DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CM304 - CompleMat - 1º sem. de 2023
TERCEIRA PROVA

Justifique todas as suas afirmações!

Fixado C fixado como universo de discurso, cada propriedade de uma relação $\mathcal{R} \subseteq C \times C$ está definida abaixo:

- Reflexiva: $(\forall x)(x\,\mathcal{R}\,x)$
- Simétrica: $(\forall x)(\forall y)(x\,\mathcal{R}\,y \implies y\,\mathcal{R}\,x)$
- Transitiva: $(\forall x)(\forall y)(((x\,\mathcal{R}\,y) \wedge (y\,\mathcal{R}\,z)) \implies x\,\mathcal{R}\,z)$
- Irreflexiva: $(\forall x)(\neg(x\,\mathcal{R}\,x))$
- Anti-simétrica: $(\forall x)(\forall y)(((x\,\mathcal{R}\,y) \wedge (y\,\mathcal{R}\,x)) \implies x = y)$
- $\mathcal{R}$ é uma *Ordem Parcial* quando ela é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.
- $\mathcal{R}$ é uma *Relação de Equivalência* quando ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

1. Para cada item abaixo, assinale verdadeiro ou falso. Justifique todas as suas respostas.

   [ ] Uma relação não reflexiva é necessariamente uma relação irreflexiva.
   [ ] A divisibilidade de inteiros é uma relação transitiva.
   [ ] Não existe relação de equivalência $\mathcal{R}$ tal que $\mathcal{R}$ seja anti-simétrica.
   [ ] A inclusão de conjuntos é uma relação de ordem parcial.

2. Considere $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ finito e seja $\mathcal{P}(C)$ o conjunto dos subconjuntos de C (conjunto das partes).

   (a) Prove que não existe função injetora $f : \mathcal{P}(C) \to C$.
   (b) Exiba uma função sobrejetora $h : \mathcal{P}(C) \to C$

   (OBS: Uma resolução deste exercício no caso em que C tem dois elementos $C = \{a_1, a_2\}$ será aceita com valor parcial da questão.)

3. Use o Princípio da Indução Matemática para provar que $3 \mid (5^n + 2 \cdot 11^n)$, para todo natural $n \geqslant 0$. Explicite cada etapa da demonstração, inclusive a conclusão!

4. Consiredere em $\mathbb{Z}$ a relação de conruência módulo n definida por:

$$x \equiv y \pmod{n} \iff n \mid (x - y).$$

   (a) Prove que $x \equiv y \pmod{n}$ é uma relação transitiva.
   (b) Prove que se $a \equiv b \pmod{p}$ e $c \equiv d \pmod{q}$, então $ac \equiv bd \pmod{(p, q)}$, onde (p, q) é o máximo divisor comum entre p e q.