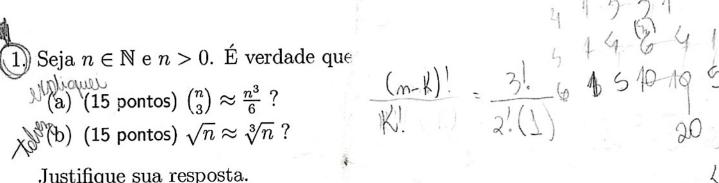
$$\frac{m!}{[k!(m-k)!]} = \frac{5!}{4!(1)!} = 5.$$

Matemática Discreta

Primeira Prova

30 de março de 2017



Justifique sua resposta.

2. Seja $M \colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

M(n) := a posição do bit mais significativo na representação binária de n

sendo que os bits são contados da direita para a esquerda a partir de 0. Por exemplo, M(1) = 0 e M(10) = 3.

- (a) (10 pontos) Proponha uma expressão recursiva para M(n).
- (b) (25 pontos) Prove que a expressão proposta está correta¹.
- (35 pontos) Dados $n, k \in \mathbb{N}$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é definido da seguinte maneira

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{se } 1 \le k \le n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove, por indução em n, que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n}.$$

¹Sugestão: No primeiro item defina a função recursiva $f: \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ "candidata a M" e no segundo item prove que f(n) = M(n) para todo n > 0.