Sobre o número de cruzamentos do grafo de Kneser $K(n, 2)$

A. D. R. de Sousa, L. Faria, J. C. Carneiro, M. V. Pabon [1]

9 de maio de 2022

[1] Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) Rio de Janeiro; RJ - Brasil, Université Paris-13, Sorbonne Paris Cité LIPN, CNRS UMR7030, Villataneuse, France

Introdução

Definição (Grafo de Kneser)

Dados n, k dois inteiros com $0 < k \leq n$ o grafo de *Kneser* $K = (V, E)$ tem $V = \binom{n}{k}$ e existe uma aresta uv se e somente $u \cap v = \emptyset$.

Exemplos de Grafos $K(n, 2)$

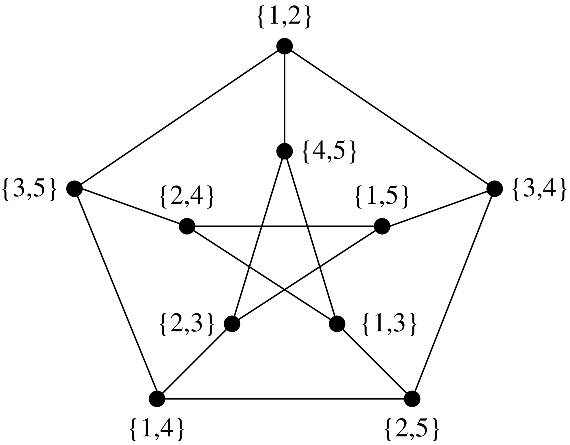

Figura: Grafo de Kneser $K(5, 2)$, isto é, o grafo de Petersen

Algoritmo de Berge para o caso par

Seja o grafo de Kneser $K(n,2)$ com n par e $C_1,\ C_2 \dots C_{n-1}$ cliques obtidas por meio do algoritmo de Berge que formam uma cobertura de cliques do grafo $K(n,2)$. Seja $n = 2q$ e $2 \leq i \leq (n)$ com $i \in \mathbb{Z}$, então a clique C_{i+1} tem como vertices:

$\Big(1, i\Big)$,

$\Big((i-3) \mod (n-1) + 2, (i-1) \mod (n-1) + 2\Big)$,

$\Big((i-4) \mod (n-1) + 2, (i) \mod (n-1) + 2\Big)$,

$\Big((i-5) \mod (n-1) + 2, (i+1) \mod (n-1) + 2\Big)$,

$\dots$

$\Big((i-(q+1)) \mod (n-1) + 2, (i+(q-3))\ mod(n-1) + 2\Big)$

Caminho Hamiltoniano a partir do Algoritmo de Berge

Teorema

Seja $K(n,2)$ com n par um grafo de Kneser e $q = 2n$. Então o caminho $P = (\ C_{1,1},\ C_{1,2},\ \ldots\ ,\ C_{1,q},\ \ldots\ ,\ C_{2,1},\ C_{2,2},\ \ldots\ ,\ C_{2,q},\ \ldots\ ,\ C_{(n-1),1},\ C_{(n-1),2},\ \ldots\ ,\ C_{(n-1),q}\ )$ é um caminho hamiltoniano, onde $C_{i,j}$ é o j-ésimo vértice da clique C_i.

Teorema

Seja $K(n,2)$ com n ímpar um grafo de Kneser. Tome o caminho $P = (\ C_{1,1},\ C_{1,2},\ \ldots\ ,\ C_{1,q+1},\ \ldots\ ,\ C_{2,1},\ C_{2,2},\ \ldots\ ,\ C_{2,q},\ \ldots\ ,\ C_{(n-1),1},\ C_{(n-1),2},\ \ldots\ ,\ C_{(n-1),q}\ )$ obtido pelo o algoritmo de berge do $K((n+1),2)$, onde $q = 2n$. Tome P' o caminho formado após retirarmos os vértices de P que possuem um elemento igual a $(n+1)$, então P' é um caminho hamiltoniano, onde $C_{i,j}$ é o j-ésimo vértice da clique C_i.

Proposta de Desenho em Duas Páginas para $K(n, 2)$ com n par

1. Tome um desenho $D(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1})$ em 2-páginas de $K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$ do algoritmo de [2].
2. Substitua cada vértice de $K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$ por $q = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ vértices correspondentes a clique $C_i, i \in \left\{1, 2, \ldots, 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right\}$ com a ordem do ciclo Hamiltoniano do algoritmo de [1].
3. Ligue as arestas entre os vértices de duas cliques de acordo com a posição geométrica das arestas de $D(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1})$.
4. Coloque o desenho em 1-página de $K_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$ de [2] para cada clique C_i no semiplano com o menor número de arestas que sai do vértice C_i de $D(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1})$.

Desenho em 2-páginas de $K(6,2)$

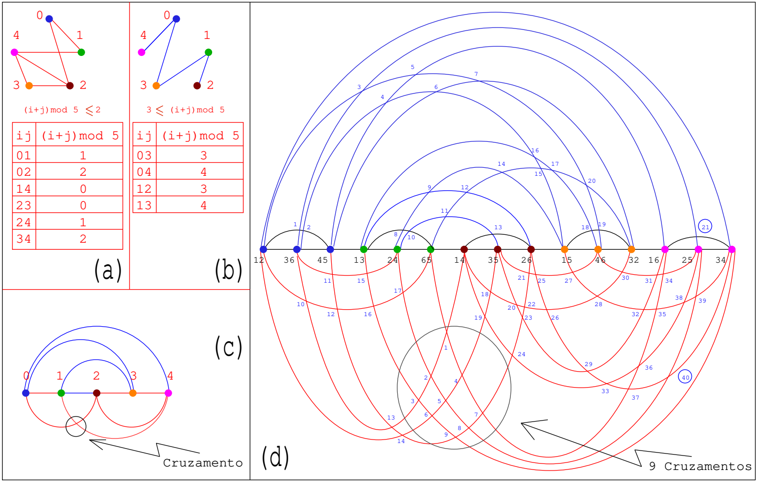

Figura: Desenho em 2-páginas de $K(6,2)$ com 61 cruzamentos.

Cálculo do número de cruzamentos do desenho em duas páginas de $K(n,2)$

$$cr\left(K(n,2)\right) = cr_1(n) + cr_2(n) + cr_3(n) + cr_4(n) + cr_5(n)$$

1. Cruzamentos herdados do $K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$ - $(cr_1(n))$;
2. Cruzamentos internos da clique C_i - $(cr_2(n))$;
3. Cruzamentos entre as arestas internas de um C_i com as outras arestas - $(cr_3(n))$;
4. Cruzamentos entre as arestas que ligam 2 cliques C_i e $C_j, i \neq j$ - $(cr_4(n))$;
5. Cruzamentos entre as arestas que ligam a clique C_i a C_j com as arestas que ligam C_i a uma clique C_k $i \neq j, i \neq k, k \neq j$ - $(cr_5(n))$

Teorema

$\nu_1(K_n) = 0$, *se* $n \leq 3$ *e* $\nu_1(K_n) = \binom{n}{4}$, *se* $n \geq 4$.

Teorema

$cr_1(n) = (q(q-2))^2 \nu_2(K_{n-1}) =$
$(q(q-2))^2 \frac{1}{4}\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor\lfloor\frac{n-3}{2}\rfloor\lfloor\frac{n-4}{2}\rfloor = \frac{q^2(q-1)^2(q-2)^4}{4}$, *onde*
$n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

$cr_2(n) = (n)\binom{q}{4} = \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q+1)}{24}$, *onde*
$n = 2q+1 \geq 7, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

$cr_2(n) = (n-1)\binom{q}{4} = \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q-1)}{24}$, *onde*
$n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

O desenho $D(K_{2q-1})$ de K_{2q-1} em 2 páginas de [2] tem

1. *q vértices com $q-1$ arestas para cima e $q-1$ arestas para baixo e*
2. *$q-1$ vértices com ou (a) $q-2$ arestas para cima e q arestas para baixo, ou (b) $q-2$ arestas para baixo e q arestas para cima.*

Teorema

$cr_3(n) = \frac{q(q-1)^3(q-2)^2}{3}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

$cr_4(n) \leq \frac{q(q-1)(2q-1)(q^3-2q^2-7q+16)}{4}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

♣ $cr_5(n) = \frac{q(q-1)^3(q-2)^2(2q-3)}{2}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

Se $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$, *então* $\nu_2(K(n,2)) \leq \frac{6q^8 - 36q^7 + 62q^6 + 84q^5 - 563q^4 + 1034q^3 - 801q^2 + 214q}{24}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

[?]) Se M é um multigrafo com n vértices, m arestas e entre cada par de vértices existem exatamente k arestas, então $\nu(M) \geq \frac{m^3}{64n^2k}$.

Teorema

Se $n \in \mathbb{N}^*$, *então* $\nu\big(K(n,2)\big) \geq \frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9}$.

Teorema

$\nu(K(n,2)) = \Omega(|V(K(n,2)|^4)$ *e o termo líder para o limite inferior é* 2^{-13}.

Desenho em 2-páginas de $K(6,2)$

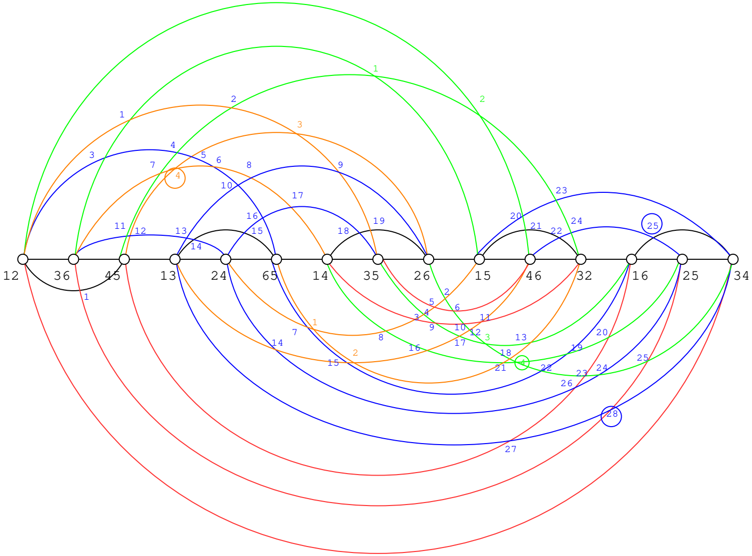

Figura: Desenho em 2-páginas de $K(6,2)$ com 61 cruzamentos. O algoritmo exaustivo obteve 49 cruzamentos para $K(6,2)$ em 2-páginas

Desenho em 2-páginas de $K(8,2)$

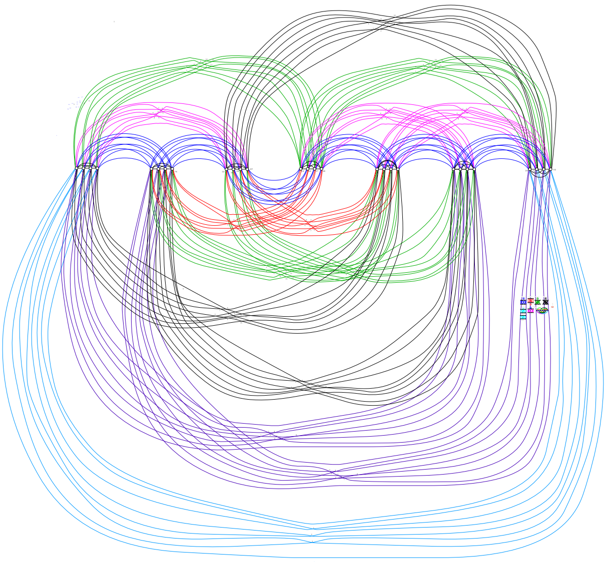

Figura: Desenho em 2-páginas de $K(8,2)$ com 2050 cruzamentos.

Claude Berge.
Graphs and hypergraphs.
North-Holland Pub. Co., 1973.

Etienne de Klerk, Dmitrii V. Pasechnik, and Gelasio Salazar.
Improved lower bounds on book crossing numbers of complete graphs.
SIAM J. Discret. Math., 27(2):619–633, 2013.