Appunti di Algebra e geometria

Nicola Ferru

Indice

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure

0.1 Premesse...

In questo repository sono disponibili pure le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra* consiglio a tutti di dargli un occhiata e di stare attenti perché possono essere presenti delle modifiche per migliorare il contenuto degli stessi appunti, comunque solitamente vengono fatte revisioni tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che questo è un progetto volontario e che per questo motivo ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure potrebbero esserci degli errori, chiedo la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare una modifica. Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open souce e infatti sono disponibili i sorgenti dei file allegati insieme ai PDF.

Cordiali saluti

0.2 Simboli

$\in$ Appartiene
$\notin$ Non appartiene
$\exists$ Esiste
$\exists!$ Esiste unico
$\subset$ Contenuto strettamente
$\subseteq$ Contenuto
$\supset$ Contenuto strettamente
$\supseteq$ Contiene

$\Rightarrow$ Implica
$\Longleftrightarrow$ Se e solo se
$\neq$ Diverso
$\forall$ Per ogni
$\ni$: Tale che
$\leq$ Minore o uguale
$\geq$ Maggiore o uguale
α alfa

β beta
γ gamma
Γ Gamma
δ, Δ delta
ϵ epsilon
σ, Σ sigma
ρ rho

Capitolo 1

Vettori

1.1 Spazio Vettoriale

Spazio Vettoriale 1. *Uno spazio vettoriale reale (R-spazio vettoriale) è un insieme V in cui sono definite un'operazione di* `SOMMA` *tra elementi di V e un'operazione di* `Prodotto tra un reale` *e un elemento di V che soddisfano 8 proprietà:*

1. La somma è associativa quando $\forall v_1,\ v_2,\ v_3 \in V\ (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$;
2. La somma è commutativa quando $\forall v_1, v_2 \in V\ v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
3. Esistenza elemento neutro 0 se e solo se $\forall v \in V\ v + 0 = 0 + v = v$
4. Esistenza opposto $-v$ se e solo se $\forall v \in V\ v + (-v) = (-v) + v = 0$
5. Il prodotto per uno scalare è assoluto quando $\forall c_1, c_2 \in R, \forall v \in V\ c_1(c_2v) = (c_1c_2)v$
6. Il prodotto per uno scalare è distributiva quando $\forall c_1, c_2 \in R, \forall v \in V\ (c_1 + c_2)v = c_1v + c_2v$
7. Il prodotto per uno scalare è distributiva quando $\forall c \in R, \forall v_1, v_2 \in V\ c(v_1 + v_2) = cv_1 + cv_2$
8. Esistenza elemento neutro 1 quando $\forall v \in V\ 1v = v$

ES: $V_0^2\ V_0^3$

ES: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x^2,\ g(x) = e^x,\ f(x) + g(x) = x^2 + e^x\ 3f(x) = 3x^2$

ES: $\mathbb{R}^n$ n-uple di numeri reali

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad C \in \mathbb{R}\ c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix}$$

ES: $\mathbb{R}_n[x]$ polinomi di grado $\leq n$ nella variabile x a coefficiente reale

- $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$
- $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$

ES: $\mathbb{R}[x]$ polinomio di grado qualsiasi

$$p(x) + q(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$
$$c \in \mathbb{R},\ cp(x) = ca_0 + ca_1x + ca_2x^2 + \cdots + ca_nx^n$$

Capitolo 2

Numeri Complessi

Numeri reali 1. *Un numero complesso è definito come un numero della forma $x + iy$, con x e y numeri reali e i una soluzione dell'equazione $x^2 = -1$ detta unità immaginaria. i numeri reali sono*

2.1 Operazioni con Numeri complessi

1. Modulo e distanza
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.1}$$
   Il valore assoluto (modulo) ha proprietà queste proprietà:
$$|z + w| \geq |z| + |w|, \ |zw| = |z||w|, \ \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$
   Valide per tutti i numeri complessi z e w. La prima proprietà è una versione della disuguaglianza triangolare.

Capitolo 3

Autovalori e autovettori

3.1 Definizione, esempi e applicazioni

Definizione. *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $f : V \to V$ un endomorfismo*[1]*. Un dice autovettore di f se si ha*

$$f(v) = \lambda v \tag{3.1}$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$. Il coefficiente numerico λ si dice *autovalore relativo all'autovettore v.*

In altre parole, un autovettore è un vettore non nullo che viene mandato dalla funzione in un suo multiplo. Notiamo che questo è sempre banalmente vero per il vettore nullo $\bar{0}$, in quanto come sappiamo (*si deve l'inizio dela dimostrazione della Proposizione*) se f è un lineare allora $f(\bar{0}) = \bar{0}$ è verifica sempre per qualunque endomorfismo e qualunque scalare λ (è per questo motivo che questo caso banale viene escluso dalla definizione).
Vediamo subito alcuni esempi di autovettori:

Esempio. *Sia $V = V_O^2$ lo spazio dei vettori geometrici applicati in un punto O del piano e sia $f : V_O^2 \to V_O^2$ la ruflessione rispetto a una retta r che passa per O. Quando riflettiamo un vettore $v = \vec{OP}$ perpendicolare alla retta r, il vettore viene mandato nel suo opposto, ovvero $f(v) = -v = (-1)v$. Quinmdi tale vettore è un atovettore f con autovalore associato -1.*