Matemática Discreta

Primeira Prova

27 de março de 2018

1. (20 pontos) A partir da igualdade

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

prove que

$$F(n) \approx \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

2. (30 pontos) Prove por indução em n que

Indução

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2^{n+1}(n-1) + 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

3. (a) (10 pontos) Prove que, se $k \in \mathbb{N}$, então $\lfloor \lg i \rfloor = k$ para todo $i \in [2^k..2^{k+1}-1]$.

   (b) (25 pontos) Use a igualdade

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = \sum_{k=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \lfloor \lg i \rfloor + \sum_{i=\lfloor \lg n \rfloor}^{n} \lfloor \lg n \rfloor,$$

   e os resultados do item anterior e da Questão 2 para concluir que

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx n \lfloor \lg n \rfloor.$$

4. (35 pontos) Dados $n, k \in \mathbb{N}$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é definido da seguinte maneira

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{se } 1 \le k \le n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove por indução em n que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$