Appunti di Matematica

Nicola Ferru

Indice

0.1 Premesse. . . 3

I Matematica analisi 1 **5**

0.2 Simboli 7

1 Cenni di teoria degli insiemi **9**

1.0.1 Operazioni tra gli insiemi 9

1.1 Sottoinsiemi di R 9

1.1.1 Definizione 9

1.2 Funzione di una variabile 10

1.2.1 Definizione 10

2 Studio di funzione **13**

2.1 Grafica delle funzioni elementari 13

2.1.1 Funzione lineare $y = mx + qm, q \in R$ 13

2.1.2 Funzione valore assoluto $y = |x|$ 13

2.1.3 Funzione potenza $y = x^n, n \in N, pari$ 13

2.2 Limiti 13

2.2.1 Forme indeterminate 13

2.2.2 Infinitesimi e infiniti 14

2.2.3 Funzioni continue 16

2.2.4 Criteri di invertibilità 17

0.1 Premesse. . .

In questo repository sono disponibili pure le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra* consiglio a tutti di dargli un occhiata e di stare attenti perché possono essere presenti delle modifiche per migliorare il contenuto degli stessi appunti, comunque solitamente vengono fatte revisioni tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che questo è un progetto volontario e che per questo motivo ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure potrebbero esserci degli errori, chiedo la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare una modifica. Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open souce e infatti sono disponibili i sorgenti dei file allegati insieme ai PDF.

Cordiali saluti

Parte I

Matematica analisi 1

0.2 Simboli

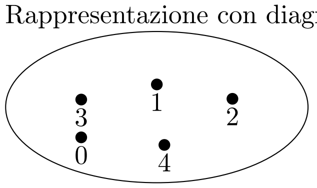
$\in$ Appartiene
$\notin$ Non appartiene
$\exists$ Esiste
$\exists!$ Esiste unico
$\subset$ Contenuto strettamente
$\subseteq$ Contenuto
$\supset$ Contenuto strettamente
$\supseteq$ Contiene
$\Rightarrow$ Implica
$\iff$ Se e solo se
$\neq$ Diverso
$\forall$ Per ogni
$\ni$: Tale che
$\leq$ Minore o uguale
$\geq$ Maggiore o uguale
α alfa
β beta
γ gamma
Γ Gamma
δ, Δ delta
ϵ epsilon
σ, Σ sigma
ρ rho

Capitolo 1

Cenni di teoria degli insiemi

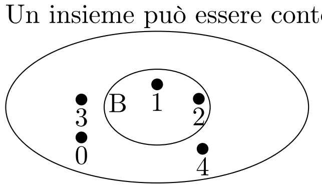
Per rappresentare un insieme abbiamo tre possibilità:

1. Rappresentazione estensive $A = [0, 1, 2, 3, 4]$
2. Rappresentazione intensiva $A = [x|x \in Nex < 5]$
3. Rappresentazione con diagrammi di Eulero - Venn



1.0.1 Operazioni tra gli insiemi

Un insieme può essere contenuto in un altro:



1.1 Sottoinsiemi di R

1.1.1 Definizione

1. Un punto x_0 si dice intero ad A se esiste un suo interno I(x_0, δ) con $\delta > 0$ contenuto in A.
2. Si dice esterno ad A se è interno al CA (A^c).
3. Si dice di frontiera per A se non è né interno né esterno ad A.

Interno di A

°A Insieme dei punti interni ad A.

Esempio se $A = (1, 3], A = (1, 3)$

∂A,FA Insieme dei punti di frontiera di A

Esempio se $A = (1, 3]$, i punti di frontiera sono i punti $x = 1$ e $x = 3$

Osservazioni

- Se $x_0 \in {}^\circ A \Rightarrow x_0 \notin A$
- Se $x_0 \notin {}^\circ A$ (esterno) $\Rightarrow x_0 \notin A$
- Se $x_0 \in \partial A$ (frontiera) può essere $x_0 \in A$ oppure$x_0 \notin A$, in ogni caso per$\forall I(x_0.\delta)$ continue sia punti di A sia punti CA.

Definizione x_0 è un punto di accumulazione per A se in $\forall I(x_0, \delta)$ esiste un punti di A diverso da x_0. (Cioè in ogni interno di $x_0 \exists$ infiniti elementi di A)

Esempio se $A = (-2, 3], x = -2$ è accumulazione per A, ma anche $x = 3, x = 0, x = 1, \ldots,$ cioè è di accumulazione per A, qualunque $x \in [2, 3]$.
DA=A'=derivato di A è l'insieme dei punti di accumulazione per A. Se $x_0 \in DA$ allora può aversi $x_0 \in A$ oppure $x_0 \notin A$

Esercizio $x = 1 e x = 3$ sono entrambi punti di accumulazione per l'intervallo $(1.3], x = 3$ appartiene all'intervallo dato, x=1 NO.

1. Se $x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in DA$;
2. Se $x \notin DA$ allora x_0 si dice isolato;
3. Se $DA = \phi \Rightarrow$ A si dice discreto **Esempio** $A = \{1, 2, 3, 4\}$
4. Se $DA = A \Rightarrow A$ si dice perfetto **Esempio** $A = [a, b]$

Definizione Dato $A \subset R$ si definisce chiusura di A e si indica con $\bar{A}$, l'insieme: $\boxed{\bar{A} = A \bigcup \partial A}$ A è chiuso $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

Esempio se $A = (2, 5]$, allora $\bar{A} = [2, 5]$

Teorema di Bolzano Weierstrass

Ogni $A \subset R^n$ limitato e finito possiede almeno un punto di accumulazione. Un insieme chiuso e limitato in R^n ammette massimo e minimo assoluto.

Esempio $A = [1, 4],\ max(A) = 4,\ min(A) = 1$ $A = \{x \in R : x^2 \leq 1\}$ $maxA = 1,\ min(A) = -1$

1.2 Funzione di una variabile

1.2.1 Definizione

Dati A, $B \subseteq R$ una funzione A in B è una legge (o relazione, o mappa) che ad ogni elemento x di A associa uno ed un solo elemento y di B. $f\colon A \to B$ oppure $y = f(x)$ $x \in A$ e $y = f(x) \in R$

- A = dominio o insieme di definizione di f.
- B = codominio di f.

Il grafico di f è un insieme di punti del piano (generalmente una curva) che è sottoinsieme del prodotto cartesiano AxB costituito da (x, f(x)) con $x \in A, f(x) \in B$

Definizione di funzione Immagine L'immagine di A tramite f, f(A), è l'insieme dei valori di y tale che $\exists x \in A$ tale che $f(x) \in B$.

Esempio Se $f\colon A \to B$ $f(x) = x^2$ $A = R, f(A) = [0, +\infty)$

Definizione di funzione suriettiva Si dice che $f\colon A \to B$ è suriettiva se $f(A) = B$ (cioè fissato $y \in B \exists x \in A : y = f(x)$)

Definizione di funzione iniettiva Si dice che $f\colon A \to B$ è iniettiva se $x_2 \neq x_1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Una funzione può essere sia iniettiva che suriettiva "biiettiva" Se f è sia suriettiva che iniettiva allora si dice biiettiva (cioè si ha un corrispondenza biunivoca tra A e B)

Quando una funzione è pari? Una funzione è pari se $\forall x \in A : f(x) = f(-x)$ quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse Y (es. $y = x^2$)

Quando una funzione è dispari? Una funzione è dispari se $\forall x \in A : f(-x) = -f(-x), f(x) = -f(-x)$ quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine (es. $y = x^3$)

Quando una funzione è periodica? Una funzione $A \to B$ è periodica di periodo $T > 0$, se $\forall x \in A, x + T \in A$ e $f(x + T) = f(x)$

Esempio Funzioni trigonometriche

Quando una funzione è limitata superiormente? Una funzione si dice limitata superiormente se $\exists M \in R : f(x) \leq M \ \forall x \in A$ (il grafico di f sta sotto la retta orizzontale $y = m$)

Quando una funzione è limitata inferiormente? Analogamente, al caso precedente, una funzione si dice limitata inferiormente se $\exists m \in R : f(x) \leq m \forall x \in A$ (il grafico di f sta sopra la retta orizzontale $y = m$. La funzione f si dirà limitata se è limitata sia inferiormente che superiormente).

Quando una funzione viene definita *composta*? Una funzione $A \to B$ e $B \to C$ si definisce composta di f e g: $g(f(x))$ La funzione $h\colon A \to C h = g^o f$

Esempio f=$x^2, g(x) = 3x + 2,\ (A \equiv B \equiv C \equiv R) g^o f = 3x^2 + 2$

Esempio f=$x^2, g(x) = 3x + 2$
$\boxed{g^o f = 3x^2 + 2}$
L'operazione di composizione non è commutativa ($g^o f \neq f^o g$). La composizione di due funzioni biiettive è biiettiva

Quando una funzione è inversa? Date $f\colon A \to B$ biiettiva, si definisce funzione inversa di f: $f^{-1} :_B\to A$ tale che f^{-1} o $f = I_A$ f o $f^{-1} = I_B$

Nota La funzione $y = x^2$ ($f\colon R \to R$) non è biiettiva ma è stata "resa" biiettiva, quindi invertibile, restringendo il suo dominio (per l'iniettività) e codominio (per la suriettività). Nell'esempio il dominio è stato «rimpicciolito» in modo tale da avere una funzione strettamente crescente e quindi iniettiva. Il codominio è stata «rimpicciolito» all'intervallo massimale $[0, +\infty)$ e la funzione è diventata anche suriettiva.

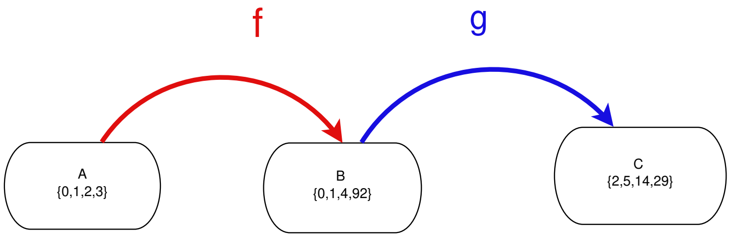


Figura 1.1: Grafico di insieme di $f{=}x^2, g(x) = 3x + 2$

Quando una funzione viene definita monotona? Sia $f{:}A \to B$, f si dice monotona in A se verifica una delle seguenti condizioni $(\forall x_1, x_2 \in A)$

1. f strettamente crescente se $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$
2. f crescente se $x_1 < x_2$, $f(x_1) \leq f(x_2)$
3. f strettamente decrescente se $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$
4. f decrescente se $x_1 < x_2$, $f(x_1) \geq f(x_2)$

Se si verificano la 1 e 3 allora la funzione f(x) è strettamente monotona.

Teorema. Una funzione $f{:}A \to B$ strettamente monotona in A, è invertibile in A. Inoltre la sua inversa è ancora strettamente monotona.

Capitolo 2

Studio di funzione

2.1 Grafica delle funzioni elementari

2.1.1 Funzione lineare $y = mx + qm, q \in R$

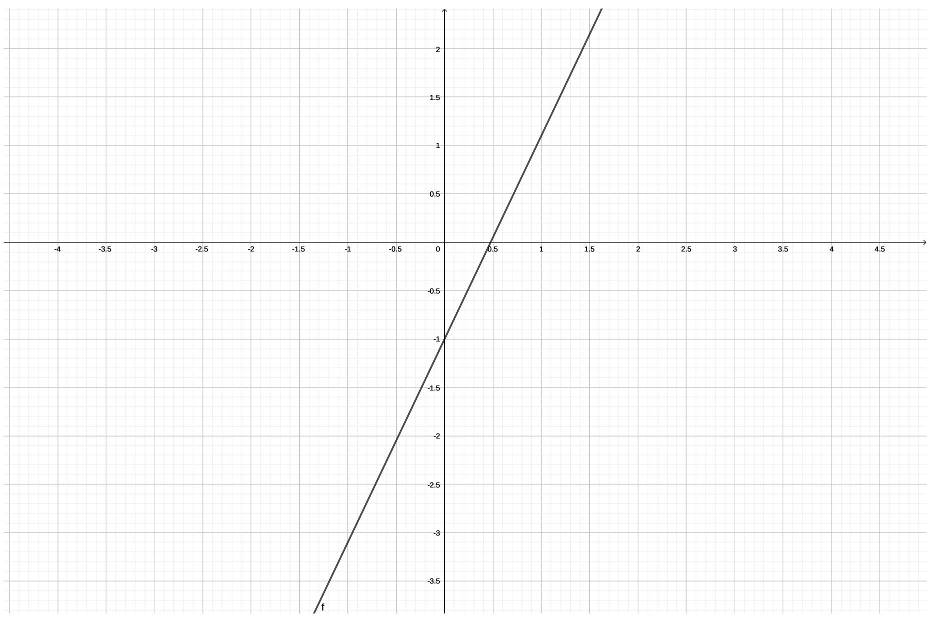


Figura 2.1: Grafico di Funzione lineare $y = mx + qm, q \in R$

$C.E. \equiv R$ Non Limitata

2.1.2 Funzione valore assoluto $y = |x|$

$C.E. \equiv R$ Limitata inferiormente in $x = 0$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

2.1.3 Funzione potenza $y = x^n, n \in N, pari$

2.2 Limiti

2.2.1 Forme indeterminate

$+\infty - \infty$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$ 1^{∞} $e^{+\infty * 0}$

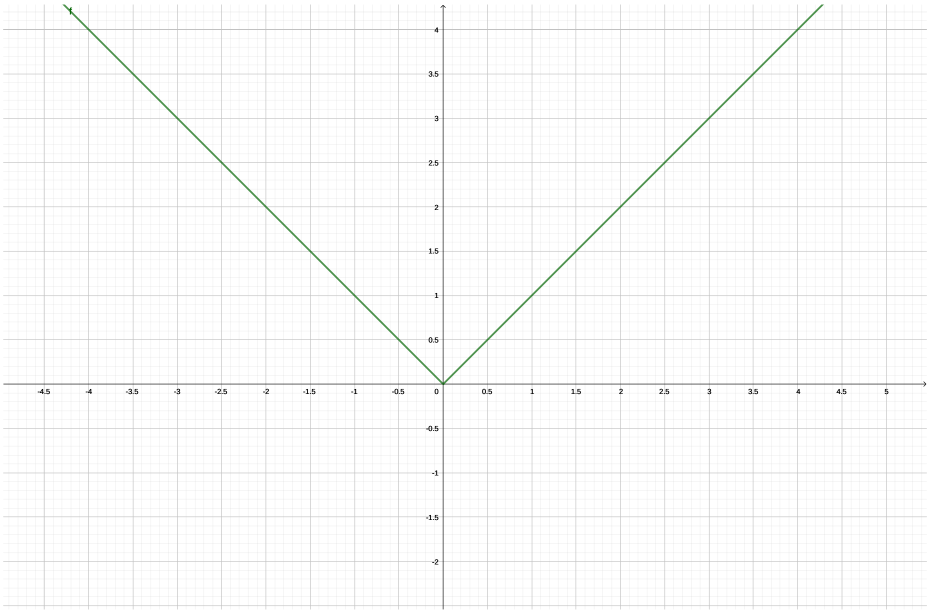


Figura 2.2: Grafico di Funzione valore assoluto $y = |x|$

2.2.2 Infinitesimi e infiniti

Definizione Una funzione $f(x)$ su dice infinitesima per $x \to x_0$ (per $x \to \infty$), x_0 punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, se: $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ (oppure $lim_{x \to \infty} f(x) = 0$).

Esempi

- $y = e^x$ è un infinitesimo per $x \to -\infty$
- $y = \ln x$ è un infinitesimo per $x \to 1$
- $y = \sin x$ è un infinitesimo per $x \to 0$ (ma anche per $x \to \pi, 2\pi$, etc.)
- $y = \ln 1 + x$ è un infinitesimo per $x \to 1$

Ordine di infinitesimo

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesimi per $x \to x_0$ (o per $x \to \infty$), con $g(x) \neq 0$. Se $\exists \alpha R+$ e $l \in R$, $l \neq 0$ tale che $\lim_{x \to x_0} = \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$ (oppure $\lim_{x \to \infty} = \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$)
Allora, si dice che per $x \to x_0$ (o per $x \to \infty$), $f(x)$ è un infinitesimo di ordine α rispetto all'infinitesimo campione $g(x)$.

Esempi

- $y = \sin x$ è un infinitesimo per $x \to 0$ di ordine 1 rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$, infatti, $\lim_{x \to 0} = \frac{\sin x}{x^\alpha} = 1$ solo se $\alpha = 1$
- $y = \tan^2 x$ è un infinitesimo di ordine 2 rispetto ad x, per $x \to 0$
- $ord(l - \cos x) = 2$ rispetto ad x per $x \to 0$

Confronto tra infinitesimi

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesime per $x \to x_0$,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \neq 0 & ord(f) = ord(g) \\ \pm\infty & ord(f) < ord(g) \\ 0 & ord(f) > ord(g) \\ \text{non esiste,} & \text{f e g non confrontabile} \end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesime per $x \to \infty$. Utilizzando il confronto tra infinitesimi nel calcolo dei limiti del tipo $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}$, dove f_1, f_2, g_1, g_2 sono funzioni infinitesime per $x \to x_0$, si possono *trascurare gli infinitesimi di ordine maggiore* (analogo discorso per funzioni infinitesime $x \to \infty$).

esempio $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^3+2\tan x}{(e^x-1)^2+\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\tan x}{\sin x} = 2$

Definizione di funzioni asintotiche Si dice che due funzioni f, g sono asintotiche per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e si scrive $f \sim g$ per $x \to x_0$

esempi

- $\sin x \sim x$ per $x \to 0$
- $\ln(1+x) \sim x$ per $x \to 0$
- $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$

Definizione di funzioni infinite Una funzione $f(x)$ si dice *infinita* per $x \to x_0$ (o per $x \to \infty$) , x_0 punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, (o per $x \to \infty$) se:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \text{ (oppure } \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty)$$

Esempi

- $y = e^x$ è un infinito per $x \to +\infty$
- $y = \ln x$ è un infinito per $x \to 0^+$
- $y = x^2 + x$ è un infinito per $x \to \infty$

Regole aritmetiche Siano $f(x) = o(x^\alpha)$ (si legge «o piccolo di») e $g(x) = o(x^\beta)$ due funzioni *infinitesime* rispettivamente di ordine α e β per $x \to 0$ Allora si ha

- $cf(x))o(x^\alpha)$, $\forall c \in R$
- $x^\lambda f(x) = o(x^{\lambda+\alpha})$
- $f(x)g(x) = o(x^{\alpha+\beta})$
- $f(x) + g(x) = o(x^y)$, $\gamma = min(\alpha, \beta)$

Ordine di infinito Siamo $f(x)$ e $g(x)$ infiniti per $x \to x_0$ (o per x), con $g \neq 0$. Se $\exists \alpha \in R+$ e $l \in R$, $l \neq 0$ tale che
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^2} = l$ (o $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$)
Allora, per $x \to x_0$ (o per $x \to \infty$), $f(x)$ è un infinito di ordine α rispetto all'infinito compone $g(x)$.

Esempi

- $ord(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}$ rispetto ad x per $x \to +\infty$
- $ord(\frac{1}{\sin x}) = 1$ rispetto ad $\frac{1}{x}$ per $x \to 0$
- $ord(\frac{1}{e^x - 1}) = 1$ rispetto ad $\frac{1}{x}$ per $x \to 0$

Cofronto tra infiniti Siamo $f(x)$ e $g(x)$ infiniti per $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \neq 0 & ord(f) = ord(g) \\ \pm\infty & ord(f) > ord(g) \\ 0 & ord(f) < ord(g) \\ \text{non esiste,} & \text{f e g non confrontabile} \end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinite per $x \to \infty$. Utilizzando il confronto tra infiniti nel calcolo dei limiti del tipo $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}$, deve f_1, f_2, g_1, g_2 sono funzioni infinite per $x \to x_0$, si possono trascurare gli infiniti di ordine minore (analogo discorso per funzione infinito $x \to \infty$).

Esempio $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x^3+3\sqrt{x}}{x^2(2x-1)+\sqrt{3x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$.

Gerarchia degli infiniti Per $x \to +\infty$ si ha $(\log_\alpha x)^\alpha << x^\beta << b^x$, con $\alpha, \beta > 0, a, b > 1$ Non sempre è possibile calcolare l'ordine di infinito (o di infinitesimo) rispetto alla funzione campione usuale.

Esempio $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^a} = +\infty, \forall\alpha > 0, a > 1$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^a} = +\infty, \forall\alpha, \beta > 0, a > 1$

Regole aritmetiche Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni *infinite* di ordine rispettivamente α e β. Allora si ha

- $ord(f(x) + g(x)) = \max \alpha, \beta$
- $ord(f(x) * g(x)) = \alpha + \beta$
- $ord((f(x))^\gamma) = \alpha\gamma$

2.2.3 Funzioni continue

Una funzione continua è una funzione che, intuitivamente, fa corrispondere ad elementi sufficientemente vicini del dominio elementi arbitrariamente vicini del codominio.

Definizione Una funzione $f(x)$ è continua in x_0, se: $l_1 = \lim_{x\to x_0^+} = \lim_{x\to x_0} f(x) = l_2 = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ossia $\forall \in> 0 \exists\delta_\mathcal{E} > 0$: $|f(x) - f(x_0)| < \mathcal{E}\ \forall_x \in I(x_0, \delta_\mathcal{E})$ $(l = f(x_0))$

Teorema della permanenza del segno

Sia f(x) definita almeno in un intorno di x_0 e continua in x_0. Se $f(x_0) > 0$ allora $\exists\delta > 0 : f(x) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Teorema degli zeri

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ $f(a) * f(b) < 0$ allora $\exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$. Se f è anche strettamente monotona, lo zero è unico.

Teorema dell'esistenza dei valori intermedi (*conseguenza del teorema degli zeri*) Una funzione $f(x)$ continue in $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$.

Teorema di Wierstrass (sul massimo e il minimo)

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume massimo e il minimo assoluto in $[a, b]$, cioé $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$: $f(x_1) \leq f$

2.2.4 Criteri di invertibilità

Una funzione continua e strettamente monotona in [a,b] è invertibile in tale intervallo. Dimostrazione.