UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CM304 - COMPLEMAT - 1º SEM. DE 2023
SEGUNDA PROVA

Justifique todas as suas afirmações!

1. Seja U um conjunto universo de discurso e $\mathcal{P}(x)$ um predicado qualquer onde $x \in U$. A função valor lógico $v : U \to \{0,1\}$ associa, para cada $x \in U$, o valor lógico $v(\mathcal{P}(x))$ de um predicado $\mathcal{P}(x)$. Para cada item abaixo, assinale verdadeiro ou falso.

   [F] $(\forall x)(v(\mathcal{P}(x) \vee (\neg\mathcal{P}(x))) = 1)$?

   [F] $(\exists x)(v(\mathcal{P}(x) \wedge (\neg\mathcal{P}(x))) = 1)$

   [ ] $v(Q(x) \wedge R(x)) = v(Q(x))v(R(x))$, para qualquer $x \in U$

   [V] $(\forall x)[(v(\mathcal{P}(x) \implies \mathcal{Q}(x)) = 0) \implies (v(\mathcal{P}(x)) = 1 \wedge v(\mathcal{Q}(x)) = 0)]$

   [V] $v(R(x) \implies T(x)) = v(T(x))v(R(x)) + 1 - v(R(x))$, para qualquer $x \in U$

$(\forall y)$

2. Considere a seguinte sentença predicada: $(\exists x)[A(x) \wedge (\forall \cancel{x})B(x,y)]$.
   Exiba uma interpretação na qual ela é verdadeira e outra na qual ela é falsa.

3. Prove que a sentença predicada abaixo é sempre válida, independentemente da interpretação:

$$(\exists x)[P(x) \implies Q(x)] \implies [(\forall x)P(x) \implies (\exists x)Q(x)]$$

4. Use o Princípio da Indução Matemática para provar que as seguintes relações abaixo entre números naturais são sempre válidas para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   i) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

   ii) $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ é divisível por 14.