



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CM304 - COMPLEMAT - 1º SEM. DE 2023
TERCEIRO TESTE

1. Prove que o produto de dois números irracionais é irracional.

2. Seja a um inteiro ímpar qualquer. Prove ou dê um contra-exemplo:

$$a^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+1}},$$

para qualquer inteiro $n \geq 0$.

3. Dada uma função qualquer $f : A \rightarrow B$ considere a função $G : B \rightarrow \mathcal{P}(A)$, definida, para cada $b \in B$, da seguinte forma:

$$G(b) = f^{-1}[\{b\}]$$

onde $f^{-1}[\{b\}]$ é a pré-imagem do conjunto $\{b\}$.

(a) Prove que, se f é sobrejetora, então G é injetora.

(b) Existe alguma função f não sobrejetora tal que a G correspondente ainda seja injetora?

(c) Existe alguma função f tal que a sua G correspondente seja sobrejetora?