Limite para o Número de Cruzamentos em 2-páginas de um grafo de Kneser $K(n, 2)$

António David Reis de Sousa [1]

8 de setembro de 2023

[1] Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) Rio de Janeiro; RJ - Brasil

Introdução

Introdução

Figura: Leonhard Euler

Introdução

Figura: Leonhard Euler

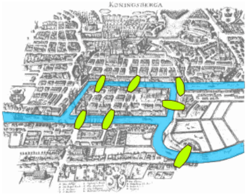


Figura: 7 Pontes de Königsberg

Introdução

Figura: Leonhard Euler

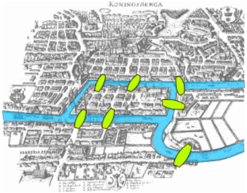


Figura: 7 Pontes de Königsberg

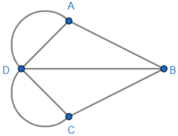


Figura: Multigrafo correspondente às 7 Pontes de Königsberg

Introdução

Introdução

- **Grafo** $G = (V, E)$: é um conjunto de vértices V e um conjunto de arestas E que contectam vértices de V.
  $H = (V', E')$ é **Subgrafo** de $G \iff V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

Introdução

- **Grafo** $G = (V, E)$: é um conjunto de vértices V e um conjunto de arestas E que contectam vértices de V.
  $H = (V', E')$ é **Subgrafo** de $G \iff V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.
- **Clique**: subconjunto de vértices de um grafo onde cada par de vértices tem aresta entre si. O **Número de Clique** $\omega(G)$ é o tamanho da maior clique de G.

Introdução

- **Grafo** $G = (V, E)$: é um conjunto de vértices V e um conjunto de arestas E que contectam vértices de V. $H = (V', E')$ é **Subgrafo** de $G \iff V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.
- **Clique**: subconjunto de vértices de um grafo onde cada par de vértices tem aresta entre si. O **Número de Clique** $\omega(G)$ é o tamanho da maior clique de G.
- **Caminho**: é uma sequência de vértices não repetidos conectados sequencialmente com arestas.

Introdução

- **Grafo** $G = (V, E)$: é um conjunto de vértices V e um conjunto de arestas E que contectam vértices de V. $H = (V', E')$ é **Subgrafo** de $G \iff V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.
- **Clique**: subconjunto de vértices de um grafo onde cada par de vértices tem aresta entre si. O **Número de Clique** $\omega(G)$ é o tamanho da maior clique de G.
- **Caminho**: é uma sequência de vértices não repetidos conectados sequencialmente com arestas.
- **Ciclo**: é um caminho mais um vértice inicial do caminho conectado por uma aresta ao vértice final do caminho.

Cobertura de Cliques

Cobertura de Cliques

Definição

Uma cobertura de cliques de um grafo $G = (V, E)$ é uma partição de V em cliques. O número de cobertura de cliques $\theta(G)$ é o tamanho da menor cobertura de cliques.

Cobertura de Cliques

Definição

Uma cobertura de cliques de um grafo $G = (V, E)$ é uma partição de V em cliques. O número de cobertura de cliques $\theta(G)$ é o tamanho da menor cobertura de cliques.

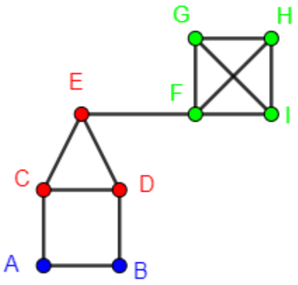


Figura: Uma Cobertura de cliques no grafo G, onde cada cor nos vértices indica uma clique. Temos que $\theta(G) = 3$.

Ciclo Hamiltoniano

Ciclo Hamiltoniano

Figura: William Rowan Hamilton

Ciclo Hamiltoniano

Figura: William Rowan Hamilton

Figura: Jogo Icosiano

Ciclo Hamiltoniano

Ciclo Hamiltoniano

Definição

Um ciclo Hamiltoniano é um ciclo que percorre todos os vértices de um grafo. Um grafo é Hamiltoniano se possui um ciclo Hamiltoniano.

Ciclo Hamiltoniano

Definição

Um ciclo Hamiltoniano é um ciclo que percorre todos os vértices de um grafo. Um grafo é Hamiltoniano se possui um ciclo Hamiltoniano.

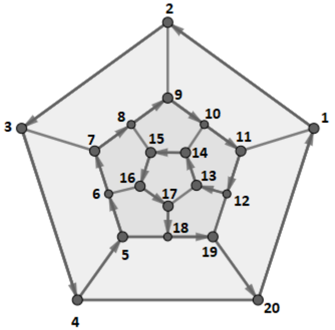


Figura: O grafo Dodecaedro é Hamiltoniano, com o Ciclo Hamiltoniano $1, 2, \ldots, 20$.

Número de Cruzamentos

Número de Cruzamentos

Seja $G = (V, E)$ um grafo,

Número de Cruzamentos

Seja $G = (V, E)$ um grafo,

- $D(G)$: Um **Desenho no Plano** é um desenho de V, E em um plano α.

Número de Cruzamentos

Seja $G = (V, E)$ um grafo,

- $D(G)$: Um **Desenho no Plano** é um desenho de V, E em um plano α.
- $\nu(D(G))$: O **Número de Cruzamentos de** $D(G)$ é o número de cruzamentos entre arestas em $D(G)$.

Número de Cruzamentos

Seja $G = (V, E)$ um grafo,

- $D(G)$: Um **Desenho no Plano** é um desenho de V, E em um plano α.
- $\nu(D(G))$: O **Número de Cruzamentos de** $D(G)$ é o número de cruzamentos entre arestas em $D(G)$.
- $\nu(G)$: O **Número de Cruzamentos** de G é o número mínimo de cruzamentos de um desenho de G no plano.

Número de Cruzamentos

Seja $G = (V, E)$ um grafo,

- $D(G)$: Um **Desenho no Plano** é um desenho de V, E em um plano α.
- $\nu(D(G))$: O **Número de Cruzamentos de** $D(G)$ é o número de cruzamentos entre arestas em $D(G)$.
- $\nu(G)$: O **Número de Cruzamentos** de G é o número mínimo de cruzamentos de um desenho de G no plano.
- $D(G)$ é um **Desenho Ótimo** $\iff \nu(G) = \nu(D(G))$.

Número de Cruzamentos

Seja $G = (V, E)$ um grafo,

- $D(G)$: Um **Desenho no Plano** é um desenho de V, E em um plano α.
- $\nu(D(G))$: O **Número de Cruzamentos de** $D(G)$ é o número de cruzamentos entre arestas em $D(G)$.
- $\nu(G)$: O **Número de Cruzamentos** de G é o número mínimo de cruzamentos de um desenho de G no plano.
- $D(G)$ é um **Desenho Ótimo** $\iff \nu(G) = \nu(D(G))$.
- $\nu(G) = 0 \iff G$ é um **Grafo Planar**.

Número de Cruzamentos

Seja $G = (V, E)$ um grafo,

- $D(G)$: Um **Desenho no Plano** é um desenho de V, E em um plano α.
- $\nu(D(G))$: O **Número de Cruzamentos de** $D(G)$ é o número de cruzamentos entre arestas em $D(G)$.
- $\nu(G)$: O **Número de Cruzamentos** de G é o número mínimo de cruzamentos de um desenho de G no plano.
- $D(G)$ é um **Desenho Ótimo** $\iff \nu(G) = \nu(D(G))$.
- $\nu(G) = 0 \iff G$ é um **Grafo Planar**.
- $\nu(K_n) = 0 \iff n \leq 4$.

Número de Cruzamentos

Seja $G = (V, E)$ um grafo,

- $D(G)$: Um **Desenho no Plano** é um desenho de V, E em um plano α.
- $\nu(D(G))$: O **Número de Cruzamentos de** $D(G)$ é o número de cruzamentos entre arestas em $D(G)$.
- $\nu(G)$: O **Número de Cruzamentos** de G é o número mínimo de cruzamentos de um desenho de G no plano.
- $D(G)$ é um **Desenho Ótimo** $\iff \nu(G) = \nu(D(G))$.
- $\nu(G) = 0 \iff G$ é um **Grafo Planar**.
- $\nu(K_n) = 0 \iff n \leq 4$.
- $\nu(K_{m,n}) = 0 \iff m \leq 2$ ou $n \leq 2$.

Número de Cruzamentos do K_4, K_5, $K_{2,3}$ e $K_{3,3}$

Número de Cruzamentos do K_4, K_5, $K_{2,3}$ e $K_{3,3}$

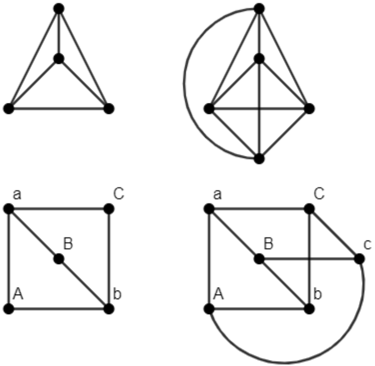


Figura: Na 1º linha temos um desenho do K_4 e K_5 com respectivamente 0 e 1 cruzamentos. Na 2º linha temos um desenho do $K_{2,3}$ e $K_{3,3}$ com respectivamente 0 e 1 cruzamentos. Temos que $\nu(K_4) = \nu(K_{2,3}) = 0$ e $\nu(K_5) = \nu(K_{3,3})$.

Teorema de Kuratowski

Teorema de Kuratowski

Figura: Kazimierz Kuratowski

Teorema de Kuratowski

Teorema de Kuratowski

Definição

Um grafo H é uma subdivisão de um grafo $G \iff$ toda aresta de H é substituição de uma aresta de G por um caminho ou é equivalente a uma aresta de G.

Teorema de Kuratowski

Definição

Um grafo H é uma subdivisão de um grafo $G \iff$ toda aresta de H é substituição de uma aresta de G por um caminho ou é equivalente a uma aresta de G.

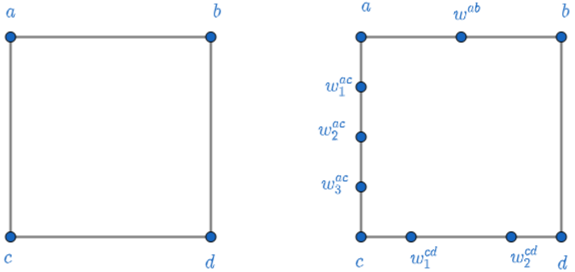


Figura: Um grafo G e sua respectiva subdivisão

Teorema de Kuratowski

Teorema de Kuratowski

Teorema (Teorema de Kuratowski'1930)

$\nu(G) = 0 \iff$ *não existe um subgrafo* H *que seja subdivisão de* K_5 *ou* $K_{3,3}$*.*

Teorema de Kuratowski

Teorema (Teorema de Kuratowski'1930)

$\nu(G) = 0 \iff$ *não existe um subgrafo* H *que seja subdivisão de* K_5 *ou* $K_{3,3}$.

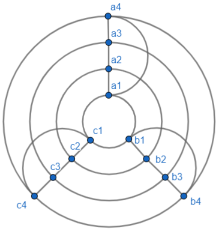


Figura: $C_4 \times C_3$.

Teorema de Kuratowski

Teorema (Teorema de Kuratowski'1930)

$\nu(G) = 0 \iff$ *não existe um subgrafo H que seja subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$.*

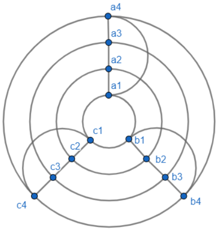


Figura: $C_4 \times C_3$.

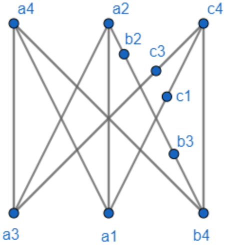


Figura: Uma subdivisão de $K_{3,3}$ subgrafo de $C_4 \times C_3$.

Número de Cruzamentos em k-páginas

Número de Cruzamentos em k-páginas

- Um Desenho em k-páginas de um grafo $G = (V, E)$ é definido como:
  1. Definimos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \subset \mathbb{R}^3$ semiplanos não paralelos dois a dois, chamados de páginas;
  2. A reta $r = \alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_k$, é chamada de **Espinha**;
  3. Todo $v \in V$ é desenhado em r;
  4. Todo $e \in E$ é desenhada em um único α_ℓ.

Número de Cruzamentos em k-páginas

- Um Desenho em k-páginas de um grafo $G = (V, E)$ é definido como:
  1. Definimos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \subset \mathbb{R}^3$ semiplanos não paralelos dois a dois, chamados de páginas;
  2. A reta $r = \alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_k$, é chamada de **Espinha**;
  3. Todo $v \in V$ é desenhado em r;
  4. Todo $e \in E$ é desenhada em um único α_ℓ.
- O número de cruzamentos em k-páginas $\nu_k(G)$ é o mínimo número de cruzamentos de G em um desenho em k-páginas.

Maior n para o qual se conhece $\nu(K(n,2))$

Maior n para o qual se conhece $\nu(K(n,2))$

Figura: Julius Petersen

Maior n para o qual se conhece $\nu(K(n,2))$

Figura: Julius Petersen

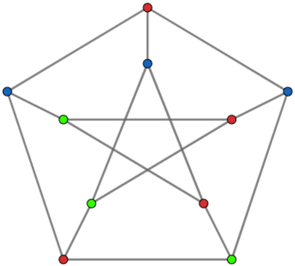


Figura: Grafo de Petersen

Maior n para o qual se conhece $\nu(K(n,2))$

Maior n para o qual se conhece $\nu(K(n,2))$

Teorema

$\nu(K(5,2)) = \nu_2(K(5,2)) = 2.$

Maior n para o qual se conhece $\nu(K(n,2))$

Teorema

$\nu(K(5,2)) = \nu_2(K(5,2)) = 2.$

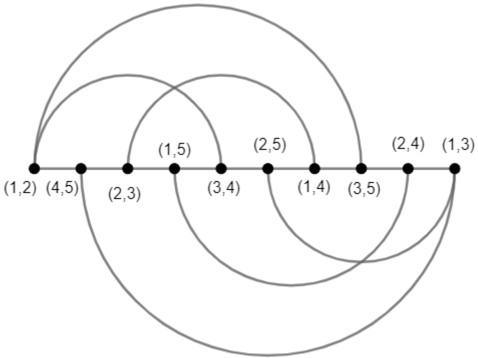


Figura: Desenho em 2-páginas ótimo do grafo de Petersen $K(5,2)$.

Problema da Fabrica de Tijolos de Turán

Problema da Fabrica de Tijolos de Turán

Figura: Pál Turán

Problema da Fabrica de Tijolos de Turán

Figura: Pál Turán

Problema da Fabrica de Tijolos de Turán

Problema da Fabrica de Tijolos de Turán

- Formulado por Pál Turán.

Problema da Fabrica de Tijolos de Turán

- Formulado por Pál Turán.
- Inicio do estudo do número de cruzamentos de um grafo.

Problema da Fabrica de Tijolos de Turán

- Formulado por Pál Turán.
- Inicio do estudo do número de cruzamentos de um grafo.
- m fornos que fabricam tijolos e n depositos que armazenam tijolos;

Problema da Fabrica de Tijolos de Turán

- Formulado por Pál Turán.
- Inicio do estudo do número de cruzamentos de um grafo.
- m fornos que fabricam tijolos e n depositos que armazenam tijolos;
- cada forno é conectado por trilhos aos n depositos;

Problema da Fabrica de Tijolos de Turán

- Formulado por Pál Turán.
- Inicio do estudo do número de cruzamentos de um grafo.
- *m* fornos que fabricam tijolos e *n* depositos que armazenam tijolos;
- cada forno é conectado por trilhos aos *n* depositos;
- Isso corresponde a um grafo bipartido completo $K_{m,n}$;

Problema da Fabrica de Tijolos de Turán

- Formulado por Pál Turán.
- Inicio do estudo do número de cruzamentos de um grafo.
- m fornos que fabricam tijolos e n depositos que armazenam tijolos;
- cada forno é conectado por trilhos aos n depositos;
- Isso corresponde a um grafo bipartido completo $K_{m,n}$;
- **Pergunta**: Qual a forma de construir os fornos, armazens e trilhos de modo a que exista um número mínimo de cruzamentos ?

Problema da Fabrica de Tijolos de Turán

- Formulado por Pál Turán.
- Inicio do estudo do número de cruzamentos de um grafo.
- m fornos que fabricam tijolos e n depositos que armazenam tijolos;
- cada forno é conectado por trilhos aos n depositos;
- Isso corresponde a um grafo bipartido completo $K_{m,n}$;
- **Pergunta**: Qual a forma de construir os fornos, armazens e trilhos de modo a que exista um número mínimo de cruzamentos ?
- $\nu(K_{m,n}) = ?$

Problema da Fabrica de Tijolos de Turán

Problema da Fabrica de Tijolos de Turán

Figura: Kazimierz Zarankiewicz

Problema da Fabrica de Tijolos de Turán

Figura: Kazimierz Zarankiewicz

Figura: Kazimierz Urbanik

Problema da Fabrica de Tijolos de Turán

Figura: Kazimierz Zarankiewicz

Figura: Kazimierz Urbanik

Figura: Richard Guy

Problema da Fábrica de Tijolos de Turán

Problema da Fábrica de Tijolos de Turán

- Em 1955, Kazimierz Zarankiewicz e Kazimierz Urbanik construiram um desenho para o $K_{m,n}$ e obtiveram uma formula para o número de cruzamentos desse desenho.

Problema da Fábrica de Tijolos de Turán

- Em 1955, Kazimierz Zarankiewicz e Kazimierz Urbanik construiram um desenho para o $K_{m,n}$ e obtiveram uma formula para o número de cruzamentos desse desenho.
- Nessa construção desenhamos $K_{m,n}$ do seguinte modo:
  1. construimos r_1, r_2 retas perpendiculares e p o ponto de interseção;
  2. desenhamos $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ em cada lado de r_1 com relação a p e se m for ímpar desenhamos mais 1 vértice em um dos lados;
  3. desenhamos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ em cada lado de r_2 com relação a p e se n for ímpar desenhamos mais 1 vértice em um dos lados;
  4. para cada vértice de r_1 desenhamos uma aresta com todos vértices da reta r_2.

Problema da Fábrica de Tijolos de Turán

- Em 1955, Kazimierz Zarankiewicz e Kazimierz Urbanik construiram um desenho para o $K_{m,n}$ e obtiveram uma formula para o número de cruzamentos desse desenho.
- Nessa construção desenhamos $K_{m,n}$ do seguinte modo:
  1. construimos r_1, r_2 retas perpendiculares e p o ponto de interseção;
  2. desenhamos $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ em cada lado de r_1 com relação a p e se m for ímpar desenhamos mais 1 vértice em um dos lados;
  3. desenhamos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ em cada lado de r_2 com relação a p e se n for ímpar desenhamos mais 1 vértice em um dos lados;
  4. para cada vértice de r_1 desenhamos uma aresta com todos vértices da reta r_2.
- Em 1969, Richard Guy verificou que as demonstrações desenvolvidas por Zarankiewicz e Urbanik que estabeleciam que a formula era ótima estavam erradas.

Problema da Fábrica de Tijolos de Turán

- Em 1955, Kazimierz Zarankiewicz e Kazimierz Urbanik construiram um desenho para o $K_{m,n}$ e obtiveram uma formula para o número de cruzamentos desse desenho.
- Nessa construção desenhamos $K_{m,n}$ do seguinte modo:
  1. construimos r_1, r_2 retas perpendiculares e p o ponto de interseção;
  2. desenhamos $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ em cada lado de r_1 com relação a p e se m for ímpar desenhamos mais 1 vértice em um dos lados;
  3. desenhamos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ em cada lado de r_2 com relação a p e se n for ímpar desenhamos mais 1 vértice em um dos lados;
  4. para cada vértice de r_1 desenhamos uma aresta com todos vértices da reta r_2.
- Em 1969, Richard Guy verificou que as demonstrações desenvolvidas por Zarankiewicz e Urbanik que estabeleciam que a formula era ótima estavam erradas.
- A formula serve como um limite superior para $\nu(K_{m,n})$.

Problema da Fábrica de Tijolos de Turán

Problema da Fábrica de Tijolos de Turán

Teorema (Zarankiewicz'1955 e Urbanik'1955)

$\nu(K_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor.$

Problema da Fábrica de Tijolos de Turán

Teorema (Zarankiewicz'1955 e Urbanik'1955)

$\nu(K_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor.$

Conjectura (Conjectura do Número de Cruzamentos de Zarankiewicz'1960)

$\nu(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor.$

Problema da Fábrica de Tijolos de Turán

Problema da Fábrica de Tijolos de Turán

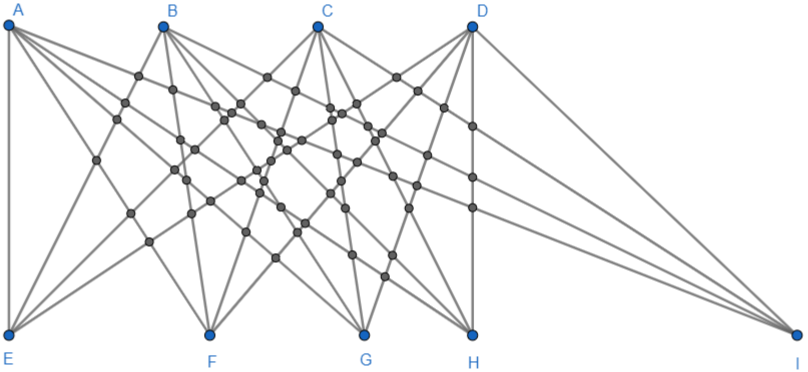


Figura: Desenho do $K_{4,5}$ com 59 cruzamentos.

Problema da Fábrica de Tijolos de Turán

Problema da Fábrica de Tijolos de Turán

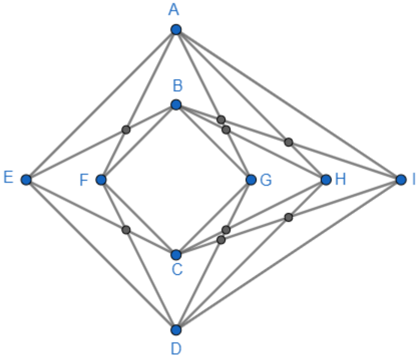


Figura: Desenho de Zarankiewicz para $K_{4,5}$ com $\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{5-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{4-1}{2} \right\rfloor = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ cruzamentos.

Resultados para K_n e para Q_n

Resultados para K_n e para Q_n

Teorema (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)

$$\nu_1(K_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq 3, \\ \binom{n}{4}, & \text{se } n \geq 4. \end{cases}$$

Resultados para K_n e para Q_n

Teorema (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)

$$\nu_1(K_n) = \begin{cases} 0, & se\ n \leq 3, \\ \binom{n}{4}, & se\ n \geq 4. \end{cases}$$

Teorema (Ábrego'2013)

$$\nu(K_n) \leq \nu_2(K_n) = \frac{1}{4}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor.$$

Resultados para K_n e para Q_n

Teorema (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)

$$\nu_1(K_n) = \begin{cases} 0, & se\ n \leq 3, \\ \binom{n}{4}, & se\ n \geq 4. \end{cases}$$

Teorema (Ábrego'2013)

$$\nu(K_n) \leq \nu_2(K_n) = \frac{1}{4}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor.$$

Conjectura (Conjectura de Hill'1960)

$$\nu(K_n) = \nu_2(K_n) = \frac{1}{4}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor.$$

Resultados para K_n e para Q_n

Teorema (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)

$$\nu_1(K_n) = \begin{cases} 0, & \textit{se } n \leq 3, \\ \binom{n}{4}, & \textit{se } n \geq 4. \end{cases}$$

Teorema (Ábrego'2013)

$$\nu(K_n) \leq \nu_2(K_n) = \frac{1}{4}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor.$$

Conjectura (Conjectura de Hill'1960)

$$\nu(K_n) = \nu_2(K_n) = \frac{1}{4}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor.$$

Teorema (Faria e Outros'2015)

$$\nu_2(Q_n) \leq \frac{125}{768} 4^n - \frac{2^{n-3}}{3}\left(3n^2 + \frac{9+(-1)^{n+1}}{2}\right).$$

Grafo de Kneser

Grafo de Kneser

Figura: Martin Kneser

Grafo de Kneser

Grafo de Kneser

Definição

$K(n,k)$ é um grafo de Kneser se todo os vértices do grafo são subconjuntos de k elementos de um conjunto $S = \{1,2,\ldots,n\}$ com $k \leq n$ e $vw \in E(K(n,k))$ se e somente se v e k são disjuntos.

Grafo de Kneser $K(n, 2)$ mais conhecido

Grafo de Kneser $K(n, 2)$ mais conhecido

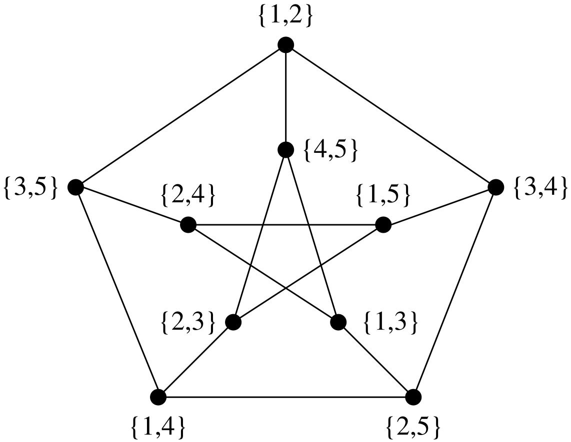


Figura: Grafo de Kneser $K(5, 2)$, isto é, o grafo de Petersen, possui 10 vértices, 15 arestas e cada vértice possui grau 3

Propriedades do $K(n, k)$

Propriedades do $K(n, k)$

1. $|V(K(n,k))| = \binom{n}{k}$.

Propriedades do $K(n,k)$

1. $|\,V(K(n,k))\,| = \binom{n}{k}$.
2. $\binom{n-k}{k}$-grafo regular.

Propriedades do $K(n, k)$

1. $|\, V(K(n,k)) \,| = \binom{n}{k}$.
2. $\binom{n-k}{k}$-grafo regular.
3. $|\, E(K(n,k)) \,| = \frac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}}{2}$.

Propriedades do $K(n,k)$

1. $|\,V(K(n,k))\,| = \binom{n}{k}$.
2. $\binom{n-k}{k}$-grafo regular.
3. $|\,E(K(n,k))\,| = \frac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}}{2}$.
4. $\theta(K(n,k)) = \left\lceil \frac{\binom{n}{k}}{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \right\rceil$.

Propriedades do $K(n,k)$

1. $|V(K(n,k))| = \binom{n}{k}$.
2. $\binom{n-k}{k}$-grafo regular.
3. $|E(K(n,k))| = \frac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}}{2}$.
4. $\theta(K(n,k)) = \left\lceil \frac{\binom{n}{k}}{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \right\rceil$.
5. $\omega(K(n,k)) = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

Propriedades de $K(n, 2)$

Propriedades de $K(n, 2)$

1. $|V(K(n,2))| = \frac{n(n-1)}{2}$.

Propriedades de $K(n,2)$

1. $|V(K(n,2))| = \frac{n(n-1)}{2}$.
2. $\left(\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right)$-grafo regular.

Propriedades de $K(n, 2)$

1. $|V(K(n,2))| = \frac{n(n-1)}{2}$.
2. $\left(\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right)$-grafo regular.
3. $|E(K(n,2))| = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

Propriedades de $K(n,2)$

1. $|V(K(n,2))| = \frac{n(n-1)}{2}$.
2. $\left(\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right)$-grafo regular.
3. $|E(K(n,2))| = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.
4. $\theta(K(n,2)) = \begin{cases} n-1, & \text{se n é par} \\ n, & \text{se n é ímpar} \end{cases}$.

Propriedades de $K(n,2)$

1. $|V(K(n,2))| = \frac{n(n-1)}{2}$.
2. $\left(\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right)$-grafo regular.
3. $|E(K(n,2))| = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.
4. $\theta(K(n,2)) = \begin{cases} n-1, & \text{se n é par} \\ n, & \text{se n é ímpar} \end{cases}$.
5. $\omega(K(n,2)) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Propriedades de $K(n, 2)$

1. $|V(K(n,2))| = \frac{n(n-1)}{2}$.
2. $\left(\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right)$-grafo regular.
3. $|E(K(n,2))| = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.
4. $\theta(K(n,2)) = \begin{cases} n-1, & \text{se n é par} \\ n, & \text{se n é ímpar} \end{cases}$.
5. $\omega(K(n,2)) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.
6. $K(n,2)$ é Hamiltoniano $\Longleftrightarrow n \geq 6$.

Resultados Anteriores

Resultados Anteriores

- Trabalho final do aluno Jonas Carvalho em 2019.

Resultados Anteriores

- Trabalho final do aluno Jonas Carvalho em 2019.
- Foi implementado em linguagem C.

Resultados Anteriores

- Trabalho final do aluno Jonas Carvalho em 2019.
- Foi implementado em linguagem C.
- Algoritmo Exaustivo para o número de cruzamentos mínimo em 2-páginas para uma ordenação fixada P na espinha.

Resultados Anteriores

- Trabalho final do aluno Jonas Carvalho em 2019.
- Foi implementado em linguagem C.
- Algoritmo Exaustivo para o número de cruzamentos mínimo em 2-páginas para uma ordenação fixada P na espinha.
- o algoritmo gera $|E(K(n,2)|)$-tuplas de bits 0(aresta para cima) ou 1(aresta para baixo).

Resultados Anteriores

- Trabalho final do aluno Jonas Carvalho em 2019.
- Foi implementado em linguagem C.
- Algoritmo Exaustivo para o número de cruzamentos mínimo em 2-páginas para uma ordenação fixada P na espinha.
- o algoritmo gera $|E(K(n,2)|)$-tuplas de bits 0(aresta para cima) ou 1(aresta para baixo).
- Obteve desenhos em 2-páginas de $K(6,2)$ e $K(7,2)$ com 49 e 92 cruzamentos respectivamente.

Resultados Anteriores

Resultados Anteriores

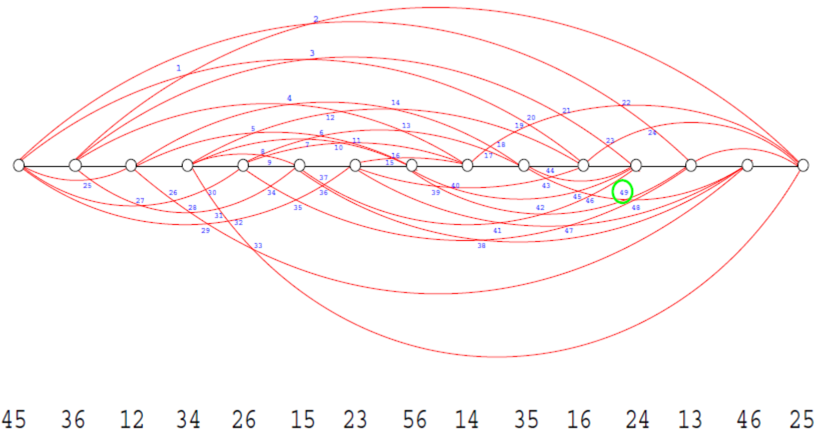


Figura: $K(6,2)$ representado pela 45-tupla 00001 10011 10110 01110 01100 00010 00000 10000 10010.

Algoritmo do Slope

Algoritmo do Slope

- Divide as arestas de um grafo entre k círculos distintos.

Algoritmo do Slope

- Divide as arestas de um grafo entre k círculos distintos.
- Pode ser usado para desenhar um grafo em k-páginas, bastanto associar cada ℓ-círculo com uma ℓ-página.

Algoritmo do Slope

- Divide as arestas de um grafo entre k círculos distintos.
- Pode ser usado para desenhar um grafo em k-páginas, bastanto associar cada ℓ-círculo com uma ℓ-página.
- Definimos $S_k(G)$ de um grafo G como o desenho em k-páginas usando o Algoritmo do Slope.

Algoritmo do Slope

- Divide as arestas de um grafo entre k círculos distintos.
- Pode ser usado para desenhar um grafo em k-páginas, bastanto associar cada ℓ-círculo com uma ℓ-página.
- Definimos $S_k(G)$ de um grafo G como o desenho em k-páginas usando o Algoritmo do Slope.
- Produz um Desenho Ótimo do K_n em 2-páginas.

Algoritmo do Slope

Algoritmo do Slope

Seja $G = (V, E)$ um grafo tal que $n = |V|$. Definimos o algoritmo de Slope para k circulos:

1. Tome $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ um ciclo hamiltoniano;
2. Denotamos a aresta $v_i v_j$ como a aresta ij;
3. $p = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$;
4. $q = n \, mod \, k$;
5. Dada uma aresta ij temos que ij pertence ao circulo ℓ se e somente se $\ell(p+1) \leq (i+j) \mod n \leq \ell(p+1) + p$ se $0 \leq \ell < q$, ou $\ell p + q \leq (i+j) \mod n \leq \ell p + q + (p-1)$ se $q \leq \ell < k$.

Algoritmo do Slope

Algoritmo do Slope

Teorema (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)

$\nu_k(S_k(K_n)) = (n \mod k)F(\lceil \frac{n}{k} \rceil + 1, n) + (k - (n \mod k))F(\lceil \frac{n}{k} \rceil, n)$, *onde* $F(r,n) = -\frac{r^4}{24} + \frac{nr^3}{12} - \frac{nr^2}{4} + \frac{7r^2}{24} + \frac{nr}{6} - \frac{r}{4}$.

Algoritmo do Slope

Teorema (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)
$\nu_k(S_k(K_n)) = (n \mod k)F(\lceil \frac{n}{k} \rceil + 1, n) + (k - (n \mod k))F(\lceil \frac{n}{k} \rceil, n)$, *onde* $F(r, n) = -\frac{r^4}{24} + \frac{nr^3}{12} - \frac{nr^2}{4} + \frac{7r^2}{24} + \frac{nr}{6} - \frac{r}{4}$.

Teorema (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)
$\nu_1(S_1(K_n)) = \binom{n}{4} = \nu_1(K_n)$.

Algoritmo do Slope

Teorema (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)

$\nu_k(S_k(K_n)) = (n \mod k)F(\lceil \frac{n}{k} \rceil + 1, n) + (k - (n \mod k))F(\lceil \frac{n}{k} \rceil, n)$, *onde* $F(r,n) = -\frac{r^4}{24} + \frac{nr^3}{12} - \frac{nr^2}{4} + \frac{7r^2}{24} + \frac{nr}{6} - \frac{r}{4}$.

Teorema (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)

$\nu_1(S_1(K_n)) = \binom{n}{4} = \nu_1(K_n)$.

Teorema (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)

$\nu_2(S_2(K_n)) = \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor = \nu_2(K_n)$.

Algoritmo do Slope

Teorema (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)
$\nu_k(S_k(K_n)) = (n \mod k)F(\lceil \frac{n}{k} \rceil + 1, n) + (k - (n \mod k))F(\lceil \frac{n}{k} \rceil, n)$, *onde* $F(r, n) = -\frac{r^4}{24} + \frac{nr^3}{12} - \frac{nr^2}{4} + \frac{7r^2}{24} + \frac{nr}{6} - \frac{r}{4}$.

Teorema (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)
$\nu_1(S_1(K_n)) = \binom{n}{4} = \nu_1(K_n)$.

Teorema (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)
$\nu_2(S_2(K_n)) = \frac{1}{4}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor = \nu_2(K_n)$.

Corolário (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)
$\nu_k(K_n) \leq \nu_k(S_k(K_n))$.

Algoritmo do Slope

Teorema (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)

$\nu_k(S_k(K_n)) = (n \mod k)F(\lceil \frac{n}{k} \rceil + 1, n) + (k - (n \mod k))F(\lceil \frac{n}{k} \rceil, n)$, *onde* $F(r, n) = -\frac{r^4}{24} + \frac{nr^3}{12} - \frac{nr^2}{4} + \frac{7r^2}{24} + \frac{nr}{6} - \frac{r}{4}$.

Teorema (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)

$\nu_1(S_1(K_n)) = \binom{n}{4} = \nu_1(K_n)$.

Teorema (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)

$\nu_2(S_2(K_n)) = \frac{1}{4}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor = \nu_2(K_n)$.

Corolário (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)

$\nu_k(K_n) \leq \nu_k(S_k(K_n))$.

Conjectura (Klerk,Pasechnik,Salazar'2018)

$\nu_k(K_n) = \nu_k(S_k(K_n))$.

Exemplo de Algoritmo do Slope

Exemplo de Algoritmo do Slope

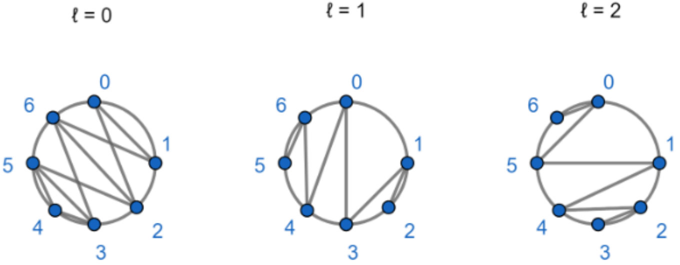
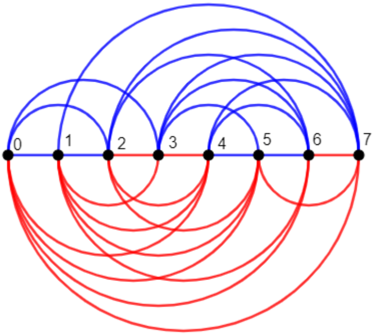


Figura: $S_3(K_7)$, equivalente a um desenho em 3-páginas do K_7.

Desenho em 2-páginas ótimo de K_8 obtido pelo Algoritmo do Slope

Desenho em 2-páginas ótimo de K_8 obtido pelo Algoritmo do Slope



Algoritmo de Berge

Algoritmo de Berge

- Algoritmo de Claude Berge'1973.

Algoritmo de Berge

- Algoritmo de Claude Berge'1973.
- Retorna uma Tabela com vértices de $K(n, 2)$.

Algoritmo de Berge

- Algoritmo de Claude Berge'1973.
- Retorna uma Tabela com vértices de $K(n, 2)$.
- Define uma Cobertura de Cliques de tamanho $\theta(K(n, 2))$, com cada clique com tamanho $\omega(K(n, 2))$.

Algoritmo de Berge

- Algoritmo de Claude Berge'1973.
- Retorna uma Tabela com vértices de $K(n, 2)$.
- Define uma Cobertura de Cliques de tamanho $\theta(K(n, 2))$, com cada clique com tamanho $\omega(K(n, 2))$.
- Cada coluna da tabela corresponde a uma clique da cobertura de cliques.

Algoritmo de Berge

- Algoritmo de Claude Berge'1973.
- Retorna uma Tabela com vértices de $K(n, 2)$.
- Define uma Cobertura de Cliques de tamanho $\theta(K(n, 2))$, com cada clique com tamanho $\omega(K(n, 2))$.
- Cada coluna da tabela corresponde a uma clique da cobertura de cliques.
- É possível definir um ciclo Hamiltoniano por meio dessa Tabela.

Algoritmo de Berge

Algoritmo de Berge

Algoritmo de Berge caso n par					
	$i=2$	$\dots$	i	$\dots$	$i=n$
$j=1$	$(1,2)$	$\dots$	$\left(1,i\right)$	$\dots$	$(1,n)$
$j=2$	$(n,3)$	$\dots$	$\left((i-3) \mod (n-1)+2,(i-1) \mod (n-1)+2\right)$	$\dots$	$(n-1,2)$
$j=3$	$(n-1,4)$	$\dots$	$\left((i-4) \mod (n-1)+2,(i) \mod (n-1)+2\right)$	$\dots$	$(n-2,3)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
j	$(n+2-j,j+1)$	$\dots$	$\left((i-j-1) \mod (n-1)+2,(i-3+j) \mod (n-1)+2\right)$	$\dots$	$(n+1-j,j)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$j=q$	$(q+2,q+1)$	$\dots$	$\left((i-(q+1)) \mod (n-1)+2,(i+(q-3)) \mod (n-1)+2\right)$	$\dots$	$(q+1,q)$

Algoritmo de Berge

Algoritmo de Berge caso n par					
	$i=2$	$\dots$	i	$\dots$	$i=n$
$j=1$	$(1,2)$	$\dots$	$\big(1,i\big)$	$\dots$	$(1,n)$
$j=2$	$(n,3)$	$\dots$	$\big((i-3) \mod (n-1)+2,(i-1) \mod (n-1)+2\big)$	$\dots$	$(n-1,2)$
$j=3$	$(n-1,4)$	$\dots$	$\big((i-4) \mod (n-1)+2,(i) \mod (n-1)+2\big)$	$\dots$	$(n-2,3)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
j	$(n+2-j,j+1)$	$\dots$	$\big((i-j-1) \mod (n-1)+2,(i-3+j) \mod (n-1)+2\big)$	$\dots$	$(n+1-j,j)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$j=q$	$(q+2,q+1)$	$\dots$	$\big((i-(q+1)) \mod (n-1)+2,(i+(q-3)) \mod (n-1)+2\big)$	$\dots$	$(q+1,q)$

1. Definimos $n=2q$.

Algoritmo de Berge

Algoritmo de Berge caso n par					
	$i=2$	$\dots$	i	$\dots$	$i=n$
$j=1$	$(1,2)$	$\dots$	$\big(1,i\big)$	$\dots$	$(1,n)$
$j=2$	$(n,3)$	$\dots$	$\big((i-3) \mod (n-1)+2,(i-1) \mod (n-1)+2\big)$	$\dots$	$(n-1,2)$
$j=3$	$(n-1,4)$	$\dots$	$\big((i-4) \mod (n-1)+2,(i) \mod (n-1)+2\big)$	$\dots$	$(n-2,3)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
j	$(n+2-j,j+1)$	$\dots$	$\big((i-j-1) \mod (n-1)+2,(i-3+j) \mod (n-1)+2\big)$	$\dots$	$(n+1-j,j)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$j=q$	$(q+2,q+1)$	$\dots$	$\big((i-(q+1)) \mod (n-1)+2,(i+(q-3)) \mod (n-1)+2\big)$	$\dots$	$(q+1,q)$

1. Definimos $n=2q$.
2. Para o caso n par obtemos o Algoritmo de Berge de acordo com a tabela anterior.

Algoritmo de Berge

Algoritmo de Berge caso n par					
	$i=2$	$\dots$	i	$\dots$	$i=n$
$j=1$	$(1,2)$	$\dots$	$\big(1,i\big)$	$\dots$	$(1,n)$
$j=2$	$(n,3)$	$\dots$	$\big((i-3) \mod (n-1)+2,(i-1) \mod (n-1)+2\big)$	$\dots$	$(n-1,2)$
$j=3$	$(n-1,4)$	$\dots$	$\big((i-4) \mod (n-1)+2,(i) \mod (n-1)+2\big)$	$\dots$	$(n-2,3)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
j	$(n+2-j,j+1)$	$\dots$	$\big((i-j-1) \mod (n-1)+2,(i-3+j) \mod (n-1)+2\big)$	$\dots$	$(n+1-j,j)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$j=q$	$(q+2,q+1)$	$\dots$	$\big((i-(q+1)) \mod (n-1)+2,(i+(q-3)) \mod (n-1)+2\big)$	$\dots$	$(q+1,q)$

1. Definimos $n=2q$.
2. Para o caso n par obtemos o Algoritmo de Berge de acordo com a tabela anterior.
3. Para o caso n ímpar obtemos o Algoritmo de Berge $n+1$ e retiramos os vértices com valor $n+1$.

Algoritmo de Berge

Algoritmo de Berge caso n par					
	$i=2$	$\dots$	i	$\dots$	$i=n$
$j=1$	$(1,2)$	$\dots$	$\big(1,i\big)$	$\dots$	$(1,n)$
$j=2$	$(n,3)$	$\dots$	$\big((i-3) \mod (n-1)+2,(i-1) \mod (n-1)+2\big)$	$\dots$	$(n-1,2)$
$j=3$	$(n-1,4)$	$\dots$	$\big((i-4) \mod (n-1)+2,(i) \mod (n-1)+2\big)$	$\dots$	$(n-2,3)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
j	$(n+2-j,j+1)$	$\dots$	$\big((i-j-1) \mod (n-1)+2,(i-3+j) \mod (n-1)+2\big)$	$\dots$	$(n+1-j,j)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$j=q$	$(q+2,q+1)$	$\dots$	$\big((i-(q+1)) \mod (n-1)+2,(i+(q-3)) \mod (n-1)+2\big)$	$\dots$	$(q+1,q)$

1. Definimos $n=2q$.
2. Para o caso n par obtemos o Algoritmo de Berge de acordo com a tabela anterior.
3. Para o caso n ímpar obtemos o Algoritmo de Berge $n+1$ e retiramos os vértices com valor $n+1$.
4. O ciclo Hamiltoniano é obtido tomando as colunas em ordem crescente e os vértices de cada coluna em ordem crescente de acordo com as linhas.

Exemplo do Algoritmo de Berge $K(6,2)$

Exemplo do Algoritmo de Berge $K(6,2)$

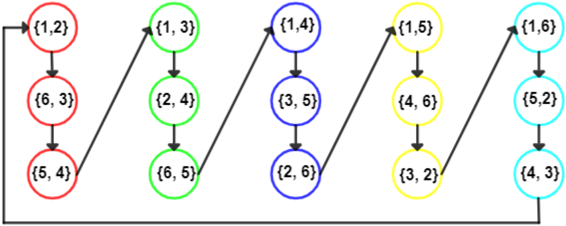


Figura: Algoritmo de Berge para $K(6,2)$. Cada cor representa uma clique obtida pelo Algoritmo de Berge. As setas informam o ciclo Hamiltoniano obtido pelo Algoritmo de Berge.

Exemplo do Algoritmo de Berge $K(8,2)$

Exemplo do Algoritmo de Berge $K(8,2)$

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$	$(1,7)$	$(1,8)$
$(8,3)$	$(2,4)$	$(3,5)$	$(4,6)$	$(5,7)$	$(6,8)$	$(7,2)$
$(7,4)$	$(8,5)$	$(2,6)$	$(3,7)$	$(4,8)$	$(5,2)$	$(6,3)$
$(6,5)$	$(7,6)$	$(8,7)$	$(2,8)$	$(3,2)$	$(4,3)$	$(5,4)$

Exemplo do Algoritmo de Berge $K(8,2)$

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$	$(1,7)$	$(1,8)$
$(8,3)$	$(2,4)$	$(3,5)$	$(4,6)$	$(5,7)$	$(6,8)$	$(7,2)$
$(7,4)$	$(8,5)$	$(2,6)$	$(3,7)$	$(4,8)$	$(5,2)$	$(6,3)$
$(6,5)$	$(7,6)$	$(8,7)$	$(2,8)$	$(3,2)$	$(4,3)$	$(5,4)$

Tabela: Saída do Algoritmo de Berge para $K(8,2)$.

Exemplo do Algoritmo de Berge $K(8,2)$

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$	$(1,7)$	$(1,8)$
$(8,3)$	$(2,4)$	$(3,5)$	$(4,6)$	$(5,7)$	$(6,8)$	$(7,2)$
$(7,4)$	$(8,5)$	$(2,6)$	$(3,7)$	$(4,8)$	$(5,2)$	$(6,3)$
$(6,5)$	$(7,6)$	$(8,7)$	$(2,8)$	$(3,2)$	$(4,3)$	$(5,4)$

Tabela: Saída do Algoritmo de Berge para $K(8,2)$.

Tabela: Ciclo Hamiltoniano $\big((1,2),(8,3),(7,4),(6,5),(1,3),(2,4),(8,5),(7,6),(1,4),(3,5),(2,6),(8,7),(1,5),(4,6),(3,7),(2,8),(1,6),(5,7),(4,8),(3,2),(1,7),(6,8),(5,2),(4,3),(1,8),(7,2),(6,3),(5,4),(1,2)\big)$ para $K(8,2)$ obtido a partir do Algoritmo de Berge.

Exemplo do Algoritmo de Berge $K(7,2)$

Exemplo do Algoritmo de Berge $K(7,2)$

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$	$(1,7)$	**(1,8)**
(8,3)	$(2,4)$	$(3,5)$	$(4,6)$	$(5,7)$	**(6,8)**	$(7,2)$
$(7,4)$	**(8,5)**	$(2,6)$	$(3,7)$	**(4,8)**	$(5,2)$	$(6,3)$
$(6,5)$	$(7,6)$	**(8,7)**	**(2,8)**	$(3,2)$	$(4,3)$	$(5,4)$

Exemplo do Algoritmo de Berge $K(7,2)$

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$	$(1,7)$	**(1,8)**
(8,3)	$(2,4)$	$(3,5)$	$(4,6)$	$(5,7)$	**(6,8)**	$(7,2)$
$(7,4)$	**(8,5)**	$(2,6)$	$(3,7)$	**(4,8)**	$(5,2)$	$(6,3)$
$(6,5)$	$(7,6)$	**(8,7)**	**(2,8)**	$(3,2)$	$(4,3)$	$(5,4)$

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$	$(1,7)$	
	$(2,4)$	$(3,5)$	$(4,6)$	$(5,7)$		$(7,2)$
$(7,4)$		$(2,6)$	$(3,7)$		$(5,2)$	$(6,3)$
$(6,5)$	$(7,6)$			$(3,2)$	$(4,3)$	$(5,4)$

Exemplo do Algoritmo de Berge $K(7,2)$

Exemplo do Algoritmo de Berge $K(7,2)$

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$	$(1,7)$	$(7,2)$
$(7,4)$	$(2,4)$	$(3,5)$	$(4,6)$	$(5,7)$	$(5,2)$	$(6,3)$
$(6,5)$	$(7,6)$	$(2,6)$	$(3,7)$	$(3,2)$	$(4,3)$	$(5,4)$

Exemplo do Algoritmo de Berge $K(7,2)$

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$	$(1,7)$	$(7,2)$
$(7,4)$	$(2,4)$	$(3,5)$	$(4,6)$	$(5,7)$	$(5,2)$	$(6,3)$
$(6,5)$	$(7,6)$	$(2,6)$	$(3,7)$	$(3,2)$	$(4,3)$	$(5,4)$

Tabela: Saída do Algoritmo de Berge para $K(7,2)$.

Exemplo do Algoritmo de Berge $K(7,2)$

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$	$(1,7)$	$(7,2)$
$(7,4)$	$(2,4)$	$(3,5)$	$(4,6)$	$(5,7)$	$(5,2)$	$(6,3)$
$(6,5)$	$(7,6)$	$(2,6)$	$(3,7)$	$(3,2)$	$(4,3)$	$(5,4)$

Tabela: Saída do Algoritmo de Berge para $K(7,2)$.

Tabela: Ciclo Hamiltoniano $\big((1,2),(7,4),(6,5),(1,3),(2,4),(7,6),(1,4),$
$(3,5),(2,6),(1,5),(4,6),(3,7),(1,6),(5,7),(3,2),(1,7),(5,2),(4,3),$
$(7,2),(6,3),(5,4),(1,2)\big)$ para $K(7,2)$ obtido a partir do Algoritmo de Berge.

Desenho Proposto

Desenho Proposto

Seja $K(n, 2)$ um grafo de Kneser,

Desenho Proposto

Seja $K(n,2)$ um grafo de Kneser,

1. Faça o desenho $S_2(K_{\theta(K(n,2))}) = S_2(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1})$;

Desenho Proposto

Seja $K(n,2)$ um grafo de Kneser,

1. Faça o desenho $S_2(K_{\theta(K(n,2))}) = S_2(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1})$;
2. No desenho anterior para cada vértice $v_i \in K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$, $1 \leq i \leq 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$, substitua pelos $q = \omega(K(n,2)) = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ vértices correspondentes da clique de Berge C_i;

Desenho Proposto

Seja $K(n,2)$ um grafo de Kneser,

1. Faça o desenho $S_2(K_{\theta(K(n,2))}) = S_2(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1})$;
2. No desenho anterior para cada vértice $v_i \in K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$, $1 \leq i \leq 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$, substitua pelos $q = \omega(K(n,2)) = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ vértices correspondentes da clique de Berge C_i;
3. $\forall uv \in E(K(n,2))$ onde $u \in C_i$, $v \in C_j$, $i \neq j$, desenhamos a aresta uv na página de equivalente à página da aresta $u_i v_j$ no desenho $S_2(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1})$;

Desenho Proposto

Seja $K(n,2)$ um grafo de Kneser,

1. Faça o desenho $S_2(K_{\theta(K(n,2))}) = S_2(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil -1})$;
2. No desenho anterior para cada vértice $v_i \in K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil -1}$, $1 \leq i \leq 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil -1$, substitua pelos $q = \omega(K(n,2)) = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ vértices correspondentes da clique de Berge C_i;
3. $\forall uv \in E(K(n,2))$ onde $u \in C_i$, $v \in C_j$, $i \neq j$, desenhamos a aresta uv na página de equivalente à página da aresta $u_i v_j$ no desenho $S_2(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil -1})$;
4. Para cada clique de Berge C_i desenhamos um desenho em 1-página $K_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$, desenhando as arestas na página que possui menos arestas partindo de v_i no desenho $S_2(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil -1})$.

Exemplo de Execução do Algoritmo de Desenho

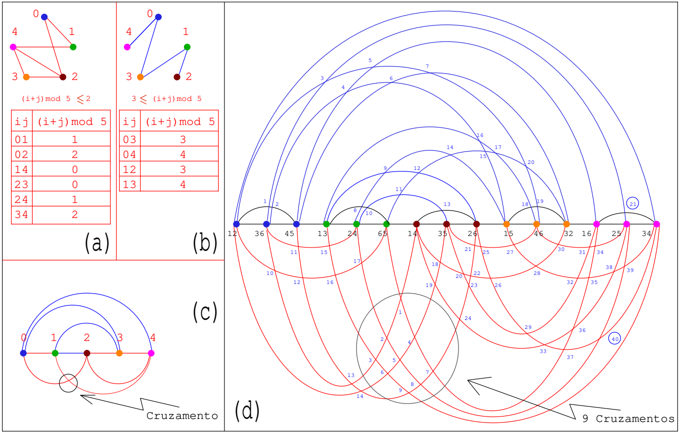


Figura: Desenho ótimo de K_5 em 2-páginas em (a) e (b). Desenho ótimo de K_5 em (c) obtido a partir do desenho em 2-páginas de (a) e (b). Desenho em 2-páginas de $K(6,2)$ em (d) obtido a partir de (c) pelo algoritmo com 61 cruzamentos.

Um Desenho do $K(6,2)$

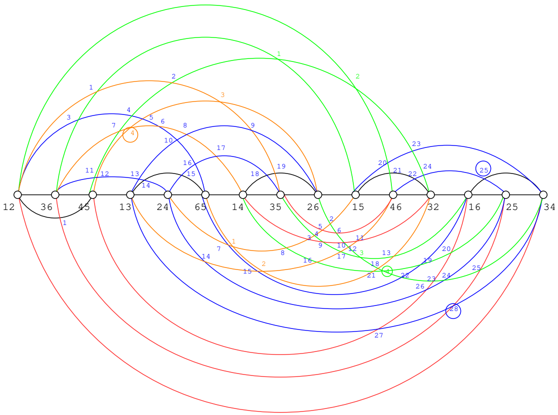


Figura: Desenho em 2-páginas de $K(6,2)$ com 61 cruzamentos.

Um Desenho do $K(8,2)$

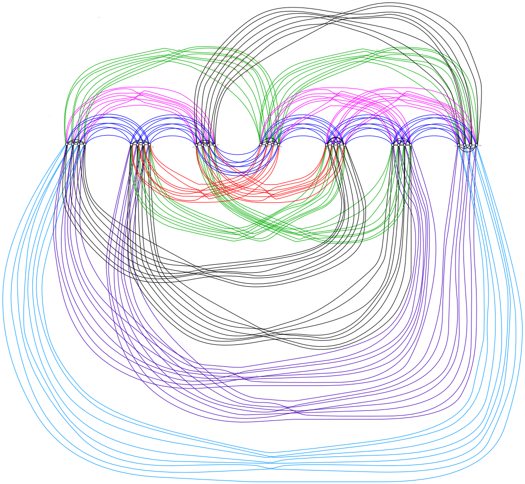


Figura: Desenho em 2-páginas de $K(8,2)$ com 2050 cruzamentos.

Contagem de cruzamentos do Desenho Proposto do $K(6,2)$

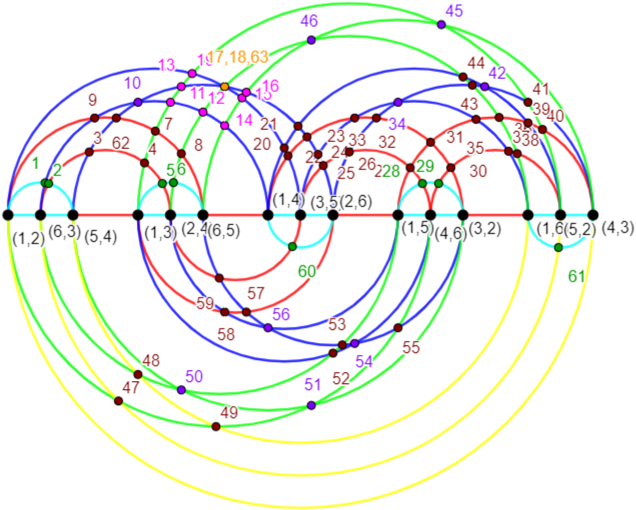


Figura: $K(6,2)$ com 63 cruzamentos.

Cálculo de Cruzamentos

Cálculo de Cruzamentos

Vamos dividir os cruzamentos das arestas do $K(n, 2)$ em 5 conjuntos $cr\left(K(n,2)\right) = cr_1(n) + cr_2(n) + cr_3(n) + cr_4(n) + cr_5(n)$

Cálculo de Cruzamentos

Vamos dividir os cruzamentos das arestas do $K(n,2)$ em 5 conjuntos $cr\left(K(n,2)\right) = cr_1(n) + cr_2(n) + cr_3(n) + cr_4(n) + cr_5(n)$

1. $cr_1(n)$: Cruzamentos herdados do $K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$;

Cálculo de Cruzamentos

Vamos dividir os cruzamentos das arestas do $K(n,2)$ em 5 conjuntos $cr\left(K(n,2)\right) = cr_1(n) + cr_2(n) + cr_3(n) + cr_4(n) + cr_5(n)$

1. $cr_1(n)$: Cruzamentos herdados do $K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$;
2. $cr_2(n)$: Cruzamentos internos da clique C_i;

Cálculo de Cruzamentos

Vamos dividir os cruzamentos das arestas do $K(n, 2)$ em 5 conjuntos $cr\left(K(n,2)\right) = cr_1(n) + cr_2(n) + cr_3(n) + cr_4(n) + cr_5(n)$

1. $cr_1(n)$: Cruzamentos herdados do $K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$;
2. $cr_2(n)$: Cruzamentos internos da clique C_i;
3. $cr_3(n)$: Cruzamentos entre as arestas internas de um C_i com as outras arestas;

Cálculo de Cruzamentos

Vamos dividir os cruzamentos das arestas do $K(n,2)$ em 5 conjuntos $cr(K(n,2)) = cr_1(n) + cr_2(n) + cr_3(n) + cr_4(n) + cr_5(n)$

1. $cr_1(n)$: Cruzamentos herdados do $K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$;
2. $cr_2(n)$: Cruzamentos internos da clique C_i;
3. $cr_3(n)$: Cruzamentos entre as arestas internas de um C_i com as outras arestas;
4. $cr_4(n)$: Cruzamentos entre as arestas que ligam 2 cliques C_i e $C_j, i \neq j$;

Cálculo de Cruzamentos

Vamos dividir os cruzamentos das arestas do $K(n,2)$ em 5 conjuntos $cr\left(K(n,2)\right) = cr_1(n) + cr_2(n) + cr_3(n) + cr_4(n) + cr_5(n)$

1. $cr_1(n)$: Cruzamentos herdados do $K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$;
2. $cr_2(n)$: Cruzamentos internos da clique C_i;
3. $cr_3(n)$: Cruzamentos entre as arestas internas de um C_i com as outras arestas;
4. $cr_4(n)$: Cruzamentos entre as arestas que ligam 2 cliques C_i e $C_j, i \neq j$;
5. $cr_5(n)$: Cruzamentos entre as arestas que ligam a clique C_i a C_j com as arestas que ligam C_i a uma clique C_k $i \neq j, i \neq k, k \neq j$.

Tabela com $cr_1(n), cr_2(n), cr_3(n), cr_4(n), cr_5(n), cr(n)$

:

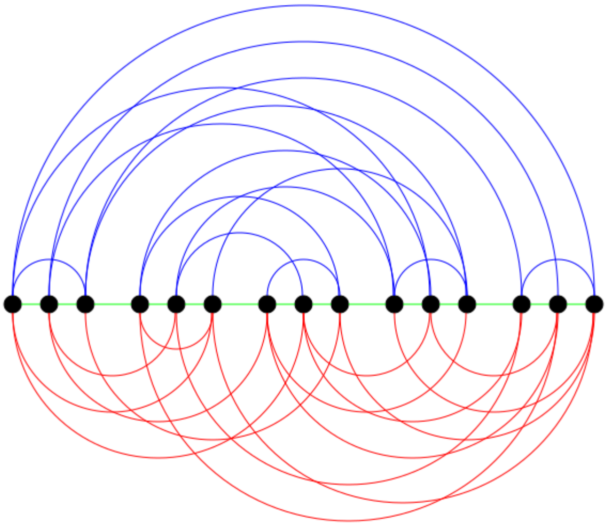
Tabela com $cr_1(n), cr_2(n), cr_3(n), cr_4(n), cr_5(n), cr(n)$

:

n	$cr_1(n)$	$cr_2(n)$	$cr_3(n)$	$cr_4(n)$	$cr_5(n)$	$cr(n)$
6	9	0	8	10	36	63
7	144	0	24	33	243	444
8	576	7	144	175	1080	1982
9	2916	9	308	380	3396	7009
10	8100	45	1020	1224	10080	20469
11	25600	55	1725	2140	23000	52520
12	57600	165	4320	5280	54000	121365
13	140625	195	6326	8160	103060	258366
14	275625	455	13300	17030	207900	514310
15	571536	525	18719	24325	353596	968701
16	1016064	1050	34944	45255	642096	1739409
17	1882384	1190	46640	61208	1008134	2999556
18	3111696	2142	79968	104720	1693440	4991966
19	5308416	2394	101535	136080	2506239	8054664
20	8294400	3990	163200	218424	3965760	12645774

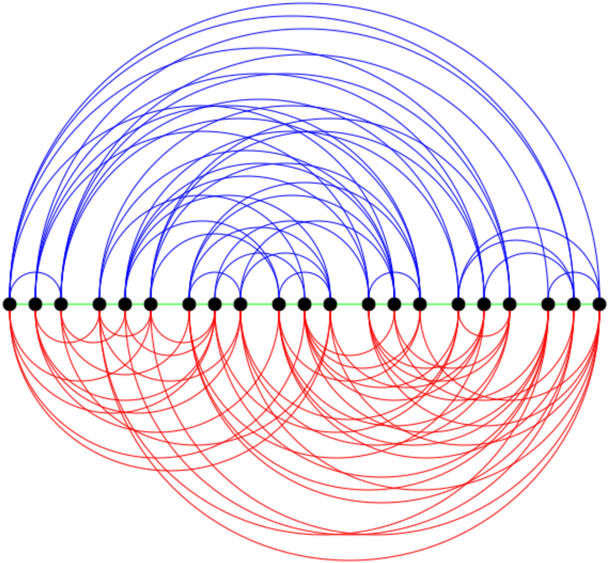
Desenho em 2-páginas de $K(6,2)$

Desenho em 2-páginas de $K(6, 2)$



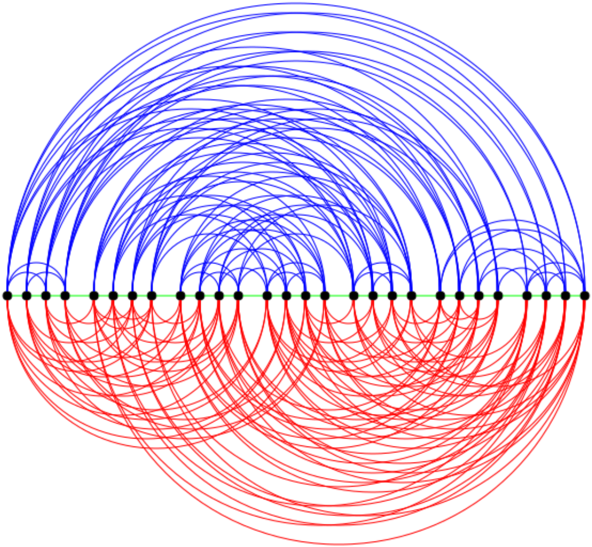
Desenho em 2-páginas de $K(7,2)$

Desenho em 2-páginas de $K(7, 2)$



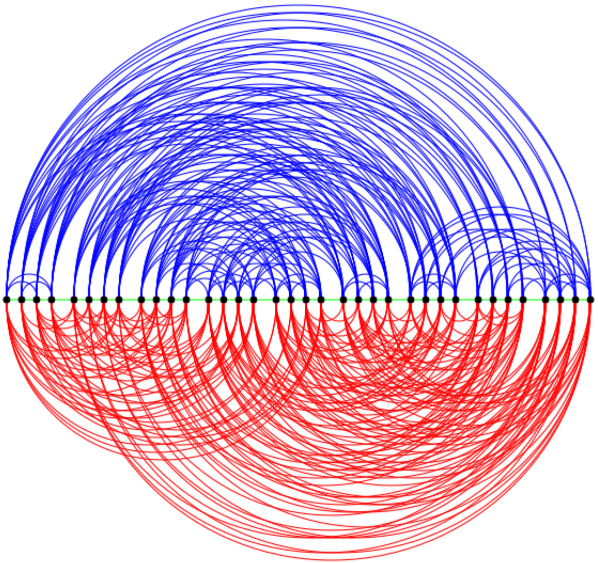
Desenho em 2-páginas de $K(8,2)$

Desenho em 2-páginas de $K(8,2)$



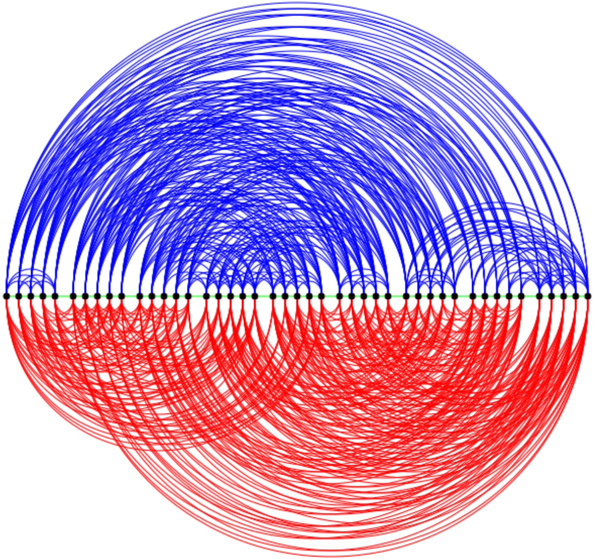
Desenho em 2-páginas de $K(9,2)$

Desenho em 2-páginas de $K(9,2)$



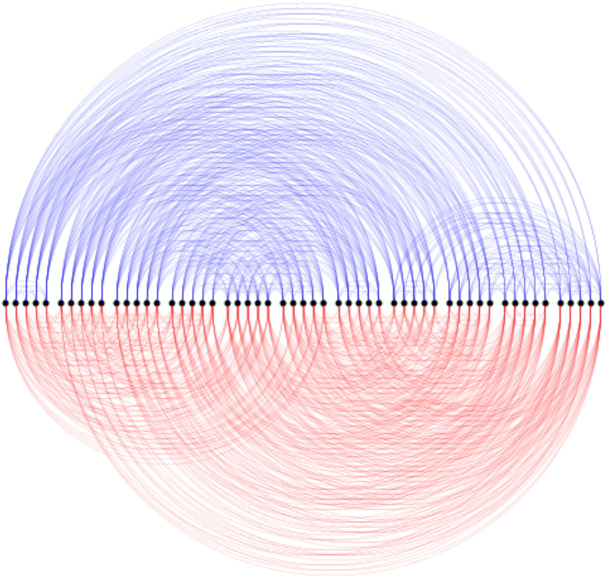
Desenho em 2-páginas de $K(10, 2)$

Desenho em 2-páginas de $K(10,2)$



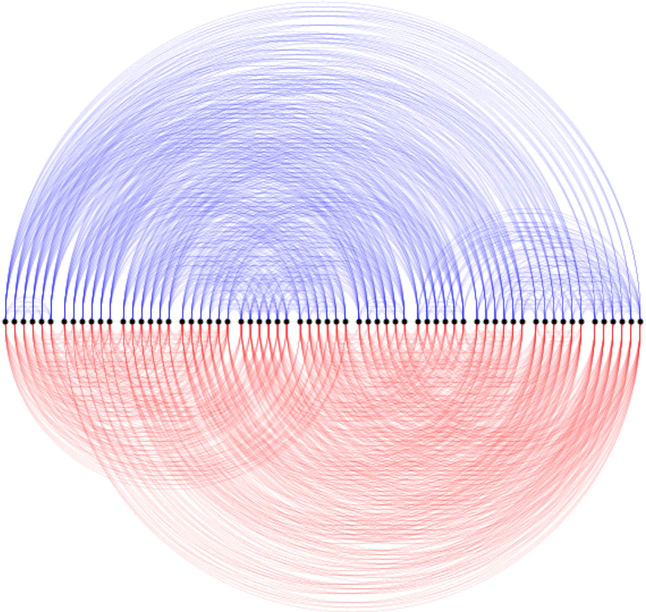
Desenho em 2-páginas de $K(11, 2)$

Desenho em 2-páginas de $K(11, 2)$



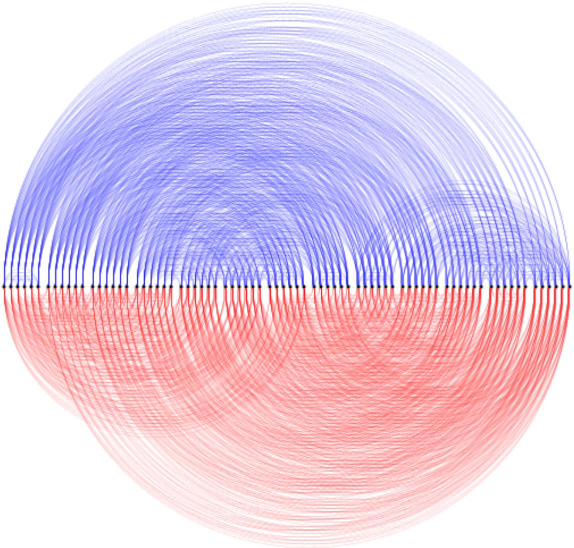
Desenho em 2-páginas de $K(12,2)$

Desenho em 2-páginas de $K(12,2)$



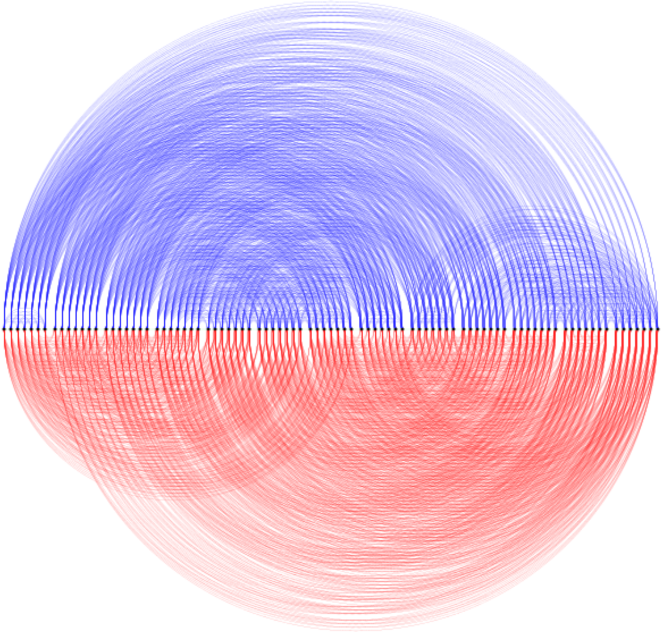
Desenho em 2-páginas de $K(13, 2)$

Desenho em 2-páginas de $K(13, 2)$



Desenho em 2-páginas de $K(14, 2)$

Desenho em 2-páginas de $K(14, 2)$



Caso n par

Caso n par

Teorema

$cr_1(n) = \frac{q^2(q-1)^2(q-2)^4}{4}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Caso n par

Teorema

$cr_1(n) = \frac{q^2(q-1)^2(q-2)^4}{4}$, onde $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

Se $n \leq 7$ então $cr_2(n) = 0$.

Caso n par

Teorema

$cr_1(n) = \frac{q^2(q-1)^2(q-2)^4}{4}$, onde $n = 2q \geq 6$, $q \in \mathbb{N}$.

Teorema

Se $n \leq 7$ então $cr_2(n) = 0$.

Teorema

$cr_2(n) = (n-1)\binom{q}{4} = \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q-1)}{24}$, onde $n = 2q \geq 8$, $q \in \mathbb{N}$.

Caso n par

Teorema

$cr_1(n) = \frac{q^2(q-1)^2(q-2)^4}{4}$, onde $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

Se $n \leq 7$ então $cr_2(n) = 0$.

Teorema

$cr_2(n) = (n-1)\binom{q}{4} = \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q-1)}{24}$, onde $n = 2q \geq 8, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

$cr_3(n) = \frac{q(q-1)^3(q-2)^2}{3}$, onde $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Caso n par

Teorema

$cr_1(n) = \frac{q^2(q-1)^2(q-2)^4}{4}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

Se $n \leq 7$ *então* $cr_2(n) = 0$.

Teorema

$cr_2(n) = (n-1)\binom{q}{4} = \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q-1)}{24}$, *onde* $n = 2q \geq 8, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

$cr_3(n) = \frac{q(q-1)^3(q-2)^2}{3}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

$cr_4(n) \leq \frac{q(q-1)(2q-1)(q^3-2q^2-7q+16)}{4}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Caso n par

Teorema

$cr_1(n) = \frac{q^2(q-1)^2(q-2)^4}{4}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

Se $n \leq 7$ *então* $cr_2(n) = 0$.

Teorema

$cr_2(n) = (n-1)\binom{q}{4} = \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q-1)}{24}$, *onde* $n = 2q \geq 8, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

$cr_3(n) = \frac{q(q-1)^3(q-2)^2}{3}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

$cr_4(n) \leq \frac{q(q-1)(2q-1)(q^3-2q^2-7q+16)}{4}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

$cr_5(n) = \frac{q(q-1)^3(q-2)^2(2q-3)}{2}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Caso n ímpar

Caso n ímpar

Teorema

$cr_1(n) = \frac{q^2(q-1)^6}{4}$, *onde* $n = 2q + 1 \geq 7, q \in \mathbb{N}$.

Caso n ímpar

Teorema

$cr_1(n) = \frac{q^2(q-1)^6}{4}$, onde $n = 2q + 1 \geq 7, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

Se $n \leq 7$ então $cr_2(n) = 0$.

Caso n ímpar

Teorema

$cr_1(n) = \frac{q^2(q-1)^6}{4}$, onde $n = 2q+1 \geq 7, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

Se $n \leq 7$ então $cr_2(n) = 0$.

Teorema

$cr_2(n) = \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q+1)}{24}$, onde $n = 2q+1 \geq 9, q \in \mathbb{N}$.

Caso n ímpar

Teorema

$cr_1(n) = \frac{q^2(q-1)^6}{4}$, *onde* $n = 2q+1 \geq 7, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

Se $n \leq 7$ *então* $cr_2(n) = 0$.

Teorema

$cr_2(n) = \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q+1)}{24}$, *onde* $n = 2q+1 \geq 9, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

$cr_3(n) \leq \frac{q^3(q+1)(q-1)^2}{3}$, *onde* $n = 2q+1 \geq 7, q \in \mathbb{N}$.

Caso n ímpar

Teorema
$cr_1(n) = \frac{q^2(q-1)^6}{4}$, *onde* $n = 2q+1 \geq 7, q \in \mathbb{N}$.

Teorema
Se $n \leq 7$ *então* $cr_2(n) = 0$.

Teorema
$cr_2(n) = \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q+1)}{24}$, *onde* $n = 2q+1 \geq 9, q \in \mathbb{N}$.

Teorema
$cr_3(n) \leq \frac{q^3(q+1)(q-1)^2}{3}$, *onde* $n = 2q+1 \geq 7, q \in \mathbb{N}$.

Teorema
$cr_4(n) \leq \frac{(q+1)(q)(2q)(q^3+q^2+12)}{4}$, *onde* $n = 2q+1 \geq 7, q \in \mathbb{N}$.

Caso n ímpar

Teorema

$cr_1(n) = \frac{q^2(q-1)^6}{4}$, *onde* $n = 2q+1 \geq 7, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

Se $n \leq 7$ *então* $cr_2(n) = 0$.

Teorema

$cr_2(n) = \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q+1)}{24}$, *onde* $n = 2q+1 \geq 9, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

$cr_3(n) \leq \frac{q^3(q+1)(q-1)^2}{3}$, *onde* $n = 2q+1 \geq 7, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

$cr_4(n) \leq \frac{(q+1)(q)(2q)(q^3+q^2+12)}{4}$, *onde* $n = 2q+1 \geq 7, q \in \mathbb{N}$.

Teorema

$cr_5(n) \leq \frac{q^3(q+1)(q-1)^2(2q-1)}{2}$ $n = 2q+1 \geq 7$.

Limite Superior

Limite Superior

Teorema

Se $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$, *então*
$\nu_2(K(n,2)) \leq \frac{6q^8 - 36q^7 + 62q^6 + 84q^5 - 563q^4 + 1034q^3 - 801q^2 + 214q}{24} =$
$\frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^8 3} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^7 3} + \frac{517n^3}{2^5 3} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^3 3}$.

Limite Superior

Teorema

Se $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$, *então*
$$\nu_2(K(n,2)) \leq \frac{6q^8-36q^7+62q^6+84q^5-563q^4+1034q^3-801q^2+214q}{24} = \frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^8 3} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^7 3} + \frac{517n^3}{2^5 3} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^3 3}.$$

Teorema

Se $n = 2q+1 \geq 6, q \in \mathbb{N}$, *então* $\nu_2(K(n,2)) \leq$
$$\frac{n^8}{2^{10}} + \frac{-3n^7}{2^8} + \frac{79n^6}{2^8 \cdot 3} + \frac{-421n^5}{2^8 \cdot 3} + \frac{2603n^4}{2^9 \cdot 3} + \frac{-4219n^3}{2^8 \cdot 3} + \frac{2759n^2}{2^8 \cdot 3} + \frac{-2711n}{2^8 \cdot 3} + \frac{4723}{2^{10} \cdot 3}.$$

Limite Inferior

Limite Inferior

Definição

Um Multigrafo M é um grafo tal que pode existir mais que 1 arestas entre 2 vértices.

Limite Inferior

Definição

Um Multigrafo M é um grafo tal que pode existir mais que 1 arestas entre 2 vértices.

Teorema (Szekely'1997)

Se M é um multigrafo com n vértices, m arestas e entre cada par de vértices existem exatamente k arestas, então $\nu(M) \geq \frac{m^3}{64n^2k}$.

Limite Inferior

Definição

Um Multigrafo M é um grafo tal que pode existir mais que 1 arestas entre 2 vértices.

Teorema (Szekely'1997)

Se M é um multigrafo com n vértices, m arestas e entre cada par de vértices existem exatamente k arestas, então $\nu(M) \geq \frac{m^3}{64n^2k}$.

Teorema

Se $n \in \mathbb{N}^*$, então $\nu\big(K(n,2)\big) \geq \frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9}$.

Limite Inferior

Definição

Um Multigrafo M é um grafo tal que pode existir mais que 1 arestas entre 2 vértices.

Teorema (Szekely'1997)

Se M é um multigrafo com n vértices, m arestas e entre cada par de vértices existem exatamente k arestas, então $\nu(M) \geq \frac{m^3}{64n^2k}$.

Teorema

Se $n \in \mathbb{N}^*$, então $\nu\big(K(n,2)\big) \geq \frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9}$.

Corolário

$\nu(K(n,2)) = \Omega(|V(K(n,2)|^4) = \Omega(n^8)$ e o termo líder para o limite inferior é 2^{-13}.

Valores Assintóticos do Limite Superior para n par

Valores Assintóticos do Limite Superior para n par

Corolário

$\nu_2(K(n,2)) = O(n^8) = O(|V(K(n,2))|^4)$ com o termo líder $\ell = 2^{-10}$, onde $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Valores Assintóticos do Limite Superior para n par

Corolário

$\nu_2(K(n,2)) = O(n^8) = O(|V(K(n,2))|^4)$ *com o termo líder* $\ell = 2^{-10}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Corolário

$\nu_2(K(n,2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n,2))|^4)$ *com o termo líder é* $2^{-13} \leq \ell \leq 2^{-10}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Valores Assintóticos do Limite Superior para n par

Corolário

$\nu_2(K(n,2)) = O(n^8) = O(|V(K(n,2))|^4)$ *com o termo líder* $\ell = 2^{-10}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Corolário

$\nu_2(K(n,2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n,2))|^4)$ *com o termo líder é* $2^{-13} \leq \ell \leq 2^{-10}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Corolário

$\nu(K(n,2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n,2))|^4)$ *com o termo líder é* $2^{-13} \leq \ell \leq 2^{-10}$, *onde* $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Valores Assintóticos do Limite Superior para n ímpar

Valores Assintóticos do Limite Superior para n ímpar

Corolário

$\nu_2(K(n,2)) = O(n^8) = O(|V(K(n,2))|^4)$ com o termo líder $\ell = 2^{-10}$, onde $n = 2q+1 \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Valores Assintóticos do Limite Superior para n ímpar

Corolário

$\nu_2(K(n,2)) = O(n^8) = O(|V(K(n,2))|^4)$ *com o termo líder* $\ell = 2^{-10}$, *onde* $n = 2q+1 \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Corolário

$\nu_2(K(n,2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n,2))|^4)$ *com o termo líder é* $2^{-13} \leq \ell \leq 2^{-10}$, *onde* $n = 2q+1 \geq 6, q \in \mathbb{N}$.

Valores Assintóticos do Limite Superior para n ímpar

Corolário

$\nu_2(K(n,2)) = O(n^8) = O(|V(K(n,2))|^4)$ *com o termo líder* $\ell = 2^{-10}$*, onde* $n = 2q+1 \geq 6, q \in \mathbb{N}$*.*

Corolário

$\nu_2(K(n,2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n,2))|^4)$ *com o termo líder é* $2^{-13} \leq \ell \leq 2^{-10}$*, onde* $n = 2q+1 \geq 6, q \in \mathbb{N}$*.*

Corolário

$\nu(K(n,2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n,2))|^4)$ *com o termo líder é* $2^{-13} \leq \ell \leq 2^{-10}$*, onde* $n = 2q+1 \geq 6, q \in \mathbb{N}$*.*

Sintese dos Resultados

Sintese dos Resultados

Teorema

Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 6$, então:

1. *Para n par:*
$$\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq \nu(K(n,2)) \leq \nu_2(K(n,2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^8 3} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^7 3} + \frac{517n^3}{2^5 3} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^3 3}.$$
2. *Para n ímpar:*
$$\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq \nu(K(n,2)) \leq \nu_2(K(n,2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} + \frac{-3n^7}{2^8} + \frac{79n^6}{2^8 \cdot 3} + \frac{-421n^5}{2^8 \cdot 3} + \frac{2603n^4}{2^9 \cdot 3} + \frac{-4219n^3}{2^8 \cdot 3} + \frac{2759n^2}{2^8 \cdot 3} + \frac{-2711n}{2^8 \cdot 3} + \frac{4723}{2^{10} \cdot 3}.$$

Sintese dos Resultados

Teorema

Seja $n \in \mathbb{N}$ *com* $n \geq 6$, *então:*

1. *Para n par:*
$\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq \nu(K(n,2)) \leq \nu_2(K(n,2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^8 3} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^7 3} + \frac{517n^3}{2^5 3} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^3 3}$.
2. *Para n ímpar:*
$\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq \nu(K(n,2)) \leq \nu_2(K(n,2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} + \frac{-3n^7}{2^8} + \frac{79n^6}{2^8 \cdot 3} + \frac{-421n^5}{2^8 \cdot 3} + \frac{2603n^4}{2^9 \cdot 3} + \frac{-4219n^3}{2^8 \cdot 3} + \frac{2759n^2}{2^8 \cdot 3} + \frac{-2711n}{2^8 \cdot 3} + \frac{4723}{2^{10} \cdot 3}$.

Teorema

Seja $n \in \mathbb{N}$ *com* $n \geq 6$, *então:*

1. $\nu_2(K(n,2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n,2))|^4)$ *com o termo líder é* $2^{-13} \leq \ell \leq 2^{-10}$;
2. $\nu(K(n,2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n,2))|^4)$ *com o termo líder é* $2^{-13} \leq \ell \leq 2^{-10}$.

Conclusão

1. Foi construido um desenho em 2-páginas de $K(n,2)$.
2. Foi obtido um limite superior e inferior para o número de cruzamentos em 2-páginas do grafo Kneser $K(n,2)$.
3. Assintoticamente obtivemos $\nu(K(n,2))$ e $\nu_2(K(n,2))$ com valor $\Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n,2))|^4)$ com o termo líder 2^{-13} para o limite inferior e 2^{-10} para o limite superior.
4. Foi implementado em linguagem python um algoritmo que conta o número de cruzamentos para o desenho em 2-páginas proposto e outro que retorna a imagem .png desse desenho.
5. Foi implementado o Algoritmo de Slope e Berge em linguagem python
6. As implementações descritas retornaram tabelas e imagens .png .

Trabalhos Futuros

1. Determinar o valor exato para a função $cr_4(n)$ em nosso desenho para n par;
2. Determinar o valor exato para as funções $cr_3(n)$, $cr_4(n)$ e $cr_5(n)$ em nosso desenho para n ímpar;
3. Determinar de $\nu(K(n,k))$ com $k \geq 3$.