

Exercícios de Probabilidade e Estatística

06 – Medidas de posição

1 – Considere a seguinte distribuição conjunta de X e Y:

$X \backslash Y$	-2	-1	4	5
1	0,1	0,2	0	0,3
2	0,2	0,1	0,1	0

- a) achar as distribuições marginais de X e Y;
- b) calcular $E[X]$, $E[Y]$ e $E[XY]$.

2 – Sejam M e N duas variáveis aleatórias com as seguintes distribuições:

M	1	3
P(M)	0,6	0,4

N	5	10	12
P(N)	0,3	0,5	0,2

- a) achar a distribuição conjunta de (M,N);
- b) calcule $E[M]$ e $E[N]$.

3 – Dada a seguinte função densidade conjunta de (X,Y):

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x^2y + 3y^2x & \text{para } 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{para outros valores} \end{cases}$$

- a) determinar as funções densidades marginais de X e Y;
- b) calcular $E[X]$ e $E[Y]$.

4 – Suponha que (X,Y) tenha a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{para } 0 < x < 1 ; 0 < y < 1 \\ 0 & \text{para outros valores} \end{cases}$$

- a) calcule as distribuições marginais de X e de Y;
- b) calcule $E[Y]$;
- c) calcule $E[X]$.

Respostas

1. a)

X	1	2
$P(X)$	0,6	0,4

Y	-2	-1	4	5
$P(Y)$	0,3	0,3	0,1	0,3

b) 1,4; 1; 0,9

2. a)

$M \backslash N$	5	10	12
1	0,18	0,30	0,12
3	0,12	0,20	0,08

b) 1,8; 8,9

3. a) $g(x) = \frac{3}{2}x^2 + x$ $h(y) = \frac{3}{2}y^2 + y$

b) $\frac{17}{24}; \frac{17}{24}$

4. a) $g(x) = x + \frac{1}{2}$ $h(y) = y + \frac{1}{2}$

b) $\frac{7}{12}$ c) $\frac{7}{12}$

01 → a)

X_i	1	2
$P(X_i)$	0,6	0,4

$X \backslash Y$	-2	-1	4	5
1	0,1	0,2	0	0,3
2	0,2	0,1	0,1	0

Y_i	-2	-1	4	5
$P(Y_i)$	0,3	0,3	0,2	0,2

b) $E(X) = \sum_{i=1}^2 x_i p_i = 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,4 = 1,4$

$E(Y) = \sum_{i=-2}^5 y_i p_i = -2 \cdot 0,3 + (-1) \cdot 0,3 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,2 = 1$

$E(X, Y) = E(X) \cdot E(Y) = 1,4 \cdot 1 = 1,4$

02 → a)

$M \backslash N$	5	10	12
1	0,14	0,10	0,12
3	0,12	0,20	0,08

b) $E(M) = \sum_{i=1}^3 m_i p_i = 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0,4 = 1,8$

$E(N) = \sum_{i=5,10,12} n_i p_i = 5 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,5 + 12 \cdot 0,2 = 8,9$

03 → a) $g(x) = \int_0^y 3x^2 y + 3y^2 x \, dy = \frac{3x^2 y^2}{2} + y^3$
 $h(y) = \int_0^y 3x^2 y + 3y^2 x \, dx = \frac{3x^3 y}{2} + y^3$

b) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot F(x) \, dx = \int_0^y g(x) \, dx = \int_0^y \frac{3x^2 y^2}{2} + y^3 \, dx = \frac{17}{24}$
 $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot F(y) \, dy = \int_0^y h(y) \, dy = \int_0^y \frac{3y^2 x^2}{2} + y^3 \, dy = \frac{17}{24}$

04 → a) $g(x) = \int_0^y x + y \, dy = \frac{1}{2}x + y$
 $h(y) = \int_0^y x + y \, dx = \frac{1}{2}x + y$

b) $E(Y) = \int_0^y h(y) \, dy = \int_0^y \frac{1}{2} + y \, dy = \frac{7}{12}$
 $E(X) = \int_0^y g(x) \, dx = \int_0^y \frac{1}{2} + x \, dx = \frac{7}{12}$