Matemática Discreta

Exercícios

23 de março de 2025

Sumário

Os exercícios estão classificados de acordo com a seguinte legenda.

-: exercícios de interesse marginal: complementam o assunto de alguma forma mas podem ser ignorados sem comprometer o entendimento.

@: exercícios programados para discussão em aula: procure fazê-los antes de serem discutidos em aula.

$\star$**:** exercícios prioritários: na impossibilidade de fazer todos, dê prioridade a estes.

#: exercícios mais difíceis e/ou trabalhosos: não comece por estes.

1 Elementos de Lógica

$1^{@}$. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) "$2 \leq 3$".
(b) "$10 > 20$".
(c) "$x^2 \leq x$".

$2^{@}$. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $(1 < 2)$ e $(2 < 3) \implies (1 < 3)$,
(b) $(1 < 2) \implies (10 < 30)$,
(c) $1 > 2 \implies 2 < 3$,
(d) $1 > 2 \implies 2 > 3$.

$3^{@}$. Sejam P e Q os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} P(x) &: x \leq x^2, \\ Q(x,y) &: x \leq y^2. \end{aligned}$$

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $P(2)$.
(b) $P(1/2)$.
(c) $Q(1,1)$.
(d) $R(t) = Q(1,t)$.

$4^{@}$. Seja $P(x)$ o predicado "$x \leq x^2$".

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
(b) $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$.
(c) $P(x)$, para todo $x \geq 1$.
(d) $P(x)$, para algum $0 < x < 1$.

$5^{\star}$. Prove que se A, B e C são proposições, então

(a) $F \implies A$, ou seja, a partir de uma proposição falsa pode-se concluir qualquer coisa.

(b) $A \implies B \equiv (\text{ não } A) \text{ ou } B$.

(c) $(A \implies B) \equiv ((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A))$, também conhecida como *contrapositiva* da implicação. Uma "prova de $A \implies B$ por contrapositiva" é uma prova de que $((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A))$.

(d) $(A \implies F) \equiv \text{ não } A$, ou seja, uma implicação cujo consequente é falso só pode ser verdadeira se o antecedente é falso. Este é o princípio por baixo das "provas por contradição".

(e) $((A \implies B) \text{ ou } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \text{ ou } C))$ (distributividade da disjunção pela implicação).

(f) $((A \implies B) \text{ e } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \text{ e } C))$ (distributividade da conjunção pela implicação).

(g) $((B \implies A) \text{ ou } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ e } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(h) $((B \implies A) \text{ e } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ ou } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(i) $((A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B))) \implies (\text{ não } A)$ (outra maneira de expressar o princípio por baixo de uma prova por contradição).

6*. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} I(x) &\equiv x \in \mathbb{Z}, \\ P(f,x) &\equiv I(x) \implies I(f(x)), \\ Q(f,x) &\equiv I(f(x)) \implies I(x). \end{aligned}$$

Dê um exemplo de função $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que

(a) não satisfaz o predicado $P(g,x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$.

(b) satisfaz o predicado $Q(g,x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$.

7*. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} L(f) &\equiv \lim f(n) = 0, \\ P(n,f,g,h) &\equiv f(n) = g(n)(1 + h(n)), \\ B(f,g,h) &\equiv L(h) \text{ e } (P(n,f,g,h), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}), \\ A(f,g) &\equiv B(f,g,h), \text{ para algum } h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dê um exemplo de funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que

(a) satisfazem $A(f, g)$.

(b) não satisfazem $A(f, g)$.

8#. Seja $O(f)$ o seguinte predicado (onde $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

$$(((n \geq k \implies |f(n)| \leq c),\ \textsf{para algum } k > 0),\ \textsf{para algum } c > 0),\ \textsf{para todo } n \geq k.$$

Avalie as seguintes proposições justificando cada uma, isto é, apresentando uma prova de se são verdadeiras ou falsas.

(a) $O(n/(n-1))$,

(b) $O(n)$,

(c) $O(10 + 1/n)$,

(d) $O(\log n)$,

(e) $O(42)$.

9#. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} P_1(f, g, c, n) &\equiv |f(n)| \leq c|g(n)|, \\ P_2(f, g, c, k) &\equiv P_1(f, g, c, n),\ \textsf{para todo } n \geq k, \\ P_3(f, g, c) &\equiv P_2(f, g, c, k),\ \textsf{para algum } k \in \mathbb{N}, \\ O(f, g) &\equiv P_3(f, g, c),\ \textsf{para algum } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Para cada par de funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, classifique as proposições abaixo como verdadeiras ou falsas.

(a) $O(f, g)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.

(b) $O(g, f)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.

(c) $O(f, g)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

(d) $O(g, f)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

10#. Sejam $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ os seguintes predicados, respectivamente.

$D(x, y, d)$: $|x - y| < d$,

$M(x, y)$**:** $x > y$.

Use os predicados $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ para expressar os seguintes predicados.

$L_1(f, a, l)$**:** $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

$L_2(f, l)$**:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$.

$L_3(f, a)$**:** $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

$L_4(f)$**:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

2 Conjuntos e Inteiros

11[@]. Seja A um conjunto finito e seja $B \subseteq A$. Prove que

$$A = (A - B) \cup B,$$

12*. Sejam A, B e C conjuntos finitos. Prove que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

13*. Dados $f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ e $c \in \mathbb{C}$, é verdade que

(a)
$$\prod_{x \in X} c = c|X|?$$

(b)
$$\prod_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \prod_{x \in X} f(x) + \prod_{x \in X} g(x)?$$

(c)
$$\sum_{x \in X} f(x)g(x) = \left(\sum_{x \in X} f(x)\right)\left(\sum_{x \in X} g(x)\right)?$$

Justifique.

$14^{\#}$. Seja A um conjunto e seja $k \in \mathbb{N}$. Vamos denotar por $\binom{A}{k}$ o conjunto dos subconjuntos de k elementos de A, isto é,

$$\binom{A}{k} = \{S \subseteq A \mid |S| = k\}.$$

Dado $a \in A$, sejam

$$\begin{aligned} A^- &= \binom{A - \{a\}}{k}, \\ A^+ &= \binom{A - \{a\}}{k-1}, \\ \overline{A} &= \left\{S \cup \{a\} \mid S \in A^+\right\}. \end{aligned}$$

Prove que

$$\binom{A}{k} = A^- \cup \overline{A},$$

3 Equivalência Assintótica

$15^{\star}$. Prove que se $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ são tais que $f(n) \sim g(n)$ e $g(n)$ não é assintoticamente nula, então

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

$16^{@}$. Prove que

$$\binom{n}{2} \sim \frac{n^2}{2}$$

$17^{\star}$. Seja $P \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dado por

$$P(n) = a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k,$$

com $a_k \neq 0$, um polinômio de grau k.

Prove que

$$P(n) \sim a_k n^k.$$

18*.

$$\sum_{i=1}^{n} i \sim \frac{n^2}{2}$$

19*. É verdade que

$$\lg n \sim \log n?$$

Justifique.

20*. Prove que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \sim \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

21*. Seja $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ e seja

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} c^i.$$

Prove que

(a) se $0 < c < 1$, então $s(n) \sim \frac{1}{1-c}$.

(b) se $c = 1$, então $s(n) = n + 1$.

(c) se $c > 1$, então $s(n) \sim \frac{c^{n+1}}{c-1}$,

22*. Sabendo que

$$\lim H(n) - \ln n = \gamma \in \mathbb{R},$$

prove que

$$H(n) \sim \ln n.$$

23*. Prove que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \sim e^x.$$

24*. A partir da aproximação de Taylor

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \sim e^x, \text{ para todo } x \in \mathbb{C},$$

conclua que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!} \sim \frac{1}{e}.$$

25@. A partir da aproximação de Stirling,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

prove que

$$\log_b n! \sim n \log_b n, \text{ para todo } b > 1.$$

26@. Use o resultado do Exercício 25 para provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \sim n \log_b n, \text{ para todo } b > 1$$

27*. Sejam $F, f, g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $F(n) \sim f(n)$, $F(n) \sim h(n)$, e

$$f(n) \leq g(n) \leq h(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

Prove que, neste caso,

$$F \sim f \sim g \sim h.$$

28*. Prove que, se $f, g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, então

(a) $f(n) \sim f(n)$.

(b) Se $f(n) \sim g(n)$, então $g(n) \sim f(n)$.

(c) Se $f(n) \sim g(n)$ e $g(n) \sim h(n)$ então $f(n) \sim h(n)$.

29*. Sejam $f, g \colon \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. É possível que $f(n) \sim g(n)$ e $\lim f(n) - g(n) = \infty$? Justifique.

4 Piso e Teto

30*. Prove que $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

31*. Prove que

$$\max \{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

32*. Prove que

$$\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil.$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$.

33*. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$ é o único inteiro m satisfazendo $x < m \leq x + 1$ e conclua daí que

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1.$$

34@. Prove que

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

35*. Prove que, para todo $n > 0$,

(a)
$$\frac{1}{2} < \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \leq 1 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2.$$

(b)
$$\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = 1.$$

(c)
$$\left\lfloor \frac{n}{2^x} \right\rfloor = 0 \text{ se e somente se } x > \lg n.$$

(d)
$$\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor \text{ se e somente se } n \text{ é potência de 2.}$$

(e)
$$\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil \text{ se e somente se } n \text{ é potência de 2.}$$

(f)
$$\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1.$$

36*. É verdade que $\lfloor f(n) \rfloor \sim f(n)$ para toda $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.

37*. É verdade que $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor \sim \sum_{i=1}^{n} f(i)$ para toda $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.

38*. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

- $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil$
- $\left\lceil \dfrac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$

39*. Algoritmos sobre vetores baseados na ideia conhecida como "divisão e conquista" frequentemente recebem como entrada um vetor indexado por $[a..b]$ e executam recursivamente sobre os vetores indexados por $[a..m]$ e $[m+1..b]$, onde $m := \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor$. O objetivo deste exercício é expressar corretamente os tamanhos dos subvetores em função do tamanho $n := b - a + 1$ do vetor original.

Prove que, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$,

(a) $a + b$ é par se e somente se n é ímpar.

(b) $m - a + 1 = \left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil$.

(c) $(m+1) - b + 1 = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$.

(d) $(m-1) - a + 1 = \left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor$.

[1]

[1] **Sugestão:** Use o Exercício 38

40*. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

(a) $x - \lfloor x \rfloor < 1$.

(b) $\lceil x \rceil - x < 1$.

(c) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ se e somente se $x \in \mathbb{Z}$

(d) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

41*. A soma

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor$$

aparece com certa frequência em aplicações ligadas à computação[2]. O objetivo deste exercício é provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \sim n \lg n.$$

(a) Prove que

$$\lfloor \lg i \rfloor = k, \text{ para todo } i \in [2^k..2^{k+1} - 1].$$

(b) Prove que, para todo $\ell \in \mathbb{N}$, se $n = 2^\ell - 1$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \lfloor \lg i \rfloor .$$

(c) Combine os itens anteriores para concluir que, se $n = 2^\ell - 1$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = \sum_{k=1}^{\ell} k 2^k.$$

(d) Sabendo que

$$\sum_{k=0}^{n} k 2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

conclua que, se $n = 2^\ell - 1$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = n \lfloor \lg n \rfloor - \left(2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - \lfloor \lg n \rfloor - 2\right).$$

[2]Veja o Exercício **??** para um exemplo.

(e) Prove que[3]

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \sim n \lg n.$$

(f) As proposições acima podem ser generalizadas para logaritmos em outras bases além de 2? Como?

42$^-$. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e contínua satisfazendo

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Prove que

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

43*. Seja k um inteiro positivo e seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{x}{k}.$$

Prove que

(a) f uma função contínua.

(b) f uma função crescente.

(c) $f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$

44$^@$. Prove que

$$\lg n \sim \lfloor \lg n \rfloor \sim \lceil \lg n \rceil$$

45*. Dê um exemplo de uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f(n)$ não é inteiro para uma quantidade infinita de valores de $n \in \mathbb{N}$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor \sim \sum_{i=1}^{n} f(i)$.

[3] **Sugestão:** use o resultado do Exercício 35

5 Indução

46⋆. Prove que

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.

47⋆. Prove por indução que

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2^{n+1}(n-1) + 2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

48⋆. Dados $n, k \in \mathbb{N}$, o *coeficiente binomial* $\binom{n}{k}$ é definido da seguinte maneira

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{se } 1 \le k \le n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove, por indução em n que, se $0 \le k \le n$, então

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

49⋆. Prove que (cfr. Exercício 48)

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \text{ para todo } n, k \in \mathbb{N}.$$

50⋆. Prove por indução em n que, dados $x, y \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x+y)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$ [4].

[4] **Sugestão:** Use a definição de $\binom{n}{k}$ dada no Exercício 48

Conclua a partir daí que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$.

51[@]. Prove por indução em n que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4.$$

52[@]. Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser escrito como produto de número primos.

53[@]. A *sequência de Fibonacci* é a função $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(a) Prove por indução em n que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

(b) Conclua que

$$F(n) \sim \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

54*. Prove que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}, \text{ para todo } n > 0,$$

onde F é a sequência de Fibonacci (cfr Exercício 53)[5].

[5]Este é um dos algoritmos mais eficientes para o cálculo da sequência de Fibonacci.

55*. Prove por indução em n que

$$(\sqrt{2})^{n-1} \leq F(n) \leq 2^{n-1} \text{ para todo } n \geq 3,$$

onde $F(n)$ denota a sequência de Fibonacci (cfr Exercício 53).

56*. O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela função

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Prove que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde T^+ e T^- são as seguintes funções.

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

57*. Dados $n_1, \ldots, n_k$, o *coeficiente multinomial* é definido por

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} := \frac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Observe que o coeficiente multinomial é uma generalização do coeficiente binomial, pois

$$\binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_1, n - n_1}.$$

Prove por indução em k que

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} = \binom{n_1 + \ldots + n_{k-1}}{n_1, \ldots, n_{k-1}} \binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_k}, \text{ para todo } k \geq 2.$$

58*. Considere o seguinte algoritmo que recebe um vetor ordenado v indexado por $[a..b]$ e um valor x.

```
Busca(x, v, a, b)

Se a > b
    Devolva a − 1

m ← ⌊(a+b)/2⌋
Se x < v[m]
    Devolva Busca(x, v, a, m − 1)
Devolva Busca(x, v, m + 1, b)
```

Prove que $\mathsf{Busca}(x, v, a, a+n-1)$ é o único inteiro em $[a-1..a+n-1]$ satisfazendo

$$x < v[i] \text{ para todo } i \in [\mathsf{Busca}(x, v, a, a+k-1)+1..a+n-1]$$

59⋆. Use o fato de que se A e B são conjuntos finitos e disjuntos entre si então

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

para provar, por indução em n que, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

60@. Prove por indução em n que se $A_1, \ldots, A_n$ e B são conjuntos, então

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B),$$

61⋆. Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\prod_{x \in X} c = c^{|X|}.$$

62⋆. Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

63*. Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, então

$$\sum_{x\in X}(f(x)+g(x)) = \sum_{x\in X} f(x) + \sum_{x\in X} g(x).$$

64*. Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f\colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x\in X} cf(x) = c\sum_{x\in X} f(x).$$

65. Exercício intencionalmente deixado em branco

66*. Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove, por indução em n, que

$$f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

67*. Seja $a \in \mathbb{C}$ e seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + a, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[6], por indução em n, que

$$f(n) = f(0) + na, \text{ para todo } n \geq 0.$$

68*. Sejam $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[7], por indução em n que

$$f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

[6] Observe que este exercício generaliza o Exercício 66.

[7] Observe que este exercício generaliza o Exercício 67.

69*. Sejam $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = af(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove por indução em n que

$$f(n) = a^n f(0), \text{ para todo } n \geq 0.$$

70*. Sejam $f, m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[8], por indução em n, que

$$f(n) = f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

71*. Sejam $f, s, m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove (por indução em n) que[9]

$$f(n) = f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i) + \sum_{j=1}^{n}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{n} m(i)\right), \text{ para todo } n \geq 0.$$

[8]Observe que este exercício generaliza o Exercício 69.
[9]Observe que este exercício generaliza o Exercício 70.

Referências