$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{5!}{4!(1)!} = 5.$$

$6 = 3+3$

$\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

Matemática Discreta

Primeira Prova

30 de março de 2017

1. Seja $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$. É verdade que

   explique (a) (15 pontos) $\binom{n}{3} \approx \frac{n^3}{6}$?

   talvez (b) (15 pontos) $\sqrt{n} \approx \sqrt[3]{n}$?

   Justifique sua resposta.

2. Seja $M\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

   $M(n) :=$ a posição do bit mais significativo na representação binária de n,

   sendo que os bits são contados da direita para a esquerda a partir de 0. Por exemplo, $M(1) = 0$ e $M(10) = 3$.

   (a) (10 pontos) Proponha uma expressão recursiva para $M(n)$.

   (b) (25 pontos) Prove que a expressão proposta está correta[1].

3. (35 pontos) Dados $n, k \in \mathbb{N}$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é definido da seguinte maneira

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   Prove, por indução em n, que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2}} = 6$$

---

[1]**Sugestão:** No primeiro item defina a função recursiva $f\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ "candidata a M" e no segundo item prove que $f(n) = M(n)$ para todo $n > 0$.