

Appunti di Matematica

Nicola Ferru

Indice

Parte I

Matematica analisi 1

0.1 Simboli

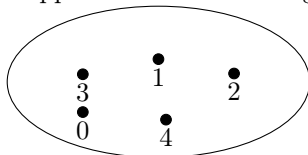
\in Appartiene	\Rightarrow Implica	β beta
\notin Non appartiene	\Longleftrightarrow Se e solo se	γ gamma
\exists Esiste	\neq Diverso	Γ Gamma
$\exists!$ Esiste unico	\forall Per ogni	δ, Δ delta
\subset Contenuto strettamente	\ni : Tale che	ϵ epsilon
\subseteq Contenuto	\leq Minore o uguale	σ, Σ sigma
\supset Contenuto strettamente	\geq Maggiore o uguale	ρ rho
\supseteq Contiene	α alfa	

Capitolo 1

Cenni di teoria degli insiemi

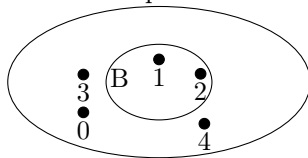
Per rappresentare un insieme abbiamo tre possibilità:

1. Rappresentazione estensiva $A = [0, 1, 2, 3, 4]$
2. Rappresentazione intensiva $A = [x | x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 5]$
3. Rappresentazione con diagrammi di Eulero - Venn



1.0.1 Operazioni tra gli insiemi

Un insieme può essere contenuto in un altro:



1.1 Sottoinsiemi di \mathbb{R}

1.1.1 Definizione

1. Un punto x_0 si dice interno ad A se esiste un suo intorno $I(x_0, \delta)$ con $\delta > 0$ contenuto in A .
2. Si dice esterno ad A se è interno al CA (A^c).
3. Si dice di frontiera per A se non è né interno né esterno ad A .

Interno di A

$^\circ A$ Insieme dei punti interni ad A .

Esempio se $A = (1, 3]$, $A^\circ = (1, 3)$

$\partial A, \text{FA}$ Insieme dei punti di frontiera di A

Esempio se $A = (1, 3]$, i punti di frontiera sono i punti $x = 1$ e $x = 3$

Osservazioni

- Se $x_0 \in {}^\circ A \Rightarrow x_0 \notin A$
- Se $x_0 \notin {}^\circ A$ (esterno) $\Rightarrow x_0 \notin A$
- Se $x_0 \in \partial A$ (frontiera) può essere $x_0 \in A$ oppure $x_0 \notin A$, in ogni caso per $\forall I(x_0, \delta)$ continue sia punti di A sia punti CA .

Definizione x_0 è un punto di accumulazione per A se in $\forall I(x_0, \delta)$ esiste un punti di A diverso da x_0 . (Cioè in ogni interno di $x_0 \exists$ infiniti elementi di A)

Esempio se $A = (-2, 3]$, $x = -2$ è accumulazione per A , ma anche $x = 3, x = 0, x = 1, \dots$, cioè è di accumulazione per A , qualunque $x \in [2, 3]$.

$DA = A'$ = derivato di A è l'insieme dei punti di accumulazione per A . Se $x_0 \in DA$ allora può aversi $x_0 \in A$ oppure $x_0 \notin A$

Esercizio $x = 1$ e $x = 3$ sono entrambi punti di accumulazione per l'intervallo $(1, 3]$, $x = 3$ appartiene all'intervallo dato, $x = 1$ NO.

1. Se $x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in DA$;
2. Se $x \notin DA$ allora x_0 si dice isolato;
3. Se $DA = \emptyset \Rightarrow A$ si dice discreto **Esempio** $A = \{1, 2, 3, 4\}$
4. Se $DA = A \Rightarrow A$ si dice perfetto **Esempio** $A = [a, b]$

Definizione Dato $A \subset R$ si definisce chiusura di A e si indica con \bar{A} , l'insieme: $\boxed{\bar{A} = A \cup \partial A}$ A è chiuso $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

Esempio se $A = (2, 5]$, allora $\bar{A} = [2, 5]$

Teorema di Bolzano Weierstrass

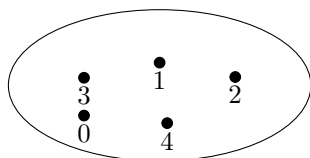
Ogni $A \subset R^n$ limitato e finito possiede almeno un punto di accumulazione. Un insieme chiuso e limitato in R^n ammette massimo e minimo assoluto.

Esempio $A = [1, 4]$, $\max(A) = 4$, $\min(A) = 1$ $A = \{x \in R : x^2 \leq 1\}$ $\max A = 1$, $\min(A) = -1$

1.2 Funzione di una variabile**1.2.1 Definizione**

Dati $A, B \subseteq R$ una funzione A in B è una legge (o relazione, o mappa) che ad ogni elemento x di A associa uno ed un solo elemento y di B . $f: A \rightarrow B$ oppure $y = f(x)$ $x \in A$ e $y = f(x) \in B$

- A = dominio o insieme di definizione di f .
- B = codominio di f .



Il grafico di f è un insieme di punti del piano (generalmente una curva) che è sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ costituito da $(x, f(x))$ con $x \in A, f(x) \in B$

Definizione L'immagine di A tramite f , $f(A)$, è l'insieme dei valori di y tale che $\exists x \in A$ tale che $f(x) \in B$.

Esempio Se $f: A \rightarrow B$ $f(x) = x^2$ $A = \mathbb{R}$, $f(A) = [0, +\infty)$

Capitolo 2

Studio di funzione

2.1 Limiti

2.1.1 Forme indeterminate

$$+\infty - \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 1^\infty \quad e^{+\infty \cdot 0}$$

2.1.2 Infinitesimi e infiniti

Definizione Una funzione $f(x)$ si dice infinitesima per $x \rightarrow x_0$ (per $x \rightarrow \infty$), x_0 punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, se: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (oppure $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$).

Esempi

- $y = e^x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow -\infty$
- $y = \ln x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 1$
- $y = \sin x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 0$ (ma anche per $x \rightarrow \pi, 2\pi$, etc.)
- $y = \ln 1 + x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 1$

Ordine di infinitesimo

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesimi per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), con $g(x) \neq 0$. Se $\exists \alpha R+$ e $l \in R, l \neq 0$ tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$ (oppure $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$)

Allora, si dice che per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), $f(x)$ è un infinitesimo di ordine α rispetto all'infinitesimo campione $g(x)$.

Esempi

- $y = \sin x$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 0$ di ordine 1 rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$, infatti, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^\alpha} = 1$ solo se $\alpha = 1$
- $y = \tan^2 x$ è un infinitesimo di ordine 2 rispetto ad x , per $x \rightarrow 0$
- $\text{ord}(1 - \cos x) = 2$ rispetto ad x per $x \rightarrow 0$

Confronto tra infinitesimi

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesime per $x \rightarrow x_0$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \neq 0 & \text{ord}(f) = \text{ord}(g) \\ \pm\infty & \text{ord}(f) < \text{ord}(g) \\ 0 & \text{ord}(f) > \text{ord}(g) \\ \text{non esiste, } f \text{ e } g \text{ non confrontabile} & \end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesime per $x \rightarrow \infty$. Utilizzando il confronto tra infinitesimi nel calcolo dei limiti del tipo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}$, dove f_1, f_2, g_1, g_2 sono funzioni infinitesime per $x \rightarrow x_0$, si possono *trascurare gli infinitesimi di ordine maggiore* (analogo discorso per funzioni infinitesime $x \rightarrow \infty$).

esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x^3+2\tan x}{(e^x-1)^2+\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\tan x}{\sin x} = 2$

Definizione di funzioni asintotiche Si dice che due funzioni f, g sono asintotiche per $x \rightarrow x_0$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e si scrive $f \sim g$ per $x \rightarrow x_0$

esempi

- $\sin x \sim x$ per $x \rightarrow 0$
- $\ln(1+x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$
- $e^x - 1 \sim x$ per $x \rightarrow 0$

Definizione di funzioni infinite Una funzione $f(x)$ si dice *infinita* per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), x_0 punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, (o per $x \rightarrow \infty$) se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ (oppure } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty)$$

Esempi

- $y = e^x$ è un infinito per $x \rightarrow +\infty$
- $y = \ln x$ è un infinito per $x \rightarrow 0^+$
- $y = x^2 + x$ è un infinito per $x \rightarrow \infty$

Regole aritmetiche Siano $f(x) = o(x^\alpha)$ (si legge «o piccolo di») e $g(x) = o(x^\beta)$ due funzioni *infinitesime* rispettivamente di ordine α e β per $x \rightarrow 0$. Allora si ha

- $cf(x) = o(x^\alpha), \forall c \in R$
- $x^\lambda f(x) = o(x^{\lambda+\alpha})$
- $f(x)g(x) = o(x^{\alpha+\beta})$
- $f(x) + g(x) = o(x^\gamma), \gamma = \min(\alpha, \beta)$

Ordine di infinito Siano $f(x)$ e $g(x)$ infiniti per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), con $g \neq 0$. Se $\exists \alpha \in R_+$ e $l \in R, l \neq 0$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l \text{ (o } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l)$$

Allora, per $x \rightarrow x_0$ (o per $x \rightarrow \infty$), $f(x)$ è un infinito di ordine α rispetto all'infinito compone $g(x)$.

Esempi

- $ord(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}$ rispetto ad x per $x \rightarrow +\infty$
- $ord(\frac{1}{\sin x}) = 1$ rispetto ad $\frac{1}{x}$ per $x \rightarrow 0$
- $ord(\frac{1}{e^x - 1}) = 1$ rispetto ad $\frac{1}{x}$ per $x \rightarrow 0$

Cofronto tra infiniti Siamo $f(x)$ e $g(x)$ infiniti per $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \neq 0 & ord(f) = ord(g) \\ \pm\infty & ord(f) > ord(g) \\ 0 & ord(f) < ord(g) \\ \text{non esiste, } f \text{ e } g \text{ non confrontabile} & \end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinite per $x \rightarrow \infty$. Utilizzando il confronto tra infiniti nel calcolo dei limiti del tipo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2}$, dove f_1, f_2, g_1, g_2 sono funzioni infinite per $x \rightarrow x_0$, si possono **trascurare gli infiniti di ordine minore** (analogo discorso per funzione infinito $x \rightarrow \infty$).

Esempio $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x^3 + 3\sqrt{x}}{x^2(2x-1) + \sqrt{3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}.$

Gerarchia degli infiniti Per $x \rightarrow +\infty$ si ha $(\log_\alpha x)^\alpha \ll x^\beta \ll b^x$, con $\alpha, \beta > 0, a, b > 1$ Non sempre è possibile calcolare l'ordine di infinito (o di infinitesimo) rispetto alla funzione campione usuale.

Esempio $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^a} = +\infty, \forall \alpha > 0, a > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^a} = +\infty, \forall \alpha, \beta > 0, a > 1$

Regole aritmetiche Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni *infinite* di ordine rispettivamente α e β . Allora si ha

- $ord(f(x) + g(x)) = \max \alpha, \beta$
- $ord(f(x) * g(x)) = \alpha + \beta$
- $ord((f(x))^\gamma) = \alpha\gamma$

2.1.3 Funzioni continue

Una funzione continua è una funzione che, intuitivamente, fa corrispondere ad elementi sufficientemente vicini del dominio elementi arbitrariamente vicini del codominio.

Definizione Una funzione $f(x)$ è continua in x_0 , se: $l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ossia $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0: |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \forall x \in I(x_0, \delta_\epsilon)$ ($l = f(x_0)$)

Teorema della permanenza del segno

Sia $f(x)$ definita almeno in un intorno di x_0 e continua in x_0 . Se $f(x_0) > 0$ allora $\exists \delta > 0: f(x) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Teorema degli zeri

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ $f(a) * f(b) < 0$ allora $\exists x_0 \in (a, b): f(x_0) = 0$. Se f è anche strettamente monotona, lo zero è unico.

Teorema dell'esistenza dei valori intermedi (conseguenza del teorema degli zeri) Una funzione $f(x)$ continua in $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$.

Teorema di Wierstrass (sul massimo e il minimo)

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume massimo e il minimo assoluto in $[a, b]$, cioè $\exists x_1, x_2 \in [a, b] :$
 $f(x_1) \leq f$

2.1.4 Criteri di invertibilità

Una funzione continua e strettamente monotona in $[a, b]$ è invertibile in tale intervallo. Dimostrazione.