Matemática Discreta

Primeira Prova

20 de abril de 2023

1. Em cada item diga se a proposição é verdadeira ou não e justifique sua resposta.

   (a) (10 pontos) $\sum_{i=0}^{n} i \sim \binom{n}{2}$ (b) (10 pontos) $\lg n \sim \ln n$ (c) (10 pontos) $\sqrt{n} \sim \sqrt[3]{n}$

2. O seguinte algoritmo resolve o conhecido quebra-cabeça das Torres de Hanói. A execução de $\mathsf{Hanoi}(n, a, b, c)$ move n discos da torre a para a torre b usando a torre c como torre auxiliar, de acordo com as regras do jogo.

   $\mathsf{Hanoi}(n, a, b, c)$

   Se $n = 0$
       Termine
   $\mathsf{Hanoi}(n-1, a, c, b)$
   mova o disco no topo da torre a para o topo da torre b
   $\mathsf{Hanoi}(n-1, c, b, a)$

   Seja $M(n)$ o número de movimentos (passagem de um disco de uma torre para outra) na execução de $\mathsf{Hanoi}(n, a, b, c)$.

   (a) (10 pontos) Apresente uma expressão recursiva para $M(n)$.

   (b) (25 pontos) Prove por indução em n que $M(n) = 2^n - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Considere o seguinte algoritmo para computar o quadrado de um inteiro n.

   $\mathsf{Q}(n)$

   Se $n = 0$
       Devolva 0
   $q \leftarrow \mathsf{Q}\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$
   $q \leftarrow q + q + q + q$
   Se n *é ímpar*
       $q \leftarrow q + n + n - 1$
   Devolva q

   (a) (15 pontos) Prove que o algoritmo está correto[1], isto é, que $\mathsf{Q}(n) = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (b) (20 pontos) Prove que o número de somas e subtrações efetuadas na execução de $\mathsf{Q}(n)$ é $6(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$, para todo $n \geq 1$. (no max)

   (c) (10 pontos) Descreva como modificar o algoritmo de forma que o número de somas e subtrações efetuadas na execução de $\mathsf{Q}(n)$ seja $5(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$, para todo $n \geq 1$.
   (no max)

---
[1] **Sugestão:** Estude separadamente os casos em que n é par ou ímpar.