Matemática Discreta

Turma A

20 de Dezembro de 2011

1. **(3.0 pontos)** Considere o Algoritmo $\mathsf{Exp}(x, n)$ dado por

---

Exp(x,n)

Se $n = 0$
    Devolva 1
$e \leftarrow \mathsf{Exp}(x, \lfloor n/2 \rfloor)$
$e \leftarrow e \times e$
Se n *é par*
    Devolva e
Devolva $x \times e$

---

base 1, se $n=0$
H.I. $\mathsf{Exp}(x,n) = x^n$

Prove por indução em n uma das seguintes afirmações.

(a) $\mathsf{Exp}(x, n) = x^n$ para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) A execução de $\mathsf{Exp}(x, n)$ efetua no máximo $2(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$ multiplicações para todo $x > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

2. **(4.0 pontos)** Resolva uma das seguintes recorrências explicando cada etapa da resolução.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + n, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

$n \cdot 3^{t-n}$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ f\left(\lfloor \sqrt{n} \rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

3. **(4.0 pontos)** Dê uma expressão livre de somatórios para uma das somas abaixo, explicando cada etapa da resolução.

(a)

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{3^i}.$$

$\left(\frac{1}{3^i}\right)(x-1)$

$x^2 - x - 1$

$\frac{1}{3^i} + \frac{1}{3^i} + \frac{1}{3^i}$

$x\ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(b)

$$\sum_{i=0}^{n} F(i),$$

onde F é a sequência de Fibonacci dada por

então $(n+1)$ vezes

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$