Sobre o número de cruzamentos do grafo de Kneser $K(n, 2)$

A. D. R. de Sousa[1], J. C. Carneiro[1], L. Faria[1], e M. V. Pabon[2]

[1] *Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) Rio de Janeiro, RJ - Brasil*
[2] *Université Paris-13, Sorbonne Paris Cité LIPN, CNRS UMR7030, Villataneuse, France*
antoniodrsousa@gmail.com, jonas.uerj@yahoo.com.br, luerbio@ime.uerj.br, valencia@lipn.univ-paris13.fr

Martin Kneser [3] definiu os grafos de Kneser em 1955. Dados n, k dois inteiros com $0 < k \leq n$ o grafo de *Kneser* $K(n, k) = (V, E)$ tem $V = \binom{n}{k}$ – a coleção dos subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ com k elementos e existe uma aresta $uv \in E$ se e somente $u \cap v = \emptyset$. O grafo $K(n, k)$ possui inúmeras aplicações na classificação de fenômenos da combinatória e da teoria dos grafos como na partição de ciclos de um grafo completo. Algumas propriedades dos grafos de Kneser são que $|\,V(K(n, k))\,| = \binom{n}{k}$, $|\,E(K(n, k))\,| = \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}/2$, $K(n, k)$ é um grafo $\binom{n-k}{k}$-regular, com número de clique $\omega(K(n, 2)) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ e partição mínima de cliques $\lambda(K(n, 2)) = 2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$. O *número de cruzamentos* $\nu(G)$ de um grafo $G = (V, E)$ é o menor número de cruzamentos em um desenho $D(G)$ no plano de G. Dada uma reta r, chamada *espinha*, $p \geq 1$, e $S_1 \ldots, S_p$ serem p semiplanos distintos limitados por r. Um *desenho de* $G = (V, E)$ *em* p*-páginas* tem os vértices de V desenhados em r e cada aresta de G é desenhada em um $S_1, \ldots, S_p$. O *número de cruzamentos em* p*-páginas* $\nu_p(G)$ de G é o menor número de cruzamentos em um desenho de G em p páginas. O número de cruzamentos é conhecido exatamente para pouquíssimas classes de grafos, entre elas K_n os grafos completos [1] e alguns limites para Q_n os n-cubos [2]. O único resultado conhecido para os grafos de Kneser é que o grafo de Petersen - $K(5, 2)$ tem $\nu(K(5, 2)) = \nu_2(K(5, 2)) = 2$. Nossa contribuição principal nesse artigo é a função de cruzamentos $\nu(K(n, 2)) = \nu_2(K(n, 2)) = \Theta(n^8)$ e o desenho que a realiza. O número de cruzamentos do desenho não é ótimo, mesmo para $K(6, 2)$. Com o auxílio do computador encontramos um desenho com 49, nossa construção possui 61 e nosso limite superior prevê 83 cruzamentos.

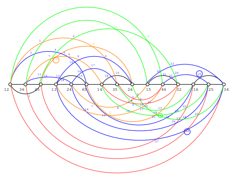

Figura 1: Um desenho em 2 páginas de $K(6, 2)$ com 61 cruzamentos.

Nós provamos que se $n = 2q \geq 6$, então $\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq \nu(K(n, 2)) \leq \nu_2(K(n, 2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^8 3} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^7 3} + \frac{517n^3}{2^5 3} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^3 3}$. Como os grafos completos $\nu_2(K(n, 2)) = \Theta(|V(K(n, 2)|^4) = \nu(K(n, 2))$ cujo termo líder $\ell(n)$ satisfaz $\frac{1}{2^{13}} \leq \ell(n) \leq \frac{1}{2^{10}}$.

Teorema 1. *Se* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$, *então* $\nu_2(K(n, 2)) \leq \frac{6q^8 - 36q^7 + 62q^6 + 84q^5 - 563q^4 + 1034q^3 - 801q^2 + 214q}{24}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Referências

[1] B. M. Ábrego, O. Aichholzer, S. Fernández-Merchant, P. Ramos, and G. Salazar, *The 2-page crossing number of* K_n, Discret. Comput. Geom., 49 (2013), pp. 747–777.

[2] L. Faria, C. M. H. de Figueiredo, R. B. Richter, and I. Vrt'o, *The same upper bound for both: The 2-page and the rectilinear crossing numbers of the* n*-cube*, J. Graph Theory, 83 (2016), pp. 19–33.

[3] M. Kneser, *Aufgabe 360, jber. deutsch. math*, Verein, 58 (1955), p. 27.