GABARITO PROVA Nº 2 (CM311)

① Derivação implícita:

(a) $(x+y)^2 - xy = 2$

Derivando a ambos os membros

$$2(x+y)\cdot(1+y'(x)) - [1\cdot y + x\,y'(x)] = 0$$

$$2(x+y) + 2(x+y)\,y'(x) - y - x\,y'(x) = 0$$

$$y'(x)\,(2(x+y) - x) = y - 2(x+y)$$

$$y'(x) = \frac{-(y+2x)}{x+2y}$$

(b) $\cosh^2(y) + e^{3xy} = x+1$; derivando:

$$2\cosh(y)\cdot\operatorname{senh}(y)\cdot y'(x) + e^{3xy}(3y + 3xy') = 1$$

$$y'(x)\left[2\cosh(y)\cdot\operatorname{senh}(y) + 3x\,e^{3xy}\right] = 1 - 3y\,e^{3xy} \Rightarrow$$

$$y'(x) = \frac{1 - 3y\,e^{3xy}}{2\cosh(y)\operatorname{senh}(y) + 3x\,e^{3xy}}$$

② (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$ indeterminação do tipo "0/0"; usar L'Hôspital

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1} \overset{\text{"0/0"}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{6x}{6x-2} = \frac{6}{4} = 3/2$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (e^x+3x)^{1/x}$ indet do tipo "1^∞"

Observe que $(e^x+3x)^{1/x} = e^{\ln(e^x+3x)^{1/x}}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} (e^x+3x)^{1/x} = e^{\lim_{x\to 0}\ln(e^x+3x)^{1/x}} = e^4.$$

$$\lim_{x\to 0} \ln(e^x+3x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(e^x+3x) \overset{\text{"0/0"}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(e^x+3x)^{-1}\cdot(e^x+3)}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 4}{e^x+3}}{\underset{\to 1}{e^x+3x}} = 4$$

③ (a) $f(x) = x^5+5x-3$ é uma função contínua tal que $f(0) = -3 < 0$ e $f(1) = 2 > 0$ logo o teorema dos valores intermediários garante que $\exists\, c \in (0,1)$ tq $\boxed{f(c)=0}$. Para mostrar que é a única, supor que $\exists\, d \,/\, f(d)=0$; como f é diferenciável e $f(c)=f(d)=0$ $\Rightarrow \exists\, p \in (c,d)$ tq $f'(p)=0$ (teorema de Rolle) mas observe que $f'(x) = 5x^4+5 > 0 \;\forall x$ logo f deve possuir uma única raiz real.

(b) $g(x) = (x-1)^{2/3}$ no intervalo $[0,4]$

Pontos críticos: $g'(x)=0$ ou $\nexists\, g'(x)$

$g'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$ nunca é zero; mas $x=1$ é ponto crítico pois $\nexists\, g'(1)$

Comparando os valores:

x	0	1	4
$g(x)$	1	0	$\sqrt[3]{9}$

$\Rightarrow$ $g(x)$ possui um mínimo absoluto em $x=1$ e vale 0.

$g(x)$ possui máx. absoluto em $x=4$ e vale $\sqrt[3]{9}$.

4. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

(a) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1) = 0 \iff x_0 = -1;\ x_1 = 0;\ x_2 = 1$ (pontos críticos)

(b) Sinal da derivada

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
sinal f'	$-$	$+$	$-$	$+$
	min loc.		max loc	min loc

f cresce em $(-1,0) \cup (1,+\infty)$

f decresce em $(-\infty,-1) \cup (0,1)$

(c) $f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2-1) = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}/3$

Sinal de $f''(x)$ determina concavidade / convexidade

	$(-\infty, -\sqrt{3}/3)$	$(-\sqrt{3}/3, +\sqrt{3}/3)$	$(\sqrt{3}/3, +\infty)$
sinal f'':	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	côncava	convexa

(d) $x_0 = -1$ e $x_2 = 1$ mínimos locais; $f(x_0) = 2$ $f(x_2) = 2$

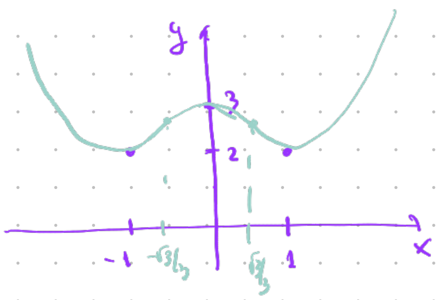
$x_1 = 0$ é um ponto de máximo local : $f(x_0) = +3$

$x_3 = -\sqrt{3}/3$ e $x_4 = \sqrt{3}/3$ pontos de inflexão (há mudança na concavidade)

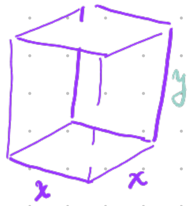
(e) Não tem máx abs. pois $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

Tem min. abs em ± 1

sendo $f_{min} = 2$.



⑤



Volume = $V(x,y) = x^2 y = 13{,}5 \Rightarrow y = \frac{13{,}5}{x^2}$

Área $= x^2 + 4 \cdot x \cdot y \quad \therefore \quad A(x) = x^2 + 4x\left(\frac{13{,}5}{x^2}\right)$

$\Rightarrow A(x) = x^2 + 4 \cdot \frac{13{,}5}{x}$

$A'(x) = \cancel{2}x - \cancel{4}^{\,2} \cdot \frac{13{,}5}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 27}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow \boxed{x = 3}$

$A''(x) = 2 + 8 \cdot \frac{13.5}{x^3} \Rightarrow A''(3) = 6 > 0 \Rightarrow x = 3$ é um minimizador local

Quando $x=3$; resulta $y = \frac{13{,}5}{3^2} = \frac{27}{2 \cdot 9} = \frac{3}{2} \quad \therefore \quad \boxed{x = 3}$ e $\boxed{y = 3/2}$ ▨