

matemática
Matemática Discreta
Matemática Discreta

Primeira Prova

18 de junho de 2013

1. (2.5 pontos) Para todo $n \geq 0$, um n -cubo é um diagrama composto por pontos e linhas que ligam pares de pontos entre si. O 0-cubo tem um ponto e nenhuma linha. Para todo $n > 0$, o n -cubo é o diagrama obtido desenhando-se lado a lado duas cópias do $(n-1)$ -cubo e ligando cada ponto de uma das cópias ao seu correspondente na outra cópia por uma linha.

Prove por indução que um n -cubo tem $n2^{n-1}$ linhas, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Resolva as seguintes recorrências explicando cada passo da resolução.

(a) (2.5 pontos)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 6n - 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(b) (2.5 pontos)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 2, \\ f(n-2) + 2n, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

3. (2.5 pontos) Dê uma expressão livre de somatórios para

$$s(n) = \sum_{i=0}^n F(i),$$

onde $F(n)$ é a sequência de Fibonacci, isto é,

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Explique cada passo da resolução.