"Não há razão para qualquer indivíduo ter um computador em casa" (Ken Olsen, 1977).

Ponto Flutuante e IEEE 754

Paulo Ricardo Lisboa de Almeida

DSBD

UFPR

Números reais e o Hardware

Faça um programa que soma 0.1 10x e mostra o resultado.

```c
#include <stdio.h>

int main() {
   double val = 0.0;
   for (int i = 0; i < 10; i++)
      val += 0.1;

   printf("%.16lf\n", val);
   return 0;
}
```

Números reais e o Hardware

Faça um programa que soma 0.1 10x e mostra o resultado.

É impossível representar qualquer número real na máquina.

Por quê?

Para relembrar...

Converter $4{,}1_{10}$ para binário.

Para relembrar...

Converter $4{,}1_{10}$ para binário.

1. Converter a parte inteira para binário com divisões sucessivas.

   $4_{10} = 100_2$

2. Converter a parte fracionária usando múltiplas multiplicações.
   a. $0{,}1_{10} = 00011001100..._2$

$4{,}1_{10} = 100{,}00011001100..._2$

Entrada: r_{10}, entre 0 e 1

Saída: r_2 representado por $((0, d_1), d_2, ..., d_j)$

$k = 1, F = r_{10}$

Faça:

$\quad F = 2 \times F$

$\quad d_k = parteInteira(F)$

$\quad F = F - d_k$

$\quad k = k + 1$

Enquanto $(F > 0)$

Números reais e o Hardware

É impossível representar qualquer número real na máquina.

- Temos uma infinidade de números reais, e o hardware é finito.
- Armazenamos **aproximações**.

Ponto Flutuante

Uma forma de armazenar essas aproximações é através de ponto flutuante.

Conceito implementado em grande parte dos processadores comerciais.

Ponto Flutuante

Uma forma de armazenar essas aproximações é através de ponto flutuante.

Conceito implementado em grande parte dos processadores comerciais.

Similar à notação científica normalizada.

- **O número tem um e somente um dígito antes da casa decimal, e não possui zeros antes da casa decimal.**
- Exemplos:
  - $8.0_{10} \times 10^{-9}$ é normalizado.
  - $0.1_{10} \times 10^{-8}$ não é normalizado.
  - $10.0_{10} \times 10^{-10}$ não é normalizado.

Ponto Flutuante

Podemos fazer o mesmo com números binários.

Vamos exibir a base e a potência na base
10 para simplificar a visualização.

Exemplo:

$1.0_2 \times 2^1$ está normalizado.

Vamos chamar o ponto decimal de “ponto binário” para a base 2.

Convenção de Patterson e Hennessy (2020).

Exemplo: normalizar 1111.11_2.

Normalizando

Normalizar o valor 1111.11_2

$$
\begin{aligned}
1111.11_2 &= 1111.11_2 \times 2^0 \\
&= 111.111_2 \times 2^1 \\
&= 11.1111_2 \times 2^2 \\
&= 1.11111_2 \times 2^3 \leftarrow \text{Normalizado}
\end{aligned}
$$

O número tem um, e somente um, bit antes do ponto, e não possui zeros antes do ponto.

Faça você mesmo

Normalize os seguintes valores binários:

a. 11.01_2
b. 111_2
c. 0.000001_2

Faça você mesmo

Normalize os seguintes valores binários:

a. 11.01_2 $1.101_2 \times 2^1$
b. 111_2 $1.11_2 \times 2^2$
c. 0.000001_2 $1.0_2 \times 2^{-6}$

Pergunta

Para armazenar um valor binário normalizado arbitrário na memória, como $1.11111_2 \times 2^3$, quais campos são importantes?

Ponto Flutuante

Para armazenar um valor binário normalizado arbitrário na memória, como $1.11111_2 \times 2^3$, quais campos são importantes?

Não precisamos armazenar o 1 antes do ponto binário, nem a base.

Os valores então **sempre** tem o formato $(+/-)1.xxxxxxxxx \times 2^{yyyy}$.

Onde xxxxxxxxx é a **mantissa** (ou fração) e yyyy é o **expoente**.

Armazenamos apenas a **mantissa**, o **expoente**, e o **sinal**.

IEEE 754

- Utilizado em grande parte dos processadores comerciais.
  - Inclusive no seu x86-64 e no seu smartphone.
  - Quando não disponível no hardware, é simulado via software.
    - Compilador injeta as instruções necessárias.

IEEE 754 - Precisão Simples

<table>
<tr><td>31</td><td>30</td><td>29</td><td>28</td><td>27</td><td>26</td><td>25</td><td>24</td><td>23</td><td>22</td><td>21</td><td>20</td><td>19</td><td>18</td><td>17</td><td>16</td><td>15</td><td>14</td><td>13</td><td>12</td><td>11</td><td>10</td><td>9</td><td>8</td><td>7</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>s</td><td colspan="8">expoente</td><td colspan="23">mantissa</td></tr>
</table>

1b 8 bits 23 bits

IEEE 754 - Precisão Simples

31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
s	expoente								mantissa																						
1b	8 bits								23 bits																						

Sinal da mantissa.
Representação com **sinal e magnitude**.
0 é positivo, 1 é negativo.

Precisão Simples - Declarado como *float* em C.

Overflow e Underflow

Overflow: o expoente é muito grande para caber na memória.

Underflow: o expoente é muito pequeno para caber na memória.

IEEE 754 – Precisão Dupla

IEEE 754 - Precisão **dupla.**

52 bits para mantissa, e 11 para expoente.

Declarado como **double** em C.

Quais as vantagens e desvantagens da precisão dupla em relação à simples?

IEEE 754 – Precisão Dupla

Quais as vantagens e desvantagens da precisão dupla em relação à simples?

+ Consegue armazenar uma extensão maior de valores;

+ Maior precisão devida a mantissa ser muito maior;

- Ocupa mais memória;

- Pode precisar de mais ciclos do processador para efetuar cálculos.

Valores Especiais

Como representar o número 0? Qual a dificuldade?

Valores Especiais

Como representar o número 0? Qual a dificuldade?

Concordamos que o **1 antes do ponto binário é implícito**, e não é representado pelo hardware

(+/-)1.xxxxxxxxx × 2^{yyyy}.

Mas o número 0 em especial não tem 1 antes do ponto binário!

Essas e outras exceções são tratadas com **valores especiais**.

Valores Especiais

Precisão Simples		Precisão Dupla		Descrição
Expoente	Mantissa	Expoente	Mantissa	
0	0	0	0	0
0	Diferente de Zero	0	Diferente de Zero	+/- número desnormalizados
[1..254]	Qualquer	[1..2046]	Qualquer	+/- número em ponto flutuante
255	0	2047	0	+/- infinito
255	Diferente de Zero	2047	Diferente de Zero	NaN (*Not a Number*)

IEEE 754 - Exemplo

$$-1.11111_2 \times 2^{-2}$$

31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
s	expoente								mantissa																						

IEEE 754 - Exemplo

$$\boxed{-}1.11111_2 \times 2^{-2}$$

31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
s	expoente								mantissa																						

IEEE 754 - Exemplo

$$\boxed{-}1.\boxed{11111}_2 \times 2^{-2}$$

31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
s	expoente								mantissa																						

IEEE 754 - Exemplo

$$\boxed{-}1.\boxed{11111}_2 \times 2^{\boxed{-2}}$$

31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
s	expoente								mantissa																						

IEEE 754 - Exemplo

$$\boxed{-}1.\boxed{11111}_2 \times 2^{\boxed{-}\boxed{2}}$$

E o sinal do expoente?

31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
s	expoente								mantissa																						

Sinal do Expoente

E o sinal do expoente?

- Poderíamos utilizar complemento de 2.
- Ou então sinal e magnitude, como na mantissa.

Sinal do Expoente

E o sinal do expoente?

Poderíamos utilizar complemento de 2.

Ou então sinal e magnitude, como na mantissa.

Para que facilitar, se podemos complicar?

Notação com bias

O IEEE 754 especifica que o expoente utiliza uma **notação com bias.**

Biased Exponent.

O **bias** é o **valor intermediário** entre todos os possíveis de serem representados no expoente.

127_{10} ($0111\ 1111_2$) para precisão simples.

1023_{10} ($011\ 1111\ 1111_2$) para precisão dupla.

No caso geral, o bias é $2^{x-1}-1$, onde x é o número de bits no expoente.

O expoente é somado ao bias.

Notação com bias

Exemplos:

O expoente -1_{10} na notação com bias se torna

$$-1_{10} + 127_{10} = 126_{10} = 01111110_2$$

O expoente 1_{10} na notação com bias se torna

$$1_{10} + 127_{10} = 128_{10} = 10000000_2$$

IEEE 754

Um ponto flutuante é então representado por:

$$(-1)^{sinal} \times (1.0 + mantissa) \times 2^{(expoente-bias)}$$

Apenas os itens em azul são armazenados na memória.

Exemplo

Representar -0.75_{10} em precisão simples

Exemplo

Representar -0.75_{10} em precisão simples

Convertendo para binário pelo método da multiplicação: 0.11_2

Normalizando: $0.11_2 \times 2^0 = 1.1_2 \times 2^{-1}$

Mantissa: 1 (somente a parte fracionária)

Expoente: $-1 + 127 = 126_{10} = 01111110_2$

Sinal: 1 (negativo)

31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Exemplo

Converta para decimal.

31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Exemplo

Converta para decimal.

31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

O expoente é $10000001_2 = 129_{10}$

Subtraindo o bias temos $129 - 127 = 2_{10}$

A mantissa é $1.01_2 = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 1.25_{10}$

O bit de sinal é 1 (negativo)

Logo temos $-1.25 \times 2^2 = -5^{10}$

Relembrando...

Realizar uma adição utilizando notação científica.

Vamos realizar na base 10, mas o procedimento é o mesmo na base 2.

Considere a seguinte adição: $9.999_{10} \times 10^{1} + 1.610_{10} \times 10^{-1}$.

Considerando que podemos representar 4 dígitos na memória.

Relembrando...

Considere a seguinte adição: $9.999_{10} \times 10^{1} + 1.610_{10} \times 10^{-1}$.

Considerando que podemos representar 4 dígitos na memória.

Primeiro precisamos igualar o expoente do número com o menor expoente, com o número de maior expoente.

$1.610_{10} \times 10^{-1} = 0.01610_{10} \times 10^{1}$.

Relembrando...

Considere a seguinte adição: $9.999_{10} \times 10^{1} + 1.610_{10} \times 10^{-1}$.

Considerando que podemos representar 4 dígitos na memória.

Primeiro precisamos igualar o expoente do número com o menor expoente, com o número de maior expoente.

$1.610_{10} \times 10^{-1} = 0.01610_{10} \times 10^{1}$.

Problema: só podemos armazenar 4 dígitos.

$1.610_{10} \times 10^{-1} = 0.016_{10} \times 10^{1}$.

Relembrando...

Feito isso, basta adicionar as mantissas:

$$9.999_{10} \times 10^{1} + 0.016_{10} \times 10^{1} = 10.015_{10} \times 10^{1}$$

Relembrando...

Feito isso, basta adicionar as mantissas:

$9.999_{10} \times 10^1 + 0.016_{10} \times 10^1 = 10.015_{10} \times 10^1$

O resultado não está normalizado. Normalizar:

$1.0015_{10} \times 10^2$

Relembrando...

Feito isso, basta adicionar as mantissas:

$9.999_{10} \times 10^1 + 0.016_{10} \times 10^1 = 10.015_{10} \times 10^1$

O resultado não está normalizado. Normalizar:

$1.0015_{10} \times 10^2$

Mais uma vez não cabe em 4 casas. Arredondando:

$1.002_{10} \times 10^2$

Relembrando...

Feito isso, basta adicionar as mantissas:

$9.999_{10} \times 10^1 + 0.016_{10} \times 10^1 = 10.015_{10} \times 10^1$

O resultado não está normalizado. Normalizar:

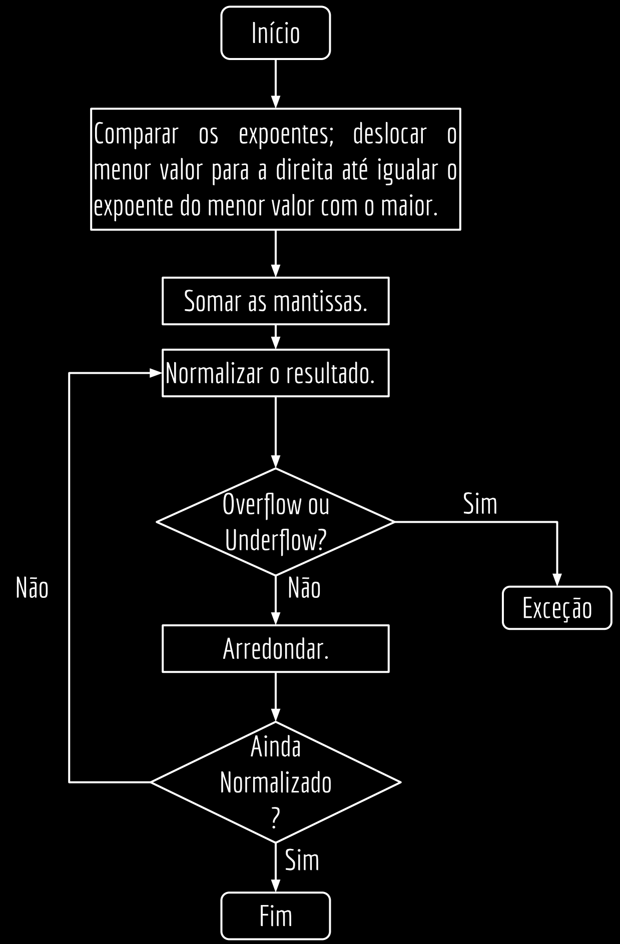
$1.0015_{10} \times 10^2$

Mais uma vez não cabe em 4 casas. Arredondando:

$1.002_{10} \times 10^2$

Se não tivéssemos que truncar/arrendondar os valores para caber em 4 casas, o resultado correto seria 100,151.

Soma


Início
Comparar os expoentes; deslocar o menor valor para a direita até igualar o expoente do menor valor com o maior.
Somar as mantissas.
Normalizar o resultado.
Overflow ou Underflow?
Sim
Exceção
Não
Arredondar.
Ainda Normalizado ?
Não
Sim
Fim

Multiplicação

Soma os expoentes (tomando cuidado com o bias).

Multiplicar as mantissas.

Arredondamento

O IEEE 754 define 4 formas de arredondamento, que podem ser setadas no processador (quando implementado no hardware):

- Arredondar para cima (teto).
- Arredondar para baixo (piso).
- Truncar (ignorar as demais casas).
- Nearest even (par mais próximo) <- Mais utilizado.

Detalhes sobre o arredondamento e suas implementações, são encontrados em Patterson e Hennessy (2020).

- Requerem que o processador mantenha bits extras para gerência.

IEEE 754

Comumente o padrão é embutido no hardware.

Hardwares simples podem não implementar o padrão.

- Ex.: microcontroladores.
- Nesse caso, o padrão é implementado via software.

De qualquer forma, **independe de linguagem.**

- Um ponto flutuante de precisão simples (float) é o mesmo em C, Java, C#, Python, ...

Outras Precisões

Existem ainda os padrões IEEE 754 para.

- Precisão estendida (comum em processadores x86-64);
- Half-Precision;
- Quad-Precision.

Exercícios

1. Represente -0.75 em precisão dupla. Compare a resposta com a obtida durante a aula para precisão simples.
2. Qual o maior e o menor valor que podem ser representados em ponto flutuante de precisão dupla e simples (desconsiderando +/ - ∞)? Quais são seus equivalentes em decimal?
3. Exiba os seguintes valores em ponto flutuante. Quando necessário trunque (ignore os bits que não couberem) os valores. Faça o desenho da memória como nos exemplos e coloque os endereços dos bits (para deixar claro a ordem dos bits).
   a. -16.015625_{10} para precisão simples
   b. -0.1_{10} para precisão simples
   c. 0.125_{10} em "meia precisão" (half-precision): 10 bits pra mantissa, 5 para expoente e 1 para sinal.
4. Sabendo-se que um número em quad precision possui 15 bits no expoente, responda (deduza você mesmo, sem pesquisar).
   a. Qual o bias para esses números.
   b. Qual o maior e o menor valor que podem ser representados (desconsiderando +/ -)?

Exercícios

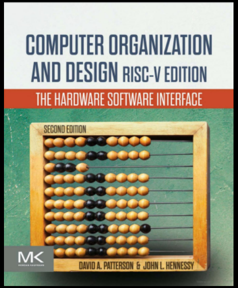
Considerando seus conhecimentos sobre representação de números em IEEE 754, o que pode dar errado com os programas em C a seguir. Quais são as alternativas para corrigir os problemas?

```c
//Programa 1 usa essa struct

struct pessoa{
	char nome[50];
	unsigned long cpf;
	float salario;
};
```

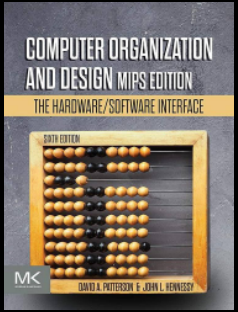
```c
//Programa 2


//...

double valor;
//faz alguns cálculos

if (valor == 5){
	printf("O resultado é ...");
}
//...
```

Referências

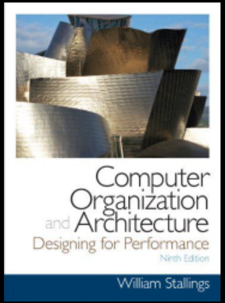
Patterson, Hennessy. Computer Organization and Design RISC-V Edition: The Hardware Software Interface. 2020.



Patterson, Hennessy. Computer Organization and Design MIPS Edition: The Hardware/Software Interface. 2020.



Stallings, W. Organização de Arquitetura de Computadores. 10a Ed. 2016.



Ruggiero, Lopes. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais. 1996.

Floyd. Sistemas Digitais: Fundamentos e Aplicações. 2009.

Licença