

Matemática Discreta

Primeira Prova

15 de maio de 2012

1. (3.0 pontos) Considere o seguinte algoritmo

Multiplica(x, n)

Se $n = 0$

 Devolva 0

Se n é par

 Devolva $\text{Multiplica}(x + x, \frac{n}{2})$

 Devolva $\text{Multiplica}(x + x, \frac{n-1}{2}) + x$

Prove por indução que $\text{Multiplica}(x, n)$ devolve o valor de \underline{nx} para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $\underline{n} \in \mathbb{N}$.

2. Uma *árvore ternária* T é uma *árvore vazia*, denotada por λ ou é uma tripla $(E(T), M(T), D(T))$ onde $E(T)$, $M(T)$ e $D(T)$ são árvores ternárias, chamadas respectivamente de *subárvore esquerda*, *subárvore do meio* e *subárvore direita* de T . O tamanho de uma árvore T é dado por

$$|T| = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ |E(T)| + |M(T)| + |D(T)| + 1, & \text{se } T \neq \lambda. \end{cases}$$

A altura de uma árvore T é dada por

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ \max\{h(E(T)), h(M(T)), h(D(T))\} + 1, & \text{se } T \neq \lambda. \end{cases}$$

O tamanho máximo de uma árvore ternária de altura n é denotado por $t^+(n)$.

- (a) (1.5 pontos) Descreva a função $t^+(n)$ através de uma recorrência.
(b) (2.5 pontos) Resolva esta recorrência, explicando cada passo da resolução.

3. (3.0 pontos) Dê uma expressão livre de somatórios para

$$\sum_{i=0}^n \frac{i}{2^i},$$

explicando cada passo da resolução.