Matematica esercizi

Nicola Ferru

Testi

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3\sin 2x}{x-2\sin 3x}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{x^3+\sqrt{x}} \tag{1}$$

Soluzioni

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3\sin 2x}{x-2\sin 3x}=\frac{0^2+3\sin 2(0)}{0-2\sin 3(0)}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{x^3+\sqrt{x}}=\frac{1-e^0}{0^3+\sqrt{0}}=\frac{0}{0}$$

1 studio di furnzione

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$$

1.0.1 Dominio

$$x\neq 0$$

Quindi da questa osservazione comprendiamo che la funzione non esiste nell'origine.

$$\forall x\in(-\infty,0)\vee(0,+\infty)$$

1.1 simmetria

la funzione non è né pari né dispari

1.2 intersezione con gli assi

$$assex=\begin{cases} y=\frac{e^x}{e^x-1}\\ y=0\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{e^x}{e^x-1}=0\\ y=0\end{cases}$$

non interseca nessuno dei due assi

1.3 Segno

$$\frac{e^x}{e^x-1}>0$$

$x>0$ perché al denominatore è presente un esponenziale.

1.4 Comportamento all'estremo del dominio

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{e^{-\infty}}{e^{-\infty}-1}=\frac{0}{-1}=0$$
$$\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{e^0}{e^0-1}=-\infty$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{e^0}{e^0-1}=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{e^{+\infty}}{e^{+\infty}-1}=\infty$$

1.5 Derivata prima

$$F'=\frac{e^x*(e^x-1)-e^x*(e^x)}{(e^x)^2}=\frac{-e^x}{(e^x-)^2}$$

1.6 es.2

$$f(x)=\frac{\ln(2x)}{x}$$

1. Dominio

$$x>0$$
$$\forall x\in(0;+\infty)$$

2. Parità

$$\neq f(-x)\text{ pari}$$
$$\neq -f(x)\text{ dispari}$$

3. intersezioni con gli assi

$$assey\begin{cases}f(x)=\frac{\ln(2x)}{x}\\x=0\end{cases}$$

Non interseca l'asse delle ordinate $f(0)=\nexists$

4. segno

$$f(x)=\frac{\ln(2x)}{x}\begin{cases}N\leq0\to x & \to\frac{1}{2}\\D>0 & \to x>0\end{cases}\tag{2}$$

$$f(x)$$

5. Comportamento

1.7 es.4

$$f(x)=\frac{e^x-2}{x}$$

- Dominio

$$x\neq0$$

$$\forall x\in(-\infty,0)\vee(0,\infty)$$

- simmetrie

$$f(x)\begin{cases}\neq -f(x)\\\neq f(-x)\end{cases}$$

- Int. con gli assi

$$assex\begin{cases}y=\frac{e^x-2}{x}\\y=0\end{cases}\quad\left\{\frac{e^2-2}{\cancel{x}}=0\right.\quad\left\{e^x=2\right.\quad\left\{x=\ln2\right.$$

asse y

$$\begin{cases} y = \frac{e^x - 2}{x} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{e^0 - 2}{0} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \ln 2 \end{cases}$$

- segno

$$\frac{e^x - 2}{x} > 0$$
$$x > \ln 2$$

-

2 teorema di Roll

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$y = [-1, 5]$$

$$(-1)^2 - 4(-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$$

$$(5)^2 - 4(5) + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$$

$$\begin{gathered} f(c) = 0 \\ f'(x) = 2x - 4 \\ 2c - 4 = 0 \\ \frac{\cancel{2}c}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{2}} \to c = 2 \end{gathered} \tag{3}$$

2.1 es.2

$$f(x) = x^4 + x^2 + 1$$

Intervallo compreso tra $[-2, 2]$

$$f(-2) = (-2)^4 + (-2)^2 + 1 = 16 + 4 + 1 = 21$$
$$f(2) = (2)^4 + (2)^2 + 1 = 16 + 4 + 1 = 21$$

la funzione è continua

$$\begin{gathered} f'(x) = 4x^3 + 2x \\ f'(c) = 0 \\ x = c \\ 4c^3 - 2c = 0 \to 2c(2c^2 + 1) = 0 \\ 2c = 0 \to c = 0 \\ 2x^2 + 1 = 0 \to c = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}} \text{ NO} \end{gathered}$$

3 Teorema di Lagrange

$$f(x) = 2x^2 + x + 1, \ [-2; 3]$$

$$2(-2)^2 - 2 + 1 = 8 - 1 = 7$$
$$2(3)^2 + 3 + 1 = 23 \text{ NO}$$

questa funzione non rispetta i punti del teorema di Lagrange.

3.1 es.2

$$f(x) = \sqrt{x} - x, \ [0,4]$$

$$\sqrt{0} - 0 = 0$$
$$\sqrt{4} - 4 = 2$$

la funzione è continua

$$f' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$$

la funzione è derivabile

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-2 - 0}{4 - 0} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}}$$