Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Departamento de Informática e Ciências da Computação

Estudo sobre o número de cruzamentos em um desenho do grafo de Kneser K(n,k)

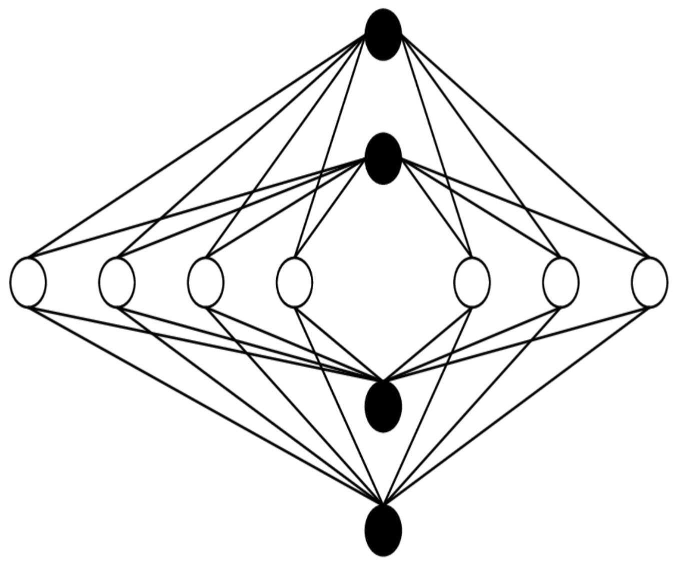
Autor: António David Reis de Sousa
Orientador(a): Luerbio Faria

XXXI SEMIC UERJ 2022
DARCY RIBEIRO - 100 ANOS

31ª UERJ 2022 SEM MUROS

Conceitos

- Um grafo G é um conjunto de vértices e arestas entre esses vértices
- O número de cruzamentos de um grafo é o número de interseções entre arestas mínimo de um grafo
- O número de cruzamentos é conhecido para poucas classes de grafos
- Começou a ser estudado por Turan, a partir do estudo do número de cruzamentos do grafo bipartido completo
- O objetivo do trabalho é estudar o número de cruzamentos em 2-páginas de um grafo de kneser K(n,2)
- Um grafo de kneser K(n,k) é um grafo em que todos os vértices são subcojuntos de k elementos de um conjunto de n elementos, e 2 vértices são adjacentes se e somente se os conjuntos dos vértices correspondentes são disjuntos
- Um desenho em 2-páginas é um desenho de um grafo definido sobre uma espinha, que é um caminho hamiltoniano do grafo, de tal modo que as arestas estão no plano acima ou abaixo da espinha



$$cr\left(K_{m,n}\right)=\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor \frac{m}{2}\right\rfloor\left\lfloor \frac{m-1}{2}\right\rfloor$$

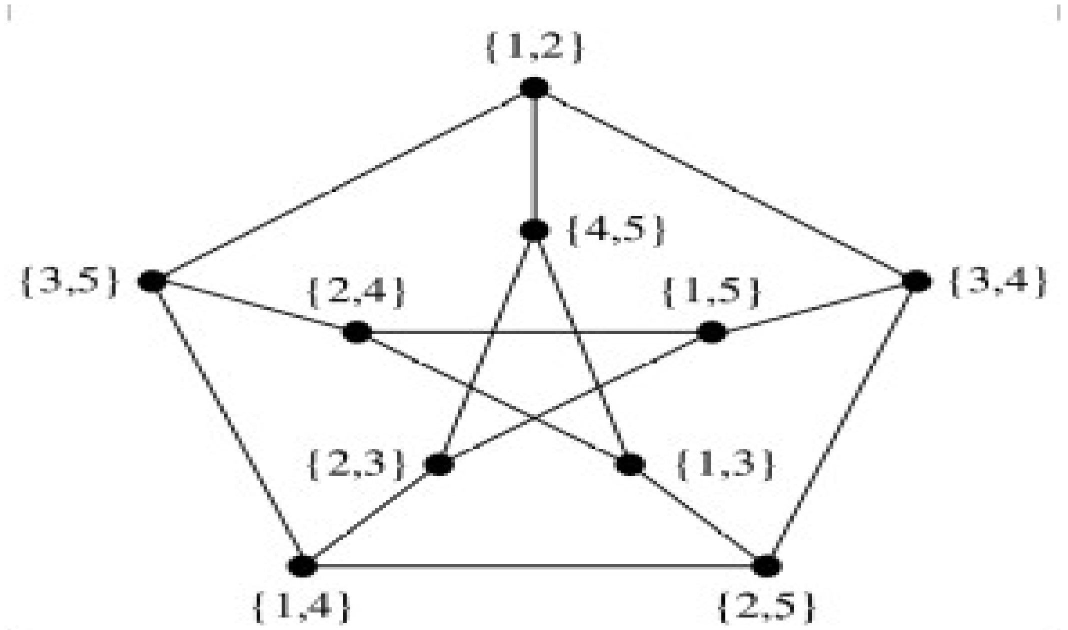
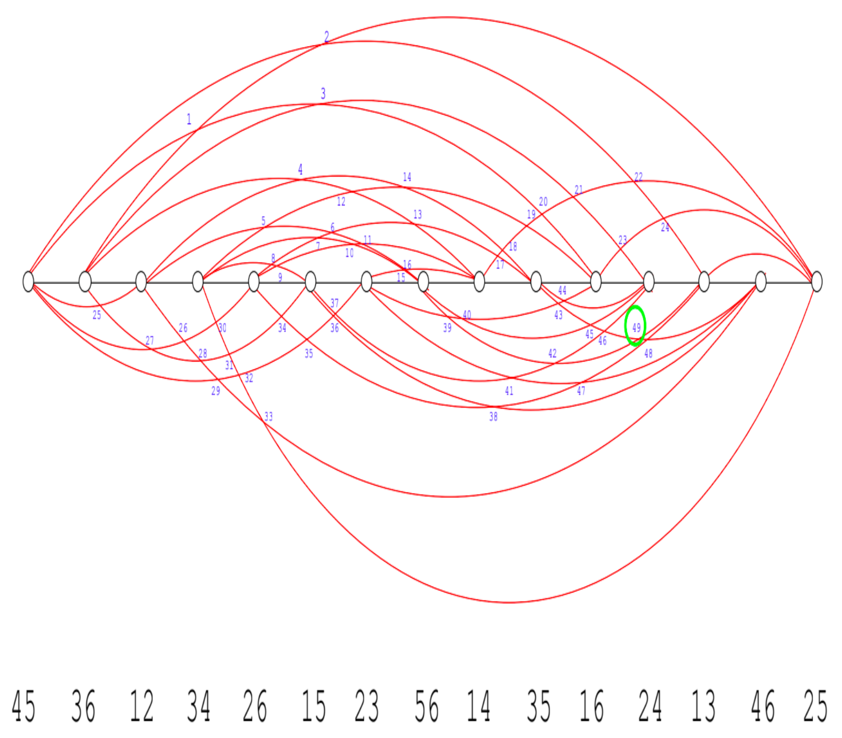


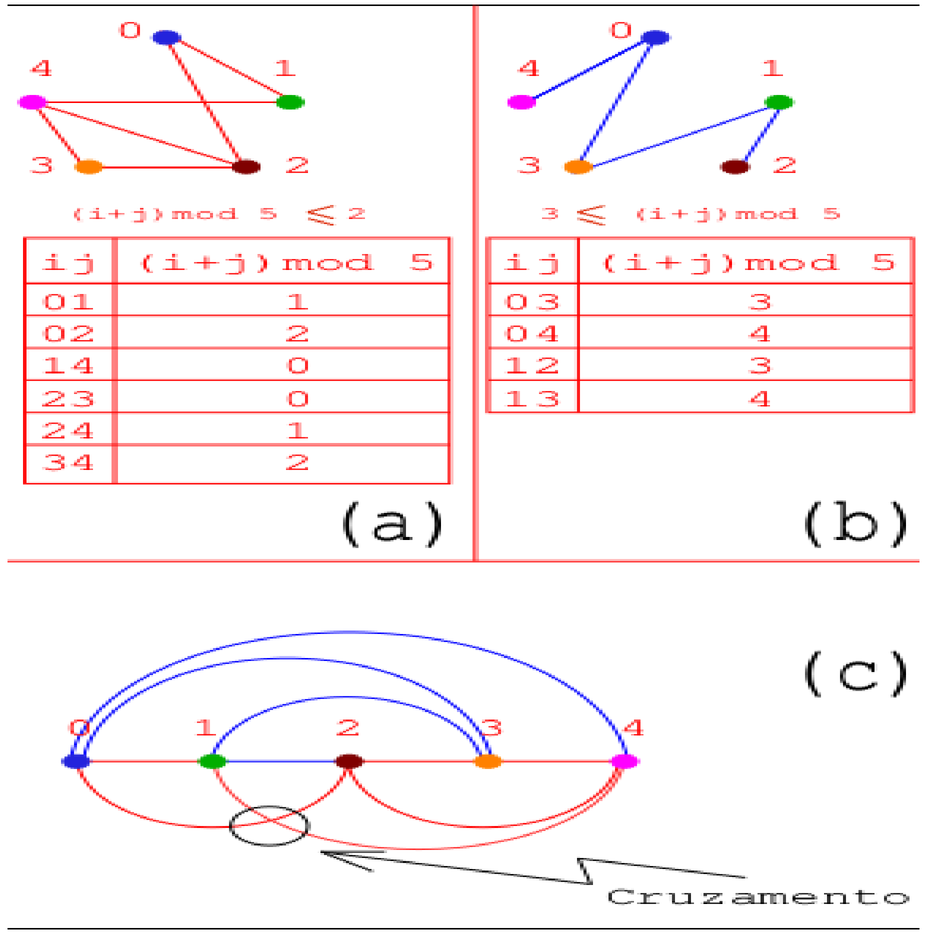
Figure 3: O grafo de petersen é o grafo de kneser K(5,2)

Resultados Anteriores

- Um algoritmo exaustivo de um trabalho anterior, realizado por Jonas Carvalho, calcula o desenho com o número de cruzamentos mínimo em 2-páginas para o K(6,2)



- O Algoritmo do Slope obtem um desenho em 2-páginas para o grafo completo com o número mínimo de cruzamentos em 2-páginas



- O Algoritmo de Berge obtem uma cobertura de clique mínima para o K(n,2)

Optimum Clique Partition of $K(6,2)$

12	13	14	15	16
36	24	35	46	25
45	65	26	32	34

Optimum Clique Partition of $K(8,2)$

12	13	14	15	16	17	18
83	24	35	46	57	68	72
74	85	26	37	48	52	63
65	76	87	28	32	43	54

Optimum Clique Partition of $K(10,2)$

12	13	14	15	16	17	18	19	1 10
10 3	24	35	46	57	68	79	8 10	92
94	10 5	26	37	48	59	6 10	72	83
85	96	10 7	28	39	4 10	52	63	74
76	87	98	10 9	2 10	32	43	54	65

Metodologia

- <u>Desenho Proposto</u>

1. Faça um desenho $D\left(K_{2\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil -1}\right)$ em 2-páginas de $K_{2\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil -1}$ usando o *algoritmo do slope*

2. Substitua cada vértice de $K_{2\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil -1}$ por $q=\left\lceil \frac{n-1}{2}\right\rceil$ vértices correspondentes a clique $C_i,\ i\in\{1,2,\cdots,2\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil -1\}$ seguindo a ordem do ciclo hamiltoniano obtido pelo algoritmo de berge

3. Liga as arestas entre os vértices de duas cliques distintas C_i e C_j de acordo com a posição geométrica das arestas de $D\left(K_{2\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil -1}\right)$

4. Desenhe as arestas internas dos vértices de cada $K_{2\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil -1}$ com um desenho em 1-página de tal modo que as arestas ficam orientadas para cima ou para baixo de acordo com a opção que cause o menor número de cruzamentos no desenho do $K(n,2)$

- <u>Método de Cálculo</u>

Os 5 conjuntos de cruzamentos são os seguintes:

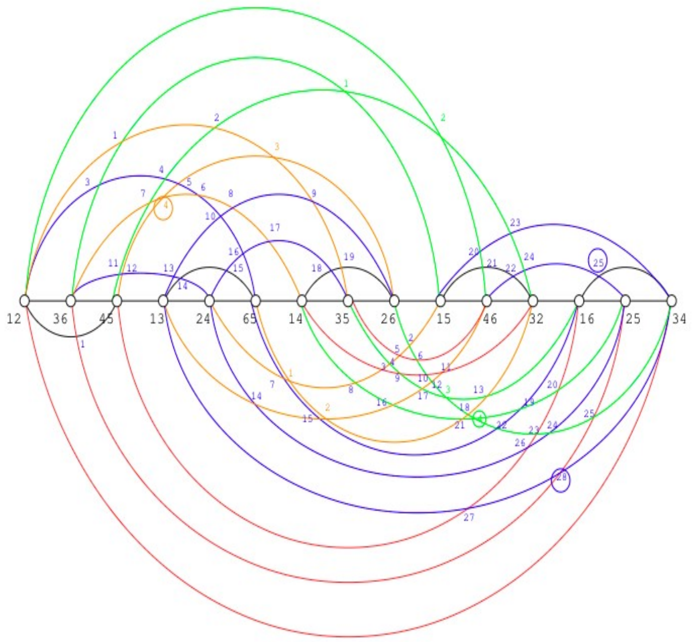
- $cr_1(n)$ - cruzamentos provenientes do $K_{2\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil -1}$
- $cr_2(n)$ - cruzamentos internos de cada clique C_i
- $cr_3(n)$ - cruzamentos entre as arestas internas de uma clique C_i e as arestas que saem dessa clique para outra clique C_j
- $cr_4(n)$ - cruzamentos entre as arestas que partem de uma clique C_i para um clique C_j
- $cr_5(n)$ - cruzamentos entre as arestas que ligam uma clique C_i com uma clique C_j com as arestas que ligam a clique C_i com uma clique C_k

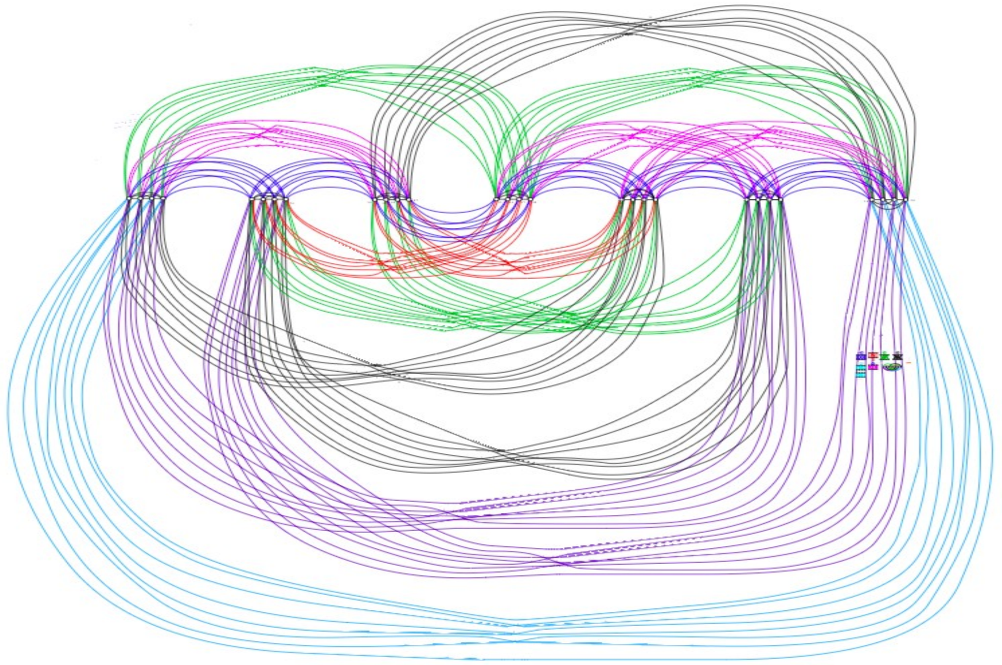
Resultados

- Um desenho automático para K(6, 2) com 62 cruzamentos
- Um desenho automático para K(8, 2) com 2050 cruzamentos
- Foi encontrado um limite inferior e superior para o caso n par, de tal modo que assintoticamente ambos são de mesma ordem

$$\frac{n^8}{2^{13}}-9\frac{n^7}{2^{13}}-\frac{n^6}{2^{10}}-\frac{n^4}{2^7}-\frac{n^3}{2^9}\leq \nu(K(n,2))\leq \nu_2(K(n,2))\leq \frac{n^8}{2^{10}}-\frac{3n^7}{2^8}+\frac{31n^6}{2^8 3}+\frac{7n^5}{2^6}-\frac{563n^4}{2^7 3}+\frac{517n^3}{2^5 3}-\frac{267n^2}{2^5}+\frac{107n}{2^3 3}$$

$$\nu_2(K(n,2))=\Theta(n^8)=\nu(K(n,2))$$





Bibliografia Produzida Durante o Projeto

1. de Sousa, A. D. R., Carneiro, J., Faria, L., Pabon, M. V., How to draw a K(n,2) Kneser graph?, in Proceedings of the 10th Latin American Workshop on Cliques in Graphs - LAWCG' 22 (resumo), pp. 45. https://www.lawcg.mat.br/lawcg22/

2. de Sousa, A. D. R., Carneiro, J., Faria, L., Pabon, M. V., Sobre o número de cruzamentos do grafo de Kneser K (n, 2). In: Anais do VII Encontro de Teoria da Computação. SBC, 2022. p. 61-64. https://sol.sbc.org.br/index.php/etc/article/view/20659/20486

3. de Sousa, A. D. R., Carneiro, J., Faria, L., Pabon, M. V., Sobre o número de cruzamentos do grafo de Kneser K(n, 2) (resumo), II Encontro de Mulheres na Matemática, 2022. https://drive.google.com/file/d/1yC6RkN-VvT6UCCjCG6VPNgrIgQ9kVJ1z/view

How to draw a $K(n,2)$ Kneser graph?†

A. D. R. de Sousa[1*] J. C. Carneiro[1] L. Faria[1] M. V. Pabon[2]
[1] UERJ [2] Université Paris-13

Keywords: Kneser graph $K(n,k)$, crossing number, 2-page crossing number

Take a 2-page drawing $D(K_{2\lceil \frac{n}{2}\rceil-1})$ of the complete graph $K_{2\lceil \frac{n}{2}\rceil-1}$ from algorithm (de Klerk, Pasechnik and Salazar (2013)) (a), (b) and (c). Replace each vertex of $K_{2\lceil \frac{n}{2}\rceil-1}$ by $q=\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$ vertices corresponding to clique $C_i, i\in\{1,2,\ldots,2\lceil\frac{n}{2}\rceil-1\}$ with the order of the Hamiltonian cycle from algorithm (Berge (1973)). Add the edges between the pair of vertices of each 2 cliques according to the geometric position of the $D(K_{2\lceil \frac{n}{2}\rceil-1})$ edges. Place the 1-page drawing of $K_{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}$ from (de Klerk, Pasechnik and Salazar (2013)) for each clique C_i on the half-plane with the fewest outgoing edges of the vertex C_i of $D(K_{2\lceil \frac{n}{2}\rceil-1})$ (d).

Let $\nu(G)$ and $\nu_2(G)$ be the minimum number of crossings for a drawing $D(G)$ of G, respectively, in the plane, and into a 2-page drawing, we prove that $\frac{n^8}{2^{13}}-9\frac{n^7}{2^{13}}-\frac{n^6}{2^{10}}-\frac{n^4}{2^7}-\frac{n^3}{2^9}\leq\nu(K(n,2))\leq\nu_2(K(n,2))\leq\frac{n^8}{2^{10}}-\frac{3n^7}{2^8}+\frac{31n^6}{2^8 3}+\frac{7n^5}{2^6}-\frac{563n^4}{2^7 3}+\frac{517n^3}{2^5 3}-\frac{267n^2}{2^5}+\frac{107n}{2^3 3}$.

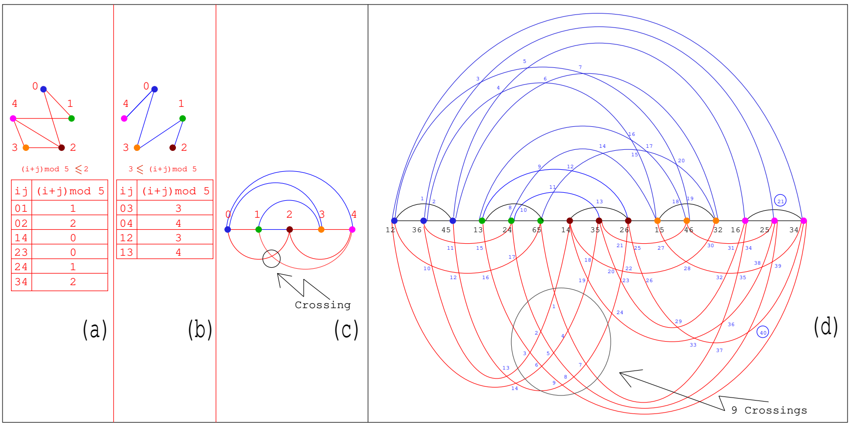


Figure 1 2-page drawing construction of K_5 in (a) and (b), and 2-page drawings of K_5 in (c) and $K(6,2)$ in (d).

† CAPES 001, CNPq 406036/2021-7, 308654/2018-8, 152340/2021-1, FAPERJ E26/202.902/2018.

Sobre o número de cruzamentos do grafo de Kneser $K(n, 2)$*

A. D. R. de Sousa, J. C. Carneiro, L. Faria[1], M. V. Pabon[2]

[1]Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) Rio de Janeiro, RJ - Brasil

[2]Université Paris-13, Sorbonne Paris Cité LIPN, CNRS UMR7030, Villataneuse, France

antoniodrsousa@gmail.com, jonas.uerj@yahoo.com.br

luerbio@ime.uerj.br, valencia@lipn.univ-paris13.fr

Abstract. *The* crossing number $\nu(G)$ *of a graph* $G = (V, E)$ *is the minimum number of crossings in a drawing* $D(G)$ *in the plane of* G*. Let* r *be a straight line, called* spine, $p \geq 1$, *and* $S_1 \ldots, S_p$ *be* p *distinct half-planes bounded by* r*. A* drawing of $G = (V, E)$ in p-pages *has the vertices of* V *drawn in* r *and each edge of* G *is drawn in one of* $S_1, \ldots, S_p$*. The* crossing number in p-pages $\nu_p(G)$ *of* G *is the minimum number of crossings in a drawing in* p*-pages of* G*. We prove that if* $n = 2q \geq 6$*, then* $\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq \nu(K(n, 2)) \leq \nu_2(K(n, 2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^8 3} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^7 3} + \frac{517n^3}{2^5 3} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^3 3}$*. Like complete graphs,* $\nu_2(K(n, 2)) = \Theta(|V(K(n, 2)|^4) = \nu(K(n, 2))$ *and the leading term is* $\ell(n)$*, such that* $\frac{1}{2^{13}} \leq \ell(n) \leq \frac{1}{2^{10}}$.

Resumo. *O* número de cruzamentos $\nu(G)$ *de um grafo* $G = (V, E)$ *é o menor número de cruzamentos em um desenho* $D(G)$ *no plano de* G*. Dada uma reta* r*, chamada* espinha, $p \geq 1$, *e* $S_1 \ldots, S_p$ *serem* p *semiplanos distintos limitados por* r*. Um* desenho de $G = (V, E)$ em p-páginas *tem os vértices de* V *desenhados em* r *e cada aresta de* G *é desenhada em um* $S_1, \ldots, S_p$*. O* número de cruzamentos em p-páginas $\nu_p(G)$ *de* G *é o menor número de cruzamentos em um desenho de* G *em* p *páginas. Nós provamos que se* $n = 2q \geq 6$*, então* $\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq \nu(K(n, 2)) \leq \nu_2(K(n, 2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^8 3} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^7 3} + \frac{517n^3}{2^5 3} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^3 3}$*. Como os grafos completos* $\nu_2(K(n, 2)) - \Theta(|V(K(n, 2)|^4) - \nu(K(n, 2))$ *cujo termo líder* $\ell(n)$ *satisfaz* $\frac{1}{2^{13}} \leq \ell(n) \leq \frac{1}{2^{10}}$.

1. Introdução

Martin Kneser [Kneser 1955] definiu os grafos de Kneser em 1955. Dados n, k dois inteiros com $0 < k \leq n$ o grafo de *Kneser* $K(n, k) = (V, E)$ tem V a coleção dos $\binom{n}{k}$ subconjuntos com k elementos de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ e $uv \in E$ se e somente $u \cap v = \emptyset$. O grafo $K(n, k)$ possui inúmeras aplicações na classificação de fenômenos da combinatória, por exemplo $K(n, 2)$ é o complemento do grafo de linha de um grafo completo K_n. Algumas propriedades dos grafos de Kneser são que $|E| = \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}/2$, $K(n, k)$ é um grafo $\binom{n-k}{k}$-regular, com número de clique $\omega(K(n, 2)) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ e partição mínima de cliques $\lambda(K(n, 2)) = 2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$. O problema do número de cruzamentos é difícil [Hlinený 2006] mesmo para cúbicos e é conhecido exatamente para pouquíssimas classes de grafos,

*O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, do CNPq (406036/2021-7 Universal, 308654/2018-8 Produtividade, 152340/2021-1 Iniciação Científica) e da FAPERJ (E26/202.902/2018 CNE).

Sobre o número de cruzamentos do grafo de Kneser $K(n,2)$

A. D. R. de Sousa[1], J. C. Carneiro[1], L. Faria[1], e M. V. Pabon[2]

[1] *Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) Rio de Janeiro, RJ - Brasil*
[2] *Université Paris-13, Sorbonne Paris Cité LIPN, CNRS UMR7030, Villataneuse, France*
antoniodrsousa@gmail.com, jonas.uerj@yahoo.com.br, luerbio@ime.uerj.br, valencia@lipn.univ-paris13.fr

Martin Kneser [3] definiu os grafos de Kneser em 1955. Dados n, k dois inteiros com $0 < k \leq n$ o grafo de *Kneser* $K(n,k) = (V,E)$ tem $V = \binom{n}{k}$ – a coleção dos subconjuntos de $\{1,2,3,\ldots,n\}$ com k elementos e existe uma aresta $uv \in E$ se e somente $u \cap v = \emptyset$. O grafo $K(n,k)$ possui inúmeras aplicações na classificação de fenômenos da combinatória e da teoria dos grafos como na partição de ciclos de um grafo completo. Algumas propriedades dos grafos de Kneser são que $|\,V(K(n,k))\,| = \binom{n}{k}$, $|\,E(K(n,k))\,| = \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}/2$, $K(n,k)$ é um grafo $\binom{n-k}{k}$-regular, com número de clique $\omega(K(n,2)) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ e partição mínima de cliques $\lambda(K(n,2)) = 2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$. O *número de cruzamentos* $\nu(G)$ de um grafo $G = (V,E)$ é o menor número de cruzamentos em um desenho $D(G)$ no plano de G. Dada uma reta r, chamada *espinha*, $p \geq 1$, e $S_1 \ldots, S_p$ serem p semiplanos distintos limitados por r. Um *desenho de* $G = (V,E)$ *em* p*-páginas* tem os vértices de V desenhados em r e cada aresta de G é desenhada em um $S_1, \ldots, S_p$. O *número de cruzamentos em* p*-páginas* $\nu_p(G)$ de G é o menor número de cruzamentos em um desenho de G em p páginas. O número de cruzamentos é conhecido exatamente para pouquíssimas classes de grafos, entre elas K_n os grafos completos [1] e alguns limites para Q_n os n-cubos [2]. O único resultado conhecido para os grafos de Kneser é que o grafo de Petersen - $K(5,2)$ tem $\nu(K(5,2)) = \nu_2(K(5,2)) = 2$. Nossa contribuição principal nesse artigo é a função de cruzamentos $\nu(K(n,2)) = \nu_2(K(n,2)) = \Theta(n^8)$ e o desenho que a realiza. O número de cruzamentos do desenho não é ótimo, mesmo para $K(6,2)$. Com o auxílio do computador encontramos um desenho com 49, nossa construção possui 61 e nosso limite superior prevê 83 cruzamentos.

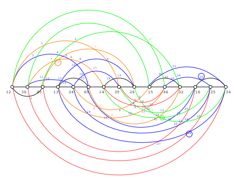


Figura 1: Um desenho em 2 páginas de $K(6,2)$ com 61 cruzamentos.

Nós provamos que se $n = 2q \geq 6$, então $\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq \nu(K(n,2)) \leq \nu_2(K(n,2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^8 3} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^7 3} + \frac{517n^3}{2^5 3} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^3 3}$. Como os grafos completos $\nu_2(K(n,2)) = \Theta(|V(K(n,2)|^4) = \nu(K(n,2))$ cujo termo líder $\ell(n)$ satisfaz $\frac{1}{2^{13}} \leq \ell(n) \leq \frac{1}{2^{10}}$.

Teorema 1. *Se* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$, *então* $\nu_2(K(n,2)) \leq \frac{6q^8 - 36q^7 + 62q^6 + 84q^5 - 563q^4 + 1034q^3 - 801q^2 + 214q}{24}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Referências

[1] B. M. Ábrego, O. Aichholzer, S. Fernández-Merchant, P. Ramos, and G. Salazar, *The 2-page crossing number of* K_n, Discret. Comput. Geom., 49 (2013), pp. 747–777.

[2] L. Faria, C. M. H. de Figueiredo, R. B. Richter, and I. Vrt'o, *The same upper bound for both: The 2-page and the rectilinear crossing numbers of the* n*-cube*, J. Graph Theory, 83 (2016), pp. 19–33.

[3] M. Kneser, *Aufgabe 360, jber. deutsch. math*, Verein, 58 (1955), p. 27.