Appunti di Matematica

Nicola Ferru

Indice

0.1 Premesse...

In questo repository sono disponibili pure le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra* consiglio a tutti di dargli un occhiata e di stare attenti perché possono essere presenti delle modifiche per migliorare il contenuto degli stessi appunti, comunque solitamente vengono fatte revisioni tre/quattro volte alla settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che questo è un progetto volontario e che per questo motivo ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure potrebbero esserci degli errori, chiedo la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare una modifica. Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open souce e infatti sono disponibili i sorgenti dei file allegati insieme ai PDF.

Cordiali saluti

Parte I

Matematica analisi 1

0.2 Simboli

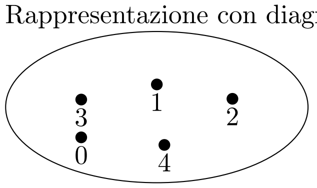
$\in$ Appartiene	$\Rightarrow$ Implica	β beta
$\notin$ Non appartiene	$\Longleftrightarrow$ Se e solo se	γ gamma
$\exists$ Esiste	$\neq$ Diverso	Γ Gamma
$\exists!$ Esiste unico	$\forall$ Per ogni	δ, Δ delta
$\subset$ Contenuto strettamente	$\ni$: Tale che	ϵ epsilon
$\subseteq$ Contenuto	$\leq$ Minore o uguale	σ, Σ sigma
$\supset$ Contenuto strettamente	$\geq$ Maggiore o uguale	ρ rho
$\supseteq$ Contiene	α alfa	

Capitolo 1

Cenni di teoria degli insiemi

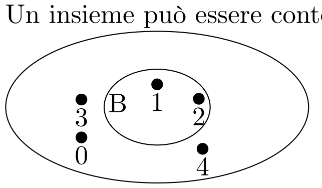
Per rappresentare un insieme abbiamo tre possibilità:

1. Rappresentazione estensive $A = [0, 1, 2, 3, 4]$
2. Rappresentazione intensiva $A = [x|x \in N e x < 5]$
3. Rappresentazione con diagrammi di Eulero - Venn



1.0.1 Operazioni tra gli insiemi

Un insieme può essere contenuto in un altro:



1.1 Sottoinsiemi di R

1.1.1 Definizione

1. Un punto x_0 si dice intero ad A se esiste un suo interno I(x_0, δ) con $\delta > 0$ contenuto in A.
2. Si dice esterno ad A se è interno al CA (A^c).
3. Si dice di frontiera per A se non è né interno né esterno ad A.

Interno di A

°A Insieme dei punti interni ad A.

Esempio se $A = (1, 3], A = (1, 3)$

∂A,FA Insieme dei punti di frontiera di A

Esempio se $A = (1, 3]$, i punti di frontiera sono i punti $x = 1$ e $x = 3$

Osservazioni

- Se $x_0 \in {}^\circ A \Rightarrow x_0 \notin A$
- Se $x_0 \notin {}^\circ A$ (esterno) $\Rightarrow x_0 \notin A$
- Se $x_0 \in \partial A$ (frontiera) può essere $x_0 \in A$ oppure$x_0 \notin A$, in ogni caso per$\forall I(x_0.\delta)$ continue sia punti di A sia punti CA.

Definizione x_0 è un punto di accumulazione per A se in $\forall I(x_0, \delta)$ esiste un punti di A diverso da x_0. (Cioè in ogni interno di $x_0 \exists$ infiniti elementi di A)

Esempio se $A = (-2, 3], x = -2$ è accumulazione per A, ma anche $x = 3, x = 0, x = 1, \dots,$ cioè è di accumulazione per A, qualunque $x \in [2, 3]$.
DA=A'=derivato di A è l'insieme dei punti di accumulazione per A. Se $x_0 \in DA$ allora può aversi $x_0 \in A$ oppure $x_0 \notin A$

Esercizio $x = 1ex = 3$ sono entrambi punti di accumulazione per l'intervallo $(1.3], x = 3$ appartiene all'intervallo dato, x=1 NO.

1. Se $x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in DA$;
2. Se $x \notin DA$ allora x_0 si dice isolato;
3. Se $DA = \phi \Rightarrow$ A si dice discreto **Esempio** $A = \{1, 2, 3, 4\}$
4. Se $DA = A \Rightarrow A$ si dice perfetto **Esempio** $A = [a, b]$

Definizione Dato $A \subset R$ si definisce chiusura di A e si indica con $\bar{A}$, l'insieme: $\boxed{\bar{A} = A \bigcup \partial A}$ A è chiuso $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

Esempio se $A = (2, 5]$, allora $\bar{A} = [2, 5]$

Teorema di Bolzano Weierstrass

Ogni $A \subset R^n$ limitato e finito possiede almeno un punto di accumulazione. Un insieme chiuso e limitato in R^n ammette massimo e minimo assoluto.

Esempio $A = [1, 4],\ max(A) = 4,\ min(A) = 1\ A = \{x \in R : x^2 \leq 1\}\ maxA = 1,\ min(A) = -1$

1.2 Funzione di una variabile

1.2.1 Definizione

Dati A, $B \subseteq R$ una funzione A in B è una legge (o relazione, o mappa) che ad ogni elemento x di A associa uno ed un solo elemento y di B. $f \colon A \to B$ oppure $y = f(x)\ x \in A$ e $y = f(x) \in R$

- A = dominio o insieme di definizione di f.
- B = codominio di f.

Il grafico di f è un insieme di punti del piano (generalmente una curva) che è sottoinsieme del prodotto cartesiano AxB costituito da (x, f(x)) con $x \in A, f(x) \in B$

Definizione di funzione Immagine L'immagine di A tramite f, f(A), è l'insieme dei valori di y tale che $\exists x \in A$ tale che $f(x) \in B$.

Esempio Se $f\colon A \to B$ $f(x) = x^2$ $A = R, f(A) = [0, +\infty)$

Definizione di funzione suriettiva Si dice che $f\colon A \to B$ è suriettiva se $f(A) = B$ (cioè fissato $y \in B \exists x \in A : y = f(x)$)

Definizione di funzione iniettiva Si dice che $f\colon A \to B$ è iniettiva se $x_2 \neq x_1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Una funzione può essere sia iniettiva che suriettiva "biiettiva" Se f è sia suriettiva che iniettiva allora si dice biiettiva (cioè si ha un corrispondenza biunivoca tra A e B)

Quando una funzione è pari? Una funzione è pari se $\forall x \in A : f(x) = f(-x)$ quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse Y (es. $y = x^2$)

Quando una funzione è dispari? Una funzione è dispari se $\forall x \in A : f(-x) = -f(-x), f(x) = -f(-x)$ quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine (es. $y = x^3$)

Quando una funzione è periodica? Una funzione $A \to B$ è periodica di periodo $T > 0$, se $\forall x \in A, x + T \in A$ e $f(x + T) = f(x)$

Esempio Funzioni trigonometriche

Quando una funzione è limitata superiormente? Una funzione si dice limitata superiormente se $\exists M \in R : f(x) \leq M \ \forall x \in A$ (il grafico di f sta sotto la retta orizzontale $y = m$)

Quando una funzione è limitata inferiormente? Analogamente, al caso precedente, una funzione si dice limitata inferiormente se $\exists m \in R : f(x) \leq m \forall x \in A$ (il grafico di f sta sopra la retta orizzontale $y = m$. La funzione f si dirà limitata se è limitata sia inferiormente che superiormente).

Quando una funzione viene definita *composta*? Una funzione $A \to B$ e $B \to C$ si definisce composta di f e g: $g(f(x))$ La funzione $h\colon A \to C h = g^o f$

Esempio f=$x^2, g(x) = 3x + 2,\ (A \equiv B \equiv C \equiv R) g^o f = 3x^2 + 2$

Esempio f=$x^2, g(x) = 3x + 2$
$\boxed{g^o f = 3x^2 + 2}$
L'operazione di composizione non è commutativa ($g^o f \neq f^o g$). La composizione di due funzioni biiettive è biiettiva

Quando una funzione è inversa? Date $f\colon A \to B$ biiettiva, si definisce funzione inversa di $f\colon f^{-1} :_B \to A$ tale che f^{-1} o $f = I_A$ f o $f^{-1} = I_B$

Nota La funzione $y = x^2$ ($f\colon R \to R$) non è biiettiva ma è stata "resa" biiettiva, quindi invertibile, restringendo il suo dominio (per l'iniettività) e codominio (per la suriettività). Nell'esempio il dominio è stato «rimpicciolito» in modo tale da avere una funzione strettamente crescente e quindi iniettiva. Il codominio è stata «rimpicciolito» all'intervallo massimale $[0, +\infty)$ e la funzione è diventata anche suriettiva.

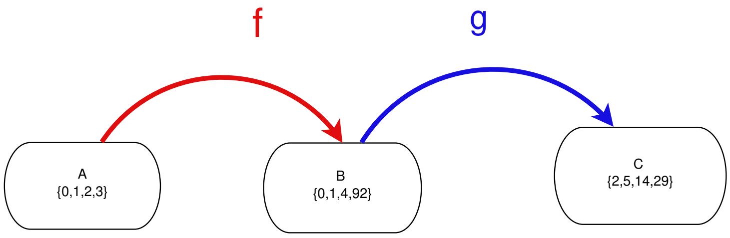


Figura 1.1: Grafico di insieme di f=x^2, $g(x) = 3x + 2$

Quando una funzione viene definita monotona? Sia f:$A \to B$, f si dice monotona in A se verifica una delle seguenti condizioni $(\forall x_1, x_2 \in A)$

1. f strettamente crescente se $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$
2. f crescente se $x_1 < x_2$, $f(x_1) \leq f(x_2)$
3. f strettamente decrescente se $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$
4. f decrescente se $x_1 < x_2$, $f(x_1) \geq f(x_2)$

Se si verificano la 1 e 3 allora la funzione f(x) è strettamente monotona.

Teorema. Una funzione f:$A \to B$ strettamente monotona in A, è invertibile in A. Inoltre la sua inversa è ancora strettamente monotona.

Capitolo 2

Studio di funzione

```
In analisi matematica la locuzione studio di funzione indica l'applicazione pratica dei
teoremi e delle tecniche del calcolo infinitesimale nello specifico caso di una funzione
di cui è nota l'espressione analitica. Lo studio di funzione è utile per ricavare esplicitamente
le informazioni che descrivono il comportamento di una funzione nel suo dominio. Spesso,
le informazioni ottenute mediante uno studio di funzione sono sufficienti per poter tracciare,
anche a mano, un grafico qualitativo della funzione studiata e che in genere, per funzioni
a valori reali di una variabile reale, viene rappresentato su un piano cartesiano, anche
se in taluni casi potrebbe essere più semplice ricorrere un sistema di coordinate differente.
In genere, con "studio di funzione" ci si riferisce implicitamente al solo e specifico caso
delle funzioni reali di una sola variabile reale, ma con le opportune modifiche è comunque
possibile adattare le considerazioni seguenti anche al caso delle funzioni di più variabili
reali, nonché anche per le funzioni di una o più variabili complesse.
```

By Wikipedia

2.1 Grafica delle funzioni elementari

2.1.1 Funzione lineare $y = mx + qm, q \in R$

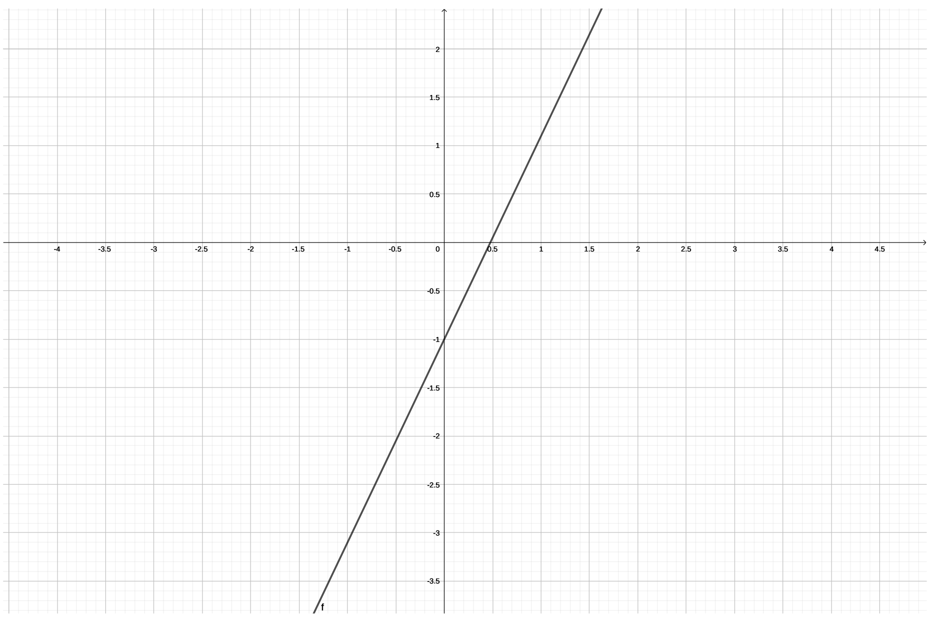


Figura 2.1: Grafico di Funzione lineare $y = mx + qm, q \in R$

$C.E. \equiv R$ Non Limitata

2.1.2 Funzione valore assoluto $y = |x|$

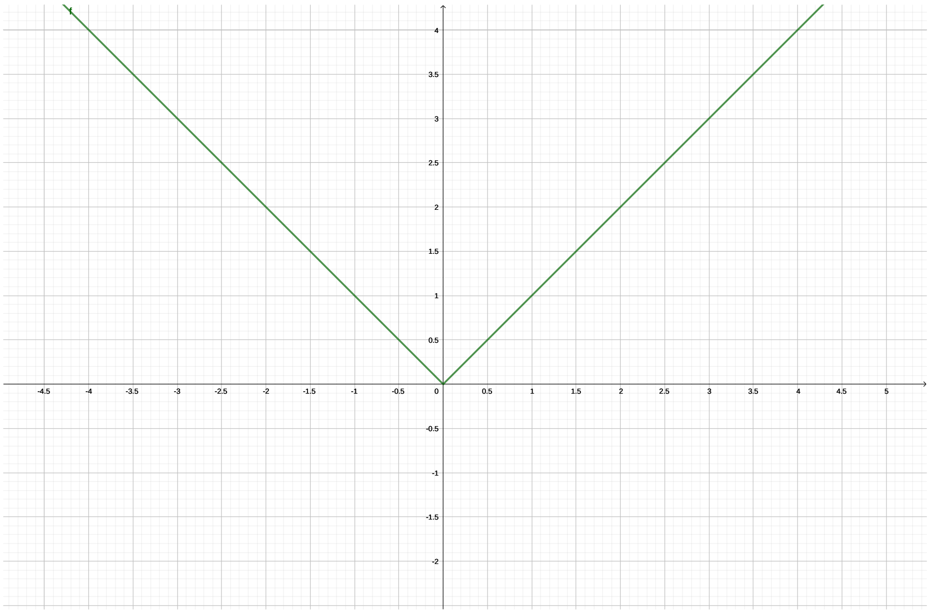


Figura 2.2: Grafico di Funzione valore assoluto $y = |x|$

$C.E. \equiv R$ Limitata inferiormente in $x = 0$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

2.1.3 Funzione potenza $y = x^n, n \in N, pari$

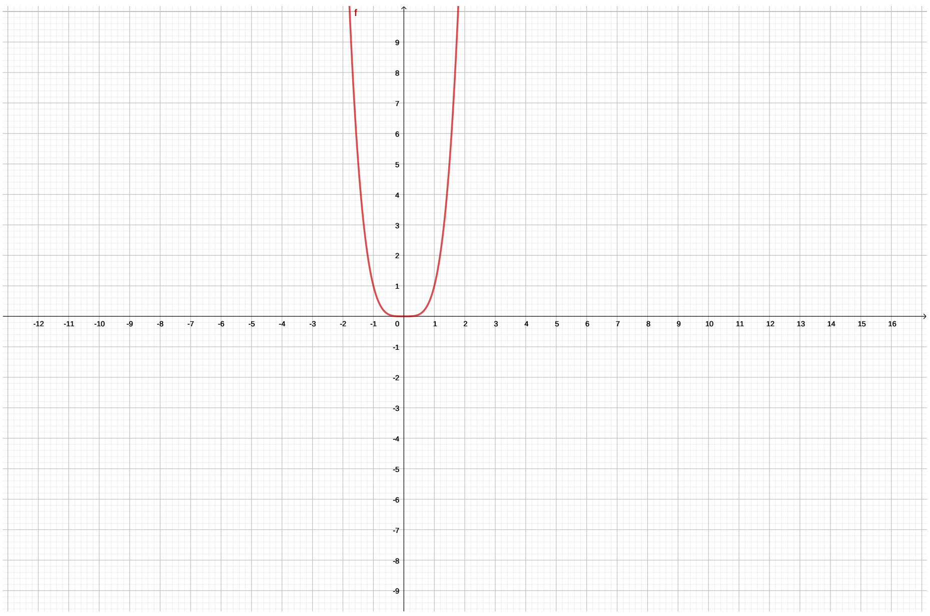


Figura 2.3: Grafico di Funzione potenza $y = x^n, n \in N, pari$

2.1.4 Funzione potenza $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$ (*ma non razionale*)

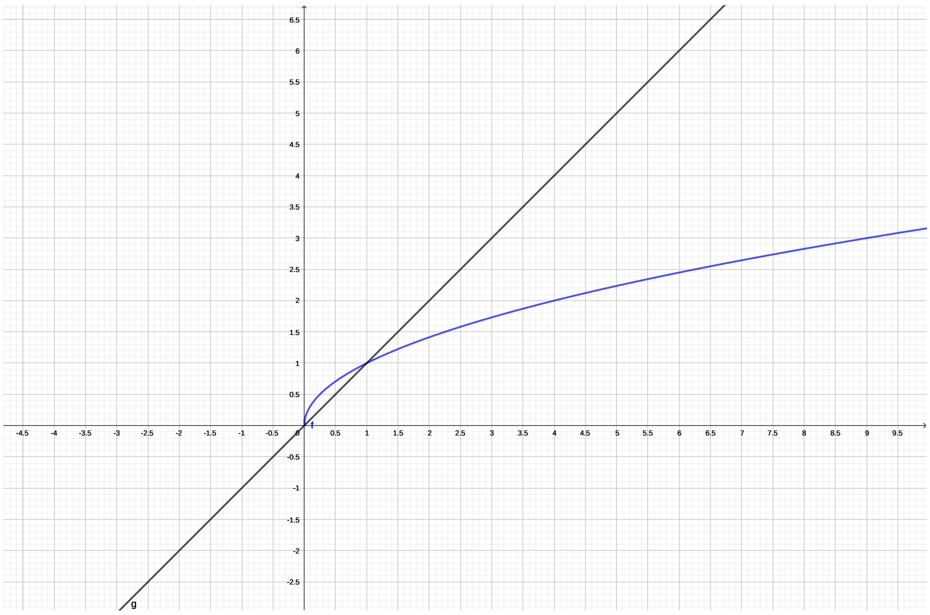


Figura 2.4: Grafico di Funzione potenza $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$ (*ma non razionale*)

$C.E.$: $\{x \in R : x \geq 0\}$ Limitata inferiormente da $x = 0$ non limitata superiormente Strettamente crescente

2.1.5 Funzione potenziale $y = x^{\frac{m}{n}}, m, n \in Z$

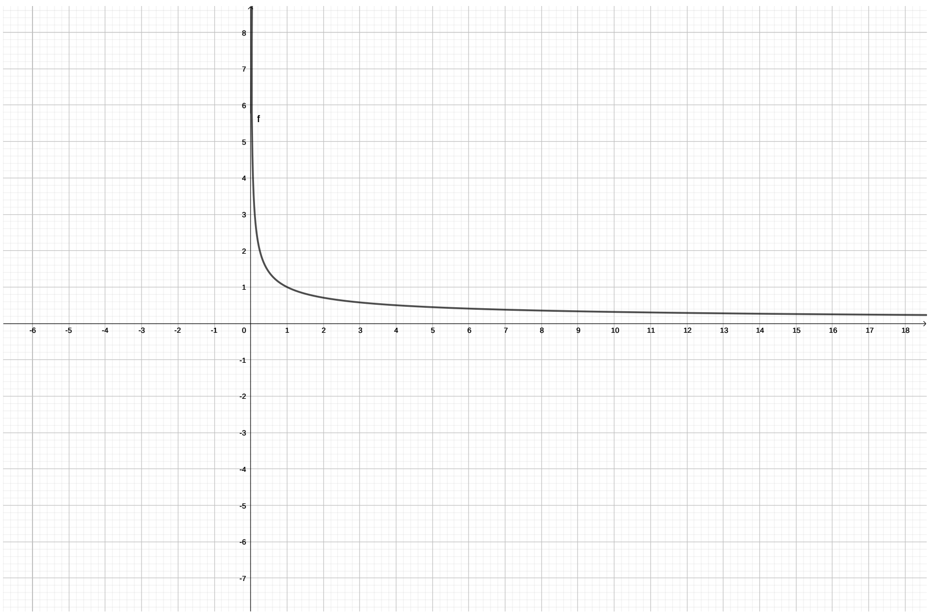


Figura 2.5: Grafico di Funzione potenza $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$ (*ma non razionale*)

2.1.6 Funzione logaritmo $y = \log_a x$

$C.E. \equiv x > 0$ Non limitata, strettamente crescente se $a > 1$, Strettamente decrescente se $0 < a < 1$.

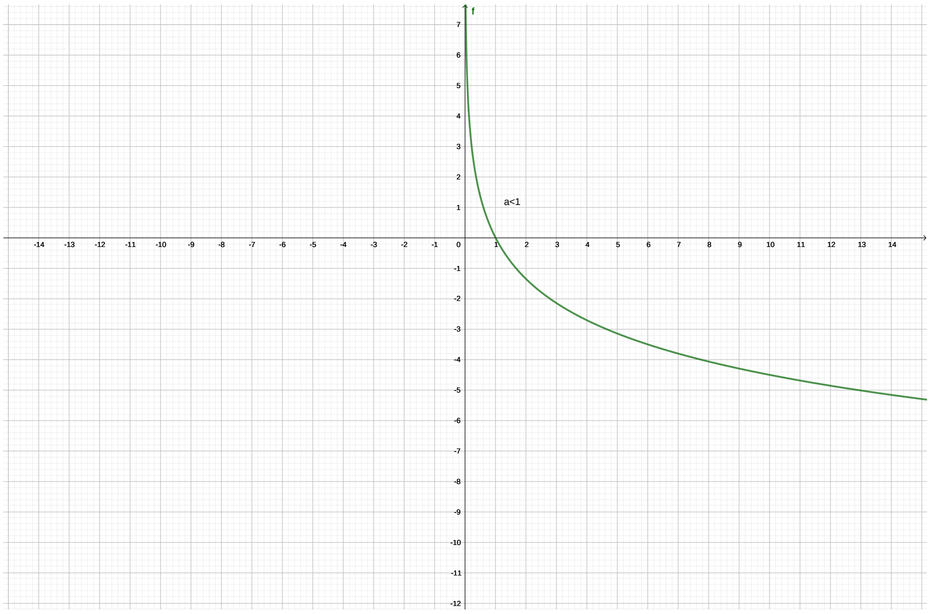


Figura 2.6: Funzione logaritmo $y = \log_a x$

2.1.7 Le coniche: la circonferenza

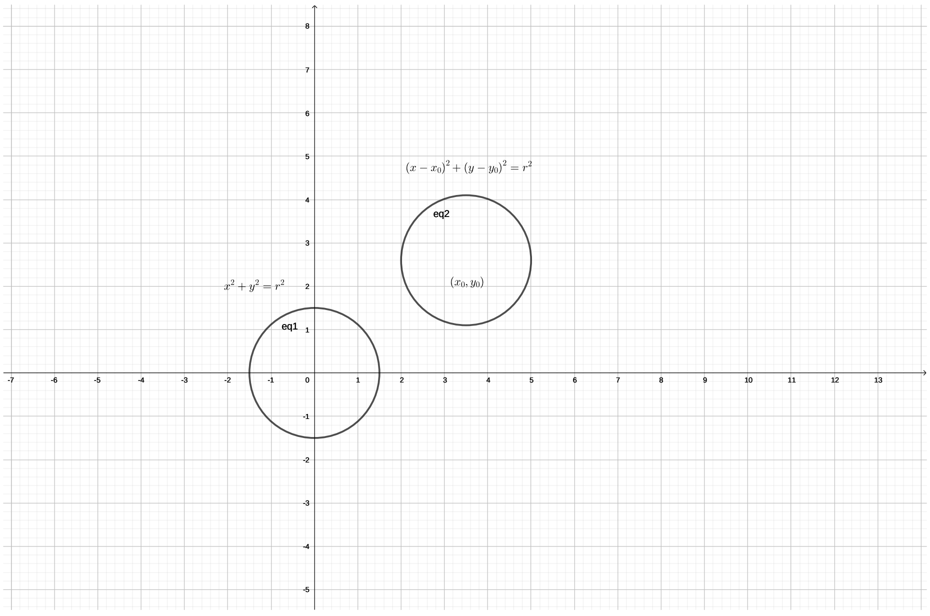


Figura 2.7: Le coniche: la circonferenza

2.1.8 Le coniche: l'ellisse

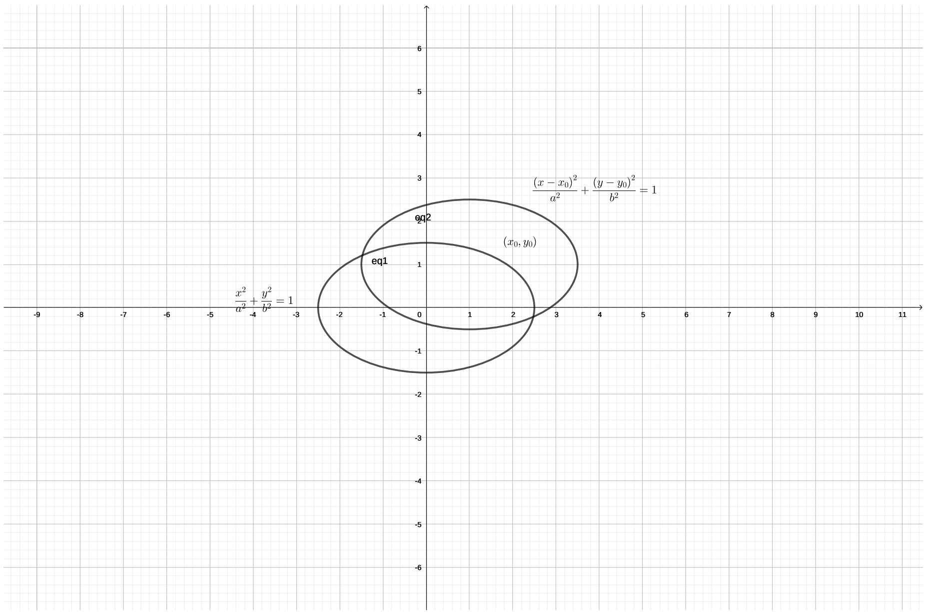


Figura 2.8: Le coniche: l'ellisse

2.1.9 Le coniche: iperbole

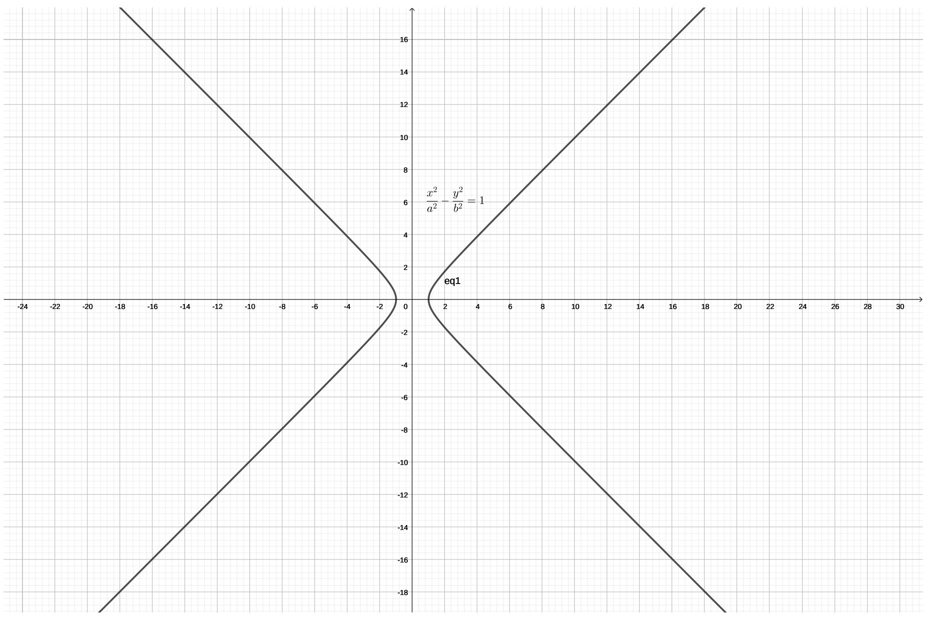


Figura 2.9: Le coniche: iperbole

2.1.10 Le coniche: iperbole equilattera

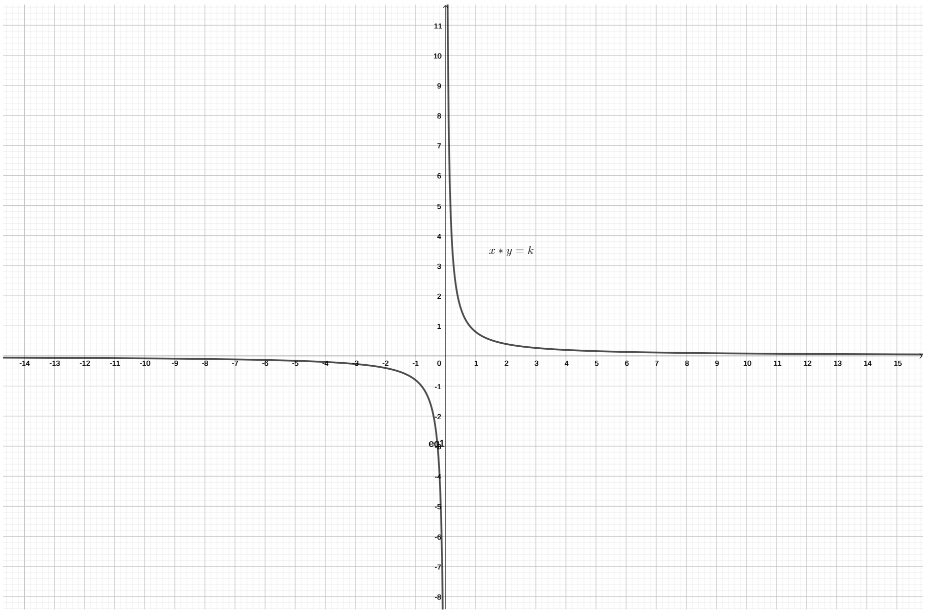


Figura 2.10: Le coniche: iperbole equilattera

2.1.11 Le coniche: parabola

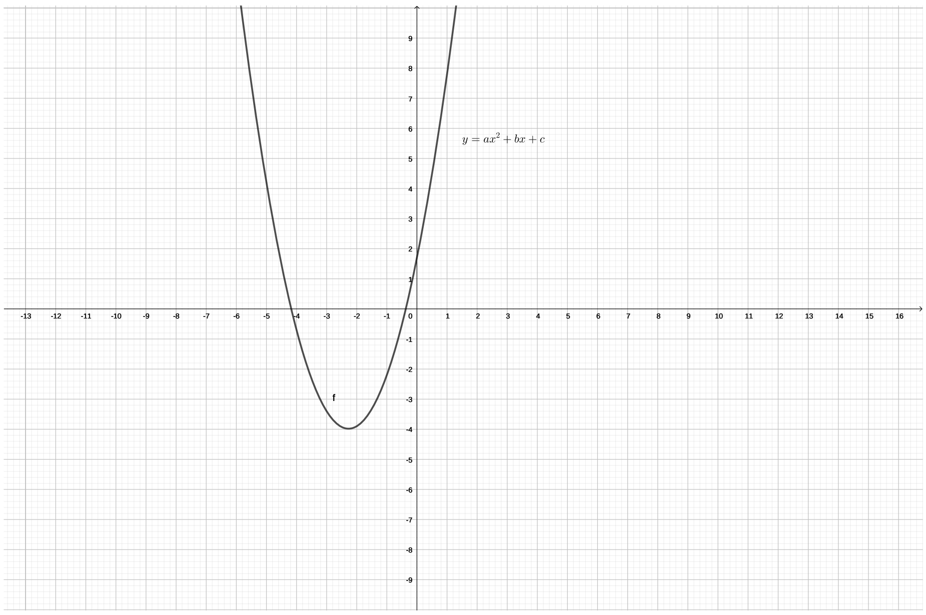


Figura 2.11: Le coniche: parabola

2.1.12 Le funzioni trigonometriche

Funzioni trigonometriche elementati: $y = \sin x, y = cosx, y = \tan x, y = \cot x$
Relazioni fondamentali: $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

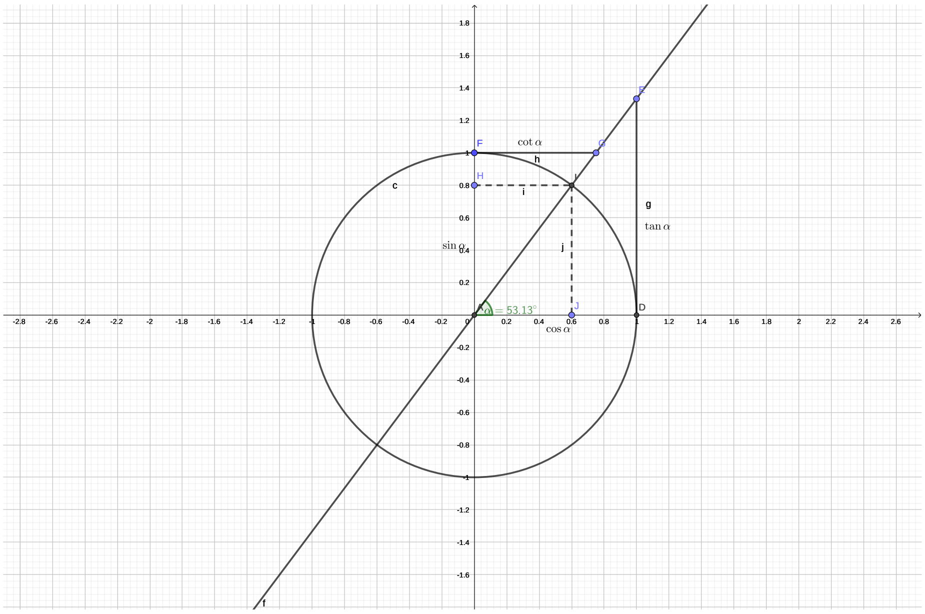


Figura 2.12: Le funzioni trigonometriche

Funzione $\sin x$

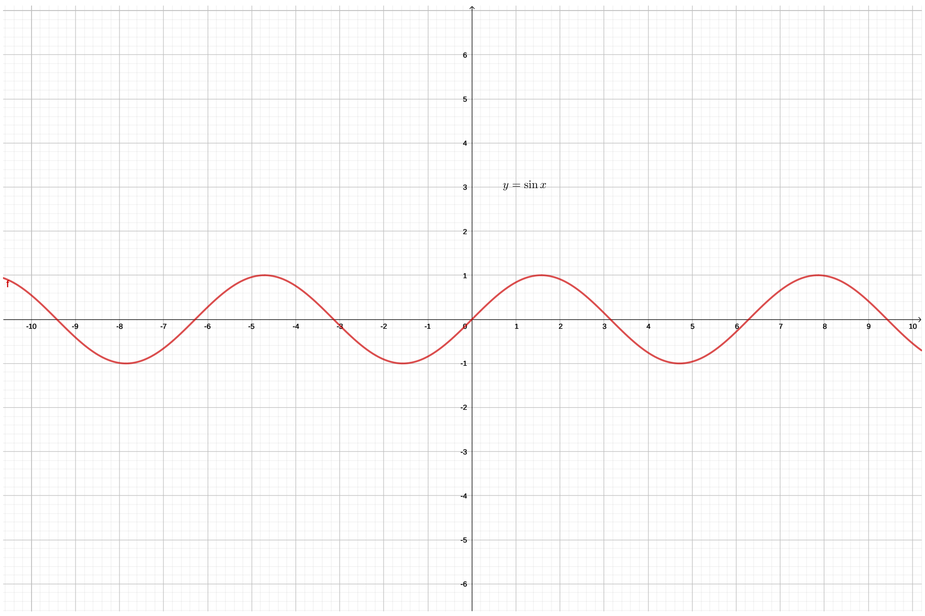


Figura 2.13: Funzione $\sin x$

Funzione $\cos x$

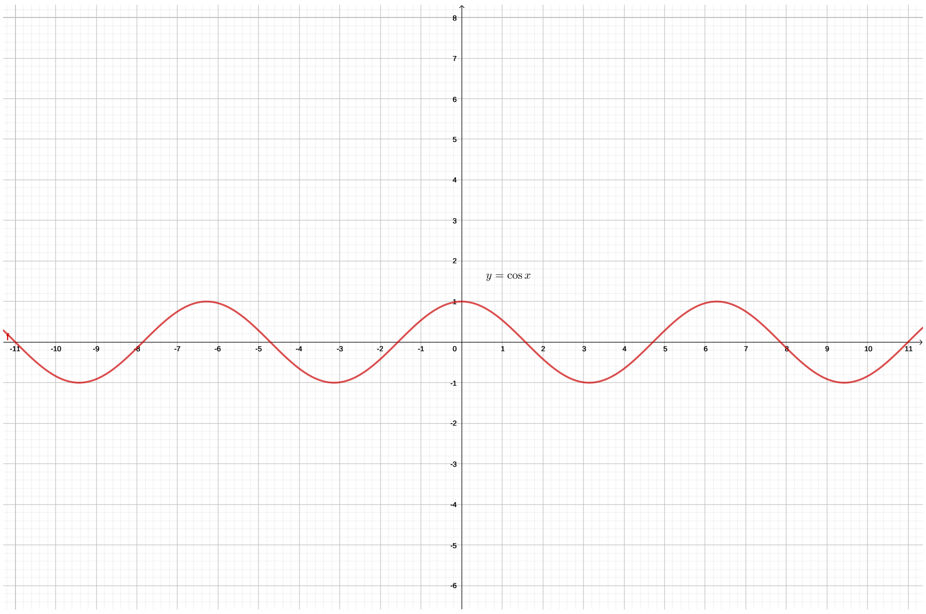


Figura 2.14: Funzione $\cos x$

Funzione $\tan x$

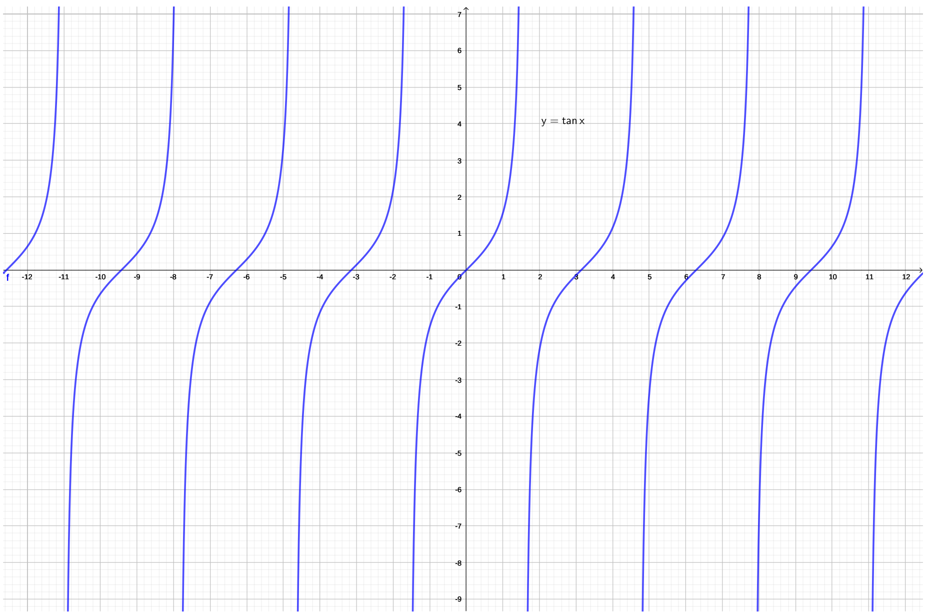


Figura 2.15: Funzione $\tan x$

Funzione $\cot x$

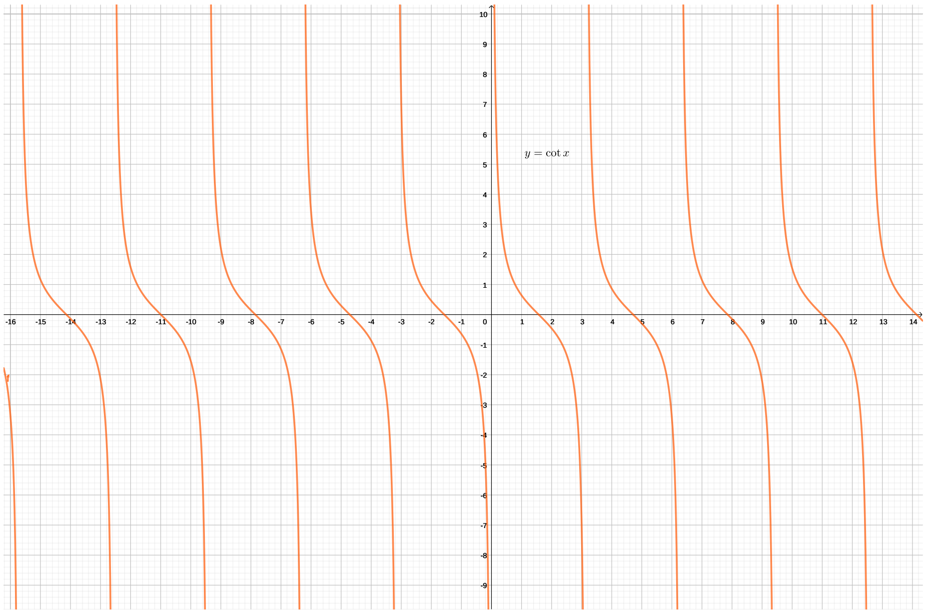


Figura 2.16: Funzione $\cot x$

2.1.13 Le funzioni trigonometriche inverse

Funzione $\arcsin x$

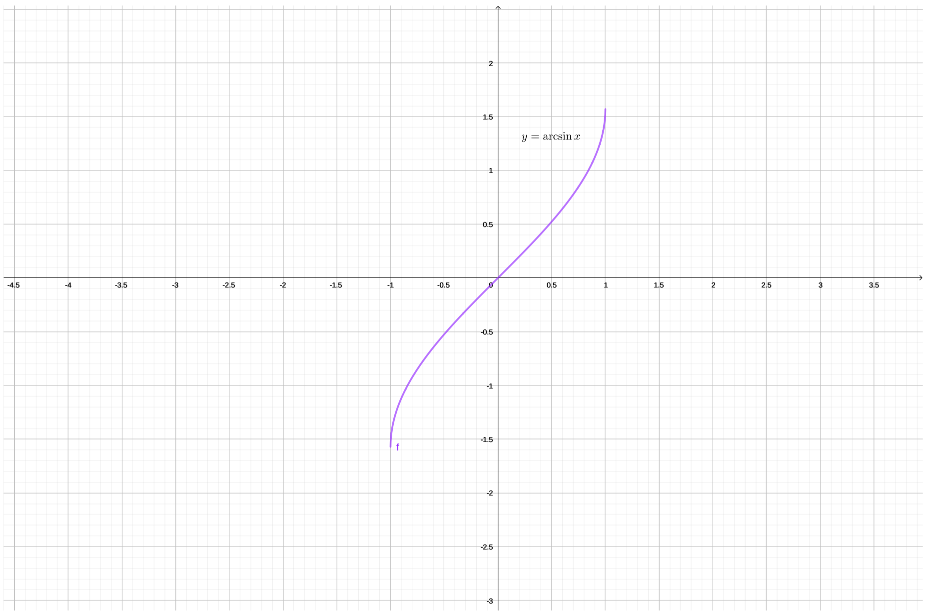


Figura 2.17: Funzione $\arcsin x$

Funzione $\arccos x$

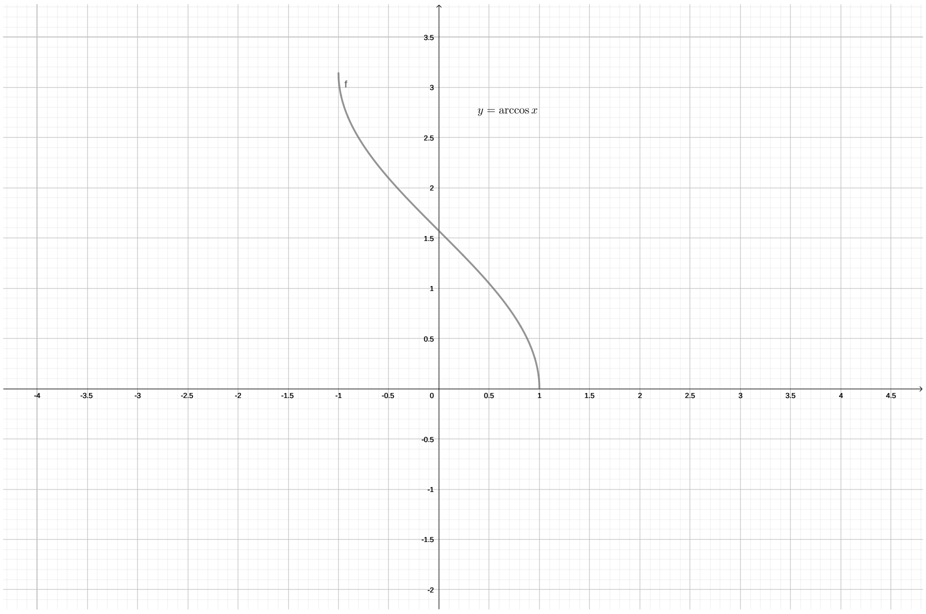


Figura 2.18: Funzione $\arccos x$

Funzione $\arctan x$

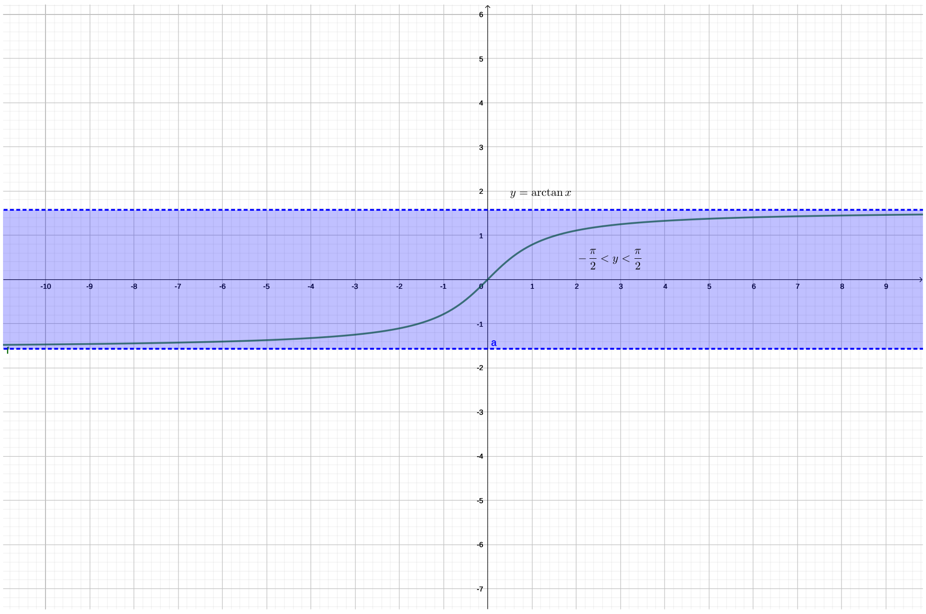


Figura 2.19: Funzione $\arctan x$

Operazione sul grafico: traslazione della asse X

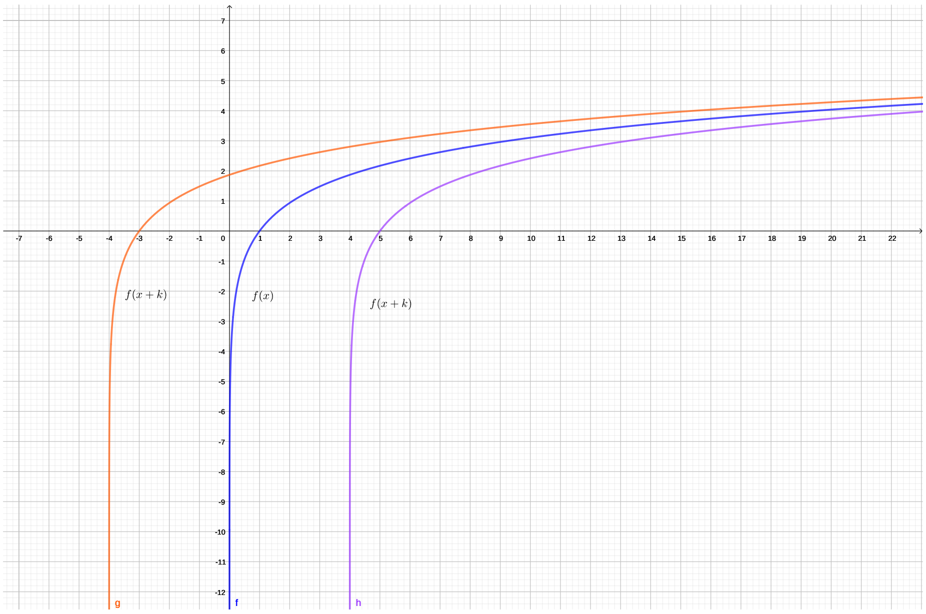


Figura 2.20: Operazione sul grafico: traslazione della asse X

Operazione sul grafico: traslazione della asse Y

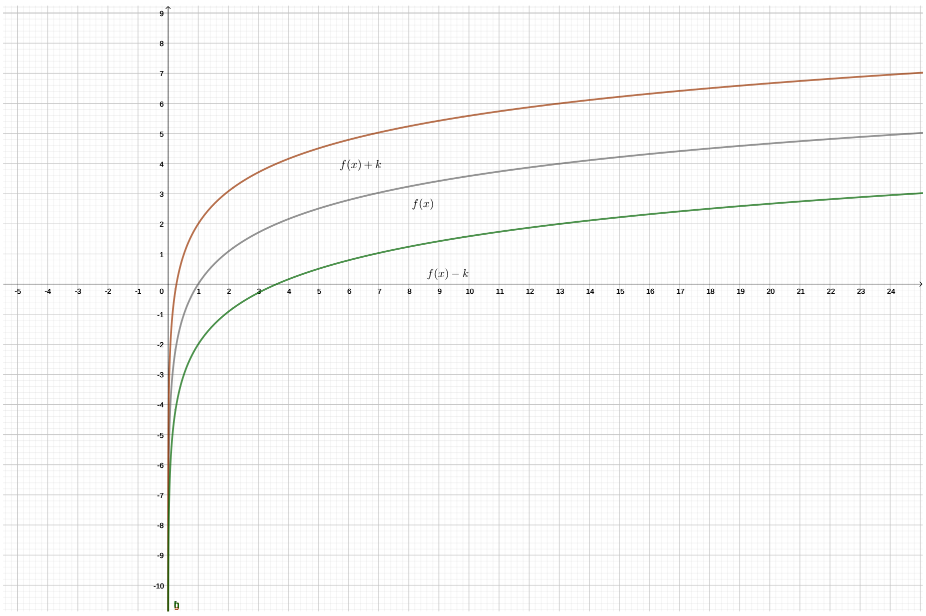


Figura 2.21: Operazione sul grafico: traslazione della asse Y

Operazione sul grafico: contrazione e dilatazione in direzione verticale

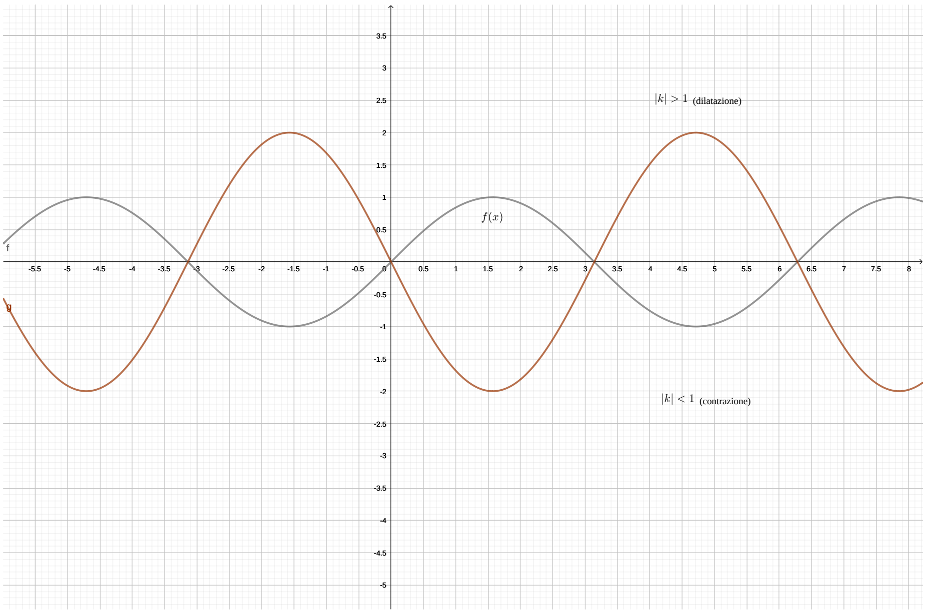


Figura 2.22: Operazione sul grafico: contrazione e dilatazione in direzione verticale

Operazione sul grafico: contrazione e dilatazione in direzione orizzontale

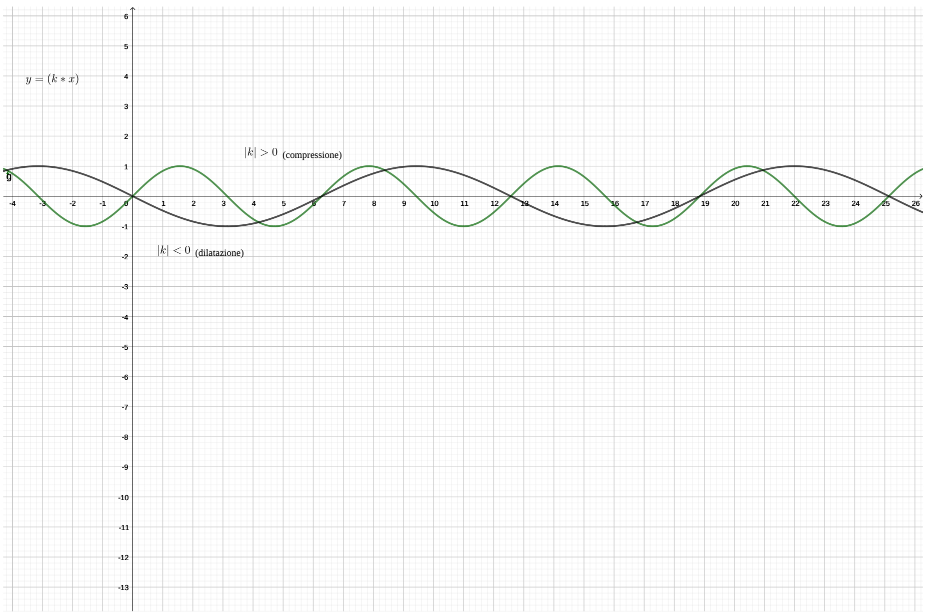


Figura 2.23: Operazione sul grafico: contrazione e dilatazione in direzione orizzontale

Operazione sul grafico: $y = |f(x)|$

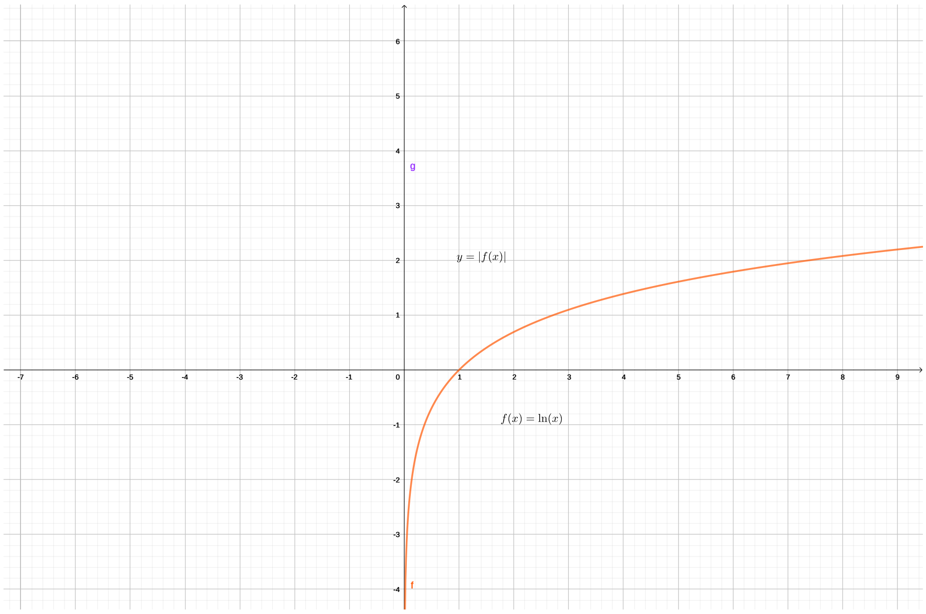
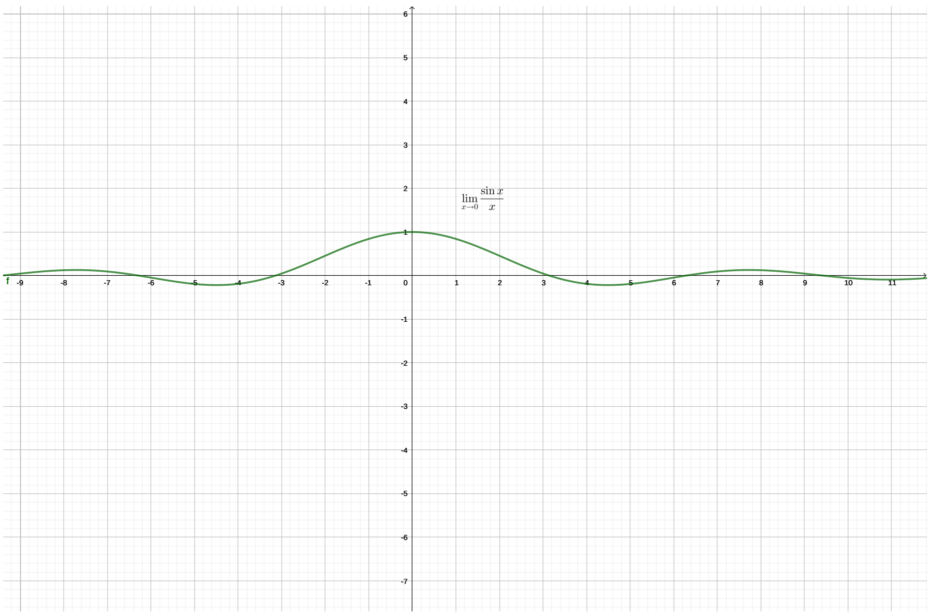


Figura 2.24: Operazione sul grafico: $y = |f(x)|$

2.2 Limiti



x	f(x)
0,1	0,998
0,001	0,999

$$C.E. = R \backslash \{0\}$$

Figura 2.25: Esempio limite di funzione

Il limite di una funzione è un operazione, o meglio un operatore, che permette di studiare il comportamento di una funzione nell'intorno di un punto x_0.
Mediamente il limite è possibile stabilire a quale valore tende la funzione man mano che i valori della variabile si approssimano al punto x_0.

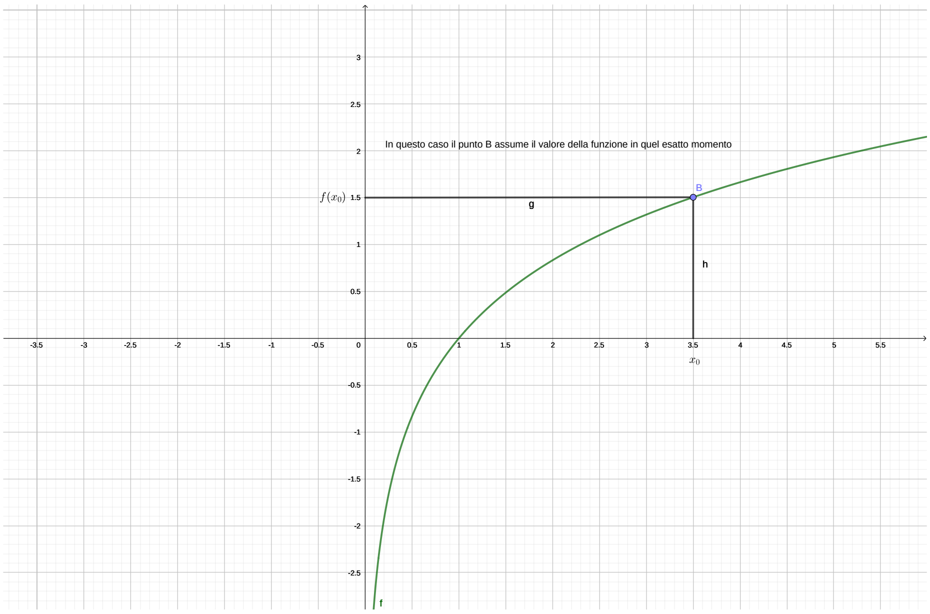


Figura 2.26: Esempio di limite di una funzione

2.2.1 Limite di una funzione

Sia $f(x)$ definita in $A \in R$, e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice che $f(x)$ ha limite l per x che tende a x_0, se $V\varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - l| = \varepsilon \Rightarrow x \in I(x_0, \delta_\varepsilon)$ escluso al più x_0 cioè $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$

- $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$
- $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon$

In simboli

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \ f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$

2.2.2 Definizione di Limite destro

l_1 si definisce *limite destro* di $f(x)$ per x che tende a x_0^+: $\lim_{x \to x_0^+ f(x) = l_1}$
se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - l_1| < \varepsilon \Rightarrow x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$ cioè $x \in (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon)$

2.2.3 Definizione di limite sinistro "da sinistra"

l_2 si definisce *limite sinistro* di $f(x)$ per x che tende a x_0^-: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l^2$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$: $|f(x) - l_2| < \varepsilon \Rightarrow x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0$ cioè $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0)$

2.2.4 Teorema d'unicità del limite "da destra"

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow$ l è unico
Dimostrazione. Per assurdo: supponiamo che $\exists l_1, l_2 : l_1 \neq l_2$ con $l_1 = lim_{x \to x_0} f(x)$ in $I(x_0, \delta_{1\varepsilon})$, $l_2 = lim_{x \to x_0} f(x)$ in $I(x_0, \delta_{2\varepsilon})$
Fissato $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$
$2\varepsilon = |l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |f(x) - l_2| + |f(x) - l_2| < 2\varepsilon$ in $I(x_0, \delta_\varepsilon)$, $\delta_\varepsilon = min(\delta_{1\varepsilon}, \delta_{2\varepsilon})$
Assurdo! $\Rightarrow l_1 = l_2$

Esempi

$y = \frac{|x|}{x}$ $\qquad C.E. = R \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ $\qquad \nexists$ limitate

Definizione Sia $f(x)$ definita in $A \in R$, e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice che $f(x)$ ha limite $+\infty$ per x che tende a x_0, se $\forall M > 0, \exists \delta_M > 0 : \forall x \in I(x_0, \delta_m) \Rightarrow f(x) > M$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty}$$

Definizione Sia $f(x)$ definita in $A \in R$, e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Si dice che $f(x)$ ha limite $-\infty$ per x che tende a x_0, se $\forall M > 0, \exists \delta_M > 0 : \forall x \in I(x_0, \delta_m)$
risulta $f(x) < -M$.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty}$$

Definizione di Asintoto verticale Se $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty}$ allora la retta verticale $\boxed{x = x_0}$ si chiama asintoto verticale

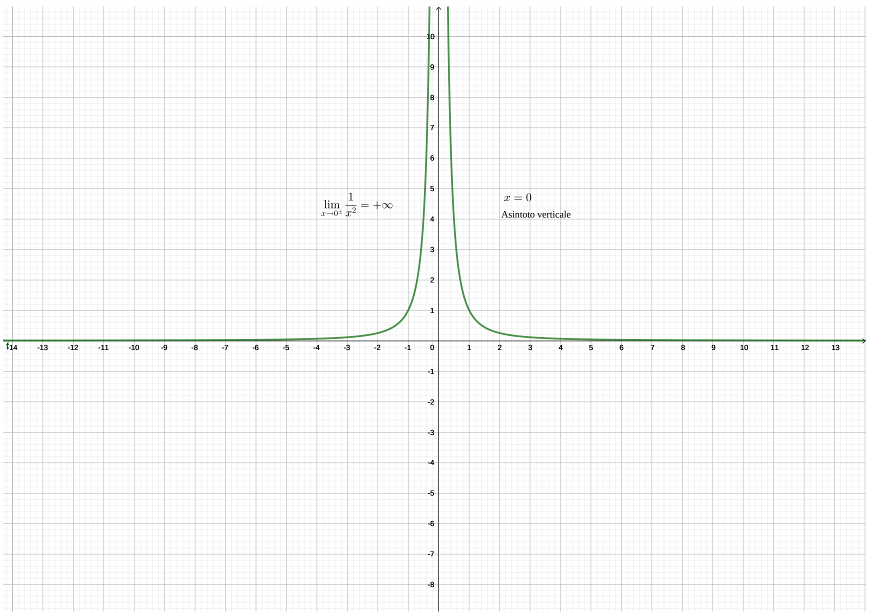


Figura 2.27: Asintoto verticale

Sia $f(x)$ definita in $A \in R$, si dice che $f(x)$ ha limite l, per x che tende a $+\infty$, se: $\forall_\varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon > 0 : \forall x \in I(K_\varepsilon, +\infty)$ risulta $|f(x) - l| < \varepsilon$ $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = l}$

Definizione di Asintoto orizzontale Se $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = l}$ Allora la retta orizzontale $\boxed{y = l}$ si chiama Asintoto orizzontale

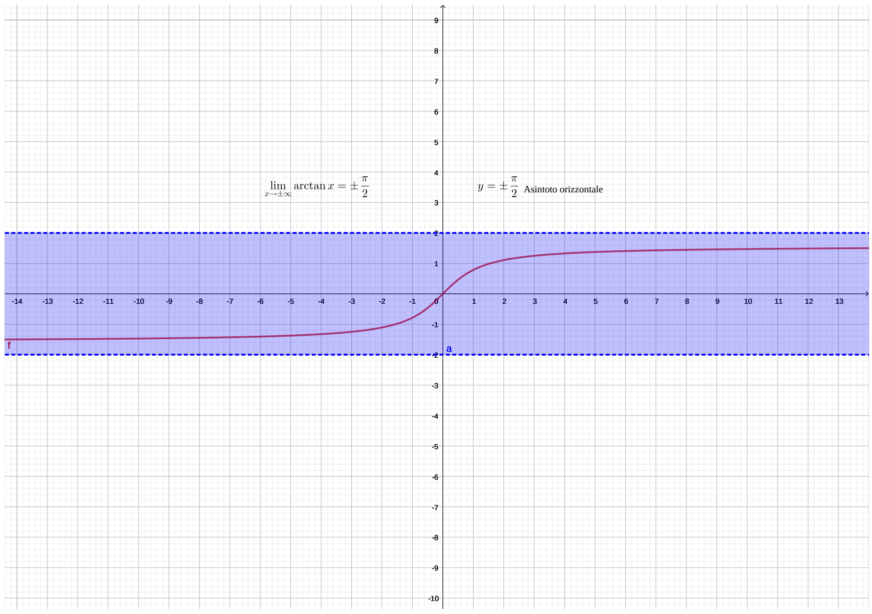


Figura 2.28: Asintoto orizzontale

Sia $f(x)$ definita in $A \in R$, si dice che $f(x)$ ha limite $+\infty$, per x che tende a $+\infty$, se: $\forall M > 0, \exists K_M > 0 : \forall x \in (K_M, +\infty)$ risulta $f(x) \in (M, +\infty)$ $\left| \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \right|$

2.2.5 Teorema (algebra dei limiti)

Se:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = l_1 \pm l_2$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) * g(x) = l_1 * l_2$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}, g(x), l_2 \neq 0$

2.2.6 Convenzioni con ∞

- $\forall a > 0, a \pm \infty = \pm\infty$
- $+\infty + \infty = +\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $\forall a > 0, a * (\pm\infty) = \pm\infty$
- $\forall b < 0, b * (\pm\infty) = \mp\infty$
- $(\pm\infty) * (\pm\infty) = +\infty$
- $(\pm\infty) * (\mp\infty) = -\infty$

Convenzioni con ∞

$\frac{a}{\infty} = 0$ $\frac{a}{0} = \infty$

2.2.7 Forme indeterminate

$\boxed{+\infty - \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 1^{\infty} \quad e^{+\infty * 0} \quad 0 - \infty}$

- $a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 0, & 0 < a < 1 \end{cases}$
- $a^{-\infty} = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ +\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$

2.2.8 Teorema del confronto

Siano $f(x), f_1(x), f_2(x)$ tre funzioni definite in $A \subseteq R$ sia x_0 un punto di accumulazione per A e $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ se $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) = l$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

Dimostrazione

Se $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) = l$ allora per definizione di limite:

- $\exists\delta_1 : |f_1(x) - l| < \varepsilon \ \forall x \in I(x_0, \delta_1)$
- $\exists\delta_2 : |f_2(x) - l| < \varepsilon \ \forall x \in I(x_0, \delta_2)$

$$\Rightarrow l - \varepsilon < f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) < l + \varepsilon$$

$\forall x \in I(x_0, \delta_2), \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

Casi particolari di $\lim_{x\to x_0} f(x) * g(x)$

Teorema Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = x$; $|g(x)| \leq M$ per $x \in I(x_0, \delta) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) * g(x) = 0$

Esempio $\lim_{x\to x_0} x * \sin \frac{1}{x} = 0$

2.2.9 Limite di `funzione composta`

Siano $g : A \to B : B \to R : \lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$ e $\lim_{y\to y_0} f(y) = l$ con $l = f(y_0)$ (*se f è continua*)
$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = l}$

2.2.10 Limiti Notevoli

- $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$
- $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{\tan(x)}{x} = 1}$
- $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{1}{2}}$
- $\boxed{\lim_{x\to x_0} (1 + \frac{1)}{x}) = e}$
- $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = log_a e}$
- $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{a^x-1}{x} = \log_e a}$

Esempi

1. $\lim_{x\to x_0^+} xe^x + e^{-\frac{1}{x}} = 0$
2. $\lim_{x\to x_0^-} xe^x + e^{-\frac{1}{x}} = \infty$
3. $\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to x_0} \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$
4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} + \arctan x = \frac{\pi}{2}$

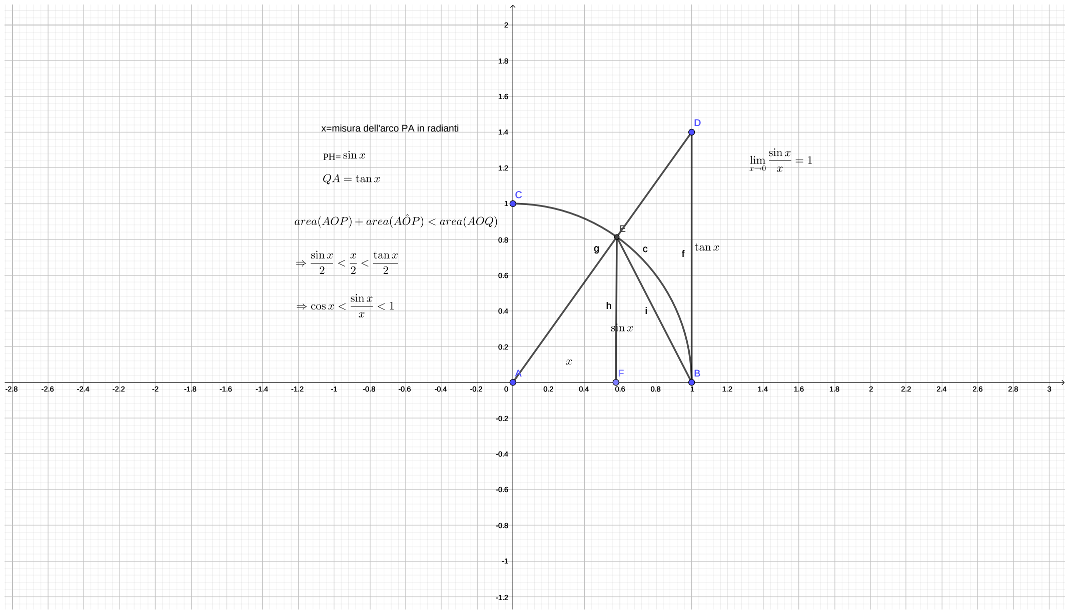


Figura 2.29: Esempio di limite notevole di una funzione

2.2.11 Infinitesimi e infiniti

Definizione Una funzione $f(x)$ su dice infinitesima per $x \to x_0$ (per $x \to \infty$), x_0 punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, se: $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ (oppure $lim_{x \to \infty} f(x) = 0$).

Esempi

- $y = e^x$ è un infinitesimo per $x \to -\infty$
- $y = \ln x$ è un infinitesimo per $x \to 1$
- $y = \sin x$ è un infinitesimo per $x \to 0$ (ma anche per $x \to \pi, 2\pi$, etc.)
- $y = \ln 1 + x$ è un infinitesimo per $x \to 1$

Ordine di infinitesimo

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesimi per $x \to x_0$ (o per $x \to \infty$), con $g(x) \neq 0$. Se $\exists \alpha R+$ e $l \in R$, $l \neq 0$ tale che $\lim_{x \to x_0} = \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$ (oppure $\lim_{x \to \infty} = \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$)
Allora, si dice che per $x \to x_0$ (o per $x \to \infty$), $f(x)$ è un infinitesimo di ordine α rispetto all'infinitesimo campione $g(x)$.

Esempi

- $y = \sin x$ è un infinitesimo per $x \to 0$ di ordine 1 rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$, infatti, $\lim_{x \to 0} = \frac{\sin x}{x^\alpha} = 1$ solo se $\alpha = 1$
- $y = \tan^2 x$ è un infinitesimo di ordine 2 rispetto ad x, per $x \to 0$
- $ord(l - \cos x) = 2$ rispetto ad x per $x \to 0$

Confronto tra infinitesimi

Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesime per $x \to x_0$,

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \neq 0 & ord(f) = ord(g) \\ \pm\infty & ord(f) < ord(g) \\ 0 & ord(f) > ord(g) \\ \text{non esiste,} & \text{f e g non confrontabile} \end{cases}$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesime per $x \to \infty$. Utilizzando il confronto tra infinitesimi nel calcolo dei limiti del tipo $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}$, dove f_1, f_2, g_1, g_2 sono funzioni infinitesime per $x \to x_0$, si possono *trascurare gli infinitesimi di ordine maggiore* (analogo discorso per funzioni infinitesime $x \to \infty$).

esempio $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^3+2\tan x}{(e^x-1)^2+\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\tan x}{\sin x} = 2$

Definizione di funzioni asintotiche Si dice che due funzioni f, g sono asintotiche per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e si scrive $f \sim g$ per $x \to x_0$

esempi

- $\sin x \sim x$ per $x \to 0$
- $\ln(1+x) \sim x$ per $x \to 0$
- $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$

Definizione di funzioni infinite Una funzione $f(x)$ si dice *infinita* per $x \to x_0$ (o per $x \to \infty$) , x_0 punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, (o per $x \to \infty$) se:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \text{ (oppure } \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty)$$

Esempi

- $y = e^x$ è un infinito per $x \to +\infty$
- $y = \ln x$ è un infinito per $x \to 0^+$
- $y = x^2 + x$ è un infinito per $x \to \infty$

Regole aritmetiche Siano $f(x) = o(x^\alpha)$ (si legge «o piccolo di») e $g(x) = o(x^\beta)$ due funzioni *infinitesime* rispettivamente di ordine α e β per $x \to 0$ Allora si ha

- $cf(x))o(x^\alpha)$, $\forall c \in R$
- $x^\lambda f(x) = o(x^{\lambda+\alpha})$
- $f(x)g(x) = o(x^{\alpha+\beta})$
- $f(x) + g(x) = o(x^y)$, $\gamma = min(\alpha, \beta)$

Ordine di infinito Siamo $f(x)$ e $g(x)$ infiniti per $x \to x_0$ (o per x), con $g \neq 0$. Se $\exists \alpha \in R+$ e $l \in R$, $l \neq 0$ tale che
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^2} = l$ (o $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$)
Allora, per $x \to x_0$ (o per $x \to \infty$), $f(x)$ è un infinito di ordine α rispetto all'infinito compone $g(x)$.

Esempi

- $ord(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}$ rispetto ad x per $x \to +\infty$
- $ord(\frac{1}{\sin x}) = 1$ rispetto ad $\frac{1}{x}$ per $x \to 0$
- $ord(\frac{1}{e^x - 1}) = 1$ rispetto ad $\frac{1}{x}$ per $x \to 0$

Cofronto tra infiniti Siamo $f(x)$ e $g(x)$ infiniti per $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \neq 0 & ord(f) = ord(g) \\ \pm\infty & ord(f) > ord(g) \\ 0 & ord(f) < ord(g) \\ \text{non esiste,} & \text{f e g non confrontabile} \end{cases}$$

Stesso risultato se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinite per $x \to \infty$. Utilizzando il confronto tra infiniti nel calcolo dei limiti del tipo $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}$, deve f_1, f_2, g_1, g_2 sono funzioni infinite per $x \to x_0$, si possono trascurare gli infiniti di ordine minore (analogo discorso per funzione infinito $x \to \infty$).

Esempio $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x^3+3\sqrt{x}}{x^2(2x-1)+\sqrt{3x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$.

Gerarchia degli infiniti Per $x \to +\infty$ si ha $(\log_\alpha x)^\alpha << x^\beta << b^x$, con $\alpha, \beta > 0, a, b > 1$ Non sempre è possibile calcolare l'ordine di infinito (o di infinitesimo) rispetto alla funzione campione usuale.

Esempio $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^a} = +\infty, \forall\alpha > 0, a > 1$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^a} = +\infty, \forall\alpha, \beta > 0, a > 1$

Regole aritmetiche Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni *infinite* di ordine rispettivamente α e β. Allora si ha

- $ord(f(x) + g(x)) = \max \alpha, \beta$
- $ord(f(x) * g(x)) = \alpha + \beta$
- $ord((f(x))^\gamma) = \alpha\gamma$

2.2.12 Funzioni continue

Una funzione continua è una funzione che, intuitivamente, fa corrispondere ad elementi sufficientemente vicini del dominio elementi arbitrariamente vicini del codominio.

Definizione Una funzione $f(x)$ è continua in x_0, se: $l_1 = \lim_{x\to x_0^+} = \lim_{x\to x_0} f(x) = l_2 = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ossia $\forall \in > 0 \exists\delta_\mathcal{E} > 0$: $|f(x) - f(x_0)| < \mathcal{E}$ $\forall_x \in I(x_0, \delta_\mathcal{E})$ $(l = f(x_0))$

Teorema della permanenza del segno

Sia f(x) definita almeno in un intorno di x_0 e continua in x_0. Se $f(x_0) > 0$ allora $\exists\delta > 0 : f(x) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Teorema degli zeri

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ $f(a) * f(b) < 0$ allora $\exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$. Se f è anche strettamente monotona, lo zero è unico.

Teorema dell'esistenza dei valori intermedi (*conseguenza del teorema degli zeri*) Una funzione $f(x)$ continue in $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$.

Teorema di Wierstrass (sul massimo e il minimo)

Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$. Allora $f(x)$ assume massimo e il minimo assoluto in $[a,b]$, cioé $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$: $f(x_1) \leq f$

2.2.13 Criteri di invertibilità

Una funzione continua e strettamente monotona in [a,b] è invertibile in tale intervallo. Dimostrazione.

2.3 Calcolo differenziale per funzioni di una variabile

Sia f: $(a,b) \rightarrow R$, si definisce derivata di f nel punto $x_0 \in (a,b)$ il numero, se $\exists$ finito:

$$f'(x_0) = \lim_{h\rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$f'(x_0), y'(x_0), \frac{df}{dx}|_{x_0}, \frac{dy}{dx}|_{x_0}, Df(x_0), Dy(x_0)$$

2.3.1 Derivata di una funzione

Significato geometrico della derivata in un punto e equazione della retta tangente Sia $x_0 \in (a,b) : x_0 + h \in (a,b)$
Si definisce Rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h} = \tan\beta$
Sia β l'angolo che la retta r forma con l'asse delle x, considerando il triangolo ABC possiamo scrivere $f(x+h) - f(x_0) = \tan\beta[x_0 + h - x_0]$ Ossia: $\tan\beta = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ Ma $m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ È il coefficiente angolare della retta f passante per AB
Per cui $\tan\beta = m$ Ossia $\tan\beta$ è il coefficiente angolare della retta secante per AB
Quando $h \rightarrow 0$ in punto B si sposta sulla curva avvicinandosi ad A, la retta r diventa tangente alla curva in A e si ha: $\lim_{h\rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \tan\alpha$ coefficiente angolare di t Equazione della retta tangente dal grafico di *f(x)* nel punto di ascissa x_0: $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ Infatti, tra tutte le rette del fascio proprio passanti $A(x_0, f(x_0)) dieq.\ y - f(x_0) = m(x-x_0)$ per $m = f'(x_0)$ si ottiene l'equazione di t.
Se $f'(x)$ è definita $\forall x \in (a,b)$ allora f(x) è derivabile in (a,b) e risulta definita la funzione $f' : (a,b) \rightarrow R$ detta derivata prima di $f(x)$
f(x) è derivabile in [a,b], se è derivabile $\forall x \in (a,b)$ *e ammette derivata destra in x=a (si scrive* $f'_+(a)$*) e derivata sinistra in* $x = b$ *(si scrive* $f'_-(b)$*)*

2.3.2 Definizione

- Derivata destra $\lim_{h\rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$
- Derivata sinistra $\lim_{h\rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$

Se $f'_+(x) = f'_-(x)$ f *è derivabile in* x

2.3.3 Continuità e derivabilità

Teorema

Sia $f : (a,b) \rightarrow R$. *Se* f *è derivabile in* $x_0 \in (a,b)$ *allora* f *è continua in* $x_0, x+h \in (a,b)$: $\lim_{h\rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = \lim_{h\rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} * h = 0$. Da cui $\lim_{h\rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ che è la continuità di f in x_0.
Quindi *derivabilità* $\Rightarrow$ *continuità* Occhio non è vero il contrario perché non per forza una funzione continua è derivabile.

Esempio $y = |x|$ è continua ma non è derivabile in $x = 0$. Infatti,
$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ e $y' = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

2.4 Punti di non derivabilità

2.4.1 Punto angoloso

Se $f'_+(x) \neq f'_-(x)$ e almeno un $\exists$ finita x_0 si dice punto angoloso, in quanto le rette tangenti alla f(x) nel punto di ascissa x_0 formano un angolo.

Esempio

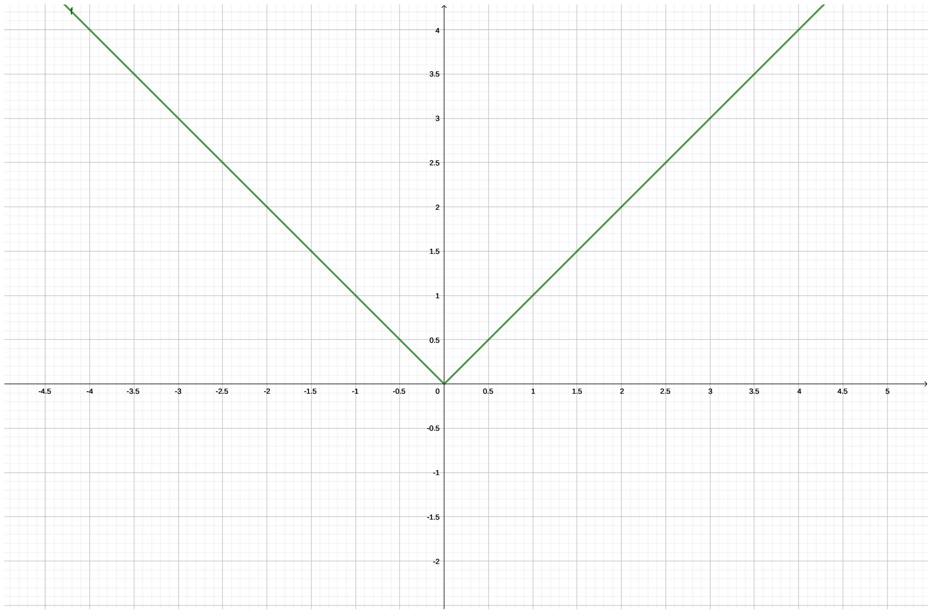


Figura 2.30: Grafico di Funzione valore assoluto $y = |x|$ e quindi $f'_+(0) = 1 \neq f'_+ = -1$

Un altro esempio

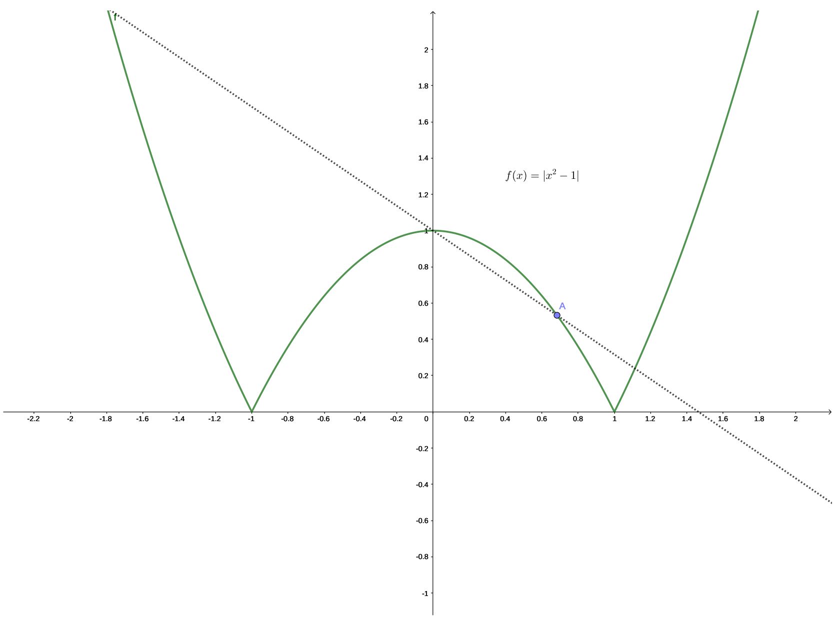


Figura 2.31: Grafico di Funzione $x = |x^2 - 1|$

2.4.2 Punto cuspude

Se $f'_{+}(x) \neq f'_{-}(x)$ sono ∞, x_0 si dece punto cuspide ; la retta tangente alla *f(x)* nel punto di ascissa x_0 è verticale.

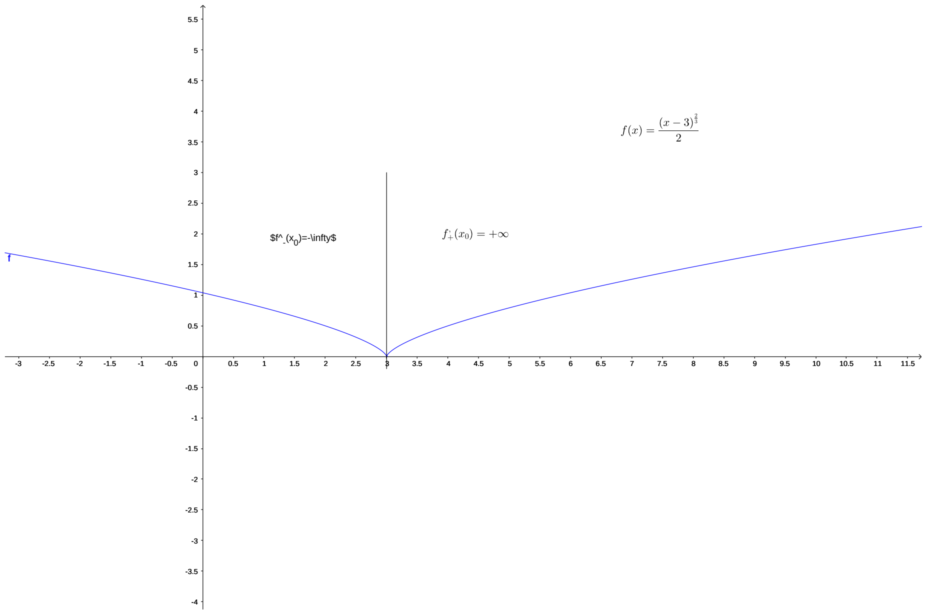


Figura 2.32: Grafico di Funzione $f(x) = \frac{(x-3)^{\frac{2}{3}}}{2}$

Punto di flesso a tangente verticale

Se $f'_{+}(x_0) = f'_{-}(x_0) = \pm\infty$ sono ∞, x_0 si dice punto di flesso a tangente verticale; la retta tangente alla $f(x)$ nel punto di ascissa x_0 è verticale.

2.4.3 Esempi di derivate

- $D(x^n) = n * x^{n-1}$
- $D(\log_a x = \frac{1}{x} \log_a e)$
- $D(a^x) = a^x \ln a$
- $D(\sin x) = \cos x$
- $D(\cos x) = -\sin x$
- $D(k) = 0$
- $D(\ln x) = \frac{1}{x}$
- $D(e^x) = e^x$
- $D(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$

Qualche esercizio dimostrativo

Utilizzando la definizione calcolare la derivata di

1. $f(x) = k$
   $f^I(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = 0$
2. $f(x) = e^x$
   $f^I(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x$
3.

2.5 Esercizio d'esempio

$f(x) = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$

1. Dominio: $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$
   Denominatore $\neq 0$: $2(x+1)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

2. Intersezione con gli assi:
   asse x $\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^3}{2(1+x)^2} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x^3 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$
   asse y $\begin{cases} x = 0 \\ \frac{0^3}{2(1+0)^2} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$
   nel caso dello studio del intersezione con gli assi si può escludere lo studio del denominatore

3. Segno:
   f(x)>0
   - **Numeratore**: $x^3 > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} > 0 \Rightarrow x > 0$
   - **Denominatore**: $2(x+1)^2 > 0 \Rightarrow x \neq -1$

4. Simmetrie:
   $f(x) = f(-x) = \frac{-x^3}{2(1-x)^2}$ La funzione non è ne pari ne dispari.

5. Asintoto verticale:
   $\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{2(1+x)^2} = \frac{(-1)^3}{2(1+(-1^+))^2} = \frac{-1}{0} = -\infty$
   $\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{2(1+x)^2} = \frac{(-1)^3}{2(1+(-1^-))^2} = \frac{-1}{0} = -\infty$

6. Asintoto orizzontale:
   $\lim_{x \to +\infty} = \frac{x^3}{2(1+x)^2} = \frac{(+\infty)^3}{2(1+(+\infty))^2} = \frac{\infty}{\infty}$
   $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{4(1+x)} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{6x}{4} = \infty$