Lista 6 de Cálculo I
Data da entrega: 31/10/2019

Exercício 1:

Nos problemas 3 a 21, ache todos os números reais que satisfazem a desigualdade. Expresse a solução com a notação de intervalos e represente-a na reta dos reais.

3 $10x < 18 + 4x$

11 $x^2 > 9$

13 $x^2 - x - 2 < 0$

15 $3x^2 - 13x \geq 10$

17 $\dfrac{3+x}{3-x} \leq 1$

21 $\dfrac{x+2}{x-1} \leq \dfrac{x}{x+4}$

Respostas:

3 $(-\infty, 3)$ **5** $(-2, 1]$ **7** $\left(-\frac{7}{4}, 1\right]$ **9** $(-\infty, -2]$ e $(1, \infty)$ **11** $(-\infty, -3)$ e $(3, \infty)$ **13** $(-1, 2)$ **15** $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]$ e $[5, \infty)$ **17** $(-\infty, 0]$ e $(3, \infty)$

Exercício 2: Determine a derivada.

a) $y = x \text{ arc tg } x$

b) $f(x) = \text{arc sen } 3x$

c) $g(x) = \text{arc sen } x^3$

d) $y = \text{arc tg } x^2$

e) $y = 3 \text{ arc tg } (2x + 3)$

f) $y = \text{arc sen } e^x$

Respostas:

a) $\text{arc tg } x + \dfrac{x}{1+x^2}$ *b)* $\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$ *c)* $\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$ *d)* $\dfrac{2x}{1+x^4}$

e) $\dfrac{6}{1+(2x+3)^2}$ *f)* $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ *g)* $e^{3x}\left[3 \text{ arc sen } 2x + \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\right]$

h) $\dfrac{3(1+16x^2)\cos 3x \text{ arc tg } 4x - 4 \text{ sen } 3x}{(1+16x^2)(\text{arc tg } 4x)^2}$ *i)* $2xe^{\text{arc tg } 2x}\left[1 + \dfrac{x}{1+4x^2}\right]$

j) $\dfrac{\left[\text{arc tg } x + \dfrac{x}{1+x^2}\right]\cos 2x + 2x \text{ arc tg } x \text{ sen } 2x}{\cos^2 2x}$

Exercício 3: Calcule:

$a)\ \lim_{x \to -1} \dfrac{4x^3 + x^2 + 3}{x^5 + 1}$

$b)\ \lim_{x \to 1} \dfrac{x^{100} - x^2 + x - 1}{x^{10} - 1}$

$c)\ \lim_{x \to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$

$d)\ \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2}$

$e)\ \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^{3x}}$

$f)\ \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

Respostas:

$a)\ 2 \quad b)\ \dfrac{99}{10} \quad c)\ +\infty \quad d)\ +\infty \quad e)\ 0 \quad f)\ 0$

Exercício 4:

15. Se R m for o alcance de um projétil, então

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \tfrac{1}{2}\pi$$

onde v_0 m/s é a velocidade inicial, g m/s^2 é a aceleração da gravidade e θ é a medida em radianos do ângulo que a arma faz com a horizontal. Ache o valor de θ para que o alcance seja máximo.

19. Um clube privado cobra a anuidade de $100 por membro, menos $0,50 para cada membro acima de 600 e mais $0,50 para cada membro abaixo de 600. Quantos membros darão ao clube um rendimento anual máximo?

21. Laranjeiras na Califórnia produzem 600 laranjas por ano, se forem plantadas no máximo 20 árvores por acre (4 km^2). Cada árvore plantada a mais causa um decréscimo de 15 laranjas por pé. Quantas árvores devem ser plantadas por acre para se obter o maior número de laranjas?

23. Ache as dimensões do cilindro circular reto de maior área de superfície lateral que possa ser inscrito numa esfera com um raio de 6 cm.

25. Para um pacote ser aceito por um determinado serviço de entrega de encomendas, a soma do comprimento e do perímetro da secção transversal não deve ser maior do que 100 cm. Se um pacote tiver o formato de uma caixa retangular com uma secção quadrada, ache as dimensões do pacote tendo o maior volume possível que possa ser despachado.

27. Dado a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$, ache (a) a menor distância entre o ponto (4, 5) e um ponto na circunferência; (b) a maior distância entre o ponto (4, 5) e um ponto na circunferência.

33. A resistência de uma viga retangular é conjuntamente proporcional à sua largura e ao quadrado de sua profundidade. Ache as dimensões da viga mais resistente que possa ser cortada de uma tora na forma de um cilindro circular reto com 72 cm de raio.

35. Um pedaço de arame com 10 m é cortado em duas partes. Uma delas é curvada na forma circular e a outra, na forma de um quadrado. Como dividir o fio, de tal forma que (a) a área combinada das duas figuras seja a menor possível; (b) a área combinada das duas figuras seja a maior possível?

69. Entre 0 °C e 30 °C, o volume V (em centímetros cúbicos) de 1 kg de água a uma temperatura T é aproximadamente dado pela fórmula

$$V = 999{,}87 - 0{,}06426T + 0{,}0085043T^2 - 0{,}0000679T^3$$

Encontre a temperatura na qual a água tem sua densidade máxima

Respostas:

13. de A a P a C, onde P fica a 4 km rio abaixo de B **15.** $\frac{1}{4}\pi$ **17.** 225 **19.** 400 **21.** 30 **23.** o raio é $3\sqrt{2}$ cm, a altura é $6\sqrt{2}$ cm.
25. $\frac{50}{3}$ cm por $\frac{50}{3}$ cm por $\frac{100}{3}$ cm **27.** (a) $\sqrt{50 - 6\sqrt{41}}$ unidades $= (\sqrt{41} - 3)$ unidades $\approx 3{,}4$ unidades;
(b) $\sqrt{50 + 6\sqrt{41}}$ unidades $= (\sqrt{41} + 3)$ unidades $\approx 9{,}4$ unidades **29.** $\frac{2}{3}k$ **33.** a largura é $48\sqrt{3}$ cm; a espessura é $48\sqrt{6}$ cm
35. (a) o raio da circunferência é $\dfrac{5}{\pi + 4}$ m e a extensão do lado do quadrado é $\dfrac{10}{\pi + 4}$ m;
(b) o raio da circunferência é $\dfrac{5}{\pi}$ m e não há quadrado

69. 3.9665° C

Exercício 5.

75. Prove que a função

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$$

não tem nem máximo nem mínimo locais.

Exercício 6:

Nos Exercícios de 1 a 40, faça o seguinte: (a) ache os extremos relativos de f pelo teste da derivada primeira; (b) determine os valores de x nos quais os extremos relativos ocorrem; (c) determine os intervalos nos quais f é crescente; (d) determine os intervalos nos quais f é decrescente; (e) faça um esboço do gráfico.

15. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

17. $f(x) = (1 - x)^2(1 + x)^3$

23. $f(x) = 2 - 3(x - 4)^{2/3}$

Respostas:

mín. rel.; $f(1) = \frac{53}{15}$, máx. rel.; $f(2) = \frac{31}{15}$ mín. rel.; (c) $(-\infty, -2]$, $[-1, 1]$, $[2, +\infty)$; $[-2, -1]$, $[1, 2]$ **13.** (a) e (b) não tem extremos rel.; (c) $(0, +\infty)$; (d) em nenhum intervalo **15.** (a) e (b) $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, mín. rel.; (c) $(-\infty, 0)$, $[\sqrt[3]{2}, +\infty)$; (d) $(0, \sqrt[3]{2}]$ **17.** (a) e (b) $f(\frac{1}{5}) = \frac{3.456}{3.125}$, máx. rel.; $f(1) = 0$, mín. rel.; (c) $(-\infty, \frac{1}{5}]$, $[1, +\infty)$; (d) $[\frac{1}{5}, 1]$ **19.** (a) e (b) $f(2) = 4$, máx. rel.; (c) $(-\infty, 2]$; (d) $[2, 3]$

21. (a) e (b) $f(-1) = 2$, máx. rel.; $f(1) = -2$, mín. rel.; (c) $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$; (d) $[-1, 1]$ **23.** (a) e (b) $f(4) = 2$, máx. rel.; (c) $(-\infty, 4]$; (d) $[4, +\infty)$ **25.** (a) e (b) $f(\frac{1}{8}) = -\frac{1}{4}$, mín. rel.; (c) $[\frac{1}{8}, +\infty)$; (d) $(-\infty, \frac{1}{8}]$ **27.** (a) e (b) f tem um valor máx. rel. de $-\frac{1}{2}$ se $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$, onde k é um inteiro qualquer; f tem um valor mín. rel. de $\frac{1}{2}$ se $x = \frac{1}{2}k\pi$, onde k é um inteiro qualquer; (c) $[\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{8}k\pi + \frac{1}{2}k\pi)$, $(\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi, \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi]$, onde k é um inteiro qualquer; (d) $[\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi, \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi)$, $(\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi, \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}k\pi]$, onde k é um inteiro

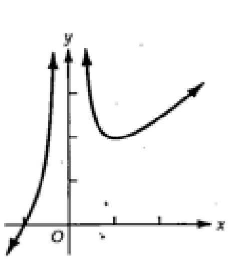


FIGURA 4.4-15

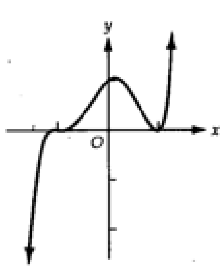


FIGURA 4.4-17

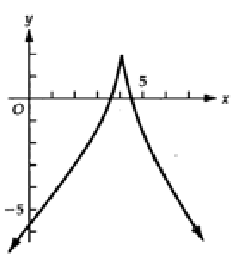


FIGURA 4.4-23

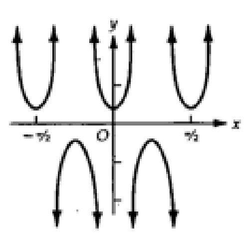


FIGURA 4.4-27

Exercício 7:

Nos Exercícios de 1 a 26, ache os extremos relativos da função dada usando o teste da derivada segunda, quando aplicável. Quando ele não for aplicável, use o teste da derivada primeira. Use a derivada segunda para encontrar os pontos de inflexão do gráfico da função e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde é para baixo. Faça um esboço do gráfico.

9. $h(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$

11. $F(x) = \cos 3x;\ x \in \left[-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$

21. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$

Respostas:

côncavo para baixo para $x < 1$; côncavo para cima para $x > 1$ **7.** $f(4) = 0$, mín. rel.; côncavo para cima em toda parte **9.** $h(-\frac{3}{4}) = -\frac{99}{256}$, mín. rel.; $h(0) = 0$, máx. rel.; $h(1) = -\frac{5}{6}$, mín. rel.; pontos de infl. em $x = \frac{1}{12}(1 \pm \sqrt{37})$; côncavo para cima para $x < \frac{1}{12}(1 - \sqrt{37})$ e $x > \frac{1}{12}(1 + \sqrt{37})$; côncavo para baixo para $\frac{1}{12}(1 - \sqrt{37}) < x < \frac{1}{12}(1 + \sqrt{37})$ **11.** $F(\frac{1}{3}\pi) = -1$, mín. rel.; $F(0) = 1$, máx. rel.; $(\frac{1}{6}\pi, 0)$, ponto de infl.; côncavo para baixo para $-\frac{1}{6}\pi < x < \frac{1}{6}\pi$; côncavo para cima para $\frac{1}{6}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ **13.** $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{27}{16}$, mín. rel.; $(-2, 0)$, $(-1, -1)$, pontos de infl.; **21.** $f(-1) = -2$, mín. rel.; $f(1) = 2$, máx. rel.; $(0, 0)$, $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{7}{8}\sqrt{2})$, $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{7}{8}\sqrt{2})$, pontos de infl.; côncavo para cima para $x < -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e $0 < x < \frac{1}{2}\sqrt{2}$; côncavo para baixo para $-\frac{1}{2}\sqrt{2} < x < 0$ e $x > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ **23.** $f(0) = 0$, mín. rel.; côncavo para cima em toda parte

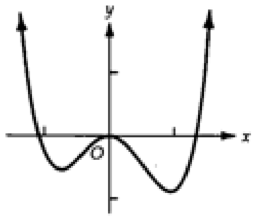


FIGURA 4.6-9

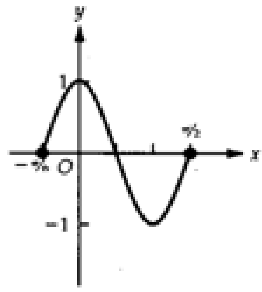


FIGURA 4.6-11

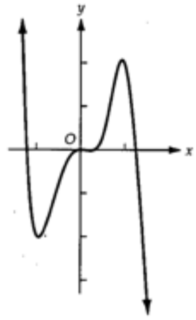


FIGURA 4.6-21

Exercício 8: Esboce o gráfico das funções abaixo. Utilize o seguinte roteiro:

a) Determine o domínio da função;
b) Ache os pontos onde o gráfico de f intersecta o eixo y e os pontos onde o gráfico de f intersecta o eixo x, se for fácil obtê-los.
c) Calcule f'(x) e f''(x).
d) Determine os pontos críticos de f.
e) Determine para quais pontos críticos f possui um valor máximo local ou um valor mínimo local. Além disso, identifique os pontos críticos nos quais f não tem um extremo relativo.
f) Determine os intervalos nos quais f é crescente; determine os intervalos nos quais f é decrescente.
g) Determine os pontos nos quais o gráfico é côncavo para cima e para baixo, respectivamente.
h) Determine os pontos de inflexão.
i) Obtenha, se houver, as assíntotas horizontais, verticais ou oblíquas.
j) Esboce o gráfico de f.

2. $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

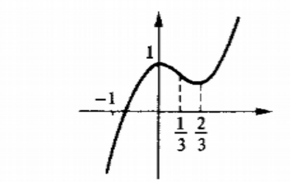
5. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

13. $y = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2}$

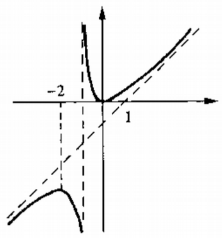
18. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 2}$

Respostas:

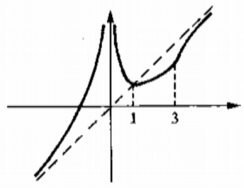
2.



5.



13.



18.