

# Appunti di Matematica

Nicola Ferru



# Indice

0.1	Premesse...	7
0.2	Simboli	9
<b>I</b>	<b>Matematica analisi 1</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Cenni di teoria degli insiemi</b>	<b>13</b>
1.0.1	Operazioni tra gli insiemi	13
1.1	Sottoinsiemi di $\mathbb{R}$	13
1.1.1	Definizione	13
1.2	Funzione di una variabile	14
1.2.1	Definizione	14
<b>2</b>	<b>Studio di funzione</b>	<b>17</b>
2.1	Grafica delle funzioni elementari	17
2.1.1	Funzione lineare $y = mx + q, m, q \in \mathbb{R}$	17
2.1.2	Funzione valore assoluto $y =  x $	18
2.1.3	Funzione potenza $y = x^n, n \in \mathbb{N}, \text{pari}$	18
2.1.4	Funzione potenza $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ (ma non razionale)	19
2.1.5	Funzione potenziale $y = x^{\frac{m}{n}}, m, n \in \mathbb{Z}$	19
2.1.6	Funzione logaritmo $y = \log_a x$	19
2.1.7	Le coniche: la circonferenza	20
2.1.8	Le coniche: l'ellisse	21
2.1.9	Le coniche: iperbole	21
2.1.10	Le coniche: iperbole equilatera	22
2.1.11	Le coniche: parabola	22
2.1.12	Le funzioni trigonometriche	23
2.1.13	Le funzioni trigonometriche inverse	25
2.2	Limiti	29
2.2.1	Limite di una funzione	30
2.2.2	Definizione di Limite destro	30
2.2.3	Definizione di limite sinistro "da sinistra"	30
2.2.4	Teorema d'unicità del limite "da destra"	30
2.2.5	Teorema (algebra dei limiti)	32
2.2.6	Convenzioni con $\infty$	32
2.2.7	Forme indeterminate	33
2.2.8	Teorema del confronto	33
2.2.9	Limite di funzione composta	33
2.2.10	Limiti Notevoli	33
2.2.11	Infinitesimi e infiniti	34
2.2.12	Funzioni continue	36
2.2.13	Criteri di invertibilità	37

2.3	Calcolo differenziale per funzioni di una variabile . . . . .	37
2.3.1	Derivata di una funzione . . . . .	37
2.3.2	Definizione . . . . .	37
2.3.3	Continuità e derivabilità . . . . .	37
2.4	Punti di non derivabilità . . . . .	38
2.4.1	Punto angoloso . . . . .	38
2.4.2	Punto cuspide . . . . .	39
2.4.3	Esempi di derivate . . . . .	39
2.4.4	Teorema di derivazione della funzione composta . . . . .	40
2.4.5	Teorema di derivazione della funzione inversa . . . . .	41
2.4.6	Esercizio . . . . .	41
2.4.7	Esercizio . . . . .	41
2.4.8	Esercizio . . . . .	41
2.5	Massimo e minimo assoluto . . . . .	41
2.6	Massimo e minimo relativo (o estremi locali) . . . . .	42
2.6.1	Punti Stazionari . . . . .	42
2.7	Teorema di Fermat . . . . .	42
2.8	Teorema di Rolle . . . . .	42
2.8.1	Dimostrazione . . . . .	42
2.8.2	Esercizio dimostrativo . . . . .	43
2.8.3	Esercizio dimostrativo . . . . .	43
2.9	Teorema di Lagrange ( <i>o del valor medio</i> ) . . . . .	43
2.10	Punti per lo svolgimento dello studio di funzione . . . . .	43
2.11	Esercizio d'esempio . . . . .	44

# Elenco delle tabelle



# Elenco delle figure

1.1	Grafico di insieme di $f=x^2, g(x) = 3x + 2$	16
2.1	Grafico di Funzione lineare $y = mx + q, m, q \in R$	17
2.2	Grafico di Funzione valore assoluto $y =  x $	18
2.3	Grafico di Funzione potenza $y = x^n, n \in N, \text{pari}$	18
2.4	Grafico di Funzione potenza $y = x^\alpha, \alpha \in R$ (ma non razionale)	19
2.5	Grafico di Funzione potenza $y = x^\alpha, \alpha \in R$ (ma non razionale)	19
2.6	Funzione logaritmo $y = \log_a x$	20
2.7	Le coniche: la circonferenza	20
2.8	Le coniche: l'ellisse	21
2.9	Le coniche: iperbole	21
2.10	Le coniche: iperbole equilatera	22
2.11	Le coniche: parabola	22
2.12	Le funzioni trigonometriche	23
2.13	Funzione $\sin x$	23
2.14	Funzione $\cos x$	24
2.15	Funzione $\tan x$	24
2.16	Funzione $\cot x$	25
2.17	Funzione $\arcsin x$	25
2.18	Funzione $\arccos x$	26
2.19	Funzione $\arctan x$	26
2.20	Operazione sul grafico: traslazione della asse X	27
2.21	Operazione sul grafico: traslazione della asse Y	27
2.22	Operazione sul grafico: contrazione e dilatazione in direzione verticale	28
2.23	Operazione sul grafico: contrazione e dilatazione in direzione orizzontale	28
2.24	Operazione sul grafico: $y =  f(x) $	29
2.25	Esempio limite di funzione	29
2.26	Esempio di limite di una funzione	30
2.27	Asintoto verticale	31
2.28	Asintoto orizzontale	32
2.29	Esempio di limite notevole di una funzione	34
2.30	Grafico di Funzione valore assoluto $y =  x $ e quindi $f'_+(0) = 1 \neq f'_- = -1$	38
2.31	Grafico di Funzione $x =  x^2 - 1 $	38
2.32	Grafico di Funzione $f(x) = \frac{(x-3)^{\frac{2}{3}}}{2}$	39

## 0.1 Premesse...

In questo repository sono disponibili pure le dimostrazioni grafiche realizzate con *Geogebra* consiglio a tutti di dargli un'occhiata e di stare attenti perché possono essere presenti delle modifiche per migliorare il contenuto degli stessi appunti, comunque solitamente vengono fatte revisioni tre/quattro volte alla

settimana perché sono in piena fase di sviluppo. Ricordo a tutti che questo è un progetto volontario e che per questo motivo ci potrebbero essere dei rallentamenti per cause di ordine superiore e quindi potrebbero esserci meno modifiche del solito oppure potrebbero esserci degli errori, chiedo la cortesia a voi lettori di contattarmi per apportare una modifica. Tengo a precisare che tutto il progetto è puramente open source e infatti sono disponibili i sorgenti dei file allegati insieme ai PDF.

Cordiali saluti



## 0.2 Simboli

$\in$ Appartiene	$\Rightarrow$ Implica	$\beta$ beta
$\notin$ Non appartiene	$\Longleftrightarrow$ Se e solo se	$\gamma$ gamma
$\exists$ Esiste	$\neq$ Diverso	$\Gamma$ Gamma
$\exists!$ Esiste unico	$\forall$ Per ogni	$\delta, \Delta$ delta
$\subset$ Contenuto strettamente	$\ni$ : Tale che	$\epsilon$ epsilon
$\subseteq$ Contenuto	$\leq$ Minore o uguale	$\sigma, \Sigma$ sigma
$\supset$ Contenuto strettamente	$\geq$ Maggiore o uguale	$\rho$ rho
$\supseteq$ Contiene	$\alpha$ alfa	



Parte I

Matematica analisi 1

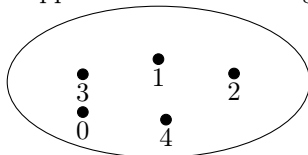


# Capitolo 1

## Cenni di teoria degli insiemi

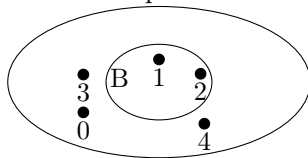
Per rappresentare un insieme abbiamo tre possibilità:

1. Rappresentazione estensiva  $A = [0, 1, 2, 3, 4]$
2. Rappresentazione intensiva  $A = [x | x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 5]$
3. Rappresentazione con diagrammi di Eulero - Venn



### 1.0.1 Operazioni tra gli insiemi

Un insieme può essere contenuto in un altro:



## 1.1 Sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

### 1.1.1 Definizione

1. Un punto  $x_0$  si dice interno ad  $A$  se esiste un suo intorno  $I(x_0, \delta)$  con  $\delta > 0$  contenuto in  $A$ .
2. Si dice esterno ad  $A$  se è interno al CA ( $A^c$ ).
3. Si dice di frontiera per  $A$  se non è né interno né esterno ad  $A$ .

#### Interno di $A$

$^\circ A$  Insieme dei punti interni ad  $A$ .

**Esempio** se  $A = (1, 3]$ ,  $A^\circ = (1, 3)$

$\partial A, \text{FA}$  Insieme dei punti di frontiera di  $A$

**Esempio** se  $A = (1, 3]$ , i punti di frontiera sono i punti  $x = 1$  e  $x = 3$

**Osservazioni**

- Se  $x_0 \in {}^\circ A \Rightarrow x_0 \notin A$
- Se  $x_0 \notin {}^\circ A$  (esterno)  $\Rightarrow x_0 \notin A$
- Se  $x_0 \in \partial A$  (frontiera) può essere  $x_0 \in A$  oppure  $x_0 \notin A$ , in ogni caso per  $\forall I(x_0, \delta)$  continue sia punti di A sia punti CA.

**Definizione**  $x_0$  è un punto di accumulazione per A se in  $\forall I(x_0, \delta)$  esiste un punti di A diverso da  $x_0$ . (Cioè in ogni intorno di  $x_0$   $\exists$  infiniti elementi di A)

**Esempio** se  $A = (-2, 3]$ ,  $x = -2$  è accumulazione per A, ma anche  $x = 3, x = 0, x = 1, \dots$ , cioè è di accumulazione per A, qualunque  $x \in [2, 3]$ .

$DA = A'$  = derivato di A è l'insieme dei punti di accumulazione per A. Se  $x_0 \in DA$  allora può aversi  $x_0 \in A$  oppure  $x_0 \notin A$

**Esercizio**  $x = 1, x = 3$  sono entrambi punti di accumulazione per l'intervallo  $(1, 3]$ ,  $x = 3$  appartiene all'intervallo dato,  $x = 1$  NO.

1. Se  $x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in DA$ ;
2. Se  $x \notin DA$  allora  $x_0$  si dice isolato;
3. Se  $DA = \emptyset \Rightarrow A$  si dice discreto **Esempio**  $A = \{1, 2, 3, 4\}$
4. Se  $DA = A \Rightarrow A$  si dice perfetto **Esempio**  $A = [a, b]$

**Definizione** Dato  $A \subset R$  si definisce chiusura di A e si indica con  $\bar{A}$ , l'insieme:  $\boxed{\bar{A} = A \cup \partial A}$  A è chiuso  $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

**Esempio** se  $A = (2, 5]$ , allora  $\bar{A} = [2, 5]$

**Teorema di Bolzano Weierstrass**

Ogni  $A \subset R^n$  limitato e finito possiede almeno un punto di accumulazione. Un insieme chiuso e limitato in  $R^n$  ammette massimo e minimo assoluto.

**Esempio**  $A = [1, 4]$ ,  $\max(A) = 4$ ,  $\min(A) = 1$   $A = \{x \in R : x^2 \leq 1\}$   $\max A = 1$ ,  $\min(A) = -1$

**1.2 Funzione di una variabile****1.2.1 Definizione**

Dati  $A, B \subseteq R$  una funzione A in B è una legge (o relazione, o mappa) che ad ogni elemento x di A associa uno ed un solo elemento y di B.  $f: A \rightarrow B$  oppure  $y = f(x)$   $x \in A$  e  $y = f(x) \in B$

- A = dominio o insieme di definizione di f.
- B = codominio di f.

Il grafico di f è un insieme di punti del piano (generalmente una curva) che è sottoinsieme del prodotto cartesiano  $A \times B$  costituito da  $(x, f(x))$  con  $x \in A, f(x) \in B$

**Definizione di funzione Immagine** L'immagine di  $A$  tramite  $f$ ,  $f(A)$ , è l'insieme dei valori di  $y$  tale che  $\exists x \in A$  tale che  $f(x) \in B$ .

**Esempio** Se  $f: A \rightarrow B$   $f(x) = x^2$   $A = \mathbb{R}$ ,  $f(A) = [0, +\infty)$

**Definizione di funzione suriettiva** Si dice che  $f: A \rightarrow B$  è suriettiva se  $f(A) = B$  (cioè fissato  $y \in B \exists x \in A : y = f(x)$ )

**Definizione di funzione iniettiva** Si dice che  $f: A \rightarrow B$  è iniettiva se  $x_2 \neq x_1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

**Una funzione può essere sia iniettiva che suriettiva “biiettiva”** Se  $f$  è sia suriettiva che iniettiva allora si dice biiettiva (cioè si ha un corrispondenza biunivoca tra  $A$  e  $B$ )

**Quando una funzione è pari?** Una funzione è pari se  $\forall x \in A : f(x) = f(-x)$  quindi il grafico di  $f$  è simmetrico rispetto all'asse  $Y$  (es.  $y = x^2$ )

**Quando una funzione è dispari?** Una funzione è dispari se  $\forall x \in A : f(-x) = -f(x)$ ,  $f(x) = -f(-x)$  quindi il grafico di  $f$  è simmetrico rispetto all'origine (es.  $y = x^3$ )

**Quando una funzione è periodica?** Una funzione  $A \rightarrow B$  è periodica di periodo  $T > 0$ , se  $\forall x \in A, x + T \in A$  e  $f(x + T) = f(x)$

**Esempio** Funzioni trigonometriche

**Quando una funzione è limitata superiormente?** Una funzione si dice limitata superiormente se  $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \forall x \in A$  (il grafico di  $f$  sta sotto la retta orizzontale  $y = m$ )

**Quando una funzione è limitata inferiormente?** Analogamente, al caso precedente, una funzione si dice limitata inferiormente se  $\exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m \forall x \in A$  (il grafico di  $f$  sta sopra la retta orizzontale  $y = m$ . La funzione  $f$  si dirà limitata se è limitata sia inferiormente che superiormente).

**Quando una funzione viene definita composta?** Una funzione  $A \rightarrow B$  e  $B \rightarrow C$  si definisce composta di  $f$  e  $g$ :  $g(f(x))$  La funzione  $h: A \rightarrow C$   $h = g \circ f$

**Esempio**  $f(x) = x^2, g(x) = 3x + 2, (A \equiv B \equiv C \equiv \mathbb{R}) g \circ f = 3x^2 + 2$

**Esempio**  $f(x) = x^2, g(x) = 3x + 2$

$$g \circ f = 3x^2 + 2$$

L'operazione di composizione non è commutativa ( $g \circ f \neq f \circ g$ ). La composizione di due funzioni biettive è biiettiva

**Quando una funzione è inversa?** Date  $f: A \rightarrow B$  biiettiva, si definisce funzione inversa di  $f$ :  $f^{-1}: B \rightarrow A$  tale che  $f^{-1} \circ f = I_A$   $f \circ f^{-1} = I_B$

**Nota** La funzione  $y = x^2$  ( $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) non è biiettiva ma è stata “resa” biiettiva, quindi invertibile, restringendo il suo dominio (per l'iniettività) e codominio (per la suriettività). Nell'esempio il dominio è stato «rimpicciolito» in modo tale da avere una funzione strettamente crescente e quindi iniettiva. Il codominio è stata «rimpicciolito» all'intervallo massimale  $[0, +\infty)$  e la funzione è diventata anche suriettiva.

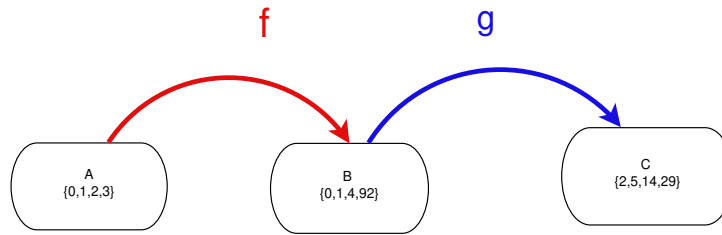


Figura 1.1: Grafico di insieme di  $f=x^2, g(x) = 3x + 2$

**Quando una funzione viene definita monotona?** Sia  $f:A \rightarrow B$ ,  $f$  si dice monotona in  $A$  se verifica una delle seguenti condizioni ( $\forall x_1, x_2 \in A$ )

1.  $f$  strettamente crescente se  $x_1 < x_2, f(x_1) < f(x_2)$
2.  $f$  crescente se  $x_1 < x_2, f(x_1) \leq f(x_2)$
3.  $f$  strettamente decrescente se  $x_1 < x_2, f(x_1) > f(x_2)$
4.  $f$  decrescente se  $x_1 < x_2, f(x_1) \geq f(x_2)$

Se si verificano la 1 e 3 allora la funzione  $f(x)$  è *strettamente monotona*.

*Teorema.* Una funzione  $f:A \rightarrow B$  strettamente monotona in  $A$ , è invertibile in  $A$ . Inoltre la sua inversa è ancora strettamente monotona.



## Capitolo 2

# Studio di funzione

In analisi matematica la locuzione studio di funzione indica l'applicazione pratica dei teoremi e delle tecniche del calcolo infinitesimale nello specifico caso di una funzione di cui è nota l'espressione analitica. Lo studio di funzione è utile per ricavare esplicitamente le informazioni che descrivono il comportamento di una funzione nel suo dominio. Spesso, le informazioni ottenute mediante uno studio di funzione sono sufficienti per poter tracciare, anche a mano, un grafico qualitativo della funzione studiata e che in genere, per funzioni a valori reali di una variabile reale, viene rappresentato su un piano cartesiano, anche se in taluni casi potrebbe essere più semplice ricorrere un sistema di coordinate differente. In genere, con "studio di funzione" ci si riferisce implicitamente al solo e specifico caso delle funzioni reali di una sola variabile reale, ma con le opportune modifiche è comunque possibile adattare le considerazioni seguenti anche al caso delle funzioni di più variabili reali, nonché anche per le funzioni di una o più variabili complesse.

By Wikipedia

## 2.1 Grafica delle funzioni elementari

### 2.1.1 Funzione lineare $y = mx + q$ , $q \in \mathbb{R}$

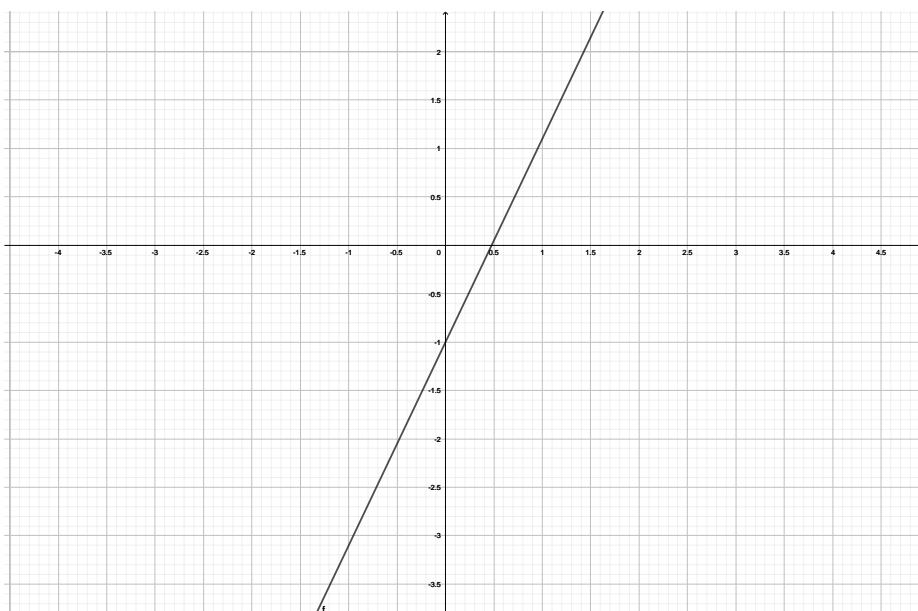


Figura 2.1: Grafico di Funzione lineare  $y = mx + q$ ,  $q \in \mathbb{R}$

$C.E. \equiv R$  Non Limitata

### 2.1.2 Funzione valore assoluto $y = |x|$

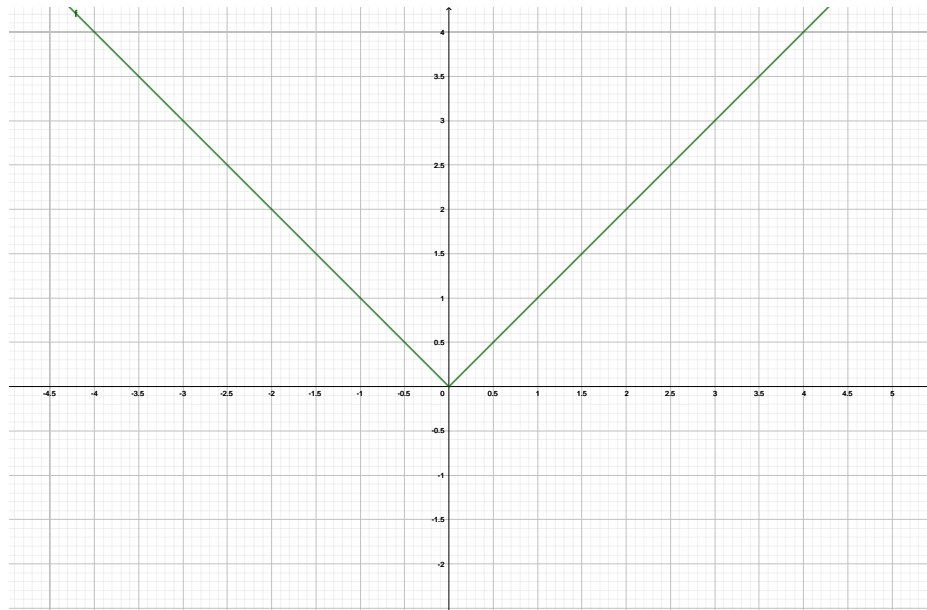


Figura 2.2: Grafico di Funzione valore assoluto  $y = |x|$

$C.E. \equiv R$  Limitata inferiormente in  $x = 0$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

### 2.1.3 Funzione potenza $y = x^n, n \in N, \text{pari}$

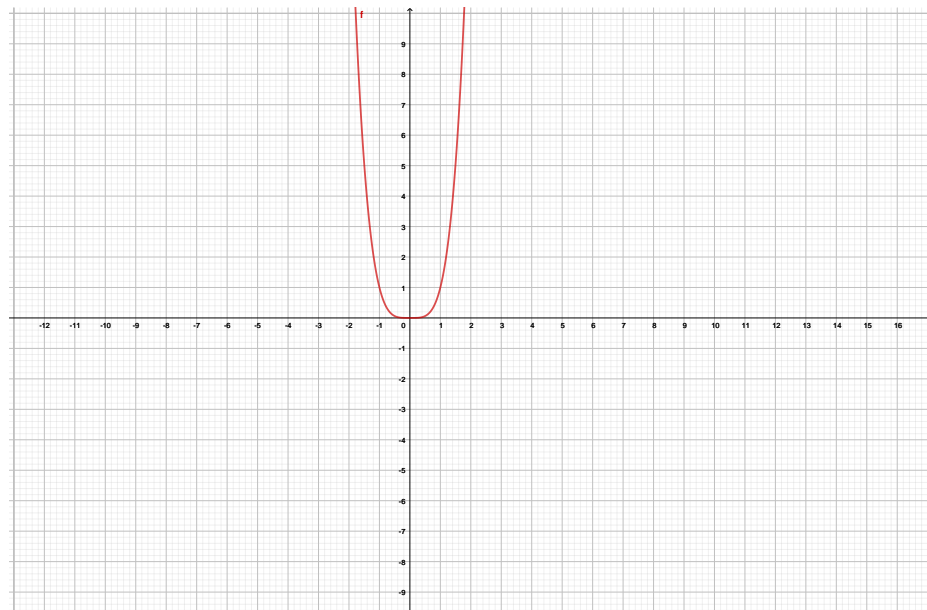


Figura 2.3: Grafico di Funzione potenza  $y = x^n, n \in N, \text{pari}$

### 2.1.4 Funzione potenza $y = x^\alpha, \alpha \in R$ (ma non razionale)

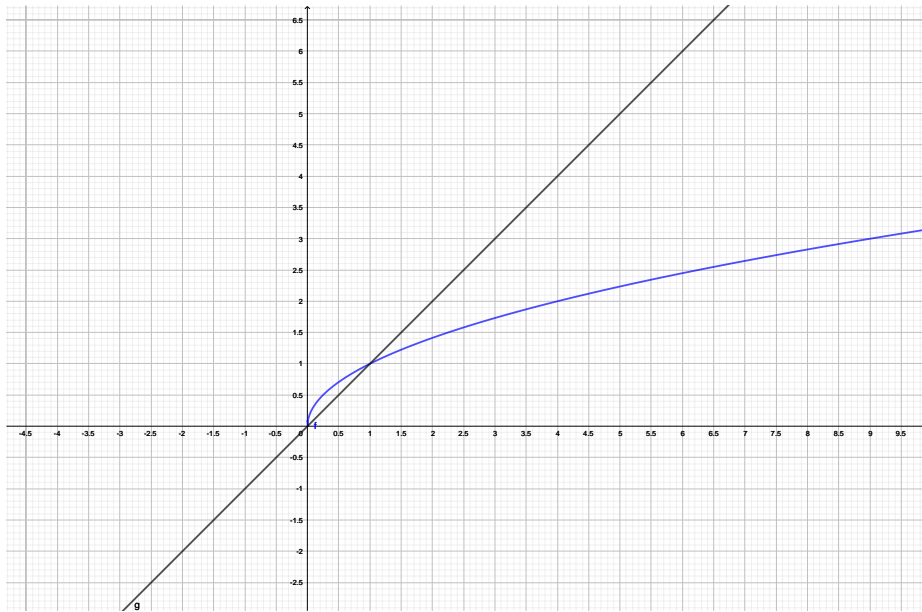


Figura 2.4: Grafico di Funzione potenza  $y = x^\alpha, \alpha \in R$  (ma non razionale)

*C.E.* :  $\{x \in R : x \geq 0\}$  Limitata inferiormente da  $x = 0$  non limitata superiormente Strettamente crescente

### 2.1.5 Funzione potenziale $y = x^{\frac{m}{n}}, m, n \in Z$

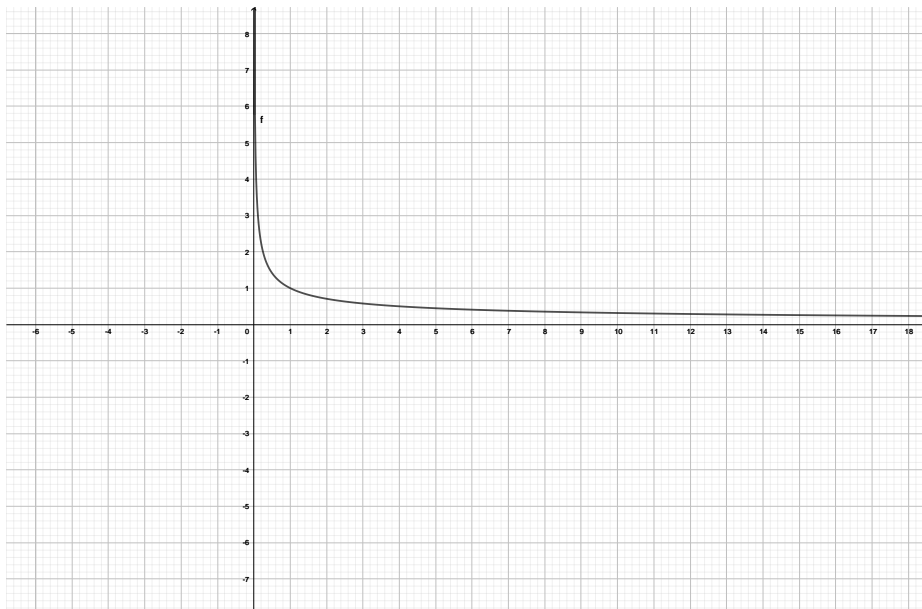
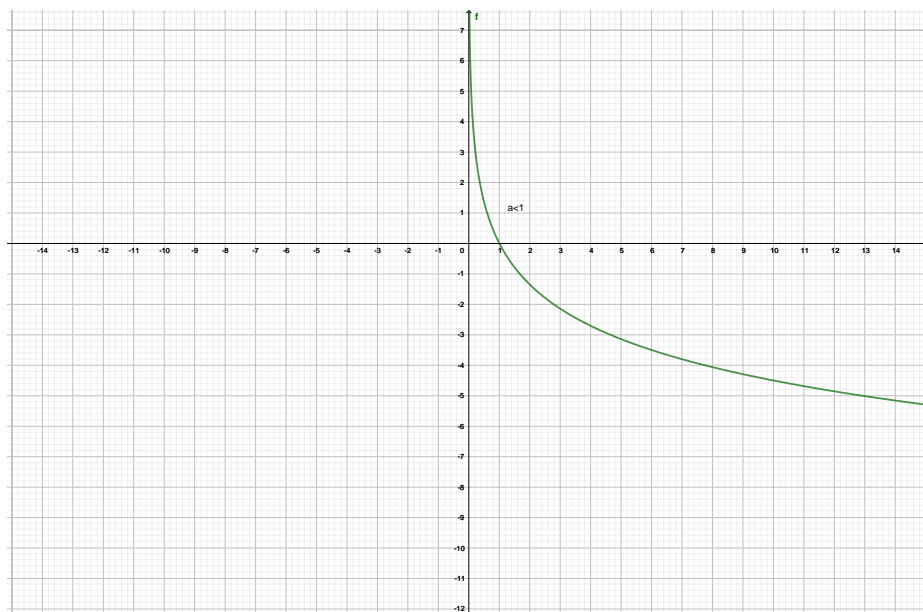


Figura 2.5: Grafico di Funzione potenza  $y = x^\alpha, \alpha \in R$  (ma non razionale)

### 2.1.6 Funzione logaritmo $y = \log_a x$

*C.E.*  $\equiv x > 0$  Non limitata, strettamente crescente se  $a > 1$ , Strettamente decrescente se  $0 < a < 1$ .

Figura 2.6: Funzione logaritmo  $y = \log_a x$ 

### 2.1.7 Le coniche: la circonferenza

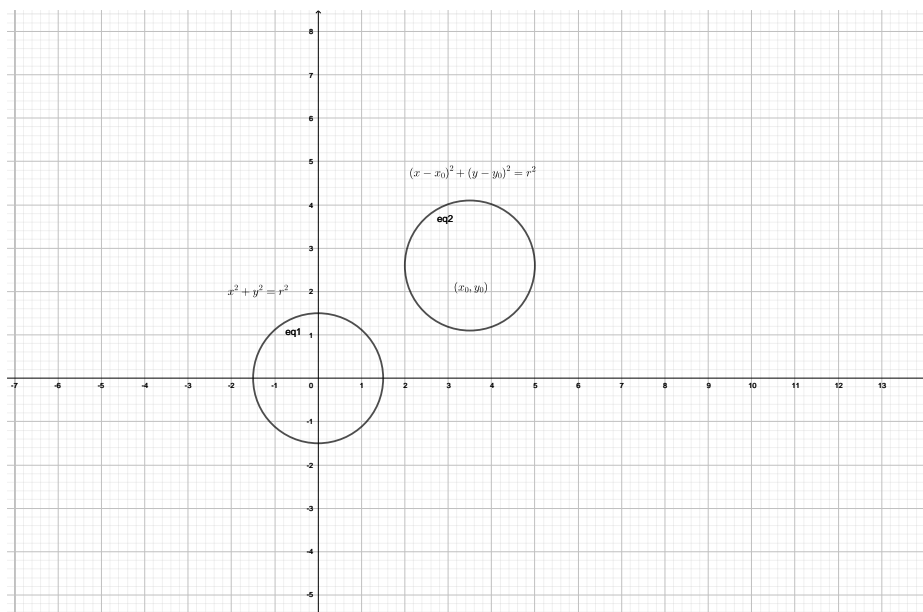


Figura 2.7: Le coniche: la circonferenza

### 2.1.8 Le coniche: l'ellisse

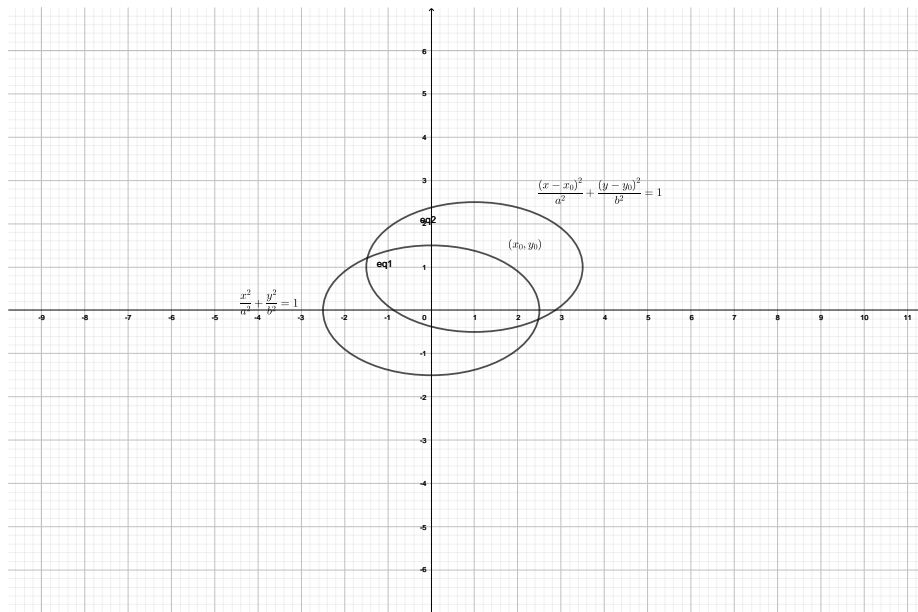


Figura 2.8: Le coniche: l'ellisse

### 2.1.9 Le coniche: iperbole

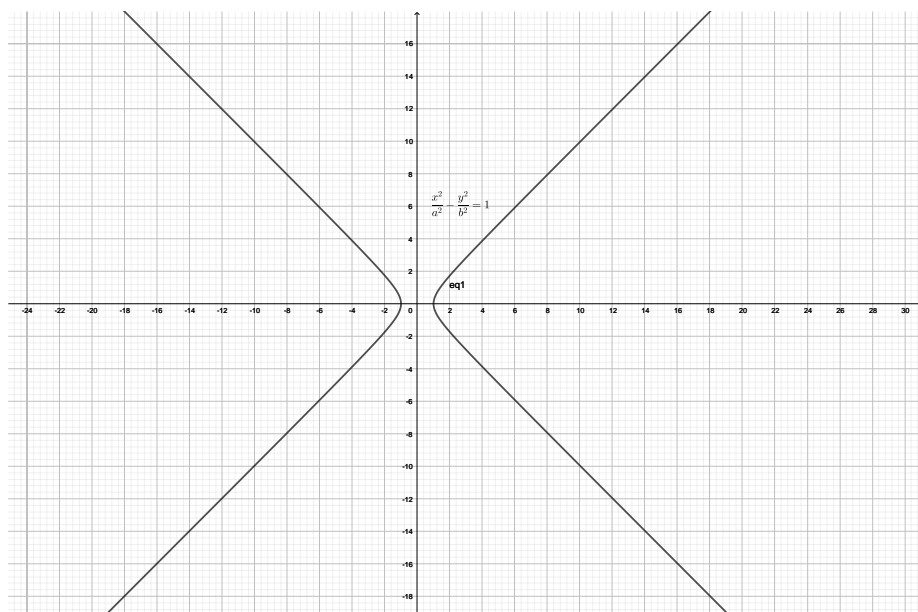


Figura 2.9: Le coniche: iperbole

### 2.1.10 Le coniche: iperbole equilatera

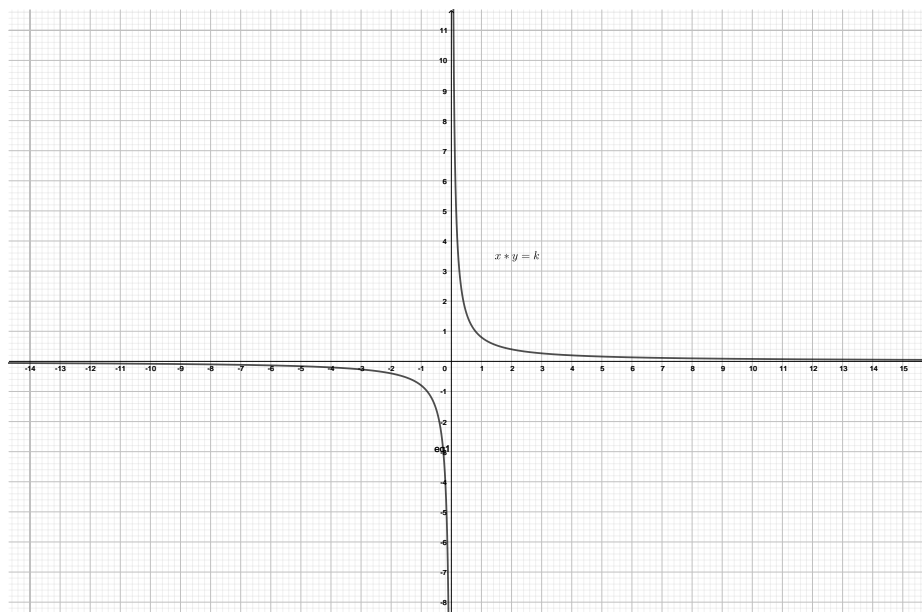


Figura 2.10: Le coniche: iperbole equilatera

### 2.1.11 Le coniche: parabola

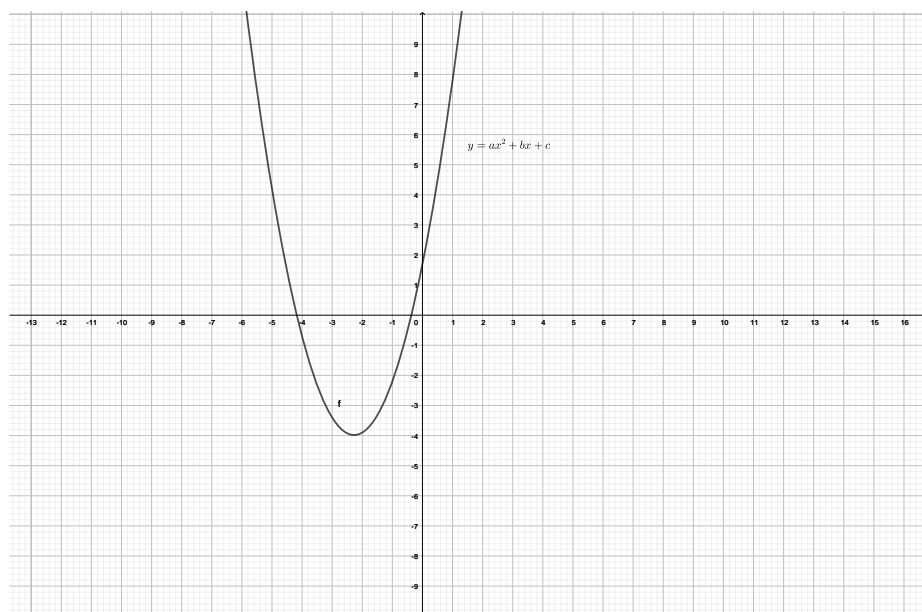


Figura 2.11: Le coniche: parabola

### 2.1.12 Le funzioni trigonometriche

Funzioni trigonometriche elementari:  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$

Relazioni fondamentali:  $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ ,  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ,  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

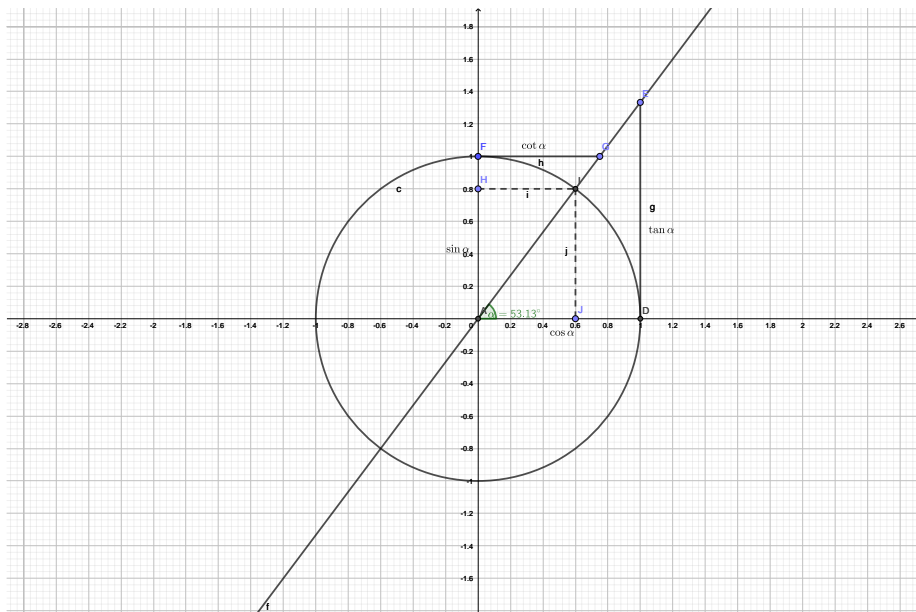


Figura 2.12: Le funzioni trigonometriche

#### Funzione $\sin x$

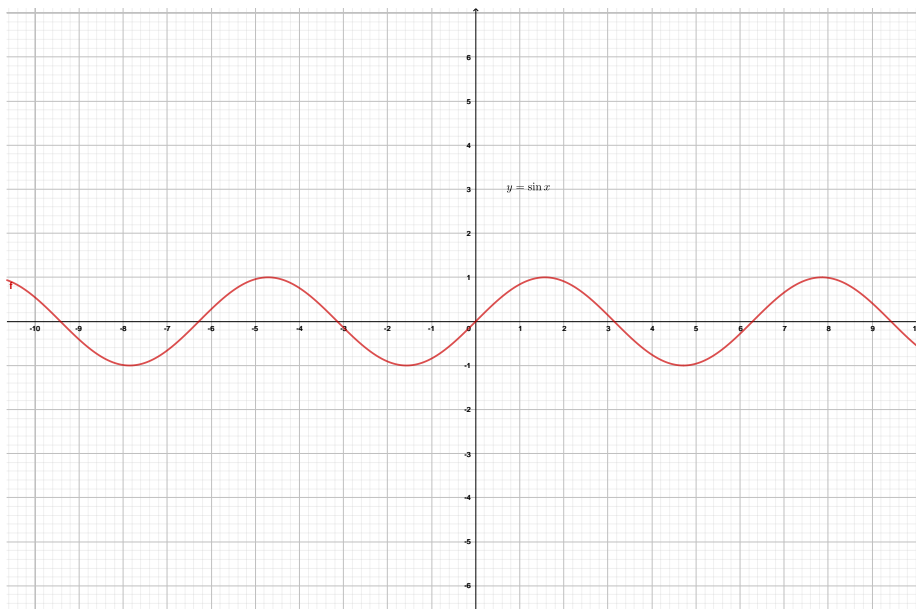
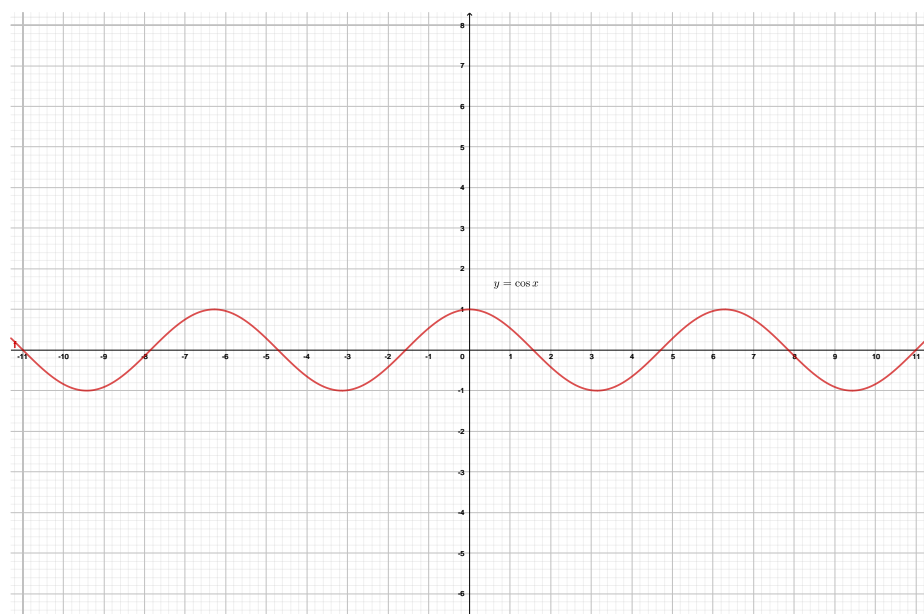
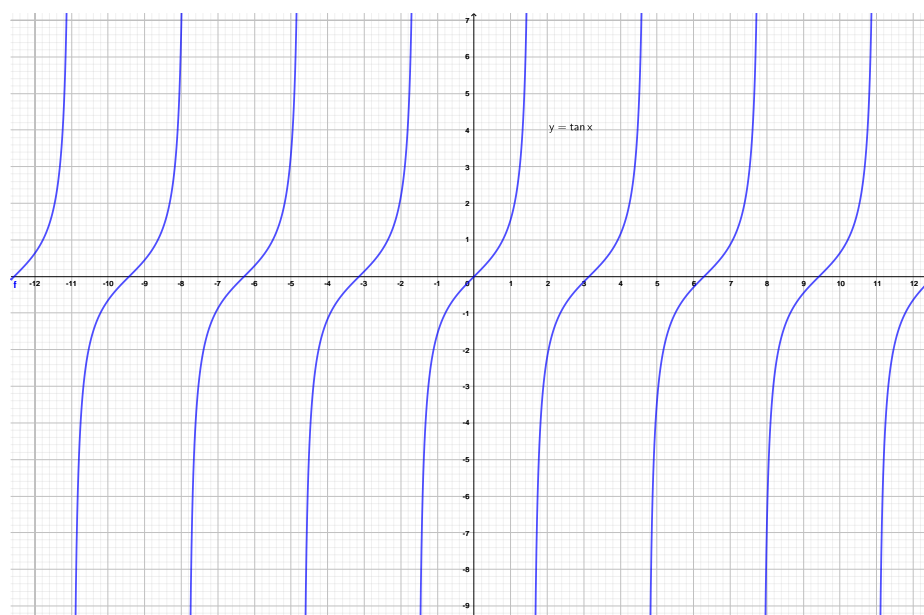
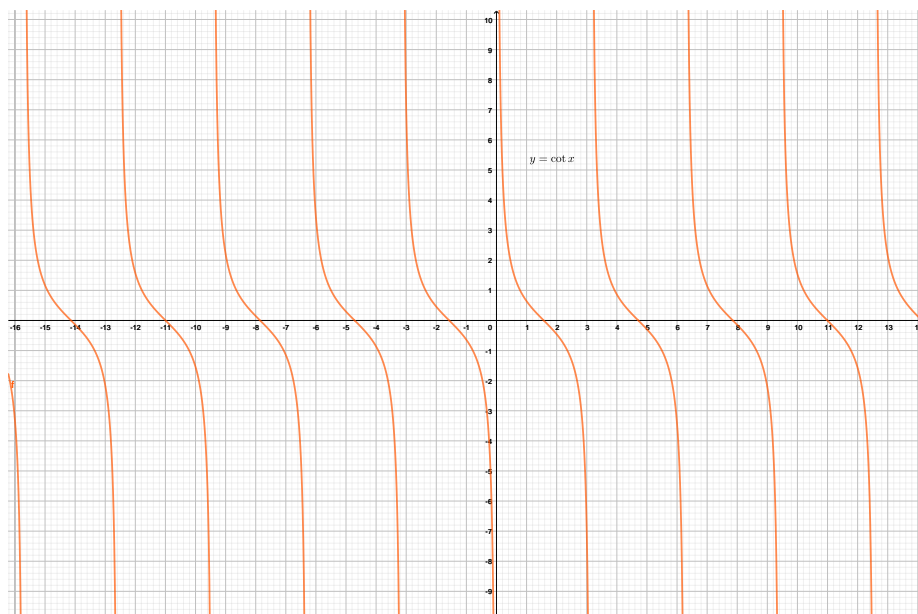
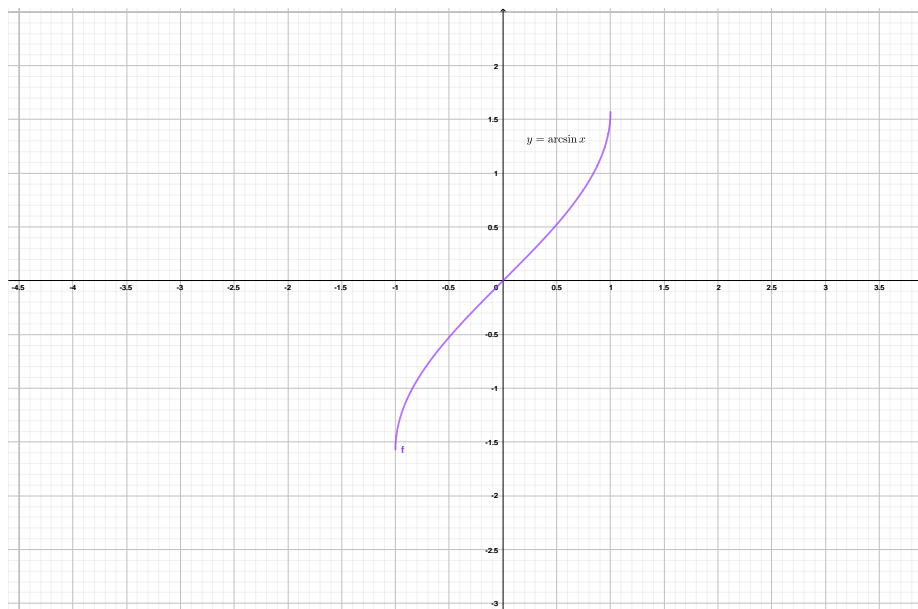
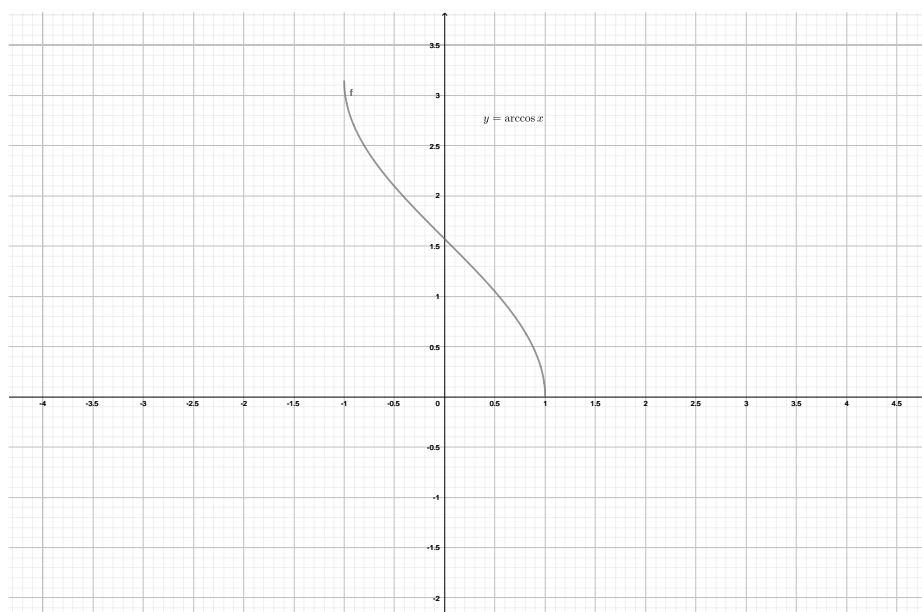
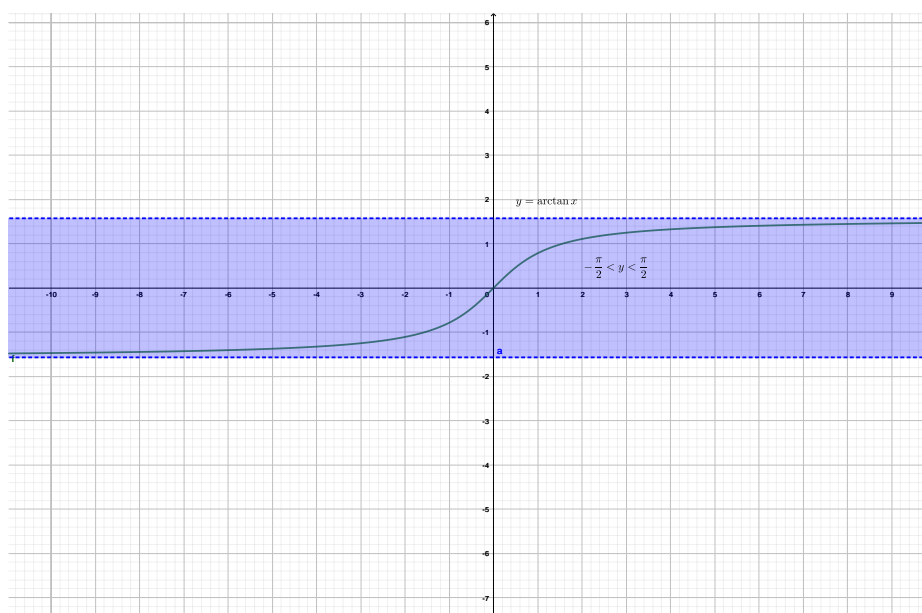


Figura 2.13: Funzione  $\sin x$

**Funzione  $\cos x$** Figura 2.14: Funzione  $\cos x$ **Funzione  $\tan x$** Figura 2.15: Funzione  $\tan x$



**Funzione  $\cot x$** Figura 2.16: Funzione  $\cot x$ **2.1.13 Le funzioni trigonometriche inverse****Funzione  $\arcsin x$** Figura 2.17: Funzione  $\arcsin x$

**Funzione**  $\arccos x$ Figura 2.18: Funzione  $\arccos x$ **Funzione**  $\arctan x$ Figura 2.19: Funzione  $\arctan x$

### Operazione sul grafico: traslazione della asse X

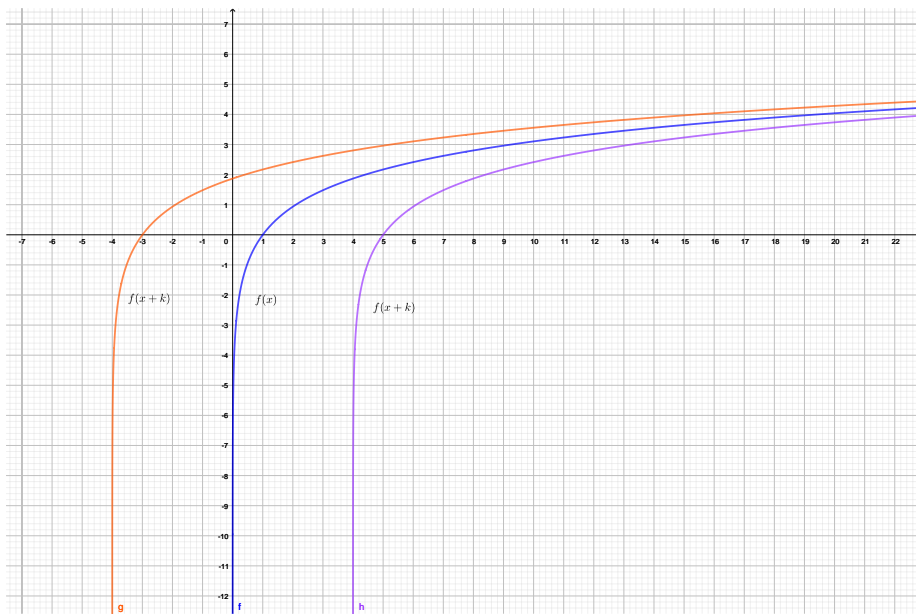


Figura 2.20: Operazione sul grafico: traslazione della asse X

### Operazione sul grafico: traslazione della asse Y

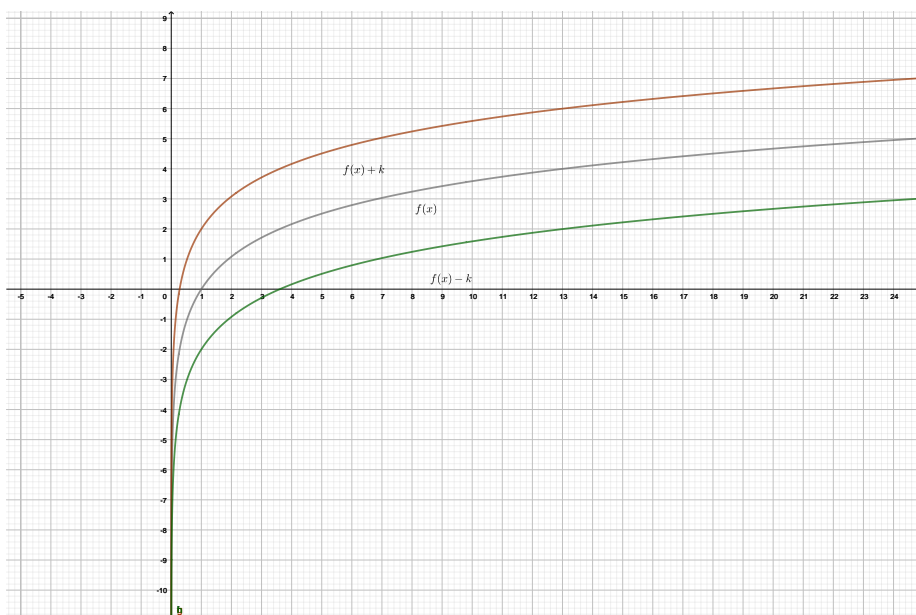


Figura 2.21: Operazione sul grafico: traslazione della asse Y

### Operazione sul grafico: contrazione e dilatazione in direzione verticale

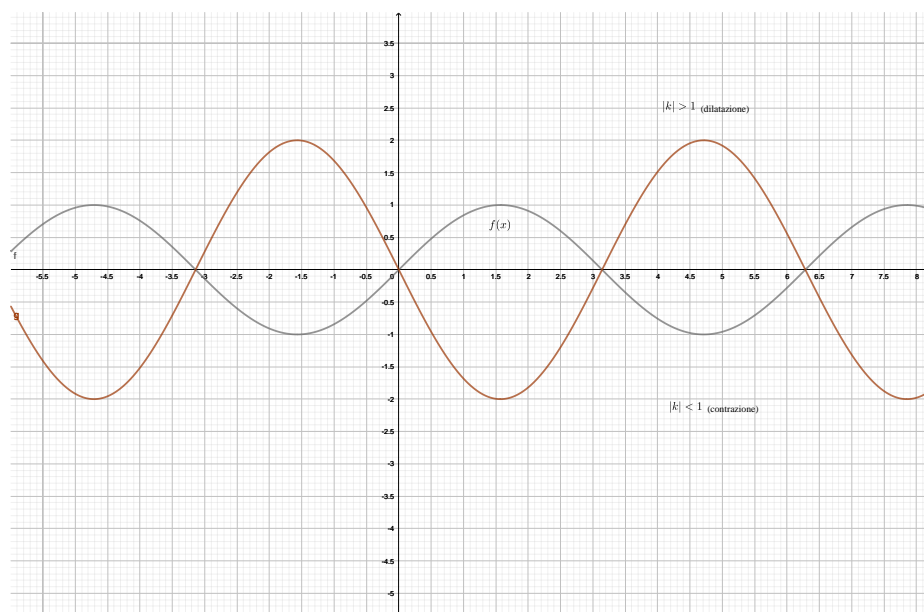


Figura 2.22: Operazione sul grafico: contrazione e dilatazione in direzione verticale

### Operazione sul grafico: contrazione e dilatazione in direzione orizzontale

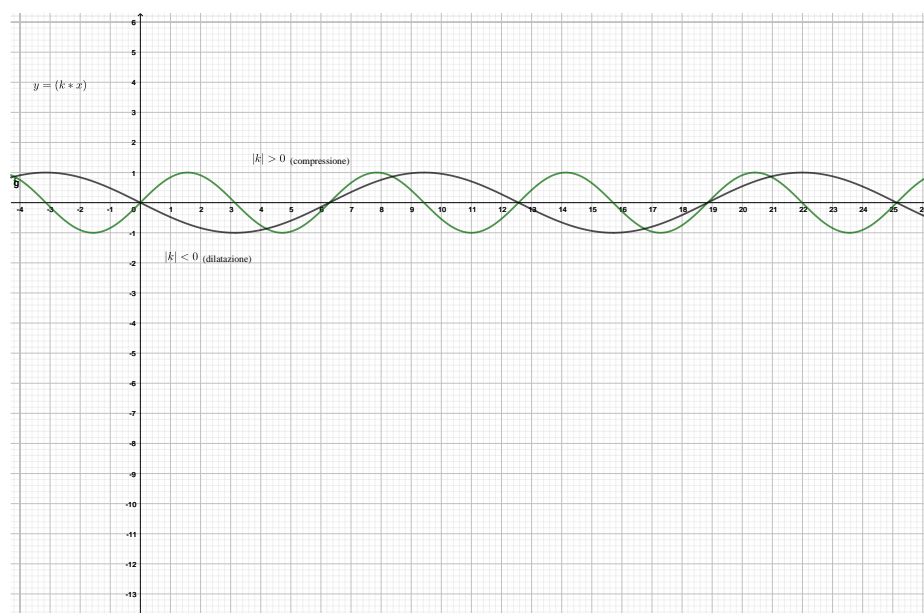


Figura 2.23: Operazione sul grafico: contrazione e dilatazione in direzione orizzontale

Operazione sul grafico:  $y = |f(x)|$

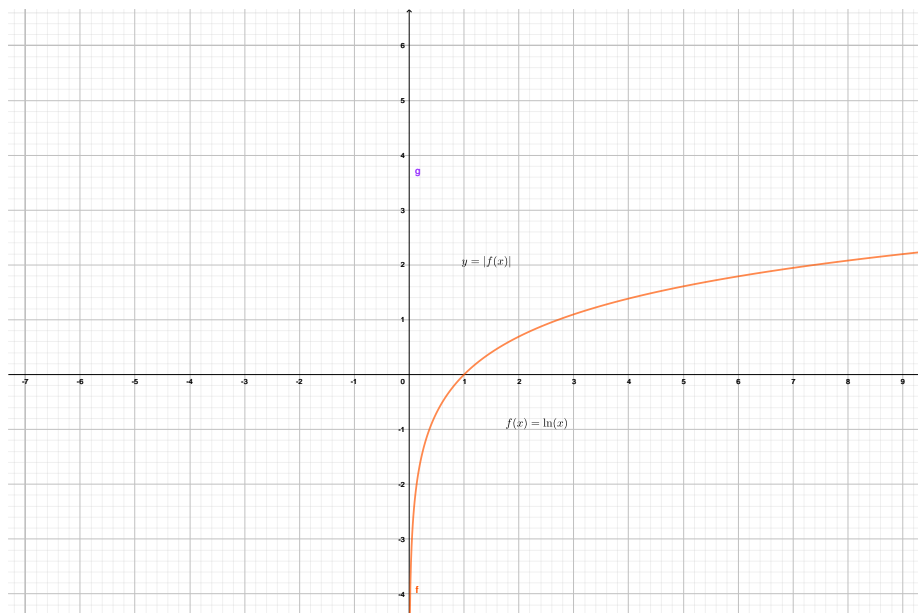
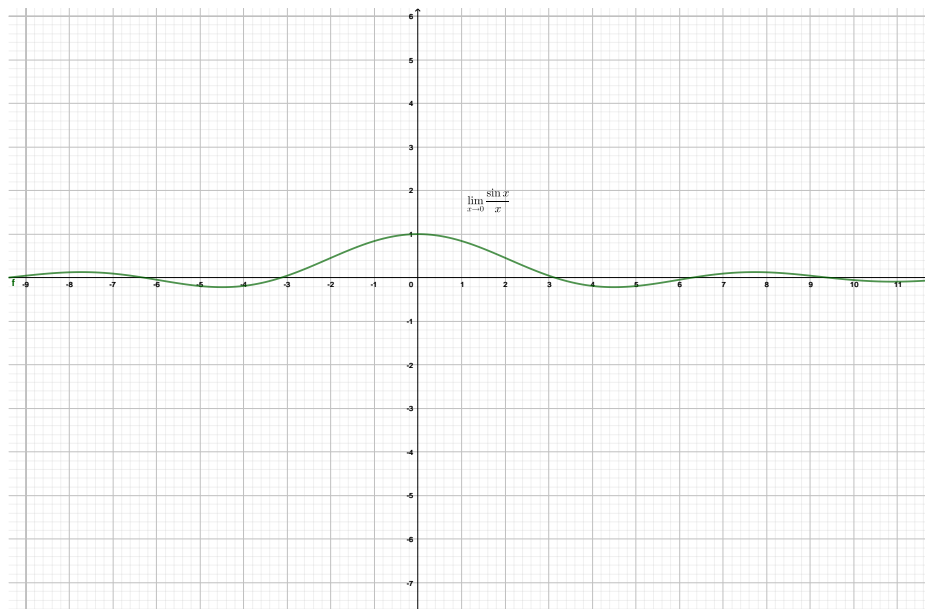


Figura 2.24: Operazione sul grafico:  $y = |f(x)|$

## 2.2 Limiti



x	f(x)
0,1	0,998
0,001	0,999

$$C.E. = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Figura 2.25: Esempio limite di funzione

Il limite di una funzione è un'operazione, o meglio un operatore, che permette di studiare il comportamento di una funzione nell'intorno di un punto  $x_0$ .

*Mediante il limite è possibile stabilire a quale valore tende la funzione man mano che i valori della variabile si approssimano al punto  $x_0$ .*

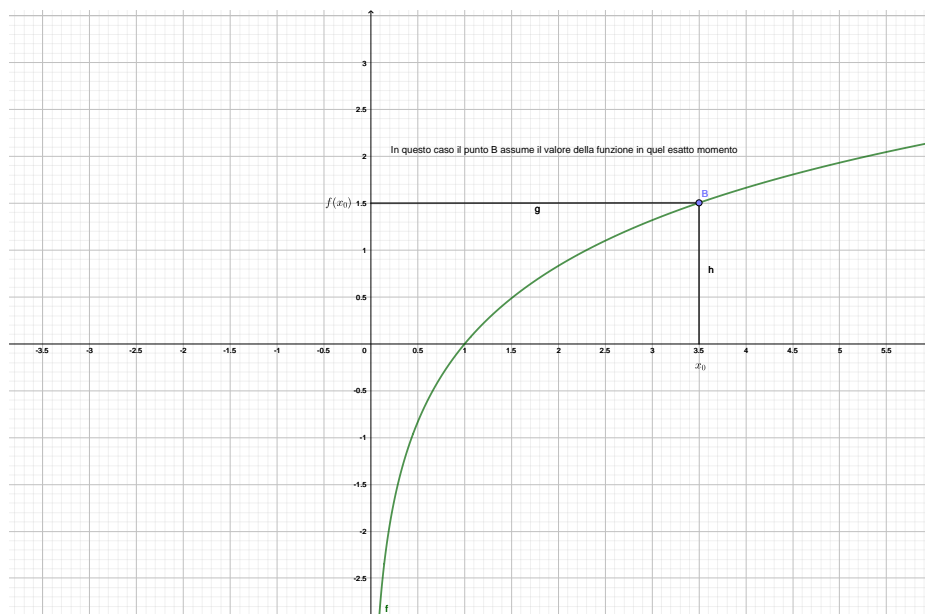


Figura 2.26: Esempio di limite di una funzione

### 2.2.1 Limite di una funzione

Sia  $f(x)$  definita in  $A \in \mathbb{R}$ , e sia  $x_0$  un punto di accumulazione per  $A$ . Si dice che  $f(x)$  ha limite  $l$  per  $x$  che tende a  $x_0$ , se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - l| = \varepsilon \Rightarrow x \in I(x_0, \delta_\varepsilon)$  escluso al più  $x_0$  cioè  $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$

- $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$
- $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon$

#### In simboli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$$

### 2.2.2 Definizione di Limite destro

$l_1$  si definisce *limite destro* di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0^+$ :  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_1$   
se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - l_1| < \varepsilon \Rightarrow x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$  cioè  $x \in (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon)$

### 2.2.3 Definizione di limite sinistro “da sinistra”

$l_2$  si definisce *limite sinistro* di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0^-$ :  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_2$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - l_2| < \varepsilon \Rightarrow x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0$  cioè  $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0)$

### 2.2.4 Teorema d'unicità del limite “da destra”

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Rightarrow l$  è unico

Dimostrazione. Per assurdo: supponiamo che  $\exists l_1, l_2 : l_1 \neq l_2$  con  $l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  in  $I(x_0, \delta_{1\varepsilon})$ ,  $l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  in  $I(x_0, \delta_{2\varepsilon})$

Fissato  $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$

$$2\varepsilon = |l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < 2\varepsilon \text{ in } I(x_0, \delta_\varepsilon), \delta_\varepsilon = \min(\delta_{1\varepsilon}, \delta_{2\varepsilon})$$

Assurdo!  $\Rightarrow l_1 = l_2$

**Esempi**

$$y = \frac{|x|}{x} \quad C.E. = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \nexists \text{ limitate}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

**Definizione** Sia  $f(x)$  definita in  $A \in \mathbb{R}$ , e sia  $x_0$  un punto di accumulazione per  $A$ . Si dice che  $f(x)$  ha limite  $+\infty$  per  $x$  che tende a  $x_0$ , se  $\forall M > 0, \exists \delta_M > 0 : \forall x \in I(x_0, \delta_m) \Rightarrow f(x) > M$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

**Definizione** Sia  $f(x)$  definita in  $A \in \mathbb{R}$ , e sia  $x_0$  un punto di accumulazione per  $A$ . Si dice che  $f(x)$  ha limite  $-\infty$  per  $x$  che tende a  $x_0$ , se  $\forall M > 0, \exists \delta_M > 0 : \forall x \in I(x_0, \delta_m)$  risulta  $f(x) < -M$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

**Definizione di Asintoto verticale** Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  allora la retta verticale  $x = x_0$  si chiama asintoto verticale

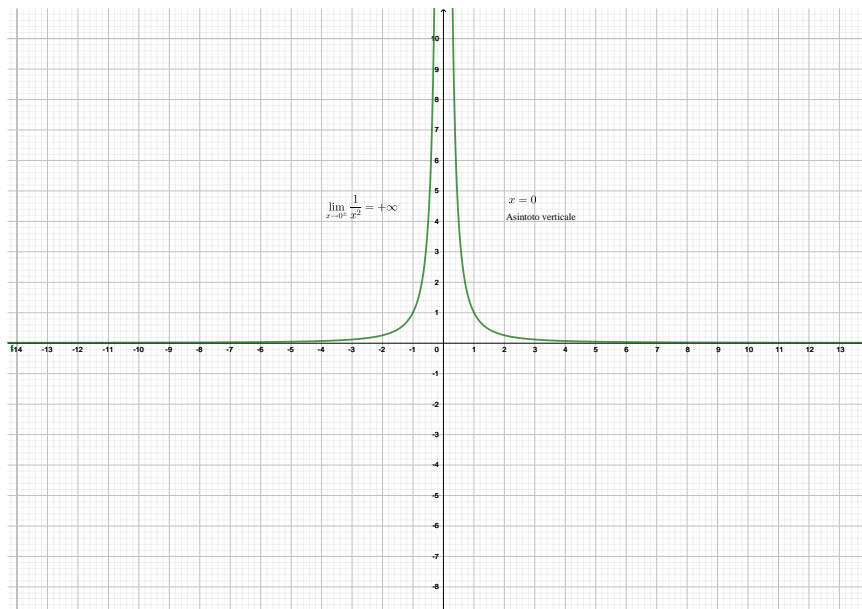


Figura 2.27: Asintoto verticale

Sia  $f(x)$  definita in  $A \in \mathbb{R}$ , si dice che  $f(x)$  ha limite  $l$ , per  $x$  che tende a  $+\infty$ , se:  $\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon > 0 : \forall x \in I(K_\varepsilon, +\infty)$  risulta  $|f(x) - l| < \varepsilon$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

**Definizione di Asintoto orizzontale** Se  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  Allora la retta orizzontale  $y = l$  si chiama Asintoto orizzontale

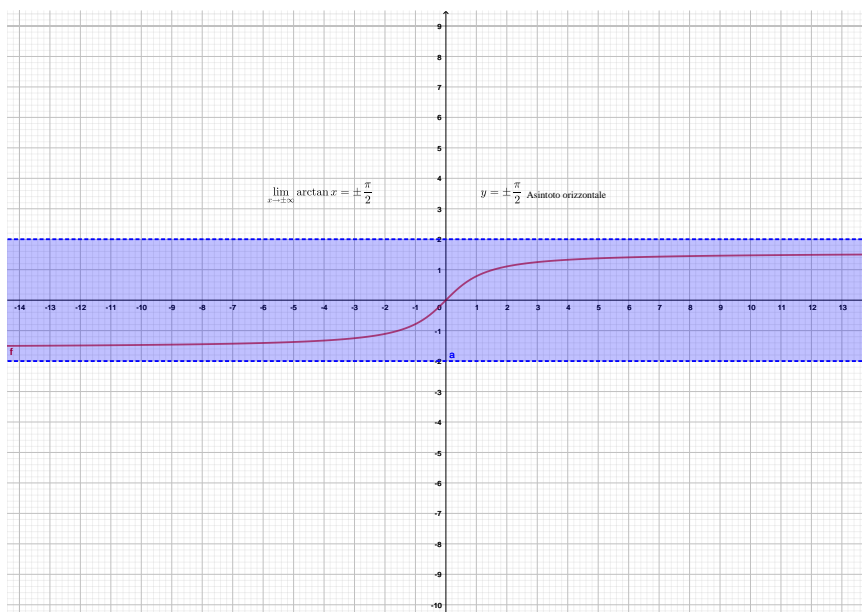


Figura 2.28: Asintoto orizzontale

Sia  $f(x)$  definita in  $A \in \mathbb{R}$ , si dice che  $f(x)$  ha limite  $+\infty$ , per  $x$  che tende a  $+\infty$ , se:  $\forall M > 0, \exists K_M > 0 : \forall x \in (K_M, +\infty)$  risulta  $f(x) \in (M, +\infty)$  |  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  |

### 2.2.5 Teorema (algebra dei limiti)

Se:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$   $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm g(x) = l_1 \pm l_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) * g(x) = l_1 * l_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}, g(x), l_2 \neq 0$

### 2.2.6 Convenzioni con $\infty$

- $\forall a > 0, a \pm \infty = \pm \infty$
- $+\infty + \infty = +\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $\forall a > 0, a * (\pm \infty) = \pm \infty$
- $\forall b < 0, b * (\pm \infty) = \mp \infty$
- $(\pm \infty) * (\pm \infty) = +\infty$
- $(\pm \infty) * (\mp \infty) = -\infty$

**Convenzioni con  $\infty$**

$$\frac{a}{\infty} = 0 \quad \frac{a}{0} = \infty$$



### 2.2.7 Forme indeterminate

$$\boxed{+\infty - \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 1^\infty \quad e^{+\infty \cdot 0} \quad 0 - \infty}$$

- $a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 0, & 0 < a < 1 \end{cases}$
- $a^{-\infty} = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ +\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$

### 2.2.8 Teorema del confronto

Siano  $f(x), f_1(x), f_2(x)$  tre funzioni definite in  $A \subseteq \mathbb{R}$  sia  $x_0$  un punto di accumulazione per  $A$  e  $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = l$  allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

#### Dimostrazione

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = l$  allora per definizione di limite:

- $\exists \delta_1 : |f_1(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0, \delta_1)$
- $\exists \delta_2 : |f_2(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0, \delta_2)$

$$\Rightarrow l - \varepsilon < f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) < l + \varepsilon$$

$$\forall x \in I(x_0, \delta_2), \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$$

#### Casi particolari di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) * g(x)$

**Teorema** Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x; |g(x)| \leq M$  per  $x \in I(x_0, \delta) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) * g(x) = 0$

**Esempio**  $\lim_{x \rightarrow x_0} x * \sin \frac{1}{x} = 0$

### 2.2.9 Limite di funzione composta

Siano  $g : A \rightarrow B : B \rightarrow \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$  e  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = l$  con  $l = f(y_0)$  (se  $f$  è continua)

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = l}$$

### 2.2.10 Limiti Notevoli

$$\bullet \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

$$\bullet \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tan(x)}{x} = 1}$$

$$\bullet \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{1}{2}}$$

$$\bullet \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e}$$

$$\bullet \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e}$$

$$\bullet \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a}$$

#### Esempi

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0^+} x e^x + e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0^-} x e^x + e^{-\frac{1}{x}} = \infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}{x^2(1 + \cos(x))} = \frac{1}{2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

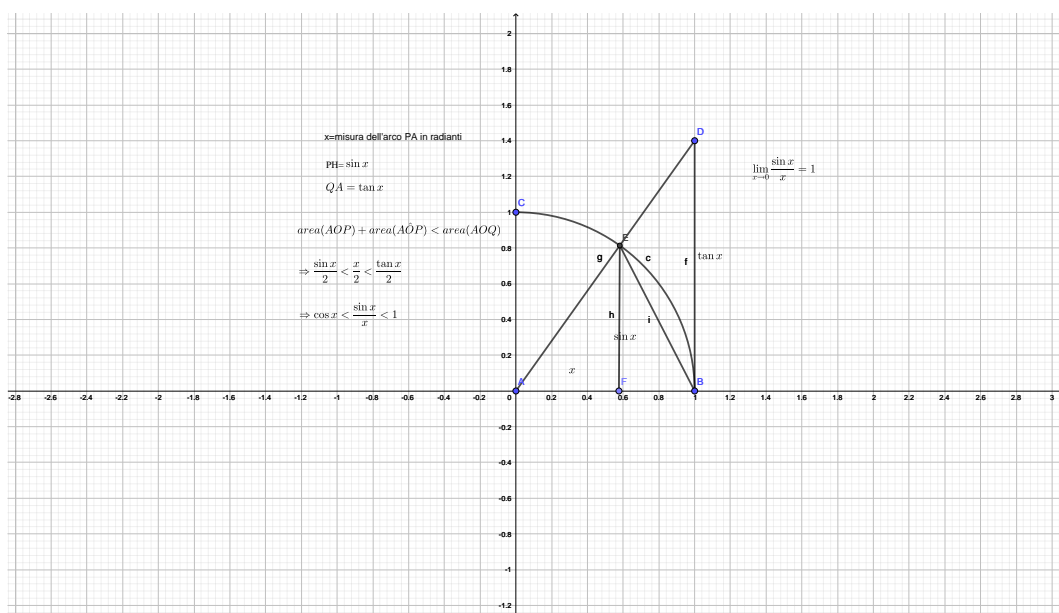


Figura 2.29: Esempio di limite notevole di una funzione

### 2.2.11 Infinitesimi e infiniti

**Definizione** Una funzione  $f(x)$  si dice infinitesima per  $x \rightarrow x_0$  (per  $x \rightarrow \infty$ ),  $x_0$  punto di accumulazione per il dominio di  $f(x)$ , se:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  (oppure  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ).

#### Esempi

- $y = e^x$  è un infinitesimo per  $x \rightarrow -\infty$
- $y = \ln x$  è un infinitesimo per  $x \rightarrow 1$
- $y = \sin x$  è un infinitesimo per  $x \rightarrow 0$  (ma anche per  $x \rightarrow \pi, 2\pi$ , etc.)
- $y = \ln 1 + x$  è un infinitesimo per  $x \rightarrow 1$

#### Ordine di infinitesimo

Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  infinitesimi per  $x \rightarrow x_0$  (o per  $x \rightarrow \infty$ ), con  $g(x) \neq 0$ . Se  $\exists \alpha R+$  e  $l \in R$ ,  $l \neq 0$  tale che  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$  (oppure  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l$ )

Allora, si dice che per  $x \rightarrow x_0$  (o per  $x \rightarrow \infty$ ),  $f(x)$  è un infinitesimo di ordine  $\alpha$  rispetto all'infinitesimo campione  $g(x)$ .

#### Esempi

- $y = \sin x$  è un infinitesimo per  $x \rightarrow 0$  di ordine 1 rispetto all'infinitesimo campione  $g(x) = x$ , infatti,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^\alpha} = 1$  solo se  $\alpha = 1$
- $y = \tan^2 x$  è un infinitesimo di ordine 2 rispetto ad  $x$ , per  $x \rightarrow 0$
- $\text{ord}(1 - \cos x) = 2$  rispetto ad  $x$  per  $x \rightarrow 0$

**Confronto tra infinitesimi**

Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  infinitesime per  $x \rightarrow x_0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \neq 0 & \text{ord}(f) = \text{ord}(g) \\ \pm\infty & \text{ord}(f) < \text{ord}(g) \\ 0 & \text{ord}(f) > \text{ord}(g) \\ \text{non esiste, } f \text{ e } g \text{ non confrontabile} & \end{cases}$$

Stesso risultato se  $f(x)$  e  $g(x)$  sono infinitesime per  $x \rightarrow \infty$ . Utilizzando il confronto tra infinitesimi nel calcolo dei limiti del tipo  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}$ , dove  $f_1, f_2, g_1, g_2$  sono funzioni infinitesime per  $x \rightarrow x_0$ , si possono *trascurare gli infinitesimi di ordine maggiore* (analogo discorso per funzioni infinitesime  $x \rightarrow \infty$ ).

**esempio**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x^3+2\tan x}{(e^x-1)^2+\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\tan x}{\sin x} = 2$

**Definizione di funzioni asintotiche** Si dice che due funzioni  $f, g$  sono asintotiche per  $x \rightarrow x_0$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  e si scrive  $f \sim g$  per  $x \rightarrow x_0$

**esempi**

- $\sin x \sim x$  per  $x \rightarrow 0$
- $\ln(1+x) \sim x$  per  $x \rightarrow 0$
- $e^x - 1 \sim x$  per  $x \rightarrow 0$

**Definizione di funzioni infinite** Una funzione  $f(x)$  si dice *infinita* per  $x \rightarrow x_0$  (o per  $x \rightarrow \infty$ ),  $x_0$  punto di accumulazione per il dominio di  $f(x)$ , (o per  $x \rightarrow \infty$ ) se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ (oppure } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty)$$

**Esempi**

- $y = e^x$  è un infinito per  $x \rightarrow +\infty$
- $y = \ln x$  è un infinito per  $x \rightarrow 0^+$
- $y = x^2 + x$  è un infinito per  $x \rightarrow \infty$

**Regole aritmetiche** Siano  $f(x) = o(x^\alpha)$  (si legge «o piccolo di») e  $g(x) = o(x^\beta)$  due funzioni *infinitesime* rispettivamente di ordine  $\alpha$  e  $\beta$  per  $x \rightarrow 0$ . Allora si ha

- $cf(x) = o(x^\alpha), \forall c \in R$
- $x^\lambda f(x) = o(x^{\lambda+\alpha})$
- $f(x)g(x) = o(x^{\alpha+\beta})$
- $f(x) + g(x) = o(x^\gamma), \gamma = \min(\alpha, \beta)$

**Ordine di infinito** Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  infiniti per  $x \rightarrow x_0$  (o per  $x \rightarrow \infty$ ), con  $g \neq 0$ . Se  $\exists \alpha \in R_+$  e  $l \in R, l \neq 0$  tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l \text{ (o } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = l)$$

Allora, per  $x \rightarrow x_0$  (o per  $x \rightarrow \infty$ ),  $f(x)$  è un infinito di ordine  $\alpha$  rispetto all'infinito compone  $g(x)$ .

**Esempi**

- $ord(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}$  rispetto ad  $x$  per  $x \rightarrow +\infty$
- $ord(\frac{1}{\sin x}) = 1$  rispetto ad  $\frac{1}{x}$  per  $x \rightarrow 0$
- $ord(\frac{1}{e^x-1}) = 1$  rispetto ad  $\frac{1}{x}$  per  $x \rightarrow 0$

**Cofronto tra infiniti** Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  infiniti per  $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \neq 0 & ord(f) = ord(g) \\ \pm\infty & ord(f) > ord(g) \\ 0 & ord(f) < ord(g) \\ \text{non esiste, } f \text{ e } g \text{ non confrontabile} & \end{cases}$$

Stesso risultato se  $f(x)$  e  $g(x)$  sono infinite per  $x \rightarrow \infty$ . Utilizzando il confronto tra infiniti nel calcolo dei limiti del tipo  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}$ , dove  $f_1, f_2, g_1, g_2$  sono funzioni infinite per  $x \rightarrow x_0$ , si possono **trascurare gli infiniti di ordine minore** (analogo discorso per funzione infinito  $x \rightarrow \infty$ ).

**Esempio**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x^3+3\sqrt{x}}{x^2(2x-1)+\sqrt{3}x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}.$

**Gerarchia degli infiniti** Per  $x \rightarrow +\infty$  si ha  $(\log_\alpha x)^\alpha \ll x^\beta \ll b^x$ , con  $\alpha, \beta > 0, a, b > 1$ . Non sempre è possibile calcolare l'ordine di infinito (o di infinitesimo) rispetto alla funzione campione usuale.

**Esempio**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^a} = +\infty, \forall \alpha > 0, a > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^a} = +\infty, \forall \alpha, \beta > 0, a > 1$

**Regole aritmetiche** Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni *infinite* di ordine rispettivamente  $\alpha$  e  $\beta$ . Allora si ha

- $ord(f(x) + g(x)) = \max \alpha, \beta$
- $ord(f(x) * g(x)) = \alpha + \beta$
- $ord((f(x))^\gamma) = \alpha\gamma$

**2.2.12 Funzioni continue**

Una funzione continua è una funzione che, intuitivamente, fa corrispondere ad elementi sufficientemente vicini del dominio elementi arbitrariamente vicini del codominio.

**Definizione** Una funzione  $f(x)$  è continua in  $x_0$ , se:  $l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$  ossia  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0: |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \forall x \in I(x_0, \delta_\epsilon) (l = f(x_0))$

**Teorema della permanenza del segno**

Sia  $f(x)$  definita almeno in un intorno di  $x_0$  e continua in  $x_0$ . Se  $f(x_0) > 0$  allora  $\exists \delta > 0: f(x) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

**Teorema degli zeri**

Sia  $f(x)$  continua in  $[a, b]$   $f(a) * f(b) < 0$  allora  $\exists x_0 \in (a, b): f(x_0) = 0$ . Se  $f$  è anche strettamente monotona, lo zero è unico.

**Teorema dell'esistenza dei valori intermedi (conseguenza del teorema degli zeri)** Una funzione  $f(x)$  continua in  $[a, b]$  assume tutti i valori compresi tra  $f(a)$  ed  $f(b)$ .

**Teorema di Wierstrass (sul massimo e il minimo)**

Sia  $f(x)$  continua in  $[a, b]$ . Allora  $f(x)$  assume massimo e il minimo assoluto in  $[a, b]$ , cioè  $\exists x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$

**2.2.13 Criteri di invertibilità**

Una funzione continua e strettamente monotona in  $[a, b]$  è invertibile in tale intervallo. Dimostrazione.

**2.3 Calcolo differenziale per funzioni di una variabile**

Sia  $f: (a, b) \rightarrow R$ , si definisce derivata di  $f$  nel punto  $x_0 \in (a, b)$  il numero, se  $\exists$  finito:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0), y'(x_0), \frac{df}{dx}|_{x_0}, \frac{dy}{dx}|_{x_0}, Df(x_0), Dy(x_0)$$

**2.3.1 Derivata di una funzione**

**Significato geometrico della derivata in un punto e equazione della retta tangente** Sia  $x_0 \in (a, b) : x_0 + h \in (a, b)$

Si definisce Rapporto incrementale  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \tan \beta$

Sia  $\beta$  l'angolo che la retta  $r$  forma con l'asse delle  $x$ , considerando il triangolo ABC possiamo scrivere  $f(x_0+h) - f(x_0) = \tan \beta [x_0 + h - x_0]$  Ossia:  $\tan \beta = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  Ma  $m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  È il coefficiente angolare della retta  $f$  passante per AB

Per cui  $\tan \beta = m$  Ossia  $\tan \beta$  è il coefficiente angolare della retta secante per AB

Quando  $h \rightarrow 0$  in punto B si sposta sulla curva avvicinandosi ad A, la retta  $r$  diventa tangente alla curva in A e si ha:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \tan \alpha$  coefficiente angolare di t Equazione della retta tangente dal grafico di  $f(x)$  nel punto di ascissa  $x_0$ :  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  Infatti, tra tutte le rette del fascio proprio passanti  $A(x_0, f(x_0))$  dieq.  $y - f(x_0) = m(x - x_0)$  per  $m = f'(x_0)$  si ottiene l'equazione di t. Se  $f'(x)$  è definita  $\forall x \in (a, b)$  allora  $f(x)$  è derivabile in  $(a, b)$  e risulta definita la funzione  $f' : (a, b) \rightarrow R$  detta derivata prima di  $f(x)$

$f(x)$  è derivabile in  $[a, b]$ , se è derivabile  $\forall x \in (a, b)$  e ammette derivata destra in  $x=a$  (si scrive  $f'_+(a)$ ) e derivata sinistra in  $x=b$  (si scrive  $f'_-(b)$ )

**2.3.2 Definizione**

- Derivata destra  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$
- Derivata sinistra  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$

Se  $f'_+(x) = f'_-(x)$   $f$  è derivabile in  $x$

**2.3.3 Continuità e derivabilità****Teorema**

Sia  $f : (a, b) \rightarrow R$ . Se  $f$  è derivabile in  $x_0 \in (a, b)$  allora  $f$  è continua in  $x_0$ ,  $x + h \in (a, b) : \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} * h = 0$ . Da cui  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$  che è la continuità di  $f$  in  $x_0$ .

Quindi **derivabilità  $\Rightarrow$  continuità** Occhio non è vero il contrario perché non per forza una funzione continua è derivabile.

**Esempio**  $y = |x|$  è continua ma non è derivabile in  $x = 0$ . Infatti,

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ e } y' = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

## 2.4 Punti di non derivabilità

### 2.4.1 Punto angoloso

Se  $f'_+(x) \neq f'_-(x)$  e almeno un  $\exists$  finita  $x_0$  si dice **punto angoloso**, in quanto le rette tangenti alla  $f(x)$  nel punto di ascissa  $x_0$  formano un angolo.

#### Esempio

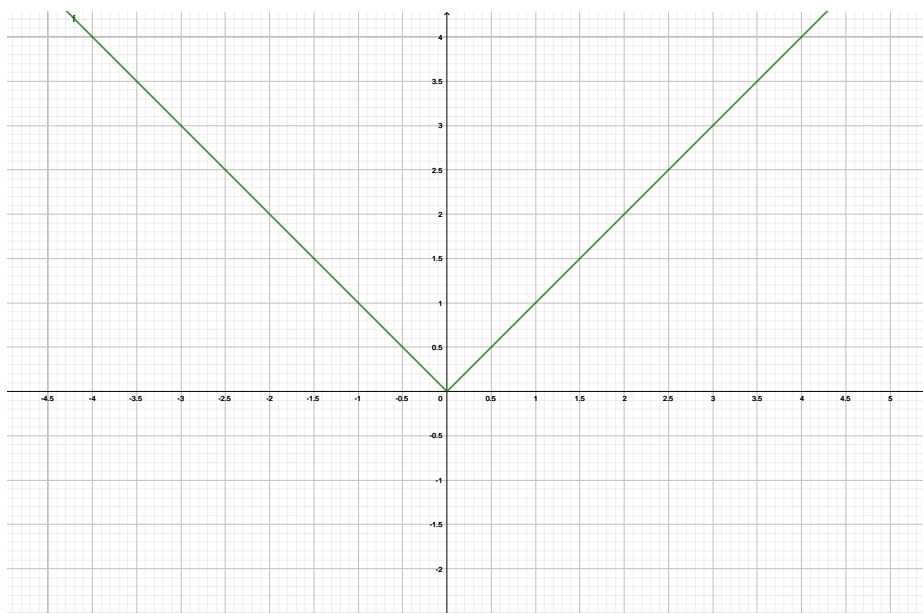


Figura 2.30: Grafico di Funzione valore assoluto  $y = |x|$  e quindi  $f'_+(0) = 1 \neq f'_- = -1$

#### Un altro esempio

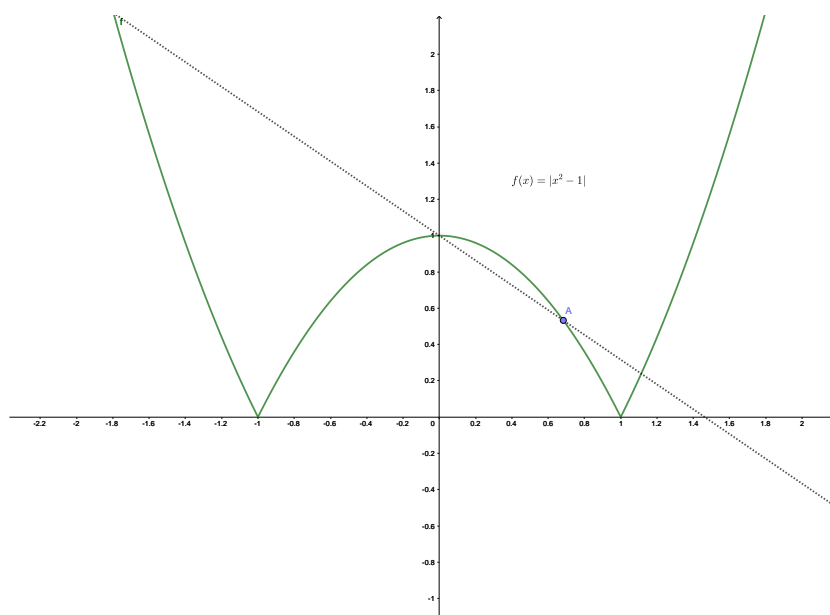


Figura 2.31: Grafico di Funzione  $x = |x^2 - 1|$

### 2.4.2 Punto cuspide

Se  $f'_+(x) \neq f'_-(x)$  sono  $\infty$ ,  $x_0$  si dice **punto cuspide**; la retta tangente alla  $f(x)$  nel punto di ascissa  $x_0$  è verticale.

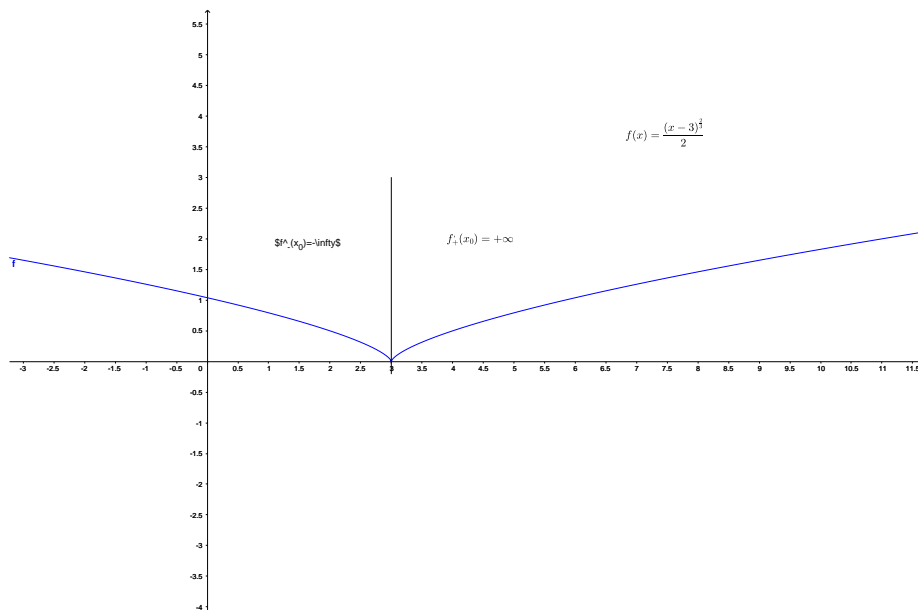


Figura 2.32: Grafico di Funzione  $f(x) = \frac{(x-3)^{\frac{2}{3}}}{2}$

### Punto di flesso a tangente verticale

Se  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = \pm\infty$  sono  $\infty$ ,  $x_0$  si dice punto di flesso a tangente verticale; la retta tangente alla  $f(x)$  nel punto di ascissa  $x_0$  è verticale.

### 2.4.3 Esempi di derivate

- $D(x^n) = n * x^{n-1}$
- $D(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e$
- $D(a^x) = a^x \ln a$
- $D(\sin x) = \cos x$
- $D(\cos x) = -\sin x$
- $D(k) = 0$
- $D(\ln x) = \frac{1}{x}$
- $D(e^x) = e^x$
- $D(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$

### Qualche esercizio dimostrativo

Utilizzando la definizione calcolare la derivata di

1.  $f(x) = k$   

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0$$
2.  $f(x) = e^x$   

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x$$
3.  $f(x) = \ln x$   

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x}$$

4.  $f(x) = \cos x$   

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos h - 1)}{h} - \frac{\sin x \sin h}{h} = -\sin x$$
5.  $f(x) = \sin x$   

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} +$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h \cos x}{h} = \cos x$$

Se  $f$  e  $g$  sono derivabile in  $x$ , allora sono derivabili in  $x$  anche la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente (con il denominatore  $\neq 0$ ) e si ha:

1.  $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2.  $(f * g)' = f' * g + f * g'$
3.  $(\frac{f}{g})' = \frac{f' * g - f * g'}{g^2}, g \neq 0$

• Dimostriamo la 2)  $(f * g)' = f' * g + f * g'$

$$(f * g)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) \pm f(x)g(x+h) - f(x)g(x) \pm f(x)g(x+h)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)[f(x+h) - f(x)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)[f(x+h) - f(x)]}{h}$$

Per ipotesi  $f$  e  $g$  sono derivabile, quindi continue in  $x$ , perciò:

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x),$$

$$(f * g)' = \dots = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

• Dimostriamo la 3)

$$(\frac{f}{g})' = \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{f(x)}{g(x)}}{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x) * h}} = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h) \pm f(x)g(x) \pm f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x) * h}$$

$$\frac{[f(x+h) - f(x)]g(x) - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{g(x+h)g(x) * h} = \frac{\frac{[f(x+h) - f(x)]g(x)}{h} - \frac{f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h}}{g(x+h)g(x) * h} =$$

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x+h)g(x) * h} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2 * h}$$

### Esercizio

- Calcolare la derivata di  $f(x) = \sin x \ln x$

$$f'(x) = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

- Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di eq  $f(x) = 2e^x \sqrt[3]{x}$  nel punto di ascissa  $x=1$

$$f'(x) = 2e^x \sqrt[3]{x} + 2 \frac{e^x}{3 \sqrt[3]{x^2}}$$

### 2.4.4 Teorema di derivazione della funzione composta

Sia  $g(x)$  una funzione derivabile in  $x$ , e se  $f(x)$  è una funzione derivabile nel punto  $g(x)$ , allora la funzione composta  $f(g(x))$  è derivabile in  $x$ , e si ha:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) * g'(x)$$

Dimostrazione. Se  $h \neq 0$  si ha  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} * \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(g(x)) * g'(x)$  in quanto se  $h \rightarrow 0$  allora  $k \rightarrow 0$  con  $k = g(x+h) - g(x)$ , essendo  $g(x)$  continua in  $x$ . Se  $h=0$ , il teorema continua a valere.

### Esercizio

1. Calcolare la derivata di  $f(x) = \ln(\sin x)$ .

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

2. Calcolare la derivata di  $f(x) = e^{\sqrt{2x^3+x}}$ .

$$f'(x) = e^{\sqrt{2x^3+x}} \frac{6x^2+1}{2\sqrt{2x^3+x}}$$



3. Calcolare la derivata di  $f(x) = \sin(\ln x)$   
 $f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$

Scrivere l'equazione della retta alla curva di equazione  $f(x) = (xe^{2x} - 1)^3$  nel punto di ascissa  $x=0$ , L'eq.  
 Retta tangente a  $f(x)$  in  $x = x_0 : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Per noi  $x_0 = 0$

$$f'(x) = 3(xe^{2x} - 1)^2(e^{3x} + xe^{2x}) \Rightarrow f'(0) = 3$$

$$f(0) = -1$$

Quindi l'equazione è:  $y = 3x - 1$

### 2.4.5 Teorema di derivazione della funzione inversa

Sia  $f(x)$  una funzione continua e strettamente monotona in  $[a, b]$ . Se  $f$  è derivabile in  $x_0 \in (a, b)$  e se allora anche la funzione inversa di  $f^{-1}$  è derivabile nel punto  $y_0 = f(x_0)$ , e la derivata vale:

$$[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Dimostrazione. Si ha  $\frac{f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)}{k} = \frac{h}{f(x_0+h) - f(x_0)}$  Se  $k \rightarrow 0$  anche  $h \rightarrow 0$  in quanto  $f'$  è continua

### 2.4.6 Esercizio

Utilizzando il teorema di derivazione della funzione inversa, dimostrare che:

$$D[\arcsin(y)] = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$x = \arcsin(y)$  è la funzione inversa di  $y = \sin(x)$  quest'ultima è invertibile per  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ . Applichiamo il teorema della funzione inversa,  $f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$

$$\boxed{[\arcsin(y)]' = \frac{1}{[\sin(x)]'} = \frac{1}{\cos(x)}}$$

Ma sappiamo che:  $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

$$\boxed{[\arcsin(y)]' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}}$$

### 2.4.7 Esercizio

Calcolare la derivata della funzione  $y = e^x$  vista come funzione inversa di  $f(x) = \ln x$ . Per  $x > 0$ , si ha  $x = f^{-1}(y) = e^y$   $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$  Perciò, per il teorema della derivata della funzione inversa si ha  $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (e^y)' = x = e^y$ . Quindi  $(e^x)' = e^x$

### 2.4.8 Esercizio

Utilizzando il teorema di derivazione della funzione inversa, dimostrare che  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ . Sia  $f(x) = \tan x$ , in  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  si ha  $x = f^{-1}(x) = \arctan x$   
 $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x$ . Perciò, per il teorema della derivata della funzione inversa si ha  $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (\arctan y)' = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$

## 2.5 Massimo e minimo assoluto

Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$ , si dice  $M$  è **massimo assoluto** (o globale) di  $f$  in  $[a, b]$  e  $x_0 \in [a, b]$  è un punto di massimo se

$$f(x_0) = M \geq f(x), \forall x \in [a, b]$$

**in modo analogo:** Si dice che  $m$  è un **minimo assoluto** (o globale) di  $f$  in  $[a, b]$  e  $x_1 \in [a, b]$  è punto di minimo se

$$f(x_1) = m \leq f(x), \forall x \in [a, b]$$

## 2.6 Massimo e minimo relativo (o estremi locali)

Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$ , si dice che  $x_0 \in [a, b]$  è un punto di **massimo relativo** (o locale) per  $f(x)$  se  $\exists I(x_0, \delta)$ :

$$f(x_0) \geq f(x), \forall x \in I(x_0, \delta)$$

**In modo analogo:** si dice che  $x_0 \in [a, b]$  è un punto di **minimo relativo** (o locale) per  $f(x)$  se  $\exists I(x_0, \delta)$ :

$$f(x_0) \leq f(x), \forall x \in I(x_0, \delta)$$

### 2.6.1 Punti Stazionari

*I punti in cui  $f(x)$  ha derivata nulla ( $f' = 0$ ) Si dice punti stazionari o critici.*

## 2.7 Teorema di Fermat

*Sia  $f(x)$  definita in  $[a, b]$  e derivabile in  $x_0 \in (a, b)$ . Se  $x_0$  è un punto di estremo locale allora*

$$f'(x_0) = 0$$

**Dimostrazione** Sia  $x_0$  un punto di massimo relativo, cioè  $\exists I(x_0, \delta): f(x_0) \geq f(x_0 + h), \forall h : |h| < \delta$  si

$$\text{ha: } \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } 0 < h < \delta \\ \geq 0 & \text{se } -\delta < h < 0 \end{cases} \text{ e}$$

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+ \leq 0$$

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_- \geq 0$$

Ma essendo  $f(x)$  derivabile in  $x_0$ :

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f' = 0$$

Se  $x_0 = a$  allora  $0 < h < \delta$  e se  $x_0$  è un punto di **massimo relativo** si ha  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(x)}{h} = f'(a) \leq 0$ .

Mentre, se parliamo del **minimo relativo** in  $x_0 = a$ :  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h)-f(x)}{h} = f'(a) \leq 0$  In modo analogo: se  $x_0 = b$  è punto di **massimo relativo** (con  $-\delta < h < 0$ ) allora  $f'(b) \geq 0$ , se invece  $x_0 = b$  è un punto di **minimo relativo**, allora  $f'(b) \leq 0$

## 2.8 Teorema di Rolle

Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$ .

1.  $f$  è continua in  $[a, b]$ ,
2.  $f$  è derivabile in  $(a, b)_{f(a)=f(b)}$
3.  $f(a) = f(b)$

Allora  $\exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$  Per il Teorema di Rolle esistono almeno un punto a tangente orizzontale.

### 2.8.1 Dimostrazione

Per il Teorema di Weierstrass,  $f$  ha massimo e minimo assoluti in  $[a, b]$  ( $x_1, x_2 \in [a, b]$ ):

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

*Se uno dei due è interno ad  $[a, b]$ , per esempio  $x_1$  allora per il Teorema di Fermat  $f'(x_1) = 0$ . Se invece nessuno dei due è interno ad  $[a, b]$  per esempio  $x_1 = a, x_2 = b$ . Dall'ipotesi  $f(a) = f(b)$  si ottiene minimo=massimo, cioè  $f(x)$  è costante  $\forall x \in [a, b]$  e quindi  $f'(x) = 0 \forall x \in [a, b]$ .*

### 2.8.2 Esercizio dimostrativo

#### Testo

Dire se la funzione  $f(x) = e^{x^2-1}$  soddisfa il teorema di Rolle nell'intervallo  $[-1, 1]$  e in caso affermativo calcolare il punto (o i punti del Teorema.)

#### soluzione

Sono verificate tutte le ipotesi del teorema di Rolle, infatti:

1.  $f(x) = e^{x^2-1}$  è continua in tutto  $\mathbb{R}$  e quindi anche in  $[-1, 1]$
2.  $f(x)$  è derivabile in tutto  $\mathbb{R}$ , quindi anche in  $(-1, 1)$ ,
3.  $f(-1) = f(1)$

Allora  $\forall x_0 \in (-1, 1) : f'(x_0) = 0$

$x_0$  Si ricava facendo il calcolo:  $f'(x_0) = 0$ , cioè  $2xe^{x^2-1} = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

### 2.8.3 Esercizio dimostrativo

#### Testo

Dire se la funzione  $f(x) = \ln|x|$  soddisfa il teorema di Rolle nell'intervallo  $[-e, e]$ .

#### soluzione

Il teorema di Rolle non è applicabile perché  $f(x) = \ln|x|$  non è definita in  $x = 0$ , quindi non è né continua né definita in  $x = 0$  e perciò non soddisfa tutte le ipotesi del teorema.

## 2.9 Teorema di Lagrange (*o del valor medio*)

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

1.  $f$  è continua in  $[a, b]$ ,
2.  $f$  è derivabile in  $(a, b)$ ,

Allora  $\forall x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Per il Teorema di Lagrange  $\exists$  almeno un punto  $(x_0, f(x_0))$  sul grafico di  $f(x)$  in cui la retta tangente  $t$  è parallela alla retta  $r$  secante la curva in  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ .

### 2.9.1 Dimostrazione

Si considera la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)]$$

## 2.10 Punti per lo svolgimento dello studio di funzione

Per svolgere correttamente lo studio di funzione, bisogna suddividere il tutto in punti per svolgere correttamente lo studio in modo ordinato ed efficiente. Se effettivamente.

1. Determinazione del Campo di esistenza;
2. Determinazione del tipo di funzione;
3. Intersezione con gli assi;

4. Valori agli estremi del campo di esistenza;
5. Positività e negatività;
6. Determinazione degli asintoti;
7. Determinazione della derivata prima;
8. Crescenza e decrescenza;
9. Determinazione dei Massimi e minimi;
10. Determinazione della derivata seconda;
11. Determinazione della concavità, convessità e flessi;
12. Determinazione di eventuali ulteriori punti appartenenti alla funzione;
13. Grafico della funzione;
14. Qualche esempio di studio completo di funzione.

## 2.11 Esercizio d'esempio

$$f(x) = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$$

1. Dominio:  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

**Denominatore**  $\neq 0$ :  $2(x+1)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

2. Intersezione con gli assi:

$$\begin{array}{l} \text{asse x} \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ \frac{x^3}{2(1+x)^2} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x^3 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array} \right. \\ \text{asse y} \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{0^3}{2(1+0)^2} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

*nel caso dello studio dell'intersezione con gli assi si può escludere lo studio del denominatore*

3. Segno:

$$f(x) > 0$$

- **Numeratore:**  $x^3 > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} > 0 \Rightarrow x > 0$
- **Denominatore:**  $2(x+1)^2 > 0 \Rightarrow x \neq -1$

4. Simmetrie:

$$f(x) = f(-x) = \frac{-x^3}{2(1-x)^2} \text{ La funzione non è né pari né dispari.}$$

5. Asintoto verticale:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{2(1+x)^2} = \frac{(-1)^3}{2(1+(-1+))^2} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{2(1+x)^2} = \frac{(-1)^3}{2(1+(-1-))^2} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

6. Asintoto orizzontale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2(1+x)^2} = \frac{(+\infty)^3}{2(1+(+\infty))^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{4(1+x)} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{6x}{4} = \infty$$