Universidade Federal do Paraná-UFPR

Disciplina: Cálculo I Código: CM041 Turma: B

Data: 31/10/2016

Professor: Roberto Ribeiro Santos Junior

Aluno:

Observações:

- É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico (celular, calculadora, etc).
- A avaliação é individual e sem consulta a qualquer tipo de material.
- Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A organização na exposição dos argumentos também é um critério de avaliação.

PROVA 2

1. (2 pontos) Calcule:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{4x^5 + x^2 + 3}{x^4 + 1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x}$ (c) $\displaystyle\frac{d}{dx}[\operatorname{arc\,tg}(3x)]$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg}(3x)}{x}$

2. (3 pontos) Dada a função

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}.$$

   Faça o seguinte:

   (a) Determine o domínio de f.

   (b) Ache os pontos onde o gráfico de f intersecta o eixo y e os pontos onde o gráfico de f intersecta o eixo x.

   (c) Calcule $f'(x)$ e $f''(x)$.

   (d) Determine os pontos críticos de f.

   (e) Determine para quais pontos críticos f possui um valor máximo local ou um valor mínimo local. Além disso, identifique os pontos críticos nos quais f não tem um extremo relativo.

   (f) Determine os intervalos nos quais f é crescente; determine os intervalos nos quais f é decrescente.

   (g) Determine os pontos nos quais o gráfico é côncavo para cima e para baixo, respectivamente.

   (h) Determine os pontos de inflexão de f.

   (i) Obtenha, se houver, as assíntotas horizontais, verticais ou oblíquas.

   (j) Esboce o gráfico de f.

3. (2 pontos) Calcule:

   (a) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-2x}\, dx$ (c) $\displaystyle\int \cos^3(x)\, dx$

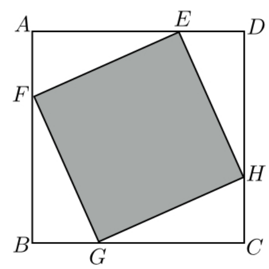
   (b) $\displaystyle\int x\cos(2x)\, dx$ (d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(3x)\, dx$

4. (1 ponto) Se dois resistores com resitência R_1 e R_2 estão conectados em paralelo, então a resistência total R, medida em ohms (Ω), é dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Se R_1 e R_2 estão crescendo a taxas de $0.1\Omega/s$ e $0.4\Omega/s$, respectivamente, quão rápido está variando R quando $R_1 = 10\Omega$ e $R_2 = 20\Omega$?

5. (1 ponto) Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado de lado 1 e $\overline{AF} = \overline{BG} = \overline{CH} = \overline{DE} = x$. Qual o valor de x para que o quadrado $EFGH$ tenha a menor área possível?



6. (1 ponto) A noção de "tamanho" de conjuntos infinitos é contra-intuitiva. No livro A Culpa é das Estrelas[1](p. 215) a personagem Hazel diz o seguinte:

> *... Não sou formada em matemática, mas sei de uma coisa: existe uma quantidade infinita de números entre* 0 *e* 1. *Tem o* 0.1 *e o* 0.12 *e o* 0.112 *e uma infinidade de outros. Obviamente, existe um conjunto ainda maior entre o 0 e o 2, ou entre o 0 e o 1 milhão. Alguns infinitos são maiores que outros.*

É natural pensar que o intervalo $(0, 2)$ tenha mais elementos que o intervalo $(0, 1)$, como a própria Hazel Grace disse: "Não sou formada em matemática". Seria de esperar que Hazel também imaginasse que o o conjunto dos números reais tivesse mais elementos que o intervalo $(0, 1)$. Nessa questão vocês mostrarão que o conjunto dos reais e o intervalo $(0, 1)$ tem a mesma quantidade de elementos, contrariando completamente a intuição de Hazel.

Mostre que a função

$$\begin{aligned} f: \quad & (0,1) \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \operatorname{tg}\left(\pi\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

é bijetora. Concluindo assim que $\mathbb{R}$ e $(0, 1)$ tem a mesma "quantidade"de elementos

[1]Green J. *A culpa é das estrelas.* Intrínseca: 2012.