Appunti di Algebra e geometria

Nicola Ferru

Indice

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure

0.1 Premesse...

In questo repository sono disponibili pure le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra* consiglio a tutti di dargli un occhiata e di stare attenti perché possono essere presenti delle modifiche per migliorare il contenuto degli stessi appunti, comunque solitamente vengono fatte revisioni tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che questo è un progetto volontario e che per questo motivo ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure potrebbero esserci degli errori, chiedo la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare una modifica. Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open souce e infatti sono disponibili i sorgenti dei file allegati insieme ai PDF.

Cordiali saluti

0.2 Simboli

$\in$ Appartiene

$\notin$ Non appartiene

$\exists$ Esiste

$\exists!$ Esiste unico

$\subset$ Contenuto strettamente

$\subseteq$ Contenuto

$\supset$ Contenuto strettamente

$\supseteq$ Contiene

$\Rightarrow$ Implica

$\Longleftrightarrow$ Se e solo se

$\neq$ Diverso

$\forall$ Per ogni

$\ni$: Tale che

$\leq$ Minore o uguale

$\geq$ Maggiore o uguale

α alfa

β beta

γ gamma

Γ Gamma

δ, Δ delta

ϵ epsilon

σ, Σ sigma

ρ rho

Capitolo 1

Vettori

1.1 Spazio Vettoriale

Spazio Vettoriale 1. *Uno spazio vettoriale reale (R-spazio vettoriale) è un insieme V in cui sono definite un'operazione di* `SOMMA` *tra elementi di V e un'operazione di* `Prodotto tra un reale` *e un elemento di V che soddisfano 8 proprietà:*

1. La somma è associativa quando $\forall v_1,\ v_2,\ v_3 \in V\ (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$;
2. La somma è commutativa quando $\forall v_1, v_2 \in V\ v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
3. Esistenza elemento neutro 0 se e solo se $\forall v \in V\ v + 0 = 0 + v = v$
4. Esistenza opposto $-v$ se e solo se $\forall v \in V\ v + (-v) = (-v) + v = 0$
5. Il prodotto per uno scalare è assoluto quando $\forall c_1, c_2 \in R, \forall v \in V\ c_1(c_2 v) = (c_1 c_2)v$
6. Il prodotto per uno scalare è distributiva quando $\forall c_1, c_2 \in R, \forall v \in V\ (c_1 + c_2)v = c_1 v + c_2 v$
7. Il prodotto per uno scalare è distributiva quando $\forall c \in R, \forall v_1, v_2 \in V\ c(v_1 + v_2) = cv_1 + cv_2$
8. Esistenza elemento neutro 1 quando $\forall v \in V\ 1v = v$

ES: $V_0^2\ V_0^3$

ES: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x^2,\ g(x) = e^x,\ f(x) + g(x) = x^2 + e^x\ 3f(x) = 3x^2$

ES: $\mathbb{R}^n$ n-uple di numeri reali

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad C \in \mathbb{R}\ c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix}$$

ES: $\mathbb{R}_n[x]$ polinomi di grado $\leq n$ nella variabile x a coefficiente reale

- $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$
- $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$

ES: $\mathbb{R}[x]$ polinomio di grado qualsiasi

$$p(x) + q(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$
$$c \in \mathbb{R},\ cp(x) = ca_0 + ca_1 x + ca_2 x^2 + \cdots + ca_n x^n$$

Capitolo 2

Numeri Complessi

Numeri reali 1. *Un numero complesso è definito come un numero della forma $x + iy$, con x e y numeri reali e i una soluzione dell'equazione $x^2 = -1$ detta unità immaginaria. i numeri reali sono*

2.1 Operazioni con Numeri complessi

1. Modulo e distanza

   $$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.1}$$

   Il valore assoluto (modulo) ha proprietà queste proprietà:

   $$|z + w| \geq |z| + |w|, \ |zw| = |z||w|, \ \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

   Valide per tutti i numeri complessi z e w. La prima proprietà è una versione della disuguaglianza triangolare.

Capitolo 3

Il determinante

In questo capitolo introdurremo uno strumento alternativo alla riduzione a gradini per determinare se le righe (*o le colonne*) di una matrice siano dipendenti. Per poterne dare la definizione rigorosa, dobbiamo prima fare alcuni richiami sulle permutazioni.

3.1 Richiami sulle permutazioni

Dato l'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ dei numeri naturali compresi tra 1 e n, per un certo n, una funzaione da $\{1, 2, \ldots, n\}$ in se stesso associa a ogni elemento di $\{1, 2, \ldots, n\}$ un'immagine, scelta sempre all'interno di $\{1, 2, \ldots, n\}$. Se facciamo in modo che le immagini siano tutte diverse senza ripetizioni[1], queste ci daranno ancora tutti gli elementi $1, 2, \ldots, n$ semplicemente disposti in un altro ordine, ovvero permutati. Si parla di *permutazione di n elementi.* Ad esempio, le seguenti rappresentano permutazioni di 4 elementi:

$$\begin{array}{ll} 1 \to 1 & 1 \to 3 \\ 2 \to 3 & 2 \to 4 \\ 3 \to 2 & 3 \to 2 \\ 4 \to 4 & 4 \to 1 \end{array}$$

L'insieme delle permutazioni di n elementi si denota S_n. Per ogni n, tale insieme contiene esattamente $n! := n(n-1)(n-2)\ldots 2*1$ (cioè *n fattoriale*) permutazioni: ad esempio, per $n = 2$ abbiamo $2! = 2*1 = 2$ permutazione possibili, ovvero

$$\begin{array}{ll} 1 \to 1 & 1 \to 2 \\ 2 \to 2 & 2 \to 1 \end{array}$$

(tra le permutazioni vi è sempre anche anche quella che associa a ogni elemento se stesso, detta permutazione identica[2]).
Per $n = 3$ abbiamo invece $3! = 3 * 2 * 1 = 6$ permutazioni possibili, ovvero

$$\begin{array}{cccccc} 1 \to 1 & 1 \to 2 & 1 \to 1 & 1 \to 3 & 1 \to 2 & 1 \to 3 \\ 2 \to 2 & 2 \to 1 & 2 \to 3 & 2 \to 2 & 2 \to 3 & 2 \to 1 \\ 3 \to 3 & 3 \to 3 & 3 \to 2 & 3 \to 1 & 3 \to 1 & 3 \to 2 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array}$$

Si noti che p_2, p_3 e p_4 scambiano trra loro due elementi lasciando fisso il terzo (p_2 scambia tra loro 1 e 2, p_3 scambia 2 e 3): in generale, una permutazione di questo tipo, che scambia tra loro è una trasposizione anche la prima permutazione di 4 elementi presentata all'inizio del paragrafo (`scambia tra loro 2 e 3 lasciando fissi 1 e 4`), mentre la seconda non lo è.
Benché non tutte le permutazioni siano trasposizioni, si può dimostrare che qualunque permutazione può

[1] *Si dice la funzione è iniettiva:* una funzione iniettiva da un insieme finito in se stesso è automaticamente anche suriettiva, e quindi biiettiva. Richiameremo queste nozioni nel prossimo capitolo.
[2] Come funzione, si tratta della cosiddetta identità o funzione identica

essere realizzata eseguendo una sequenza di trasposizioni. Ad esempio, la permutazione p_5 di sopra, che non è una trasposizione, può tuttavia essere ottenuta scambiando prima 1 e 2, e poi 1 e 3:

$$\begin{aligned} 1 &\to 2 \to 2 \\ 2 &\to 1 \to 3 \\ 3 &\to 3 \to 1 \end{aligned}$$

ovvero può essere ottenuta componendo 2 trasposizioni.
In generale, se il numero di trasposizioni che servono per ottenere una permutazione data p è pari, si pari, si dice che p è una *permutazione pari*; se invece il numero di trasposizioni che servono per ottenere p è dispari, si dice che p è una *permutazione dispari*. Ad esempio, p_5 è una permutazione pari, in quanto l'abbiamo ottenuta componendo 2 trasposizioni; è facile vedere che anche p_6 è una permutazione pari, in quanto può essere ottenuta componendo due trasposizioni:

$$\begin{aligned} 1 &\to 3 \to 3 \\ 2 &\to 3 \to 1 \\ 3 &\to 1 \to 2 \end{aligned}$$

Chiaramente, se una permutazione è già essa una trasposizione, allora essa è dispori (`1 è un numero dispari`).
Si noti che possono esserci più modi diversi di decomporre una permutazione come composizione di trasposizioni, ad esempio, la permutazione identica può essere vista o come risultato di 0 trasposizioni, oppure come risultato di 2 trasposizioni, ad esempio

$$\begin{aligned} 1 &\to 2 \to 1 \\ 2 &\to 1 \to 2 \\ 3 &\to 3 \to 3 \end{aligned}$$

Tuttavia, si pu'o dimostrare che il numero di trasposizioni che servono per ottenere una permutazione data 'e o sempre pari o sempre dispari (*nell'esempio, 0 o 2, comunque pari*).
Si può allora definire il *segno s(p) di una permutazione* p come $s(p) = +1$ se p è una permutazione dispari.
Siamo ora pronti a definire il determinante.

3.2 La definizione di determinante

Sia A una matrice che ha n righe e n colonne, per qualche $n > 0$: tali matrici si dicono *quadrate* e il numero n comune a roghe e colonne si dice *l'ordine della matrice*. Il determinante associa a ogni matrice A quadrata di ordine n a entrate in un campo $\mathbb{K}$ un elemento $\det(A) \in \mathbb{K}$, funzione delle sue entrate, per il quale vedremo che vale l'importante proprietà che $\det(A) = 0$ se e solo se la matrice ha rango minore di n, ovvero se e solo se le righe (*o le colonne*) della matrice sono dipendenti.

Definizione 1. *Sia A una matrice quadrata di ordine n con entrate a_{ij}. Allora*

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} s(p) a_{1p(1)} a_{2p(n)} \tag{3.1}$$

In altrea parole, il determinante di una matrice quadrata di ordine n è dato da una sommatoria che ha addendo per ogni permutazione $p \in S_n$: ognuno di questi addendi è un prodotto di entrata di A del tipo $a_{1p(1)}\ a_{2p(2)}\ \ldots a_{np(n)}$, con davanti un segno + o - a seconda che la permutazione p sia pari o dispari. Si noti che l'espressione $a_{1p(1)},\ a_{2p(2)},\ \ldots, a_{np(n)}$ è il prodotto di n entrate scelte nella matrice, una per ogni riga, con gli indici di colonna dati da $p(1),\ p(2), \ldots,\ p(n)$: poiché una permutazione scambia gli indici $1,\ 2, \ldots,\ n$ senza ripetizioni, stiamo praticamente scegliendo un'entrata da ogni riga in modo però che le entrate scelte stiano anche su colonne diverse.

Per chiarire e illustrare la definizione precedente, consideriamo in particolare i casi $n = 2$ e $n = 3$. Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matrice quadrata di ordine $n = 2$. Come abbiamo visto sopra ci sono solo due permutazioni dell'insieme $\{1, 2\}$ (`l'identità e la trasposizione che scambia 1 con 2`) quindi nella sommatoria avremo solo due addendi, del tipo $s(p)a_{1p(1)}a_{2p(2)}$: se p è l'identità, che come abbiamo osservato sopra è un permutazione pari e quindi $s(p) = +1$ e l'addendo corrispondente sarà $+a_{11}a_{22}$: se p è la trasposizione che scambia 1 con 2, che è una permutazione dispari, si ha $s(p) = -1$ e l'addendo corrispondente sarà $-a_{12}a_{21}$. Il determinante di una matrice quadrata A di ordine 2 risulta quindi essere

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{3.2}$$

Nel caso di una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ quadrata di ordine $n = 3$, la sommatoria avrà 6 addendi, tanti quante sono le permutazioni dell'insieme $\{1, 2, 3\}$, e per ognuna di queste permutazioni p l'addendo corrispondente sarà del tipo $s(p)a_{1p(1)}a_{2p(2)}a_{3p(3)}$. Più precisamente, avremo

- l'addendo $+a_{11}a_{12}a_{33}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3$ (`cioè la permutazione identica, che è una permutazione pari`)
- l'addendo $-a_{11}a_{23}a_{32}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 1, p(2) = 3, p(3) = 2$ (`che è una trasposizione e quindi una permutazione dispari`)
- l'addendo $+a_{12}a_{23}a_{31}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 2,\ p(2) = 3,\ p(3) = 1$ (`che è una trasposizione dispari`)
- l'addendo $-a_{12}a_{21}a_{33}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 2,\ p(2) = 1,\ p(3) = 3$ (`che è una teasposizione e quindi una permutazione dispari`)
- l'addento $+a_{13}a_{21}a_{32}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 3,\ p(2) = 1,\ p(3) = 2$ (`che si può scrivere come composizione di due trasposizioni ed è quindi una permutazione pari`)
- l'addendo $-a_{13}a_{22}a_{31}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 3,\ p(2) = 2,\ p(3) = 1$ (`che è una trasposizione e quindi una permutazione dispari`)

e quindi si avrà, per una matrice A di ordine 3:

$$\det(A) = a_{11}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{3.3}$$

Ora, vedremo nel Paragrafo la dimostrazione del fatto che il determinante di una matrice quadratea di ordine n si annulla se e solo se la matrice ha $n = 2$ e $n = 3$, usando le farmule esplicite (`3.2`) e (`3.3`). Nel caso di una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ di ordine 2, essendoci solo proporzionali, ovvero diciamo che esiste un $c \in \mathbb{K}$ tale che $(a_{11}, a_{12}) = c(a_{21}a_{22})$, cioè

$$a_{11} = ca_{21},\ a_{12} = ca_{22} \tag{3.4}$$

Ma allora, moltiplicando (`a entrambi i membri`) la prima uguaglianza per a_{22} e la seconda per 21 si ha $a_{11}a_{22} = ca_{21}a_{22}$ e $a_{12}a_{21} = ca_{21}a_{21}$, da cui vediamo che $a_{11}a_{22} = ca_{21}a_{22}$: quindi $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, ovvero $\det(A) = 0$. Quindi se una matrice di ordine 2 ha le righe proporzionali, il suo determinante è zero.

Viceversa, supponiamo che il determinante $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ sia zero, ovvero

$$a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} \tag{3.5}$$

Supponendo per il momento che le entrate a_{21}, a_{22} della seconda riga non siano nulle, dividendo entrambi i membri della (3.5) per a_{21} e a_{22} otteniamo

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \tag{3.6}$$