Gabarito P1

① ⓐ $\lim_{x\to 4} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}} \cdot \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{(4-x)}(2+\sqrt{x})}{\cancel{4-x}} = 2+\sqrt{4} = 4$

ⓑ Observe que $\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{2(x-1)} = \frac{(x+1)}{(x+1)} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{2(x-1)} = \frac{(x+1)}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{2(x-1)} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 1} (x+1) \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2} \cdot 2 \overbrace{\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z}}^{=1} = 1 \cdot 1$

$z = x^2-1 \therefore x\to 1 \Leftrightarrow z\to 0$

logo $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{2(x-1)} = 1$

② (a) Mostrar: $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$ tq se $0<|x-1|<\delta^* \Rightarrow |4x+1-5|<\varepsilon$

Seja $\varepsilon>0$; $|4x+1-5| = |4x-4| = 4|x-1| < \varepsilon$ sempre que $0<\delta^*<\varepsilon/4$.

(b) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{x^2-9}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$ se $x\neq 3$; $x\neq 0$.

Assíntota horizontal em $x=0$ pois $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+3}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+3}{x} = -\infty$

Em $x=3$ não há assíntota horizontal pois $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x} = 2$

Assíntota vertical em $y=1$ pois $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x+3}{x}$
$= \lim_{x\to \pm\infty} 1 + \frac{3}{x} = 1$

③ $f(x) = \begin{cases} x^2+3x+a & x\leq 1 \\ bx+2 & x>1 \end{cases}$

f diferenciável em $x=1 \Rightarrow$ f contínua em $x=1$ logo

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = a+4 \therefore \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} bx+2 = b+2 = \lim_{x\to 1^-} f(x) = a+4$

$\Rightarrow \boxed{a+4 = b+2} \Rightarrow b = a+2$

f dif em $x=1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ exista $\therefore$ os laterais devem ser iguais

$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\overset{=a+2}{b}x+2-(a+4)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\overset{(a+2)x-(2+a)}{bx-(2+a)}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(a+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = a+2$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x+a-(a+4)}{x-1} = \frac{x^2+3x-4}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+4)}{\cancel{x-1}} \to 5$

$\therefore a+2 = 5 \Rightarrow a=3$ e $b=5$

(b) $f'(1)=5$, portanto $f'(x)=\begin{cases} 2x+3 & x<1 \\ 5 & x\geq 1 \end{cases}$

4 a) $f(x)=(3x^4+2x+1)\cos x$

$f'(x)=(12x^3+2)\cos x+(3x^4+2x+1)(-\operatorname{sen} x)$

b) $g(x)=\ln(x^2+1)+(x^3+1)^5$

$g'(x)=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x+5(x^3+1)^4\cdot 3x^2=\frac{2x}{x^2+1}+15x^2(x^3+1)^4.$

5 (a) Falso por exemplo $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ $\lim_{x\to 0} f=0\neq f(0)=1$

(b) Verdadeiro seja $f(x)=3x-1-\cos(2\pi x)$ note que f é contínua em $[0;1]$ e $f(0)=-2<0$; $f(1)=3-1-1=1>0$ logo o T.V.I garante que $\exists\, c\in(0,1)\,/\, f(c)=0$ se $f(c)=0\Rightarrow$

$3c-1-\cos 2\pi c=0 \Rightarrow 3c=1+\cos(2\pi c)$ logo $c\in(0,1)$ é solução da eq.

(c) Verdadeiro $f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$ pois $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to 0}-x=0$

logo $\boxed{f'(0)=0}$