6 Recorrências

6.1 Funções Iteradas

89[@]. Para cada uma das funções $f(x)$ abaixo, dê uma expressão para $f^n(x)$. Em cada caso, prove por indução em n que sua resposta está correta.

(a) $f(x) = x + 1$.

(b) $f(x) = x + 2$.

(c) $f(x) = x + 3$.

(d) $f(x) = x + s$.

(e) $f(x) = 2x$.

(f) $f(x) = 3x$.

(g) $f(x) = mx$.

(h) $f(x) = s + mx$.

90*. Para cada função $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, dê uma expressão para a função h^n, onde $n \in \mathbb{N}$.

(a) $h(x) = x - 2$,

(b) $h(x) = x - s$, com $s \in \mathbb{R}$,

(c) $h(x) = 3x$

(d) $h(x) = mx$, com $m \in \mathbb{R}$,

(e) $h(x) = x/2$,

(f) $h(x) = \lceil x/k \rceil$, com $k \in \mathbb{Z}^+$,

(g) $h(x) = \lfloor \sqrt[k]{x} \rfloor$, com $k \in \mathbb{N}$,

91⁻. Considere a seguinte função.

$$C(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ 3n + 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

A Conjectura de Collatz é a seguinte proposição.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $C^k(n) = 1$.

Desde que foi formulada em 1937, esta conjectura permanece em aberto.

Prove que se for verdade que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $C^k(n) < n$, então a Conjectura de Collatz é verdadeira.

6.2 Recorrências Iteradas

92$^@$. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = f(n-2) + 1, \text{ para todo } n \geq 2.$$

93$^@$. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

94$^@$. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

95*. Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-2) + 1, \text{ para todo } n > 1.$$

Prove, por indução em n, que

(a) $f(n) = f(n \bmod 2) + \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $f(n) = (-1)^n a + b + cn$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde

$$\begin{aligned} a &= \frac{f(0) - f(1)}{2} + \frac{1}{4}, \\ b &= \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{1}{4}, \\ c &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(c) $f(n) = f(4 + n \bmod 2) + \left\lceil \dfrac{k-5}{2} \right\rceil$, para $n \geq 5$.

96⋆. Seja $f(n)$ o número de sequências binárias de comprimento n.

(a) Descreva $f(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

97⋆. Uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética* se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(n+1) - f(n) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Expresse a função f como acima por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

98⋆. Seja $m(n, k)$ o número de multiplicações/divisões efetuadas na execução de $B(n, k)$, o algoritmo do Exercício 85.

(a) Formule uma recorrência para $m(n, k)$ $(0 \leq k \leq n)$.

(b) Resolva esta recorrência.

99⋆. Resolva a recorrência do Exercício 84.

100⋆. O Algoritmo de Strassen é um algoritmo recursivo para multiplicação de matrizes quadradas que, para matrizes suficientemente grandes, faz menos operações aritméticas do que o algoritmo usual.

A função $M(n)$, abaixo, estabelece um limitante superior para o número $S(n)$ de operações aritméticas na execução do Algoritmo de Strassen com duas matrizes quadradas de ordem n como entrada, isto é, $S(n) \leq M(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$M(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 7M\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 18 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resolva esta recorrência.

101⋆. O Algoritmo de Karatsuba é um algoritmo recursivo para multiplicação de inteiros que, para números suficientemente grandes, faz menos operações aritméticas do que o algoritmo usual.

A função $A(n)$, abaixo, descreve o número de operações aritméticas na execução do Algoritmo de Karatsuba com dois inteiros de n dígitos em sua representação binária.

Resolva esta recorrência.

$$A(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 5, & \text{se } n = 2, \\ 3A\left(\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil\right) + 20\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

102[@]. Dado $q \in \mathbb{C}$, uma *progressão geométrica* de razão q é uma função $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

103[@]. Resolva as seguintes recorrências

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n - 1, & \text{se } 2 \leq n \leq 3, \\ 2f(n-1), & \text{se } n \geq 4. \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} n - 1, & \text{se } 2 \leq n \leq 3, \\ 2f(n-2), & \text{se } n \geq 4. \end{cases}$$

104[⋆]. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 6n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(b) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + 2n + 3, \text{ para todo } n > 1,$

(c) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 2n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(d) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - 2n + 1, \text{ para todo } n > 1,$

(e) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right) + n^2 - 7n + 5, \text{ para todo } n > 1,$

(f) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\right) + \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1, \text{ para todo } n > 3,$

(g) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor\right) + n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(h) $f(n) = 2f\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) + 1, \text{ para todo } n > 1,$

(i) $f(n) = f\left(\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil\right) + k, \text{ para todo } n > 1 \text{ e } \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$

105*. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = f(n-1) + n, \text{ para todo } n > 0.$

(b) $f(n) = 2f(n-1) + n^2, \text{ para todo } n \geq 1$

(c) $f(n) = f(n-1) + 2n - 3, \text{ para todo } n > 1,$

(d) $f(n) = 2f(n-1) + 3n + 1, \text{ para todo } n > 1,$

(e) $f(n) = 2f(n-1) + n^2, \text{ para todo } n > 1,$

(f) $f(n) = f(n-2) + 3n + 4, \text{ para todo } n > 1,$

(g) $f(n) = f(n-3) + 5n - 9, \text{ para todo } n > 3,$

(h) $f(n) = 2f(n-1) + n^2 - 2n + 1, \text{ para todo } n > 1,$

106*. O seguinte algoritmo resolve o conhecido quebra-cabeça das Torres de Hanói. A execução de Hanoi(n, a, b, c) move n discos da torre a para a torre b usando a torre c como torre auxiliar, de acordo com as regras do jogo.

```
Hanoi(n, a, b, c)
---
  Se n = 0
      Termine
  Hanoi(n − 1, a, c, b)
  mova o disco no topo da torre a para o topo da torre b
  Hanoi(n − 1, c, b, a)
```

Seja $M(n)$ o número de movimentos (passagem de um disco de uma torre para outra) na execução de Hanoi(n, a, b, c).

(a) Descreva $M(n)$ por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

107*. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = nf(n-1) + n, \text{ para todo } n > 1,$

(b) $f(n) = f\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor\right) + n^2, \text{ para todo } n > 1,$

(c) $f(n) = 2f\left(\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor\right) + n, \text{ para todo } n > 1.$

108@. O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Do Exercício 56 temos que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$, onde

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

e

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Resolva as recorrências de $T^-(n)$ e $T^+(n)$.

(b) Use as soluções obtidas e o Exercício **??** para concluir que $T(n) \sim n \lg n$.

109@. O "Master Method" ou "Master Theorem"[11] é um método para obtenção de soluções assintóticas para recorrências que surgem naturalmente na análise de "algoritmos de divisão e conquista".

Tais recorrências tem a forma geral

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

onde $a \geq 1$ e $b \geq 1$, a expressão n/b pode significar tanto $\lfloor n/b \rfloor$ como $\lceil n/b \rceil$ e $f()$ é uma função genérica. A recorrência do Exercício 108 é um exemplo de caso particular desta recorrência.

[11] Popularizado com este nome por Cormen, Leiserson, Rivest, and Stein (2009).

Sejam a, b e $f()$ como acima e sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $T^+, T^- : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} T^-(n) &= aT^-(\lfloor n/b \rfloor) + f(n), \\ T^+(n) &= aT^+(\lceil n/b \rceil) + f(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Resolva estas recorrências.

110*. Considere o algoritmo Exp do exercício 76.

(a) Expresse o número de multiplicações efetuadas na execução de $\mathsf{Exp}(x, n))$ por meio de uma recorrência.

(b) Resolva essa recorrência.

111*. O Algoritmo $\mathsf{MinMax}(v, a, b)$ (abaixo), devolve um par de índices $(m, M) \in [a..b]^2$ tal que $v[m] \leq v[i] \leq v[M]$, para todo $i \in [a..b]$. O Algoritmo $\mathsf{Ordena}(v, a, b)$ ordena o vetor $v[a..b]$ em ordem não-decrescente.

```
MinMax(v, a, b)
  Se a = b
    Devolva (a, a)
  Se a = b − 1
    Se v[a] ≤ v[b]
      Devolva (a, b)
    Devolva (b, a)
  (m, M) ←
   MinMax(v, a, a + 1)
  (m′, M′) ←
   MinMax(v, a + 2, b)
  Se v[m′] < v[m]
    m ← m′
  Se v[M′] > v[M]
    M ← M′
  Devolva (m, M)
```

```
Ordena(v, a, b)
  Se a ≥ b
    Termine
  (m, M) ←
   MinMax(v, a, b)
  Troca(v, a, m)
  Troca(v, b, M)
  Ordena(v, a + 1, b − 1)
```

(a) Seja $C(n)$ o número de comparações entre elementos de v efetuadas na execução de $\mathsf{MinMax}(v, a, a + n - 1)$. Expresse $C(n)$ por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Seja $K(n)$ o número de comparações entre elementos de v efetuadas na execução de $\mathsf{Ordena}(v, a, a+n-1)$. Expresse $K(n)$ por meio de uma recorrência.

(d) Resolva esta recorrência.

(e) O conhecido "método da seleção" para ordenação de vetor faz $\binom{n}{2}$ comparações ao processar um vetor de n posições. O algoritmo *Ordena* faz mais ou menos comparações assintoticamente?

6.3 Recorrências Lineares Homogêneas

112*. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

ex:rlh+4+3

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \mathsf{se}\ n = 0 \\ 2^n, & \mathsf{se}\ n = 1\ \mathsf{ou}\ n = 2 \\ 6f(n-1) - 11f(n-2) + 6f(n-3), & \mathsf{se}\ n \geq 3. \end{cases}$$

ex:rlh+2-1

(c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \mathsf{se}\ n < 1, \\ 1, & \mathsf{se}\ 1 \leq n \leq 2, \\ 8f(n-1) - 19f(n-2) + 12f(n-3), & \mathsf{se}\ n \geq 3. \end{cases}$$

ex:rlh+72-72+1

113⁻. Seja $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ o conjunto das funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Dados $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $z \in \mathbb{C}$, definimos $f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ como as funções dadas por

$$\begin{aligned} (f+g)(n) &= f(n) + g(n), \\ (zf)(n) &= zf(n). \end{aligned}$$

(a) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um grupo comutativo.

(b) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

114$^-$. Sejam $r_1, r_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Prove que as funções $f_1, f_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$\begin{aligned} f_1(n) &= r_1^n, \\ f_2(n) &= r_2^n, \end{aligned}$$

são linearmente independentes em $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ se e somente se $r_1 \neq r_2$.

115$^-$. Sejam[12] $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$.

(a) Prove que se $g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então a função $g + h$ também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

(b) Prove que se $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então para todo $z \in \mathbb{C}$, a função zf também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

(c) Prove que o conjunto das funções $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.

116$^@$. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

117$^@$. Resolva as seguintes recorrências.

[12] Este exercício usa a notação do Exercício 113

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ 3, & \text{se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

118*. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n \leq 1, \\ 7, & \text{se } n = 2, \\ 3f(n-1) - f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(b)

$$2f(n) = 3f(n-1) - 3f(n-2) + f(n-3), \text{ para todo } n \geq 3,$$

com

$$f(n) = n, \text{ para todo } n < 3.$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 4, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2, \\ 6f(n-1) - 12f(n-2) + 8f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ \sqrt{5} + 2^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 3f(n-1) - f(n-2) - 2f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(e)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 3^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 10f(n-1) - 31f(n-2) + 30f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 8f(n-1) - 21f(n-2) + 18f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 2, & \text{se } n = 1, \\ 2f(n-1) + 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(h)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(i)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1 \\ 4f(n-1) - 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(j)

$$f(n) = \begin{cases} 4n, & \text{se } n < 2, \\ 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(k)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 6, & \text{se } n = 1 \\ 6f(n-1) - 9f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(l)

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

$119^\star$. Resolva as seguintes recorrências.

(a) [13]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ nf(n-1) + n(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(b) [14]

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 1, \\ \sqrt{f(n-1)f(n-2)}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(c) [15]

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ \sqrt{1 + f(n-1)^2}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

(d) [16]

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

120*. Resolva a recorrência

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 4, \\ 7f(n-1) - 19f(n-2) + 25f(n-3) - 16f(n-4) + 4f(n-5), & \text{se } n > 4. \end{cases}$$

[13]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \frac{f(n)}{n!}.$$

[14]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

[15]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = f(n)^2.$$

[16]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

6.4 Recorrências Lineares não Homogêneas

121@. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + n, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 2f(n-1) + n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

(e)

$$f(n) = 2f(n-1) + n^2, \text{ para todo } n \geq 1$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-2) + \frac{1}{2^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ 2f(n-1) + 2n - 1, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

(h)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ 2f(n-1) + n^2 + n, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

(i)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(j)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 12f(n-2) + 2n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(k)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2) + n.3^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(l)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 4f(n-2) + 2n.5^n + 2, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

122*. O **"Triângulo de Cantor"**, (batizado em homenagem ao Georg Cantor), é uma "tabela infinita" triangular em que cada par $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ocupa uma posição de maneira que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima linha do triângulo é formada por todos os pares $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ satisfazendo $i + j = n$.

As linhas, colunas e posições começam a contar a partir de 0, de cima para baixo e da esquerda para direita. Assim, por exemplo, $(0, 0)$ ocupa a posição 0 (linha 0, coluna 0); $(0, 1)$ ocupa a posição 1 (linha 1, coluna 0); $(1, 0)$ ocupa a posição 2 (linha 1, coluna 1); $(0, 2)$ ocupa a posição 3 (linha 2, coluna 0) e assim por diante. As 7 primeiras linhas do Triângulo de Cantor são

$(0,0)$						
$(0,1)$	$(1,0)$					
$(0,2)$	$(1,1)$	$(2,0)$				
$(0,3)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(3,0)$			
$(0,4)$	$(1,3)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(4,0)$		
$(0,5)$	$(1,4)$	$(2,3)$	$(3,2)$	$(4,1)$	$(5,0)$	
$(0,6)$	$(1,5)$	$(2,4)$	$(3,3)$	$(4,2)$	$(5,1)$	$(6,0)$

(a) Seja $l(n)$ o número de pares na n-ésima linha do Triângulo de Cantor

  i. Descreva $l(n)$ como uma recorrência.

  ii. Resolva essa recorrência.

(b) Seja $t(n)$ o número de pares no Triângulo de Cantor até a n-ésima

  i. Descreva $t(n)$ como uma recorrência.

ii. Resolva essa recorrência.

(c) Seja $p(i, j)$ a posição ocupada pelo par (i, j) no Triângulo de Cantor. Dê uma expressão não recorrente para $p(i, j)$.

123*. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas efetuado na execução de $\mathsf{F}(n)$, o algoritmo do Exercício 81.

(a) Expresse $S(n)$ por uma recorrência.

(b) Resolva essa recorrência.

124*. Para todo $n \geq 0$, um n-cubo é um diagrama composto por pontos e linhas que ligam pares de pontos entre si (ou seja, um *grafo*). O 0-cubo tem um ponto e nenhuma linha. Para todo $n > 0$, o n-cubo é o diagrama obtido desenhando-se lado a lado duas cópias do $(n-1)$-cubo e ligando cada ponto de uma das cópias ao seu correspondente na outra cópia por uma linha.

(a) Descreva o número de pontos de um n-cubo através de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Descreva o número de linhas de um n-cubo através de uma recorrência.

(d) Resolva esta recorrência.

6.5 Somatórios

125$^@$. Dado $q \in \mathbb{C} - \{0\}$, uma *progressão geométrica*[17] de razão q é uma função $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão geométrica é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

[17] cfr. Exercício 102

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

(c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

126$^{@}$. Uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética*[18] se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(n+1) - f(n) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão aritmética é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

(c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

127$^{@}$. Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i$.

128$^{@}$. Dê uma expressão[19] livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i2^i$.

129*. Calcule o valor dos seguintes somatórios.

(a)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2.$$

ex:somatorios:i3

[18] cfr. Exercício 97

[19] cfr. Exercício 47

(b)

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1).$$

ex:somatorios:2i

(c)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 3^i.$$

ex:somatorios:i256i

(d)

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{5^i}.$$

ex:somatorios:i2i-1

(e)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2(i-1).$$

ex:somatorios:i(2i-i)

130*. A *média*[20] do número de comparações efetuadas na execução do algoritmo de busca binária em um vetor de n posições é dada por[21]

$$\begin{aligned}\mu(n) = 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{2}{n} + 3 \times \frac{4}{n} + 4 \times \frac{8}{n} + \dots\\ + \lfloor \lg n \rfloor \times \frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor - 1}}{n}\\ + (\lfloor \lg n \rfloor + 1) \times \frac{(n - \sum_{i=1}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^{i-1})}{n}\end{aligned}$$

(a) Dê uma expressão livre de somatórios[22] para $\mu(n)$.

(b) Conclua do item anterior que $\mu(n) \sim \lfloor \lg n \rfloor$.

[20] Também chamada *número esperado* ou *esperança*.

[21] Assume-se aqui que a busca por qualquer dos n elementos do vetor é equiprovável e bem-sucedida.

[22] **Sugestão:** use os resultados dos Exercícios 46 e 47

131*. Dê uma expressão livre de somatórios para

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} F(i),$$

onde $F(n)$ é a sequência de Fibonacci[23].

132@. Em muitas situações de cálculo numérico trabalha-se com matrizes triangulares inferiores, isto é, matrizes quadradas cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos. Nesses casos é comum representar uma matriz triangular inferior de n linhas por um vetor contendo somente as posições não-nulas da matriz, o que resulta numa economia de espaço de quase 50%.

Suponha que a matriz triangular inferior M, de n linhas indexadas de 1 a n, será representada por um vetor $v[0..N(n)-1]$, onde $N(n)$ é o tamanho do vetor necessário para representar uma matriz triangular inferior de n linhas.

(a) Descreva $N(n)$ através de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Qual o índice de v que corresponde à posição $M[i,j]$?

133@. Resolva a seguinte recorrência que expressa o número médio de comparações na execução do algoritmo QuickSort.

$$C(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ \frac{(n+1)}{n} C(n-1) + \frac{2(n-1)}{n}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

134@. Uma *árvore binária* T é uma *árvore vazia*, denotada por λ ou é um par $(E(T), D(T))$ onde $E(T)$ e $D(T)$ são árvores binárias, chamadas respectivamente de *subárvore esquerda* e *subárvore direita* de T. Vamos denotar por $\mathcal{B}$ o conjunto das árvores binárias.

O *tamanho* de uma árvore T é dado por

$$|T| = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ |E(T)| + |D(T)| + 1, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

[23] Veja o Exercício 53.

A árvore de tamanho um é chamada de *árvore trivial*.

A *altura* de uma árvore T é dada por

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ \max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1, & \text{se } T \neq \lambda. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $h^+(n)$ a maior altura possível de uma árvore binária de tamanho n.

(a) Expresse $h^+(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

135@. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t^+(n)$ o maior tamanho possível de uma árvore binária[24] de altura n.

(a) Expresse $t^+(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

136@. Seja AVL o conjunto das árvores binárias[25] T satisfazendo

$$\lambda \in \mathsf{AVL} \text{ e } E(T) \in \mathsf{AVL} \text{ e } D(T) \in \mathsf{AVL}.$$

e

$$|h(E(T)) - h(D(T))| \leq 1.$$

Seja $t^-(n)$ o menor tamanho possível de uma árvore AVL de altura n.

(a) Expresse $t^-(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

[24] Veja o Exercício 134.

[25] Veja o Exercício 134.

Referências

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 3 edition, 2009. ISBN 978-0-262-03384-8. URL http://mitpress.mit.edu/catalog/item/default.asp?ttype=2&tid=11866. 31