

Appunti di Matematica

Nicola Ferru

Indice

I	Matematica analisi 1	5
0.1	Simboli	7
1	Studio di funzione	9
1.1	Cenni di teoria degli insiemi	9
1.2	Limiti	9
1.2.1	Infinitesimi e infiniti	9

Parte I

Matematica analisi 1

0.1 Simboli

\in Appartiene	\Rightarrow Implica	β beta
\notin Non appartiene	\Longleftrightarrow Se e solo se	γ gamma
\exists Esiste	\neq Diverso	Γ Gamma
$\exists!$ Esiste unico	\forall Per ogni	δ, Δ delta
\subset Contenuto strettamente	\ni : Tale che	ϵ epsilon
\subseteq Contenuto	\leq Minore o uguale	σ, Σ sigma
\supset Contenuto strettamente	\geq Maggiore o uguale	ρ rho
\supseteq Contiene	α alfa	

Capitolo 1

Studio di funzione

1.1 Cenni di teoria degli insiemi

Per rappresentare un insieme abbiamo tre possibilità:

1. Rappresentazione estensiva $A = [0, 1, 2, 3, 4]$
2. Rappresentazione intensiva $A = [x | x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 5]$
3. Rappresentazione con diagrammi di Eulero - Venn

1.2 Limiti

1.2.1 Infinitesimi e infiniti

Definizione Una funzione $f(x)$ si dice infinitesima per $x \rightarrow x_0$ (per $x \rightarrow \infty$), x_0 punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, se: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (oppure $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$).

Esempi

- $y = e^x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow -\infty$
- $y = \ln x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 1$
- $y = \sin x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 0$ (ma anche per $x \rightarrow \pi, 2\pi$, etc.)
- $y = \ln 1 + x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 1$

Ordine di infinitesimo

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesimi per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), con $g(x) \neq 0$. Se $\exists \alpha R+$ e $l \in R$, $l \neq 0$ tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$ (oppure $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$)

Allora, si dice che per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), $f(x)$ è un infinitesimo di ordine α rispetto all'infinitesimo campione $g(x)$.

Esempi

- $y = \sin x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 0$ di ordine 1 rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$, infatti, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^\alpha} = 1$ solo se $\alpha = 1$
- $y = \tan^2 x$ è un infinitesimo di ordine 2 rispetto ad x , per $x \rightarrow 0$
- $\text{ord}(1 - \cos x) = 2$ rispetto ad x per $x \rightarrow 0$

Confronto tra infinitesimi

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesime per $x \rightarrow x_0$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \neq 0 & \text{ord}(f) = \text{ord}(g) \\ \pm\infty & \text{ord}(f) < \text{ord}(g) \\ 0 & \text{ord}(f) > \text{ord}(g) \\ \text{non esiste, } f \text{ e } g \text{ non confrontabili} & \end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesime per $x \rightarrow \infty$. Utilizzando il confronto tra infinitesimi nel calcolo dei limiti del tipo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}$, dove f_1, f_2, g_1, g_2 sono funzioni infinitesime per $x \rightarrow x_0$, si possono *trascurare gli infinitesimi di ordine maggiore* (analogo discorso per funzioni infinitesime $x \rightarrow \infty$).

esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x^3+2\tan x}{(e^x-1)^2+\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\tan x}{\sin x} = 2$

Definizione di funzioni asintotiche Si dice che due funzioni f, g sono asintotiche per $x \rightarrow x_0$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e si scrive $f \sim g$ per $x \rightarrow x_0$

esempi

- $\sin x \sim x$ per $x \rightarrow 0$
- $\ln(1+x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$
- $e^x - 1 \sim x$ per $x \rightarrow 0$

Definizione di funzioni infinite Una funzione $f(x)$ si dice *infinita* per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), x_0 punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, (o per $x \rightarrow \infty$) se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ (oppure } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty)$$

Esempi

- $y = e^x$ è un infinito per $x \rightarrow +\infty$
- $y = \ln x$ è un infinito per $x \rightarrow 0^+$
- $y = x^2 + x$ è un infinito per $x \rightarrow \infty$

Regole aritmetiche Siano $f(x) = o(x^\alpha)$ (si legge «o piccolo di») e $g(x) = o(x^\beta)$ due funzioni *infinitesime* rispettivamente di ordine α e β per $x \rightarrow 0$. Allora si ha

- $cf(x) = o(x^\alpha), \forall c \in R$
- $x^\lambda f(x) = o(x^{\lambda+\alpha})$
- $f(x)g(x) = o(x^{\alpha+\beta})$
- $f(x) + g(x) = o(x^\gamma), \gamma = \min(\alpha, \beta)$

Ordine di infinito Siano $f(x)$ e $g(x)$ infiniti per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), con $g \neq 0$. Se $\exists \alpha \in R_+$ e $l \in R, l \neq 0$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l \text{ (o } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l)$$

Allora, per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), $f(x)$ è un infinito di ordine α rispetto all'infinito compione $g(x)$.

Esempi

- $ord(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}$ rispetto ad x per $x \rightarrow +\infty$
- $ord(\frac{1}{\sin x}) = 1$ rispetto ad $\frac{1}{x}$ per $x \rightarrow 0$
- $ord(\frac{1}{e^x - 1}) = 1$ rispetto ad $\frac{1}{x}$ per $x \rightarrow 0$

Cofronto tra infiniti Siano $f(x)$ e $g(x)$ infiniti per $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \neq 0 & ord(f) = ord(g) \\ \pm\infty & ord(f) > ord(g) \\ 0 & ord(f) < ord(g) \\ \text{non esiste, } f \text{ e } g \text{ non confrontabili} & \end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinite per $x \rightarrow \infty$. Utilizzando il confronto tra infiniti nel calcolo dei limiti del tipo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2}$, dove f_1, f_2, g_1, g_2 sono funzioni infinite per $x \rightarrow x_0$, si possono **trascurare gli infiniti di ordine minore** (analogo discorso per funzione infinito $x \rightarrow \infty$).

Esempio $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x^3 + 3\sqrt{x}}{x^2(2x-1) + \sqrt{3}x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}.$

Gerarchia degli infiniti Per $x \rightarrow +\infty$ si ha $(\log_a x)^\alpha \ll x^\beta \ll b^x$, con $\alpha, \beta > 0, a, b > 1$. Non sempre è possibile calcolare l'ordine di infinito (o di infinitesimo) rispetto alla funzione campione usuale.

Esempio $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^a} = +\infty, \forall \alpha > 0, a > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^a} = +\infty, \forall \alpha, \beta > 0, a > 1$

Regole aritmetiche Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni *infinite* di ordine rispettivamente α e β . Allora si ha

- $ord(f(x) + g(x)) = \max \alpha, \beta$
- $ord(f(x) * g(x)) = \alpha + \beta$
- $ord((f(x))^\gamma) = \alpha\gamma$

