Matemática Discreta

Primeira Prova

9 de dezembro de 2020

Instruções

As respostas devem ser enviadas como um arquivo pdf anexo a uma mensagem de e-mail.

1. A mensagem deve ser enviada até as 17h30 para `menottid@gmail.com` (turmas A, B e C) ou `renato.carmo.rc@gmail.com` (turma D).
2. O Subject: da mensagem deve ser "`CI1237: Prova 1`";
3. Quanto ao arquivo pdf anexo à mensagem,
   (a) o nome do arquivo deve ser seu "login" na rede do Departamento de Informática, todo em minúsculas (por exemplo, `jbas18.pdf`);
   (b) as respostas devem estar na mesma ordem das questões;
   (c) a resposta de cada questão deve iniciar uma página nova;
   (d) a resposta de cada questão pode ocupar várias páginas;
   (e) caso o arquivo seja produzido com LaTeX você ganha 10 pontos de bônus;
   (f) caso o arquivo seja montado a partir de fotos de folhas manuscritas, por favor,
      i. escreva com clareza, bom contraste e boa letra;
      ii. cuide para que a fotografia seja feita paralela à superfície do papel.

Durante o período de prova o Professor Menotti estará em `http://meet.google.com/eve-qvqz-usu` para esclarecer eventuais dúvidas.

Boa prova.

1. (20 pontos) Existe $\lambda > 0$ tal que $\binom{n}{3} \approx \lambda n^3$? Justifique sua resposta.

2. (20 pontos) O seguinte algoritmo resolve o conhecido quebra-cabeça das Torres de Hanói. A execução de Hanoi(n, a, b, c) move n discos da torre a para a torre b usando a torre c como torre auxiliar, de acordo com as regras do jogo.

```
Hanoi(n, a, b, c)
--------------------------------
Se n = 0
    Termine
Hanoi(n − 1, a, c, b)
mova o disco no topo da torre a para o topo da torre b
Hanoi(n − 1, c, b, a)
```

Seja $M(n)$ o número de movimentos (passagem de um disco de uma torre para outra) na execução de Hanoi(n, a, b, c).

(a) Apresente uma descrição recursiva para $M(n)$.

(b) Prove por indução em n que $M(n) = 2^n - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. (30 pontos) A *sequência de Fibonacci* é a função $F \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove por indução em n que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o valor de $F(n)$ é par se e somente se n é múltiplo de 3.

4. (30 pontos) O seguinte algoritmo ordena o vetor v no intervalo $[a..b]$.

```
Bolha(v, a, b)
--------------------------------
Se a = b
    Devolva v
Para i de a até b − 1
    Se v[i] > v[i + 1]
        troque v[i] e v[i + 1] entre si
Bolha(v, a, b − 1)
```

Prove por indução em n que, para todo $n > 0$, a execução de Bolha$(v, a, a+n-1)$ faz $n(n-1)/2$ comparações entre elementos de v.

1. Sim.

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n^3}{6}\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right).$$

Como

$$\lim -\frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} = 0,$$

então $\lambda = \frac{1}{6}$ e

$$\binom{n}{3} \approx \frac{1}{6}n^3$$

2. (a)

$$M(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n = 0, \\ 2M(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(b) Vamos provar que

$$M(n) = 2^n - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$M(k) = 2^k - 1, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$M(a+1) = 2^{a+1} - 1.$$

Do algoritmo, temos que

$$M(a+1) = 2M((a+1) - 1) + 1 = 2M(a) + 1.$$

Pela Hipótese da Indução temos que

$$M(a) = 2^a - 1,$$

e daí,

$$\begin{aligned} M(a+1) &= 2M(a) + 1 \\ &= 2\left(2^a - 1\right) + 1 = 2^{a+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{a+1} - 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$M(a+1) = 2^{a+1} - 1.$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$M(0) = 2^0 - 1.$$

Por um lado, temos que

$$M(0) = 0.$$

Por outro lado,

$$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Portanto,

$$M(0) = 2^0 - 1.$$

3. **H.I.:** Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

   $F(k)$ é par se e somente se k é múltiplo de 3, para todo $k \in [0..a]$

   Passo da Indução: Vamos provar que

   $F(a+1)$ é par se e somente se $a+1$ é múltiplo de 3.

   Temos dois casos a considerar

   0 1 2 3 4 5 6

   $a+1$ é múltiplo de 3: neste caso, nem a nem $a-1$ são múltiplos de 3. Pela HI, $F(a)$ e $F(a-1)$ são ambos ímpares e daí $F(a+1) = F(a) + F(a-1)$ é par.

   $a+1$ não é múltiplo de 3: neste caso, exatamente um dentre a e $a-1$ é múltiplo de 3. Pela HI, exatamente um dentre $F(a)$ e $F(a-1)$ é par e daí $F(a+1) = F(a) + F(a-1)$ é ímpar.

   Base da Indução: Vamos provar que

   $F(k)$ é par se e somente se k é múltiplo de 3, para todo $k \in \{0, 1\}$.

   Basta verificar que $F(0) = 0$ que é par e que $F(1) = 1$ que é ímpar.

4. (a)

$$C(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1, \\ C(n-1) + n - 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

   (b) Vamos provar que

$$C(n) = \frac{n(n-1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 0,$$

   por indução em n.

   Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ e $a > 0$ tal que

$$C(k) = \frac{k(k-1)}{2}, \text{ para todo } k \in [1..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$C(a+1) = \frac{(a+1)\left((a+1)-1\right)}{2} = \frac{a(a+1)}{2}.$$

Do algoritmo, temos que

$$C(a+1) = C((a+1)-1) + ((a+1)-1) = C(a) + a$$

Pela Hipótese da Indução temos que

$$C(a) = \frac{a(a-1)}{2},$$

e daí,

$$\begin{aligned} C(a+1) &= C(a) + a \\ &= \left(\frac{a(a+1)}{2}\right) + a = \frac{a(a-1)+2a)}{2} \\ &= \frac{(a^2-a+2a)}{2} = \frac{a^2+a}{2} \\ &= \frac{a(a+1)}{2} \end{aligned}$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$C(1) = \frac{1(1-1)}{2}.$$

Por um lado, temos que

$$C(1) = 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{1(1-1)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$