle C_1; C_2, s\rangle \Downarrow s'} \qquad \textbf{(B-Seq.s)}\,\frac{\langle C_1, s\rangle \Downarrow \langle \text{skip}, s_1\rangle \quad \langle C_2, s_1\rangle \Downarrow \langle r, s'\rangle}{\langle C_1; C_2, s\rangle \Downarrow \langle r, s'\rangle}$$

$$\textbf{(B-If.T)}\,\frac{\langle B, s\rangle \Downarrow \mathtt{true} \quad \langle C_1, s\rangle \Downarrow s'}{\langle \text{if } B \text{ then } C_1 \text{ else } C_2, s\rangle \Downarrow s'} \qquad \textbf{(B-If.T)}\,\frac{\langle B, s\rangle \Downarrow \mathtt{true} \quad \langle C_1, s\rangle \Downarrow \langle r, s'\rangle}{\langle \text{if } B \text{ then } C_1 \text{ else } C_2, s\rangle \Downarrow \langle r, s'\rangle} \qquad \textbf{(B-If.F)}\,\frac{\langle B, s\rangle \Downarrow \mathtt{false} \quad \langle C_2, s\rangle \Downarrow s'}{\langle \text{if } B \text{ then } C_1 \text{ else } C_2, s\rangle \Downarrow s'} \qquad \textbf{(B-If.F)}\,\frac{\langle B, s\rangle \Downarrow \mathtt{false} \quad \langle C_2, s\rangle \Downarrow \langle r, s'\rangle}{\langle \text{if } B \text{ then } C_1 \text{ else } C_2, s\rangle \Downarrow \langle r, s\rangle}$$

$$\textbf{(B-While.T)}\,\frac{\langle B, s\rangle \Downarrow \mathtt{true} \quad \langle C, s\rangle \Downarrow s_1 \quad \langle \text{while } B \text{ do } C, s_1\rangle \Downarrow s'}{\langle \text{while } B \text{ do } C, s\rangle \Downarrow s'} \qquad \textbf{(B-While.F)}\,\frac{\langle B, s\rangle \Downarrow \mathtt{false}}{\langle \text{while } B \text{ do } C, s\rangle \Downarrow s} \qquad \textbf{(B-Do)}\,\frac{\langle B, s\rangle \Downarrow v_1 \quad \langle C, s\rangle \Downarrow v_2}{\langle \text{do } E \text{ return } C, s\rangle \Downarrow v_2}$$

$$\textbf{(B-While.UN)}\,\frac{\langle \text{if } B \text{ then } (C; \text{while } B \text{ do } C) \text{ else skip}, s\rangle \Downarrow r, s'}{\langle \text{while } B \text{ do } C, s\rangle \Downarrow r, s'} \qquad \textbf{(B-Await)}\,\frac{\langle B, s\rangle \Downarrow \mathtt{true}, s_1 \quad \langle C, s_1\rangle \rightarrow^* \langle \text{skip}, s'\rangle}{\langle \text{await } B \text{ protect } C \text{ end}, s\rangle \rightarrow \langle \text{skip}, s'\rangle}$$

$$\textbf{(B-Let-CBN)}\,\frac{E\{{}^{P}\!/_{x}\} \Downarrow n}{\text{let } x = P \text{ in } E \Downarrow n} \qquad \textbf{(B-Let-CBV)}\,\frac{P \Downarrow m \quad E\{{}^{m}\!/_{x}\} \Downarrow n}{\text{let } x = P \text{ in } E \Downarrow n} \qquad \textbf{(B-Fn)}\,\frac{-}{\langle \text{fn } x\colon T \ \Rightarrow \ e, s\rangle \rightarrow \langle \text{fn } x\colon T \ \Rightarrow \ e, s\rangle}$$

$$\textbf{(B-App-CBN)}\,\frac{E_1 \Downarrow \text{fn } x\colon T \Rightarrow E \qquad E\{{}^{E_2}\!/_{x}\} \Downarrow n}{E_1 E_2 \Downarrow n} \qquad \textbf{(B-App-CBV)}\,\frac{E_1 \Downarrow \text{fn } x\colon T \Rightarrow E \qquad E_2 \Downarrow v \qquad E\{{}^{v}\!/_{x}\} \Downarrow n}{E_1 E_2 \Downarrow n}$$

Semantica small-step

Grammatica delle espressioni

$$\text{op} ::= + \mid \geqslant$$

$$e \in \text{Exp} ::= n \mid b \mid e \text{ op } e \mid \text{if } e \text{ then } e \text{ else } e \mid \text{skip} \mid e; e \mid \text{while } e \text{ do } e \mid e_1 := e_2 \mid !e \mid \text{ref } e \mid l \mid \text{fn } x\colon T \Rightarrow e \mid e_1 e_2 \mid \text{let } x\colon T = e \text{ in } e \mid e \oplus e \mid e \| e \mid \text{await } e \text{ protect } e \text{ end} \mid \#\text{lab } e$$

Regole per la semantica

$$\textbf{(S-Left)}\ \frac{E_1 \twoheadrightarrow E_1'}{E_1 + E_2 \twoheadrightarrow E_1' + E_2} \qquad \textbf{(S-N.Right)}\ \frac{E_2 \twoheadrightarrow E_2'}{n_1 + E_2 \twoheadrightarrow n_1 + E_2'} \qquad \textbf{(S-Add)}\ \frac{-}{n_1 + n_2 \twoheadrightarrow_{ch} n_3}\ n_3 = \mathsf{add}(n_1, n_2)$$

$$\textbf{(S-Left)}\ \frac{E_1 \twoheadrightarrow_{ch} E_1'}{E_1 + E_2 \twoheadrightarrow_{ch} E_1' + E_2} \qquad \textbf{(S-Right)}\ \frac{E_2 \twoheadrightarrow_{ch} E_2'}{E_1 + E_2 \twoheadrightarrow_{ch} E_1 + E_2'} \qquad \textbf{(op+)}\ \frac{-}{\langle n_1 + n_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle n, s\rangle}\ n = \mathsf{add}(n_1, n_2)$$

$$\textbf{(op-geq)}\ \frac{-}{\langle n_1 \geqslant n_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle b, s\rangle}\ b = \mathsf{geq}(n_1, n_2) \qquad \textbf{(op1)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 + e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1' + e_2, s'\rangle} \qquad \textbf{(op2)}\ \frac{\langle e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_2', s'\rangle}{\langle v + e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle v + e_2', s'\rangle}$$

$$\textbf{(op1b)}\ \frac{\langle e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_2', s'\rangle}{\langle e_1 + e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1 + e_2', s'\rangle} \qquad \textbf{(op2b)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 + v, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1' + v', s'\rangle} \qquad \textbf{(deref1)}\ \frac{-}{\langle !l, s\rangle \twoheadrightarrow \langle v, s\rangle}\ \text{if } l \in \mathsf{dom}(s) \wedge s(l) = v$$

$$\textbf{(deref2)}\ \frac{\langle e, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e', s'\rangle}{\langle !e, s\rangle \twoheadrightarrow \langle !e', s'\rangle} \qquad \textbf{(ref1)}\ \frac{-}{\langle \text{ref } v, s\rangle \twoheadrightarrow \langle l, s[l \mapsto v]\rangle}\ l \notin \mathsf{dom}(s) \qquad \textbf{(ref2)}\ \frac{\langle e, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e', s'\rangle}{\langle \text{ref } e, s\rangle \twoheadrightarrow \langle \text{ref } e', s\rangle}$$

$$\textbf{(assign1)}\ \frac{-}{\langle l := v, s\rangle \twoheadrightarrow \langle \text{skip}, s[l \mapsto v]\rangle}\ \text{if } l \in \mathsf{dom}(s) \qquad \textbf{(assign2)}\ \frac{\langle e, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e', s'\rangle}{\langle l := e, s\rangle \twoheadrightarrow \langle l := e', s'\rangle} \qquad \textbf{(assign3)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 := e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1' := e_2, s'\rangle}$$

$$\textbf{(if-tt)}\ \frac{-}{\langle \text{if } \mathsf{true} \text{ then } e_1 \text{ else } e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1, s\rangle} \qquad \textbf{(if-ff)}\ \frac{-}{\langle \text{if } \mathsf{false} \text{ then } e_1 \text{ else } e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_2, s\rangle} \qquad \textbf{(if)}\ \frac{\langle e, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e', s'\rangle}{\langle \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle \text{if } e' \text{ then } e_1 \text{ else } e_2, s'\rangle}$$

$$\textbf{(while)}\ \frac{-}{\langle \text{while } e \text{ do } e_1, s\rangle \twoheadrightarrow \langle \text{if } e \text{ then } (e_1; \text{while } e \text{ do } e_1) \text{ else skip}, s\rangle} \qquad \textbf{(assign1b)}\ \frac{-}{\langle l := n, s\rangle \twoheadrightarrow \langle n, s[l \mapsto n]\rangle}\ l \in \mathsf{dom}(s)$$

$$\textbf{(seq.skip)}\ \frac{-}{\langle \mathsf{skip}; e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_2, s\rangle} \qquad \textbf{(seq)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1', s\rangle}{\langle e_1; e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1'; e_2, s'\rangle} \qquad \textbf{(seq.skipb)}\ \frac{-}{\langle v; e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_2, s\rangle}$$

$$\textbf{(record1)}\ \frac{\langle e_i, s\rangle \rightarrow \langle e_i', s'\rangle}{\langle\{\mathrm{lab}_1 = v_1, \dots, \mathrm{lab}_i = e_i, \dots, \mathrm{lab}_k = e_k\}, s\rangle \rightarrow \langle\{\mathrm{lab}_1 = v_1, \dots, \mathrm{lab}_i = e_i', \dots, \mathrm{lab}_k = e_k\}, s'\rangle}$$

$$\textbf{(record2)}\ \frac{-}{\langle \#\mathrm{lab}_i\ \{\mathrm{lab}_1 = v_1, \dots, \mathrm{lab}_i = e_i, \dots, \mathrm{lab}_k = e_k\}, s\rangle \rightarrow \langle v_i, s\rangle} \qquad \textbf{(record3)}\ \frac{\langle e, s\rangle \rightarrow \langle e', s'\rangle}{\langle \#\mathrm{lab}\ e, s\rangle \rightarrow \langle \#\mathrm{lab}\ e', s'\rangle}$$

$$\textbf{(par-L)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \rightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 \| e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_1' \| e_2, s'\rangle} \qquad \textbf{(par-R)}\ \frac{\langle e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_2', s'\rangle}{\langle e_1 \| e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_1 \| e_2', s'\rangle} \qquad \textbf{(end-L)}\ \frac{-}{\langle \mathrm{skip} \| e, s\rangle \rightarrow \langle e, s\rangle} \qquad \textbf{(end-R)}\ \frac{-}{\langle e \| \mathrm{skip}, s\rangle \rightarrow \langle e, s\rangle}$$

$$\textbf{(await)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \rightarrow^* \langle \mathrm{true}, s'\rangle \qquad \langle e_2, s'\rangle \rightarrow^* \langle \mathrm{skip}, s''\rangle}{\langle \mathrm{await}\ e_1\ \mathrm{protect}\ e_2\ \mathrm{end}, s\rangle \rightarrow \langle \mathrm{skip}, s''\rangle} \qquad \textbf{(ChoiceL)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \rightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 \oplus e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_1', s'\rangle} \qquad \textbf{(ChoiceR)}\ \frac{\langle e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_2', s'\rangle}{\langle e_1 \oplus e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_2', s'\rangle}$$

Call-By-Value

$$\textbf{(CBV-app1)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \rightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_1' e_2, s'\rangle} \qquad \textbf{(CBV- app2)}\ \frac{\langle e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_2', s'\rangle}{\langle v e_2, s\rangle \rightarrow \langle v e_2', s'\rangle} \qquad \textbf{(CBV-fn)}\ \frac{-}{\langle (\mathsf{fn}\ x \colon \mathsf{T} \Rightarrow e) v, s\rangle \rightarrow \langle e\{^{v}/_{x}\}, s\rangle}$$

$$\textbf{(CBV-let1)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \rightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle \mathrm{let}\ x \colon \mathsf{T} = e_1\ \mathrm{in}\ e_2, s\rangle \rightarrow \langle \mathrm{let}\ x \colon \mathsf{T} = e_1'\ \mathrm{in}\ e_2, s'\rangle} \qquad \textbf{(CBV-let2)}\ \frac{-}{\langle \mathrm{let}\ x \colon \mathsf{T} = v\ \mathrm{in}\ e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_2\{^{v}/_{x}\}, s\rangle}$$

$$\textbf{(CBV-fix)}\ \frac{e \equiv\ \mathrm{fn}\ f \colon \mathsf{T}_1 \rightarrow \mathsf{T}_2\ \Rightarrow\ e_2}{\mathrm{fix}.e \rightarrow e(\mathrm{fn}\ x \colon \mathsf{T}_1 \Rightarrow\ (\mathrm{fix}.e)\ x)}$$

Call-By-Name

$$\textbf{(CBN-app)}\ \frac{\langle e_1, s\rangle \rightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_1' e_2, s'\rangle} \qquad \textbf{(CBN-fn)}\ \frac{-}{\langle (\mathsf{fn}\ x \colon \mathsf{T} \Rightarrow e) e_2, s\rangle \rightarrow \langle e\{^{e_2}/_{x}\}, s\rangle}$$

$$\textbf{(CBN-let)}\ \frac{-}{\langle \mathrm{let}\ x \colon \mathsf{T} = e_1\ \mathrm{in}\ e_2, s\rangle \rightarrow \langle e_2\{^{e_1}/_{x}\}, s\rangle}$$

$$\textbf{(CBN-fix)}\ \frac{-}{\mathrm{fix}.e \rightarrow e(\mathrm{fix}.e)}$$

Grammatica dei tipi e type system

$$T ::= \text{int} \mid \text{bool} \mid \text{unit} \mid T_1 \to T_2 \mid T_1 + T_2 \mid T_1 * T_2 \mid \text{ref } T \mid \{lab_1 \colon T_1, \dots, lab_k \colon T_k\} \mid \text{proc}$$

$$T_{\text{loc}} ::= \text{ref } T$$

Tipi primitivi e operatori

$$\textbf{(int)}\frac{-}{\Gamma \vdash n\colon \text{int}} \text{ for } n \in \mathbb{Z} \qquad \textbf{(bool)}\frac{-}{\Gamma \vdash b\colon \text{bool}} \text{ for } b \in \{true, false\} \qquad \textbf{(not)}\frac{\Gamma \vdash E\colon \text{bool}}{\Gamma \vdash \neg E\colon \text{bool}}$$

$$\textbf{(op +)}\frac{\Gamma \vdash e_1\colon \text{int} \qquad \Gamma \vdash e_2\colon \text{int}}{\Gamma \vdash e_1 + e_2\colon \text{int}} \qquad \textbf{(op *)}\frac{\Gamma \vdash e_1\colon \text{int} \qquad \Gamma \vdash e_2\colon \text{int}}{\Gamma \vdash e_1 * e_2\colon \text{int}}$$

$$\textbf{(op or)}\frac{\Gamma \vdash e_1\colon \text{bool} \qquad \Gamma \vdash e_2\colon \text{bool}}{\Gamma \vdash e_1 \text{ or } e_2\colon \text{bool}} \qquad \textbf{(op and)}\frac{\Gamma \vdash e_1\colon \text{bool} \qquad \Gamma \vdash e_2\colon \text{bool}}{\Gamma \vdash e_1 \text{ and } e_2\colon \text{bool}}$$

$$\textbf{(op} \geqslant\textbf{)}\frac{\Gamma \vdash e_1\colon \text{int} \qquad \Gamma \vdash e_2\colon \text{int}}{\Gamma \vdash e_1 \geqslant e_2\colon \text{bool}} \qquad \textbf{(skip)}\frac{-}{\Gamma \vdash skip\colon unit}$$

$$\textbf{(seq)}\frac{\Gamma \vdash e_1\colon unit \qquad \Gamma \vdash e_2\colon T}{\Gamma \vdash e_1; e_2\colon T} \qquad \textbf{(if)}\frac{\Gamma\colon e_1\colon \text{bool} \quad \Gamma \vdash e_2\colon T \quad \Gamma \vdash e_3\colon T}{\Gamma \vdash \text{if } e_1 \text{ then } e_2 \text{ else } e_3\colon T}$$

$$\textbf{(while)}\frac{\Gamma \vdash e_1\colon \text{bool} \qquad \Gamma \vdash e_2\colon T}{\Gamma \vdash \text{while } e_1 \text{ do } e_2\colon T} \qquad \textbf{(let)}\frac{\Gamma \vdash e_1\colon T \qquad \Gamma, x\colon T \vdash e_2\colon T'}{\Gamma \vdash \text{let } x\colon T = e_1 \text{ in } e_2\colon T'}$$

$$\textbf{(T-fix)}\frac{\Gamma \vdash e\colon (T_1 \to T_2) \to (T_1 \to T_2)}{\Gamma \vdash \text{fix}.e\colon T_1 \to T_2}$$

Referenze

$$\textbf{(ref)}\frac{\Gamma \vdash e\colon T}{\Gamma \vdash \text{ref } e\colon \text{ref } T} \qquad \textbf{(deref)}\frac{\Gamma \vdash e\colon \text{ref } T}{\Gamma \vdash !e\colon T} \qquad \textbf{(assign)}\frac{\Gamma \vdash e_1\colon \text{ref } T \quad \Gamma \vdash e_2\colon T}{\Gamma \vdash (e_1 := e_2)\colon \text{unit}} \qquad \textbf{(loc)}\frac{-}{\Gamma \vdash l\colon \text{ref } T}\ \Gamma(l) = \text{ref } T$$

$$\textbf{(derefInt)}\frac{-}{\Gamma \vdash !l\colon \text{int}}\Gamma(l) = intref \qquad \textbf{(assignInt)}\frac{\Gamma \vdash e\colon \text{int}}{\Gamma \vdash (l := e)\colon \text{unit}}\Gamma(l) = intref \qquad \textbf{(locInt)}\frac{-}{\Gamma \vdash l\colon intref}\ \Gamma(l) = intref$$

Funzioni

$$\textbf{(var)}\frac{-}{\Gamma \vdash x\colon T} \text{ if } \Gamma(x) = T \qquad \textbf{(fn)}\frac{\Gamma, x\colon T \vdash e\colon T'}{\Gamma \vdash (fn\ x\colon T \Rightarrow e)\colon T \to T'} \qquad \textbf{(app)}\frac{\Gamma \vdash e_1\colon T \to T' \qquad \Gamma \vdash e_2\colon T}{\Gamma \vdash e_1 e_2\colon T'}$$

Record

$$\textbf{(record)}\frac{\Gamma \vdash e_1\colon T_1 \ \dots\ \Gamma \vdash e_k\colon T_k}{\Gamma \vdash \{\text{lab}_1 = e_1, \dots, \text{lab}_k = e_k\} : \{\text{lab}_1\colon T_1, \dots, \text{lab}_k\colon T_k\}} \qquad \textbf{(recordproj)}\frac{\Gamma \vdash e\colon \{\text{lab}_1\colon T_1, \dots, \text{lab}_k\colon T_k\}}{\Gamma \vdash \#\text{lab}_i\ e\colon T_i}$$

Concorrenza

$$\textbf{(T-sq1)}\frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \text{unit} \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon \text{unit}}{\Gamma \vdash e_1; e_2 \colon \text{unit}} \qquad \textbf{(T-sq2)}\frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \text{proc} \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon \text{proc}}{\Gamma \vdash e_1; e_2 \colon \text{proc}} \qquad \textbf{(T-par)}\frac{\Gamma \vdash e_1 \colon T_1 \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon T_2}{\Gamma \vdash e_1 \| e_2 \colon \text{proc}}\ T_1, T_2 \in \{\text{unit}, \text{proc}\}$$

$$\textbf{(T-await)}\frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \text{bool} \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon \text{unit}}{\Gamma \vdash \text{await } e_1 \text{ protect } e_2 \text{ end} \colon \text{unit}} \qquad \textbf{(T-choice)}\frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \text{unit} \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon \text{unit}}{\Gamma \vdash e_1 \oplus e_2 \colon \text{unit}} \qquad \textbf{(T-lock)}\frac{-}{\Gamma \vdash \mathtt{lock}\ \mathtt{m} \colon \text{unit}} \qquad \textbf{(T-unlock)}\frac{-}{\Gamma \vdash \mathtt{unlock}\ \mathtt{m} \colon \text{unit}}$$

Sottotipaggio

$$\textbf{(sub)}\frac{\Gamma \vdash e \colon T \qquad T <: T'}{\Gamma \vdash e \colon T'} \qquad \textbf{(s-refl)}\frac{-}{T <: T} \qquad \textbf{(s-trans)}\frac{T <: T' \qquad T' <: T''}{T <: T''}$$

Sottotipaggio dei record

$$\textbf{(rec-perm)}\frac{\pi \text{ una permutazione di } 1, 2, \ldots, k}{\{p_1 \colon T_1, \ldots, p_k \colon T_k\} <: \{p_{\pi(1)} \colon T_{\pi(1)}, \ldots, p_{\pi(k)} \colon T_{\pi(k)}\}} \qquad \textbf{(rec-width)}\frac{-}{\{p_1 \colon T_1, \ldots, p_k \colon T_k, p_{k+1} \colon T_{k+1}, \ldots, p_z \colon T_z\} <: \{p_1 \colon T_1, \ldots, p_k \colon T_k\}}$$

$$\textbf{(rec-depth)}\frac{T_1 <: T_1' \ \ldots \ T_k <: T_k'}{\{p_1 \colon T_1, \ldots, p_k \colon T_k\} <: \{p_1 \colon T_1', \ldots, p_k \colon T_k'\}}$$

Sottotipaggio delle funzioni

$$\textbf{(fun-sub)}\frac{T_1 \colon > T_1' \qquad T_2 <: T_2'}{T_1 \to T_2 <: T_1' \to T_2'}$$

Sottotipaggio somma e prodotto

$$\textbf{(prod-sub)}\frac{T_1 <: T_1' \qquad T_2 <: T_2'}{T_1 * T_2 <: T_1' * T_2'} \qquad \textbf{(sum-sub)}\frac{T_1 <: T_1' \qquad T_2 <: T_2'}{T_1 + T_2 <: T_1' + T_2'}$$

Progress

Teorema 1 (Progress)**.** *Sia* e *chiusa,* $\Gamma \vdash \mathsf{e}\colon \mathsf{T}$ *e* $\mathsf{dom}(\Gamma) \subseteq \mathsf{dom}(\mathsf{s})$ *allora o* e *è un valore oppure* $\exists \mathsf{e}', \mathsf{s}'$ *t.c.* $\langle \mathsf{e}, \mathsf{s}\rangle \twoheadrightarrow \langle \mathsf{e}', \mathsf{s}'\rangle$*.*

Proof 1. Sia ϕ una relazione ternaria definita come segue: $\phi(\Gamma, e, T) \stackrel{def}{=} \forall s.\mathrm{dom}(\Gamma) \subseteq \mathrm{dom}(s) \Rightarrow \mathrm{value}(e) \vee (\exists e', s' \text{ t.c. } \langle e, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e', s'\rangle)$

Proviamo che per ogni Γ, e, T, se $\Gamma \vdash e\colon T$ allora $\phi(\Gamma, e, T)$ usando *rule induction* su $\Gamma \vdash e\colon T$.

Provare la progress sul seguente linguaggio:

$$E :: = x \mid n \mid E_1 + E_2 \mid E_1; E_2; \mid \text{fn } x\colon T \Rightarrow E \mid EE \mid \text{while } E \text{ do } E \mid E_1 : = E_2 \mid$$

Proof 2 (by *rule induction* su come ho tipato E ($\Gamma \vdash E\colon T$))**.**

Caso Base 1 (int)**.**

$$\textbf{(int)}\frac{-}{\Gamma \vdash n\colon \text{int}} \text{ for } n \in \mathbb{Z}$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E\colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(int)**. Posso concludere che $E \equiv n$, per $n \in \mathbb{Z}$, e $T \equiv \text{int}$. Ne consegue che $\phi(\Gamma, E, T) = \text{true}$ perché $\text{value}(n) = \text{true}$.

Caso Base 2 (bool)**.**

$$\textbf{(bool)}\frac{-}{\Gamma \vdash b\colon \text{bool}} \text{ for } b \in \{\mathsf{true}, \mathsf{false}\}$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E\colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(bool)**.
Posso concludere che $E \equiv b$, per $b \in \{\text{true}, \text{false}\}$, e $T \equiv \text{bool}$.
Ne consegue che $\phi(\Gamma, E, T) = \text{true}$ perché $\text{value}(b) = \text{true}$.

Caso Base 3 (skip)**.**

$$\textbf{(skip)}\frac{-}{\Gamma \vdash \text{skip}\colon \mathsf{unit}}$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E\colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(skip)**. Posso concludere che $E \equiv \text{skip}$, $T \equiv \mathsf{unit}$. Ne consegue che $\phi(\Gamma, \text{skip}, \mathsf{unit}) = \text{true}$ perchè $\text{value}(\text{skip}) = \text{true}$.

Caso Base 4 (var)**.**

$$\textbf{(var)}\frac{-}{\Gamma \vdash x\colon T} \text{ if } \Gamma(x) = T$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E\colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(var)**. Posso concludere che $E \equiv x$, e $T \equiv T_1 \to T_2$ oppure $T \equiv \text{int}$. Posso dire che E non è chiusa perché $x \in FV(E)$. Dato che la premessa della dimostrazione è falsa posso dedurre che $\phi(\Gamma, E, T) = \text{true}$.

Caso induttivo 1 (fn)**.**

$$\textbf{(fn)}\frac{\Gamma, x\colon T \vdash e\colon T'}{\Gamma \vdash (\mathsf{fn}\ x\colon T \Rightarrow e)\colon T \to T'}$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E\colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(fn)**. Posso concludere che $E \equiv \mathsf{fn}\ x\colon T \Rightarrow e$, $T \equiv T \to T'$ e $\Gamma, x\colon T \vdash e\colon T'$.
Ne consegue che $\phi(\Gamma, E, T) = \text{true}$ perché $\text{value}(\mathsf{fn}\ x\colon T \Rightarrow e) = \text{true}$.

Caso induttivo 2 (op $+$)**.**

$$\textbf{(op +)}\frac{\Gamma \vdash e_1\colon \text{int} \qquad \Gamma \vdash e_2\colon \text{int}}{\Gamma \vdash e_1 + e_2\colon \text{int}}$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E\colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(op $+$)**. Posso concludere che $E \equiv e_1 + e_2$, $T \equiv \text{int}$, $\Gamma \vdash e_1\colon \text{int}$ e $\Gamma \vdash e_2\colon \text{int}$. Per **ipotesi induttiva** ho che $\phi(\Gamma, e_1, \mathsf{int}) = \text{true}$ e $\phi(\Gamma, e_2, \mathsf{int}) = \text{true}$. Perciò contraddistinguo tre casi:

1. $$\textbf{(op1)}\frac{\langle e_1, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 + e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1' + e_2, s'\rangle}$$

   Se $\text{value}(e_1) = \text{false}$ allora $\langle e_1, s\rangle$ fa un passo e quindi, applicando la regola della semantica small-step **(op1)**, abbiamo che $\phi(\Gamma, e_1 + e_2, \text{int}) = \text{true}$;

2. $$\textbf{(op+)}\frac{-}{\langle n_1 + n_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle n, s\rangle} n = \mathsf{add}(n_1, n_2)$$

   Se $\text{value}(e_1) = \text{true} \wedge \text{value}(e_2) = \text{true}$ allora, applicando la regola della semantica small-step **(op $+$)**, abbiamo che $\phi(\Gamma, e_1 + e_2, \text{int}) = \text{true}$;

3. $$\textbf{(op2)}\frac{\langle e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_2', s'\rangle}{\langle v + e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle v + e_2', s\rangle}$$

   Se $\text{value}(e_1) = \text{true} \wedge \text{value}(e_2) = \text{false}$ allora, applicando la regola della semantica small-step **(op2)**, abbiamo che $\phi(\Gamma, e_1 + e_2, \text{int}) = \text{true}$.

Caso induttivo 3 (seq)**.**

$$\textbf{(seq)}\frac{\Gamma \vdash e_1\colon \mathsf{unit} \qquad \Gamma \vdash e_2\colon T}{\Gamma \vdash e_1; e_2\colon T}$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E\colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(seq)**. Posso concludere che $E \equiv e_1; e_2$, $T \equiv \text{unit}$, $\Gamma \vdash e_1\colon \text{unit}$ e $\Gamma \vdash e_2\colon \text{unit}$. Per **ipotesi induttiva** ho che $\phi(\Gamma, e_1, \mathsf{unit}) = \text{true}$ e $\phi(\Gamma, e_2, \mathsf{unit}) = \text{true}$. Perciò contraddistinguo due casi:

1.

$$(\textbf{seq})\frac{\langle e_1, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1', s\rangle}{\langle e_1; e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1'; e_2, s'\rangle}$$

Se value(e_1) = false allora $\langle e_1, s\rangle$ fa un passo e quindi, applicando la regola della semantica small-step **(seq)**, abbiamo che $\phi(\Gamma, e_1; e_2, \text{unit}) = \text{true}$;

2.

$$(\textbf{seq.skip})\frac{-}{\langle \mathtt{skip}; e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_2, s\rangle}$$

Se value(e_1) = true allora, applicando la regola della semantica small-step **(seq.skip)**, abbiamo che $\phi(\Gamma, e_1; e_2, \text{unit}) = \text{true}$.

Caso induttivo 4 (while)**.**

$$(\textbf{while})\frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \text{bool} \qquad \Gamma \vdash e_2 \colon T}{\Gamma \vdash \text{while } e_1 \text{ do } e_2 \colon T}$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E \colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(while)**. Posso concludere che $E \equiv \text{while } e_1 \text{ do } e_2$, per qualche e_1, e_2 tali che $\Gamma \vdash e_1 \colon \text{bool}$ e $\Gamma \vdash e_2 \colon T$, e $T \equiv \mathtt{unit}$. Ne consegue che $\phi(\Gamma, E, T) = \text{true}$ perché applico la regola di riscrittura, applicando la regola semantica **(while)** e quindi faccio un passo: $\langle e, s\rangle \equiv \langle \text{while } e_1 \text{ do } e_2\rangle \twoheadrightarrow \langle \text{if } e \text{ then } (e_1; \text{while } e \text{ do } e_1) \text{ else } \mathtt{skip}\rangle \equiv \langle e', s'\rangle$.

Caso induttivo 5 (assign)**.**

$$(\textbf{t-assign})\frac{\Gamma \vdash e_1 \colon \text{int}}{\Gamma \vdash l \colon = e_1 \colon \mathtt{unit}} \mathtt{if} \Gamma(l) = \mathtt{intref}$$

Supponiamo di aver derivato $\Gamma \vdash E \colon T$ utilizzando la regola di tipaggio **(T-assign)**. Posso concludere che $E \equiv l \colon = e_1$ per qualche locazione l e qualche programma e_1 tali che $\Gamma \vdash e_1 \colon \text{int}$, e $T \equiv \text{unit}$ e $\Gamma(l) = \mathtt{intref}$. Ne consegue che, per il fatto che l'albero di derivazione di $\Gamma \vdash e_1 \colon \text{int}$ ha profondità minore di $\Gamma \vdash E \colon T$, per ipotesi induttiva $\phi(\Gamma, e_1, \mathtt{unit}) = \text{true}$. Contraddistinguo quindi due casi:

1.

$$(\textbf{assign1})\frac{-}{\langle l := v, s\rangle \twoheadrightarrow \langle \text{skip}, s[l \mapsto v]\rangle} \text{if } l \in \mathtt{dom}(s)$$

Se value(e_1) = true abbiamo che $e_1 = n$ per qualche n, $E \equiv l \colon = n$ per qualche l. Dal fatto che $\{l\} \subseteq \text{dom}(\Gamma) \subseteq \text{dom}(s)$, derivo che s è definito in l. Posso quindi applicare la regola semantica **(assign1)** e quindi ho che $\phi(\Gamma, E, T) = \text{true}$ perché faccio un passo: $\langle e, s\rangle \equiv \langle l \colon = n, s\rangle \twoheadrightarrow \langle \text{skip}, s[l \mapsto n]\rangle \equiv \langle e', s'\rangle$.

2.

$$(\textbf{assign2})\frac{\langle e_1, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle l := e_1, s\rangle \twoheadrightarrow \langle l := e_1', s\rangle}$$

Se value(e_1) = false abbiamo che $E \equiv l \colon = e_1$ per qualche l. Quindi $\forall s.\ \text{dom}(\Gamma) \subseteq \text{dom}(s)\ \langle e_1, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1', s'\rangle$ per qualche e_1'. Posso quindi applicare la regola semantica **(assign2)** e quindi ho che $\phi(\Gamma, E, T) = \text{true}$ perché faccio un passo: $\langle e, s\rangle \equiv \langle l \colon = e_1, s\rangle \twoheadrightarrow \langle l \colon = e_1', s'\rangle \equiv \langle e', s'\rangle$

Type Preservation

Teorema 1 (Type Preservation)**.** *Sia* e *chiusa e* $\Gamma \vdash e\colon T$ *e* $dom(\Gamma) \subseteq dom(s)$ *e* $\langle e, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e', s'\rangle$ *allora* $\Gamma \vdash e'\colon T$ *e* e' *è chiusa e* $dom(\Gamma) \subseteq dom(s')$.

Provare la type preservation sul seguente linguaggio:

$$E ::= x \mid n \mid E_1 + E_2 \mid \text{fn } x\colon T \Rightarrow E \mid EE$$

Proof 1 (by *rule induction* su come ho derivato $E \to F$)**.**

Caso Base 1 (S-Add)**.**

$$\textbf{(S-Add)}\frac{-}{\langle n_1 + n_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle n_3, s\rangle} n_3 = add(n_1, n_2)$$

Supponiamo di aver derivato $E \to F$ utilizzando la regola semantica **(S-Add)**. Ne consegue che $E \equiv n_1 + n_2$ e $F \equiv n_3$. Se $\Gamma \vdash E\colon$ int sarò stato in grado di tipare E utilizzando la regola di tipaggio **(op +)**. Di conseguenza ho tipato n_1 e n_2: $\Gamma \vdash n_1\colon$ int, $\Gamma \vdash n_2\colon$ int. Ne consegue che $\Gamma \vdash n_3\colon$ int come richiesto.

Caso Base 2 (CBV-fn)**.**

$$\textbf{(CBV-fn)}\frac{-}{\langle (fn\ x\colon T \Rightarrow e)v, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e\{^v/_x\}, s\rangle}$$

Supponiamo di aver derivato $E \to F$ utilizzando la regola semantica **(CBV-fn)**. Ne consegue che $E \equiv (fn\ x\colon T \Rightarrow e)v$ e $F \equiv e\{^v/_x\}$. Se $\Gamma \vdash E\colon T$ sarò stato in grado di tipare E utilizzando la regola di tipaggio **(app)**. In tal caso avrò dedotto che $\Gamma \vdash v\colon T'$ e $\Gamma \vdash fn\ x\colon T' \Rightarrow e\colon T \to T'$. Di conseguenza sarò stato in grado di tipare il corpo di e: $\Gamma, x\colon T' \vdash e\colon T$. Dunque per il *substitution lemma* avrò che $\Gamma \vdash e\{^v/_x\} \equiv F\colon T$ come richiesto.

Caso induttivo 1 (S-Left)**.**

$$\textbf{(S-Left)}\frac{E_1 \twoheadrightarrow E_1'}{E_1 + E_2 \twoheadrightarrow E_1' + E_2}$$

Supponiamo di aver derivato $E \to F$ utilizzando la regola semantica **(S-Left)**. Ne consegue che $E \equiv E_1 + E_2$ e $F \equiv E_1' + E_2$. Se $\Gamma \vdash E\colon T$ allora vuol dire che sarò stato in grado di tipare E usando la regola di tipaggio **(op +)**. In tal caso avrò dedotto che $T \equiv$ int, $\Gamma \vdash E_1\colon$ int, $\Gamma \vdash E_2\colon$ int. Per ipotesi induttiva da $E_1 \to E_1'$ concludo che $\Gamma \vdash E_1'\colon$ int. Ma allora applicando la regola di tipaggio **(op +)** derivo che $\Gamma \vdash E_1' + E_2 \equiv F\colon$ int come richiesto.

Caso induttivo 2 (S-Right)**.**

$$\textbf{(S-Right)}\frac{E_2 \twoheadrightarrow E_2'}{E_1 + E_2 \twoheadrightarrow E_1 + E_2'}$$

Supponiamo di aver derivato $E \to F$ utilizzando la regola semantica **(S-Right)**. Ne consegue che $E \equiv E_1 + E_2$ e $F \equiv E_1 + E_2'$. Se $\Gamma \vdash E\colon T$ allora vuol dire che sarò stato in grado di tipare E usando la regola di tipaggio **(op +)**. In tal caso avrò dedotto che $T \equiv$ int, $\Gamma \vdash E_1\colon$ int, $\Gamma \vdash E_2\colon$ int. Per ipotesi induttiva da $E_2 \to E_2'$ concludo che $\Gamma \vdash E_2'\colon$ int. Ma allora applicando la regola di tipaggio **(op +)** derivo che $\Gamma \vdash E_1 + E_2' \equiv F\colon$ int come richiesto.

Caso induttivo 3 (CBV-app1)**.**

$$\textbf{(CBV-app1)}\frac{\langle e_1, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1', s'\rangle}{\langle e_1 e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_1' e_2, s'\rangle}$$

Supponiamo di aver derivato $E \to F$ utilizzando la regola semantica **(CBV-app1)**. Ne consegue che $E \equiv E_1 E_2$ e $F \equiv E_1' E_2$ e $E_1 \to E_1'$. Se $\Gamma \vdash E\colon T$ allora vuol dire che sarò stato in grado di tipare E usando la regola di tipaggio **(app)**. Quindi per ipotesi induttiva da $E_1 \to E_1'$ deduco che $\Gamma \vdash E_1'\colon T_A \to T$. Siccome $F \equiv E_1' E_2$ e $\Gamma \vdash E_2\colon T_A$, ne consegue che, applicando la regola di tipaggio **(app)**, derivo che $\Gamma \vdash E_1' E_2 \equiv F\colon T$ come richiesto.

Caso induttivo 4 (CBV-app2)**.**

$$\textbf{(CBV- app2)}\frac{\langle e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle e_2', s'\rangle}{\langle v e_2, s\rangle \twoheadrightarrow \langle v e_2', s'\rangle}$$

Supponiamo di aver derivato $E \to F$ utilizzando la regola semantica **(CBV-app2)**. Ne consegue che $E \equiv vE_2$ e $F \equiv vE_2'$ e $E_2 \to E_2'$. Se $\Gamma \vdash E\colon T$ allora vuol dire che sarò stato in grado di tipare E usando la regola di tipaggio **(app)**. Quindi per ipotesi induttiva da $E_2 \to E_2'$ deduco che $\Gamma \vdash E_2'\colon T_A$. Siccome $F \equiv vE_2'$ e $\Gamma \vdash v\colon T_A \to T$, ne consegue che, applicando la regola di tipaggio **(app)**, derivo che $\Gamma \vdash vE_2' \equiv F\colon T$ come richiesto.