Appunti di Matematica

Nicola Ferru

Indice

Parte I

Matematica analisi 1

0.1 Simboli

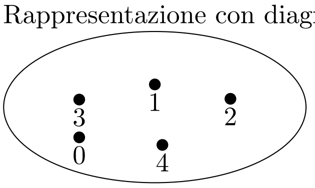
$\in$ Appartiene	$\Rightarrow$ Implica	β beta
$\notin$ Non appartiene	$\iff$ Se e solo se	γ gamma
$\exists$ Esiste	$\neq$ Diverso	Γ Gamma
$\exists!$ Esiste unico	$\forall$ Per ogni	δ, Δ delta
$\subset$ Contenuto strettamente	$\ni$: Tale che	ϵ epsilon
$\subseteq$ Contenuto	$\leq$ Minore o uguale	σ, Σ sigma
$\supset$ Contenuto strettamente	$\geq$ Maggiore o uguale	ρ rho
$\supseteq$ Contiene	α alfa	

Capitolo 1

Cenni di teoria degli insiemi

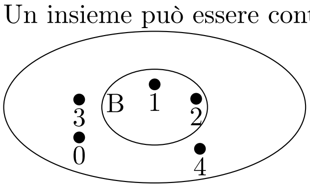
Per rappresentare un insieme abbiamo tre possibilità:

1. Rappresentazione estensive $A = [0, 1, 2, 3, 4]$
2. Rappresentazione intensiva $A = [x|x \in Nex < 5]$
3. Rappresentazione con diagrammi di Eulero - Venn



1.0.1 Operazioni tra gli insiemi

Un insieme può essere contenuto in un altro:



1.1 Sottoinsiemi di R

1.1.1 Definizione

1. Un punto x_0 si dice intero ad A se esiste un suo interno $\mathrm{I}(x_0, \delta)$ con $\delta > 0$ contenuto in A.
2. Si dice esterno ad A se è interno al CA (A^c).
3. Si dice di frontiera per A se non è né interno né esterno ad A.

Interno di A

°A Insieme dei punti interni ad A.

Esempio se $A = (1, 3], A = (1, 3)$

∂A,FA Insieme dei punti di frontiera di A

Esempio se $A = (1, 3]$, i punti di frontiera sono i punti $x = 1$ e $x = 3$

Osservazioni

- Se $x_0 \in {}^\circ A \Rightarrow x_0 \notin A$
- Se $x_0 \notin {}^\circ A$ (esterno) $\Rightarrow x_0 \notin A$
- Se $x_0 \in \partial A$ (frontiera) può essere $x_0 \in A$ oppure$x_0 \notin A$, in ogni caso per$\forall I(x_0.\delta)$ continue sia punti di A sia punti CA.

Definizione x_0 è un punto di accumulazione per A se in $\forall I(x_0, \delta)$ esiste un punti di A diverso da x_0. (Cioè in ogni interno di $x_0 \exists$ infiniti elementi di A)

Esempio se $A = (-2, 3], x = -2$ è accumulazione per A, ma anche $x = 3, x = 0, x = 1, \ldots,$ cioè è di accumulazione per A, qualunque $x \in [2, 3]$.
DA=A'=derivato di A è l'insieme dei punti di accumulazione per A. Se $x_0 \in DA$ allora può aversi $x_0 \in A$ oppure $x_0 \notin A$

Esercizio $x = 1 \text{e} x = 3$ sono entrambi punti di accumulazione per l'intervallo $(1.3], x = 3$ appartiene all'intervallo dato, x=1 NO.

1. Se $x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in DA$;
2. Se $x \notin DA$ allora x_0 si dice isolato;
3. Se $DA = \phi \Rightarrow$ A si dice discreto **Esempio** $A = \{1, 2, 3, 4\}$
4. Se $DA = A \Rightarrow A$ si dice perfetto **Esempio** $A = [a, b]$

Definizione Dato $A \subset R$ si definisce chiusura di A e si indica con $\bar{A}$, l'insieme: $\boxed{\bar{A} = A \bigcup \partial A}$ A è chiuso $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

Esempio se $A = (2, 5]$, allora $\bar{A} = [2, 5]$

Teorema di Bolzano Weierstrass

Ogni $A \subset R^n$ limitato e finito possiede almeno un punto di accumulazione. Un insieme chiuso e limitato in R^n ammette massimo e minimo assoluto.

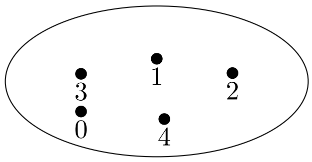
Esempio $A = [1, 4],\ max(A) = 4,\ min(A) = 1$ $A = \{x \in R : x^2 \leq 1\}$ $maxA = 1,\ min(A) = -1$

1.2 Funzione di una variabile

1.2.1 Definizione

Dati A, $B \subseteq R$ una funzione A in B è una legge (o relazione, o mappa) che ad ogni elemento x di A associa uno ed un solo elemento y di B. f: $A \rightarrow B$ oppure $y = f(x)$ $x \in A$ e $y = f(x) \in R$

- A = dominio o insieme di definizione di f.
- B = codominio di f.



Il grafico di f è un insieme di punti del piano (generalmente una curva) che è sottoinsieme del prodotto cartesiano AxB costituito da (x, f(x)) con $x \in A, f(x) \in B$

Definizione di funzione Immagine L'immagine di A tramite f, f(A), è l'insieme dei valori di y tale che $\exists x \in A$ tale che $f(x) \in B$.

Esempio Se f: $A \to B$ $f(x) = x^2$ $A = R, f(A) = [0, +\infty)$

Definizione di funzione suriettiva Si dice che f: $A \to B$ è suriettiva se $f(A) = B$ (cioè fissato $y \in B \exists x \in A : y = f(x)$)

Definizione di funzione iniettiva Si dice che f: $A \to B$ è iniettiva se $x_2 \neq x_1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Una funzione può essere sia iniettiva che suriettiva "biiettiva" Se f è sia suriettiva che iniettiva allora si dice biiettiva (cioè si ha un corrispondenza biunivoca tra A e B)

Quando una funzione è pari? Una funzione è pari se $\forall x \in A : f(x) = f(-x)$ quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse Y (es. $y = x^2$)

Quando una funzione è dispari? Una funzione è dispari se $\forall x \in A : f(-x) = -f(-x), f(x) = -f(-x)$ quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine (es. $y = x^3$)

Quando una funzione è periodica? Una funzione $A \to B$ è periodica di periodo $T > 0$, se $\forall x \in A, x + T \in A$ e $f(x + T) = f(x)$

Esempio Funzioni trigonometriche

Quando una funzione è limitata superiormente? Una funzione si dice limitata superiormente se $\exists M \in R : f(x) \leq M \ \forall x \in A$ (il grafico di f sta sotto la retta orizzontale $y = m$)

Quando una funzione è limitata inferiormente? Analogamente, al caso precedente, una funzione si dice limitata inferiormente se $\exists m \in R : f(x) \leq m \forall x \in A$ (il grafico di f sta sopra la retta orizzontale $y = m$. La funzione f si dirà limitata se è limitata sia inferiormente che superiormente).

Quando una funzione viene definita *composta*? Una funzione $A \to B$ e $B \to C$ si definisce composta di f e g: $g(f(x))$ La funzione h: $A \to C h = g^o f$

Esempio f=$x^2, g(x) = 3x + 2,$ $(A \equiv B \equiv C \equiv R) g^o f = 3x^2 + 2$

Esempio f=$x^2, g(x) = 3x + 2$

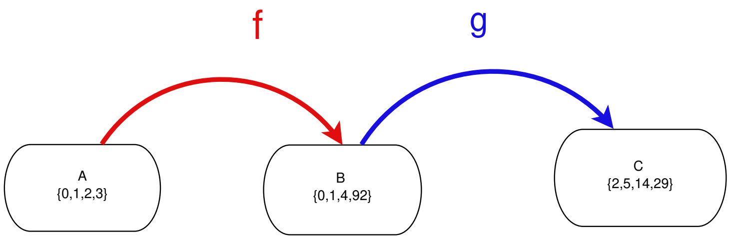


Figura 1.1: grafico di insieme di $f = x^2, g(x) = 3x + 2$

Capitolo 2

Studio di funzione

2.1 Limiti

2.1.1 Forme indeterminate

$+\infty - \infty$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$ 1^{∞} $e^{+\infty * 0}$

2.1.2 Infinitesimi e infiniti

Definizione Una funzione $f(x)$ su dice infinitesima per $x \to x_0$ (per $x \to \infty$), x_0 punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, se: $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ (oppure $lim_{x \to \infty} f(x) = 0$).

Esempi

- $y = e^x$ è un infinitesimo per $x \to -\infty$
- $y = \ln x$ è un infinitesimo per $x \to 1$
- $y = \sin x$ è un infinitesimo per $x \to 0$ (ma anche per $x \to \pi, 2\pi$, etc.)
- $y = \ln 1 + x$ è un infinitesimo per $x \to 1$

Ordine di infinitesimo

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesimi per $x \to x_0$ (o per $x \to \infty$), con $g(x) \neq 0$. Se $\exists \alpha R+$ e $l \in R$, $l \neq 0$ tale che $\lim_{x \to x_0} = \frac{f(x)}{[g(x)]^{\alpha}} = l$ (oppure $\lim_{x \to \infty} = \frac{f(x)}{[g(x)]^{\alpha}} = l$)
Allora, si dice che per $x \to x_0$ (o per $x \to \infty$), $f(x)$ è un infinitesimo di ordine α rispetto all'infinitesimo campione $g(x)$.

Esempi

- $y = \sin x$ è un infinitesimo per $x \to 0$ di ordine 1 rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$, infatti, $\lim_{x \to 0} = \frac{\sin x}{x^{\alpha}} = 1$ solo se $\alpha = 1$
- $y = \tan^2 x$ è un infinitesimo di ordine 2 rispetto ad x, per $x \to 0$
- $ord(l - \cos x) = 2$ rispetto ad x per $x \to 0$

Confronto tra infinitesimi

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesime per $x \to x_0$,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \neq 0 & ord(f) = ord(g) \\ \pm\infty & ord(f) < ord(g) \\ 0 & ord(f) > ord(g) \\ \text{non esiste,} & \text{f e g non confrontabile} \end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesime per $x \to \infty$. Utilizzando il confronto tra infinitesimi nel calcolo dei limiti del tipo $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}$, dove f_1, f_2, g_1, g_2 sono funzioni infinitesime per $x \to x_0$, si possono *trascurare gli infinitesimi di ordine maggiore* (analogo discorso per funzioni infinitesime $x \to \infty$).

esempio $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^3+2\tan x}{(e^x-1)^2+\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\tan x}{\sin x} = 2$

Definizione di funzioni asintotiche Si dice che due funzioni f, g sono asintotiche per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e si scrive $f \sim g$ per $x \to x_0$

esempi

- $\sin x \sim x$ per $x \to 0$
- $\ln(1+x) \sim x$ per $x \to 0$
- $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$

Definizione di funzioni infinite Una funzione $f(x)$ si dice *infinita* per $x \to x_0$ (o per $x \to \infty$) , x_0 punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, (o per $x \to \infty$) se:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \text{ (oppure } \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty)$$

Esempi

- $y = e^x$ è un infinito per $x \to +\infty$
- $y = \ln x$ è un infinito per $x \to 0^+$
- $y = x^2 + x$ è un infinito per $x \to \infty$

Regole aritmetiche Siano $f(x) = o(x^\alpha)$ (si legge «o piccolo di») e $g(x) = o(x^\beta)$ due funzioni *infinitesime* rispettivamente di ordine α e β per $x \to 0$ Allora si ha

- $cf(x))o(x^\alpha)$, $\forall c \in R$
- $x^\lambda f(x) = o(x^{\lambda+\alpha})$
- $f(x)g(x) = o(x^{\alpha+\beta})$
- $f(x) + g(x) = o(x^y)$, $\gamma = min(\alpha, \beta)$

Ordine di infinito Siamo $f(x)$ e $g(x)$ infiniti per $x \to x_0$ (o per x), con $g \neq 0$. Se $\exists \alpha \in R+$ e $l \in R$, $l \neq 0$ tale che
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^2} = l$ (o $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$)
Allora, per $x \to x_0$ (o per $x \to \infty$), $f(x)$ è un infinito di ordine α rispetto all'infinito compone $g(x)$.

Esempi

- $ord(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}$ rispetto ad x per $x \to +\infty$
- $ord(\frac{1}{\sin x}) = 1$ rispetto ad $\frac{1}{x}$ per $x \to 0$
- $ord(\frac{1}{e^x - 1}) = 1$ rispetto ad $\frac{1}{x}$ per $x \to 0$

Cofronto tra infiniti Siamo $f(x)$ e $g(x)$ infiniti per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \neq 0 & ord(f) = ord(g) \\ \pm\infty & ord(f) > ord(g) \\ 0 & ord(f) < ord(g) \\ \text{non esiste,} & \text{f e g non confrontabile} \end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinite per $x \to \infty$. Utilizzando il confronto tra infiniti nel calcolo dei limiti del tipo $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2}$, deve f_1, f_2, g_1, g_2 sono funzioni infinite per $x \to x_0$, si possono trascurare gli infiniti di ordine minore (analogo discorso per funzione infinito $x \to \infty$).

Esempio $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x^3 + 3\sqrt{x}}{x^2(2x-1) + \sqrt{3x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$.

Gerarchia degli infiniti Per $x \to +\infty$ si ha $(\log_\alpha x)^\alpha << x^\beta << b^x$, con $\alpha, \beta > 0, a, b > 1$ Non sempre è possibile calcolare l'ordine di infinito (o di infinitesimo) rispetto alla funzione campione usuale.

Esempio $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^a} = +\infty, \forall \alpha > 0, a > 1$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^a} = +\infty, \forall \alpha, \beta > 0, a > 1$

Regole aritmetiche Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni *infinite* di ordine rispettivamente α e β. Allora si ha

- $ord(f(x) + g(x)) = \max \alpha, \beta$
- $ord(f(x) * g(x)) = \alpha + \beta$
- $ord((f(x))^\gamma) = \alpha\gamma$

2.1.3 Funzioni continue

Una funzione continua è una funzione che, intuitivamente, fa corrispondere ad elementi sufficientemente vicini del dominio elementi arbitrariamente vicini del codominio.

Definizione Una funzione $f(x)$ è continua in x_0, se: $l_1 = \lim_{x \to x_0^+} = \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ossia $\forall \in > 0 \exists \delta_\mathcal{E} > 0$: $|f(x) - f(x_0)| < \mathcal{E}\ \forall_x \in I(x_0, \delta_\mathcal{E})\ (l = f(x_0))$

Teorema della permanenza del segno

Sia f(x) definita almeno in un intorno di x_0 e continua in x_0. Se $f(x_0) > 0$ allora $\exists \delta > 0 : f(x) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Teorema degli zeri

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ $f(a) * f(b) < 0$ allora $\exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$. Se f è anche strettamente monotona, lo zero è unico.

Teorema dell'esistenza dei valori intermedi (*conseguenza del teorema degli zeri*) Una funzione $f(x)$ continue in $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$.

Teorema di Wierstrass (sul massimo e il minimo)

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume massimo e il minimo assoluto in $[a, b]$, cioé $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$: $f(x_1) \leq f$

2.1.4 Criteri di invertibilità

Una funzione continua e strettamente monotona in [a,b] è invertibile in tale intervallo. Dimostrazione.