

1ª Prova
5 de Maio de 2011

1. (3.0 pontos) Dados $n, i \in \mathbb{N}$, o coeficiente binomial $\binom{n}{i}$ é definido da seguinte maneira

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}, & \text{se } 1 \leq i \leq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove por indução em n que

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n.$$

2. (3.0 pontos) Resolva a seguinte recorrência explicando cada etapa da resolução.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 3f(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

3. (4.0 pontos) Dê uma expressão livre de somatórios para

$$\sum_{i=0}^n i^2 3^i.$$

explicando cada etapa da resolução.