Appunti di Matematica

Nicola Ferru

Indice

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure

0.1 Premesse. . .

In questo repository sono disponibili pure le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra* consiglio a tutti di dargli un occhiata e di stare attenti perché possono essere presenti delle modifiche per migliorare il contenuto degli stessi appunti, comunque solitamente vengono fatte revisioni tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che questo è un progetto volontario e che per questo motivo ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure potrebbero esserci degli errori, chiedo la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare una modifica. Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open souce e infatti sono disponibili i sorgenti dei file allegati insieme ai PDF.

Cordiali saluti

0.2 Simboli

$\in$ Appartiene
$\notin$ Non appartiene
$\exists$ Esiste
$\exists!$ Esiste unico
$\subset$ Contenuto strettamente
$\subseteq$ Contenuto
$\supset$ Contenuto strettamente
$\supseteq$ Contiene
$\Rightarrow$ Implica
$\iff$ Se e solo se
$\neq$ Diverso
$\forall$ Per ogni
$\ni$: Tale che
$\leq$ Minore o uguale
$\geq$ Maggiore o uguale
α alfa
β beta
γ gamma
Γ Gamma
δ, Δ delta
ϵ epsilon
σ, Σ sigma
ρ rho

Parte I

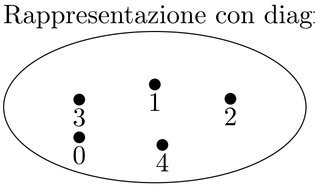
Matematica analisi 1 2021/22

Capitolo 1

Cenni di teoria degli insiemi

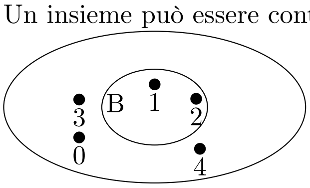
Per rappresentare un insieme abbiamo tre possibilità:

1. Rappresentazione estensive $A = [0, 1, 2, 3, 4]$
2. Rappresentazione intensiva $A = [x|x \in Nex < 5]$
3. Rappresentazione con diagrammi di Eulero - Venn



1.0.1 Operazioni tra gli insiemi

Un insieme può essere contenuto in un altro:



1.1 Sottoinsiemi di R

1.1.1 Definizione

1. Un punto x_0 si dice intero ad A se esiste un suo interno I(x_0, δ) con $\delta > 0$ contenuto in A.
2. Si dice esterno ad A se è interno al CA (A^c).
3. Si dice di frontiera per A se non è né interno né esterno ad A.

Interno di A

°A Insieme dei punti interni ad A.

Esempio se $A = (1, 3], A = (1, 3)$

∂A,FA Insieme dei punti di frontiera di A

Esempio se $A = (1, 3]$, i punti di frontiera sono i punti $x = 1$ e $x = 3$

Osservazioni

- Se $x_0 \in {}^\circ A \Rightarrow x_0 \notin A$
- Se $x_0 \notin {}^\circ A$ (esterno) $\Rightarrow x_0 \notin A$
- Se $x_0 \in \partial A$ (frontiera) può essere $x_0 \in A$ oppure$x_0 \notin A$, in ogni caso per$\forall I(x_0.\delta)$ continue sia punti di A sia punti CA.

Definizione x_0 è un punto di accumulazione per A se in $\forall I(x_0, \delta)$ esiste un punti di A diverso da x_0. (Cioè in ogni interno di $x_0 \exists$ infiniti elementi di A)

Esempio se $A = (-2, 3], x = -2$ è accumulazione per A, ma anche $x = 3, x = 0, x = 1, \ldots,$ cioè è di accumulazione per A, qualunque $x \in [2, 3]$.
DA=A'=derivato di A è l'insieme dei punti di accumulazione per A. Se $x_0 \in DA$ allora può aversi $x_0 \in A$ oppure $x_0 \notin A$

Esercizio $x = 1ex = 3$ sono entrambi punti di accumulazione per l'intervallo $(1.3], x = 3$ appartiene all'intervallo dato, x=1 NO.

1. Se $x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in DA$;
2. Se $x \notin DA$ allora x_0 si dice isolato;
3. Se $DA = \phi \Rightarrow$ A si dice discreto **Esempio** $A = \{1, 2, 3, 4\}$
4. Se $DA = A \Rightarrow A$ si dice perfetto **Esempio** $A = [a, b]$

Definizione Dato $A \subset R$ si definisce chiusura di A e si indica con $\bar{A}$, l'insieme: $\boxed{\bar{A} = A \bigcup \partial A}$ A è chiuso $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

Esempio se $A = (2, 5]$, allora $\bar{A} = [2, 5]$

Teorema di Bolzano Weierstrass

Ogni $A \subset R^n$ limitato e finito possiede almeno un punto di accumulazione. Un insieme chiuso e limitato in R^n ammette massimo e minimo assoluto.

Esempio $A = [1, 4],\ max(A) = 4,\ min(A) = 1\ A = \{x \in R : x^2 \leq 1\}\ maxA = 1,\ min(A) = -1$

1.2 Funzione di una variabile

1.2.1 Definizione

Dati A, $B \subseteq R$ una funzione A in B è una legge (o relazione, o mappa) che ad ogni elemento x di A associa uno ed un solo elemento y di B. f: $A \to B$ oppure $y = f(x)$ $x \in A$ e $y = f(x) \in R$

- A = dominio o insieme di definizione di f.
- B = codominio di f.

Il grafico di f è un insieme di punti del piano (generalmente una curva) che è sottoinsieme del prodotto cartesiano AxB costituito da (x, f(x)) con $x \in A, f(x) \in B$

Definizione di funzione Immagine L'immagine di A tramite f, f(A), è l'insieme dei valori di y tale che $\exists x \in A$ tale che $f(x) \in B$.

Esempio Se f: $A \to B$ $f(x) = x^2$ $A = R, f(A) = [0, +\infty)$

Definizione di funzione suriettiva Si dice che f: $A \to B$ è suriettiva se $f(A) = B$ (cioè fissato $y \in B \exists x \in A : y = f(x)$)

Definizione di funzione iniettiva Si dice che f: $A \to B$ è iniettiva se $x_2 \neq x_1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Una funzione può essere sia iniettiva che suriettiva "biiettiva" Se f è sia suriettiva che iniettiva allora si dice biiettiva (cioè si ha un corrispondenza biunivoca tra A e B)

Quando una funzione è pari? Una funzione è pari se $\forall x \in A : f(x) = f(-x)$ quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse Y (es. $y = x^2$)

Quando una funzione è dispari? Una funzione è dispari se $\forall x \in A : f(-x) = -f(-x), f(x) = -f(-x)$ quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine (es. $y = x^3$)

Quando una funzione è periodica? Una funzione $A \to B$ è periodica di periodo $T > 0$, se $\forall x \in A, x + T \in A$ e $f(x + T) = f(x)$

Esempio Funzioni trigonometriche

Quando una funzione è limitata superiormente? Una funzione si dice limitata superiormente se $\exists M \in R : f(x) \leq M\ \forall x \in A$ (il grafico di f sta sotto la retta orizzontale $y = m$)

Quando una funzione è limitata inferiormente? Analogamente, al caso precedente, una funzione si dice limitata inferiormente se $\exists m \in R : f(x) \leq m \forall x \in A$ (il grafico di f sta sopra la retta orizzontale $y = m$. La funzione f si dirà limitata se è limitata sia inferiormente che superiormente).

Quando una funzione viene definita *composta*? Una funzione $A \to B$ e $B \to C$ si definisce composta di f e g: $g(f(x))$ La funzione h: $A \to C h = g^o f$

Esempio f=$x^2, g(x) = 3x + 2,\ (A \equiv B \equiv C \equiv R) g^o f = 3x^2 + 2$

Esempio f=$x^2, g(x) = 3x + 2$
$\boxed{g^o f = 3x^2 + 2}$
L'operazione di composizione non è commutativa ($g^o f \neq f^o g$). La composizione di due funzioni biiettive è biiettiva

Quando una funzione è inversa? Date f: $A \to B$ biiettiva, si definisce funzione inversa di f: $f^{-1} :_B\to A$ tale che f^{-1} o $f = I_A$ f o $f^{-1} = I_B$

Nota La funzione $y = x^2$ (f: $R \to R$) non è biiettiva ma è stata "resa" biiettiva, quindi invertibile, restringendo il suo dominio (per l'iniettività) e codominio (per la suriettività). Nell'esempio il dominio è stato «rimpicciolito» in modo tale da avere una funzione strettamente crescente e quindi iniettiva. Il codominio è stata «rimpicciolito» all'intervallo massimale $[0, +\infty)$ e la funzione è diventata anche suriettiva.

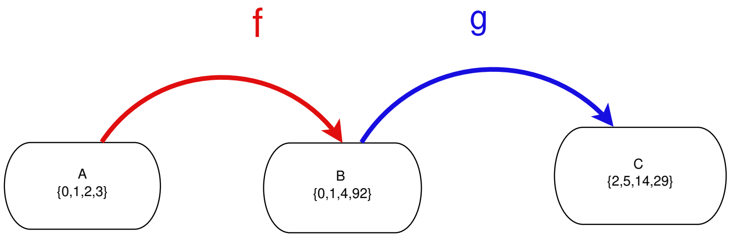


Figura 1.1: Grafico di insieme di $f = x^2, g(x) = 3x + 2$

Quando una funzione viene definita monotona? Sia $f : A \to B$, f si dice monotona in A se verifica una delle seguenti condizioni ($\forall x_1, x_2 \in A$)

1. f strettamente crescente se $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$
2. f crescente se $x_1 < x_2$, $f(x_1) \leq f(x_2)$
3. f strettamente decrescente se $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$
4. f decrescente se $x_1 < x_2$, $f(x_1) \geq f(x_2)$

Se si verificano la 1 e 3 allora la funzione f(x) è strettamente monotona.

Teorema: *Una funzione f:A $\to$ B strettamente monotona in A, è invertibile in A. Inoltre la sua inversa è ancora strettamente monotona.*

Capitolo 2

Studio di funzione

In analisi matematica la locuzione studio di funzione indica l'applicazione pratica dei teoremi e delle tecniche del calcolo infinitesimale nello specifico caso di una funzione di cui è nota l'espressione analitica. Lo studio di funzione è utile per ricavare esplicitamente le informazioni che descrivono il comportamento di una funzione nel suo dominio. Spesso, le informazioni ottenute mediante uno studio di funzione sono sufficienti per poter tracciare, anche a mano, un grafico qualitativo della funzione studiata e che in genere, per funzioni a valori reali di una variabile reale, viene rappresentato su un piano cartesiano, anche se in taluni casi potrebbe essere più semplice ricorrere un sistema di coordinate differente. In genere, con "studio di funzione" ci si riferisce implicitamente al solo e specifico caso delle funzioni reali di una sola variabile reale, ma con le opportune modifiche è comunque possibile adattare le considerazioni seguenti anche al caso delle funzioni di più variabili reali, nonché anche per le funzioni di una o più variabili complesse.

By Wikipedia

2.1 Grafica delle funzioni elementari

2.1.1 Funzione lineare $y = mx + qm, q \in R$

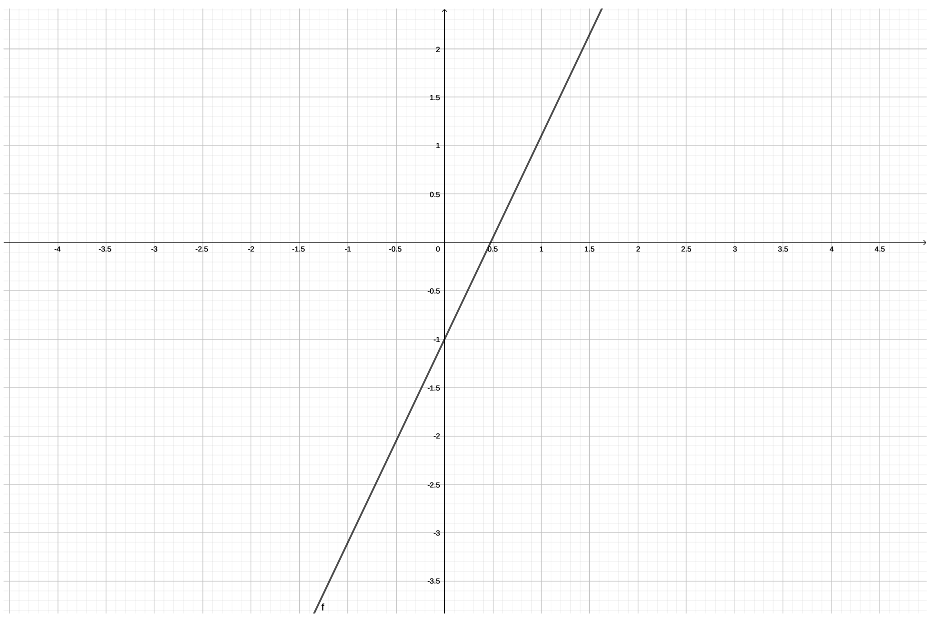


Figura 2.1: Grafico di Funzione lineare $y = mx + qm, q \in R$

$C.E. \equiv R$ Non Limitata

2.1.2 Funzione valore assoluto $y = |x|$

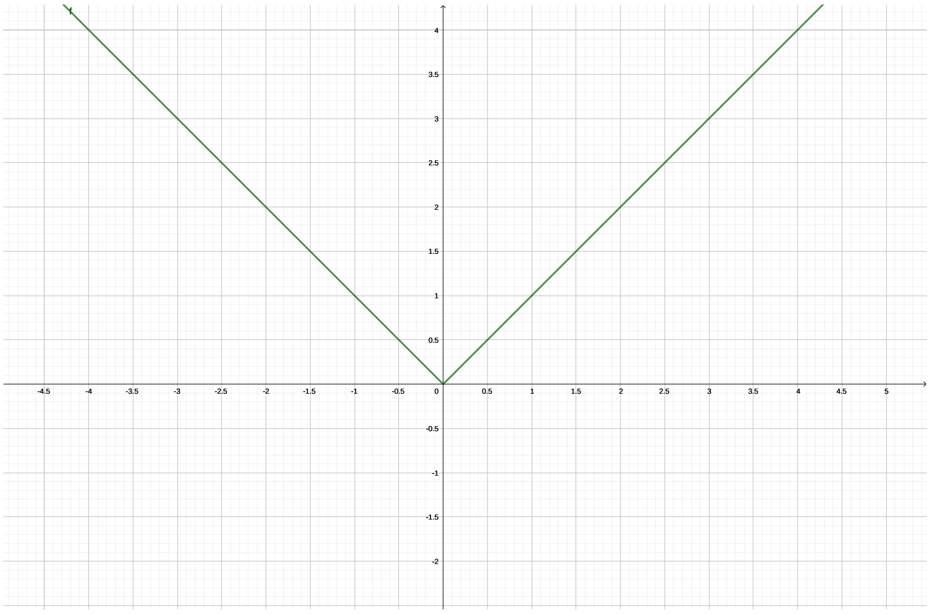


Figura 2.2: Grafico di Funzione valore assoluto $y = |x|$

$C.E. \equiv R$ Limitata inferiormente in $x = 0$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

2.1.3 Funzione potenza $y = x^n, n \in N, pari$

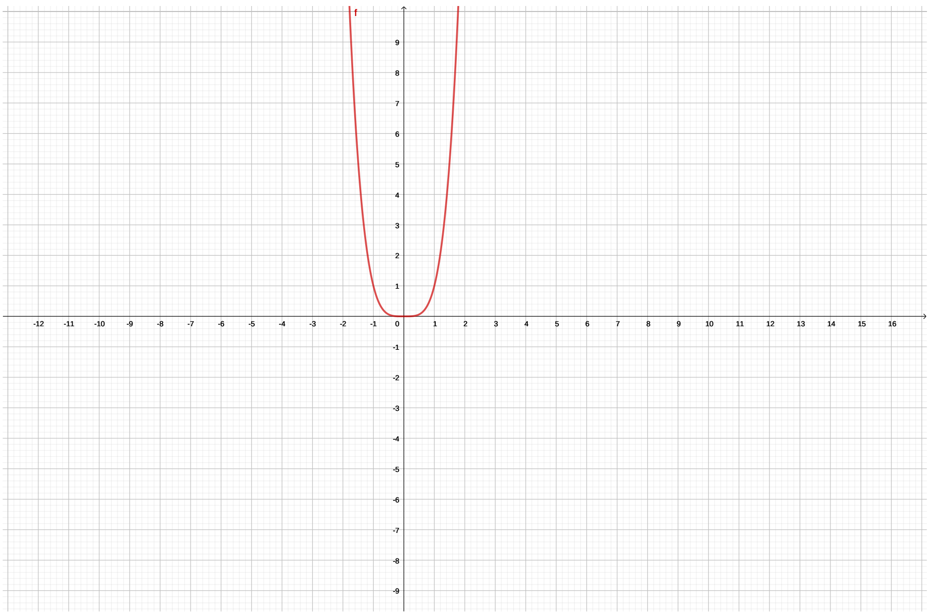


Figura 2.3: Grafico di Funzione potenza $y = x^n, n \in N, pari$

2.1.4 Funzione potenza $y = x^\alpha, \alpha \in R$ (*ma non razionale*)

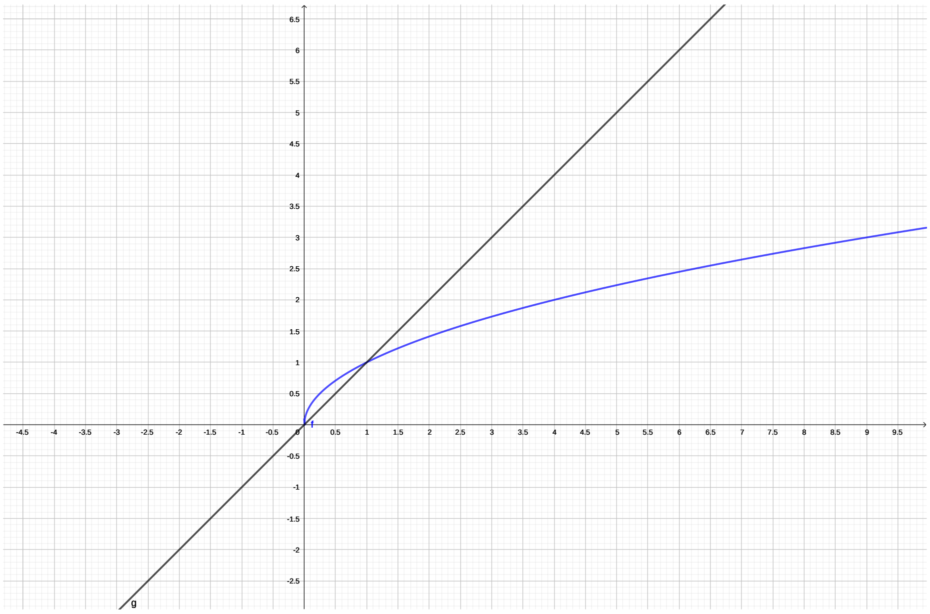


Figura 2.4: Grafico di Funzione potenza $y = x^\alpha, \alpha \in R$ (*ma non razionale*)

$C.E.$: $\{x \in R : x \geq 0\}$ Limitata inferiormente da $x = 0$ non limitata superiormente Strettamente crescente

2.1.5 Funzione potenziale $y = x^{\frac{m}{n}}, m, n \in Z$

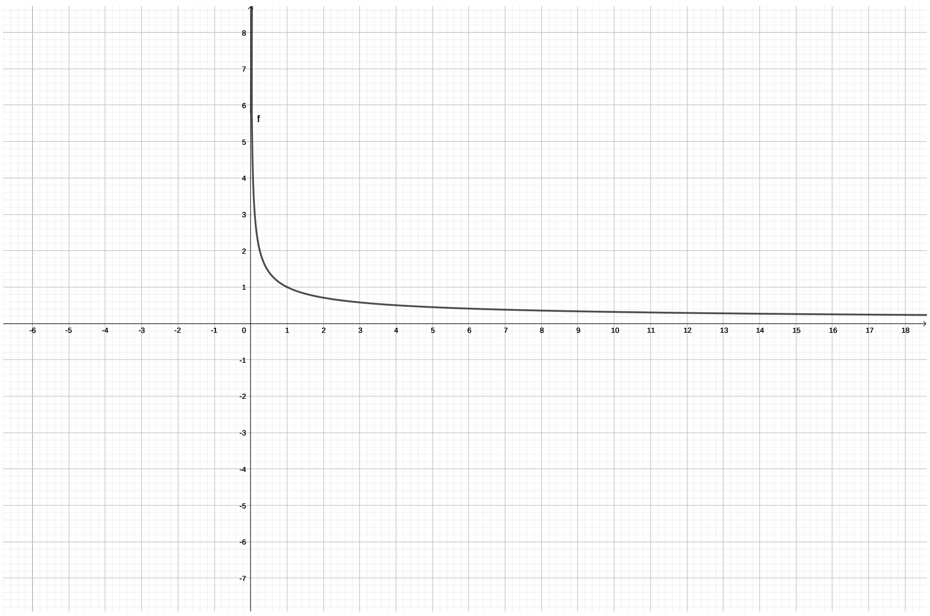


Figura 2.5: Grafico di Funzione potenza $y = x^\alpha, \alpha \in R$ (*ma non razionale*)

2.1.6 Funzione logaritmo $y = \log_a x$

$C.E. \equiv x > 0$ Non limitata, strettamente crescente se $a > 1$, Strettamente decrescente se $0 < a < 1$.

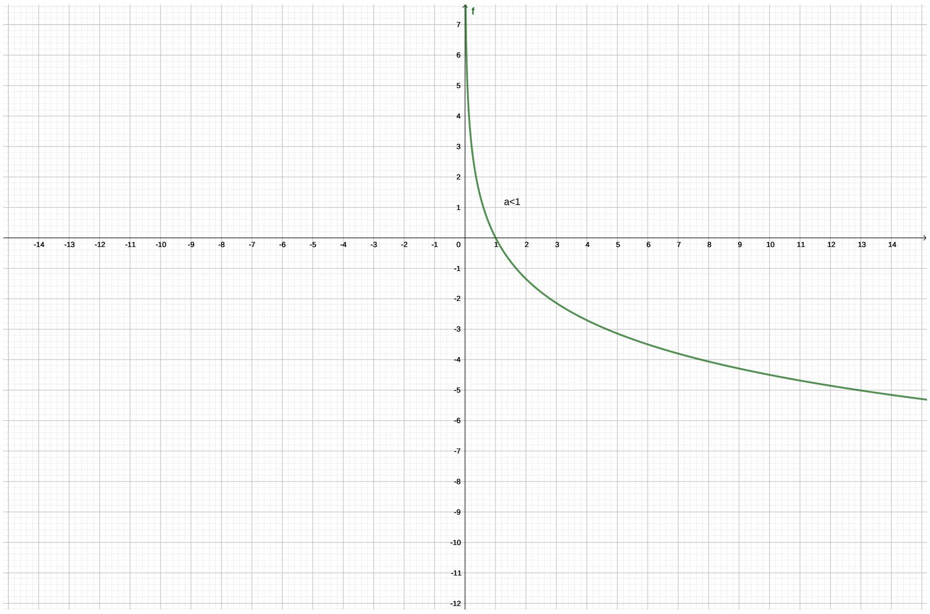


Figura 2.6: Funzione logaritmo $y = \log_a x$

2.1.7 Le coniche: la circonferenza

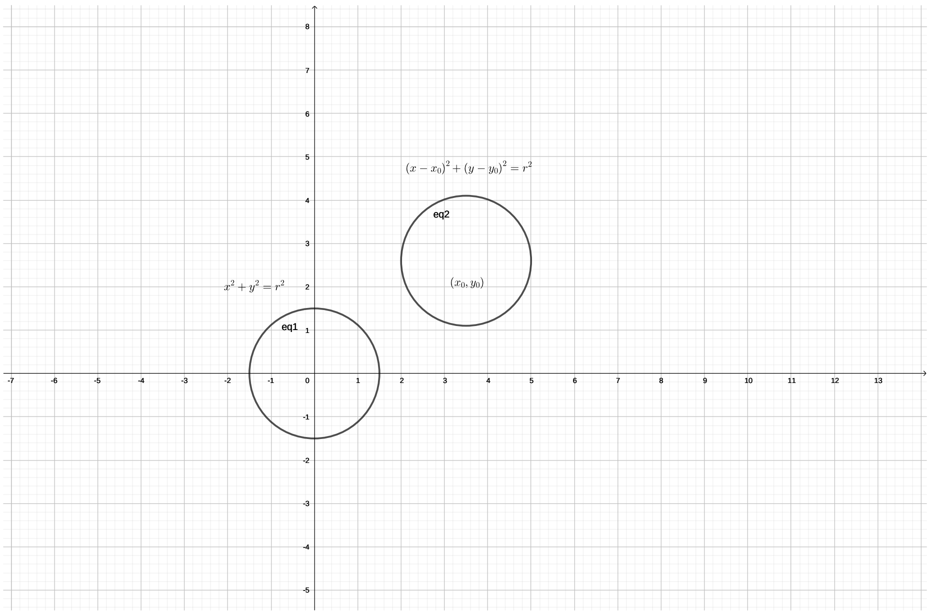


Figura 2.7: Le coniche: la circonferenza

2.1.8 Le coniche: l'ellisse

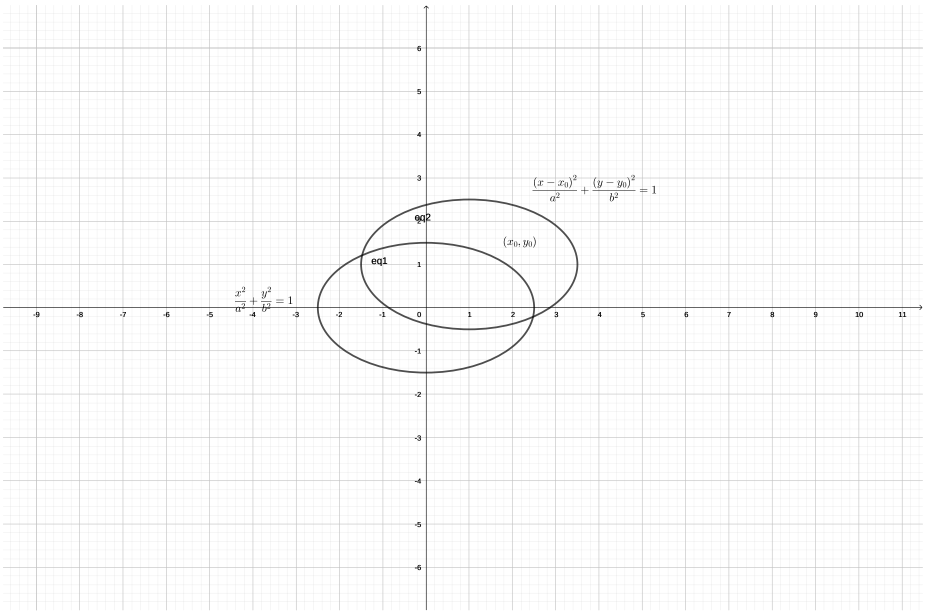


Figura 2.8: Le coniche: l'ellisse

2.1.9 Le coniche: iperbole

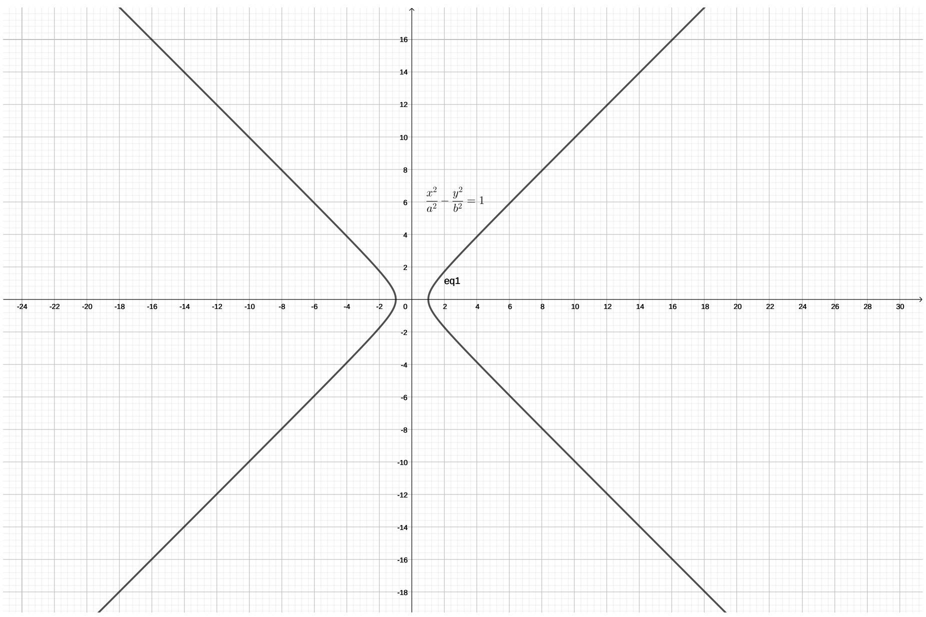


Figura 2.9: Le coniche: iperbole

2.1.10 Le coniche: iperbole equilattera

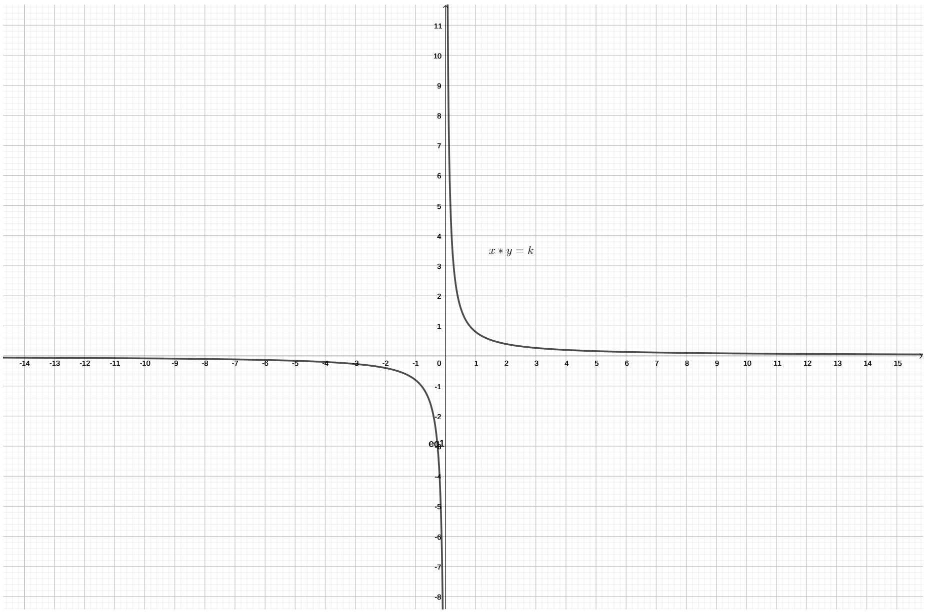


Figura 2.10: Le coniche: iperbole equilattera

2.1.11 Le coniche: parabola

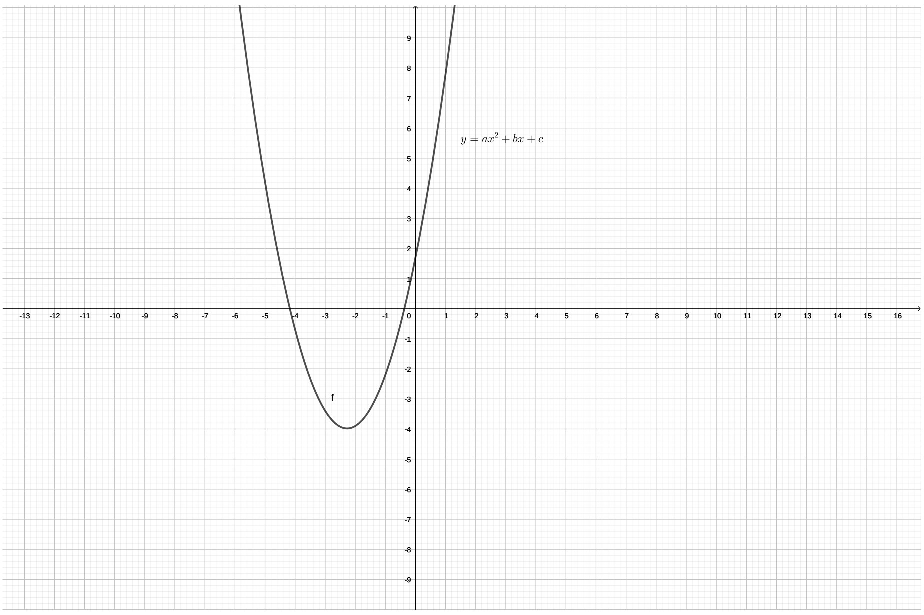


Figura 2.11: Le coniche: parabola

2.1.12 Le funzioni trigonometriche

Funzioni trigonometriche elementati: $y = \sin x, y = cosx, y = \tan x, y = \cot x$
Relazioni fondamentali: $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

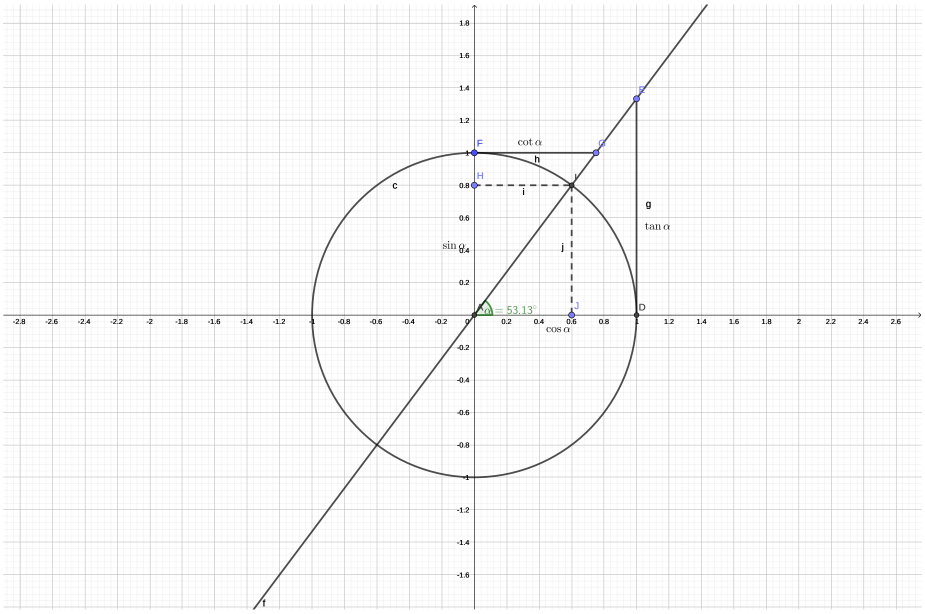


Figura 2.12: Le funzioni trigonometriche

Funzione $\sin x$

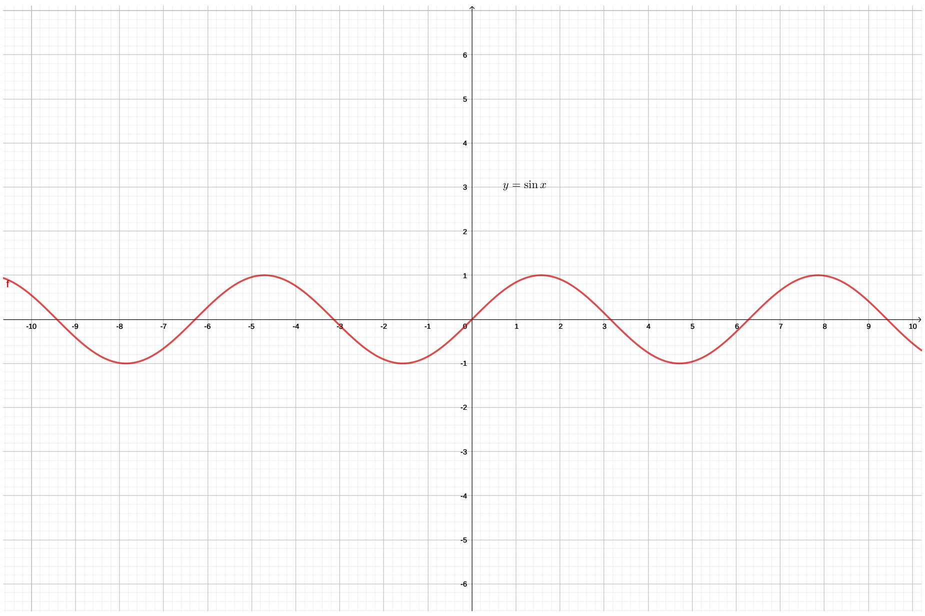


Figura 2.13: Funzione $\sin x$

Funzione $\cos x$

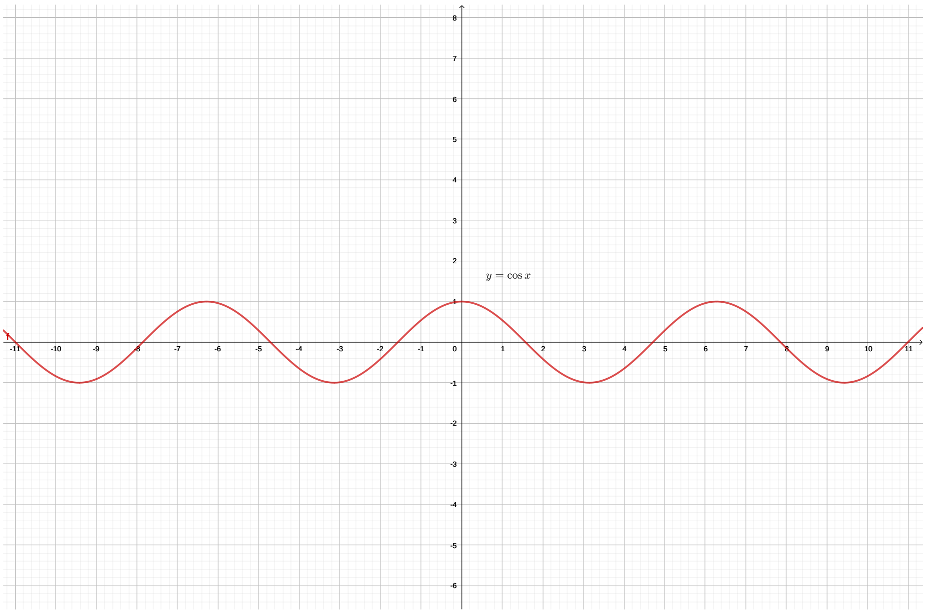


Figura 2.14: Funzione $\cos x$

Funzione $\tan x$

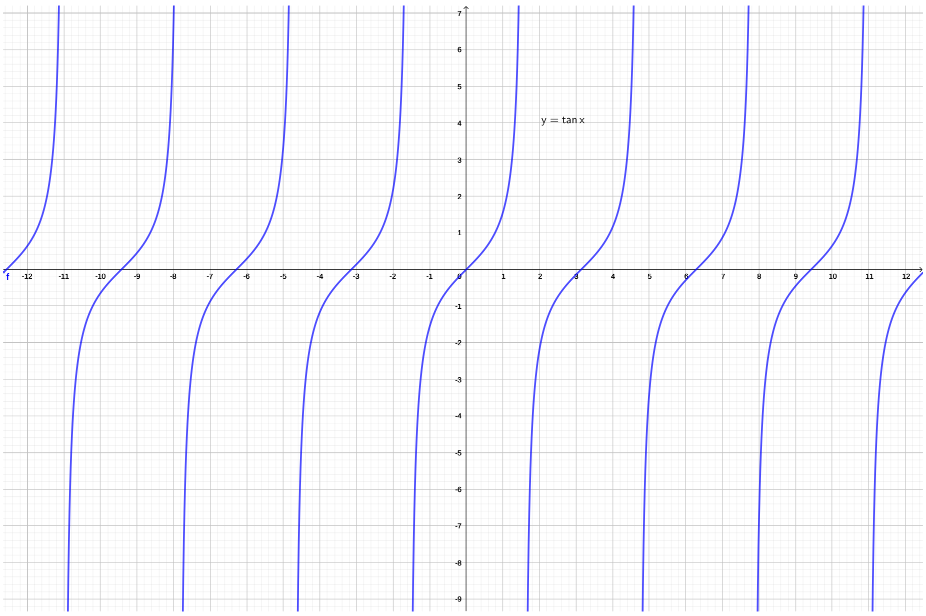


Figura 2.15: Funzione $\tan x$

Funzione $\cot x$

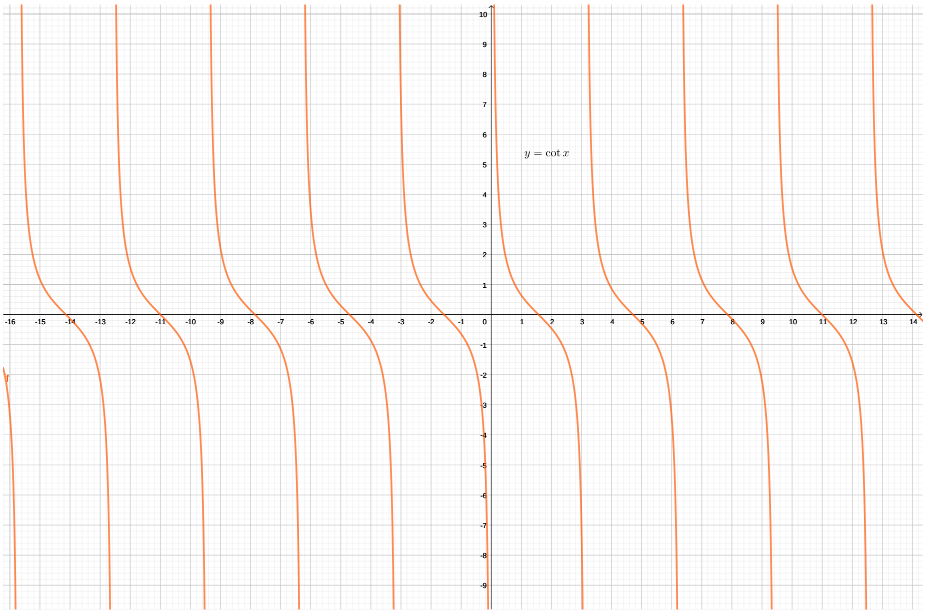


Figura 2.16: Funzione $\cot x$

2.1.13 Le funzioni trigonometriche inverse

Funzione $\arcsin x$

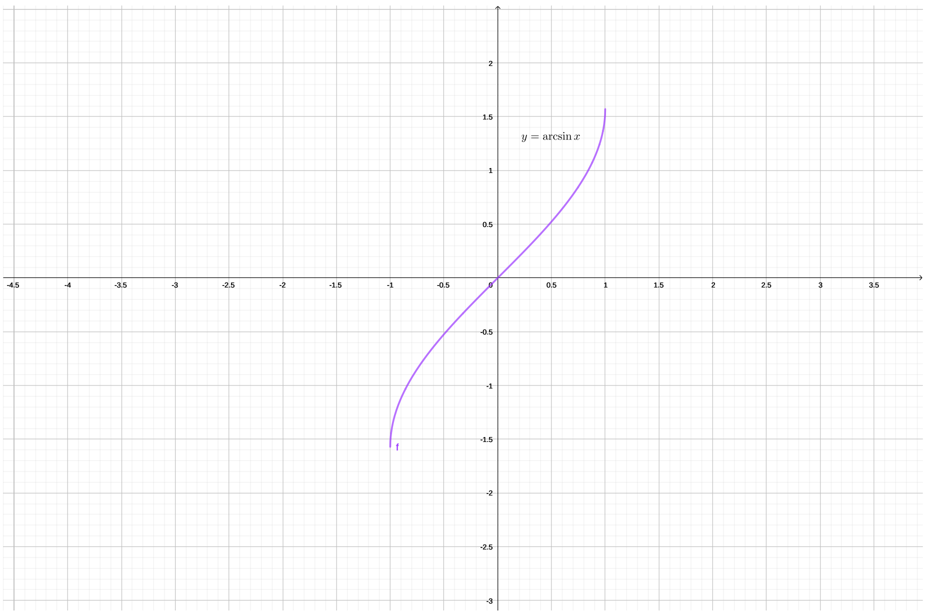


Figura 2.17: Funzione $\arcsin x$

Funzione $\arccos x$

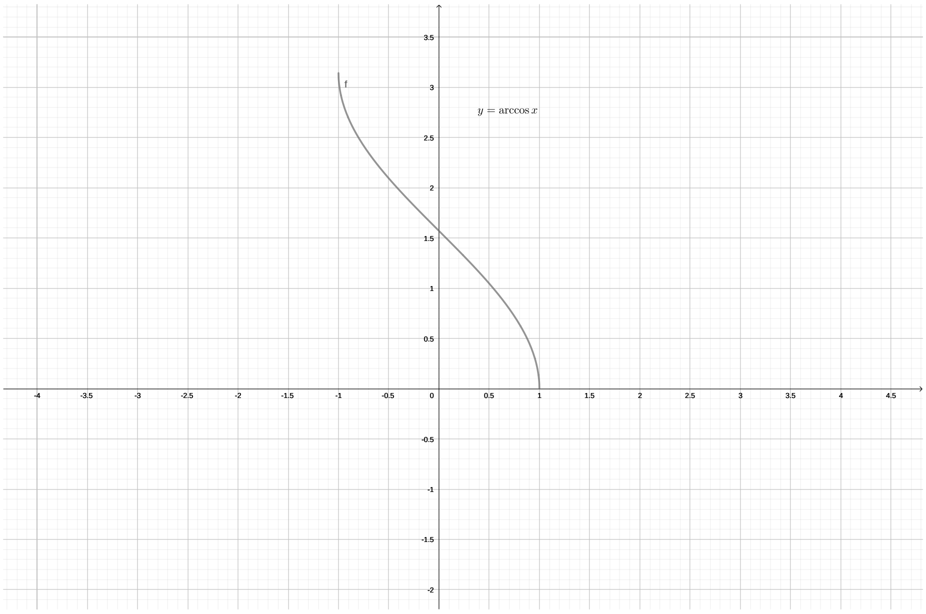


Figura 2.18: Funzione $\arccos x$

Funzione $\arctan x$

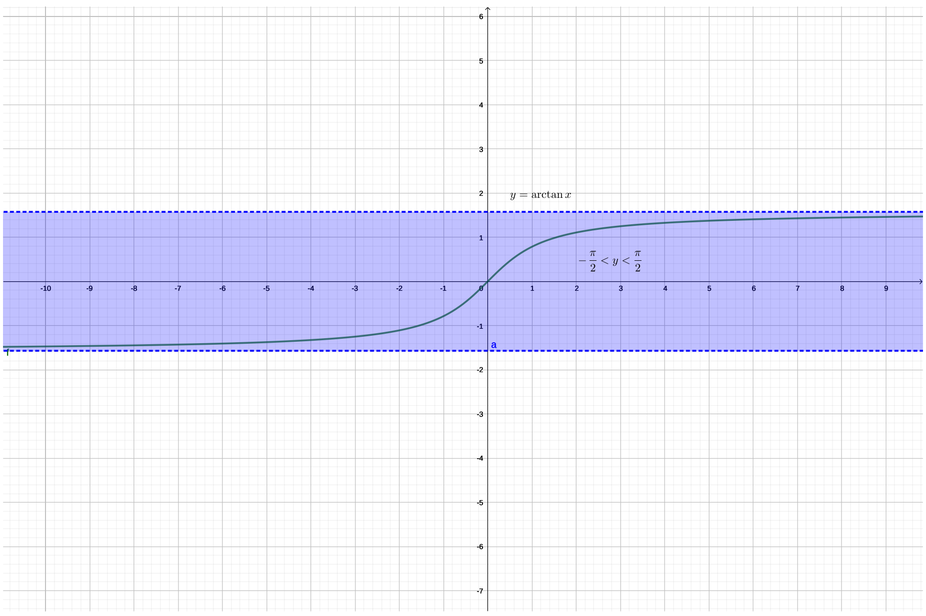


Figura 2.19: Funzione $\arctan x$

Operazione sul grafico: traslazione della asse X

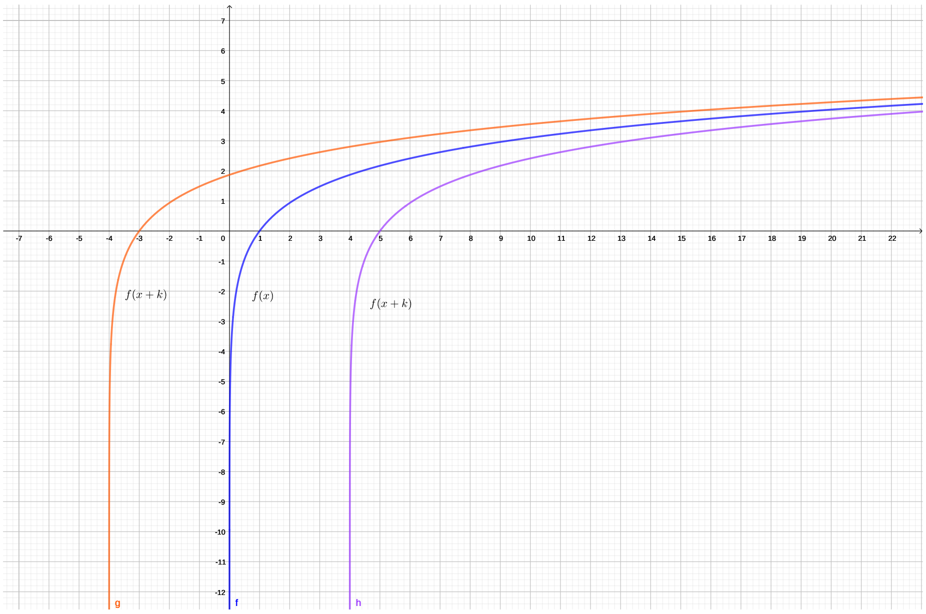


Figura 2.20: Operazione sul grafico: traslazione della asse X

Operazione sul grafico: traslazione della asse Y

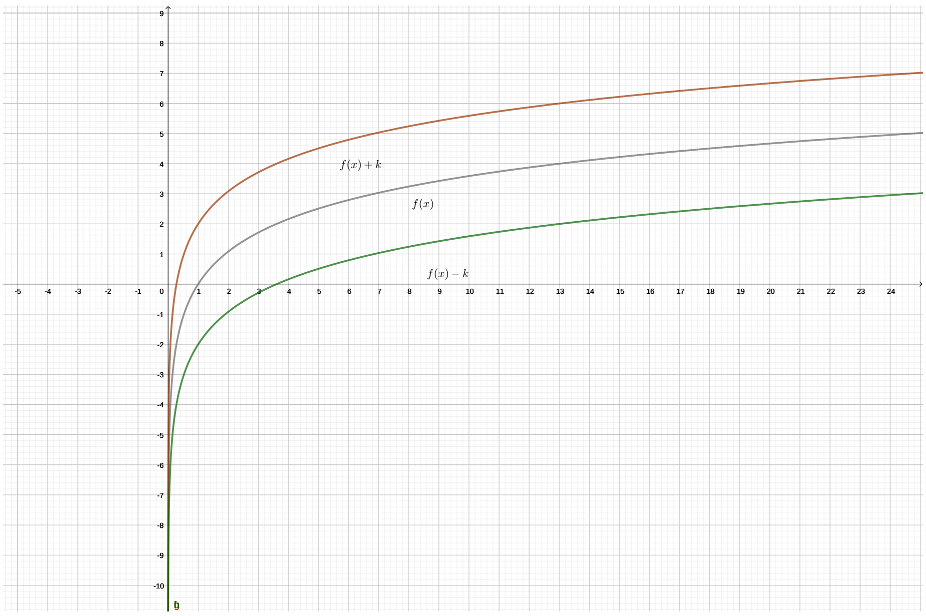


Figura 2.21: Operazione sul grafico: traslazione della asse Y

Operazione sul grafico: contrazione e dilatazione in direzione verticale

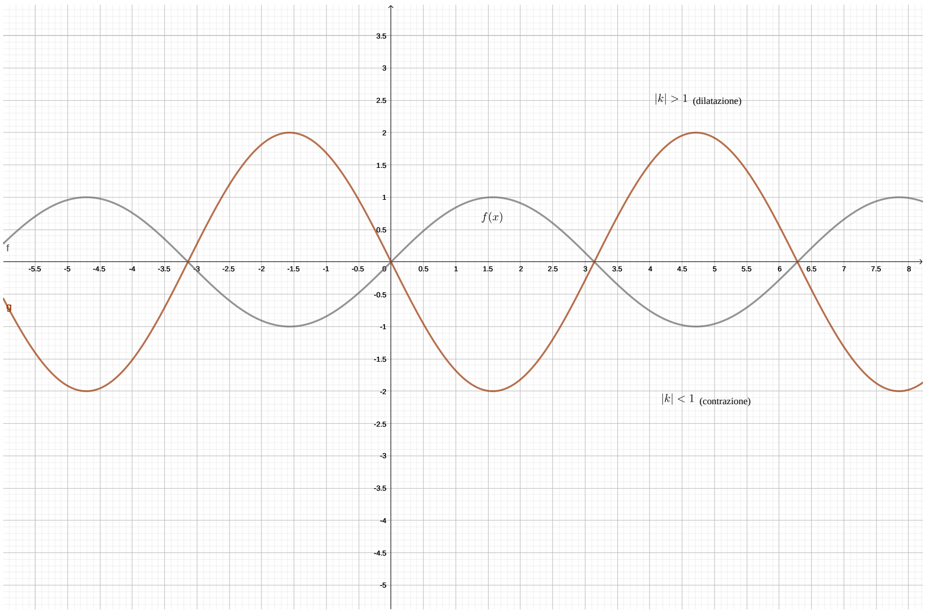


Figura 2.22: Operazione sul grafico: contrazione e dilatazione in direzione verticale

Operazione sul grafico: contrazione e dilatazione in direzione orizzontale

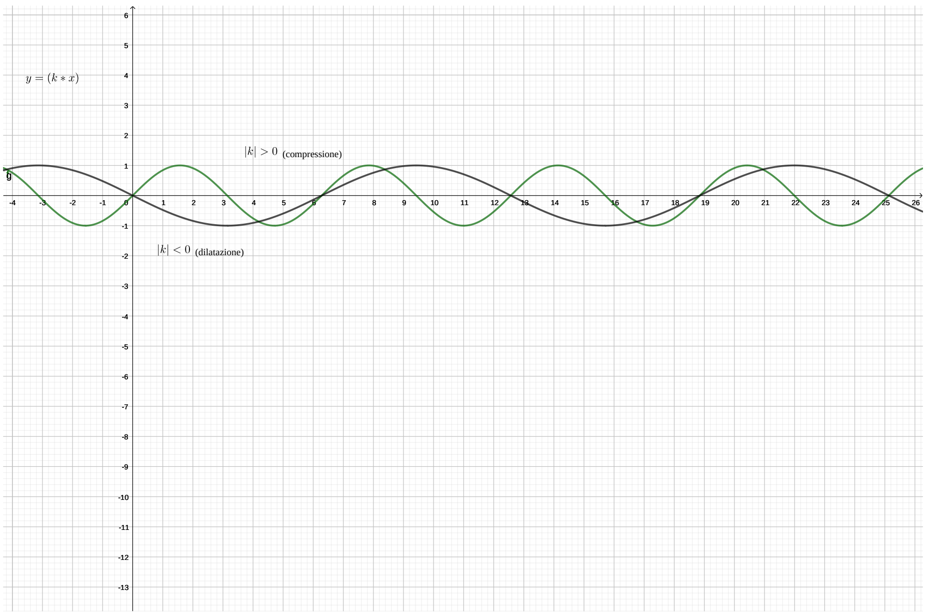


Figura 2.23: Operazione sul grafico: contrazione e dilatazione in direzione orizzontale

Operazione sul grafico: $y = |f(x)|$

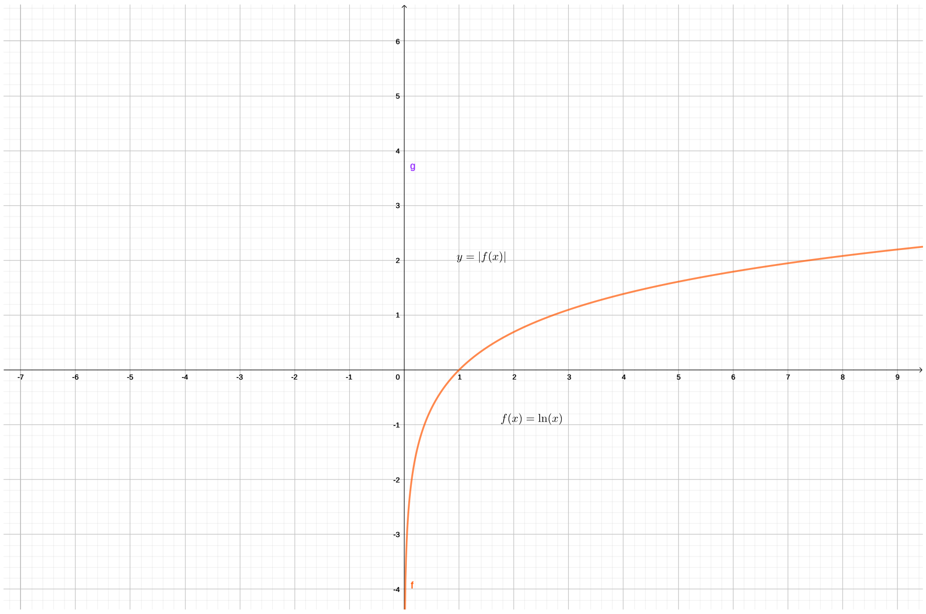
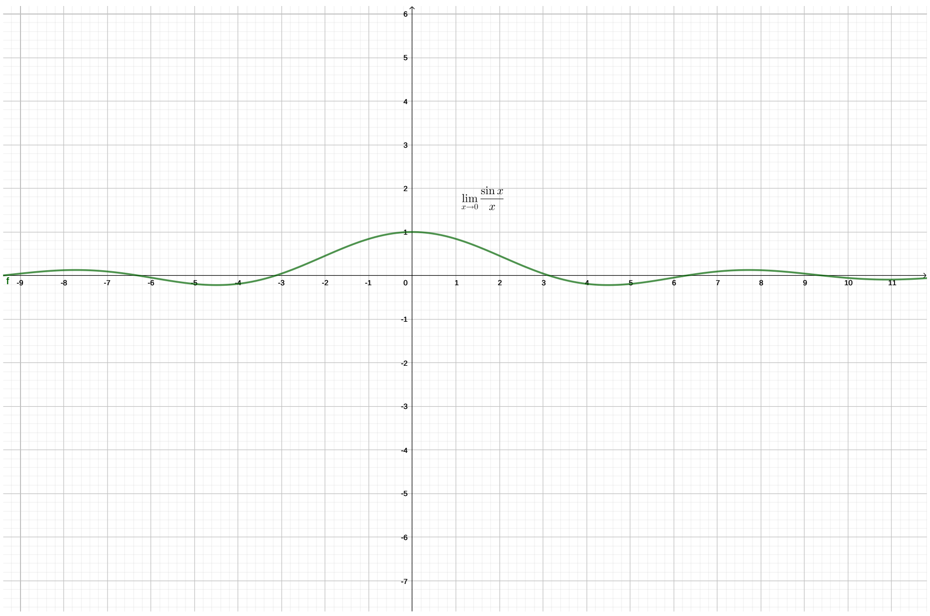


Figura 2.24: Operazione sul grafico: $y = |f(x)|$

2.2 Limiti



x	f(x)
0,1	0,998
0,001	0,999

$$C.E. = R \backslash \{0\}$$

Figura 2.25: Esempio limite di funzione

Il limite di una funzione è un operazione, o meglio un operatore, che permette di studiare il comportamento di una funzione nell'intorno di un punto x_0.
Mediamente il limite è possibile stabilire a quale valore tende la funzione man mano che i valori della variabile si approssimano al punto x_0.

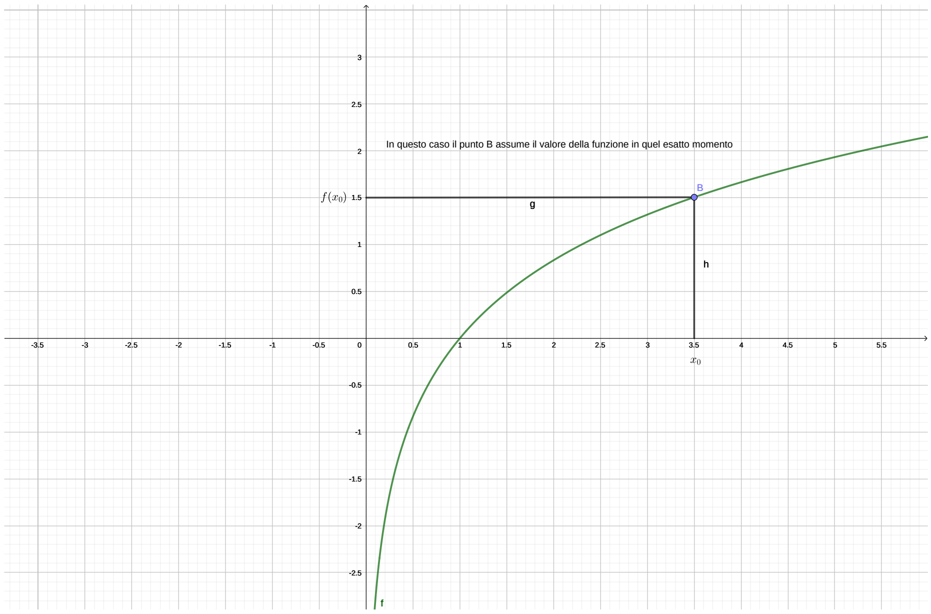


Figura 2.26: Esempio di limite di una funzione

2.2.1 Limite di una funzione

Sia $f(x)$ definita in $A \in R$, e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice che $f(x)$ ha limite l per x che tende a x_0, se $V\varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - l| = \varepsilon \Rightarrow x \in I(x_0, \delta_\varepsilon)$ escluso al più x_0 cioè $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$

- $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

- $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon$

In simboli

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \;\; f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$

2.2.2 Definizione di Limite destro

l_1 si definisce *limite destro* di $f(x)$ per x che tende a x_0^+: $\lim_{x \to x_0^+ f(x) = l_1}$
se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - l_1| < \varepsilon \Rightarrow x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$ cioè $x \in (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon)$

2.2.3 Definizione di limite sinistro "da sinistra"

l_2 si definisce *limite sinistro* di $f(x)$ per x che tende a x_0^-: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l^2$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - l_2| < \varepsilon \Rightarrow x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0$ cioè $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0)$

2.2.4 Teorema d'unicità del limite "da destra"

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow$ l è unico
Dimostrazione. Per assurdo: supponiamo che $\exists l_1, l_2 : l_1 \neq l_2$ con $l_1 = lim_{x \to x_0} f(x)$ in $I(x_0, \delta_{1\varepsilon})$, $l_2 = lim_{x \to x_0} f(x)$ in $I(x_0, \delta_{2\varepsilon})$
Fissato $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$
$2\varepsilon = |l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |f(x) - l_2| + |f(x) - l_2| < 2\varepsilon$ in $I(x_0, \delta_\varepsilon)$, $\delta_\varepsilon = min(\delta_{1\varepsilon}, \delta_{2\varepsilon})$
Assurdo! $\Rightarrow l_1 = l_2$

Esempi

$y = \frac{|x|}{x}$ $\quad$ $C.E. = R\backslash\{0\}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ $\quad$ $\nexists$ limitate

Definizione Sia $f(x)$ definita in $A \in R$, e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice che $f(x)$ ha limite $+\infty$ per x che tende a x_0, se $\forall M > 0, \exists\delta_M > 0 : \forall x \in I(x_0, \delta_m) \Rightarrow f(x) > M$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty} \tag{2.1}$$

Definizione Sia $f(x)$ definita in $A \in R$, e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice che $f(x)$ ha limite $-\infty$ per x che tende a x_0, se $\forall M > 0, \exists\delta_M > 0 : \forall x \in I(x_0, \delta_m)$ risulta $f(x) < -M$.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty} \tag{2.2}$$

Definizione di Asintoto verticale Se $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty}$ allora la retta verticale $\boxed{x = x_0}$ si chiama asintoto verticale

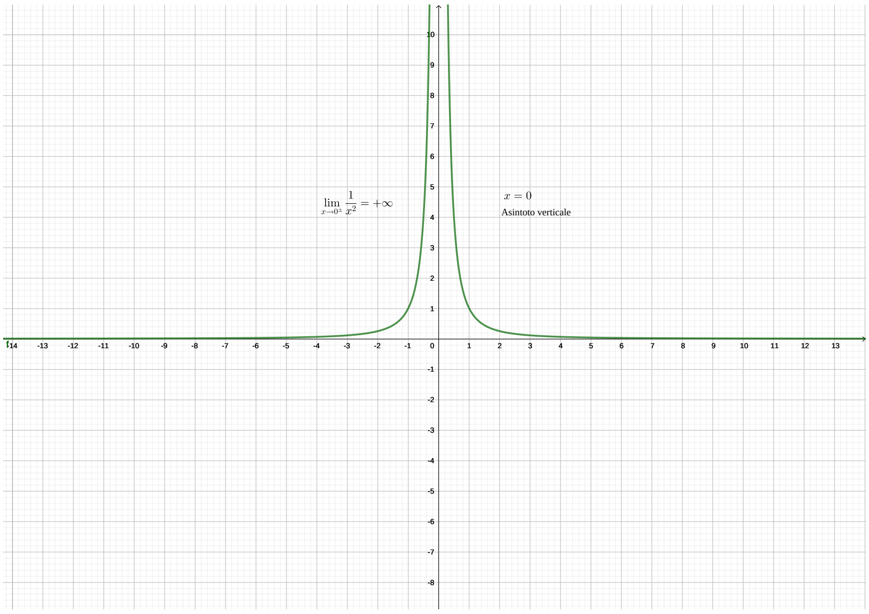


Figura 2.27: Asintoto verticale

Sia $f(x)$ definita in $A \in R$, si dice che $f(x)$ ha limite l, per x che tende a $+\infty$, se: $\forall_\varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon > 0 : \forall x \in I(K_\varepsilon, +\infty)$ risulta $|f(x) - l| < \varepsilon$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = l}$$

Definizione di Asintoto orizzontale Se $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = l}$ Allora la retta orizzontale $\boxed{y = l}$ si chiama Asintoto orizzontale

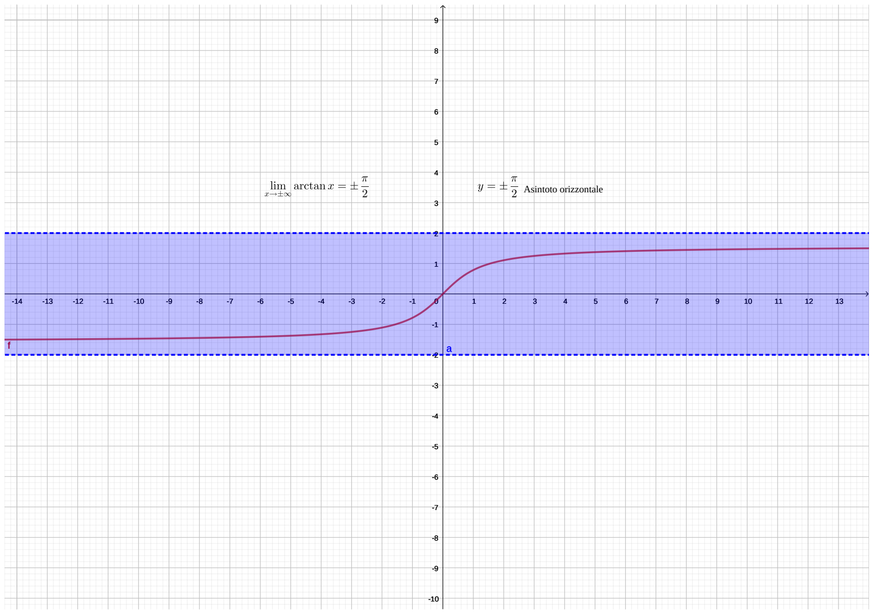


Figura 2.28: Asintoto orizzontale

Sia $f(x)$ definita in $A \in R$, si dice che $f(x)$ ha limite $+\infty$, per x che tende a $+\infty$, se: $\forall M > 0, \exists K_M > 0 : \forall x \in (K_M, +\infty)$ risulta $f(x) \in (M, +\infty) \left| \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \right|$

2.2.5 Teorema (algebra dei limiti)

Se:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = l_1 \pm l_2$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) * g(x) = l_1 * l_2$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}, g(x), l_2 \neq 0$

2.2.6 Convenzioni con ∞

- $\forall a > 0, a \pm \infty = \pm\infty$
- $+\infty + \infty = +\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $\forall a > 0, a * (\pm\infty) = \pm\infty$
- $\forall b < 0, b * (\pm\infty) = \mp\infty$
- $(\pm\infty) * (\pm\infty) = +\infty$
- $(\pm\infty) * (\mp\infty) = -\infty$

Convenzioni con ∞

$\frac{a}{\infty} = 0$ $\frac{a}{0} = \infty$

2.2.7 Forme indeterminate

$+\infty-\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	1^{∞}	$e^{+\infty*0}$	$0-\infty$	0^0	$0*\infty$

- $$a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & a>1\\ 0, & 0<a<1\end{cases}$$
- $$a^{-\infty}=\begin{cases}0, & a>1\\ +\infty, & 0<a<1\end{cases}$$

Come si risolvono?

$\frac{\infty}{\infty}$ **e** $\frac{0}{0}$ Il limite che andremo a studiare è

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\ln(1+x)} \text{ forma ineterinata}} \tag{2.3}$$

In questo caso possiamo applicare la regola di de l'Hopital [2.11], che ci consente di eseguire il calcolo in modo abbastanza rapido, consiste nel derivare singolarmente il **numeratore** e il **denominatore** e in questo caso il risultato sarà $\arctan x=\frac{1}{1+x^2}$ e $\ln(1+x)=\frac{1}{1+x}$, adesso rimettiamo assieme il limite di prima e il risultato è questo:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{\left(\frac{1}{1+x}\right)}\right]$$

Ovviamente in questo caso conviene utilizzare le regole delle frazioni per renderci il lavoro più semplice, quindi, lo esprimiamo sotto forma di moltiplicazione e il risultato è il seguente:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{1+x^2}*(1+x)\right]=\frac{1}{1+0}*(1)=1$$

Ed ecco che adesso il limite assume un valore determinato.

$+\infty-\infty$ Il limite che andremo a studiare è

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=\infty-\infty$$

In questo caso va per forza di cose razionalizzato

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x^2+x)-(x^2)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}^2+x-\cancel{x}^2+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Ovviamente una volta che otteniamo questa forma indeterminata, possiamo proseguire con la regola di de l'Hopital [2.11] che è valida solo per due casi di indeterminazione: $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, quindi deriviamo numeratore e denominatore singolarmente e il risultato è il seguente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}*(2x+1)+\frac{1}{2\sqrt{x^2-x}}*(2x-1)}=\frac{2}{1+1}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}=1$$

Ed ecco che il limite assume un valore determinato... Nel modo più semplice e indoloro possibile.

$0*\infty$ Il limite che adesso studieremo è

$$\lim_{x\to 0}[x*e^{\frac{1}{x}}]=0*e^{\infty}=0*\infty= \text{ forma indeterminata}$$

Ovviamente in questa forma non è molto comoda da studiare quindi, bisogna scriverla in questo modo, per poterla studiare con il metodo di de l'Hopital.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}}\right]$$

Quindi dopo aver sfruttato le proprietà delle frazioni, perché ovviamente $x * e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$, dopo averla in questo modo possiamo applichiamo la regola di de l'Hopital [2.11], Quindi procediamo come nel precedente caso "$+\infty - \infty$"

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{\frac{1}{x}} * (-\frac{1}{x^2})}{(-\frac{1}{x^2})}\right] = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{\infty} = \infty$$

E adesso da un valore determinato.

0^0 Il limite che andiamo a studiare in questo caso è

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x^x = 0^0 \text{ forma ineterinata}} \tag{2.4}$$

In questo caso bisogna procedere in questo modo:

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x*\ln x} = e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$$

In definitiva bisogna procedere con regola di de l'Hopital [2.11] e lo svolgimento sarà il seguente

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = e^0 = 1$$

Ovviamente essendo un logaritmo si prende solo lo 0^+ "da destra" [2.2.4], anche in questo caso alla fine ha reso un valore determinato.

Consiglio: Utilizza sempre le parentesi per isolare le parti e evitare inutili confusioni, indica da che parte stai studiano il limite solo dove è rilevante e esegui tutti i passaggi se ci sono dubbi, perché non bisogna mai sottovalutare quello che viene chiesto dall'esercizio, perché può essere abbastanza insidioso e anche una vera e propria trappola che serve a provare il livello della comprensione del testo del candidato.

2.2.8 Teorema del confronto

Siano $f(x), f_1(x), f_2(x)$ tre funzioni definite in $A \subseteq R$ sia x_0 un punto di accumulazione per A e $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$ se $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) = l$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

Dimostrazione

Se $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) = l$ allora per definizione di limite:

- $\exists\delta_1 : |f_1(x) - l| < \varepsilon\ \forall x \in I(x_0, \delta_1)$
- $\exists\delta_2 : |f_2(x) - l| < \varepsilon\ \forall x \in I(x_0, \delta_2)$

$$\Rightarrow l - \varepsilon < f_1(x) \le f(x) \le f_2(x) < l + \varepsilon$$

$\forall x \in I(x_0, \delta_2), \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

Casi particolari di $\lim_{x\to x_0} f(x) * g(x)$

Teorema Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = x$; $|g(x)| \le M$ per $x \in I(x_0, \delta) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) * g(x) = 0$

Esempio $\lim_{x\to x_0} x * \sin\frac{1}{x} = 0$

2.2.9 Limite di `funzione composta`

Siano $g : A \to B : B \to R : \lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$ e $\lim_{y\to y_0} f(y) = l$ con $l = f(y_0)$ (*se f è continua*)
$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = l}$

2.2.10 Limiti Notevoli

- $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$
- $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{\tan(x)}{x} = 1}$
- $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{1}{2}}$
- $\boxed{\lim_{x\to x_0} (1 + \frac{1)}{x}) = e}$
- $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = log_a e}$
- $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{a^x-1}{x} = \log_e a}$

Esempi

1. $\lim_{x\to x_0^+} xe^x + e^{-\frac{1}{x}} = 0$
2. $\lim_{x\to x_0^-} xe^x + e^{-\frac{1}{x}} = \infty$
3. $\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to x_0} \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$
4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} + \arctan x = \frac{\pi}{2}$

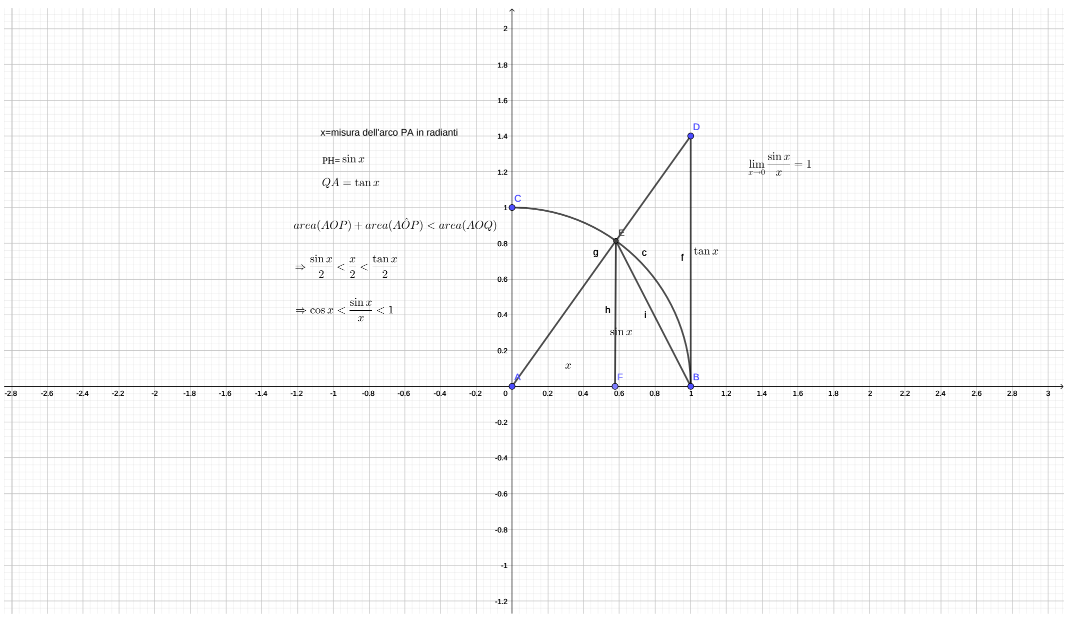


Figura 2.29: Esempio di limite notevole di una funzione

2.2.11 Infinitesimi e infiniti

Definizione Una funzione $f(x)$ su dice <u>infinitesima</u> per $x \to x_0$ (per $x \to \infty$), x_0 punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, se: $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ (oppure $lim_{x\to\infty} f(x) = 0$).

Esempi

- $y = e^x$ è un infinitesimo per $x \to -\infty$
- $y = \ln x$ è un infinitesimo per $x \to 1$
- $y = \sin x$ è un infinitesimo per $x \to 0$ (ma anche per $x \to \pi, 2\pi$, etc.)
- $y = \ln 1 + x$ è un infinitesimo per $x \to 1$

Ordine di infinitesimo

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesimi per $x \to x_0$ (o per $x \to \infty$), con $g(x) \neq 0$. Se $\exists \alpha R+$ e $l \in R$, $l \neq 0$ tale che $\lim_{x \to x_0} = \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$ (oppure $\lim_{x \to \infty} = \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$)
Allora, si dice che per $x \to x_0$ (o per $x \to \infty$), $f(x)$ è un infinitesimo di ordine α rispetto all'infinitesimo campione $g(x)$.

Esempi

- $y = \sin x$ è un infinitesimo per $x \to 0$ di ordine 1 rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$, infatti, $\lim_{x \to 0} = \frac{\sin x}{x^\alpha} = 1$ solo se $\alpha = 1$
- $y = \tan^2 x$ è un infinitesimo di ordine 2 rispetto ad x, per $x \to 0$
- $ord(l - \cos x) = 2$ rispetto ad x per $x \to 0$

Confronto tra infinitesimi

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesime per $x \to x_0$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \neq 0 & ord(f) = ord(g) \\ \pm\infty & ord(f) < ord(g) \\ 0 & ord(f) > ord(g) \\ \text{non esiste,} & \text{f e g non confrontabile} \end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesime per $x \to \infty$. Utilizzando il confronto tra infinitesimi nel calcolo dei limiti del tipo $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2}$, dove f_1, f_2, g_1, g_2 sono funzioni infinitesime per $x \to x_0$, si possono *trascurare gli infinitesimi di ordine maggiore* (analogo discorso per funzioni infinitesime $x \to \infty$).

esempio $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x^3 + 2\tan x}{(e^x - 1)^2 + \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\tan x}{\sin x} = 2$

Definizione di funzioni asintotiche Si dice che due funzioni f, g sono asintotiche per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e si scrive $f \sim g$ per $x \to x_0$

esempi

- $\sin x \sim x$ per $x \to 0$
- $\ln(1 + x) \sim x$ per $x \to 0$
- $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$

Definizione di funzioni infinite Una funzione $f(x)$ si dice *infinita* per $x \to x_0$ (o per $x \to \infty$) , x_0 punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, (o per $x \to \infty$) se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \text{ (oppure } \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty)$$

Esempi

- $y = e^x$ è un infinito per $x \to +\infty$
- $y = \ln x$ è un infinito per $x \to 0^+$
- $y = x^2 + x$ è un infinito per $x \to \infty$

Regole aritmetiche Siano $f(x) = o(x^\alpha)$ (si legge «o piccolo di») e $g(x) = o(x^\beta)$ due funzioni *infinitesime* rispettivamente di ordine α e β per $x \to 0$ Allora si ha

- $cf(x))o(x^\alpha)$, $\forall c \in R$
- $x^\lambda f(x) = o(x^{\lambda+\alpha})$
- $f(x)g(x) = o(x^{\alpha+\beta})$
- $f(x) + g(x) = o(x^y)$, $\gamma = min(\alpha, \beta)$

Ordine di infinito Siamo $f(x)$ e $g(x)$ infiniti per $x \to x_0$ (o per x), con $g \neq 0$. Se $\exists \alpha \in R+$ e $l \in R$, $l \neq 0$ tale che
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^2} = l$ (o $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$)
Allora, per $x \to x_0$ (o per $x \to \infty$), $f(x)$ è un infinito di ordine α rispetto all'infinito compone $g(x)$.

Esempi

- $ord(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}$ rispetto ad x per $x \to +\infty$
- $ord(\frac{1}{\sin x}) = 1$ rispetto ad $\frac{1}{x}$ per $x \to 0$
- $ord(\frac{1}{e^x-1}) = 1$ rispetto ad $\frac{1}{x}$ per $x \to 0$

Cofronto tra infiniti Siamo $f(x)$ e $g(x)$ infiniti per $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \neq 0 & ord(f) = ord(g) \\ \pm\infty & ord(f) > ord(g) \\ 0 & ord(f) < ord(g) \\ \text{non esiste,} & \text{f e g non confrontabile} \end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinite per $x \to \infty$. Utilizzando il confronto tra infiniti nel calcolo dei limiti del tipo $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}$, deve f_1, f_2, g_1, g_2 sono funzioni infinite per $x \to x_0$, si possono trascurare gli infiniti di ordine minore (analogo discorso per funzione infinito $x \to \infty$).

Esempio $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x^3+3\sqrt{x}}{x^2(2x-1)+\sqrt{3x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$.

Gerarchia degli infiniti Per $x \to +\infty$ si ha $(\log_\alpha x)^\alpha << x^\beta << b^x$, con $\alpha, \beta > 0, a, b > 1$ Non sempre è possibile calcolare l'ordine di infinito (o di infinitesimo) rispetto alla funzione campione usuale.

Esempio $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^a} = +\infty, \forall\alpha > 0, a > 1$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^a} = +\infty, \forall\alpha, \beta > 0, a > 1$

Regole aritmetiche Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni *infinite* di ordine rispettivamente α e β. Allora si ha

- $ord(f(x) + g(x)) = \max \alpha, \beta$
- $ord(f(x) * g(x)) = \alpha + \beta$
- $ord((f(x))^\gamma) = \alpha\gamma$

2.2.12 Funzioni continue

Una funzione continua è una funzione che, intuitivamente, fa corrispondere ad elementi sufficientemente vicini del dominio elementi arbitrariamente vicini del codominio.

Definizione Una funzione $f(x)$ è continua in x_0, se: $l_1 = \lim_{x\to x_0^+} = \lim_{x\to x_0} f(x) = l_2 = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ossia $\forall \in> 0 \exists \delta_{\mathcal{E}} > 0$: $|f(x) - f(x_0)| < \mathcal{E}\ \forall_x \in I(x_0, \delta_{\mathcal{E}})\ (l = f(x_0))$

Teorema della permanenza del segno

Sia f(x) definita almeno in un intorno di x_0 e continua in x_0. Se $f(x_0) > 0$ allora $\exists \delta > 0 : f(x) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Teorema degli zeri

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ $f(a) * f(b) < 0$ allora $\exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$. Se f è anche strettamente monotona, lo zero è unico.

Teorema dell'esistenza dei valori intermedi (*conseguenza del teorema degli zeri*) Una funzione $f(x)$ continue in $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$.

Teorema di Wierstrass (sul massimo e il minimo)

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume massimo e il minimo assoluto in $[a, b]$, cioé $\exists x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) \leq f$

2.2.13 Criteri di invertibilità

Una funzione continua e strettamente monotona in [a,b] è invertibile in tale intervallo. Dimostrazione.

2.3 Calcolo differenziale per funzioni di una variabile

Sia f: $(a, b) \to R$, si definisce derivata di f nel punto $x_0 \in (a, b)$ il numero, se $\exists$ finito:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$f'(x_0), y'(x_0), \frac{df}{dx}|_{x_0}, \frac{dy}{dx}|_{x_0}, Df(x_0), Dy(x_0)$$

2.3.1 Derivata di una funzione

Significato geometrico della derivata in un punto e equazione della retta tangente Sia $x_0 \in (a, b) : x_0 + h \in (a, b)$
Si definisce Rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h} = \tan \beta$
Sia β l'angolo che la retta r forma con l'asse delle x, considerando il triangolo ABC possiamo scrivere $f(x + h) - f(x_0) = \tan \beta [x_0 + h - x_0]$ Ossia: $\tan \beta = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ Ma $m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ È il coefficiente angolare della retta f passante per AB
Per cui $\tan \beta = m$ Ossia $\tan \beta$ è il coefficiente angolare della retta secante per AB
Quando $h \to 0$ in punto B si sposta sulla curva avvicinandosi ad A, la retta r diventa tangente alla curva in A e si ha: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \tan \alpha$ coefficiente angolare di t Equazione della retta tangente dal grafico di *f(x)* nel punto di ascissa x_0: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ Infatti, tra tutte le rette del fascio proprio passanti $A(x_0, f(x_0)) dieq.\ y - f(x_0) = m(x - x_0)$ per $m = f'(x_0)$ si ottiene l'equazione di t.
Se $f'(x)$ è definita $\forall x \in (a, b)$ allora f(x) è derivabile in (a,b) e risulta definita la funzione $f' : (a, b) \to R$ detta derivata prima di $f(x)$
f(x) è derivabile in [a,b], se è derivabile $\forall x \in (a, b)$ *e ammette derivata destra in x=a (si scrive* $f'_+(a)$*) e derivata sinistra in* $x = b$ *(si scrive* $f'_-(b)$*)*

2.3.2 Definizione

- Derivata destra $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$
- Derivata sinistra $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$

Se $f'_+(x) = f'_-(x)$ f *è derivabile in* x

2.3.3 Continuità e derivabilità

Teorema

Sia $f : (a, b) \to R$. *Se* f *è derivabile in* $x_0 \in (a, b)$ *allora* f *è continua in* $x_0, x + h \in (a, b)$*:* $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} * h = 0$. Da cui $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ che è la continuità di f in x_0.
Quindi *derivabilità* $\Rightarrow$ *continuità* Occhio non è vero il contrario perché non per forza una funzione continua è derivabile.

Esempio $y = |x|$ è continua ma non è derivabile in $x = 0$. Infatti,
$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ e $y' = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

2.4 Punti di non derivabilità

2.4.1 Punto angoloso

Se $f'_+(x) \neq f'_-(x)$ e almeno un $\exists$ finita x_0 si dice punto angoloso, in quanto le rette tangenti alla f(x) nel punto di ascissa x_0 formano un angolo.

Esempio

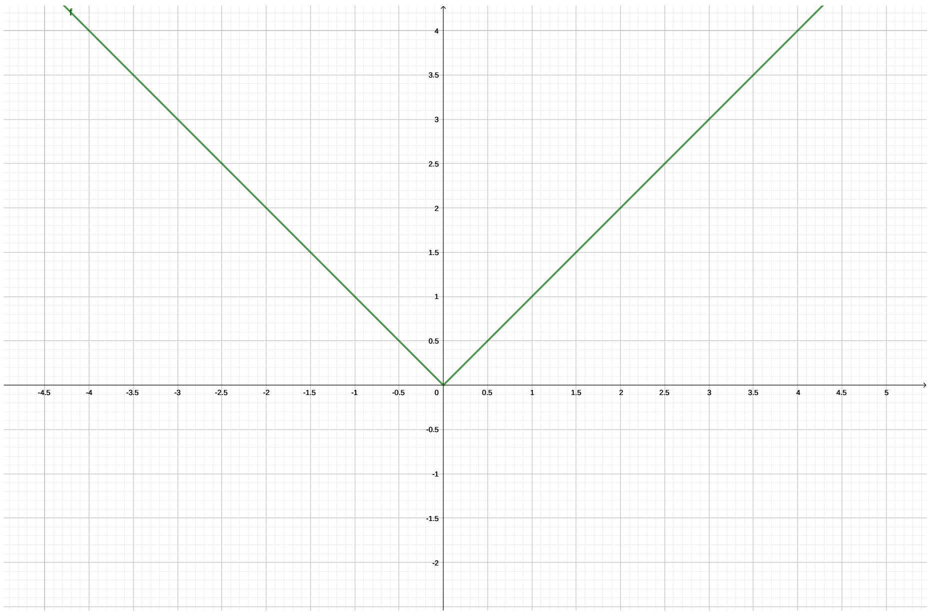


Figura 2.30: Grafico di Funzione valore assoluto $y = |x|$ e quindi $f'_+(0) = 1 \neq f'_+ = -1$

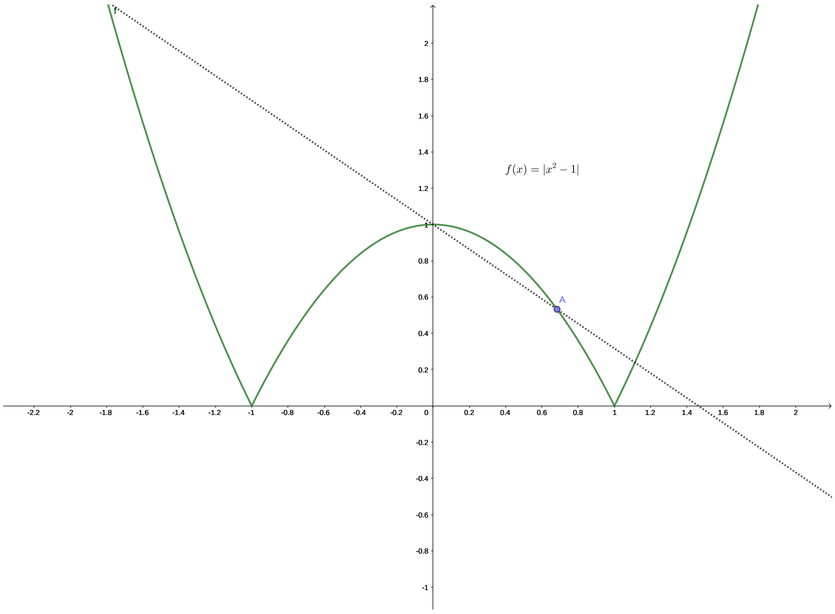


Figura 2.31: Grafico di Funzione $x = |x^2 - 1|$

Un altro esempio

2.4.2 Punto cuspude

Se $f'_+(x) \neq f'_-(x)$ sono ∞, x_0 si dece punto cuspide; la retta tangente alla *f(x)* nel punto di ascissa x_0 è verticale.

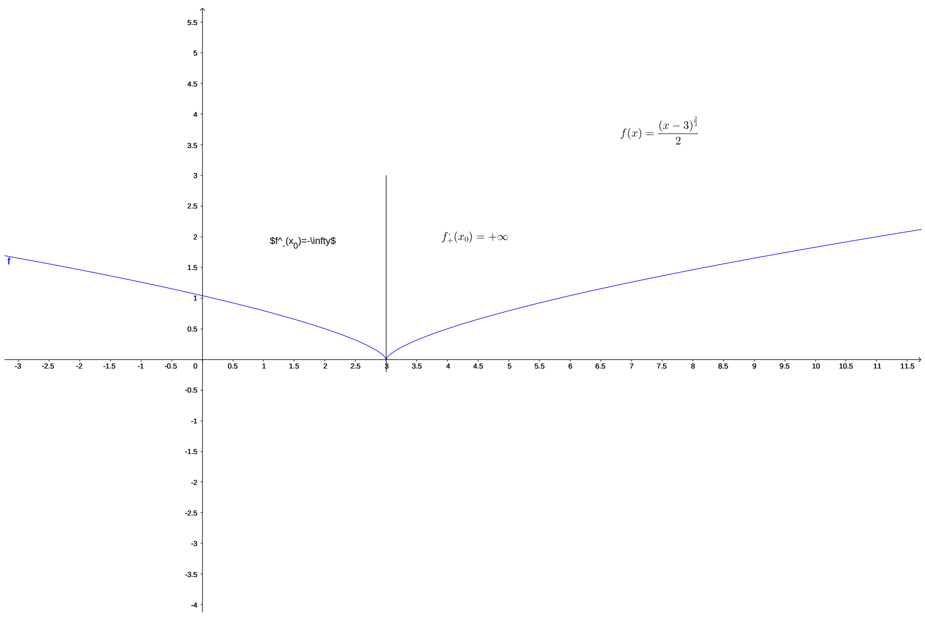


Figura 2.32: Grafico di Funzione $f(x) = \frac{(x-3)^{\frac{2}{3}}}{2}$

Punto di flesso a tangente verticale

Se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = \pm\infty$ sono ∞, x_0 si dice punto di flesso a tangente verticale; la retta tangente alla $f(x)$ nel punto di ascissa x_0 è verticale.

2.4.3 Esempi di derivate

- $D(x^n) = n * x^{n-1}$
- $D(\log_a x = \frac{1}{x} \log_a e)$
- $D(a^x) = a^x \ln a$
- $D(\sin x) = \cos x$
- $D(\cos x) = -\sin x$
- $D(k) = 0$
- $D(\ln x) = \frac{1}{x}$
- $D(e^x) = e^x$
- $D(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$

Qualche esercizio dimostrativo

Utilizzando la definizione calcolare la derivata di

1. $f(x) = k$
   $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = 0$
2. $f(x) = e^x$
   $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x$
3. $f(x) = \ln x$
   $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)\ln x}{h} = \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h} = \frac{1}{x}$
4. $f(x) = \cos x$
   $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x * \cos h - \sin x * \sin h - \cos(x)}{h} =$
   $\lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h-1)}{h} - \frac{\sin x \sin h}{h} = -\sin x$
5. $f(x) = \sin x$
   $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h-1)}{h} +$
   $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h \cos x}{h} = \cos x$

Se f e g sono derivabile in x, allora sono derivabili in x anche la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente (con il denominatore$\neq 0$) e si ha:

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2. $(f * g)' = f' * g + f * g'$
3. $(\frac{f}{g})' = \frac{f' * g - f * g'}{g^2}, g \neq 0$

- *Dimostriamo la 2)* $(f * g)' = f' * g + f * g'$
  $(f * g)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) \pm f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$
  $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)[f(x+h)-f(x)]}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}$
  Per ipotesi f e g sono derivabile, quindi continue in x, perciò:
  $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$,

  $$(f * g)' = ... = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

- *Dimostriamo la 3)*
  $(\frac{f}{g})' = \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)*h} = \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h) \pm f(x)g(x)}{g(x+h)g(x)*h}$
  $\frac{[f(x+h)-f(x)]g(x)-f(x)[g(x+h)-g(x)]}{g(x+h)g(x)*h} = \frac{\frac{[f(x+h)-f(x)]g(x)}{h} - \frac{f(x)[g(x+h)-g(x)]}{h}}{g(x+h)g(x)*h} =$
  $\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x+h)g(x)*h} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2*h}$

Esercizio

- *Calcolare la derivata di* $f(x) = \sin x \ln x$
  $f'(x) = \cos x \ln x + \frac{sinx}{x}$
- *Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di eq* $f(x) = 2e^x \sqrt[3]{x}$ *nel punto di ascissa x=1*
  $f'(x) = 2e^x \sqrt[3]{x} + 2\frac{e^x}{3\sqrt[3]{x^2}}$

2.4.4 Teorema di derivazione della funzione composta

Sia g(x) una funzione derivabile in x, e se f(x) è una funzione derivabile nel punto g(x), allora la funzione composta f(g(x)) è derivabile in x, e si ha:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) * g'(x)$$

Dimostrazione. Se $h \neq 0$ si ha $\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} * \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(g(x)) * g'(x)$ *in quanto se* $h \to 0$ *allora* $k \to 0$ *con* $k = g(x+h) - g(x)$*, essendo g(x) continua in x. Se h=0, il teorema continua a valere.*

Esercizio

1. Calcolare la derivata di $f(x) = \ln(\sin x)$.
   $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$
2. Calcolare la derivata di $f(x) = e^{\sqrt{2x^3+x}}$.
   $f'(x) = e^{\sqrt{x^3+x}} \frac{6x^2+1}{2\sqrt{2x^3+x}}$
3. Calcolare la derivata di $f(x) = \sin(\ln x)$
   $f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$

Scrivere l'equazione della retta alla curva di equazione $f(x) = (xe^{2x} - 1)^3$ nel punto di ascissa x=0, L'eq.
Retta tangente a $f(x)$ in $x = x_0 : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Per noi $x_0 = 0$
$f'(x) = 3(xe^{2x} - 1)^2(e^{3x} + xe^{2x}) \Rightarrow f'(0) = 3$
$f(0) = -1$
Quindi l'equazione è: $y = 3x - 1$

2.4.5 Teorema di derivazione della funzione inversa

Sia f(x) una funzione continua e strettamente monotona in [a,b]. Se f è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ *e se allora anche la funzione inversa di* f^{-1} *è derivabile nel punto* $y_0 = f(x_0)$*, e la derivata vale:*

$$[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Dimostrazione. Si ha $\frac{f^{-1}(y_0+k)-f^{-1}(y_0))}{k} = \frac{h}{f(x_0+h)-f(x_0}$ Se $k \to 0$ anche $h \to 0$ in quanto f' è continua

2.4.6 Esercizio

Utilizzando il teorema di derivazione della funzione inversa, dimostrare che:

$$D[\arcsin(y)] = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$x = \arcsin(y)$ è la funzione inversa di $y = \sin(x)$ quest'ultima è invertibile per $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Applichiamo il teorema della funzione inversa, $f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$

$\boxed{[\arcsin(y)]' = \frac{1}{[\sin(x)]'} = \frac{1}{\cos(x)}}$

Ma sappiamo che: $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

$\boxed{[\arcsin(y)]' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$

2.4.7 Esercizio

Calcolare la derivata della funzione $y = e^x$ vista come funzione inversa di $f(x) = \ln x$. Per $x > 0$, si ha $x = f^{-1}(y) = e^y$ $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ Perciò, per il teorema della derivata della funzione inversa si ha $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (e^y)' = x = e^y$. Quindi $(e^x)' = e^x$

2.4.8 Esercizio

Utilizzando il teorema di derivazione della funzione inversa, dimostrare che $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Sia $f(x) = \tan x$, in $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ si ha $x = f^{-1}(x) = \arctan y$
$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x$. Perciò, per il teorema della derivata della funzione inversa si ha $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (\arctan y)' = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$

2.5 Massimo e minimo assoluto

Sia $f : [a, b] \to R$, si dice M è `massimo assoluto` (o globale) di f in $[a, b]$ e $x_0 \in [a, b]$ è un punto di massimo se

$$f(x_0) = M \geq f(x), \forall x \in [a, b]$$

in modo analogo: Si dice che m è un `minimo assoluto` (o globale) di f in $[a, b]$ e $x_1 \in [a, b]$ è punto di minimo se

$$f(x_1) = M \leq f(x), \forall x \in [a, b]$$

2.6 Massimo e minimo relativo (o estremi locali)

Sia $f : [a, b] \to R$, si dice che $x_0 \in [a, b]$ è un punto di `massimo relativo` (o locale) per $f(x)$ se $\exists I(x_0, \delta)$:

$$f(x_0) \geq f(x), \forall x \in I(x_0, \delta)$$

In modo analogo: si dice che $x_0 \in [a, b]$ è un punto di `minimo relativo` (o locale) per $f(x)$ se $\exists I(x_0, \delta)$:

$$f(x_0) \leq f(x), \forall x \in I(x_0, \delta)$$

2.6.1 Punti Stazionari

I punti in cui f(x) ha derivata nulla ($f' = 0$) Si dice punti stazionari o critici.

2.7 Teorema di Fermat

Sia $f(x)$ definita in [a,b] e derivabile in $x_0 \in (a, b)$. Se x_0 è un punto di estremo locale allora

$$f'(x_0) = 0$$

Dimostrazione Sia x_0 un punto di massimo relativo, cioè $\exists I(x_0, \delta)$: $f(x_0) \leq f(x_0 + h), \forall h : |h| < \delta$ si ha: $\frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } 0 < h < \delta \\ \geq 0 & \text{se } -\delta < h < 0 \end{cases}$ e

- $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+ \leq 0$
- $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_- \geq 0$

Ma essendo $f(x)$ derivabile in x_0:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f' = 0$$

Se $x_0 = a$ allora $0 < h < \delta$ e se x_0 è un punto di `massimo relativo` si ha $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(x)}{h} = f'(a) \leq 0$. Mentre, se parliamo del `minimo relativo` in $x_0 = a$: $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(x)}{h} = f'(a) \leq 0$ In modo analogo: se $x_0 = b$ è punto di `massimo relativo` (con $-\delta < h < 0$) allora $f'(b) \geq 0$, se invece $x_0 = b$ è un punto di `minimo relativo`, allora $f'(b) \leq 0$

2.8 Teorema di Rolle

Sia $f : [a, b] \to R$.

1. *f è continua in* $[a, b]$,
2. *f è derivabile in* $(a, b)_{f(a)=f(b)}$
3. $f(a) = f(b)$

Allora $\exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$ Per il Teorema di Rolle esistono almeno un punto a tangente orizzontale.

2.8.1 Dimostrazione

Per il Teorema di Weiestrass, f ha massimo e minimo assoluti in $[a, b]$ $(x_1, x_2 \in [a, b])$:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Se uno dei due è interno ad $[a, b]$, per esempio x_1 allora per il Teorema di Fermat $f'(x_1) = 0$. Se invece nessuno dei due è interno ad $[a, b]$ per esempio $x_1 = a$, $x_2 = b$. Dall'ipotesi $f(a) = f(b)$ si ottiene minimo=massimo, cioè $f(x)$ è costante $\forall x \in [a, b]$ e quindi $f'(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$.

2.8.2 Esercizio dimostrativo

Testo

Dire se la funzione $f(x) = e^{x^2-1}$ soddisfa il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, 1]$ e in caso affermativo calcolare il punto (o i punto del Teorema.)

Soluzione

Sono verificate tutte le ipotesi del teorema di Rolle, infatti:

1. $f(x) = e^{x^2-1}$ è continua in tutte R e quindi anche in $[-1, 1]$
2. f(x) è derivabile in tutto R, quindi anche in (-1,1),
3. $f(-1) = f(1)$

Allora $\forall x_0 \in (-1, 1) : f'(x_0) = 0$
x_0 Si ricava facendo il calcolo: $f'(x_0) = 0$, cioè $2xe^{x^2-1} = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

2.8.3 Esercizio dimostrativo

Testo

Dire se la funzione $f(x) = \ln|x|$ soddisfa il teorema di Rolle nell'intervallo [-e,e].

Soluzione

Il teorema di Rolle non è applicabile perché $f(x) = \ln|x|$ non è definita in $x = 0$, quindi non è né continua né definita in $x = 0$ e perciò non soddisfa tutte le ipotesi del teorema.

2.9 Teorema di Lagrange (*o del valor medio*)

Sia $f : [a, b] \to R$.

1. *f è continua in $[a, b]$,*
2. *f è derivabile in (a, b),*

Allora $\forall x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
*Per il Teorema di Lagrange $\exists$ almeno un punto $(x_0, f(x_0))$ sul grafico di f(x) in cui la retta tangente **t** è parallela alla retta **r** secante la curva in $(a, f(a))$ e $b, f(b)$.*

2.9.1 Dimostrazione

Si considera la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - [\overbrace{f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}^{\text{equazione di r}}]$$

Per g(x) vale il Teorema di Rolle, infatti:

1. *g(x) è continua in $[a, b]$ perché lo è f(x) (l'altro pezzo è lineare)*;
2. *g(x) è derivabile in (a, b) perché f(x) (l'altro pezzo è lineare)*;
3. $g(a) = g(b) = 0$.

- $\Rightarrow x_0 : g'(x) = 0$
- $g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$
- $\Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

2.9.2 Esempio

$f(x) = x^2$ in $[a, b]$, per il Teorema di Lagrange $\forall x_0 \in [a, b]$:

$$\frac{b^2-a^2}{b-a} = 2x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{b+a}{2} \text{ Media aritmetica di a e b}$$

2.9.3 Esercizio dimostrativo

Testo

Dire se è applicabile in Teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \arcsin x$ nell'intervallo $[-1, 1]$ e in caso affermativo calcolare i punti teorema.

Soluzione

La funzione data soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Lagrange, infatti:

1. f è continua in [-1,1] (è il suo campo di esistenza),
2. f è derivabile in (-1,1)
   Allora $\forall x_0 \in (-1.1) : f'(x_0) = \frac{f(1)-f(-1)}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_0 = \pm\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{\pi}$

2.9.4 Esercizio dimostrativo

Testo

Determinare un intervallo in cui è applicabile il Teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = |x - \frac{1}{x}|$.

Soluzione

1. La funzione data è contenuta nel suo campo di esistenza cioè nell'insieme: $A = \{x \in R : x \neg 0\}$
2. f è derivabile nell'insieme $B = \{x \in R : x \neq 0, \pm 1\}$ con derivata: $f'(x) = |\frac{x^2-1}{x}| \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}$

Perciò un intervallo in cui f soddisfa il teorema di Lagrange, è un qualunque intervallo $[a, b]$ che contiene $x = 0$ e tale che punti $x = -1$ non siano interni ad esso (potrebbero stare agli estremi)
Per esempio: $[1, 2]$ (f è continua in [1,2] e derivabile in (1,2), da notare che è derivabile anche in $x = 2$ ma non serve...) oppure $[-4, -3]$. etc...

1. Criterio di monotonia
   Sia $f(x) : [a, b] \to R$, continue in $[a, b]$, è derivabile in (a, b). Allora:
   - f è crescente in $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$;
   - f è crescente in $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \forall x \in [a, b]$.

   Dimostrazione Sia $f'(x) \geq 0$ e siano $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_2 > x_1$.
   Per il Teorema di Lagrange $\forall x_0 \in (x_1, x_2)$:
   $$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$
   ma $f'(x_0) \geq 0$ e $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

   Viceversa Sia $f(x)$ crescente in $[a, b]$.
   Allora $\forall x, x + h \in (a, b)$, si ha $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$
   Facendo il limite per $h \to 0$ si ha
   $$f'(x) \geq 0$$
   Analoga dimostrazione per
   $$\text{f è decrescente in}[a, b] \Leftrightarrow f' \leq 0 \forall x \in [a, b] \tag{2.5}$$
   Analoga dimostrazione per f è decrescente in $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \forall x \in [a, b]$
   Si ha inoltre
   - $f'(x) > 0 \Rightarrow$ strettamente crescente
   - $f'(x) < 0 \Rightarrow$ strettamente decrescente
2. Sia $f(x) : [a, b] \to R$, derivabile in (a,b).
   $$\text{f è costante} \Leftrightarrow f'(x) = 0 \forall x \in (a, b) \tag{2.6}$$
3. Sia $x_0 \in (a, b)$ e $f'(x_0) = 0$
   Se esiste un intorno destro (sinistro), in cui $f'(x) > 0$ e un intorno sinistro (destro) in cui $f'(x) < 0$, allora x_0 è un punto di minimo (massimo) relativo.

2.10 Teorema di Cauchy

Siamo $f, g : [a, b] \to R$:

1. *f e g sono continue in* $[a, b]$
2. *f e g sono derivabili in* (a, b).

Allora se $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b), \exists x_0 \in (a, b)$: $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

2.10.1 Dimostrazione

Si consideri la funzione ausiliaria

$$\varphi(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} - (g(b) - g(a))]$$

Essendo $g' \neq 0, \forall x \in (a, b)$, allora $g(b) \neq g(a)$. Inoltre

1. $\varphi(x)$ è continua in $[a, b]$;

2. $\varphi(x)$ è derivabile in (a, b);

3. $\varphi(a) = \varphi(b)$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : \varphi'(x_0) = 0$$

Cioè

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

2.11 Teorema di de l'Hopital

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ oppure $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$
Se esiste il limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ finito e limitato. Allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
`Il teorema è valido anche per` $x \to x_0^+$ `o` $x \to x_0^-$ `e per` $x \to \pm\infty$ `(f e g derivabili in intervalli illimitati)`

2.12 Funzioni convesse e concave

2.12.1 Definizione di funziona convessa

Sia $f(x) : [a, b] \to R$, si chiama epigrafico (*o sopragrafico*) di f l'insieme

$$epi f := \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b] \text{ e } y \leq f(x)\}$$

f è convessa in $[a, b]$ se il suo epigrafico è un insieme convesso

Analogamenente: *f è concava in $[a, b]$ se il suo epigrafico è un insieme concavo*
Sia $f(x)$ derivabile in $[a, b]$, f *è convesse in* $[a, b] \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x, x_0 \in [a, b]$

Cioè $\forall x_0$ il grafico di f sta al di sopra della retta tangente ad $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$

2.12.2 Definizione di funziona concave

Sia $f(x)$ derivabile in $[a, b]$, f *è concava in* $[a, b] \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x, x_0 \in [a, b]$

Cioè $\forall x_0$ il grafico di f sta al di sopra della retta tangente ad $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$

2.12.3 Derivata seconda

La derivata seconda di una funzione $f(x)$ rappresenta la velocità di variazione della pendenza del grafico di $f(x)$.

$$f''(0) = \frac{1}{R} \textit{ Curvatura del grafico di } f(x) \textit{ in } x=0$$

2.12.4 Criterio di convessità

Sia $f : [a, b] \to R$,

1. Se f è derivabile in (a, b) allora

$$\text{f è convessa (concava)} \Rightarrow f'(x) \text{ è crescente (decrescente)}$$

2. Se f è derivabile due volte in (a, b) allora

$$\text{f è convessa (concava)} \Rightarrow f''(x) \leq 0 (f''(x) \geq 0), \forall x \in (a, b)$$

Utilizzando il segno di $f''(x)$ si può stabilire se x_0 è un punto di massimo i un punto di minimo relativo per $f(x)$.
Sia $f(x)$ derivabile due volte con derivata continua in un intorno di $x_0 \in (a, b)$:

- se $f'(x_0) = 0, f''(x) > 0 \Rightarrow x_0$ è punto di minimo relativo;
- se $f'(x_0) = 0, f''(x) < 0 \Rightarrow x_0$ è punto di massimo relativo.

Infatti, supponiamo che $f'(x_0) = 0, f''(x) > 0$ con f'' continua. Per il Teorema della permanenza del segno: $f''(x) > 0$ in $I(x_0, \delta) \Rightarrow$ è convessa in I:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ma $f'(x_0), \Rightarrow f(x) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0), \forall x, x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ cioè x_0 è di minimo relativo per f.

2.12.5 Criterio per i punti di massimo e di minimo relativo

Sia $f : (a, b) \to R$, derivabile n volte in $x_0 \in (a, b), n \geq 2$, tale che in x_0 tutte le derivate tranne l'n-esime siano nulle. Allora:

$$\text{se n pari è} \begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 & x_0 \text{ è di minimo relativo} \\ f^{(n)}(x_0) < 0 & x_0 \text{ è di massimo relativo} \end{cases}$$

Se n è dispari x_0 non è punto di estremo (<u>si dice flesso a tangente orizzontale</u>).

Definizione

Sia $f : (a, b) \to R$ e $x_0 \in (a, b)$ un punto di derivabilità per $f(x)$ oppure $f'(x_0) = \pm\infty$. x_0 *si dice di flesso se esiste un intorno destro di x_0 in cui f è convessa (concava) ed un intorno sinistro in cui f è concava (convessa).*
Se x_0 è di flesso per f, ed esiste $f''(x_0)$, allora $f''(x_0) = 0$

2.13 Punti per lo svolgimento dello studio di funzione

Per svolgere correttamente lo studio di funzione, bisogna suddividere il tutto in punti per svolgere correttamente lo studio in modo ordinato ed efficiente. Se effettivamente.

1. Determinazione del Campo di esistenza;
2. Determinazione del tipo di funzione;
3. Intersezione con gli assi;
4. Valori agli estremi del campo di esistenza;
5. Positività e negatività;

6. Determinazione degli asintoti;
7. Determinazione della derivata prima;
8. Crescenza e decrescenza;
9. Determinazione dei Massimi e minimi;
10. Determinazione della derivata seconda;
11. Determinazione della concavità, convessità e flessi;
12. Determinazione di eventuali ulteriori punti appartenenti alla funzione;
13. Grafico della funzione;
14. Qualche esempio di studio completo di funzione.

2.13.1 Studio del grafico di f(x), Asintoti

Se esiste una retta di equazione $y = mx + q$:

$$\lim_{x\to\infty} \{f(x) - (mx + q)\} = 0$$

Allora $y = mx + q$ si definisce asintoto obliquo per f(x). Si ha

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}; q = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx$$

Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = l, y = l$ si chiama asintoto orizzontale. Se l'asintoto orizzontale non c'è (il limite sopra è infinito) allora potrebbe esserci quello obliquo. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, x = x_0$ si chiama asintoto verticale con x_0 punto di accumulazione per f.

2.14 Approssimazione di funzioni con polinomi

2.14.1 Polinomio di Taylor

Data una funzione f derivabile n volte in x_0, esiste uno e un solo polinomio

$$T_n(x_0) = f(x_0), T_n'(x_0) = f'(x_0), \ldots, T^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \tag{2.7}$$

Tale polinomio si chiama polinomio di Taylor ed è

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f''(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{2.8}$$

Polinomio di centro x_0 e grado n

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(b)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!}(x - x_0)^k \tag{2.9}$$

Se $x_0 = 0 T_n(x)$ è detto polinomio di Mac Laurin di grado n. $R_n(x) =$ errore che si commette quando si approssima $f(x)$ con $T_n(x)$:
Si ha: $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$

- $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0$, Formula di Peano

$$\text{cioè } \lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

- *Se f è derivabile $n+1$ volte in (a,b) ecluso al più x_0,*
  $\forall x \in (a,b), \exists c$ compreso tra x e x_0:
  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ Formula di Lagrange

Esempio.

$$y = \sin x \text{ in } x = 0,\ T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ solo potenze dispari}$$

- $T_1(x) = x$
- $T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$
- $T_5(x) = x\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

$$\text{Analogamente in } x = 0,\ \text{si ottiene}$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - \ldots \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1}(x)$$

2.15 Calcolo integrale per funzioni di una variabile

2.15.1 Integrale definito

Sia $f : [a,b] \to R$, limitata Costruiamo la somma di Cauchy-Riemann

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) * (x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)$$

Dove la suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ è individuata dai punti $a = x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n = b, x_j = a + jh, h = \frac{b-a}{n}$

2.15.2 Integrale definito

la scelta dei punti ξ_j è arbitraria. All'aumentare dei punti della suddivisione di $[a,b]$ aumenta il numero degli addendi della somma di Couchy-Riemann e diminuisce il valore assoluto di tali addendi.

Definizione Si dice che una funzione $f : [a,b] \to R$, limitata, è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$, se detta S_n una sua qualsiasi successione di Couchy-Riemann, esiste finito in limite di S_n (per $n \to \infty$), e tale limite non dipende dalla scelta dei punti ξ_j. Allora si pone:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^h = f(x)dx$$

Si legge «Integrale da a a b in dx» $f(x)$ si chiama funzione integrale e x è la variabile d'integrazione ed è una variabile muta:

$$\int_a^b f(t)dt \text{ ha lo stesso significato di } \int_a^b f(t)dt$$

Variabile muta - è una variabile che la si può nominare come meglio si crede, perché tanto il risultato è identico e quindi non ci sono vincoli nominativi.

2.15.3 Integrale definito, interpretazione geometrica

$$\int_a^b f(x)dx, \int_I f(x)dx, \int_a^b f$$

$I = [a, b]$ è dominio di integrazione, a e b sono gli estremi di integrazione.
Se $f(x)$ è positiva allora $\int_a^b f(x)dx$ rappresenta l'aria del «sottografico» di f(x). Infatti la somma S_n un'approssimazione dell'area del «trapezoide T» individuato da f:

$$T : \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Se $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx =$ area di T

Se in $[a, b], f$ cambia segno allora $\int_a^b f(x)dx$ è sempre un numero ma non rappresenta più l'area del sottografico di f.
Osservazione $\int_a^b f(x)dx$ è un numero, non dipende da x. L'insieme dele funzioni integrabili secondo Riemann in $I = [a, b]$ si indica con $R(I)$ o $R([a, b])$.
R(I) non è vuoto, infatti ogni funzione costante $y = c$ è integrabile su qualunque intervallo $[a, b]$ e si ha

$$\int_a^b cdx = c(b - a)$$

Per qualunque suddivisione di $[a, b]$ si ha

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) * (x_j - x_{j-1}) = \frac{b.a}{n} \sum_{j=1}^{n} c = (b - a)c$$

2.15.4 Sviluppo e^{2x}: metodo rapido (Taylor-McLaurin)

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(x^4)$$

Quindi sostituendo la t con un'altro l'argomento di e il risultato è il seguente

$$e^{2x} = 1 + 2x^2 + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4)$$

Svolgiamo le potenze e poi semplifichiamo il numeratore e il denominatore tramite un divisore comune.

$$e^{2x} = 1 + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

2.15.5 Sviluppo di e^{x^2} con il metodo Taylor-McLaurin

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + o(x^9)$$

Visto che gli esponenti sono tutti pare e quelli dispari non sono accetti per validare $o(x^9)$ dobbiamo anche esprimere questa formula $o(x^9) = k * x^{10}$

2.15.6 Integrale definito, classi di funzioni integrali

1. Se $f : [a, b] \to R$ è continua, allora è integrabile.

2. Se $f : [a, b] \to R$ è Monotona e limitata, e allora è integrabile.

3. Se $f : [a, b] \to R$ è limitata in $[a, b]$ con un numero finito di punti di discontinuità, allora è integrabile.

Questo teorema si può estendere alle funzioni limitate con un infinità numerabile di punti di discontinuità, cioè i punti di discontinuità possono essere infiniti ma non devono essere «troppi».
La funzione di Dirichlet su [a,b]:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se x} \in Q \cap [a, b] \\ 0 & \text{se x} \in [a, b] - Q \end{cases}$$

è limitata e non è integrabile secondo Riemann (*i punti di discontinuità sono «troppo»: tutto* $[a, b]$) Infatti se si scelgono i punti ξ_j razionali si ha

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) * (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} 1 * (x - x_{j-1}) = (b - a)$$

2.15.7 Integrale definito, proprietà

Se invece si scelgono i punti ξ_j irrazionali si ha

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) * (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} 0 * (x - x_{j-1}) = 0$$

Siano f e g integrabili in $[a, b]$, *allora:*

1. Linearità dell'integrale: se α e β sono costanti la funzione $af(x) + \beta g(x)$ è integrabile e si ha

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \int_a^b \alpha f(x)dx + \int_a^b \beta g(x)dx$$

2. Addittività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione: Se $a \leq s \leq b$ allora f è integrabile anche su $[a, s]$ e $[s, b]$ e:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

3. Positività e monotonia:

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$f \geq \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$$

In particolare

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b f(x)dx$$

Per convenzione, se $a < b$ si pone $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

2.15.8 Teorema della media integrale

a) Sia f limitata e integrabile secondo Riemann in [a,b].S Allora

$$\boxed{m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M} \tag{2.10}$$

Dove $m = \inf_{[a,b]} f$ e $M = \sup_{[a,b]} f$

b) Se f è continua su $[a, b]\exists x_0 \in (a, b)$:

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(x_0)} \tag{2.11}$$

(valor medio integrale di f su [a,b])

Dimostrazione

a) Essendo $f(x)$ limitata si ha

$$m \leq f(x) \leq M$$

Integrando membro a membro su $[a, b]$:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

b) Indichiamo con y_0 il valore $y_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ che è un valore compreso tra m ed M.

Essendo f continua, per il teorema dei valori intermedi, esisterà $x_0 \in (a, b) : f(x_0) = y_0$ cioè la tesi

2.15.9 Integrale indefinito

Sia f continua in [a,b], allora la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ è di classe $c^1([a, b])$

$$F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$$

Dimostrazione

Scriviamo il rapporto incrementale di F(x):

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{x} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt\right]$$

Per il Teorema della media integrale applicato ad f in $[x, x + h], \exists x(h, x + h)$:

$$\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt\right] = f(x(h))$$

Si è ottenuto $\frac{F(x+h)-f(x)}{h} = f(x(h))$
Ed essendo f continua in $[a, b]$ si ha la tesi:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x(h)) = f(x)$$

Osservazione L'ipotesi di continuità per f è fondamentale per la derivabilità di F. Infatti, se f è solo integrabile non si può affermare che F è derivabile. Infatti se f è solo integrabile non si può affermare che F è derivabile.
Esempio

$$f(x) = segnx = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow F(x) = |x|$$

f(x) è integrabile ma non è continua, F(x) è continua ma non è derivabile in x=0.

Definizione di primitiva Una funzione F(x), derivabile in $[a, b]$, si chiama PRIMITIVA di f(x) se:

$$F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$$

Esempio - Una primitiva di $f(x) = \cos x$ è la funzione $F(x) = \sin x$.
Se $f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}$
Se $f(x)$ è una primitiva di f(x) lo è anche $F(x) + c$. Infatti $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$

Definizione *La famiglia di tutte le primitive di una funzione f(x) continua in* $[a, b]$ *è detta INTEGRALE INDEFINITO e si indica:* $\int f(x)dx$

2.15.10 Corollario del Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f (x) una funzione continua su [a,b] e G (x) una primitiva di f. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = G(x) - G(a) = [G(x)]_a^b = G(x)\Big|_a^b$$

Esempio

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b$$

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} = \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Dimostrazione

Consideriamo una funzione f(t) definita in un intervallo $[c, b]$. L'area del sottografico della funzione f con $x \in [a, b]$ è dato da:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^b f(t)dt - \int_c^a f(t)dt$$

$$\text{Ma poiché } F(x) = \int_c^x \text{ allora } F(a) = \int_c^a f(t)dt \text{ e } F(b) = \int_c^b f(t)dt$$

Per cui

$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^b f(t)dt - \int_c^a f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Questo è il legame tra l'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ e l'integrale indefinito $\int f(x)dx$.

- $\int_a^b f(x)dx$ è un numero reale

- $\int_a^b f(x)dx$ è un insieme di funzioni

2.15.11 Integrali indefiniti immediati

Esercizio

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}(-\sin x)dx = -\ln|\cos x| + c$$

- $\int \sin x \cos^2 x dx = -\int -\sin x \cos^2 x dx = \frac{\cos^3 x}{2} + c$
- $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + c$
- $\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}dx = \int \frac{1}{(1+x^2)}dx = \ln(\arctan x) + c$

Integrazione per parti

Siano f e g due funzioni derivabili con derivata continua, si ha

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

f(x)=fattore finito
$g'(x)dx$ =fattore differenziale
L'ipotesi che le derivate di f e g siano continue assicura che gli integrali siano ben definiti.

2.15.12 Integrale indefinito, proprietà

Dalle proprietà delle derivate si ottiene:

I

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

II

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, c = costante$$

2.15.13 Integrale indefinito

Integrali indefiniti immediati

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + x\alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c\alpha = 1$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$$

2.15.14 Integrazione per sostituzione

Sia F una primitiva di f in un intervallo I, ossia

$$F'(t) = f(t)\forall t \in I$$

Sia $t = g(x)$ una funzione derivabile con derivata continua in $[a, b] : g([a, b]) \subset I$ del teorema della derivata di una funzione composta

$$D[F(g(x))] = F'(g(x)) + g'(x) = f(g(x)) * g'(x)$$

Integrando otteniamo

$$\int D[F(g(x))] = \int f(g(x)) * g'(x)dx$$

Ovvero

$$\int f(g(x)) * g'(x)dx = F(g(x)) + c$$

Esercizio

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}(-sinx)dx = -\ln|\cos x| + c$$

•
$$\int \sin x \cos^2 x = -\int -\sin x \cos^2 x dx = \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

•
$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + c$$

•
$$\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}dx = \int \frac{1}{(1+x^2)}\frac{1}{\arctan x}dx = \ln(\arctan x) + c$$

2.15.15 Integrazione per parti

Siano f e g due funzioni derivabili con derivata comune, si ha

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \tag{2.12}$$

1. $f(x)$=fattore finito
2. $g'(x)dx$= fattore differenziale

L'ipotesi che le derivate di f e g siano continue assicura che gli integrali siano ben definiti.

Dimostrazione

Consideriamo la formula di derivazione di un prodotto

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Integrando membro a membro si ha

$$\int [f(x)g(x)]'dx = \int f'g(x)dx + \int fg'(x)dx$$

essendo $f * g$ una primitive della sua derivata $[f * g]'$ si ottiene le tesi.

Esercizio *Utilizzando il metodo di integrazione per parti calcolare*

- $\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$
- $\int \ln x dx = \int 1 * \ln x dx = x \ln x - \int x * \frac{1}{x}dx = x \ln x + c$
- $\int e^x \sin x dx = \int e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x dx) \Rightarrow \int e^x \sin x dx = \frac{e^x \cos x + \int e^x \sin x dx}{2} = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + c$

- $\int \cos^2 x dx = \int \cos x * \cos x dx = \cos x \sin x + \int \sin^2 x dx = \cos x \sin x + x - \int \cos^2 x dx \Rightarrow \cos x dx = \frac{\cos x \sin x + x}{2} + c$

Se l'integrale è definito:

$$\int_a^b f(x)dx \tag{2.13}$$

e si effettua la sostituzione x=g(t). supponendo che

a) $x = a \Rightarrow c = g^{-1}(a)$

b) $x = b \Rightarrow d = g^{-1}(b)$

si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

Metodo di integrazione delle funzioni razionali fratte

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx, N(x), D(x) \text{ polinomi di x}$$

1°caso: $grado(N(x)) < grado(D(x))$

a) D(x) ha radice <u>radicale semplice</u>: si determinano le radici del denominatore $D(x)$ e lo si scompone in fattori

   Esercizio

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \tag{2.14}$$

   $D(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$

   Si devono cercare 2 costanti A e B (in quanto 2 sono i fattori semplici in cui è scomposto il polinomio D(x)):

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x - A2B}{(x-2)(x-1)}$$

   Per il principio di identità dei polinomi, i polinomi a numeratore del 1° e dell'ultimo membro, sono uguali se sono uguali i rispettivi i rispettivi coefficienti cioè

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = 1 \; B = -1 \Rightarrow \frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x-1}$$

   e quindi

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x-1} dx = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c$$

b) $D(x)$ ha radici reali multiple
Esercizio

$$\int \frac{1}{x^3 - x^2} dx$$

si ha $D(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$:
una radice semplice (x=1) e una radice multipla di molteplicità (radice doppia x=0) si devono cercare 3 costanti:

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{(A+C)x^2 + (-A+B)x - B}{x^2(x-1)}$$

$$\begin{cases} A + C = 0 & A = -1 \\ -A + B = 0 \Rightarrow & B = -1 \\ -B = 1 & C = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^3 - x^2} dx = -\int -\frac{1}{x} dx + \int -\frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{1}{x} + c$$

c) $D(x)$ ha radici *complesse coniugate e semplici*
Esercizio

$$\int \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$$

$$D(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$$

3 radici: $x = -1$ reale semplice
$x = \mp 1$ complesse coniugate

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2+1} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 & a = \frac{1}{2} \\ B + C = 0 \Rightarrow & B = -\frac{1}{2} \\ A + C = 1 & C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

E quindi si ottiene

$$\int \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{4} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

2° caso: grado(N(x)) grado(D(x))

In questo caso si deve eseguire la divisione tra il polinomio a numeratore (N(x)) e polinomio a denominatore (D(x)):
$g(x)$ = guoziente della divisione
$r(x)$ = resto della divisione

$$\Rightarrow \frac{N(x)}{D(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{D(x)}$$

con r(x) un polinomio di grado inferiore a quello di N(x):

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int q(x) dx + \int \frac{r(x)}{D(x)} dx$$

Esercizio

$$\int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} dx \text{ grado (N(x))=5} > \text{grado (D(x))=4}$$

Effettuando la divisione tra i due polinomi si ottiene $g(x) = x,\ r(x) = -x^3 - x + 1$

$$\Rightarrow \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} = x - \frac{x^3 + x - 1}{x^4 + x^2}$$

$$\frac{x^3 + x - 1}{x^4 + x^2} = \frac{x^3 + x - 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} = \frac{(A + C)x^3 + (B + D)x^2 + Ax + B}{x^2(x + 1)}$$

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ B + C = 0 \\ A = 1 \\ B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \\ D = 1 \end{cases}$$

Si ha

$$\int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} dx = \inf x dx - \int \frac{x^3 + x - 1}{x^4 + x^2} dx = \int x dx - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx -$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{x} - \arctan x + c$$

Calcolo dell'area di una figura piana

$$\text{Sia } T = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

2.15.16 Esercizio di esempio

calcolare l'area tra $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$:

$$due = \int_a^b x - x^2$$

2.16 Integrali impropri o generalizzati

In analisi matematica, l'integrale improprio o generalizzato è il limite di un integrale definito al tendere di un estremo di integrazione (o entrambi) ad un numero reale oppure all'infinito; tale numero reale può appartenere all'insieme di definizione della funzione integranda (*e in tal caso si ottiene lo stesso risultato che si ha calcolando un integrale definito*), oppure può rappresentare un punto di discontinuità. Gli integrali impropri si utilizzano per rendere calcolabili integrali riguardanti intervalli illimitati e/o funzioni non limitate, che non sono trattabili con l'integrale di Riemann. Esso richiede infatti la limitatezza sia per l'intervallo di integrazione, sia per la funzione integranda.
By Wikipedia
L'operazione di integrazione può estendere al caso di funzioni non limitate e di intervalli non limitati

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \int_1^{+\infty} = \frac{1}{x^2} dx \tag{2.15}$$

Sia $f : (a, b] \to R$ tale che, $\forall \delta > 0$, f è integrabile secondo Riemann in $[a + \delta], b$ cioè esiste l'integrale

$$I(\delta) = \int_{a+\delta}^b f(x) dx \tag{2.16}$$

2.16.1 Definizione

Se esiste finito il liminte

$$\lim_{\delta\to 0^+} I(\delta)$$

allora si dice che f è integrabile in senso improprio, tale limite si chiama integrale improprio o generalizzato e si indica con

$$\lim_{\delta\to 0^+} I(\delta) = \int_a^b f(x)dx$$

Esercizio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$I(\delta) = \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2 - 2\sqrt{\delta}, \quad \lim_{\delta\to 0^+} I(\delta) = \lim_{\delta\to 0^+} 2 - 2\sqrt{\delta} = 2$$

$$\text{L'integrale converge e si può scrivere: } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2 \tag{2.17}$$

Esercizio

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$I(\delta) = \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(1-\delta) - \arcsin(-1+\delta), \quad \lim_{\delta\to 0^+} I(\delta) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$$

$$\text{L'integrale converge e si può scrivere: } \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi$$

Esercizio. Studiare la convergenza del seguente integrale

$$\int_0^1 x^{-\alpha}dx, \alpha > 0$$

$$\text{si ha } \in_0^1 x^{-\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ \text{non converge} & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Nel caso in cui $f : [a, b) \to R$ *non è limitata in ma è integrabile in* $[a, b - \delta]$ $\forall\delta > 0$ *allora si pone*

$$\int f(x)dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int f(x)dx$$

Se tale limite esiste finito. Se in oltre la funzione f non è limitata in $c \in (a, b)$ allora si dice che f è integrabile in senso improprio se f è integrabile in senso improprio in $[a, c]$ e in $[c, b]$ e si pone

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Consideriamo ora intervalli illimitati:

$$[a, +\infty) \ (-\infty, b] \ (+\infty, -\infty)$$

Sia $f : [a, +\infty) \to R$ integrabile su ogni intervallo $[\alpha, \beta]$ con $\beta > a$, poniamo

$$J(\beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx \tag{2.18}$$

Se esiste finito il $\lim_{\beta\to+\infty} J(\beta)$ allora f si dice integrabile in senso improprio su $[a,+\infty)$ e tale limite si chiama integrale impropria o generalizzato di f in $[a,b)$:

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Analogamente definizione per $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ dove $f:(-\infty,b]\to R$ è integrabile su $[-\beta,b]$, per il quale riguarda integrabile $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ con f integrabile su ogni intervallo limitato, si pone:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, c\in R$$

e i due integrali impropri convergenti.
Esercizio. Dire se converge o esiste in senso improprio in seguente

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\text{Si ha: } J(\beta) = \int_{-\beta}^{\beta}\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_{-\beta}^{\beta}$$

$$\lim_{\beta\to+\infty} J(\beta) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$$

Esercizio

$$\int_{1}^{+\infty} x^{\alpha}dx, \alpha > 0$$

$$\text{si ha } \int_{1}^{+\infty} x^{\alpha}dx = \begin{cases}\frac{1}{\alpha-1} & se\alpha > 1\\ \text{non converge} & se\alpha \leq 1\end{cases}$$

2.17 Equazioni differenziali ordinarie

- Equazione differenziali del 1° ordine a variabili separabili,
- Equazione differenziali lineari del 1° ordine
- Equazioni differenziali del 1° ordine non lineare
  - Equazione di Bernoulli
  - Equazione di Clairaut
- Problema di Cauchy le eq. diff. del 1° ordine in forma normale,
- Equazioni differenziali lineari di ordine $n \geq 2$.

2.17.1 Definizione

Sia $I \subseteq R$ si definisce equazione differenziale ordinaria di ordine n,

$$g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Con $y' = y'(x), y'' = y''(x), \dots, y^{(n)} = \dots, y^{(n)}$ e g funzione reale. Se g è un polinomio in cui $y, y', y'', y^{(n)}$ sono di primo grado, allora l'equazione si dice: equazione differenziale lineare (*l'ordine dell'equazione è dato dall'ordine massimo di derivazione che compare*) - $y = y(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale di ordine n se, $y(x)$ insieme alle sue derivate seddisfa l'equazione, cioè

$$g(y(x), y', y'', \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \forall x \in I$$

Un'equazione differenziale è in forma normale se è esplicitata rispetto alla derivata di ordine massimo:

$$y^{(x)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

altrimenti si dice in forma non-normale. Integrare un'equazione differenziale significa trovare tutte le soluzione. L'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale di ordine n dipende da n parametri reali: le costanti $c_1, c_2, 1dots, c_n$:

$$y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \text{ INTEGRALE GENERALE} \tag{2.19}$$

Fissando i parametri $c_1, c_2, \ldots, c_n$ si ottiene una soluzione particolare dell'equazione differenziale e viene chiamata INTEGRALE PARTICOLARE. Nel caso di un equazione differenziale del 1°ordine: $g(x, y, y') = 0$ $y = y(x, c)$.
Nel caso di un'equazione differenziale del 1°ordine:

$g(x, y, y') = 0$ forma non normale

$y' = f(x, y)$ forma normale o splicita

$y = y(x, c)$ integrale generale

Note Non è sempre ogni soluzione dell'equazione differenziale data è anche un integrale particolare: ci sono casi di equazioni differenziali che ammettono anche `INTEGRALI SINGOLARI`, cioè integrali non ottenibili per nessun valore della costante c.

2.17.2 Equazioni differenziali a variabili separabili

$$y' = f(x) * g(y) \tag{2.20}$$

Con $f(x)$ e $g(y)$ funzioni continue se $\exists y_0 : g(y_0) = 0 \Rightarrow y = y_0 soluzione$
Se $g(y) \neq 0 \forall y$, allora si divide l'equazione per $g(y)$ e si integra:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x), \text{ ma } y' = \frac{dy}{dx}, \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx \tag{2.21}$$

$G(y) = F(x) + c$, c=costante.

Esempio. Integrare la seguente equazione differenziale

$$y' = 2x + 2xy^2$$

$$\Rightarrow y' = 2x(1 + y^2)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int 2x dx$$

$$\arctan y = x^2 + c$$

$$y = \tan(x^2 + c) \text{ Integrale generale}$$

$$g(y) = 1 + y^2 \neq 0 \ \forall y$$

Esempio Risolvere $y' = xy^2$

$$y = 0 \text{ è soluzione}$$

se $y \neq 0$:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int x dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y = -\frac{2}{x^2 + 2c} \text{ integrale generico}$$

$y = 0$ integrale singolare

$$y' + a(x)y = b(x)S$$

con $a(x)$ e $b(x)$ funzioni continue in I.
Se $b(x) = 0$ allora $y' + a(x)y = 0$ si dice omogenea

2.17.3 Teorema

Tutte le soluzioni dell'equazioni differenziale lineare del 1°ordine non omogenea

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{2.22}$$

sono date da

$$y(x) = e^{-d(x)}\left(\int e^{A(x)}b(x)dx + c\right)$$

con $A(x)$ primitiva di $a(x)$

2.17.4 Dimostrazione

Sia $A(x)$ una primitiva di a(x), cioè $A' = a(x)$, Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione differenziale per fattore $e^{A(x)}$ si ha

$$e^{A(x)}y'(x) + e^{A(x)}a(x)y(x) = e^{A(x)}b(x) \tag{2.23}$$

cioè

$$\frac{d}{dx}(e^{A(x)}y(x)) = e^{A(x)}b(x) \tag{2.24}$$

Integrando membro a membro si ha

$$e^{A(x)}y(x) = \int e^{A(x)}b(x)dx + c \Rightarrow y(x) = e^{-A(x)}\left(\int e^{A(x)}b(x)dx + c\right)$$

Se $b(x) = 0$ allora $y(x) = ce^{-A(x)}$

Esempio Integrare la seguente equazione differenziale

$$y' + 2xy = xe^{-x^2} \tag{2.25}$$

$$a(x) = 2x \Rightarrow A(x) = x^2, b(x) = xe^{-x^2}$$

$\Rightarrow \quad y(x) = e^{-x^2}\left(\int e^{x^2}xe^{-x^2}dx + c\right)$

$\Rightarrow \quad e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$ Integrale generale

Esercizi Integrare le seguenti equazioni differenziali

$$(1 + x^2)y' + y = \arctan x$$

$$y' + \cos x * y = 0$$

2.17.5 Equazione di Bernoulli

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha, \ \alpha \in R, \ \text{con } \alpha \neq 0, 1$$

$a(x)$, $b(x)$ funzioni continue, $\alpha \neq 0, 1$ altrimenti si ricade nelle equazione lineari. (*Se $\alpha > 0$ è una soluzione: integrale singolare*) Se y è dicerso da zero, si divide tutto per y':

$$y'y^{-\alpha} + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$$

Posto:

$$z(x) = y^{1-\alpha}$$

Si ha: $z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ e sostituendo nella equazione precedente si ottiene un'equazione differenziale lineare del primo ordine rispetto a z.

$$\boxed{z'(x) + (1-\alpha)a(x)z(x) = (1-\alpha)b(x)}$$

Esercizio. Integrare la seguente equazione differenziale

$$y' - y = xy^2 \tag{2.26}$$

y=0 è la soluzione
se $y \neq 0$:

$$y'y^{-2} - y^{-1} = x \Rightarrow z(x) = y^{-1},\ z' = -y^{-2}y'$$

$z' + z = -x$, Equazione differenziale lineare in z(x).

$\Rightarrow\ z(x) = e^{-x}\Bigg(-\int xe^x dx + c\Bigg)$

Quindi $z(x) = e^{-x}(-xe^x + e^x + c) \Rightarrow z = -x + 1 + ce^{-x}$ Ed essendo $z(z) = y^{-1}$ se ha

$$y(x) = z^{-1} \Rightarrow y = \frac{1}{-x+1+ce^{-x}}$$

$y = 0$ Integrale singolare
$y = \frac{1}{-x+1+ce^{-x}}$ Integrale generale

2.17.6 Equazione di Clairaut

$$y = xy' + g(y')$$

con g funzione derivabile.
Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine in forma non normale. Derivando rispetto a **x** primo e sendo membro dell'equazione differenziale si ha:

$$y' = y' + xy'' + g'(y')y''$$

$$y''[x + g'(y')] = 0$$

1. $y'' = 0 \rightarrow y' = c$
   sostituendo nell'equazione differenziale di partenza

   i) $y = cx + g(x)$

   ottengo una **famiglia di rette** al variare di c

2. $x + g'(y')$
   Posto $t = y'$ dalla precedente si ricava:

   ii)
$$\begin{cases} x(t) = -g'(t) \\ y(t) = -tg'(t) + g(t) \end{cases}$$

   Tale soluzione è un *integrale singrale singolare* ed è l'inviluppo della famiglia di rette (i)

Esercizio

$$y = \frac{x(y')^3 - 1}{(y')^2}$$

Si ha $y = xy' - (y')^{-2}$

$$y' = y' + xy'' + 2(y')^{-3}y'' \Rightarrow y''(x + 2(y')^{-3}) = 0$$

$y'' = 0 \; x + 2(y')^{-3} = 0$
da $y'' = 0$ si ottiene $y' = c \Rightarrow y = cx - \frac{1}{c^2}$ famiglia di rette da $x + 2(y')^{-3} = 0$ ponendo $y' = t$ si ottiene

$$\begin{cases} x = -2t^{-3} \\ y = tx - 2t^{-2} \Rightarrow y = -4t^{-2} \end{cases}$$

Integrale singolare o curva inviluppo del fascio di rette

Equazione di Clairaut

$$y = xy' - \sin y'$$

La soluzione è $cx - \sin x$ fascio di rette

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = t\cos t - \sin t \end{cases}$$

Integrale singolare o curva inviluppo del fascio di rette

2.18 Equazioni differenziali lineari di ordine n

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \tag{2.27}$$

$$\left.\begin{aligned} a_i(x) &= \text{coefficienti} \\ b(x) &= \text{termine noto} \end{aligned}\right\} \text{Definizione in } I \subseteq \Re$$

Se $b(x) = 0$ l'equazioone si dice *omogenea*, altrimenti *non omogenea*

2.18.1 Teorema

Se $y_1(x), \ldots, y_n(x),\; x \in I \subseteq R$, sono soluzioni particolari dell'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n allora $c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$ è soluzione.
L'integrale generale dell'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n è

$$y_0(x) = c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

$y_1(x), \ldots, y_n(x)$, sono n soluzioni linearmente indipendenti, $c_1, \ldots, c_n$, sono n costanti arbitrarie.

2.18.2 Definizione di funzione linearmente indipendente

$y_1(x), \ldots, y_n(x)$, sono funzioni <u>linearmente indipendenti</u> se

$$c_1y_1 + \cdots + c_ny_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché n soluzioni, di un'equazione differenziale di ordine n, siano linearmente indipendenti è che il determinante Wronskiano:

$$\begin{vmatrix} y_1, & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Data l'equazione non omogenea

(1) $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$

e la sua omogenea associata:

(2) $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$

l'integrale generale di (1) è:

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y}(x)$$

dove $y_0(x)$ è l'integrale generale di (2) e $\overline{y}(x)$ è un integrale particolare di (1).

omogenee a coefficiente costanti

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \tag{2.28}$$

$a_1, \ldots, a_n \in \Re$

A tale equazione si associa l'equazione caratteristica:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

che, per il teorema fondamentale dell'algebra, ha in C n radici ciascuna ciascuna contata con la propria molteplicità. $y = e^{\alpha x}$ è soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea se α è soluzione dell'equazione caratteristica

$$\text{Infatti se } y = e^{\alpha x}, y' = \alpha x, \ldots, y^{(n)} = a^n e^{\alpha x} \tag{2.29}$$

sostituendo nell'equazione differenziale si ha

$$e^{\alpha x}(a^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n) = 0 \tag{2.30}$$

$\Rightarrow e^{\alpha x}$ è soluzione dell'equazione omogenea se α è soluzione dell'equazione caratteristica

1° Caso) L'equazione caratteristica ammette n radici reali e distinte $\lambda, \ldots, \lambda_n$, allora gli n integrali linearmente indipendenti (*dell'equazione omogenea*) sono:

$$y_1 = \lambda 1x, y_2 = e^{\lambda 2x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}$$

e l'integrale generale è

$$y_0 = c_1 e^{\lambda 2x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

Esempio $y'' - 5y' + 6y = 0$

2°Caso) L'equazione caratteristica ammette radici reali e multiple, per esempio se λ_1 è di moltiplicità m, allora m integrali particolari (*dell'equazione omogenea*) sono:

$$y = e^{\lambda 1x}, y_2 = xe^{\lambda 1x}, \ldots, y_m ? x^{m_1} e^{\lambda 1x}$$

in generale per ogni radice λ_k di moltiplicità m_k, gli n integrali linearmente indipemndenti sono

$$e^{\lambda k^x}, xe^{\lambda k^x}, x^2 e^{\lambda k^x}, \ldots, x^{mk^{-1}} e^{\lambda k^x} \quad k = 1, \ldots, r, \quad m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n \tag{2.31}$$

Es. $y''' + y'' = 0$

3° Caso) L'equazione caratteristica ammette radici complesse coniugate:

$$\lambda = \alpha + i\beta \quad \text{di molteplicità m}$$
$$\overline{\lambda} = \alpha + i\beta \quad \text{di molteplicità m}$$

allora:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

sono soluzioni dell'equazione omogenea (2m). Si arriva a tali soluzioni considerando gli integrali.
Si arriva a tali soluzioni considerando gli integrali

$$x^k e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad x^k e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad k = 0, 1, \ldots m-1$$

a cui vengono applicate le formule di Eulero
Esempio $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

Ricerca di un integrale particolare per un'equazione differenziale lineare di ordine n non omogenea

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{(n-1)}y' + a_n y = b(x)}$$

Eq. diff. lineari a coefficienti costanti

L'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$\boxed{y(x) = y_0(x) + \overline{y}(x)}$$

Dove:

- $y_0(x)$ è la soluzione dell'omogenea associata;
- $\overline{y}_0(x)$ è un integrale particolare della non omogenea;

Calcolo di $\overline{y}(x)$: Metodo della somiglianza

1. $b(x) = P_m(x)e^{\gamma x}$ polinomio di grado m
   (a) σ non è radice dell'equazione caratteristica
   $$\overline{y}(x) = Q_m(x)e^{\gamma x} \tag{2.32}$$
   (b) σ è radice dell'equazione caratteristica con molteplicità k
   $$\overline{y}(x) = x^k Q_m(x)e^{\gamma x}$$
2. $b(x) = P_m(x)e^{\gamma x}\cos(\mu x)$ o $b(x) = P_m(x)e^{\gamma x}\sin(\mu x)$
   (a) $\gamma \pm i\mu$ non sono radici dell'equazione caratteristica
   $$\overline{y}(x) = [Q_m(x)\cos(\mu x) + R_m(x)\sin(\mu x)]e^{\mu x}$$
   (b) $\gamma \pm i\mu$ è radice dell'equazione caratteristica con molteplicità k
   $$\overline{y}(x) = x^k[Q_m(x)\cos(\mu x) + R_m(x)\sin(\mu x)]e^{\mu x}$$

Esempio $y'' - 2y' + 2y = x^2$
L'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$\boxed{y(x) = y - 0(x) + \overline{y}(x)}$$

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm i$$

$$y_0(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$$

$$b(x) = x^2 \Rightarrow m = 2, \gamma = 0 \text{ non è soluzione dell'equazione caratteristica, } \overline{y}(x) = ax^2 + bx + c$$

Se $\overline{y}(x)$ è soluzione della nostra equazione differenziale non omogenea, allora sostituendo $\overline{y}(x), \overline{y}'(x), \overline{y}''(x)$ nell'equazione differenziale si deve avere un'identità.
Calcoliamo $\overline{y}'(x), \overline{y}''(x)$

$$\overline{y}' = 2ax + b, \overline{y}'' = 2a$$

Sostituendo nell'eq diff si ha

$$2a - 4ax - 2b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2 \tag{2.33}$$

$$\Rightarrow 2ax^2 + (2b - 4a)x + 2a - 2b + 2c = x^2$$

Per il principio di identità dei polinomi si ha

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 4a = 0 \\ 2a - 2b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.34}$$

Perciò $\overline{y}(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$. E quindi l'integrale generale dell'equazione completa è

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + \frac{x^2 + 2x + 1}{2}$$

2.18.3 Metodo della variazione delle costanti arbitrarie (*o di Lagrange*)

(valido per un equazione differenziale lineare a coefficiente variabili)

Teorema Siano $y_1, \ldots, y_n(x),\ x \in I \subseteq R,\ n$ integrali linearmente indipendenti dell'equazione omogenea. Siano $c_1(x), \ldots, c_n(x),\ n$ funzioni le cui derivate soddisfano in I il sistema di equazioni lineari in $c_1(x), \ldots, c'_n(x)$:

$$\begin{cases} c'_1(x)y_1 + \cdots + c'_n(x)y_n = 0 \\ c'_1(x)y'_1 + \cdots + c'_n(x)y'_n = 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ c'_1(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + c'_n(x)y_{(n-1)} = b(x) \end{cases}$$

Allora un integrale particolare dell'equazione differenziale lineare di ordine n è

$$\overline{y}(x) = c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$$

2.18.4 Equazioni differenziali lineari, Metodo di Lagrange: esempio

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

$$\lambda^2+1=0 \Rightarrow \gamma=\pm 1, \qquad y_0(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$$

$$c_1, c_2 \text{ costanti.}$$

$$y(x)=y_0(x)+\overline{y}(x)$$

$$\overline{y}(x)=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$$

$$c_1(x), c_2(x) \qquad \text{funzione da determinare}$$

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x_1+\cdots+c_n'(x)\sin x_n=0 \\ c_1'(x)\sin x_1'+\cdots+c_n'(x)\cos x_n'=\frac{1}{\cos x} \end{cases} \qquad W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=1$$

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ b(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ \frac{1}{\cos x} & \cos(x) \end{vmatrix}}{W(x)}=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x \qquad c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_1(x) \\ y_1'(x) & b(x) \end{vmatrix}}{W(x)}=\frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{W(x)}=1$$

$$c_1=\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx=\ln|\cos x|, \qquad c_2(x)=\int 1dx=x$$

$$\overline{y}(x)=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x=\cos x\ln|\cos x|+x\sin x$$

l'integrale generale è $y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x$

$$y'''-2y''+y'=e^x \tag{2.35}$$

$$\lambda^3-2\lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2-2\lambda+1)=0$$

$$\lambda=0(\lambda-1)^2=0 \quad \lambda=1 \quad m=2$$

$$y_0=c_1e^2x$$

2.19 Esercizi

Per una maggior comprensione è giusto mostrare degli esercizi svolto e visto che ci sono alcuni casi in cui serve fare ulteriori operazioni per risolvere lo studio...

2.19.1 Esercitazione 1

Capitolo 3

Successioni numeriche

3.1 Definizione

Una successione $\{a_n\}$ è una funzione che ad ogni numero naturale n associa un numero reale a_n

Esempio:

$$\{a_n\} : \begin{array}{ccc} n & \to & a_n \\ 0 & \to & a_0 \\ 1 & \to & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ n & \to & a_n \end{array} \qquad \left\{\frac{1}{n}\right\} : \begin{array}{ccc} n & \to & a_n \\ 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & \frac{1}{2} \\ \vdots & & \vdots \\ n & \to & \frac{1}{n} \end{array}$$

Il limite della successione $\{a_n\}$ è il numero reale a (*si dice anche che a_n converga ad a*) e si indica

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad (a_n \to a)$$

se, qualunque sia $\varepsilon > 0 \exists v_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n > v_\varepsilon$. Esempio tramite la definizione dimostriamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Si ha $|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Quindi basta porre $v = \frac{1}{\varepsilon}$ e si ha che $\forall n > v \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

- Se il limite della successione $\{a_n\}$ è un numero finito allora la successione si dirà convergente (o regolare);
- Se il limite di $\{a_n\}$ è infinito, allora si dirà divergente (regolare);
- Se invece tale limite non esiste, allora $\{a_n\}$ si dice indeterminata (o irregolare);

La definizione di limite per la successione $\{a_n\}$ e i teoremi sui limiti sono analoghi a quelli visti per le funzioni.

Definizione

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall K > 0 \exists N = N(K) : \forall n \geq N : a_n > K$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall H > 0 \exists M = M(K) : \forall n \geq M : a_n < -H$$

Teorema dell'unicità del limite

$$\text{Se } \lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow a \text{ a è unico.}$$

3.2 Teorema della permanenza del segno

Se una successione $\{a_n\}$ converge ad un limite strettamente positivo $a > 0$ (che può essere anche $+\infty$), ossia se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0$ (o $a < 0$)
Allora $a_n > 0$ definitivamente (o $a < 0$), ossia ha definitivamente soltanto termini positivi (o negativi). Per le successioni, «definitivamente» significa per n abbastanza grande. - In altre parole, esiste un N tale che $a_n > 0$ per ogni $n > N$. Esempio $n - 10\sqrt{n}$ è definitivamente positiva per $n > 100$

3.3 Teorema della permanenza del segno

Una successione che converge a zero può avere infiniti termini di ambo i segni, ad esempio

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Non è vero in generale che una successione $\{a_n\}$ di termini positivi $a_n > 0$ convergente debba avere un limite strettamente positivo $a > 0$: ad esempio la successione $a_n = \frac{1}{n}$ è fatta di termini positivi, ma converge a zero. Ogni successione $\{a_n\}$ si dice limitata se $\exists M$:

$$|a_n| \neq M.$$

Esempio $*\{a_n\} = (-1)^n$ è limitata: $|a_n| = 1$ $(M = 1)$, ma non ha limite, intatti

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \text{ non esite}$$

$*\{a_n\} = \sin x$ è limitata ma non ammette limite

3.4 Teorema del confronto (o dei due carabinieri)

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ tre successioni tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in N.$$

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = a$, allora anche la successione b_n è convergente e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = a.$$

esempio $b_n = \frac{\cos n}{n}$.
Se $a_n \leq b_n$ definitivamente, e se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ allora anche $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, analogamente se $b_n \leq c_n$ e $c_n \to -\infty$ allora anche $b \to -\infty$ - S $\{a_n\}$ è una successione limitata e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, allora la sccessione prodotto $a_n * b_n \to 0$.

$$\text{esempio} \quad \lim_{n\to+\infty} \tfrac{\sin n}{n} = \lim_{n\to+\infty} (\sin n)\tfrac{1}{n} = 0$$

in quanto $\sin n$ è limitata: $|\sin n| \leq 1$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
Successioni infinitesime (cioè convergenti a zero) o infinite (cioè divergenti) possono essere confrontabili come si è fatto per le funzioni. Le definizioni sono analoghe.
Si ha, anche per le successioni

$$\ln n << n^b << a^n << n! << n^n, b > 0, a > 1.$$

Anche per le successioni valgono le operazioni con i limiti e le convenzioni con l'∞, visti per le funzioni. Anche i limiti notevoli visti per le funzioni, si adattano alle successioni - Esempio

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos\frac{1}{2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{2})}{\frac{1}{n}} = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) = 1$$

3.5 Riassunto

La successione $\{a_n\}$ si definisce

$$\begin{array}{rll} \text{monotona } \underline{\text{crescente}} \text{ se} & a_n \le a_{n+1}, & \forall n \in N \\ \text{monotona } \underline{\text{strettamente crescente}} \text{ se} & a_n < a_{n+1}, & \forall n \in N \\ \text{monotona } \underline{\text{decrescente}} \text{ se} & a_n \ge a_{n+1}, & \forall n \in N \\ \text{monotona } \underline{\text{strettamente decrescente}} \text{ se} & a_n > a_{n+1}, & \forall n \in N \end{array}$$

Ogni successione monotona ammette limite. In particolare ogni successione monotona limitata è convergente (*cioè ammette limite finito: per es* $l = \sup a_n$ *se* a_n *è limitata e crescente*)

Esercizio. Calcolo del limite:

1. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

2. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$