



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR
CENTRO POLITÉCNICO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Prova 1 : CM310 - Pré-Cálculo - 10 de abril de 2024

Nome: _____ GRR: _____

Assinatura: _____

Q:	1	2	3	4	Total
P:	30	20	30	20	100
N:					

Observações:

1. a prova é individual, sem consulta e não é permitido o uso de calculadora;
2. respostas sem justificativas não serão consideradas.

Questão 1 30

Identifique o domínio das expressões abaixo escrevendo a resposta também na forma de intervalo ou união de intervalos se necessário:

(a) 15 $\sqrt{2x - 3}$.

(b) 15 $\frac{x}{x^2 - 16}$

Questão 2 20

Existe x pertencente ao domínio da expressão $\sqrt{2x - 3}$ tal que

$$\sqrt{2x - 3} = 5 ?$$

Se sim, qual é o valor de x ?

Questão 3 30

Considere o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e a função $f : A \rightarrow B$, dada pela expressão $f(x) = 3x - 2$, sendo $B \subset \mathbb{R}$.

- (a) 10 Qual deve ser o conjunto B para que a função f seja sobrejetora? Justifique e mostre os elementos desse conjunto.
- (b) 10 A função é injetora? Justifique.
- (c) 10 Considerando o conjunto B que você determinou no item (a), pergunta-se: a função $f^{-1} : B \rightarrow A$, a inversa de f , existe? Se sim, determine a expressão de $f^{-1}(x)$.

Questão 4 20

A seguir, considere a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela expressão $g(x) = x^2$.

(a) 7 A função g é uma função par ou ímpar? Justifique.

(b) 6 Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, fatore a expressão

$$x_2^2 - x_1^2.$$

(c) 7 Mostre que a função g é crescente se $x \geq 0$, isto é, que g é crescente no intervalo $[0, +\infty)$.

Resolução das Questões

Pode haver mais de uma forma de responder as questões corretamente. A seguir, para cada questão, é apresentada uma forma de responder.

1)a) A expressão $\sqrt{2x-3}$ está bem definida se, e somente se, $2x-3 \geq 0$. Resolvendo a inequação temos

$$2x - 3 \geq 0$$

$$2x \geq 3$$

$$x \geq \frac{3}{2}.$$

Portanto, o domínio da expressão algébrica é $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

1)b) A expressão $\frac{x}{x^2-16}$ está bem definida se, e somente se, $x^2-16 \neq 0$. Como

$$x^2 - 16 = (x-4)(x+4),$$

concluimos que devemos ter $x \neq 4$ e $x \neq -4$. Portanto, o domínio é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4 \text{ e } x \neq -4\},$$

que pode ser escrito em termos de intervalos como $(-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, +\infty)$.

2) Para responder, basta resolver $\sqrt{2x-3} = 5$. Resolvendo, temos

$$\sqrt{2x-3} = 5$$

$$2x - 3 = 25$$

$$2x = 28$$

$$x = 14.$$

Portanto, sim, existe x pertencente ao domínio da expressão algébrica $\sqrt{2x-3}$, que vimos na questão 1)a) que é $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$, tal que $\sqrt{2x-3} = 5$. É o $x = 14$.

3)a) Para que f seja sobrejetora, basta que o contradomínio de f seja igual à imagem de f . A imagem de f é o conjunto dos valores $f(x)$, para x no domínio da f , que nessa questão é o conjunto A . Então

$$Im(f) = \{-2, 1, 4, 7, 10\},$$

e basta tomar $B = \{-2, 1, 4, 7, 10\}$ para que f seja sobrejetora.

3)b) Sim. De fato, tome $x_1, x_2 \in Dom(f) = A$ e suponha que $f(x_1) = f(x_2)$. Então temos

$$3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$$

$$3x_1 = 3x_2,$$

do qual concluimos que $x_1 = x_2$. Portanto, f é injetora.

3)c) Sim, a inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ está definida porque, de acordo com os itens 3)a) e 3)b), f é bijetora. Para encontrar sua expressão podemos fazer

$$3x - 2 = y$$

$$3x = y + 2$$

$$x = \frac{y + 2}{3}.$$

Então trocamos os papéis de x e y , obtendo $y = \frac{x + 2}{3}$. Logo, a expressão da inversa é

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3}.$$

4)a) Sim, porque $g(-x) = (-x)^2 = x^2 = g(x)$.

4)b) $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$.

4)c) Sejam $x_1, x_2 \geq 0$, com $x_2 > x_1$, isto é, $x_2 - x_1 > 0$. Então

$$\begin{aligned} g(x_2) - g(x_1) &= x_2^2 - x_1^2 \\ &= (x_2 + x_1)(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Por hipótese temos $x_2 + x_1 > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$. Portanto, $g(x_2) - g(x_1) > 0$.