Universidade Federal do Paraná - UFPR
Centro Politécnico
Departamento de Matemática

Prova 2 : CM310 - Pré-Cálculo - 31 de julho de 2024

Q:	1	2	3	4	5	Total
P:	30	30	20	20	20	120
N:						

Nome: ______________________________ GRR: ______________

Assinatura: ______________________________

Observações:

1. a prova é individual, sem consulta e não é permitido o uso de calculadora;
2. respostas sem justificativas não serão consideradas.

Questão 1 .... $\boxed{30}$

Considere a função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 3$:

(a) $\boxed{10}$ f tem raízes reais? Se sim, quais são?

(b) $\boxed{10}$ Qual o ponto de mínimo de f? Qual é o valor mínimo de f?

(c) $\boxed{10}$ Para quais valores de x temos $f(x) \geq 0$?

Questão 2 .... $\boxed{30}$

A população de determinado país cresce de acordo com a função $f(x) = P_0\, e^{\frac{x}{2}}$, sendo x o tempo medido em décadas e P_0 a população inicial. Considerando esse crescimento, para quais valores de x a população será estritamente maior do que o triplo da população inicial?

Questão 3 .... $\boxed{20}$

Resolva a equação $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{x+2}$.

Questão 4 .... $\boxed{20}$

Sabendo que x é um ângulo tal que $sen(x) > 0$, encontre os possíveis valores de x que satisfazem a equação

$$2\, sen^2(x) + sen(x) = 1.$$

Questão 5 .... $\boxed{20}$

(Questão extra) Esboce o gráfico da função $f(x) = 2\, cos(x) + 1$.

Resolução das Questões

Pode haver mais de uma forma de responder as questões corretamente. A seguir, para cada questão, é apresentada uma forma de responder.

1)a) $\Delta = b^2 - 4.a.c = 16 - 12 = 4$. Como $\Delta > 0$, f têm duas raízes reais

$$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \text{ e } x_2 = \frac{4+2}{2} = 3.$$

1)b) Como o gráfico da parábola tem a concavidade virada para cima, temos ponto de mínimo que é $x_v = 4/2 = 2$ e o valor mínimo é $y_v = -4/4 = -1$.

1)c) Esboçando o gráfico da parábola com as raízes e lembrando do comportamento da função quadrática temos $f(x) \geq 0$ para $x \leq 1$ e $x \geq 3$.

2) Primeiro, vemos que queremos os valores de x tais que $f(x) > 3\,P_0$, isto é,

$$P_0\, e^{x/2} > 3\,P_0$$

$$e^{x/2} > 3$$
$$\frac{x}{2} > ln\,3$$
$$x > 2\,ln\,3.$$

Portanto, $x > 2\,ln\,3$.

3) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{x+2}$

$$\Leftrightarrow 3^x(1+3+9) = 5^x(1+25)$$

$$\Leftrightarrow 3^x.13 = 5^x.26$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 2.5^x$$

$$\Leftrightarrow x = log_3(2.5^x)$$

$$\Leftrightarrow x = log_3 2 + x.log_3 5$$

$$\Leftrightarrow x - x.log_3 5 = log_3 2$$

$$\Leftrightarrow x(1 - log_3 5) = log_3 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{log_3 2}{1 - log_3 5}.$$

4) $2\,sen^2(x) + sen(x) = 1 \;\Leftrightarrow 2\,sen^2(x) + sen(x) - 1 = 0$. Usando a variável auxiliar $y = sen(x)$ temos a equação do segundo grau $2y^2 + y - 1 = 0$, que tem raízes $y = 1/2$ e $y = -1$. Como $y = sen(x)$ e temos, por hipótese, que $sen(x) > 0$, nos resta $sen(x) = 1/2$. Então temos

$$sen(x) = \frac{1}{2} = sen(\pi/6)$$

e concluímos que

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\,\pi}{6} + 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

5)