

**Universidade do Estado do Rio de Janeiro Instituto de  
Matemática e Estatística**

**António David Reis de Sousa**

Rio de Janeiro

2023

**António David Reis de Sousa**

**Limite para o Número de Cruzamentos em  
2-páginas de um grafo de Kneser  $K(n, 2)$**

Monografia submetida ao corpo docente do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Bacharelado em Ciência da Computação da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.  
Área de concentração: Teoria dos Grafos.

Orientador: Prof. Dr. Luerbio Faria

Rio de Janeiro

2023

**António David Reis de Sousa**

**Limite para o Número de Cruzamentos em  
2-páginas de um grafo de Kneser  $K(n, 2)$**

Monografia submetida ao corpo docente do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Bacharelado em Ciência da Computação da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.  
Área de concentração: Teoria dos Grafos.

Banca examinadora:

Lucila Maria de Souza Bento

Luerbio Faria

Bruno Porto Masquio

Diana Sasaki Nóbrega

Rio de Janeiro

2023

## Agradecimentos

Agradeço principalmente ao professor Luerbio Faria, pelas aulas que ministrou de Teoria da Computação e de Teoria dos Grafos, sendo esta última com base teorica excelente. Agradeço pelo apoio que na pesquisa sobre número de cruzamentos do grafo Kneser  $K(n, 2)$  durante a iniciação científica.

Agradeço a Jonas Carvalho pelo trabalho anteriormente desenvolvido do Algoritmo Exaustivo para os grafos de Kneser, e pelo limite inferior anteriormente obtido para o número de cruzamentos do grafo de Kneser e a Mario Pabon pelo desenvolvimento das bases do Algoritmo de Berge, que permitiu dividir um grafo  $K(n, 2)$  em uma cobertura de cliques de modo a formar um ciclo hamiltoniano.

Quero agradecer também ao professor Paulo Eustáquio pelas aulas da disciplina Algoritmos e Estrutura de Dados II, em particular à metodologia com que dava a aula, às aulas de treinamento para maratonas de programação, ao curso de C++ STL e ao livro *Teoria Computacional de Grafos - Jayme Luiz Szwarcfiter*, que recebi da parte dele.

## Resumo

O *grafo de Kneser*  $K(n, k)$  é o *grafo* cujos vértices são subconjuntos de  $k$  elementos de um conjunto de  $n$  elementos e dois vértices, associados com os subconjuntos  $A$  e  $B$  respectivamente, possuem *aresta* entre si se  $A \cap B = \emptyset$ .  $D(G)$  é um *desenho no plano* de  $G = (V, E)$  se é uma representação dos vértices e arestas de  $G$  no plano. O *número de cruzamentos*  $\nu(G)$  de  $G$  é o menor número de interseções possível em um *desenho no plano* de  $G$ . Dados os semiplanos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \subset \mathbb{R}^3$  não paralelos dois a dois, chamados de *páginas*, uma reta  $r = \alpha_1 \cap \dots \cap \alpha_k$  chamada de *espinha*. Um *desenho* de  $G = (V, E)$  em  $k$ -*páginas* é um *desenho* onde os vértices de  $V$  são desenhados em  $r$  e cada *aresta* de  $E$  é desenhada inteiramente em uma única página  $\alpha_i$ . O *número de cruzamentos em k-páginas*  $\nu_k(G)$  de  $G$  é o menor número de interseções em um *desenho em k-páginas* de  $G$ . Neste trabalho nós provamos  $\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq \nu(K(n, 2)) \leq \nu_2(K(n, 2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^8 \cdot 3} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^7 \cdot 3} + \frac{517n^3}{2^5 \cdot 3} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^3 \cdot 3}$  para  $n$  par e  $\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq \nu(K(n, 2)) \leq \nu_2(K(n, 2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} + \frac{-3n^7}{2^8} + \frac{79n^6}{2^8 \cdot 3} + \frac{-421n^5}{2^8 \cdot 3} + \frac{2603n^4}{2^9 \cdot 3} + \frac{-4219n^3}{2^8 \cdot 3} + \frac{2759n^2}{2^8 \cdot 3} + \frac{-2711n}{2^8 \cdot 3} + \frac{4723}{2^{10} \cdot 3}$  para  $n$  ímpar. Finalmente, obtivemos o valor assintótico  $\nu(K(n, 2)) = \nu_2(K(n, 2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n, 2))|^4)$  com o termo líder é  $2^{-13} \leq \ell \leq 2^{-10}$ .

**Palavras-chave:** Crossing number, Grafos de Kneser, Teoria dos Grafos

## Abstract

The *Kneser graph*  $K(n, k)$  is the *graph* whose *vertices* are subsets of  $k$  elements from a set of  $n$  elements and two *vertices*, associated with the subsets  $A$  and  $B$  respectively, have *edge* between them if  $A \cap B = \emptyset$ .  $D(G)$  is a *drawing in plane* of  $G = (V, E)$  if it is a representation of *vertices* and *edges* of  $G$  in the plane. The *crossing number*  $\nu(G)$  of  $G$  is the minimum number of interceptions possible in a *drawing in the plane* of  $G$ . Given the half-planes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \subset \mathbb{R}^3$  not-parallel two by two, called *pages*, a straight line  $r = \alpha_1 \cap \dots \cap \alpha_k$  called *spine*. A *drawing* of  $G = (V, E)$  in  $k$ -*pages* is a *drawing* where the *vertices* of  $V$  are drawn in  $r$  and each *edge* of  $E$  is drawn entirely on a single page  $\alpha_i$ . The *crossing number in k-pages*  $\nu_k(G)$  of  $G$  is the minimum number of interceptions in a *drawing in k-pages* of  $G$ . In this paper we proof  $\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq \nu(K(n, 2)) \leq \nu_2(K(n, 2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^8 \cdot 3} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^7 \cdot 3} + \frac{517n^3}{2^5 \cdot 3} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^3 \cdot 3}$  for  $n$  even and  $\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq \nu(K(n, 2)) \leq \nu_2(K(n, 2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} + \frac{-3n^7}{2^8} + \frac{79n^6}{2^8 \cdot 3} + \frac{-421n^5}{2^8 \cdot 3} + \frac{2603n^4}{2^9 \cdot 3} + \frac{-4219n^3}{2^8 \cdot 3} + \frac{2759n^2}{2^8 \cdot 3} + \frac{-2711n}{2^8 \cdot 3} + \frac{4723}{2^{10} \cdot 3}$  for  $n$  odd. Finally, we obtained the asymptotic value  $\nu(K(n, 2)) = \nu_2(K(n, 2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n, 2))|^4)$  and the leading term is  $2^{-13} \leq \ell \leq 2^{-10}$ .

**Keywords:** Crossing number, Kneser graph, Graph Theory

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>21</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentos de Teoria dos Grafos</b>	<b>26</b>
2.1	Conceitos Básicos . . . . .	26
2.2	Número de Cruzamentos . . . . .	77
2.3	Grafo de Kneser . . . . .	109
<b>3</b>	<b>Algoritmos</b>	<b>126</b>
3.1	Algoritmo Exaustivo . . . . .	126
3.2	Algoritmo de Slope . . . . .	129
3.2.1	Desenhos em 2-páginas do $K_n$ . . . . .	133
3.3	Algoritmo de Berge . . . . .	136
3.3.1	Tabelas do Algoritmo de Berge . . . . .	144
<b>4</b>	<b>Limite de <math>\nu_2(K(n, 2))</math></b>	<b>146</b>
4.1	Um Desenho do $K(n, 2)$ . . . . .	146
4.1.1	Tabela com Resultados da Implementação . . . . .	151
4.2	Cálculo de cruzamentos do Desenho . . . . .	151
4.2.1	Cálculo de $cr_1(n)$ para $n \geq 6$ . . . . .	152
4.2.2	Cálculo do $cr_2(n)$ para $n \geq 6$ . . . . .	153
4.2.3	Cálculo de $cr_3(n)$ para $n \geq 6$ par . . . . .	153
4.2.4	Cálculo de $cr_5(n)$ para $n \geq 6$ par . . . . .	157
4.3	Limite inferior e superior para $\nu_2(K(n, 2))$ . . . . .	160
4.3.1	Limite inferior para $\nu_2(K(n, 2))$ . . . . .	161
4.3.2	Limite superior para $\nu_2(K(n, 2))$ . . . . .	162

<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>171</b>
----------	------------------	------------

<b>6</b>	<b>Apêndice</b>	<b>178</b>
----------	-----------------	------------

6.1	Implementação do Algoritmo de Berge . . . . .	178
6.2	Implementação do Algoritmo de Slope . . . . .	179
6.3	Implementação do Algoritmo Contador de Cruzamentos . . . . .	182
6.4	Implementação do Algoritmo de Desenho . . . . .	185
6.5	Desenhos do $K(n, 2)$ em 2-páginas . . . . .	191

## **Lista de Figuras**

1	Exemplos de <i>grafos simples</i> . . . . .	27
2	<i>Digrafos</i> . . . . .	27
3	<i>Digrafos</i> . . . . .	28
4	Um <i>multigrafo</i> sem <i>laços</i> (à esquerda) e um <i>multigrafo</i> com <i>laço</i> (à direita). . . . .	28
5	Um <i>hipergrafo</i> . As <i>hiperarestas</i> são $e_i$ com $1 \leq i \leq 8$ , e os <i>hipervértices</i> são $v_j$ com $1 \leq j \leq 15$ . . . . .	29
6	Representação do <i>hipergrafo</i> da Figura 5 como um <i>grafo</i> . . . . .	29
7	Um <i>grafo 4-regular</i> . . . . .	31
8	<i>Grafo G</i> (lado esquerdo) seguido de um <i>subgrafo</i> e um <i>subgrafo induzido</i> a partir do subconjunto de vértices $\{A, B, C\}$ . . . . .	32
9	O <i>Grafo de Petersen</i> à esquerda e Julius Petersen à direita. . . . .	32
10	Leonard Euler. . . . .	33
11	Observe que $(1, 2, 3, 4, 5, 2, 4, 1)$ é uma <i>trilha fechada</i> e percorre todos os vértices do <i>grafo</i> . Logo, é uma <i>trilha euleriana</i> . . . . .	34

12	7 pontes de Königsberg e o <i>multigrafo</i> correspondente.	35
13	<i>Grafos isomorfos.</i> As cores de cada <i>grafo</i> indicam o <i>isomorfismo</i> .	36
14	Grafos Isomorfos.	36
15	<i>Grafos Isomorfos.</i>	37
16	<i>Grafos Isomorfos.</i>	37
17	Grafo $G$ (lado esquerdo) seguido do Grafo complementar $\overline{G}$ .	38
18	Grafo $G$ e $\overline{G}$ . É fácil ver que $G$ é <i>autocomplementar</i> , pois $G$ é <i>isomorfo</i> a $\overline{G}$ .	39
19	Grafo $G$ e $\overline{G}$ . É fácil ver que $G$ é <i>autocomplementar</i> , pois $G$ é <i>isomorfo</i> a $\overline{G}$ .	39
20	Grafos Caminho $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ .	40
21	Grafos ciclo $C_3, C_4, C_5, C_6$ .	41
22	Grafos estrela $S_3, S_4, S_5, S_6$ . $S_3$ também é chamado de <i>garra</i> .	41
23	Grafos roda $W_3, W_4, W_5, W_6$ .	42
24	$K_{3,2}$	42
25	$K_8$ .	43
26	Grafos $0 - cubo, 1 - cubo, 2 - cubo, 3 - cubo$ e $4 - cubo$	44
27	Observe que um <i>grafo</i> $n - cubo$ pode ser representado como um cubo em $n$ dimensões:	
	0 – cubo é a representação do cubo em 0 dimensões;	
	1 – cubo é a representação do cubo em 1 dimensões;	
	2 – cubo é a representação do cubo em 2 dimensões;	
	3 – cubo é a representação do cubo em 3 dimensões;	
	4 – cubo é a representação do cubo em 4 dimensões.	45
28	$K_4$ e $L(K_4)$ .	46
29	William Rowan Hamilton.	46

30	Jogo Icosiano. . . . .	47
31	O grafo Dodecaedro é Hamiltoniano, com o Ciclo Hamiltoniano $1, 2, \dots, 20$ . .	48
32	<i>Grafo do Cavalo.</i> . . . . .	50
33	Movimento do Cavalo em um tabuleiro de xadrez $8 \times 8$ . . . . .	51
34	Exemplo de <i>ciclo Hamiltoniano</i> obtido pela Regra de Warnsdorff. . . . .	52
35	Observe que se permutamos $v_1$ com $w_1$ , podemos estabelecer um <i>isomorfismo</i> com $f(v_i) = w_i$ e $f(w_i) = v_i$ . . . . .	53
36	Se permutamos $v_i$ com $v_{((i+1) \bmod 5)+1}$ ou $w_i$ $w_{((i+1) \bmod 5)+1}$ com basta apenas estabelecer a relação analoga para outros vértices $v_j$ e $w_j$ . . . . .	54
37	O <i>grafo</i> da esquerda não é um <i>grafo aresta-transitivo</i> . Note pelos <i>grafos</i> do meio e da direita, removemos <i>arestas</i> diferentes e os <i>grafos</i> não são <i>isomorfos</i> . . . . .	55
38	O <i>grafo octaedro</i> na parte superior da imagem, é uma <i>grafo aresta-transitivo</i> . Note que retirando diferentes tipos de <i>arestas</i> geram <i>grafo isomorfos</i> . . . . .	56
39	Os conjuntos $\{A, D, E\}$ e $\{B, C\}$ são exemplos de <i>cliques</i> no <i>grafo</i> . Os conjuntos $\{A, C\}$ , $\{B, D\}$ e $\{E\}$ são exemplos de <i>conjuntos independentes</i> no <i>grafo</i> . No caso desse <i>grafo</i> $G$ temos $\omega(G) = 3$ e $\alpha(G) = 2$ . . . . .	57
40	Uma <i>cobertura de cliques</i> de um <i>grafo</i> $G$ . Cada cor representa uma clique da <i>cobertura de cliques</i> e $\theta(G) = 9$ . . . . .	59
41	O <i>grafo de Petersen</i> é 3-colorível, i.e., $\chi(G) = 3$ . . . . .	60
42	<i>Coloração de vértices</i> de um <i>grafo</i> sem <i>arestas</i> . Note que $\chi(G) = 1$ se e somente se $G$ é um <i>grafo</i> sem <i>arestas</i> . . . . .	61
43	<i>Coloração de vértices</i> de $K_3, K_4, K_5$ e $K_6$ . . . . .	61
44	<i>Coloração de vértices</i> de $W_3, W_4, W_5$ e $W_6$ . . . . .	62
45	<i>Coloração de vértices</i> de $P_2, P_3, P_4$ e $P_5$ . . . . .	63

46	<i>Coloração de vértices</i> de $S_3, S_4, S_5$ e $S_6$ . . . . .	63
47	<i>Coloração de vértices</i> de $K_{2,2}, K_{3,3}$ e $K_{3,4}$ . . . . .	63
48	<i>Coloração de vértices</i> de $Q_4$ . . . . .	64
49	<i>Coloração de vértices</i> de $C_3, C_4, C_5$ e $C_6$ . . . . .	65
50	Sudoku e a solução correspondente. . . . .	65
51	<i>Coloração</i> do Sudoku corresponde à solução da Figura 50. . . . .	66
52	À esquerda temos uma <i>cobertura de cliques</i> no grafo $G$ , onde cada cor nos vértices indica uma <i>clique</i> . Temos que $\theta(G) = 3$ . À direita temos a <i>coloração de vértices</i> de $\overline{G}$ . Temos que $\chi(\overline{G}) = 3$ . Podemos observar que a propriedade $\theta(G) = \chi(\overline{G})$ . . . . .	67
53	Observe que existe um algoritmo polinomial para testar se um <i>grafo</i> é 2-colorível. Basta escolher um vértice arbitrário e atribuir uma cor arbitrária, e tomar os vértices adjacentes que ainda não foram coloridos e atribuir uma cor diferente, e repetir o processo até terminar a <i>coloração</i> ou então ser verificada a impossibilidade de <i>colorir</i> o vértice com 2 cores. No primeiro caso temos um <i>grafo</i> que não é 2-colorível, e no segundo caso temos um <i>grafo</i> 2-colorível. Não é conhecido um algoritmo polinomial para obter uma $k$ - <i>coloração</i> de um <i>grafo</i> onde $k > 2$ . . . . .	68
54	O Grafo de Petersen é 4-aresta-colorível, i.e., $\chi'(G) = 4$ . . . . .	69
55	<i>Coloração de arestas</i> de $C_3, C_4, C_5$ e $C_6$ . . . . .	70
56	<i>Coloração de arestas</i> de $P_2, P_3, P_4$ e $P_5$ . . . . .	70
57	<i>Coloração de arestas</i> de $K_{2,2}, K_{3,3}$ e $K_{3,4}$ . . . . .	71
58	<i>Coloração de arestas</i> de $S_3, S_4, S_5$ e $S_6$ . . . . .	71
59	<i>Coloração de arestas</i> de $W_3, W_4, W_5$ e $W_6$ . . . . .	71

60	<i>Coloração de arestas de <math>K_3</math> e <math>K_5</math>.</i>	72
61	Emparelhamentos.	72
62	Um exemplo de <i>emparelhamento perfeito</i> (à esquerda) e um exemplo de <i>emparelhamento maximal</i> que não é <i>emparalhamento perfeito</i> .	73
63	Um <i>grafo</i> , um <i>fator</i> desse <i>grafo</i> e um <i>2-fator</i> desse <i>grafo</i> .	74
64	Exemplos de <i>grafos 1-fatoráveis</i> e cada cor representa um <i>1-fator</i> .	75
65	Exemplos de <i>grafos 2-fatoráveis</i> e cada cor representa um <i>2-fator</i> .	75
66	Problema das três casas.	77
67	Problema das três casas.	78
68	<i>2 desenhos no plano</i> do $K_4$ .	79
69	<i>Grafos tetraedro, hexaedro e octaedro</i> .	81
70	<i>Grafo dodecaedro</i> .	82
71	<i>Grafo icosaedro</i> .	82
72	Uma mapa colorido e o respectivo <i>grafo</i> e <i>coloração de vértices</i> correspondente.	83
73	Francis Guthrie.	84
74	Coloração com 4 cores de um mapa dos condados da Inglaterra.	85
75	Note que o <i>grafo</i> é <i>planar</i> e não possui triângulos. Logo, existe uma <i>3-coloração de vértices</i> para o <i>grafo</i> .	86
76	<i>Desenhos no plano</i> sem cruzamentos dos <i>grafos</i> $K_{3,2}$ e $K_4$ .	87
77	<i>Desenho no plano</i> do $K_{5,2}$ .	88
78	Casos possíveis de <i>desenhos no plano</i> do $K_{3,3}$ na coluna esquerda e do $K_5$ na coluna direita.	89
79	<i>Desenhos Ótimos</i> de $K_{3,3}$ e $K_5$ .	90
80	Um <i>grafo</i> $G$ e uma de suas respectivas <i>subdivisões</i> (lado direito).	91

81	Kazimierz Kuratowski. . . . .	91
82	Aplicação do Teorema de Kuratowski. Observe que o <i>grafo</i> possui uma <i>subdivisão</i> do $K_{3,3}$ . Logo, o <i>grafo</i> não é <i>planar</i> . . . . .	92
83	<i>Faces</i> de um <i>grafo planar</i> . Note que a <i>face</i> 5 corresponde à região que circula toda representação do <i>grafo</i> . . . . .	93
84	<i>Desenho em 3-páginas</i> do $K_5$ . $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são as <i>páginas</i> do <i>desenho</i> e a reta $r$ é a <i>espinha</i> . Observe que todos os <i>vértices</i> estão desenhados em $r$ e cada <i>aresta</i> é desenhada unicamente em um plano $\alpha_i$ com $1 \leq i \leq 3$ . O <i>desenho</i> só é possível tridimensionalmente, o que implica que este não é um <i>desenho plano</i> do $K_5$ . . .	96
85	A estrutura geométrica onde representa-se um <i>desenho em 3-páginas</i> . Note que a representação está em 3 dimensões. Os 3 semiplanos $\alpha_1, \alpha_2$ e $\alpha_3$ , cada um corresponde a uma <i>página</i> e uma <i>aresta</i> do <i>grafo</i> é desenhada em somente um único semiplano. A reta $r$ é a <i>espinha</i> e todos os <i>vértices</i> do <i>grafo</i> são desenhados nela. . . . .	96
86	<i>Desenho em 2-páginas ótimo</i> do <i>grafo de Petersen</i> . Como o <i>grafo de Petersen</i> é um <i>grafo de Kneser</i> $K(5, 2)$ , os <i>vértices</i> estão rotulados como subconjuntos de 2 elementos de um conjunto $\{1, 2, \dots, 5\}$ . . . . .	97
87	Pál Turán. . . . .	99
88	Trilhos. . . . .	100
89	Kazimierz Urbanik. . . . .	100
90	Kazimierz Zarankiewicz. . . . .	101
91	<i>Grafo</i> $K_{4,4}$ e o respectivo <i>desenho</i> definido pelo Algoritmo de Zarankiewicz. O <i>desenho</i> à direita possui $\left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{4-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{4-1}{2} \right\rfloor = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ <i>cruzamentos</i> e o <i>desenho</i> à esquerda possui 35 <i>cruzamentos</i> . . . . .	102

92	<i>Grafo <math>K_{4,5}</math> e o respectivo desenho definido pelo Algoritmo de Zarankiewicz. O desenho à direita possui <math>\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{5-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{4-1}{2} \right\rfloor = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8</math></i> cruzamentos e o desenho à esquerda possui 59 cruzamentos.	103
93	Richard Guy.	103
94	<i>Desenho em 2-páginas de <math>Q_0, Q_1, Q_2</math> seguindo o Algoritmo de Vr'to-Faria.</i>	106
95	<i>Desenho em 2-páginas de <math>Q_3</math> seguindo o Algoritmo de Vr'to-Faria.</i>	107
96	<i>Desenho em 2-páginas de <math>Q_4</math> seguindo o Algoritmo de Vr'to-Faria.</i>	108
97	Martin Kneser.	109
98	<i>Grafo de Kneser <math>K(5, 2)</math> - o grafo de Petersen, que possui 10 vértices, 15 arestas e cada vértice possui grau 3.</i>	111
99	Exemplo de grafos de Kneser com $k = 1$ . $K(1, 1)$ é isomoformo a $K_1$ , $K(2, 1)$ é isomoformo a $K_2$ , $K(3, 1)$ é isomoformo a $K_3$ e $K(4, 1)$ é isomoformo a $K_4$ .	112
100	Exemplo do grafo de Petersen $K(5, 3)$ . Como $2k > n$ temos que $K(5, 3)$ sem arestas.	113
101	O grafo de Petersen é um grafo não planar.	115
102	Remover uma aresta do grafo de Petersen produz um grafo não planar.	115
103	Após remover 2 arestas do grafo de Petersen temos como resultado um grafo planar.	116
104	<i>Desenho no plano do grafo de Petersen com 2 cruzamentos.</i>	117
105	<i>Coloração de vértices ótima do grafo de Kneser <math>K(6, 2)</math>.</i>	119
106	<i>Desenho em 2-páginas do grafo de Kneser <math>K(6, 2)</math> obtido pelo Algoritmo Exaus-</i> tivo, com a 45-tupla 00001 10011 10110 01110 01100 00010 00000 10000 10010.128	
107	As 64 6-tuplas possíveis de um $K_4$ .	129
108	$S_3(K_7)$ .	132

109	<i>Desenhos em 2-páginas</i> do $K_1, K_3, K_3$ obtidos pelo Algoritmo do Slope. . . . .	133
110	<i>Desenho em 2-páginas</i> do $K_4$ obtido pelo Algoritmo do Slope. . . . .	134
111	<i>Desenho em 2-páginas</i> do $K_5$ obtido pelo Algoritmo do Slope. . . . .	134
112	<i>Desenho em 2-páginas</i> do $K_6$ obtido pelo Algoritmo do Slope. . . . .	134
113	<i>Desenho em 2-páginas</i> do $K_7$ obtido pelo Algoritmo do Slope. . . . .	135
114	<i>Desenho em 2-páginas</i> do $K_8$ obtido pelo Algoritmo do Slope. . . . .	135
115	<i>Ciclo Hamiltoniano</i> do $K(6, 2)$ . . . . .	141
116	<i>Desenho ótimo</i> de $K_5$ em 2-páginas em (a) e (b). <i>Desenho ótimo</i> de $K_5$ em (c) obtido a partir do <i>desenho em 2-páginas</i> de (a) e (b). <i>Desenho em 2-páginas</i> de $K(6, 2)$ em (d) obtido a partir de (c) pelo Algoritmo de Desenho com 63 cruzamentos. . . . .	147
117	$K(6, 2)$ com 63 cruzamentos. . . . .	148
118	<i>Desenho em 2-páginas</i> de $K(6, 2)$ com 63 cruzamentos. . . . .	149
119	<i>Desenho em 2-páginas</i> de $K(8, 2)$ com 1982 cruzamentos. . . . .	150
120	$\binom{n}{4}$ cruzamentos nos desenhos de 1-página de $K_2, K_3, K_4$ e $K_5$ e $\frac{(n-2)}{6}(n - 1)(n)$ cruzamentos com retas verticais. . . . .	157
121	<i>Malhas</i> com $p = 3, 4, 5$ vértices nas Figuras(a), (b) e (c) e <i>montes de arestas</i> $(r, s) = (2, 1)$ . <i>Malhas</i> com $p = 3, 4$ vértices nas Figuras(d) e (e) <i>montes de arestas</i> $(r, s) = (3, 1)$ . Finalmente em (f) temos a <i>malha</i> $(p, r, s) = (3, 2, 2)$ . Cada cor representa um <i>grupo de arestas</i> . . . . .	159
122	Dois vértices $ab, cd$ de $C_i$ com $ N_{C_j}(ab) \cap N_{C_j}(cd)  = q - 4$ (a), com $ N_{C_j}(ab) \cap N_{C_j}(cd)  = q - 3$ em (b) e (c), com $ N_{C_j}(ab) \cap N_{C_j}(cd)  = q - 2$ (d) e redução ao absurdo em (e) e (f) para provar que (d) não é possível. . . . .	162

123	Limite superior para - $cr_4(n)$ - o <i>número de cruzamentos</i> entre as <i>arestas</i> que ligam 2 <i>completos</i> $C_i$ e $C_j$ . O número 3 em ciano significa que a interseção da <i>vizinhança</i> entre os 2 vértices de $C_i$ tem tamanho $q - 3$ . O número 4 em vermelho significa que a interseção da <i>vizinhança</i> entre os 2 vértices de $C_i$ tem tamanho $q - 4$ .	163
124	$K(6, 2)$ .	192
125	$K(7, 2)$ .	193
126	$K(8, 2)$ .	194
127	$K(9, 2)$ .	195
128	$K(10, 2)$ .	196
129	$K(11, 2)$ .	197
130	$K(12, 2)$ .	198
131	$K(13, 2)$ .	199
132	$K(14, 2)$ .	200

## Listas de Tabelas

1	Valores para o <i>número de cruzamentos</i> $\nu_1(K_n)$ e $\nu_2(K_n)$ de $K_n$ .	105
2	Número de vértices do grafo $K(n, k)$ para $1 \leq k \leq 10$ e $k \leq n \leq 25$ .	120
3	Número de arestas do grafo $K(n, k)$ para $1 \leq k \leq 7$ e $k \leq n \leq 25$ .	121
4	Graus do grafo regular $K(n, k)$ para $1 \leq k \leq 10$ e $k \leq n \leq 25$ .	122
5	Valores para o <i>número de cobertura</i> de $K(n, k)$ com $1 \leq k \leq 10$ e $k \leq n \leq 25$ .	124
6	Valores para o <i>número de clique</i> de $K(n, k)$ com $1 \leq k \leq 10$ e $k \leq n \leq 25$ .	126
7	Atribuição de <i>emparalhamentos consecutivos</i> do $K_7$ nas páginas do desenho $S_3(K_7)$ .	131

8	Tabela que informa em que <i>página</i> fica uma <i>aresta</i> do $K_7$ no <i>desenho</i> $S_3(K_7)$ .	132
9	Saída de uma <i>clique máxima</i> de $K(n, 2)$ do Algoritmo de Berge.	137
10	Algoritmo de Berge para o caso $n$ par.	138
11	Algoritmo de Berge para o $K(8, 2)$ .	141
12	Algoritmo de Berge para o $K(8, 2)$ . Observe que se removermos os <i>vértices</i> com elemento 8, obtemos $K(7, 2)$ .	142
13	Remoção de <i>vértices</i> com elemento 8.	143
14	Algoritmo de Berge para o $K(7, 2)$ .	143
15	Algoritmo de Berge para $K(9, 2)$ .	144
16	Algoritmo de Berge para $K(10, 2)$ .	144
17	Algoritmo de Berge para $K(11, 2)$ .	144
20	Algoritmo de Berge para $K(14, 2)$ .	145
18	Algoritmo de Berge para $K(12, 2)$ .	145
19	Algoritmo de Berge para $K(13, 2)$ .	145
21	Valores para o <i>número de cruzamentos</i> $cr_1(n)$ , $cr_2(n)$ , $cr_3(n)$ , $cr_4(n)$ e $cr_5(n)$ com $6 \leq n \leq 25$ .	151

# Índice

- i*-emparelhamento, 129  
*k*-fator, 73  
*k*-fatoração, 74  
aresta, 21  
de saída, 155  
automorfismo, 52  
caminho, 23, 39  
Hamiltoniano, 47  
ciclo, 23, 40  
Hamiltoniano, 23, 47  
clique, 21, 56  
de Berge, 136  
máxima, 57  
clique de saída de Berge, 136  
cobertura de cliques, 22, 58  
de Berge, 137  
coloração  
de arestas, 68  
de vértices, 60  
conjunto de arestas, 21  
conjunto de hiperarestas, 21  
conjunto de hipervértices, 21  
conjunto de vértices, 21  
conjunto independente, 21, 56  
desenho, 78  
bom, 79  
em *k*-páginas, 23  
em uma superfície, 22  
*k*-páginas, 95  
no plano, 78  
ótimo, 23, 80  
emparelhamento, 72  
maximal, 72  
perfeito, 73  
emparelhamentos consecutivos, 129  
espinha, 23, 95  
face, 92  
fator, 73  
grafo, 21  
*k*-arestas-colorível, 68  
*k*-colorível, 60  
*k*-fatorável, 74  
*k*-regular, 30  
*n*-cubo, 22

aresta-transitivo, 54  
autocomplementar, 38  
bipartido, 62  
bipartido completo, 22, 42  
caminho, 40  
ciclo, 40  
classe 1, 70  
classe 2, 70  
complementar, 21, 38  
completo, 22, 42  
de Kneser, 22, 109  
de linha, 21, 45  
de Petersen, 32  
do cavalo, 49  
dodecaedro, 81  
dígrafo, 21  
estrela, 41  
Euleriano, 34  
garra, 41  
Hamiltoniano, 47  
hexaedro, 81  
icosaedro, 81  
isomorfo, 35  
n-cubo, 43  
octaedro, 81  
perfeito, 62  
planar, 23, 81  
quase-planar, 94  
roda, 41  
sem arestas, 30  
tetraedro, 81  
vértice-transitivo, 52  
grupo de arestas, 158  
hiperaresta, 21  
hipergrafo, 21  
 $k$ -uniforme, 122  
completo  $k$ -uniforme, 122  
hipervértice, 21  
homeomorfismo, 37  
homomorfismo, 37  
invariante topológica, 57  
isometria, 37  
laço, 21  
malha, 158  
monte de arestas, 158  
multigrafo, 21  
número cromático, 60

número de clique, 21, 56  
número de cobertura de clique, 22  
número de cruzamentos, 23, 80  
    de um desenho, 23, 80  
    de um grafo, 23  
    em  $k$ -páginas, 23, 96  
    retilinear, 86  
número de independência, 56  
  
página, 23, 95  
  
subdivisão, 23, 90  
  
subgrafo, 31  
    induzido, 31  
  
trilha, 33  
    Euleriana, 33  
    fechada, 33  
  
vértice, 21  
    exterior, 155  
    grau, 30  
    isolado, 30  
    vizinhança, 30  
    vizinhança fechada, 30  
  
índice cromático, 69

# 1 Introdução

Um *grafo* é um par  $G = (V, E)$  tal que  $V$  é um conjunto não vazio e finito, o qual denominamos como *conjunto de vértices* e  $E$  é o *conjunto das arestas* formado por pares  $vw$  não ordenados de distintos vértices  $v, w \in V$ , denominados de *arestas*. Um *multigrafo* é um *grafo* tal que pode existir mais que 1 *aresta* entre 2 vértices, isto é, é uma extensão do conceito de *grafo* que permite mais que 1 *aresta* entre 2 vértices. Um *laço* é uma *multiaresta* do tipo  $vv \in E$ , ou seja, uma *aresta* que conecta um vértice a ele mesmo. Se um *grafo* possui uma direção nas suas *arestas*, i.e., se cada *aresta* possuir um direcionamento, chamos o *grafo* de *digrafo*.

Um *hipergrafo*  $\mathcal{H}$  é um par não ordenado  $(V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto denominado *conjunto de hipervértices*, com cada elemento sendo um *hipervértice*, e  $E$  um *conjunto de hiperarestas*, com cada elemento sendo um *hiperaresta*, tal que se  $\forall e \in E$  temos  $e \subseteq V$ . *Hipergrafos* é um generalização do conceito de *grafo*. Em um *grafo*  $G$  uma *aresta* conecta somente 1 vértice a si mesmo(caso seja um *laço*), ou 2 vértices. No caso de um *hipergrafo*  $\mathcal{H}$ , uma *hiperaresta* pode conectar  $n \leq |V(\mathcal{H})|$  *hipervértices*.

Podemos construir *grafos* a partir de outros *grafos*. Em particular, existem 2 tipos de construções desse gênero fundamentais em Teoria dos Grafos: *grafo complementar* e *grafo de linha*. O *grafo complementar*  $\overline{G}$  de um *grafo*  $G$  é formado pelos mesmos vértices de  $G$  e 2 vértices em  $G$  possuem *aresta* entre si se e somente se não possuem *aresta* em  $\overline{G}$ . O *grafo de linha*  $L(G)$  de um *grafo*  $G$  é o *grafo* onde as *arestas* de  $G$  são os vértices de  $L(G)$  e esses vértices possuem *aresta* entre si se as *arestas* correspondentes em  $G$  possuem um vértice em comum.

Uma *clique*  $S \subseteq V$  de um *grafo*  $G = (V, E)$  satisfaz que  $\forall u, v \in S$ ,  $uv \in E$ . Denotamos o *número de clique*  $\omega(G)$  como o tamanho da maior *clique* de  $G$ . Um *conjunto*

*independente*  $S \subseteq V$  de um grafo  $G = (V, E)$  satisfaz que  $\forall u, v \in S, uv \notin E$ . Dado  $k \geq 1$ , uma *cobertura de cliques*  $S_1, \dots, S_k$  de um grafo  $G = (V, E)$  é uma partição em  $k$  cliques  $V = (S_1, \dots, S_k)$  em  $k$  cliques. O *número de cobertura de clique*  $\theta(G)$  do grafo  $G$  é o número de *cliques* mínimo em uma *cobertura de cliques* de  $G$ . O problema de determinar  $\theta(G)$  é *NP-Difícil* [10].

O *grafo completo*  $K_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 1$ , satisfaz que  $\forall v, w \in V(K_n), vw \in E(K_n)$ . O *grafo bipartido completo*  $K_{m,n}$ , com  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $m, n \geq 1$  satisfaz que existe uma partição  $V = (V_1, V_2)$  tal que  $V_1, V_2$  são 2 *conjuntos independentes* com  $|V_1| = m$  e  $|V_2| = n$ , onde  $\forall v \in V_1$  e  $\forall w \in V_2, vw \in E$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$ , o *grafo n-cubo*  $Q_n = (V, E)$  tem  $V$  formado pelas  $2^n$  *n-tupla* de bits 0 e 1 e dois vértices  $v, w \in V(Q_n)$  são *adjacentes* se as *n-tuplas* correspondentes possuem apenas 1 bit diferente entre si.

Martin Kneser [34] foi um matemático alemão o qual definiu os *grafos de Kneser* em 1955. Seja  $n, k \in \mathbb{N}$  com  $0 < k \leq n$  e o subconjunto dos naturais  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ , o *grafo de Kneser*  $K(n, k)$  possui como vértices todos os subconjuntos de  $S$  com  $k$  elementos e dois vértices são *adjacentes* se e somente se os dois subconjuntos associados aos dois vértices são disjuntos.

Aplicações do *grafo de Kneser* incluem muitos fenômenos de combinatória. Em particular  $K(n, 2)$  é isomorfo ao complemento do grafo de linha do *completo*  $K_n$ , isto é,  $\overline{L(K_n)}$ .

Um *desenho em uma superfície*  $S$  de um grafo  $G = (V, E)$  é uma bijeção  $f_v: V \rightarrow S$  tal que as *arestas*  $uv \in E$  são representadas por curvas em  $S$  cujas extremidades estão em  $f_v(u)$  e  $f_v(v)$ , onde:

1. *Arestas* se cruzam no máximo 1 vez;
2. *Arestas* não se cruzam sob os vértices;
3. Um *cruzamento* é de no máximo 2 *arestas*.

O número de cruzamentos de um desenho  $\nu(D(G))$  é o número de interseções entre as arestas de um desenho. Dizemos que um desenho  $D(G)$  é ótimo se não existe um desenho de  $G$  no plano com número de cruzamentos menor que o de  $D(G)$ . O número de cruzamentos de um grafo  $G$ , denotado por  $\nu(G)$ , é o número de cruzamentos de um desenho ótimo de  $G$ . Dizemos que um grafo  $G$  é planar se  $\nu(G) = 0$ . Exemplos de grafos planares são:  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_{1,1}, K_{1,2}, K_{1,3}, K_{2,3}$ . Os grafos  $K_5$  e  $K_{3,3}$  são não planares e  $\nu(K_5) = \nu(K_{3,3}) = 1$ .

Um caminho é uma sequência de vértices não repetidos conectados sequencialmente com arestas. Um ciclo é um caminho mais uma aresta que conecta o vértice inicial ao vértice final. Um ciclo Hamiltoniano é um ciclo que contém todos os vértices de um grafo.

Uma subdivisão  $H$  de um grafo  $G$  é um grafo construído a partir de  $G$  onde as arestas de  $G$  são substituídas por um caminho ou é equivalente à aresta correspondente em  $G$ . O Teorema de Kuratowski[36] caracteriza os grafos planares: Um grafo  $G$  é planar se e somente se não existe uma subdivisão do  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  no grafo.

Um desenho em  $k$ -páginas de um grafo  $G$ , é um desenho de  $G$  tal que todos os vértices estão representados em uma reta  $r$  denominada espinha, que é a interseção entre  $k$  semiplanos, denominados páginas, e cada aresta é representada em uma das  $k$  páginas. Definimos o número de cruzamentos em  $k$ -páginas de um grafo  $G$ , denotado por  $\nu_k(G)$ , como o número de cruzamentos mínimo de  $G$  em um desenho em  $k$ -páginas. Dado um desenho em  $k$ -páginas  $D(G)$  de um grafo  $G$  e  $r$  a espinha de  $D(G)$ , dizemos que duas arestas  $e = uv$  e  $e' = tw$  se intercalam em  $D(G)$  se  $u < t < v < w$  ou  $t < u < w < v$  em  $r$ . Se  $e$  e  $e'$  se intercalam e pertencem ao mesmo semiplano, então  $e$  e  $e'$  possuem um cruzamento.

O problema de determinar o número de cruzamentos de um grafo foi provado NP-difícil [23]. É ainda NP-difícil mesmo para grafos cúbicos [31]. É desconhecido qualquer algoritmo polinomial para determinar  $\nu_2(G)$  ou de modo mais geral  $\nu_k(G)$ .

As aplicações do estudo do *número de cruzamentos* de um *grafo* são inúmeras, indo desde desenho de *grafos* até ao planejamento urbano[33], confecção de circuitos digitais, especificamente circuitos VLSI[13] e aplicações à biologia no estudo do RNA[29].

O problema do *número de cruzamentos* de um *grafo* teve origem com Pál Turán [45] durante a segunda guerra mundial quando o mesmo foi forçado a trabalhar em uma fábrica de tijolos no qual puxava vagonetes em trilhos que conectavam armazéns de tijolos com as fornalhas. Abstratamente, o problema poderia ser representado como um *grafo bipartido completo*. O problema da Fábrica de Tijolos de Turán [45] pergunta o número mínimo de *cruzamentos* de um *grafo bipartido completo*. Zarankiewicz e Kazimierz Urbanik [50] [46] publicaram soluções independentes para o problema e desenvolveram um *desenho* para o *bipartido completo*. O *desenho* consistia em dividir uma partição do *bipartido completo* em 2 partes com *vértices* iguais (caso partição de tamanho par) ou com uma partição com 1 *vértice* a mais(caso partição de tamanho ímpar) e colocar as 2 partes em uma reta horizontal. Após isso realizar o mesmo com a outra partição mas colocar as 2 partes em uma reta vertical e, em sequência, conectar os *vértices* de cada partição com os da outra partição. Com esse *desenho* obtém-se o *número de cruzamentos*  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  para um *grafo bipartido completo*  $K_{m,n}$ . E assim foi conjecturado [28] que  $\nu(K_{m,n}) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ .

Para o *grafo completo*  $K_n$ , Anthony Hill e John Ernest, desenvolveram uma conjectura para o *número de cruzamentos* do  $K_n$ , que foi publicada por Richard Guy[27] em 1960, com valor  $\nu(K_n) \leq \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$ . Ábrego et al[1] obtiveram o resultado exato para  $\nu_2(K_n)$  com valor  $\frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$ . Klerk et al[15] obtiveram uma construção de *desenho* do  $K_n$  cujo *número de cruzamentos em 2-páginas* corresponde ao valor ótimo de  $\nu_2(K_n)$ .

Neste trabalho essa construção é obtida pelo Algoritmo *Slope*.

Faria et al[21] obtiveram um *desenho em 2-páginas* para o  $Q_n$  com  $\frac{125}{768}4^n - \frac{2^{n-3}}{3}(3n^2 +$

$\frac{9+(-1)^{n+1}}{2}$ ) cruzamentos. Também foi verificado que para um *desenho retilíneo*, que é um *desenho* formado apenas por linhas retas, distinto de  $Q_n$  descrito nesse mesmo artigo, possuía o mesmo número de cruzamentos.

Neste trabalho de final de curso foi obtido um limite superior e inferior para o *número de cruzamentos de um desenho em 2-páginas* do grafo de Kneser  $K(n, 2)$ . Dividimos os vértices do  $K(n, 2)$  em  $\theta(K(n, 2))$  cliques de tamanho  $\omega(K(n, 2))$  por meio do Algoritmo de Berge, que define uma *cobertura de cliques* no grafo, onde existe um *ciclo Hamiltoniano*, obtendo o *desenho em 2-páginas* do grafo. Com base no *desenho em 2-páginas ótimo* de  $K_{\theta(K(n, 2))}$  definimos em que página colocar as arestas que ligam vértices de diferentes cliques. Esse *desenho ótimo* é definido pelo Algoritmo Slope, que fornece *desenhos* do  $K_n$  em 2-páginas com  $\nu_2(K_n)$  cruzamentos. Para arestas que ligam vértices de uma mesma clique desenhamos todas as arestas da clique para cima ou para baixo de acordo com o menor *número de cruzamentos* realizado com outras arestas.

No Capítulo 2 é abordado os fundamentos de Teoria dos Grafos necessários ao entendimento do trabalho. São explicados conceitos como *coloração de vértices*, *coloração de arestas*, *cobertura de clique*, *fatoração de grafos*, *ciclos hamiltonianos*, *número de cruzamentos*, *número de cruzamentos em k-páginas* e propriedades do *grafo de Kneser*. No Capítulo 3 são abordados algoritmos utilizados no trabalho, onde inclui-se a explicação teórica do Algoritmo Exaustivo, Algoritmo de Slope e do Algoritmo de Berge. Também inclui-se *desenhos* do  $K_n$  por meio do Algoritmo de Slope e tabelas do Algoritmo de Berge. No Capítulo 4 estão os resultados para a obtenção do limite superior e inferior do *número de cruzamentos em 2-páginas* do *grafo de Kneser*  $K(n, 2)$ , *desenhos* do  $K(n, 2)$  com base no *desenho* proposto, resultados para o *número de cruzamentos* exatos desse *desenho*. No Capítulo 5 temos a conclusão deste trabalho. No Capítulo 6 temos o Apêndice, onde incluímos as implementações do Algoritmo

de Berge, Algoritmo de Slope, Algoritmo Contador de Cruzamentos e Algoritmo de Desenho, todas implementações em linguagem de programação python 3.11.3. Todas as implementações estão no repositório do github <https://github.com/AntonioDRSousa/TCC-Grafos>. Foi incluído os *desenhos em 2-páginas* do  $K(n, 2)$  obtidos por meio da implementação do Algoritmo de Desenho. Também incluímos no Apêndice uma cópia dos artigos [41, 42, 43] publicados provenientes desse trabalho.

## 2 Fundamentos de Teoria dos Grafos

### 2.1 Conceitos Básicos

Vamos definir algumas notações usadas ao longo deste trabalho:

**Notação 1.**  $\mathbb{N}_{i,j} = \{x \in \mathbb{N} \mid i \leq x \leq j\}$ .

**Notação 2.**  $|A|$  é a cardinalidade do conjunto  $A$ , i.e., o número de elementos do conjunto  $A$ .

**Notação 3.**  $[A]^k = \{S \in \mathcal{P}(A) \mid |S| = k\}$ , onde  $A$  é um conjunto

As Figuras 1, 2, 3 e 4 ilustram os diversos tipos de *grafos* definidos anteriormente:

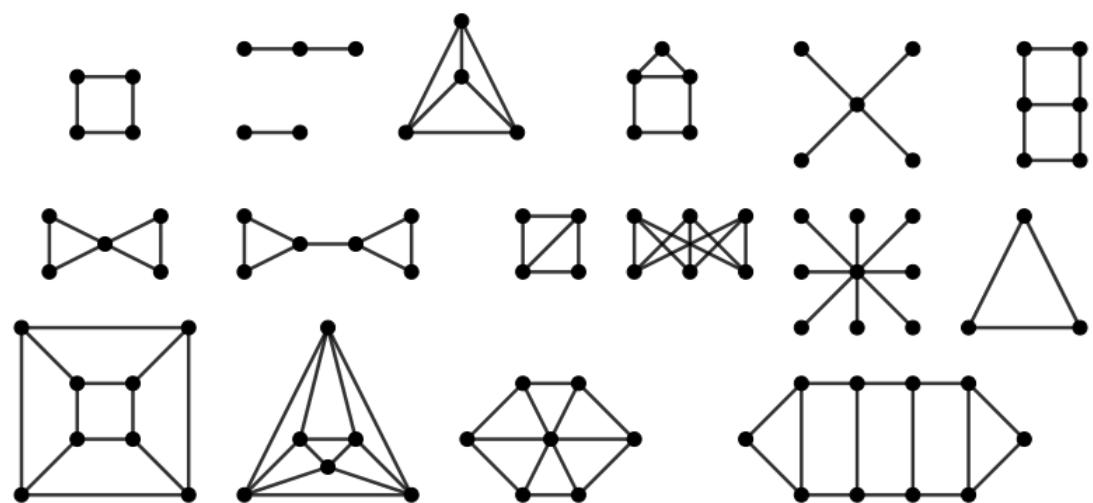


Figura 1: Exemplos de *grafos simples*.

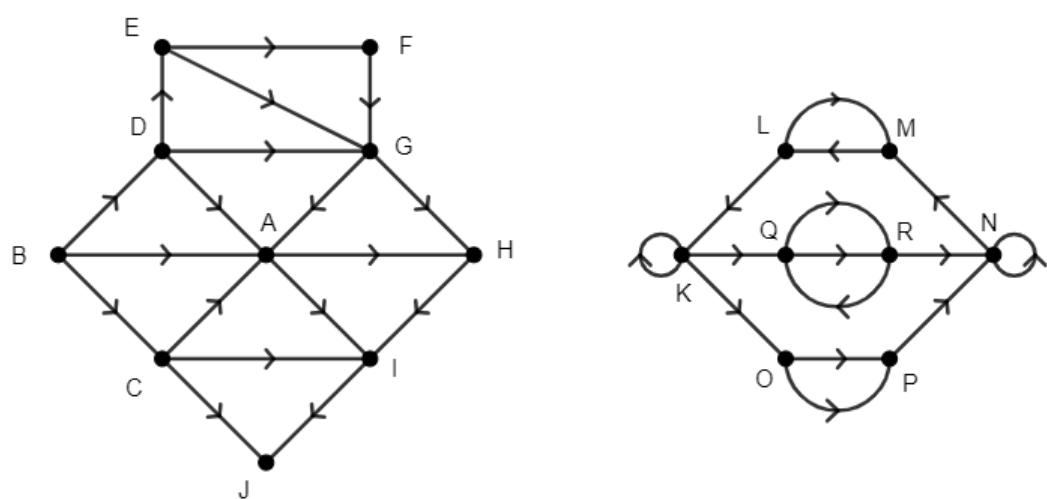


Figura 2: *Digrafos*.

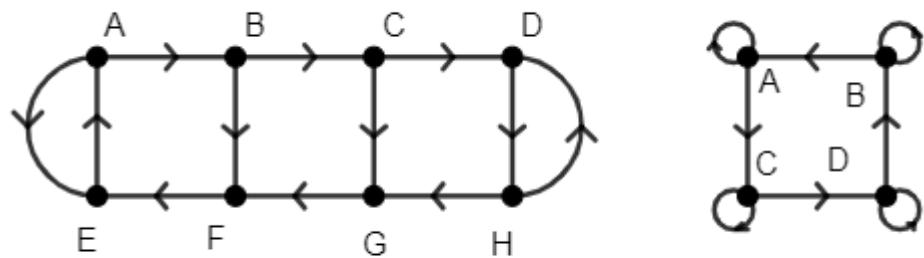


Figura 3: *Digraphos*.

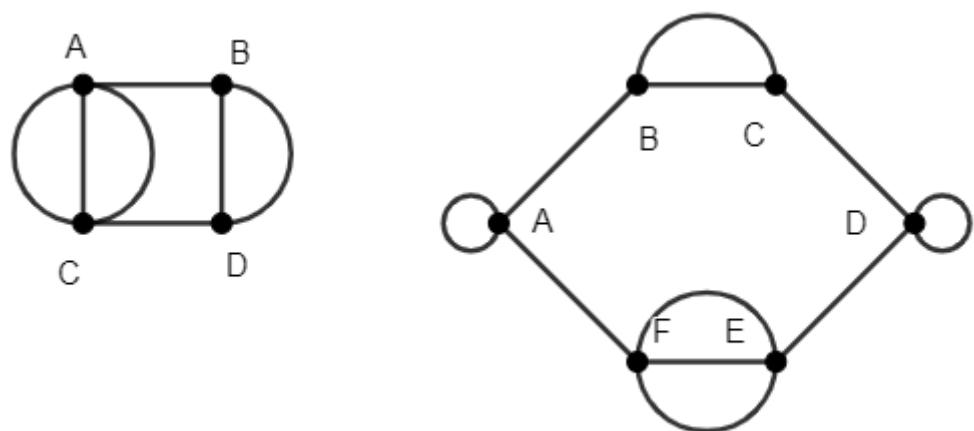


Figura 4: Um *multigrafo* sem laços (à esquerda) e um *multigrafo* com laço (à direita).

A Figura 5 fornece um exemplo de um *hipergrafo*:

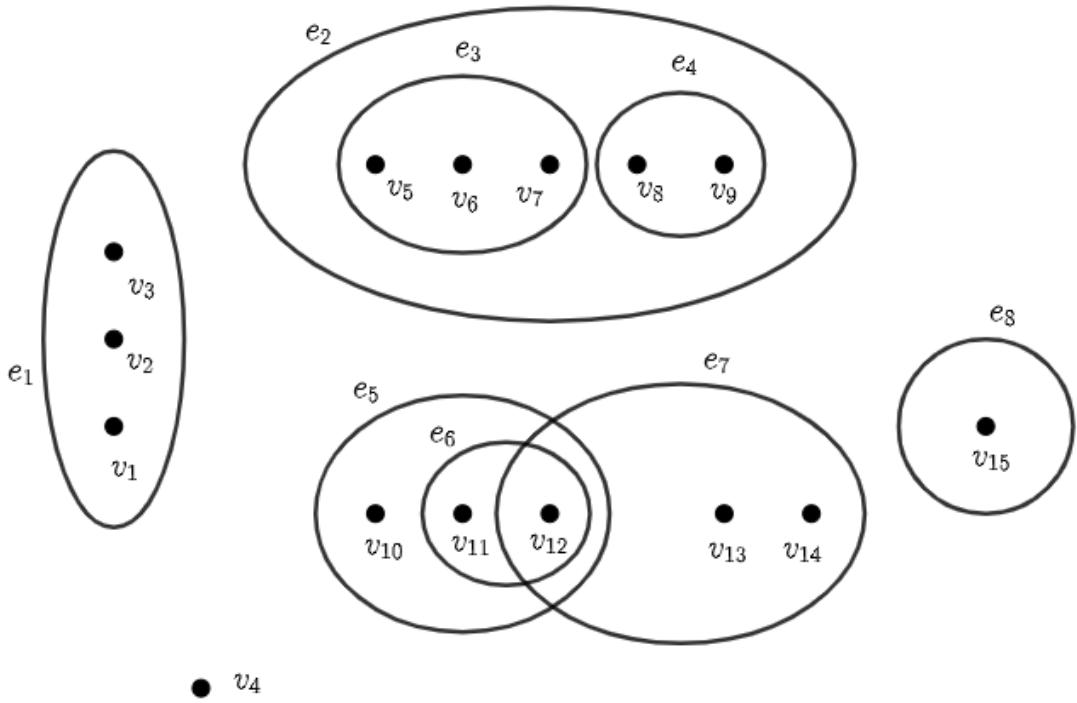


Figura 5: Um *hipergrafo*. As *hiperarestas* são  $e_i$  com  $1 \leq i \leq 8$ , e os *hipervértices* são  $v_j$  com  $1 \leq j \leq 15$ .

Uma forma de representar um *hipergrafo* como um *grafo*, é construindo um *conjunto de vértices* onde cada vértice é uma *hiperaresta* ou um *hipervértice*, e os vértices possuem *aresta* entre si se são correspondentes a uma *hipervértice* que pertence a uma *hiperaresta*. A Figura 6 ilustra essa representação:

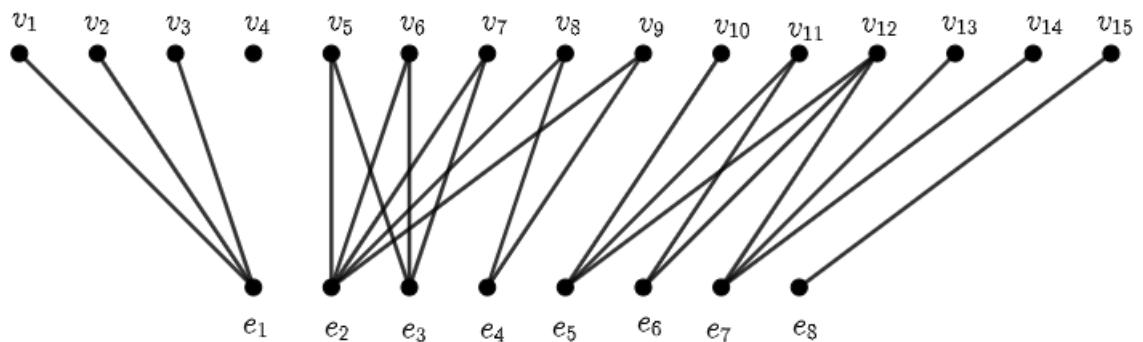


Figura 6: Representação do *hipergrafo* da Figura 5 como um *grafo*.

Vamos definir o *grafo* mais básico de todos:

**Definição 1** (Grafo sem arestas). *Um grafo  $G = (V, E)$  é um grafo sem arestas se e somente se  $E = \emptyset$ .*

Vamos definir os conceitos de *vizinhança* de um vértice, *grau* de um vértice, conceitos fundamentais no estudo de *grafos*:

**Definição 2** (Vizinhança). *Seja  $v \in V(G)$ , onde  $G$  é um grafo. Definimos a vizinhança de  $v$  como o conjunto  $N(v) = \{u \mid uv \in E(G)\}$ .*

**Definição 3** (Vizinhança Fechada). *Seja  $v \in V(G)$ , onde  $G$  é um grafo. Definimos a vizinhança fechada de  $v$  como o conjunto  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ .*

**Definição 4** (Grau). *O grau de um vértice  $v$  de um grafo  $G$  é definido como  $d(v) = |N(v)|$ . Denotamos  $\delta(G)$  e  $\Delta(G)$  pelo grau mínimo e máximo do grafo  $G$ .*

**Definição 5** (Vértice Isolado). *Dizemos que um vértice  $v \in V$  de um grafo  $G = (V, E)$  é um vértice isolado se e somente  $\nexists v' \in V$  onde  $vv' \in E$ , i.e.,  $d(v) = 0$ .*

Definido o que é o *grau* de um vértice, definimos:

**Definição 6** (Grafo k-regular). *Um grafo  $G$  é dito  $k$  – regular, onde  $0 \leq k \leq |V(G)| - 1$  se e somente se  $\forall v$  temos  $d(v) = k$ .*

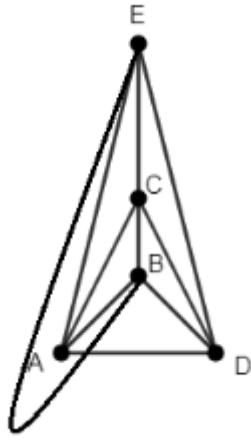


Figura 7: Um *grafo 4-regular*.

A partir do conceito de *grafo* podemos definir a parte desse *grafo* que também é um *grafo*:

**Definição 7** (Subgrafo). *Um subgrafo  $H$  de um grafo  $G$ , é um grafo tal que  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq \{vw \in E(G) \mid v, w \in V(H)\}$ .*

Note que pela definição de *subgrafo* pode existir  $H$  subgrafo do grafo  $G$ , onde vértices  $v, w$  são não *adjacentes* em  $H$ , mas que em  $G$  são *adjacentes*. Uma definição que inclui a necessidade de dois vértices adjacentes em  $G$  serem *adjacentes* em  $H$  é dado pela definição de *subgrafo induzido*:

**Definição 8** (Subgrafo Induzido). *Seja  $G$  um grafo e  $H \subseteq V(G)$ , definimos um subgrafo induzido  $G[H]$  de um grafo  $G$ , é um subgrafo de  $G$  tal que  $V(G[H]) = H$  e  $E(H) = \{vw \in E(G) \mid v, w \in V(H)\}$ .*

A Figura 8 descreve um exemplo de um *grafo* e respectivamente um *subgrafo* e um *subgrafo induzido* desse *grafo*.

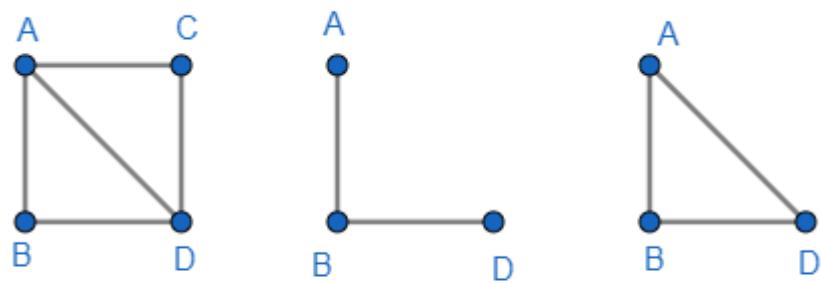


Figura 8: *Grafo G* (lado esquerdo) seguido de um *subgrafo* e um *subgrafo induzido* a partir do subconjunto de vértices  $\{A, B, C\}$ .

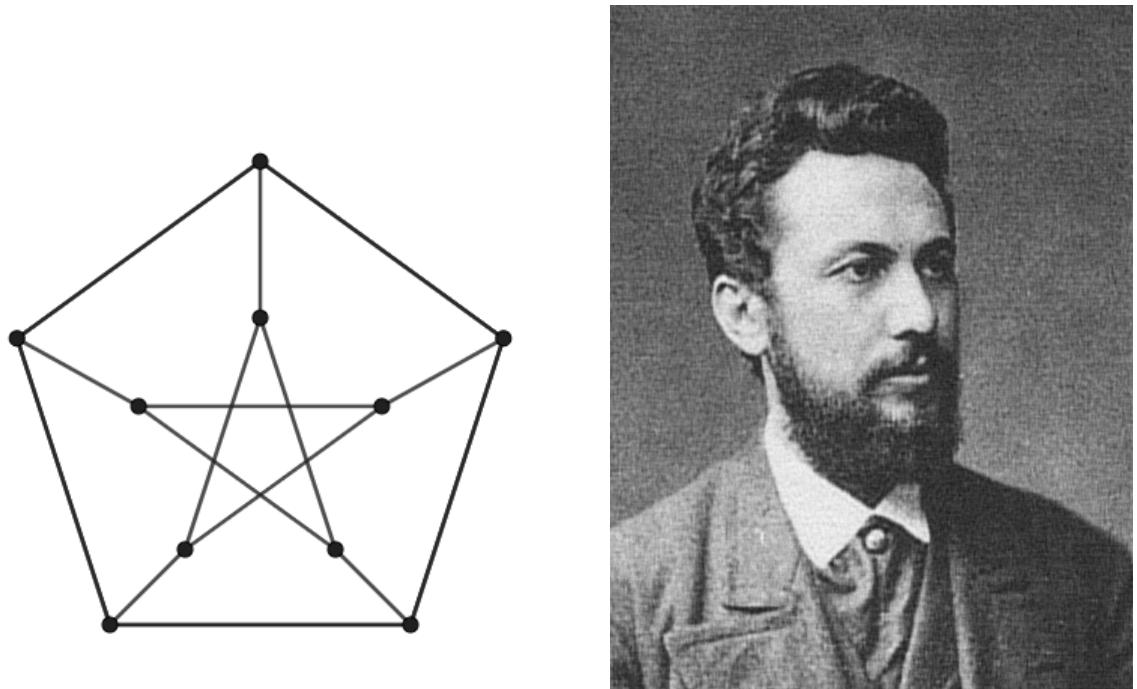


Figura 9: O *Grafo de Petersen* à esquerda e Julius Petersen à direita.

Na Figura 9 temos o *grafo de Petersen* e o matemático Julius Petersen[40], que construiu esse *grafo* como um contraexemplo.



Figura 10: Leonard Euler.

A Teoria dos Grafos passou a ser estudada após a solução dada por Leonard Euler[19] (Figura 10) ao problema das sete pontes de Königsberg, que pergunta se seria possível atravessar todas as pontes da cidade de Königsberg sem repetir nenhuma ponte. Para resolver este problema, vamos abstrair o problema em *grafos*, onde cada *vértice* é um ponto da cidade Königsberg e cada *aresta* é uma ponte. Vamos definir o tipo de trajetória equivalente a este problema em *grafos*:

**Definição 9** (Trilha). *Definimos uma trilha em um grafo  $G$ , como uma sequência de vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  onde  $v_i v_{i+1} \in E(G)$  e  $\forall e, e' \in E(G)$  arestas da trilha então  $e \neq e'$ .*

**Definição 10** (Trilha Fechada). *Definimos uma trilha fechada em um grafo  $G$ , como uma trilha com sequência de vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tal que  $v_1 = v_n$ .*

**Definição 11** (Trilha Euleriana). *Uma trilha euleriana de um grafo  $G$  é uma trilha fechada que possui todos os vértices e percorre todas as arestas do grafo  $G$ .*

Na Figura 11 temos um exemplo de *trilha euleriana*:

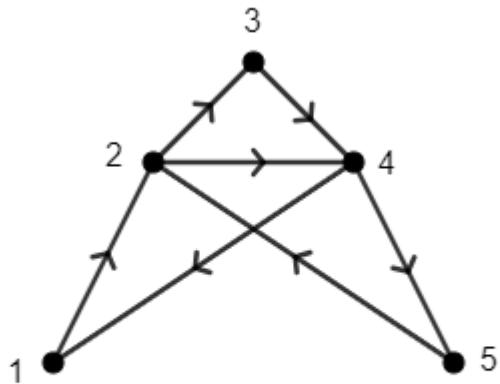


Figura 11: Observe que  $(1, 2, 3, 4, 5, 2, 4, 1)$  é uma *trilha fechada* e percorre todos os vértices do grafo. Logo, é uma *trilha euleriana*.

Isto é, uma *trilha* é um percurso pelos vértices de um grafo sem repetição de arestas.

Se o vértice final é igual ao vértice inicial é uma *trilha fechada*. Se uma *trilha fechada* percorrer todas as *arestas* de um *grafo* então é dita uma *trilha euleriana*. Segue-se a definição de *grafo euleriano*:

**Definição 12** (Grafo Euleriano). *Um grafo  $G$  é dito euleriano se e somente se existe uma trilha euleriana em  $G$ .*

A Figura 12 ilustra a cidade Königsberg e o seu *multigrafo* correspondente:

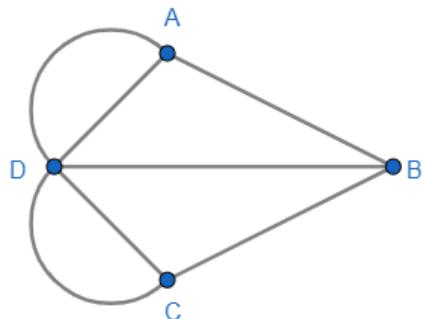
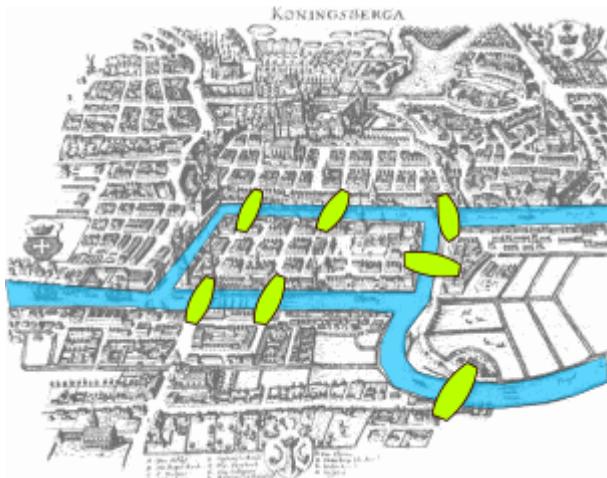


Figura 12: 7 pontes de Königsberg e o *multigrafo* correspondente.

**Teorema 1** (Teorema de Euler'1741). [19]  $G$  é um grafo Euleriano se e somente se todo o vértice de  $G$  possui grau par.

Observe que o problema das 7 pontes de Königsberg pergunta se o *multigrafo* da Figura 12 é um *grafo Euleriano*. Como existem vértices de grau ímpar, pelo Teorema 1 temos que o *multigrafo* não é um *grafo euleriano*. Logo, é impossível realizar o percurso proposto pelo problema.

Vamos definir agora um conceito que caracteriza a igualdade entre 2 *grafos*:

**Definição 13** (Isomorfismo). *Dizemos que um grafo  $G'$  é isomorfo a um grafo  $G$  quando existe uma função bijetiva  $f : V(G) \rightarrow V(G')$  tal que  $uv \in E(G)$  se e somente se  $f(u)f(v) \in E(G')$ .*

Na Figura 13 temos um exemplo de 2 *grafos isomorfos*.

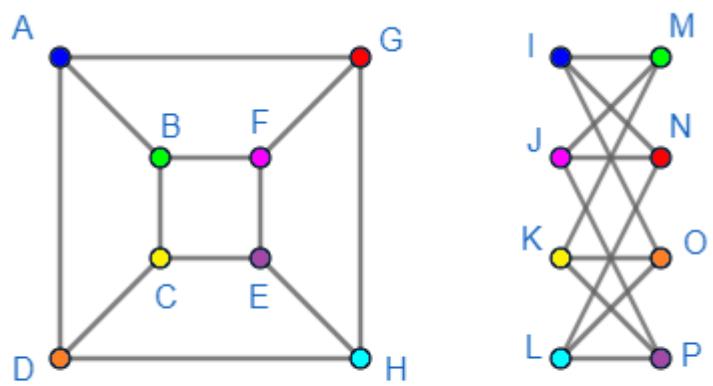


Figura 13: *Grafos isomorfos*. As cores de cada *grafo* indicam o *isomorfismo*.

A Figura 14 ilustra 4 *grafos isomorfos*:

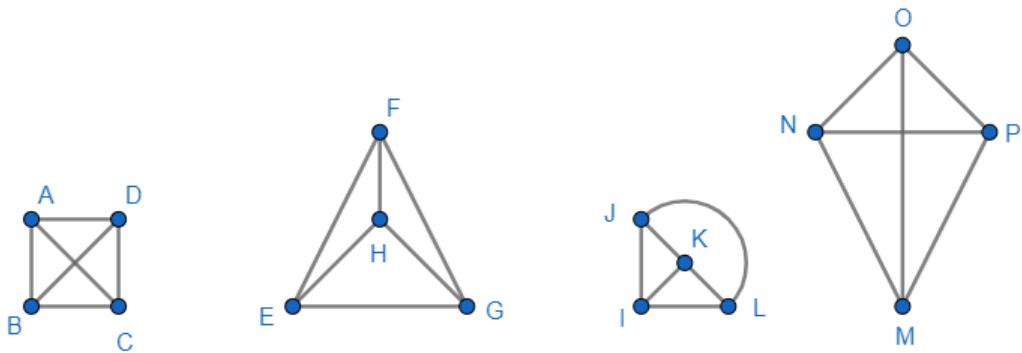


Figura 14: Grafos Isomorfos.

Nas Figuras 15 e 16 temos mais exemplos de *grafos isomorfos*:

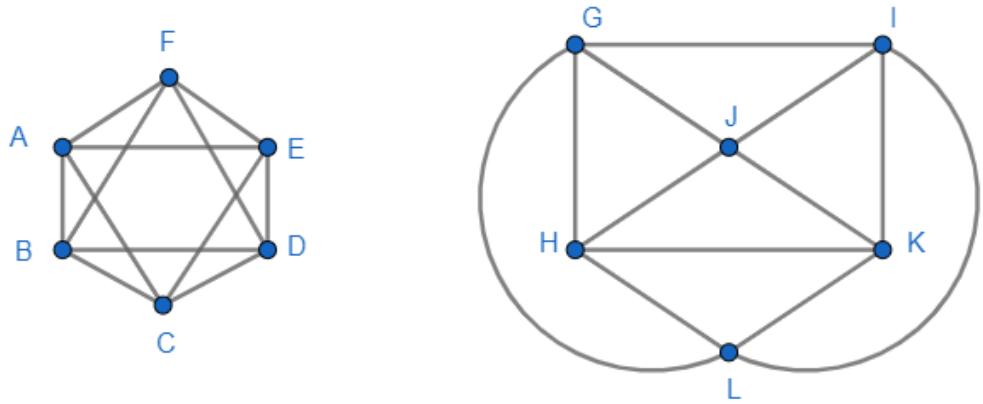


Figura 15: *Grafos Isomorfos.*

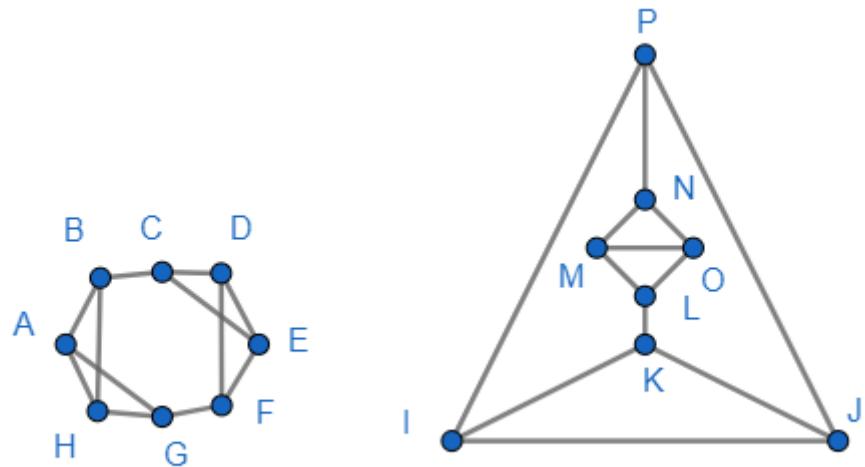


Figura 16: *Grafos Isomorfos.*

Um *isomorfismo* é um *homomorfismo* bijetivo. *Homomorfismo* é um conceito da Álgebra, definido como uma *aplicação*  $h$  estrutura entre duas estruturas algébricas que preserva as propriedades da estrutura. Conceitos equivalentes ao *isomorfismo* existem em Geometria com *isometria* e na Topologia temos o conceito de *homeomorfismo*.

Dado um *grafo*  $G = (V, E)$ , se pensarmos no conjunto de universo de *arestas* como  $\Omega = \{vw \mid v, w \in V\}$ , podemos definir o conjunto complementar  $E' = \Omega \setminus E$ , segue-se o conceito de *grafo complementar*:

**Definição 14** (Grafo Complementar). *Um grafo  $\bar{G}$  é um grafo complementar de um grafo  $G$  se e somente se  $V(\bar{G}) = V(G)$  e  $E(\bar{G}) = [V(G)]^2 \setminus E(G)$ .*

Na Figura 17 temos um grafo e o seu grafo complementar respectivo. A importância do conceito de *grafo complementar* é que existem propriedades que é mais fácil obter pelo *grafo complementar* do que pelo *grafo original*.

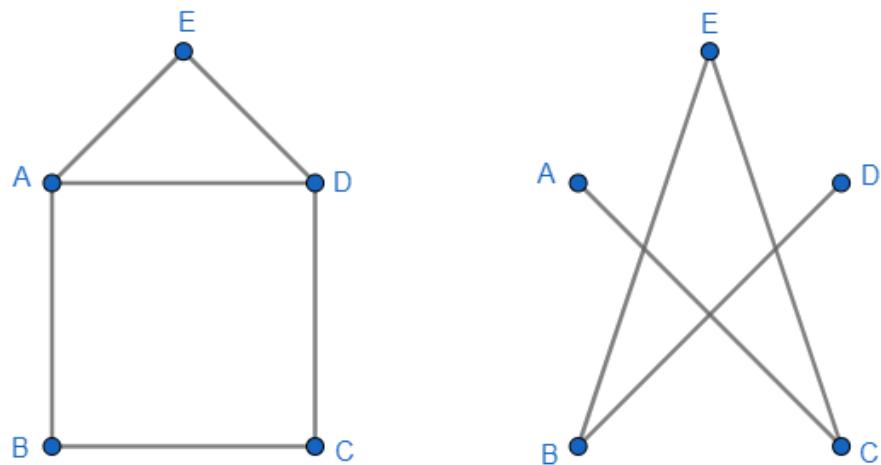


Figura 17: Grafo  $G$ (lado esquerdo) seguido do Grafo complementar  $\bar{G}$ .

Dado o conceito de *isomorfismo* e *grafo complementar* é interessante definir um *grafo* que é *isomorfo* ao seu *grafo complementar*:

**Definição 15** (Grafo Autocomplementar).  *$G$  é um grafo autocomplementar se e somente se  $G$  é isomorfo a  $\bar{G}$ .*

Nas Figuras 18 e 19 temos um exemplo de um grafo autocomplementar e respectivamente o grafo complementar desse grafo, onde pode-se observar que os 2 grafos são isomorfos.

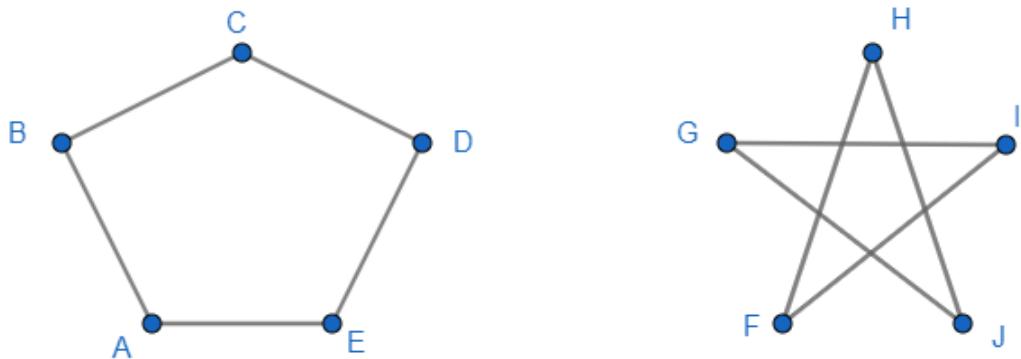


Figura 18: Grafo  $G$  e  $\bar{G}$ . É fácil ver que  $G$  é autocomplementar, pois  $G$  é isomorfo a  $\bar{G}$ .

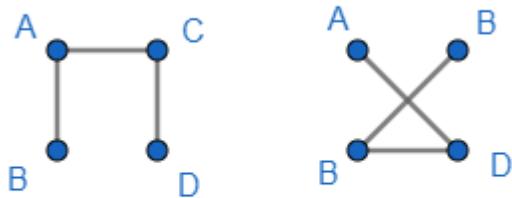


Figura 19: Grafo  $G$  e  $\bar{G}$ . É fácil ver que  $G$  é autocomplementar, pois  $G$  é isomorfo a  $\bar{G}$ .

Podemos pensar um trajeto percorrido em *grafo*, isto é, um sequência de vértices conectados sequencialmente por *arestas*. Definimos os conceitos de *caminho* e *ciclo*:

**Definição 16** (Caminho). *Um caminho  $P_n$  em um grafo  $G$ , com  $n \geq 2$ , é uma sequência de vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  onde  $v_i v_{i+1} \in E(G)$  com  $1 \leq i \leq (n-1)$  e  $v_i \neq v_j$  para  $i \neq j$ .*

**Definição 17** (Ciclo). *Um ciclo  $C_n$  em um grafo  $G$ , com  $n \geq 3$ , é uma sequência de vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$  onde  $v_i v_{i+1} \in E(G)$  com  $1 \leq i \leq (n-1)$  e  $v_n v_1 \in E(G)$ , tal que,  $v_i \neq v_j$  para  $i \neq j$ .*

Vamos definir grafos importantes em Teoria dos Grafos:

**Definição 18** (Grafo Caminho). *Definimos um grafo  $P_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , como um caminho se os vértices e arestas de  $P_n$  definem um caminho.*

A Figura 20 ilustra exemplos *grafos caminho*:

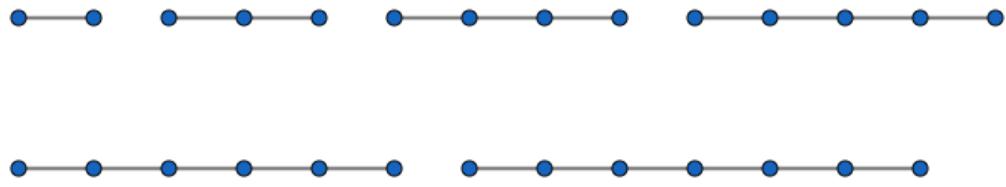


Figura 20: *Grafos Caminho  $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ .*

**Definição 19** (Grafo Ciclo). *Definimos um grafo  $C_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , como um ciclo se os vértices e arestas de  $C_n$  definem um ciclo.*

A Figura 21 ilustra exemplos *grafos ciclo*:

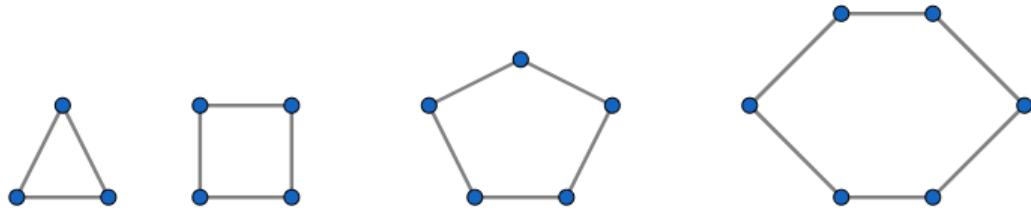


Figura 21: *Grafos ciclo*  $C_3, C_4, C_5, C_6$ .

**Definição 20** (Grafo Estrela). *Definimos um grafo  $S_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , como uma estrela, se e somente se  $V(S_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  e  $E(S_n) = \{v_0v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ .*

A Figura 22 ilustra exemplos *grafos estrela*:



Figura 22: *Grafos estrela*  $S_3, S_4, S_5, S_6$ .  $S_3$  também é chamado de *garra*.

**Definição 21** (Grafo Roda). *Definimos um grafo  $W_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , como uma roda, se e somente se  $V(W_n) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e  $E(W_n) = E(C_n) \cup E(S_n)$ , onde  $V(C_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $V(S_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ , de tal modo que o centro da estrela  $S_n$  é o vértice  $v_0$ .*

A Figura 23 ilustra exemplos *grafos roda*:

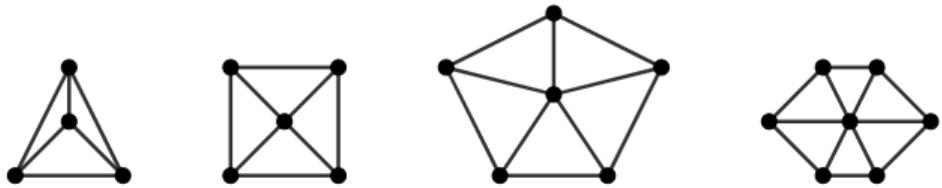


Figura 23: *Grafos roda*  $W_3, W_4, W_5, W_6$ .

**Definição 22** (Grafo Bipartido Completo). *Um grafo bipartido completo  $K_{m,n}$  com  $m, n \in \mathbb{N}^*$  é um grafo onde existe uma partição  $V(K_{m,n}) = V_1 \cup V_2$  com  $|V_1| = m$ ,  $|V_2| = n$ , tal que  $E(K_{m,n}) = \{vw \in [V]^2 \mid (v \in V_1) \wedge (w \in V_2)\}$ .*

Na Figura 24 temos como exemplo do *grafo bipartido completo*  $K_{3,2}$ .

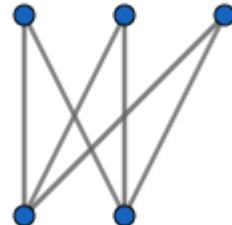


Figura 24:  $K_{3,2}$

**Definição 23** (Grafo Completo). *Um grafo completo  $K_n$  com  $n \in \mathbb{N}$  é um grafo tal que  $E(K_n) = [V(K_n)]^2$  e  $n = |V(K_n)|$ .*

Na Figura 25 temos o exemplo do *grafo completo*  $K_8$ .

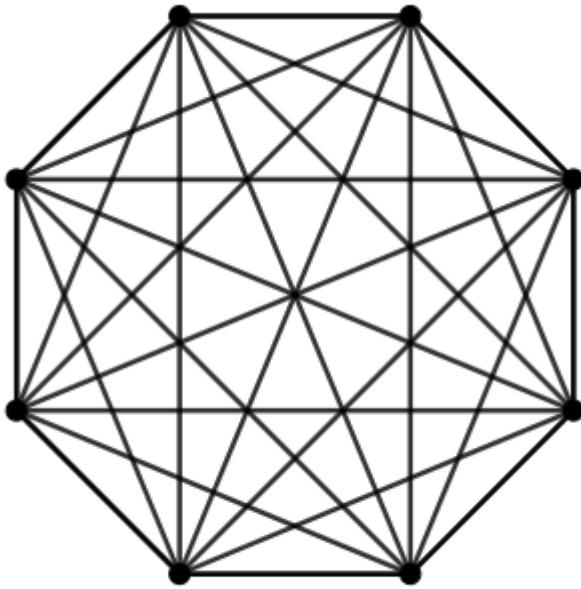


Figura 25:  $K_8$ .

**Definição 24** (Grafo n-cubo). *O grafo n-cubo é um grafo  $Q_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , onde cada vértice é uma  $n -$ tupla de bits, ou seja, cada vértice é uma sequência de  $n$  bits 0 e 1, tal que dois vértices são adjacentes se as  $n -$ tuplas diferem em apenas 1 bit.*

Na Figura 26 temos exemplos de grafos do tipo *n-cubo*, especificamente os grafos  $Q_0$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  e  $Q_4$ .

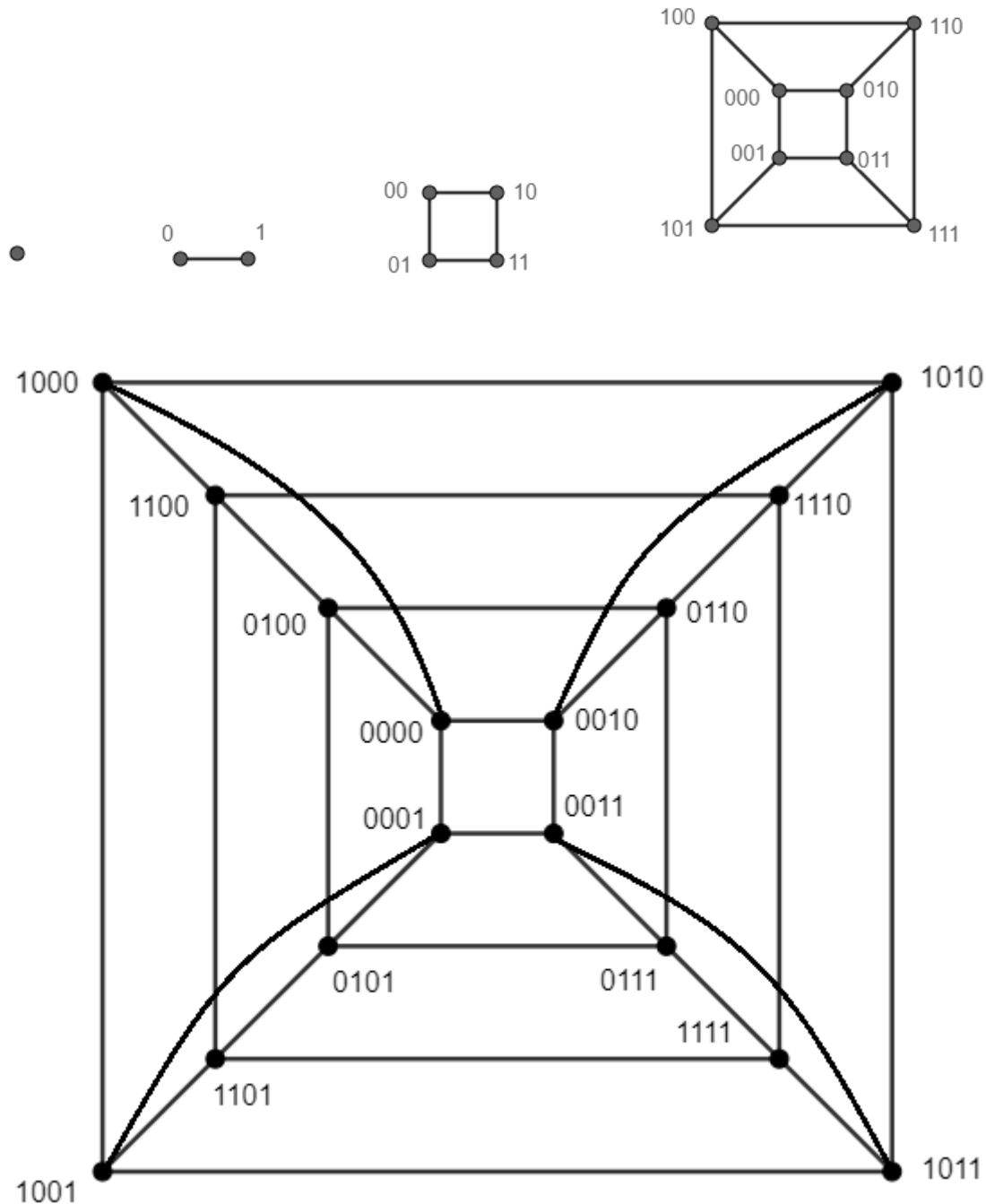


Figura 26: Grafos  $0 - \text{cubo}$ ,  $1 - \text{cubo}$ ,  $2 - \text{cubo}$ ,  $3 - \text{cubo}$  e  $4 - \text{cubo}$

A Figura 27 ilustra uma propriedade dos grafos  $Q_n$ :

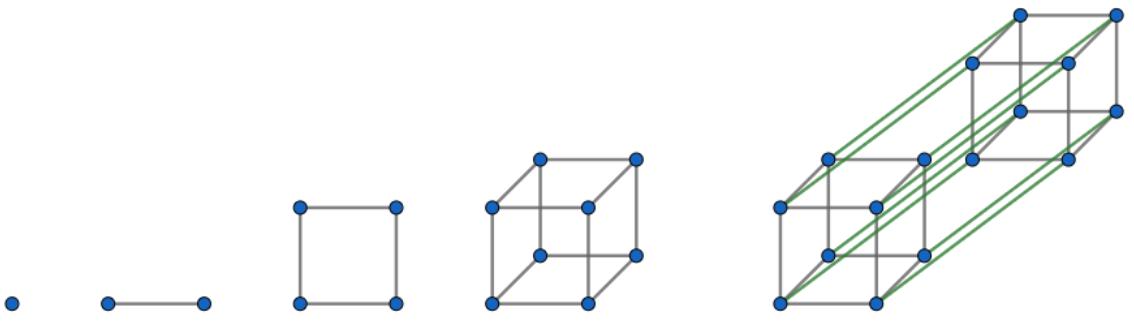


Figura 27: Observe que um *grafo*  $n - \text{cubo}$  pode ser representado como um cubo em  $n$  dimensões:

$0 - \text{cubo}$  é a representação do cubo em 0 dimensões;

$1 - \text{cubo}$  é a representação do cubo em 1 dimensões;

$2 - \text{cubo}$  é a representação do cubo em 2 dimensões;

$3 - \text{cubo}$  é a representação do cubo em 3 dimensões;

$4 - \text{cubo}$  é a representação do cubo em 4 dimensões.

Vamos definir um *grafo* construído a partir das *arestas* de outro *grafo*:

**Definição 25** (Grafo de Linha). *Dado um grafo  $G = (V, E)$ , o grafo de linha de  $G$  é  $L(G) = (E, E')$  com  $E' = \{(uv, uw) \mid uv, uw \in E, v \neq w\}$ .*

A Figura 28 ilustra o *grafo de linha* de  $K_4$ :

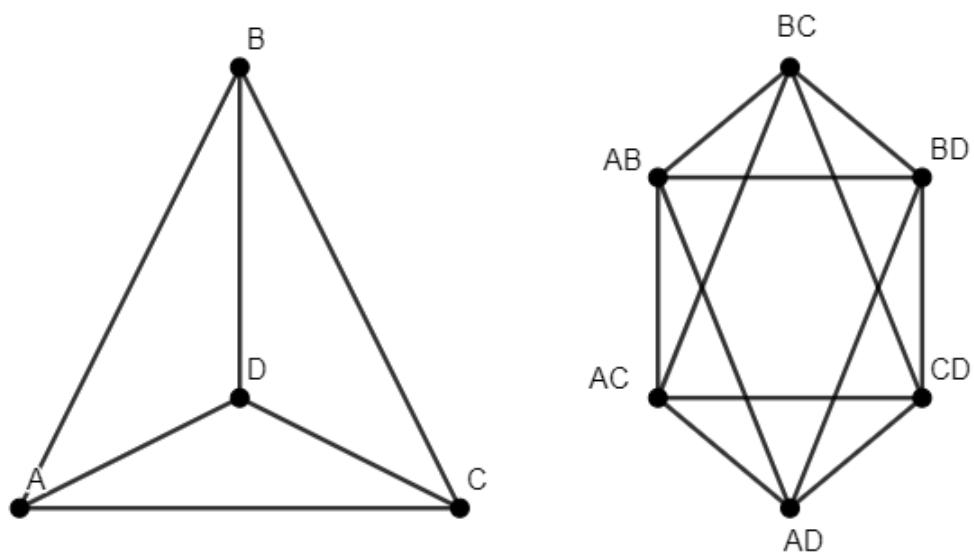


Figura 28:  $K_4$  e  $L(K_4)$ .



Figura 29: William Rowan Hamilton.



Figura 30: Jogo Icosiano.

William Rowan Hamilton (Figura 29) inventou em 1857 o jogo Icosiano (Figura 30), que é um jogo matemático. O jogo possui um tabuleiro com o formato de um *grafo dodecaedro* e peças numeradas, onde coloca-se a peça inicial com número 1 em algum *vértice*, e colocamos cada peça com número sucessor à anterior se podemos mover para esse *vértice*. Só pode-se mover de um *vértice* para outro se existir uma *aresta* entre os dois *vértices*. O objetivo do jogo é achar um trajeto que percorra todos os *vértices* do um *dodecaedro* e retorne ao *vértice* inicial. Esse jogo serviu de base para definir os conceitos de *caminho Hamiltoniano* e *ciclo Hamiltoniano*. Na Figura 31 temos uma solução para o jogo Icosiano, isto é, um *ciclo Hamiltoniano* para o *grafo dodecaedro*.

**Definição 26** (Caminho Hamiltoniano). *Seja  $G$  um grafo, um caminho  $H$  é dito um caminho hamiltoniano de  $G$  se e somente se  $\forall v \in V(G)$  temos  $v \in H$ .*

**Definição 27** (Ciclo Hamiltoniano). *Seja  $G$  um grafo, um ciclo  $H$  é dito um ciclo hamiltoniano de  $G$  se somente se  $\forall v \in V(G)$  temos  $v \in H$ .*

**Definição 28** (Grafo Hamiltoniano). *Um grafo  $G$  é dito um grafo hamiltoniano se somente se exsite algum ciclo hamiltoniano em  $G$ .*

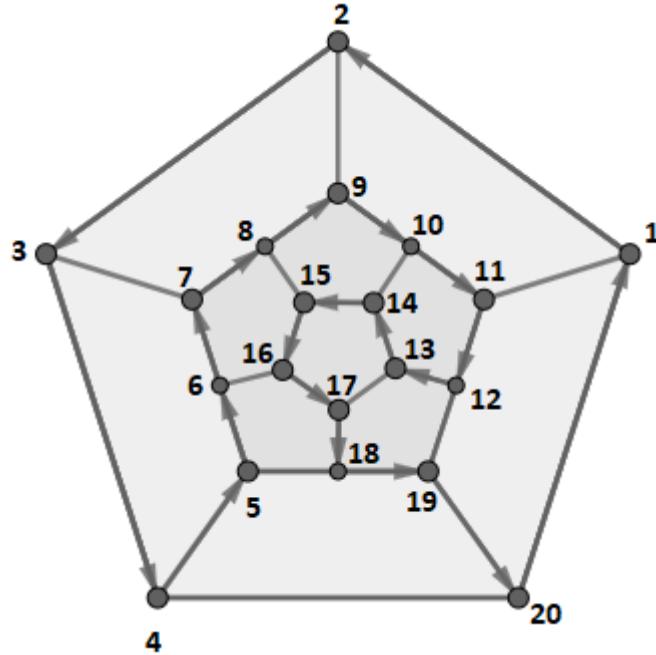


Figura 31: O grafo Dodecaedro é Hamiltoniano, com o Ciclo Hamiltoniano  $1, 2, \dots, 20$ .

Uma propriedade dos *grafos Hamiltonianos* é:

**Proposição 1** (Grafo Euleriano e Grafo Hamiltoniano). *G é um grafo Euleriano se somente se  $L(G)$  é um grafo Hamiltoniano.*

**Demonstração :** Se  $L(G)$  é um *grafo Hamiltoniano*, então existe uma *trilha fechada* em  $G$ , pois cada *vértice* de  $L(G)$  é uma *aresta* de  $G$ . Logo,  $G$  é um *grafo Euleriano*. Se  $G$  é um *grafo Euleriano*, então existe um *ciclo* que percorre todos os *vértices* em  $L(G)$ , pois cada *aresta* de  $G$  é um *vértice* de  $L(G)$ . Logo, existe um *ciclo Hamiltoniano*, o que implica  $L(G)$  é um *grafo Hamiltoniano*.  $\square$

Diferente dos *grafos Eulerianos*, em que é possível verificar se um *grafo* é *Euleriano* em tempo polinomial[19], não é conhecido um algoritmo polinomial para verificar se um *grafo* é *Hamiltoniano*. No entanto, o problema do *ciclo hamiltoniano* é um problema NP-completo[22][30]. Segue-se

**Teorema 2** (Teorema de Dirac'1952). [17] *Se  $G = (V, E)$  é um grafo Hamiltoniano com  $n \geq 3$*

vértices então  $\forall v \in V$  temos  $d(v) \geq \frac{n}{2}$ .

Note que o Teorema não serve para demonstrar que um *grafo* é *Hamiltoniano*. No entanto pode servir para demonstrar que um *grafo* não é *Hamiltoniano*. Por exemplo, o *grafo de Petersen* possui 10 vértices cada um com grau 3, o que implica  $d(v) = 3 \leq \frac{n}{2} = 5$ , ou seja, o *grafo de Petersen* não é *Hamiltoniano*.

Um problema relacionado com *caminhos Hamiltonianos* é o problema do cavalo no xadrez. Um tabuleiro de xadrez é definido como uma grade  $8 \times 8$ . O cavalo move-se de acordo com a Figura 33 sempre dentro das casas do tabuleiro. O problema do cavalo no xadrez pergunta se a partir de uma casa inicial é possível movimentar o cavalo em um percurso em que todas as casas do tabuleiro são percorridas. O problema pode ser abstraído pelo *grafo do cavalo* (Figura 32) onde os vértices são as casas do tabuleiro e as arestas conectam vértices de acordo com o movimento do cavalo.

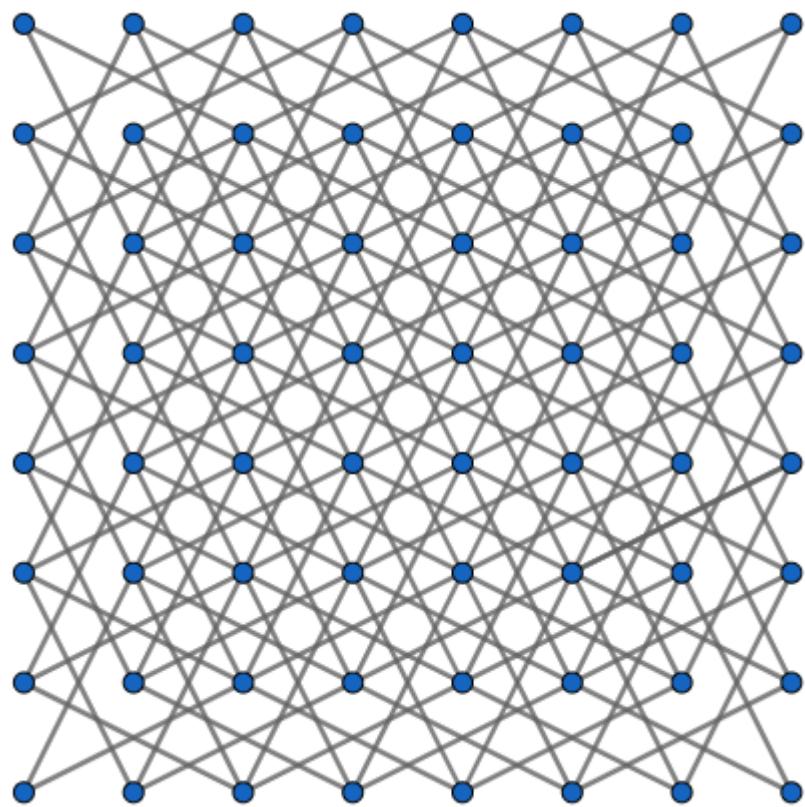


Figura 32: *Grafo do Cavalo.*

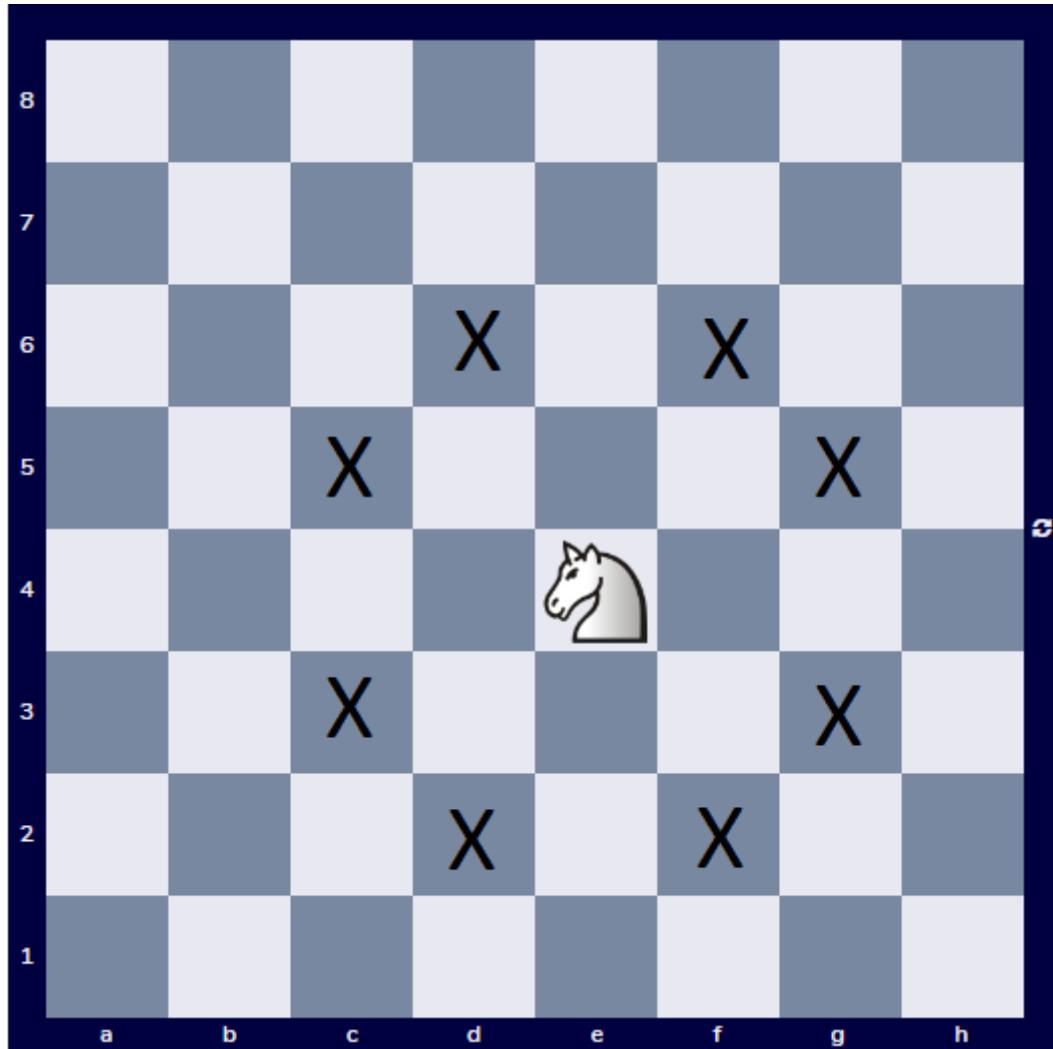


Figura 33: Movimento do Cavalo em um tabuleiro de xadrez  $8 \times 8$ .

O *ciclo Hamiltoniano* pode ser obtido por backtracking, i.e., força bruta. Mas existe uma solução heurística para o problema, que é a Regra de Warnsdorff[48], que diz deve-se escolher sempre a casa com menor número de opções de movimento. A Figura 34 ilustra um exemplo de *ciclo Hamiltoniano* obtido pela Regra de Warnsdorff:

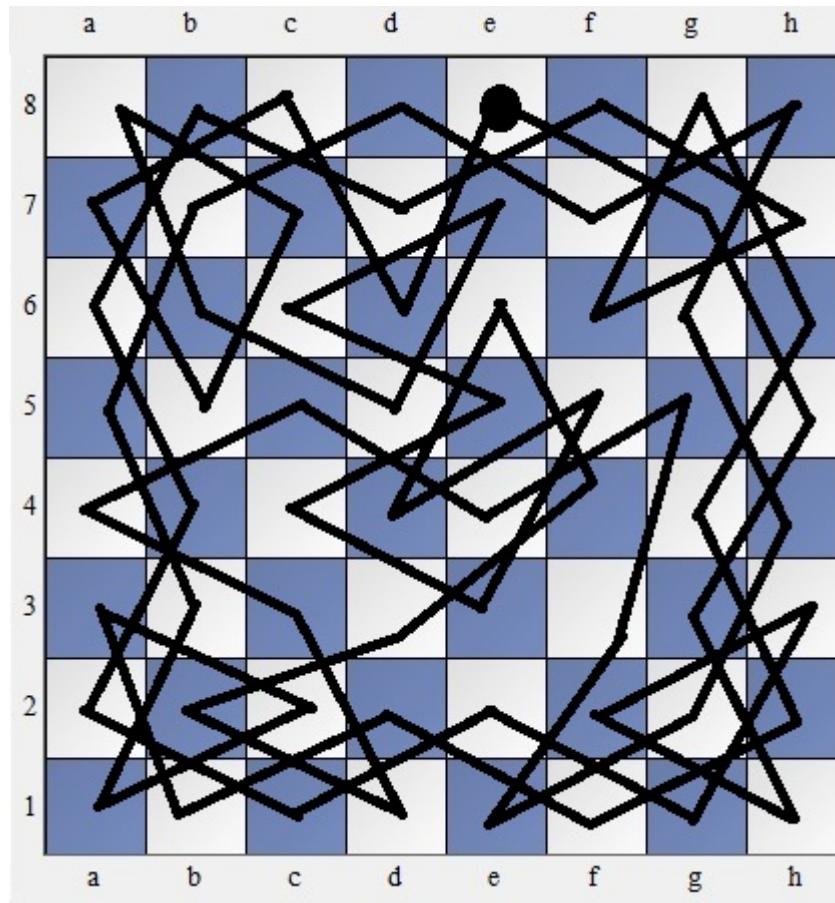


Figura 34: Exemplo de *ciclo Hamiltoniano* obtido pela Regra de Warnsdorff.

Vamos definir o conceito de *automorfismo*:

**Definição 29** (Automorfismo). *Dado um grafo  $G = (V, E)$ , um automorfismo é um isomorfismo*

$$f: G \rightarrow G.$$

Nas Definições 30 e 31 definimos 2 tipos importantes de *automorfismos*: os *grafos vértice-transitivos* e os *grafos aresta-transitivos*.

**Definição 30** (Grafo Vértice-transitivo). *Dizemos que  $G$  é vértice-transitivo se, para cada par  $u, v \in V$ , existe um isomorfismo  $f$  tal que  $f(u) = v$ .*

Um exemplo de *grafo vértice-transitivo* é o *grafo de Petersen*. As Figuras 35 e 36 apresentam uma demonstração visual:

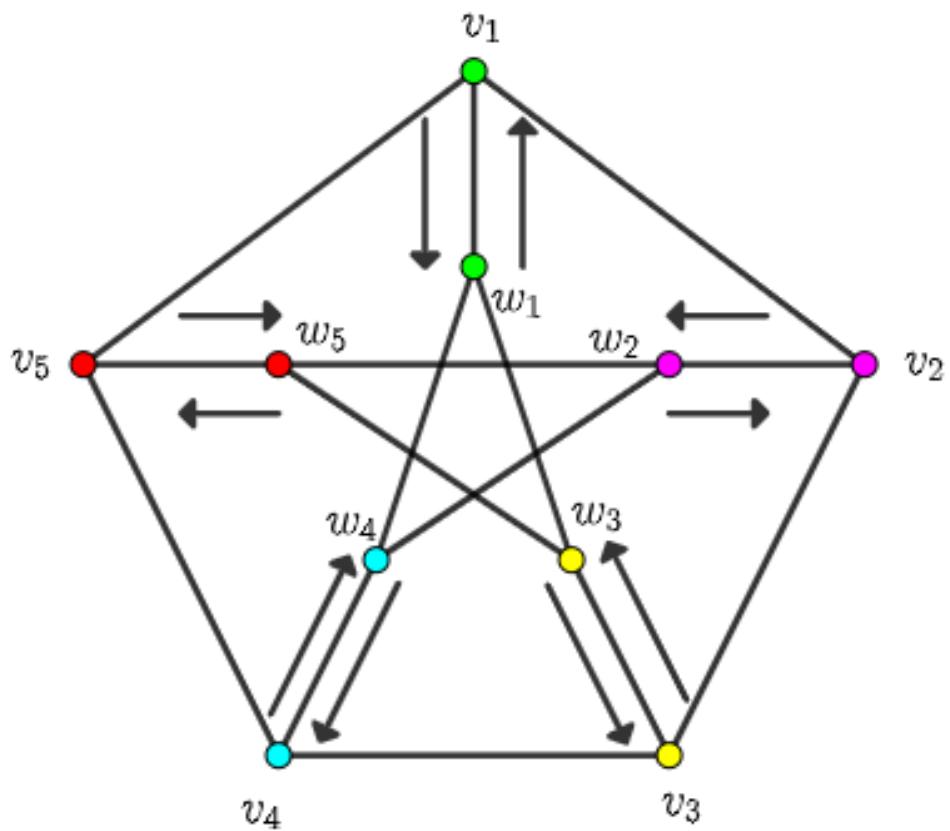


Figura 35: Observe que se permutamos  $v_1$  com  $w_1$ , podemos estabelecer um *isomorfismo* com  $f(v_i) = w_i$  e  $f(w_i) = v_i$ .

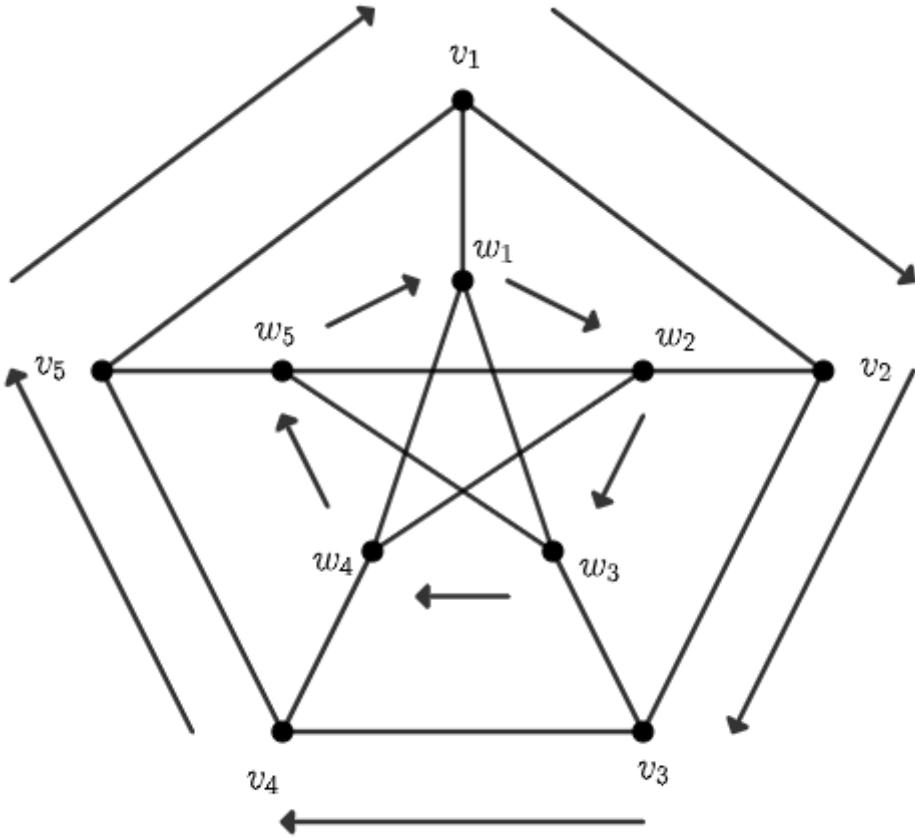


Figura 36: Se permutarmos  $v_i$  com  $v_{((i+1) \bmod 5)+1}$  ou  $w_i$  com  $w_{((i+1) \bmod 5)+1}$  com basta apenas estabelecer a relação analoga para outros vértices  $v_j$  e  $w_j$ .

Vamos denotar a permutação da Figura 35 como  $\sigma$  e da Figura 36  $\sigma'$ . Construimos uma definição recursiva  $f_1 = f$  e  $f_n = f \circ f_{n-1}$  para  $n > 1$ , onde  $f$  é uma função. Temos então  $\sigma_n = \sigma$  se  $n$  é ímpar e  $\sigma_n = id$ , onde  $id$  é a função identidade. Se permutarmos os vértices  $v_i$  e  $v_j$  com  $j > i$ , é possível ver que é dado por  $\sigma'_{j-i}$ . Logo, é possível definir todos os tipos de permutação de vértices apenas com  $\sigma$  e  $\sigma'$ . Como  $\sigma$  e  $\sigma'$  definem *isomorfismos*, então temos que para toda permutação entre 2 vértices é possível definir um *isomorfismo*. Portanto, o *grafo de Petersen* é um *grafo vértice-transitivo*.

Uma propriedade importante dos *grafos vértice-transitivos* é que são *grafos regulares*. Note que *grafos regulares* não são necessariamente *vértice-transitivos*.

**Definição 31** (Grafo Aresta-transitivo). *Dizemos que  $G$  é aresta-transitivo se, para todo par  $e, e' \in E$  existe um isomorfismo  $f$  tal que  $f(e) = f(e')$ .*

Um Teorema que ajuda a verificar se um *grafo* é *aresta-transitivo* é:

**Teorema 3** (Andersen et al'1992). [3]  $G = (V, E)$  é um *grafo aresta-transitivo* se e somente se  $\forall e_1, e_2$  temos que  $G_1 = (V, E \setminus \{e_1\})$  e  $G_2 = (V, E \setminus \{e_2\})$  são *grafos isomorfos*.

Na Figura 37 temos um exemplo de um *grafo* que não é *aresta-transitivo*, demonstrado pelo Teorema 3, e a na Figura 38 um exemplo de um *grafo aresta-transitivo*, demonstrado pelo Teorema 3.

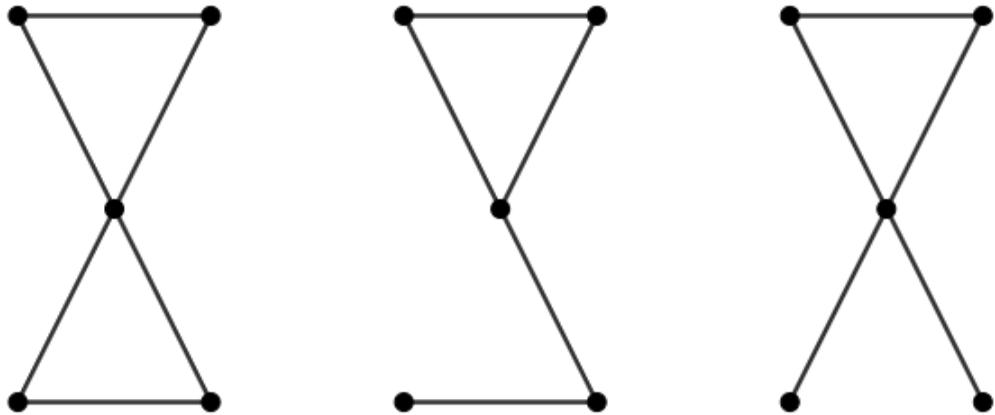


Figura 37: O *grafo* da esquerda não é um *grafo aresta-transitivo*. Note pelos *grafos* do meio e da direita, removemos *arestas* diferentes e os *grafos* não são *isomorfos*.

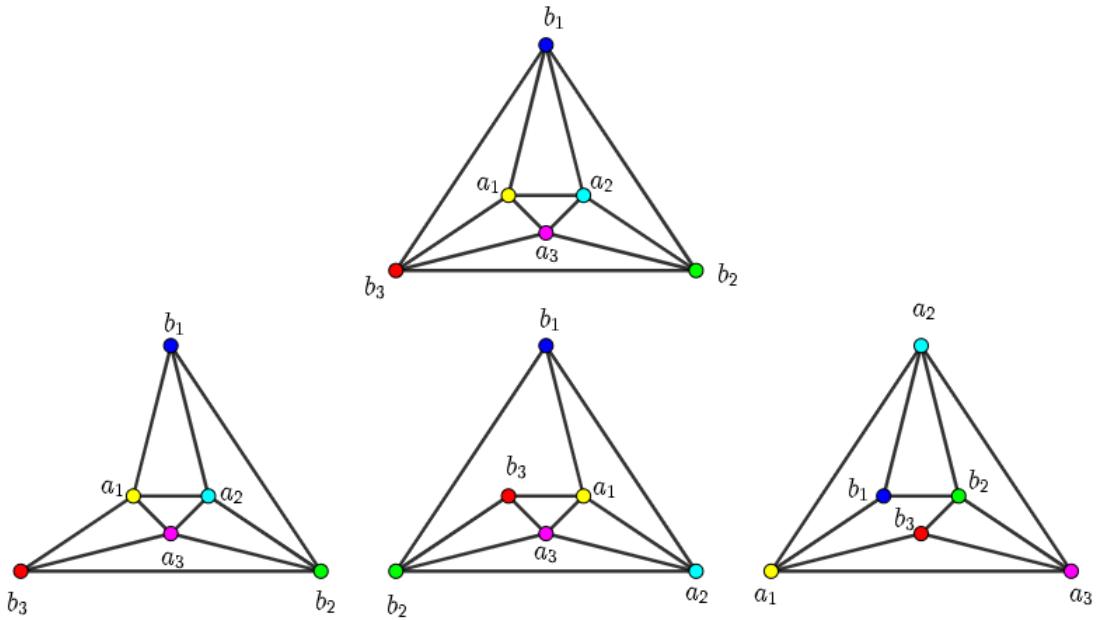


Figura 38: O grafo octaedro na parte superior da imagem, é uma *grafo aresta-transitivo*. Note que retirando diferentes tipos de arestas geram *grafo isomorfos*.

Vamos agora definir *Clique* e *Conjunto independente*:

**Definição 32** (Clique). *Definimos uma clique C de um grafo G, como  $C \subseteq V(G)$  tal que  $\forall v, w \in C$  temos  $vw \in E(G)$ .*

**Definição 33** (Conjunto Independente). *Definimos um conjunto independente S de um grafo G, como  $S \subseteq V(G)$  tal que  $\forall v, w \in S$  temos  $vw \notin E(G)$ .*

Note que *clique* e *conjunto independente* são subconjuntos de vértices de um grafo, isto é, não são *subgrafos*. Desse modo, dizer que  $C$  é uma *clique* com  $n$  elementos, não é o mesmo que dizer que  $C$  é um *grafo completo*  $K_n$ .

**Definição 34** (Número de Clique). *O número de clique  $\omega(G)$  de um grafo G é o tamanho da maior clique em G.*

**Definição 35** (Número de Independência). Definimos  $\alpha(G)$ , o número de independência de um grafo  $G$ , como o tamanho do maior conjunto independente em  $G$ .

A Figura 39 temos exemplos de *cliques* e *conjunto independentes*:

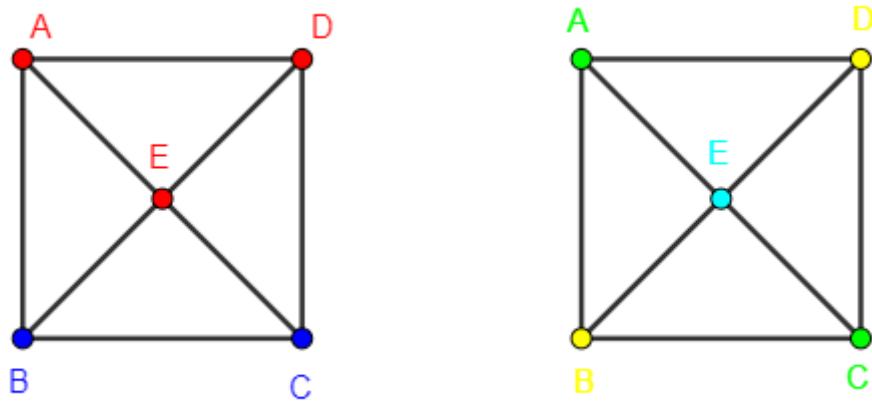


Figura 39: Os conjuntos  $\{A, D, E\}$  e  $\{B, C\}$  são exemplos de *cliques* no grafo. Os conjuntos  $\{A, C\}$ ,  $\{B, D\}$  e  $\{E\}$  são exemplos de *conjuntos independentes* no grafo. No caso desse grafo  $G$  temos  $\omega(G) = 3$  e  $\alpha(G) = 2$ .

O Número de Clique e Número de Independência de um grafo são invariantes por *isomorfismo*, isto é, se  $G$  isomorfo a  $G'$  então  $\omega(G) = \omega(G')$  e  $\alpha(G) = \alpha(G')$ . Em linguagem de topologia podemos chamar  $\omega(G)$  e  $\alpha(G)$  de *invariantes topológicas*.

Vamos definir o que é uma *Clique Máxima*:

**Definição 36** (Clique Máxima). Uma clique máxima  $C$  de um grafo  $G$  é uma clique de  $G$  tal que não existe em  $G$  uma clique  $C' \neq C$  com  $|C'| > |C|$ . O número de clique de  $G$  satisfaz que  $\omega(G) = |C|$ , ou seja, o número de clique é o número de vértices da clique máxima.

Uma propriedade importante é:

**Proposição 2** (Número de Clique e Número de Independência).  $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ .

**Demonstração :** Se  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma *clique* em  $G$ , então  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  temos  $v_i$  e  $v_j$  são vértices adjacentes. Logo, em  $\overline{G}$  temos que  $v_i$  e  $v_j$  são não são vértices adjacentes  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , o que implica  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é um *conjunto independente*. Logo,  $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ .

□

Essa propriedade permite observar a importancia do conceito de *grafo complementar*.

Do conceito de *clique* surge o conceito de particionar os vértices de um *grafo* em cliques.

Definimos *cobertura de cliques* e *número de cobertura de cliques*:

**Definição 37** (Cobertura de Cliques). *Uma cobertura de cliques de um grafo  $G$  é uma coleção  $\mathcal{Q}$  que satisfaz:*

1. *Se  $X \in \mathcal{Q}$  então  $X$  é uma clique de  $G$ ;*
2. *Se  $X, Y \in \mathcal{Q}$  com  $X \neq Y$ , então  $X \cap Y = \emptyset$ ;*
3.  $\bigcup_{X \in \mathcal{Q}} X = V(G)$ .

Segue-se a *invariante topológica* correspondente:

**Definição 38** (Número de Cobertura de Cliques). *O número de cobertura de cliques  $\theta(G)$  é o número mínimo onde existe uma cobertura de cliques  $\mathcal{Q}$  de  $G$  com  $\theta(G) = |\mathcal{Q}|$ .*

A Figura 40 ilustar um exemplo de *cobertura de cliques*:

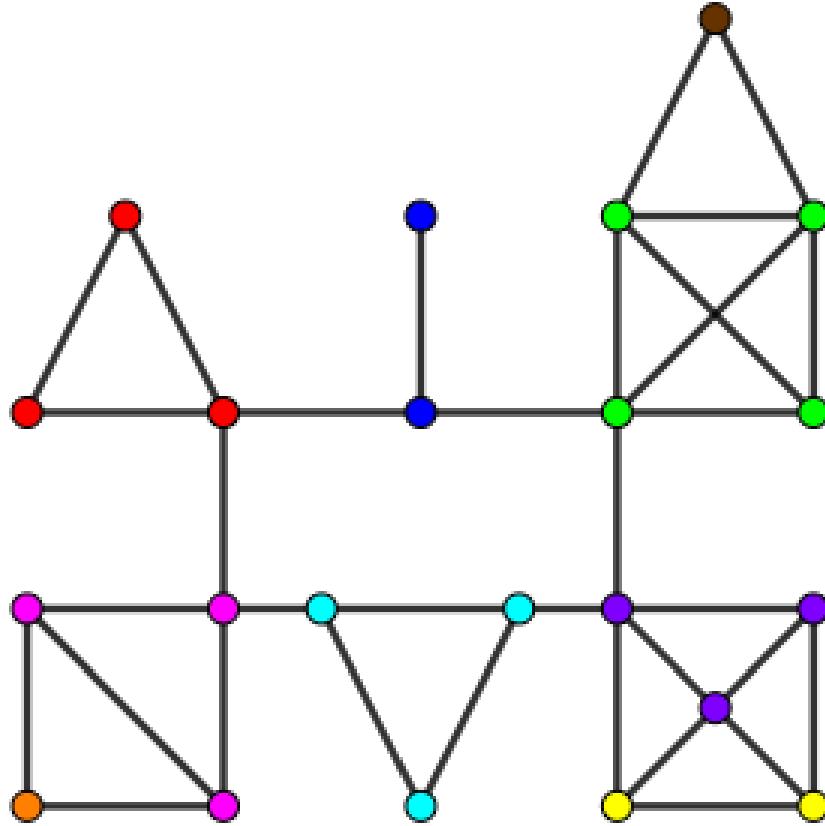


Figura 40: Uma *cobertura de cliques* de um grafo  $G$ . Cada cor representa uma clique da cobertura de cliques e  $\theta(G) = 9$ .

Como consequência direta da definição de *cobertura de cliques* temos:

**Proposição 3** (Limite Inferior de  $\theta(G)$ ).  $\theta(G) \geq \lceil \frac{|V(G)|}{\omega(G)} \rceil$ .

É possível ver que  $\omega(G)$  é o tamanho máximo de uma *clique* em  $G$ . Logo, uma *cobertura de cliques* onde toda a *clique* possui tamanho  $\omega(G)$  é uma *cobertura de clique* com tamanho mínimo. Supondo cada *clique* com tamanho  $\omega(G)$ , temos  $\theta(G) \geq \lceil \frac{|V(G)|}{\omega(G)} \rceil$ . Em particular, no *grafo* de estudo deste trabalho, o *grafo de Kneser*, temos  $\theta(K(n, k)) = \lceil \frac{|V(K(n, k))|}{\omega(K(n, k))} \rceil$ .

Um conceito importante é a *coloração* de *grafos*. Existem diversos tipos de *coloração*

de grafos tais como: *coloração de vértices*, *colorações de arestas*, *coloração total*, *coloração fracional* e etc. Vamos definir apenas a *coloração de vértices* e *coloração de arestas* e respectivamente as *invariantes topológicas* correspondentes *número cromático* e *índice cromático*:

**Definição 39** (Coloração de vértices). *Definimos uma coloração de vértices de  $G = (V, E)$  como uma função  $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  tal que se  $uv \in E$ , então  $c(u) \neq c(v)$ .*

**Definição 40** (Grafo  $k$ -colorível).  *$G$  é dito um grafo  $k$ -colorível se existe alguma coloração  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ .*

**Definição 41** (Número Cromático). *Seja  $G$  um grafo, definimos o número cromático  $\chi(G)$  de  $G$  como o menor número tal que  $G$  é  $\chi(G)$ -colorível.*

A Figura 41 ilustra um exemplo de *coloração de vértices*:

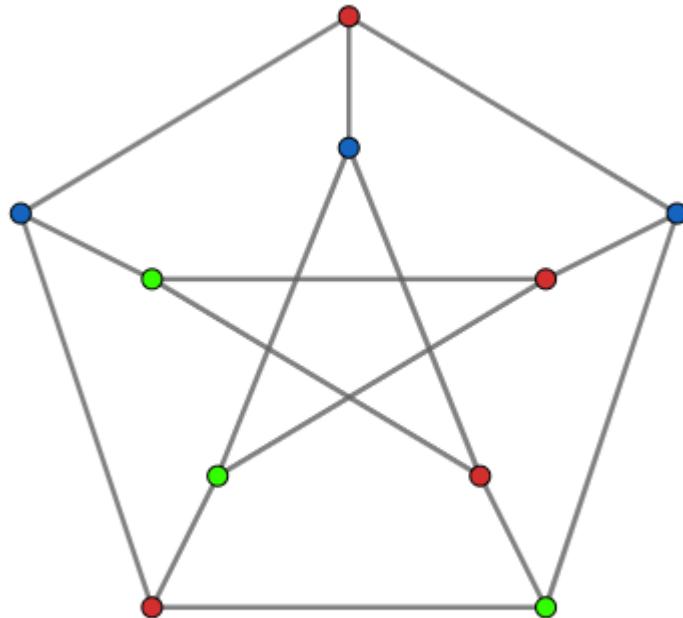


Figura 41: O grafo de Petersen é 3-colorível, i.e.,  $\chi(G) = 3$ .

Um resultado direto da definição é:

**Proposição 4** (Grafo 1-colorível).  $\chi(G) = 1$  se e somente se  $G$  é um grafo sem arestas.

*Demonstração :* Se  $\chi(G) = 1$ , então não existem vértices adjacentes em  $G$ , o que implica  $G$  é um grafo sem arestas. Se  $G$  é um grafo sem arestas então não existe vértices adjacentes, o que implica que podemos *colorir*  $G$  usando apenas uma cor.  $\square$

A Figura 42 ilustra essa propriedade:

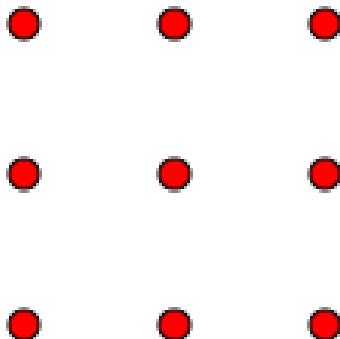


Figura 42: *Coloração de vértices* de um grafo sem arestas. Note que  $\chi(G) = 1$  se e somente se  $G$  é um grafo sem arestas.

Por essa proposição temos que se um grafo possui pelo menos 1 aresta temos que  $\chi(G) \geq 2$ . Para um grafo completo  $K_n$  temos  $\chi(K_n) = n$ . A Figura 43 ilustra essa propriedade:

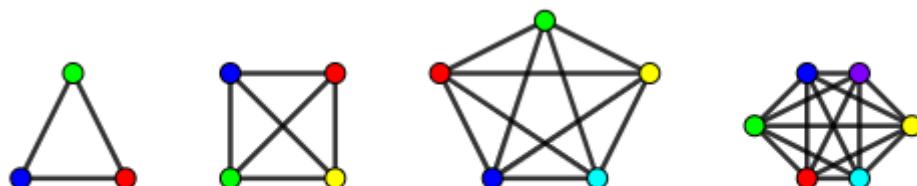


Figura 43: *Coloração de vértices* de  $K_3$ ,  $K_4$ ,  $K_5$  e  $K_6$ .

Essa propriedade implica em  $\chi(G) \leq \omega(G)$ . Se um vértice  $v$  possui grau  $d(v)$  cada um com uma cor distinta, então temos que colorir  $v$  com a cor  $d(v) + 1$ . Então se o grau máximo é  $\Delta(G)$ , então temos  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ . Logo, temos:

**Teorema 4** (Limite de  $\chi(G)$ ).  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

O próximo Teorema demonstra que existem apenas 2 tipos de *grafo* que possuem número cromático  $\Delta(G) + 1$ :

**Teorema 5** (Teorema de Brooks'1941). [7] Se  $G$  não é um grafo completo e  $G$  não é um ciclo  $C_n$  com  $n$  ímpar, então  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .

Isto quer dizer que apenas  $K_m$  e  $C_n$  com  $n$  ímpar possuem número cromático  $\Delta(G) + 1$ .

Vamos definir 2 tipos de *grafos* quanto ao seu número cromático:

**Definição 42** (Grafo Perfeito).  $G$  é um grafo perfeito se e somente se  $\chi(G) = \omega(G)$ .

Na Figura 44 temos que  $W_4$ ,  $W_6$  são grafos perfeitos e  $W_3$ ,  $W_5$  não são grafos perfeitos:

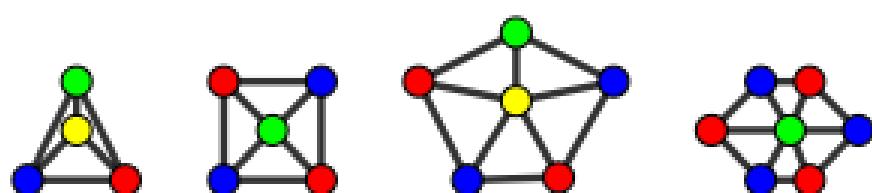


Figura 44: Coloração de vértices de  $W_3$ ,  $W_4$ ,  $W_5$  e  $W_6$ .

**Definição 43** (Grafo Bipartido). Um grafo  $G$  é bipartido se e somente se  $\chi(G) = 2$ .

As Figuras 45, 46, 47 e 48 são exemplos de *grafos bipartidos*:



Figura 45: *Coloração de vértices* de  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  e  $P_5$ .

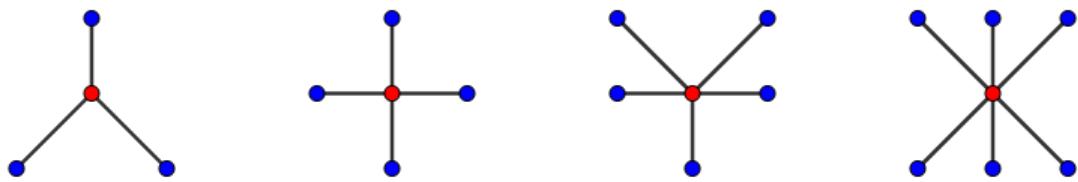


Figura 46: *Coloração de vértices* de  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_5$  e  $S_6$ .

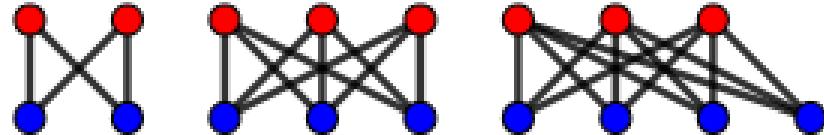


Figura 47: *Coloração de vértices* de  $K_{2,2}$ ,  $K_{3,3}$  e  $K_{3,4}$ .

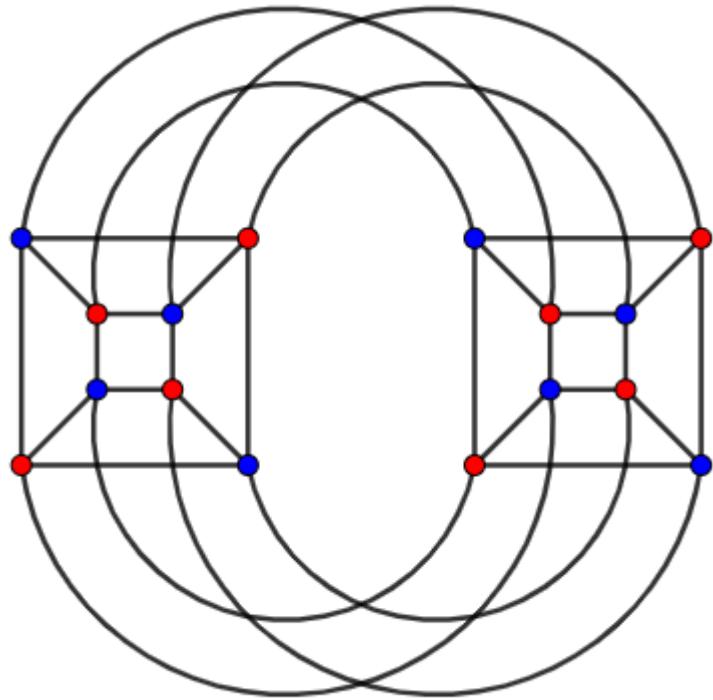


Figura 48: *Coloração de vértices de  $Q_4$ .*

O Teorema que caracteriza os *grafos bipartidos* é:

**Teorema 6** (Teorema do Grafo Bipartido). [16]  $\chi(G) = 2 \iff \nexists H$  subgrafo de  $G$  isomorfo a  $C_n$  com  $n$  ímpar.

Observe que esse Teorema tem como fundamento a propriedade que *ciclos* com número de vértices ímpar possuem *número cromático* 3 e *ciclos* com número de vértices par são *bipartidos*. A Figura 49 ilustra essa propriedade:

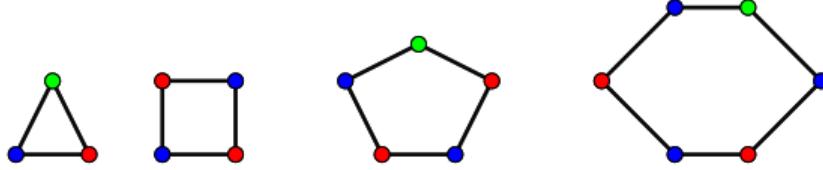


Figura 49: *Coloração de vértices* de  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  e  $C_6$ .

Uma aplicação interessante da *coloração de vértices* é o jogo Sudoku (Figura 50), cujas regras implicam em preencher com números de 1 até 9 uma grade  $9 \times 9$  dividida em 9 grades menores  $3 \times 3$  de modo que não exista repetição de números em cada coluna, linha ou nas grades menores.

5	3			7					
6			1	9	5				
	9	8				6			
8			6				3		
4		8		3			1		
7			2			6			
	6				2	8			
		4	1	9			5		
			8			7	9		
5	3	4	6	7	8	9	1	2	
6	7	2	1	9	5	3	4	8	
1	9	8	3	4	2	5	6	7	
8	5	9	7	6	1	4	2	3	
4	2	6	8	5	3	7	9	1	
7	1	3	9	2	4	8	5	6	
9	6	1	5	3	7	2	8	4	
2	8	7	4	1	9	6	3	5	
3	4	5	2	8	6	1	7	9	

Figura 50: Sudoku e a solução correspondente.

Note que podemos abstrair o jogo como um *grafo*  $G$ , onde cada célula da grade é um *vértice*, e existe *aresta* entre 2 vértices se as células correspondentes estiverem na mesma coluna ou linha ou grade menor. Note por esta abstração, cada coluna, linha e grade menor

possui vértices adjacentes dois a dois. Como cada coluna, linha e grade menor possuem 9 vértices, então  $\omega(G) = 9$ . Podemos observar também, que a grade  $9 \times 9$  é dividida por 9 grades menores disjuntas, desse modo temos uma *cobertura de clique* e não existe *cobertura de clique* menor. Logo,  $\theta(G) = 9$ . Observe que se cada número  $1, \dots, 9$  pode ser associado a uma cor, desse modo definimos uma *9-coloração de vértices*. Temos também  $\chi(G) = 9$ , pois  $\omega(G) \leq \chi(G)$ . Isso implica que  $G$  é um *grafo perfeito*. A Figura 51 ilustra essa abstração:

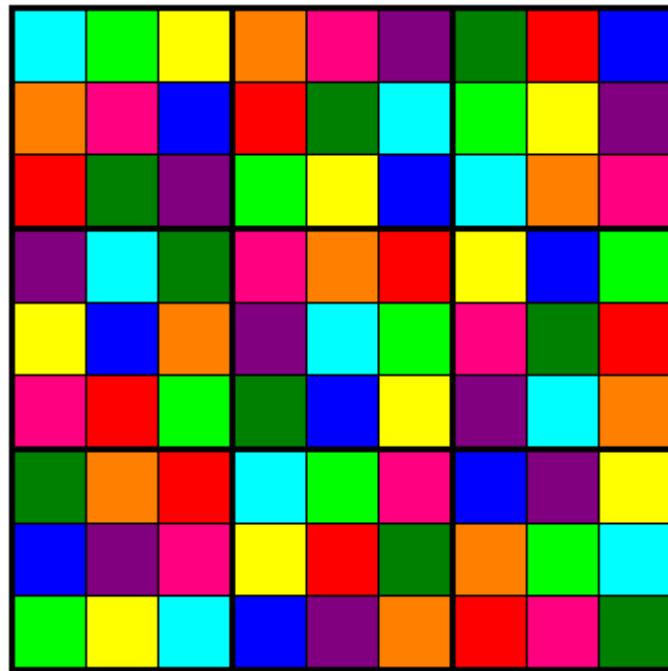


Figura 51: *Coloração* do Sodoku corresponde à solução da Figura 50.

Tomando a definição de *coloração de vértices*, podemos observar que cada conjunto de vértices de mesma cor é um *conjunto independente*, caso contrário o *grafo* não poderia ser *colorido* com essa *coloração*. Desse modo, podemos imaginar que uma *coloração de vértices* é uma *partição* de um *grafo* em *conjuntos independentes* e que o *número cromático* seria o tamanho da menor *partição* em *conjuntos independentes* do *grafo*. Como uma *clique* em um *grafo* é um *conjunto independente* no seu respectivo *grafo complementar*, então podemos inferir:

**Proposição 5** (Número Cromático e Número de Cobertura de Cliques).  $\chi(G) = \theta(\overline{G})$ .

Um exemplo que ilustra essa propriedade está na Figura 52:

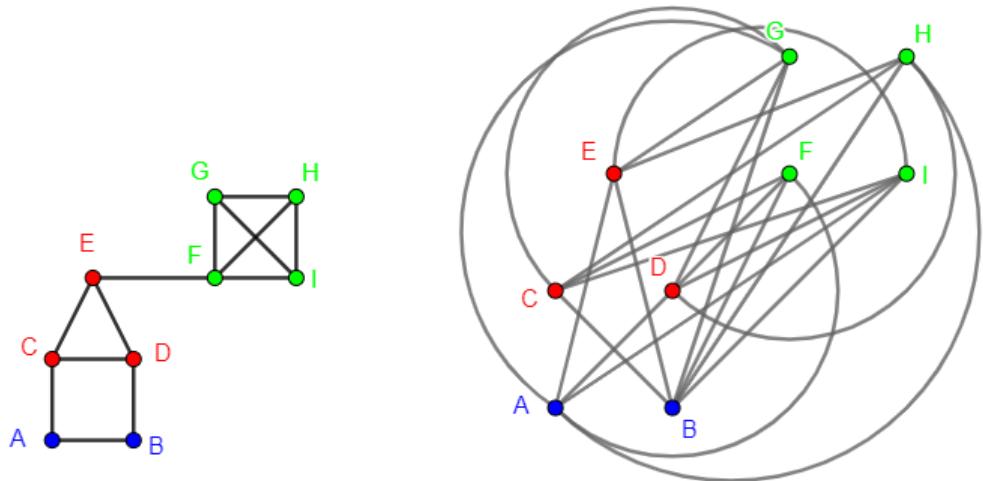


Figura 52: À esquerda temos uma *cobertura de cliques* no grafo  $G$ , onde cada cor nos vértices indica uma *clique*. Temos que  $\theta(G) = 3$ . À direita temos a *coloração de vértices* de  $\bar{G}$ . Temos que  $\chi(\bar{G}) = 3$ . Podemos observar que a propriedade  $\theta(G) = \chi(\bar{G})$ .

Como  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ , então obtemos analogamente:

**Proposição 6** (Limite de  $\theta(G)$ ).  $\alpha(G) \leq \theta(G) \leq \delta(G) + 1$ .

O problema de achar o *número cromático* de um *grafo* é um problema NP-Completo.

No entanto, existe um algoritmo para verificar se um *grafo* é 2-colorível em tempo polinomial.

A Figura 53 ilustra esse algoritmo:

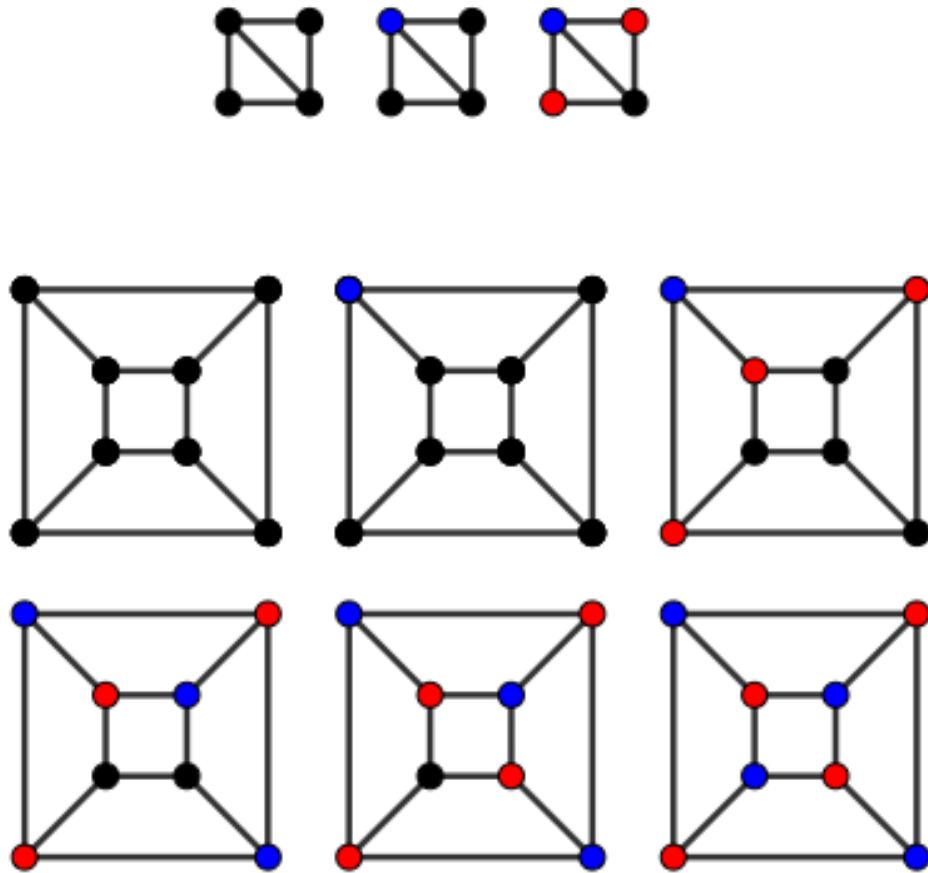


Figura 53: Observe que existe uma algoritmo polinomial para testar se um *grafo* é 2-colorível.

Basta escolher um *vértice* arbitrário e atribuir uma *cor* arbitrária, e tomar os *vértices adjacentes* que ainda não foram *coloridos* e atribuir uma *cor* diferente, e repetir o processo até terminar a *coloração* ou então ser verificada a impossibilidade de *colorir* o *vértice* com 2 *cores*. No primeiro caso temos um *grafo* que não é 2-colorível, e no segundo caso temos um *grafo* 2-colorível. Não é conhecido um algoritmo polinomial para obter uma *k-coloração* de um *grafo* onde  $k > 2$ .

**Definição 44** (Coloração de Arestas). *Uma coloração de arestas de G é uma função  $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  tal que se  $uv, uw \in E(G)$ ,  $v \neq w$ , então  $c(uv) \neq c(uw)$ .*

**Definição 45** (Grafo k-arestas-colorível). *Um grafo G é dito k-arestas-colorível se existe uma*

coloração de arestas  $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ .

**Definição 46** (Índice Cromático). *Definimos o índice cromático  $\chi'(G)$  de um grafo  $G$ , como o menor número tal que  $G$  é  $\chi'(G)$ -aresta-colorível.*

A Figura 54 ilustra um exemplo de *coloração de arestas*:

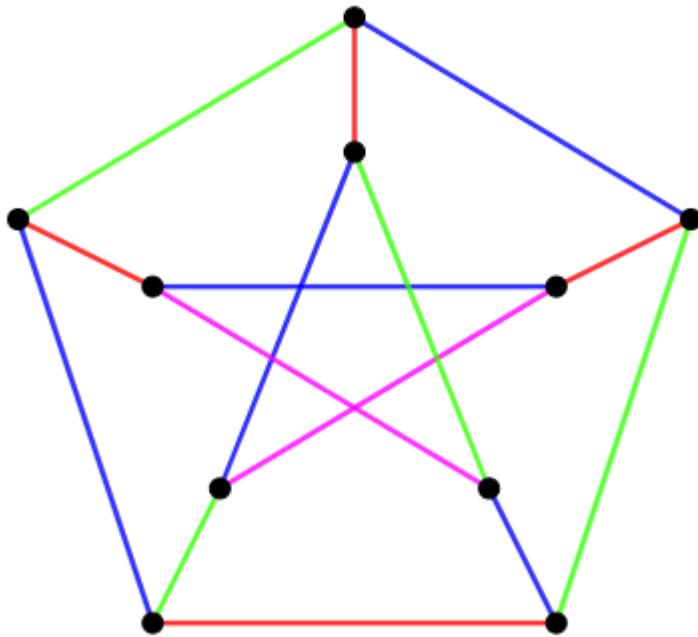


Figura 54: O Grafo de Petersen é 4-aresta-colorível, i.e.,  $\chi'(G) = 4$ .

Dado um *grafo*  $G$ , como  $L(G)$  os *vértices* são as *arestas* de  $G$  então:

**Proposição 7** (Índice Cromático e Número Cromático).  $\chi'(G) = \chi(L(G))$ .

Um exemplo de aplicação dessa propriedade é a *coloração de arestas* dos *ciclos*. Um *grafo*  $C_n$  é *isomorfo* a  $L(C_n)$ . Logo,  $\chi'(C_n) = \chi(L(C_n)) = \chi(C_n)$ . A Figura 55 ilustra esse resultado:

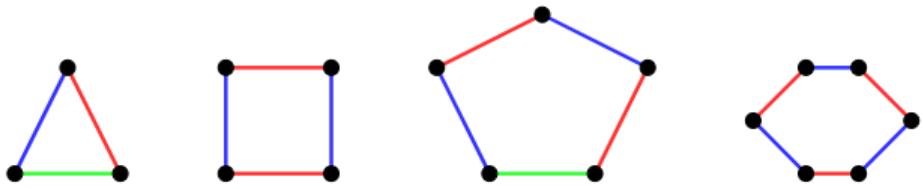


Figura 55: *Coloração de arestas* de  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  e  $C_6$ .

Dado um *grafo*  $G$ , temos que  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ , pois em um *vértice* existem  $\Delta(G)$  *arestas* adjacentes duas a duas, o que implica que é necessário  $\Delta(G)$  *cores* para *colorir* essas *arestas*. O próximo Teorema delimita o *índice cromático*:

**Teorema 7** (Teorema de Vizing'1965). [47]  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

Desse modo existem apenas 2 valores possíveis para  $\chi'(G)$ , o que permite dividir os *grafos* em 2 categorias:

**Definição 47** (Grafo Classe 1).  $G$  é um *grafo classe 1* se e somente se  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .

**Definição 48** (Grafo Classe 2).  $G$  é um *grafo classe 2* se e somente se  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ .

As Figuras 56, 57, 58 e 59 temos exemplos de *grafos classe 1*:



Figura 56: *Coloração de arestas* de  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  e  $P_5$ .

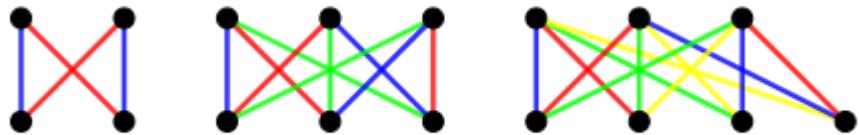


Figura 57: *Coloração de arestas de  $K_{2,2}$ ,  $K_{3,3}$  e  $K_{3,4}$ .*



Figura 58: *Coloração de arestas de  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_5$  e  $S_6$ .*

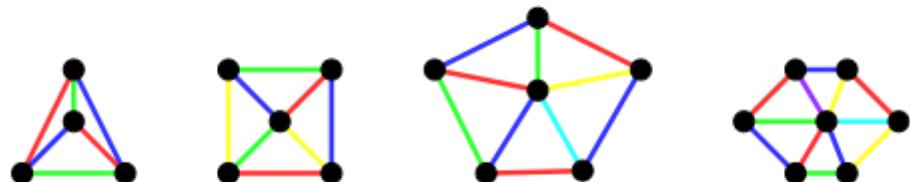


Figura 59: *Coloração de arestas de  $W_3$ ,  $W_4$ ,  $W_5$  e  $W_6$ .*

Na Figura 60 temos exemplos de *grafos classe 2*:

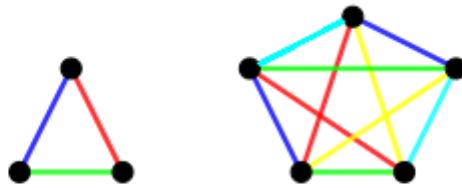


Figura 60: *Coloração de arestas* de  $K_3$  e  $K_5$ .

Se um *grafo* for *bipartido*, temos um Teorema que caracteriza o seu *índice cromático*:

**Teorema 8** (Teorema de König'1931). [35]  $\chi(G) = 2 \implies \chi'(G) = \Delta(G)$ .

Vamos definir um conceito analógico ao *conjunto independente* de vértices para arestas:

**Definição 49** (Emparelhamento). *Definimos uma emparelhamento em um grafo G ao conjunto de arestas  $M \subseteq E(G)$  tal que  $\forall e, e' \in M$  temos que e não é adjacente a  $e'$ .*

Na Figura 61 temos exemplos de *emparelhamentos*:

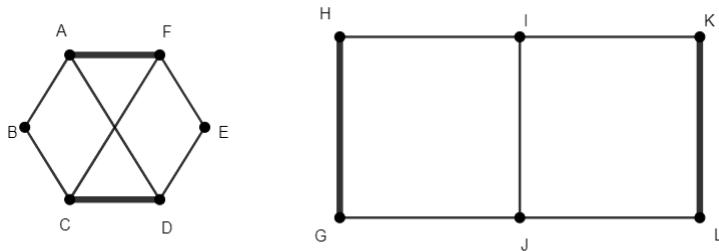


Figura 61: Emparelhamentos.

Vamos definir 2 tipos importantes de *emparelhamentos*:

**Definição 50** (Emparelhamento Maximal). *Um emparelhamento  $M$  de um grafo  $G$  é dito maximal se e somente se  $\nexists e \in E(G)$  tal que  $M + \{e\}$  seja emparelhamento.*

**Definição 51** (Emparelhamento Perfeito). *Dize-mos que um emparelhamento  $M$  no grafo  $G$  é um emparelhamento perfeito se  $\forall v \in V(G)$  temos que  $v$  é uma extremidade de um aresta  $e \in M$ .*

Na Figura 62 temos um exemplo de *emparelhamento perfeito* e *emparelhamento maximal*:

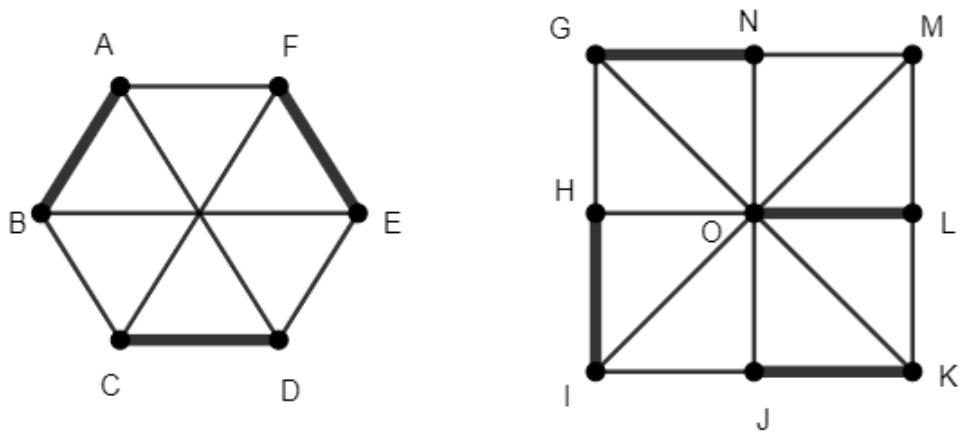


Figura 62: Um exemplo de *emparelhamento perfeito* (à esquerda) e um exemplo de *emparelhamento maximal* que não é *emparalhamento perfeito*.

Vamos definir um tipo de *subgrafo*:

**Definição 52** (Fator). *Definimos um fator  $H$  de  $G$ , como um subgrafo de  $G$  tal que  $V(H) = V(G)$ .*

Em particular, temos a definição *regular* desse tipo de *subgrafo*:

**Definição 53** ( $k$ -fator). *Dizemos que  $H$  é um  $k$ -fator de um grafo  $G$ , com  $k \in \mathbb{N}$  e  $k \geq 1$ , se e somente se  $H$  é um fator de  $G$   $k$ -regular.*

A Figura 63 ilustra um exemplo de um *fator* e de um  *$k$ -fator*:

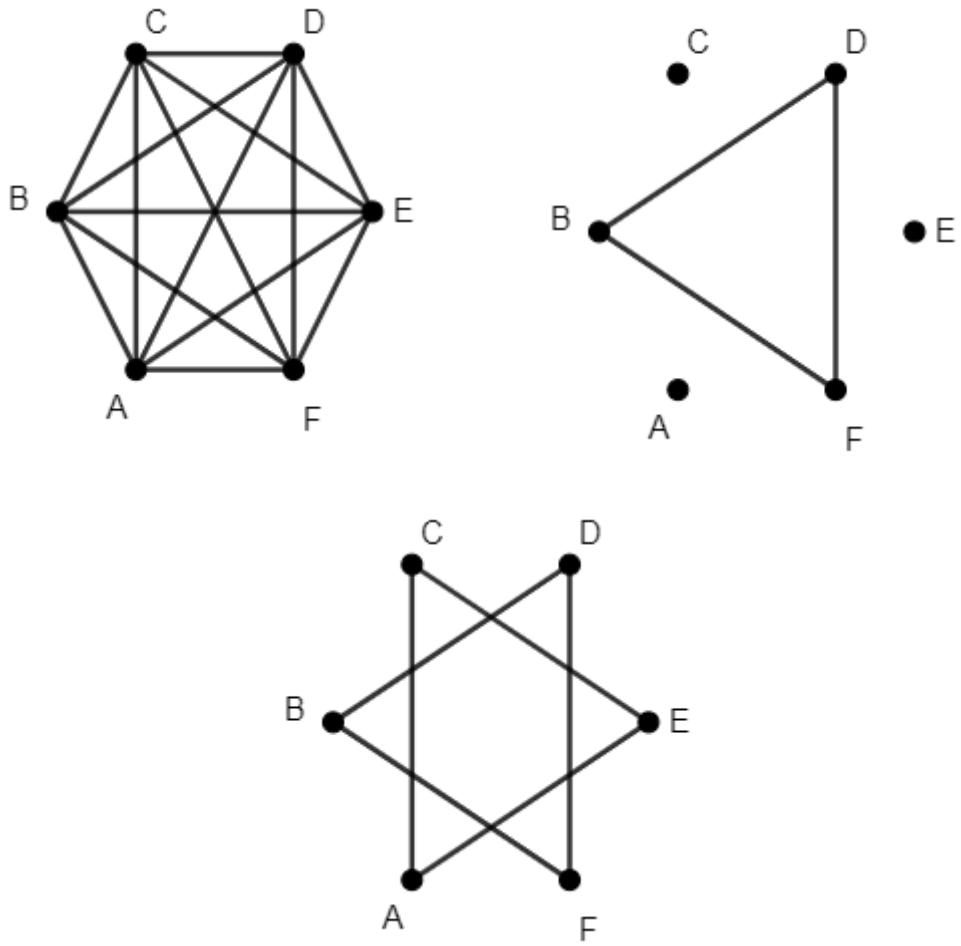


Figura 63: Um *grafo*, um *fator* desse *grafo* e um *2-fator* desse *grafo*.

Se particionar-mos um *grafo* em  $k$ -fatores temos:

**Definição 54** ( $k$ -fatoração). *Dizemos que*  $\mathcal{F} = \{H_1, H_2, \dots, H_t\}$ , *é uma  $k$ -fatoração de um grafo*  $G$  *se e somente se*  $\bigcup_{i=1}^t E(H_i) = E(G)$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, t\}$ ,  $i < j$ ,  $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$  *e*  $\forall H \in \mathcal{F}$  *temos*  $H$  *é um  $k$ -fator.*

**Definição 55** (Grafo  $k$ -fatorável). *Dizemos que um grafo*  $G$  *é  $k$ -fatorável se*  $G$  *admite uma  $k$ -fatoração.*

Nas Figuras 64 e 65 temos respectivamente exemplos de grafos 1-fatoráveis e 2-fatoráveis.

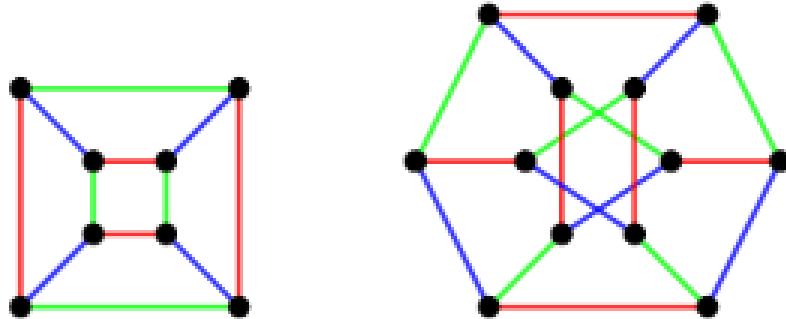


Figura 64: Exemplos de *grafos 1-fatoráveis* e cada cor representa um *1-fator*.

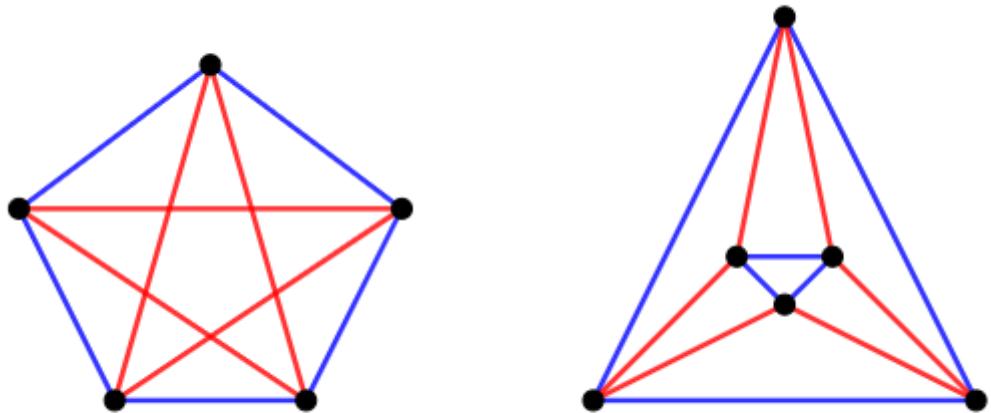


Figura 65: Exemplos de *grafos 2-fatoráveis* e cada cor representa um *2-fator*.

A seguir temos uma propriedade importante de *grafos 1-fatoráveis*:

**Proposição 8** (Condição de 1-fatorabilidade). *Se  $G$  é 1-fatorável, então  $G$  é  $k$ -regular.*

**Demonstração:** Em 1-fatoração a cada 1-fator temos uma *aresta* que parte de um *vértice*. Se

existirem  $k$  1-fatores nessa 1-fatoração então temos que de cada vértice partem  $k$  arestas. Logo,  $G$  é um grafo  $k$ -regular.  $\square$

Note que o inverso não necessariamente é verdadeiro. Nem todo o grafo regular é 1-fatorável. Mas pode ser usado por exemplo para provar que um grafo não é 1-fatorável. Por exemplo,  $K_{2,3}$  não é 1-fatorável pois não é um grafo  $k$ -regular.

Podemos também entender uma 1-fatoração como uma partição de arestas em *emparelhamentos perfeitos*:

**Proposição 9** (Emparelhamento Perfeito e 1-fator). *Se  $G = (V, E)$  é um grafo e  $F = (V, E')$  é um 1-fator, então  $E'$  é um emparelhamento perfeito de  $G$ .*

**Demonstração:** Note que se  $F$  é 1-fator então cada vértice possui grau 1, o que implica que não existem 2 arestas adjacentes entre si. Como  $F$  possui todos os vértices de  $G$  então  $F$  é um emparelhamento perfeito.  $\square$

Segue-se uma propriedade que relaciona uma 1-fatoração com uma *coloração de arestas*:

**Proposição 10** (Coloração de Arestras e 1-fatoração). *Uma 1-fatoração de um grafo  $k$ -regular  $G$  é uma  $k$ -coloração de arestras de  $G$ .*

**Demonstração:** Uma 1-fatoração particiona as arestras de um grafo em um 1-fatores. Se  $G$  é  $k$ -regular então a 1-fatoração particiona as arestras em  $k$  1-fatores. Como cada 1-fator possui arestras que não são adjacentes entre si, então é possível colorir as arestras de um 1-fator com apenas 1 cor. Como são  $k$  1-fatores temos uma  $k$ -coloração de arestras.  $\square$

Como relação a grafos 2-fatoráveis temos o seguinte Teorema:

**Teorema 9** (Petersen'1891). [39] *Um grafo  $G$  é 2-fatorável se e somente se  $G$  é  $2k$ -regular onde  $k \in \mathbb{N}$ .*

## 2.2 Número de Cruzamentos

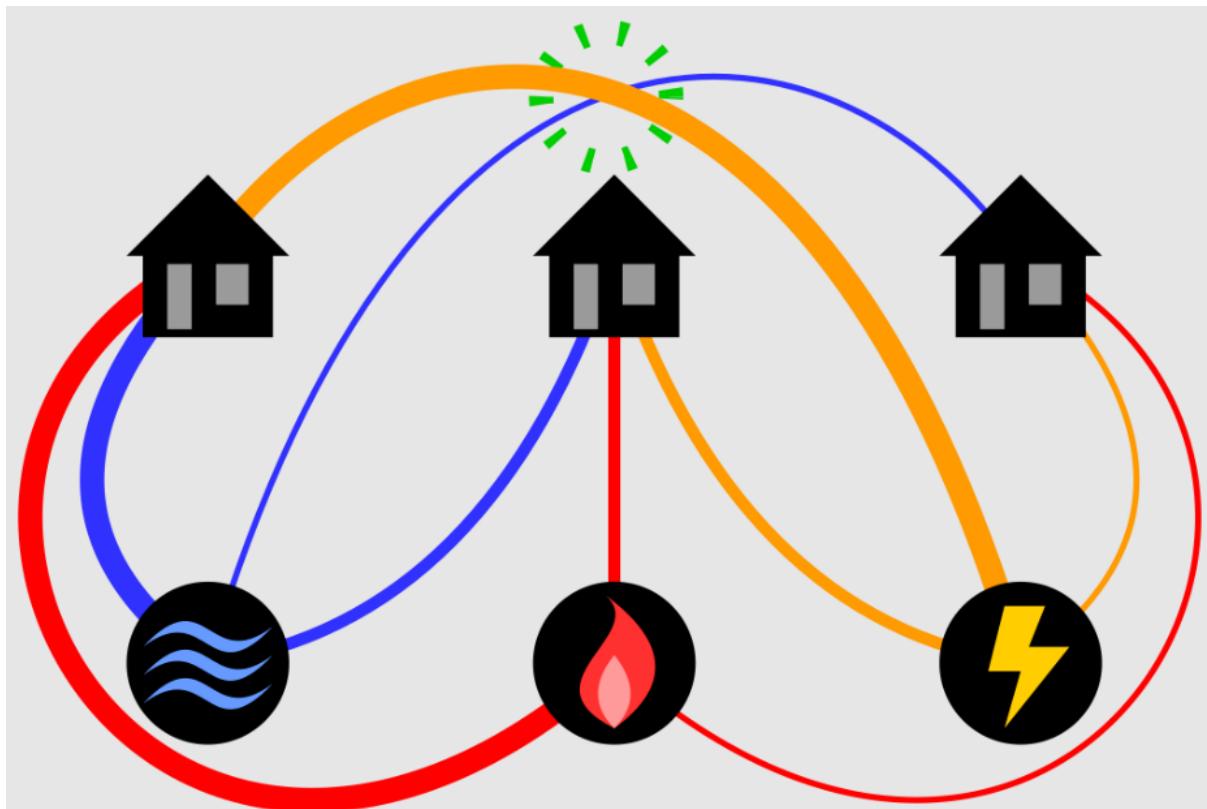


Figura 66: Problema das três casas.

O Problema das três casas diz que existem 3 casas, e cada uma das casas deve estar ligada a uma empresa de fornecimento de gás, eletricidade e água, só existindo apenas uma empresa possível em cada um desses serviços. Seria possível conectar esses serviços em cada casa sem que exista cruzamentos entre as linhas que conectam as casas aos serviços ? Abstraindo o problema teríamos um *grafo*  $K_{3,3}$ :

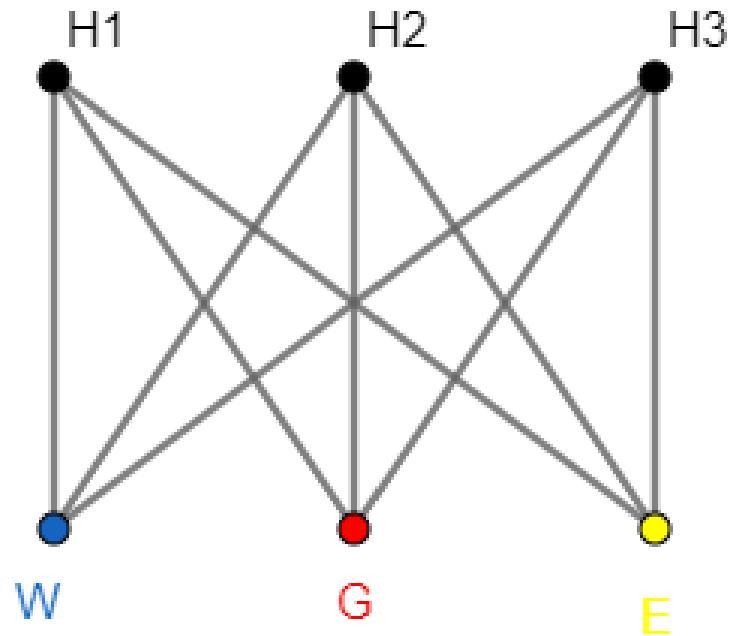


Figura 67: Problema das três casas.

Para solucionar esse problema é necessário definir *número de cruzamentos*. Antes disso, precisamos definir o que é um *desenho no plano*:

**Definição 56** (Desenho no Plano). *Seja  $G$  um grafo e  $\alpha$  um plano, definimos um desenho no plano  $D(G)$  como um desenho do grafo onde os vértices e as arestas estão desenhados no plano  $\alpha$ , i.e., os vértices e as arestas do desenho estão contidos no plano  $\alpha$ .*

Na Figura 68 temos 2 *desenhos no plano* de  $K_4$ .

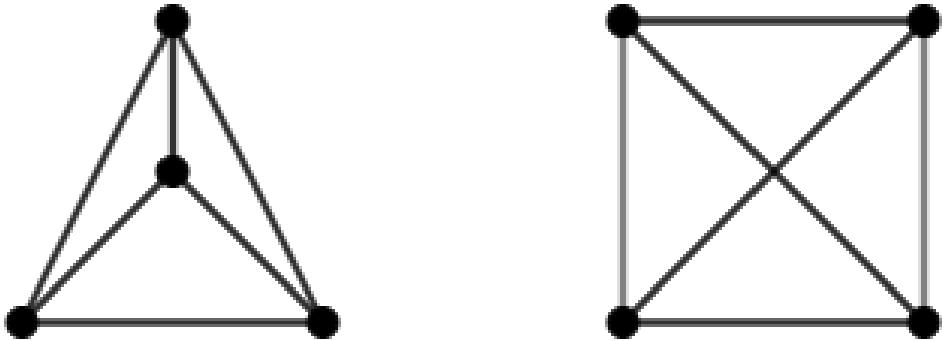


Figura 68: 2 desenhos no plano do  $K_4$ .

Se um *desenho*  $D(G)$  for um *desenho* de um *grafo* mas não estiver contido em um *plano*  $\alpha$ , vamos denominar apenas como *desenho*. Por exemplo, se tivermos um *desenho* de um *grafo* tal que para cada  $v \in V$  desenharmos em um ponto  $p \in \mathbb{R}^3$  de tal modo que o conjunto desses pontos não são coplanares, então o *desenho* não é um *desenho no plano*, mas vamos denominar como um *desenho* de  $G$ .

Podemos observar que a definição de *desenho* possui poucas restrições, sendo apenas uma representação do *grafo*. Este tipo de definição pode levar a problemas como por exemplo uma *aresta*  $e$  pode interceptar mais de uma vez com outra *aresta*  $e'$ . Esse tipo de problemas pode levar à existencia de *cruzamentos* desnecessários que poderiam ser evitados facilmente. Desse modo, definimos um tipo de *desenho* que elimina este tipo de problemas adicionando restrições à construção desse *desenho*:

**Definição 57** (Bom Desenho). *Definimos um bom desenho de um grafo  $G$  como um desenho  $D(G)$  com as seguintes propriedades:*

1. *Os vértices de  $G$  estão em distintos pontos de uma superfície  $S$*

2. Se  $e, e' \in E(G)$  então existe no máximo 1 cruzamento entre essas arestas no desenho

$D(G)$

3. Seja  $e_1, e_2, e_3 \in E(G)$ . Se  $p_1$  é o ponto de cruzamento de  $e_1$  com  $e_2$  e  $p_2$  é o ponto de cruzamento de  $e_1$  com  $e_3$ , então  $p_1 \neq p_2$

Dado um *desenho* podemos perguntar qual o *número de cruzamentos* existentes nesse *desenho*:

**Definição 58** (Número de Cruzamentos de um Desenho). *Seja  $G$  um grafo, definimos  $\nu(D(G))$  o número de cruzamentos de um desenho  $D(G)$  como o número de intersecções entre arestas no desenho  $D(G)$ .*

Por exemplo, na Figura 68 temos que à esquerda possui *número de cruzamentos*  $\nu(D(G)) = 0$  e o da direita possui *número de cruzamentos*  $\nu(D(G)) = 1$ . Podemos observar que para um mesmo *grafo* temos *desenhos* com um *número de cruzamentos* distintos. Poderíamos nos perguntar qual o número mínimo possível desses *cruzamentos* para um *um grafo*.

Segue-se disso a definição de *número de cruzamentos*:

**Definição 59** (Número de Cruzamentos). *Seja  $G$  um grafo e  $\Omega$  o conjunto de desenhos de  $G$  do plano possíveis, definimos  $\nu(G)$  o número de cruzamentos do grafo como o mínimo número de cruzamentos possível obtido pelos desenhos no plano  $d \in \Omega$ .*

É possível ver que o *número de cruzamentos* é uma *invariante topologica*. É desconhecido um algoritmo polinomial para obter o *número de cruzamentos* de um *grafo* qualquer.

Como *número de cruzamentos* é uma *invariante topologica* de um *grafo*, podemos definir:

**Definição 60** (Desenho Ótimo).  *$D(G)$  é dito um desenho ótimo do grafo  $G$  se e somente se  $\nu(G) = \nu(D(G))$*

Sem perda de generalidade, denotaremos neste trabalho o *número de cruzamentos* de um grafo  $G$  como  $\nu(G)$ , o *número de cruzamentos* de um *desenho* de um grafo como  $cr(G)$ .

Segue-se da definição de *número de cruzamentos* o conceito de *grafo planar*:

**Definição 61** (Grafo Planar). *Um grafo  $G$  é planar se somente se  $\nu(G) = 0$ .*

As Figuras 69, 70 e 71, temos o *grafo tetraedro*, o *grafo hexaedro*, o *grafo octaedro*, o *grafo dodecaedro* e o *grafo icosaedro* como exemplos de *grafos planares*:

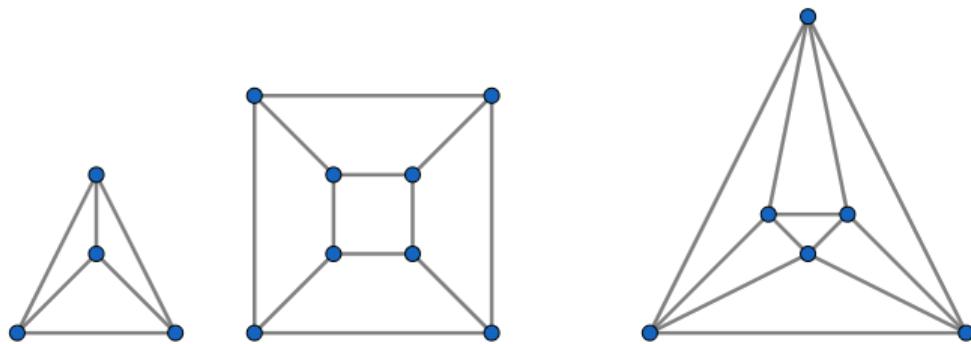


Figura 69: *Grafos tetraedro, hexaedro e octaedro.*

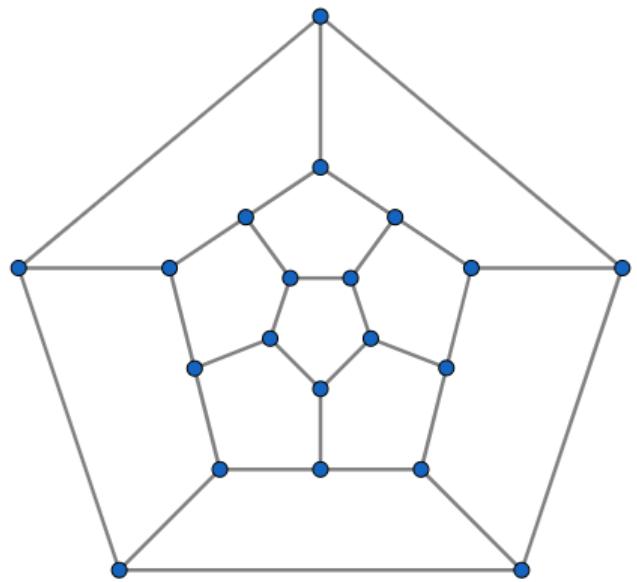


Figura 70: *Grafo dodecaedro*.

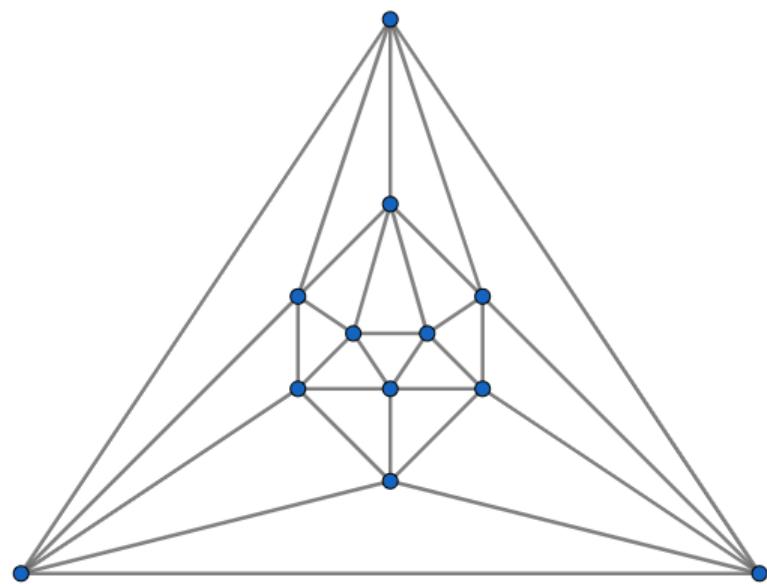


Figura 71: *Grafo icosaedro*.

O conceito de *grafo planar* é tema de estudo em diversos aspectos da Teoria dos Gra-

fos, uma das aplicações do conceito de *grafo planar* é o Teorema das 4 Cores:

**Teorema 10** (Teorema das 4 Cores'1976). [4]  $\nu(G) = 0 \implies \chi(G) \leq 4$ .

O Teorema das 4 Cores afirma que é possível colorir um mapa com apenas 4 cores de modo que regiões vizinhas não possuam a mesma cor. É possível ver que um *grafo planar* é uma abstração de uma região de um mapa, onde cada *vértice* é uma região do mapa e uma *aresta* entre 2 *vértices* representa que as 2 regiões possuem fronteira entre si. A Figura 72 exemplifica o Teorema das 4 Cores:

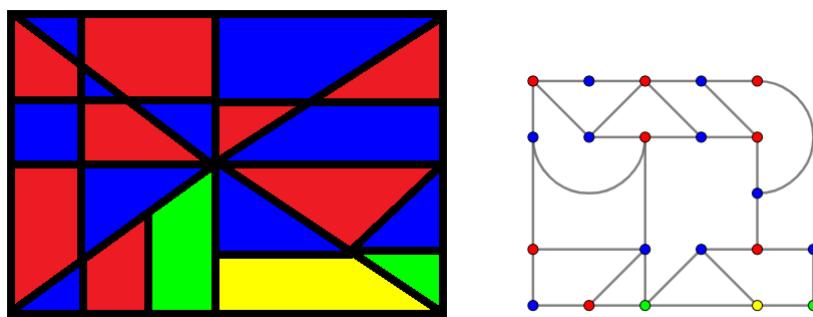


Figura 72: Uma mapa colorido e o respectivo *grafo* e *coloração de vértices* correspondente.

Esse Teorema foi primeiramente conjecturado por Francis Guthrie (Figura 73) em 1852, e publicado como conjectura em 1854 [26], enquanto tentava colorir o mapa dos condados da Inglaterra, onde observou que era possível colorir o mapa com apenas 4 cores. Na Figura 74 temos um exemplo de coloração desse mapa com 4 cores. O Teorema foi demonstrado por Kenneth Appel and Wolfgang Haken com uma prova assistida por um computador[4].



Figura 73: Francis Guthrie.

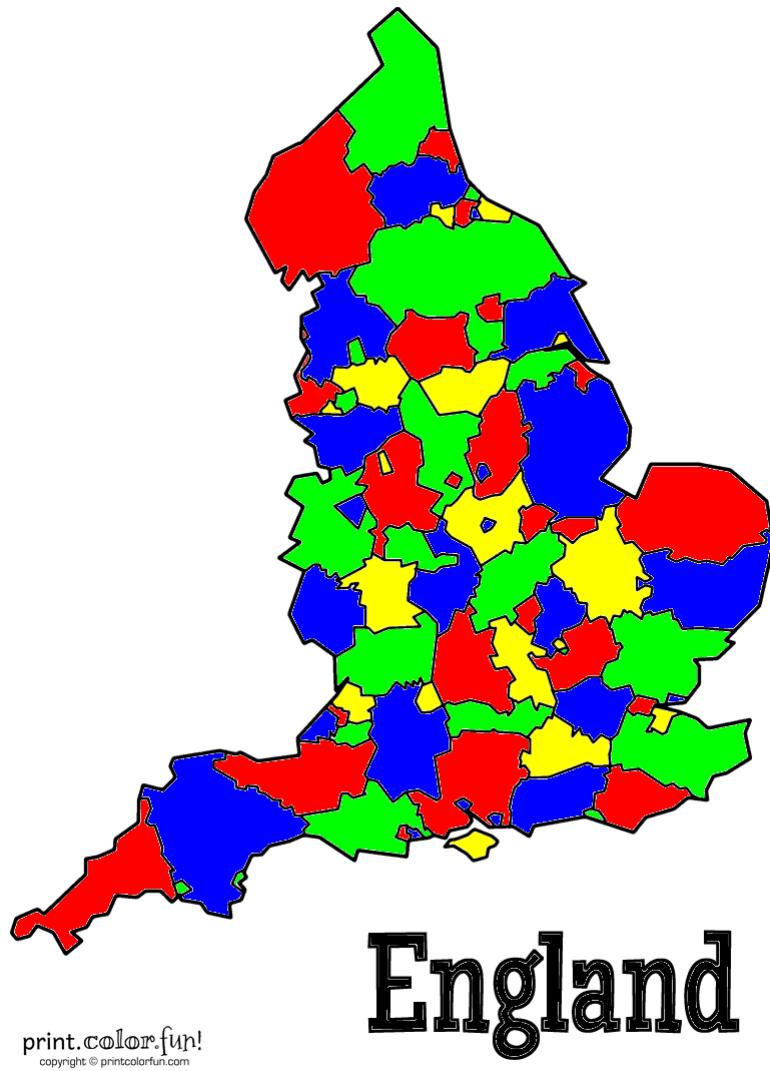


Figura 74: Coloração com 4 cores de um mapa dos condados da Inglaterra.

Um outro resultado para a *coloração de vértices* de um *grafo planar* é:

**Teorema 11** (Teorema de Grötzsch'1959). [25] Se  $G$  é um grafo planar e não existe um ciclo  $C_3$  como subgrafo de  $G$  então  $\chi(G) \leq 3$ .

Na Figura 75 temos um exemplo de uma 3-coloração de vértices de um grafo planar sem triângulos:

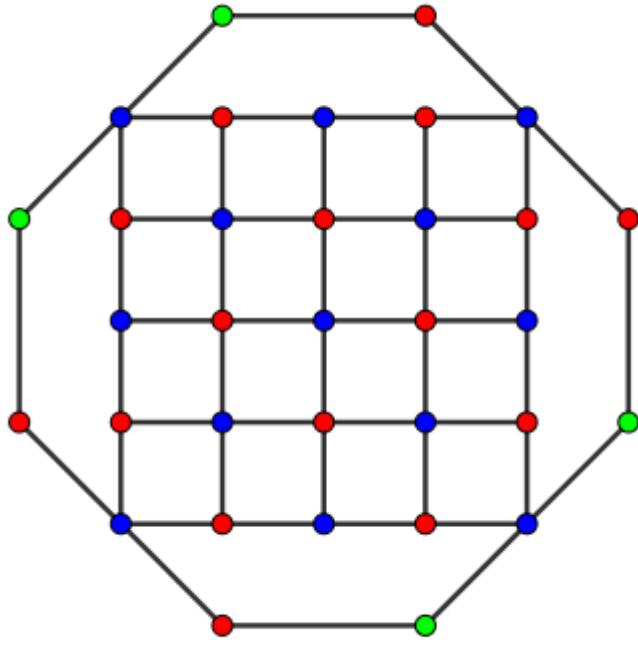


Figura 75: Note que o *grafo* é *planar* e não possui triângulos. Logo, existe uma *3-coloração de vértices* para o *grafo*.

Uma pergunta que surge do conceito de *grafo planar*: Para todo o *grafo planar* é possível obter um *desenho plano* sem cruzamentos em que todas as *arestas* são representadas por um segmento de reta ? O Teorema de Fáry demonstra que é possível:

**Teorema 12** (Teorema de Fáry'1948). [32] *Se  $G$  é um grafo planar, então existe um desenho no plano  $D(G)$  com  $\nu(D(G))$  tal que toda a aresta  $e \in E(G)$  é representada por uma linha reta.*

Surge desse modo o conceito:

**Definição 62** (Número de Cruzamentos Retilíneos). *Seja  $G$  um grafo, definimos o número de cruzamentos retilíneos  $\bar{\nu}(G)$  como o número de cruzamentos mínimo de um desenho no plano*

onde todas as arestas são representadas por segmentos de retas.

Desse modo, o Teorema de Fáry pode ser reescrito como  $\nu(G) = 0 \iff \bar{\nu}(G) = 0$ .

Segue a propriedade  $\nu(G) \leq \bar{\nu}(G)$  para todo o grafo  $G$ .

O grafo completo  $K_n$  e o grafo bipartido completo  $K_{m,n}$  são planares se satisfazem as Proposição 11 e 12 respectivamente:

**Proposição 11** (Condição de Planaridade de  $K_n$ ).  $\nu(K_n) = 0$  se e somente se  $n \leq 4$ .

**Proposição 12** (Condição de Planaridade de  $K_{m,n}$ ).  $\nu(K_{m,n}) = 0$  se e somente se  $m \leq 2$  ou  $n \leq 2$ .

Demonstra-se as duas últimas proposições construindo os *desenhos planos* sem cruzamentos de  $K_{3,2}$  e  $K_4$ , como ilustrado na Figura 76:

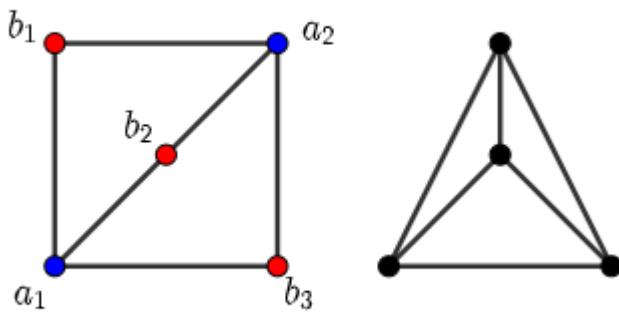


Figura 76: Desenhos no plano sem cruzamentos dos grafos  $K_{3,2}$  e  $K_4$ .

É possível ver  $K_n$  com  $n < 4$  também implica  $\nu(K_n) = 0$ , bastando apenas remover os vértices da construção da Figura 76. Generalizamos o *desenho plano* para  $K_{3,2}$  representado na Figura 76, para  $K_{n,2}$  com  $n > 3$ . Colocamos cada vértice  $b_i$  adicional ao *desenho* do  $K_{3,2}$  na diagonal dos vértices da partição  $(b_1, b_2, b_3)$  e o vértice conectamos com a partição  $(a_1, a_2)$ .

É possível ver que a representação continua sem *cruzamentos*. A Figura 77 ilustra um *desenho* do  $K_{5,2}$  por meio desse processo.

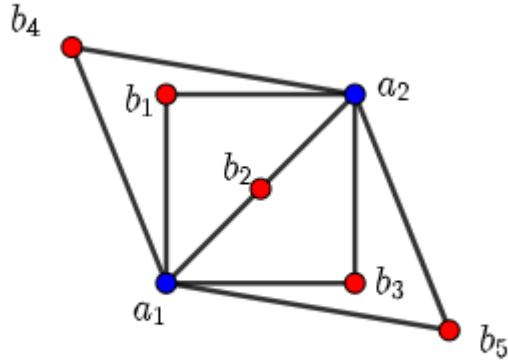


Figura 77: *Desenho no plano* do  $K_{5,2}$ .

Nas Proposições 13 e 14 temos os 2 menores *grafos*  $K_n$  e  $K_{m,n}$  não *planares* e seu respectivo *número de cruzamentos*:

**Proposição 13** (Valor de  $\nu(K_5)$ ).  $K_5$  não é *planar* e  $\nu(K_5) = 1$ .

**Proposição 14** (Valor de  $\nu(K_{3,3})$ ).  $K_{3,3}$  não é *planar* e  $\nu(K_{3,3}) = 1$ .

A demonstração dessas proposições é simples. Toma-se os *desenhos* do  $K_{3,2}$  e  $K_4$  sem *cruzamentos*, como descrito anteriormente, e testamos à exaustão a colocação de um novo vértice. É possível verificar por esse processo, que não existe uma representação sem *cruzamentos* dos grafos  $K_{3,3}$  e  $K_5$  e que  $\nu(K_{3,3}) = \nu(K_5) = 1$ . A Figura 78 ilustra os casos possíveis para os *desenhos* do  $K_{3,3}$  e  $K_5$ :

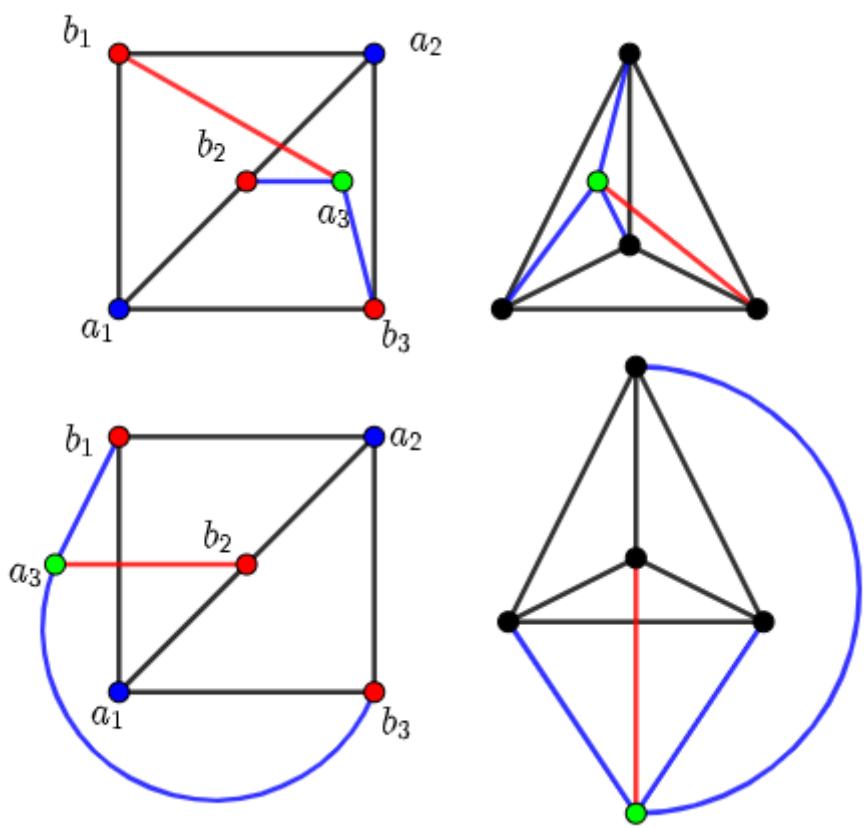


Figura 78: Casos possíveis de *desenhos no plano* do  $K_{3,3}$  na coluna esquerda e do  $K_5$  na coluna direita.

Na Figura 79 temos respectivamente os desenhos ótimos do  $K_{3,3}$  e do  $K_5$ .

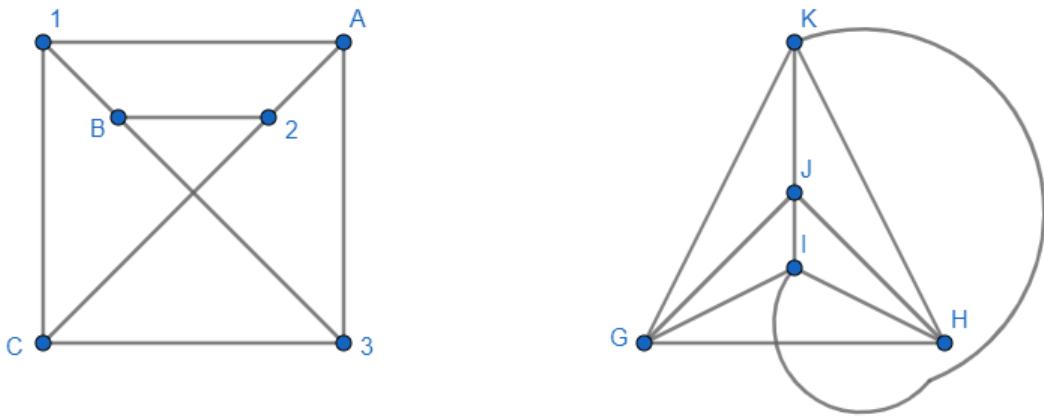


Figura 79: Desenhos Ótimos de  $K_{3,3}$  e  $K_5$ .

Como será visto a seguir no Teorema de Kuratowski, as Proposições 13 e 14 são 2 propriedades que permitem caracterizar os *grafos planares*. Antes de abordarmos o Teorema de Kuratowski, é necessário definir o que é uma *subdivisão*:

**Definição 63** (Subdivisão). *Se  $H$  é um subdivisão de um grafo  $G$  temos:*

1.  $V(G) \subseteq V(H)$
2.  $\exists uw \in E(G)$  tal que existem  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(H)$  com  $uw \notin E(H)$ ,  $uv_1, uv_2, \dots, v_n w \in E(H)$ , i.e., existe aresta em  $G$  que em  $H$  se subdividem em um grupo de vértices adjacentes em sequência de modo que o primeiro vértice do grupo é adjacente ao vértice  $u$ , o último adjacente ao vértice  $w$  e  $u, v$  não são adjacentes em  $H$ .
3. Se  $uw \notin E(G)$  então  $uw \notin E(H)$ , i.e., se 2 vértices não são adjacentes em  $G$  então esses 2 vértices não são adjacentes em  $H$ .

A seguir na Figura 80 temos como exemplo uma subdivisão de um grafo.

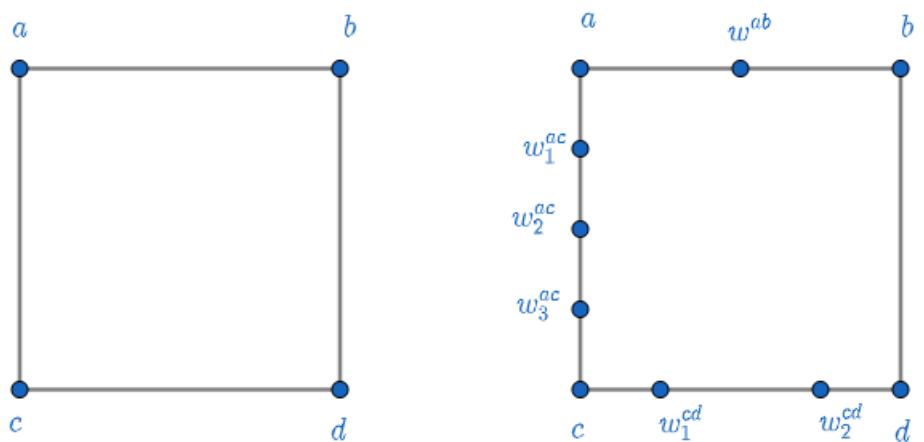


Figura 80: Um *grafo*  $G$  e uma de suas respectivas *subdivisões* (lado direito).



Figura 81: Kazimierz Kuratowski.

Em 1930, Kazimierz Kuratowski (Figura 81) publicou o Teorema de Kuratowski que caracteriza os *grafos planares*:

**Teorema 13** (Teorema de Kuratowski'1930). [36] Um grafo  $G$  é planar se somente se não existe um subgrafo  $H$  que seja subdivisão de  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ .

Como exemplo da aplicação do Teorema de Kuratowski a Figura 82 ilustra a demonstração da *não planaridade* de um grafo ao detectar como *subgrafo* uma *subdivisão* do  $K_{3,3}$ .

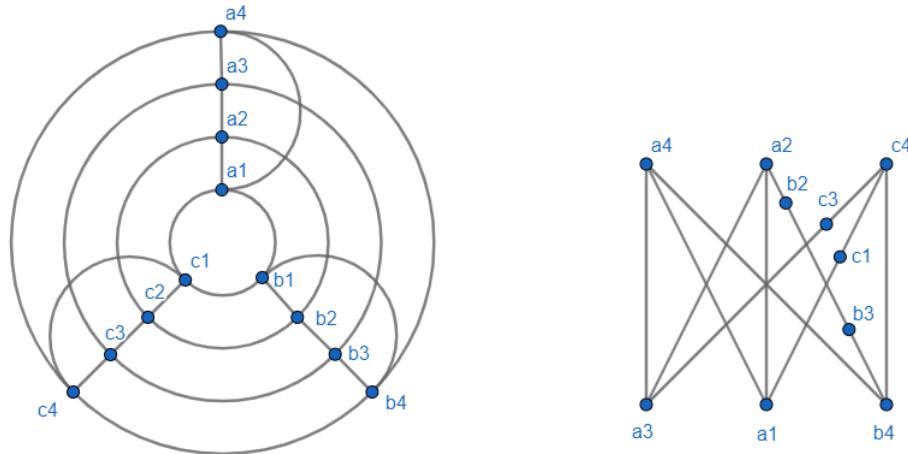


Figura 82: Aplicação do Teorema de Kuratowski. Observe que o grafo possui uma subdivisão do  $K_{3,3}$ . Logo, o grafo não é planar.

Vamos ver aplicações do conceito de *grafo planar* na geometria. Observe que um *grafo planar* possui regiões delimitadas por *ciclos*. Dessa observação definimos o conceito de *face*:

**Definição 64** (Face). Seja  $D(G)$  um desenho de um grafo  $G$  no plano, definimos  $F$  como uma face se e somente se  $F$  é um ciclo e  $F$  delimita uma região de  $D(G)$ .

Na Figura 83 temos as *faces* de um *grafo planar* indicadas por números.

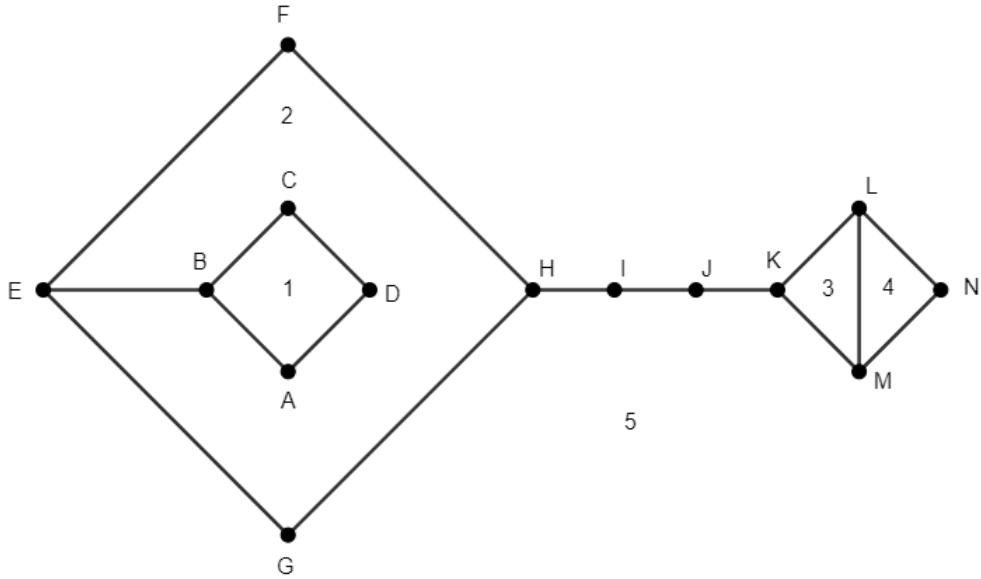


Figura 83: *Faces* de um grafo planar. Note que a *face* 5 corresponde à região que circula toda representação do *grafo*.

Do conceito de *face* podemos obter a Relação de Euler da geometria:

**Proposição 15** (Relação de Euler). [20] Se  $G$  é um grafo plano e conexo, então dado um desenho no plano  $D(G)$  temos  $F + n - m = 2$ , onde  $F$  é o número das faces em  $D(G)$ ,  $m$  o número de arestas em  $G$  e  $n$  o número de vértices em  $G$ .

**Demonstração:** Vamos provar por indução. Note que se  $F = 1$  então o *grafo* é uma árvore, o que implica  $n = m + 1$ . Logo,  $F + n - m = 1 + m + 1 - m = 2$ . Suponha verdadeiro para um caso geral  $F$ . Vamos provar que é verdadeiro para o caso  $F + 1$ . Um *grafo* com  $F + 1$  faces pode ser construído a partir de um *grafo* com  $F$  faces onde dividi-se uma face desse *grafo* conectando 2 vértices de uma face com um caminho com  $n'$  vértices e  $m'$  arestas. Como é um caminho temos  $n' = m' + 1$  vértices no caminho mais 2 arestas que conectam os vértices da face. Logo,  $(F + 1) + (n + n') - (m + m' + 2) = (F + n - m) + (1 + n' - m' - 2) = 2 + (1 + (m' + 1) - m' - 2) = 2$ .  $\square$

Como consequência da Relação de Euler temos a desigualdade:

**Proposição 16** (Número de Arestas de Grafo Planar). *Seja  $G$  um grafo planar,  $m = |E(G)|$  e  $n = |V(G)|$ , então  $m \leq 3n - 6$ .*

**Demonstração:** Uma *face* possui 3 *arestas* no mínimo e cada *aresta* pertence a 2 *faces*. Logo,  $2m \geq 3F$  o que implica em  $\frac{2}{3}m \geq F = m - n + 2 \Rightarrow 2m \geq F = 3m - 3n + 6 \Rightarrow m \leq 3n - 6$ .  $\square$

Analogamente obtemos a proposição:

**Proposição 17** (Número de Arestas de Grafo Planar Sem Triângulos). *Seja  $n \geq 4$ , e  $G$  um grafo planar que não possui como subgrafos ciclos  $C_3$ , i.e., não possui triângulos, então  $m \leq 2n - 4$ , onde  $m$  é o número de arestas de  $G$  e  $n$  é o número de vértices de  $G$ .*

**Demonstração:** Como não possui triângulos então cada *face* tem pelo menos 4 *arestas*, o que implica  $2m \geq 4F \Rightarrow \frac{2}{4}m \geq F = m - n + 2 \Rightarrow 2m \geq F = 4m - 4n + 8 \Rightarrow m \leq 2n - 4$ .  $\square$

**Proposição 18** (Relação de Euler com Faces  $C_k$ ). *Se  $G$  é um grafo planar e cada face de  $G$  é um ciclo  $C_k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , então  $m(k - 2) = k(n - 2)$ .*

**Demonstração:** Se cada *face* possui  $k$  *arestas*, então  $2m = kF \Rightarrow \frac{2}{k}m = F = m - n + 2 \Rightarrow 2m = F = km - kn + 2k \Rightarrow (2 - k)m = k(2 - n) \Rightarrow m(k - 2) = k(n - 2)$ .  $\square$

**Proposição 19** (Grau Mínimo de Grafo Planar). *Se  $G$  é um grafo planar, então  $\delta(G) \leq 5$ .*

**Demonstração:** Como  $2m \geq \delta n$  e  $m \leq 3n - 6$ , temos  $\delta n \leq 6n - 12 \Rightarrow \delta \leq 5$ .  $\square$

Vamos definir um tipo especial de *grafo não planar*:

**Definição 65** (Grafo Quase-planar). *Um grafo  $G$  é dito quase-planar se e somente se  $\exists e \in E(G)$  tal que  $G - \{e\}$  é planar.*

Exemplo de *grafos quase-planares* temos  $K_{3,3}$  e  $K_5$ . Subdivisões desses grafos também são *grafos quase-planares*.

Apesar de existirem algoritmos polinomiais para determinar a *planaridade* de um *grafo*, não é conhecido um algoritmo polinomial que determine o *número de cruzamentos* de um *grafo*. Foi provado que o problema de determinar  $\nu(G)$  é um problema NP-completo[23]. Para o caso dos *grafos de Kneser* só é conhecido o resultado  $\nu(K(5, 2)) = 2$ , isto é, o *número de cruzamentos* do *grafo de Petersen*.

Existem diversos métodos de construção de desenhos de *grafos*. Um deles é o *Desenho em k-páginas*, onde por analogia pode ser entendido como desenhar as *arestas* de um *grafo* em páginas de um livro. Definimos esse método de *desenho* pela próxima definição:

**Definição 66** (Desenho em *k*-páginas). *Seja  $G$  um grafo,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \subset \mathbb{R}^3$  planos não paralelos dois a dois e se intersectam em uma reta  $r = \alpha_1 \cap \dots \cap \alpha_k$ , chamada de espinha, com  $r \subset \alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ . Definimos um desenho em *k*-páginas de  $G$  como um desenho de  $G$  tal que os vértices  $v \in V(G)$  são desenhados inteiramente em distintos pontos de  $r$  e cada aresta  $e \in E(G)$  é desenhada inteiramente em único plano  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq k$  de modo que todo ponto geométrico de desenho de uma aresta seja um ponto  $p \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ .*

Na Figura 84 temos um exemplo de *desenho em 3-páginas* do  $K_5$ . Observe que o *número de cruzamentos* é 0. Na Figura 85 temos a representação tridimensional dos planos da Figura 84:

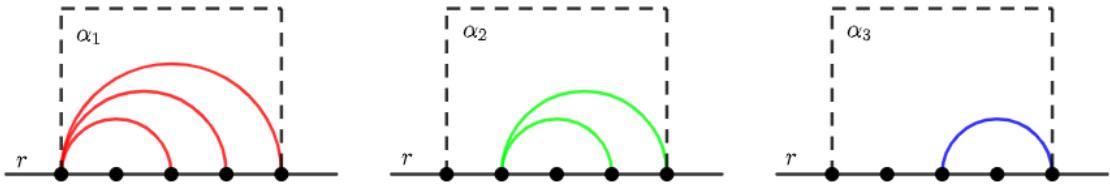


Figura 84: *Desenho em 3-páginas* do  $K_5$ .  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  são as páginas do desenho e a reta  $r$  é a espinha. Observe que todos os vértices estão desenhados em  $r$  e cada aresta é desenhada unicamente em um plano  $\alpha_i$  com  $1 \leq i \leq 3$ . O desenho só é possível tridimensionalmente, o que implica que este não é um *desenho plano* do  $K_5$ .

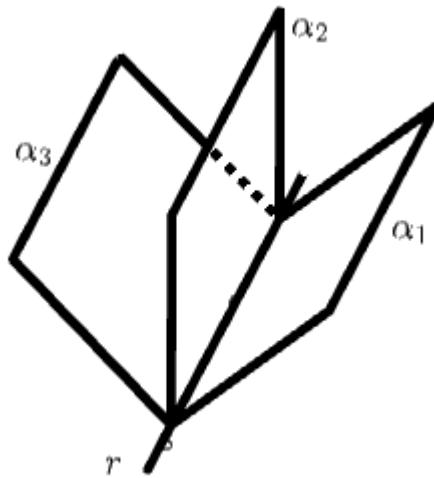


Figura 85: A estrutura geométrica onde representa-se um *desenho em 3-páginas*. Note que a representação está em 3 dimensões. Os 3 semiplanos  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$ , cada um corresponde a uma página e uma aresta do grafo é desenhada em somente um único semiplano. A reta  $r$  é a espinha e todos os vértices do grafo são desenhados nela.

Segue-se do conceito de *desenho em k-páginas*, a *invariante topologica* correspondente:

**Definição 67** (Número de Cruzamentos em  $k$ -páginas). *O número de cruzamentos em  $k$ -páginas*

$\nu_k(G)$  é o mínimo número de cruzamentos de  $G$  em um desenho em  $k$ -páginas.

Como exemplo de um *desenho em 2-páginas* deixamos o *desenho ótimo em 2-páginas* do grafo de Petersen na Figura 86, isto é,  $\nu_2(K(5, 2)) = 2$ . Pela Figura 84 temos  $\nu_3(K_5) = 0$ .

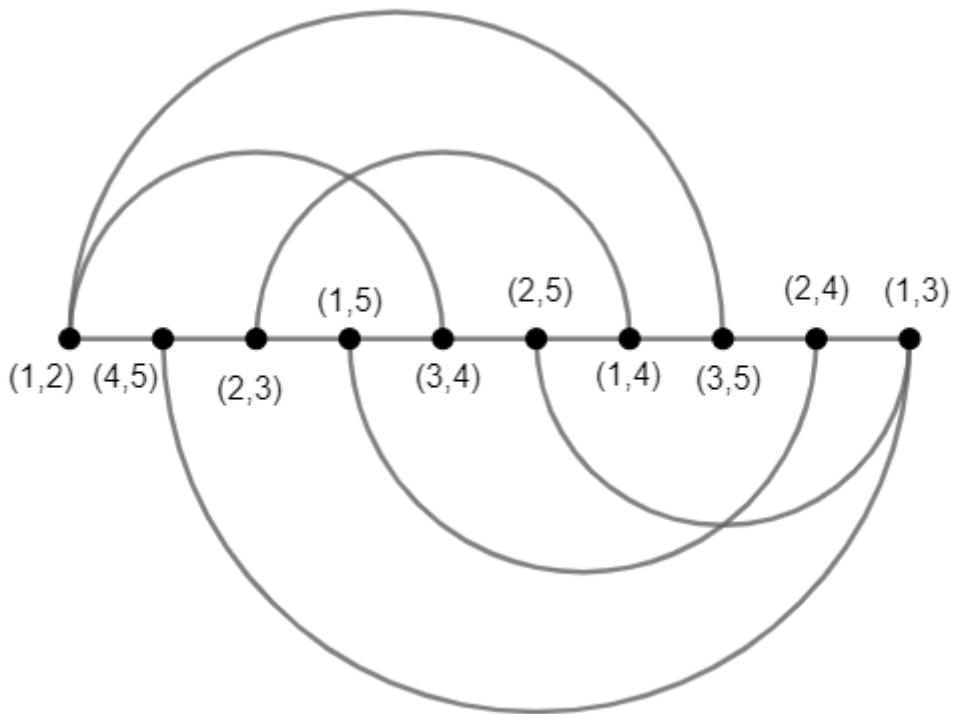


Figura 86: *Desenho em 2-páginas ótimo* do grafo de Petersen. Como o grafo de Petersen é um grafo de Kneser  $K(5, 2)$ , os vértices estão rotulados como subconjuntos de 2 elementos de um conjunto  $\{1, 2, \dots, 5\}$ .

Seguem-se a seguir nos Corolários, resultados diretos do conceito de *Desenho em  $k$ -páginas*:

**Corolário 1** (Desenho em  $k$ -páginas e Desenho no Plano). *Se  $D(G)$  é um desenho em  $k$ -páginas de um grafo  $G$  então:*

1. *Se  $1 \leq k \leq 2$  então  $D(G)$  é um desenho no plano.*

2. Se  $k \geq 3$  então  $D(G)$  não é um desenho no plano.

No Corolário 1 é possível observar que um *desenho em 2-páginas* pode ser representado como um *desenho plano*, basta apenas desenhar uma reta no plano e o semiplano superior à reta é correspondente à *página*  $\alpha_1$  e o semiplano inferior à reta é correspondente à *página*  $\alpha_2$ .

Para o caso de *desenho em 1-página* é trivial, basta escolher o lado inferior ou superior à reta para representar a *página*. O mesmo procedimento não é possível para casos a partir de  $k = 3$ .

**Corolário 2** (Limite Superior de  $\nu_k(G)$ ). *Seja  $G$  é um grafo e  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ , se  $k_1 < k_2$  então  $\nu_{k_2}(G) \leq \nu_{k_1}(G)$ .*

O Corolário 2 indica que sempre é possível representar um *desenho em k-páginas* com um menor *número de cruzamentos* se adicionar-mos mais páginas à representação. Isso é facilmente demonstrável. Suponhamos que adicione-mos 1 *página*  $\alpha'$  à representação. Podemos diminuir o *número de cruzamentos* retirando uma *aresta*  $e$  que realiza um *cruzamento* com uma *aresta*  $e'$  e representando  $e$  na *página*  $\alpha'$ . Neste processo removemos no mínimo 1 *cruzamento* do *desenho*.

Como um *desenho em 2-páginas* é um *desenho plano*, podemos usar  $\nu_2(G)$  como um limite superior de  $\nu(G)$ . Este fato junto com o Corolário 2 permite a inferência do seguinte Corolário:

**Corolário 3** (Limite Superior de  $\nu(G)$ ). *Se  $G$  é um grafo então  $\nu(G) \leq \nu_2(G) \leq \nu_1(G)$ .*

Como um dos resultados dos Corolários anteriores, temos que um *desenho 3-páginas* ou mais páginas não serve como um método de *desenho* de um *grafo* no plano, mas um *desenho em 2-páginas* serve para desenhar um *grafo* no plano, bastando desenhar o plano  $\alpha_1$  na parte superior da *espinha* e o plano  $\alpha_2$  na parte inferior da *espinha*. Logo, *desenho em 2-páginas* serve como um limite superior para o *número de cruzamentos de um grafo*. Neste trabalho usamos um

*desenho 2-páginas* para inferir o limite superior do *número de cruzamentos* do *grafo de Kneser*  $K(n, 2)$ . Também pode ser observado que quanto maior o número de páginas do *desenho*, menor o *número de cruzamentos*, e vice-versa.



Figura 87: Pál Turán.

O matemático Pál Turán[45] (Figura 87) foi forçado a trabalhar em uma fábrica de tijolos durante a Segunda Guerra Mundial. A fábrica possuia fornos conectados a armazens por trilhos. *Cruzamentos* entre os trilhos, como o retratado na Figura 88, prejudicavam o funcionamento o funcionamento da produção dessa fábrica. Sendo assim, seria conveniente achar um modo de projetar essa fábrica com o menor *número de cruzamentos* entre trilhos possível. Desse modo, foi formulado por Pál Turán o Problema da fábrica de tijolos de Turán, que deu origem ao estudo do *número de cruzamentos* de um *grafo*. No problema existe uma fábrica com  $m$  fornos que fabricam tijolos e  $n$  depósitos que armazenam tijolos, e cada forno é conectado por trilhos aos  $n$  depósitos. A pergunta do problema é: Qual a forma de construir

os fornos, armazens e trilhos de modo a que exista um número mínimo de *cruzamentos*? Note que o problema é equivalente a obter  $\nu(K_{m,n})$ .

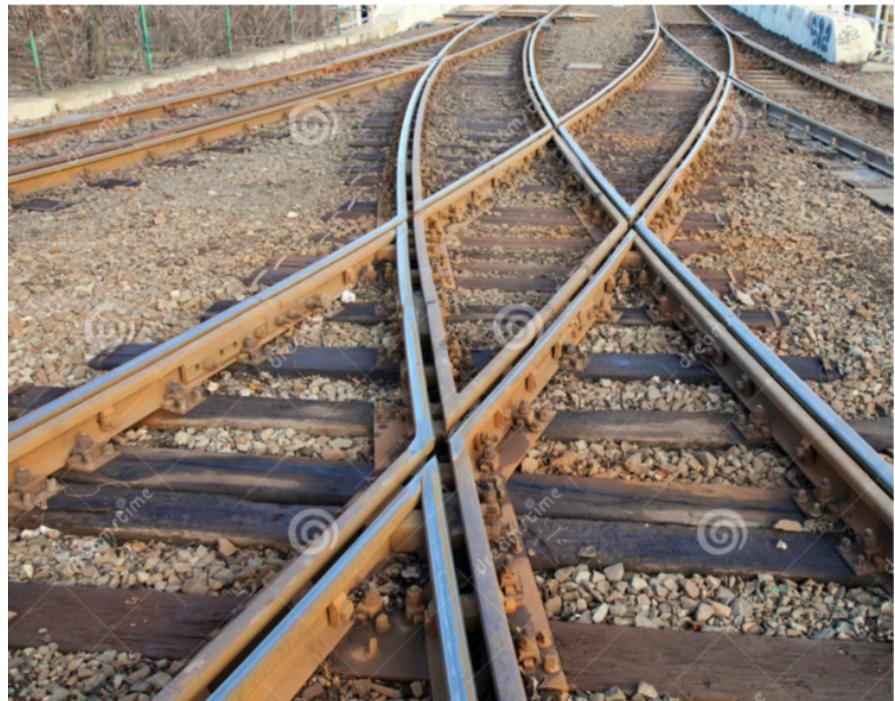


Figura 88: Trilhos.



Figura 89: Kazimierz Urbanik.



Figura 90: Kazimierz Zarankiewicz.

Em 1955, Kazimierz Zarankiewicz (Figura 90) e Kazimierz Urbanik (Figura 89) publicaram independentemente uma solução para o Problema da Fábrica de Tijolos de Turán. Nessa solução ambos chegaram a uma mesma fórmula para  $\nu(K_{m,n})$  usando o Algoritmo 1:

**Algoritmo 1** (Algoritmo de Zarankiewicz'1955). [50][46]

*Entrada:* grafo bipartido completo  $K_{m,n}$ .

*Saída:* desenho do grafo bipartido completo  $K_{m,n}$  no plano.

Seja  $K_{m,n}$  um grafo bipartido completo, com  $m, n \in \mathbb{N}$  com  $m, n \geq 2$  e um plano  $\alpha$ .

1. Defina uma reta  $r$  horizontal e uma reta  $r'$  vertical no plano  $\alpha$ , de modo que as duas retas se cruzem;
2. Coloque  $\lfloor m/2 \rfloor$  vértices em cada lado da reta  $r$ , com relação à reta  $r'$ ;
3. Adicione  $m \bmod 2$  vértices a um dos lados da reta  $r$ ;
4. Coloque  $\lfloor n/2 \rfloor$  vértices em cada lado da reta  $r'$ , com relação à reta  $r$ ;
5. Adicione  $n \bmod 2$  vértices a um dos lados da reta  $r'$ ;

6. Desenhe uma aresta entre cada vértice da reta  $r$  e  $r'$ .

O desenho produzido pelo Algoritmo de Zarankiewicz possui  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$  cruzamentos.

Logo, esse valor pode ser usado como um limite superior para o *número de cruzamentos* do grafo bipartido completo:

**Teorema 14** (Zarankiewicz'1955 e Urbanik'1955). [50][46]  $\nu(K_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$

Para o método de *desenho* do  $K_{m,n}$  definido pelo Algoritmo de Zarankiewicz, as Figuras 91 e 92 fornecem como exemplo os *desenhos* do  $K_{4,4}$  e do  $K_{4,5}$ .

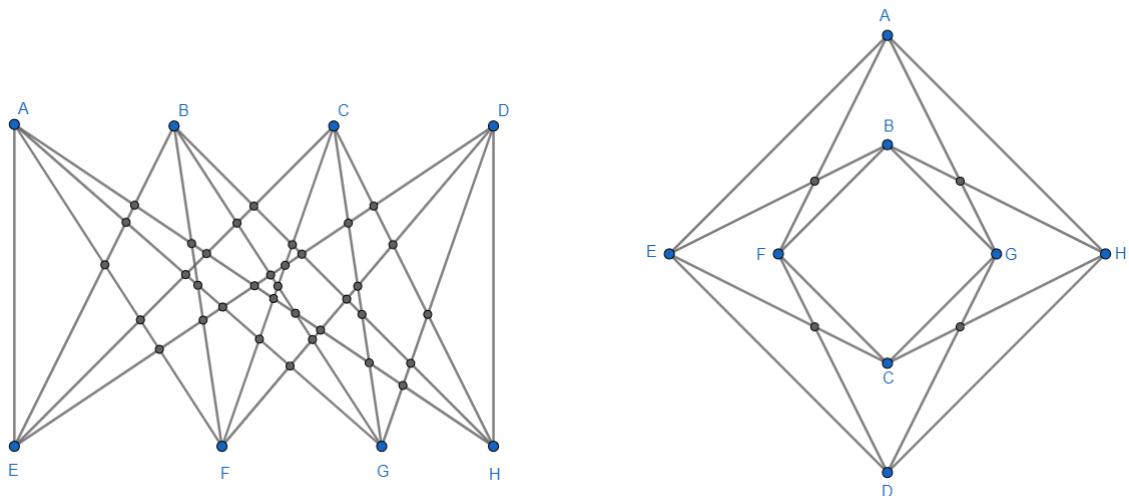


Figura 91: Grafo  $K_{4,4}$  e o respectivo desenho definido pelo Algoritmo de Zarankiewicz. O desenho à direita possui  $\left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{4-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{4-1}{2} \right\rfloor = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4$  cruzamentos e o desenho à esquerda possui 35 cruzamentos.

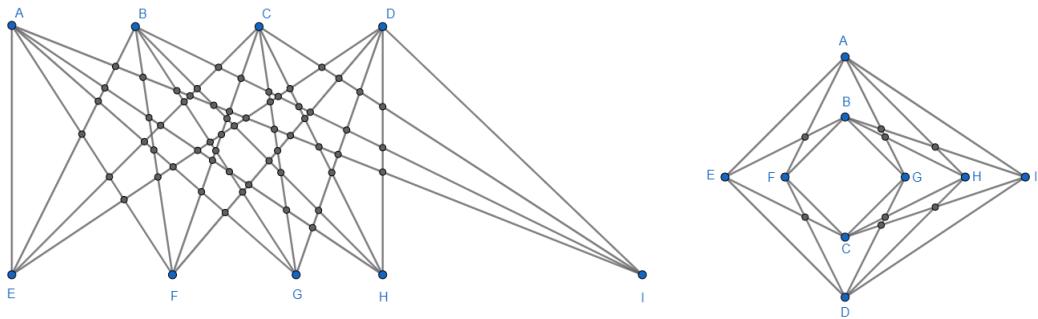


Figura 92: *Grafo*  $K_{4,5}$  e o respectivo *desenho* definido pelo Algoritmo de Zarankiewicz. O *desenho* à direita possui  $\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{5-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{4-1}{2} \right\rfloor = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8$  *cruzamentos* e o *desenho* à esquerda possui 59 *cruzamentos*.



Figura 93: Richard Guy.

Kazimierz Zarankiewicz e Kazimierz Urbanik consideravam que esse valor é era um valor ótimo para  $\nu(K_{m,n})$ . No entanto, em 1969, Richard Guy mostrou que as demonstrações de Zarankiewicz e Urbanik estavam erradas. Desse modo, apenas foi provado que esse valor seria um limite superior para  $\nu(K_{m,n})$ . Devido a isso conjecturou-se que esse valor seria  $\nu(K_{m,n})$ :

**Conjectura 1** (Conjectura do Número de Cruzamentos de Zarankiewicz'1960). [28]  $\nu(K_{m,n}) =$

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor.$$

É importante notar, que caso a conjectura anterior seja verdadeira, então  $\nu(K_{m,n}) = \bar{\nu}(K_{m,n})$ , pois o Algoritmo de Zarankiewicz é um *desenho* de  $K_{m,n}$  usando apenas linhas retas.

Anthony Hill e John Ernest conjecturaram uma fórmula para o *número de cruzamentos* do  $K_n$ . Richard Guy[27] publicou esses resultados em 1960, e deu origem à conjectura a seguir:

**Conjectura 2** (Conjectura de Hill'1960). [27]  $\nu(K_n) = \nu_2(K_n) = \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$ .

Para o *número de cruzamentos em 1-página* do  $K_n$  temos o seguinte resultado:

**Teorema 15** (Klerk et al'2018). [15]  $\nu_1(K_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq 3, \\ \binom{n}{4}, & \text{se } n \geq 4. \end{cases}$

**Demonstração:** Para  $\nu_1(K_n)$  com  $n \leq 3$  temos  $\nu_1(K_n) = 0$ , demonstrando a primeira parte do teorema. Como  $\nu_1(K_4) = 1$  e existem  $\binom{n}{4}$  subconjuntos de 4 vértices em  $K_n$  então temos  $\nu_1(K_n) = \nu_1(K_4) \cdot \binom{n}{4} = \binom{n}{4}$ .  $\square$

Em 2013, Ábrego et al[1] obtiveram o resultado exato para  $\nu_2(K_n)$ , cujo valor é exatamente  $\frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$  da Conjectura de Hill:

**Teorema 16** (Ábrego et al'2013). [2]  $\nu_2(K_n) = \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$ .

Note que não foi uma demonstração da Conjectura de Hill, pois a Conjectura de Hill afirma que  $\nu(K_n)$  é igual a esse valor. Caso a Conjectura de Hill seja verdadeira teríamos  $\nu(K_n) = \nu_2(K_n)$ .

Na Tabela 1 são mostrados os valores para o número de cruzamentos  $\nu_1(K_n)$  e  $\nu_2(K_n)$  de  $K_n$  com  $n \in \{1, \dots, 25\}$ , computados pelas fórmulas dos Teoremas 15 e 16:

$n$	$\nu_1(K_n)$	$\nu_2(K_n)$
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	1	0
5	5	1
6	15	3
7	35	9
8	70	18
9	126	36
10	210	60
11	330	100
12	495	150
13	715	225
14	1001	315
15	1365	441
16	1820	588
17	2380	784
18	3060	1008
19	3876	1296
20	4845	1620
21	5985	2025
22	7315	2475
23	8855	3025
24	10626	3630
25	12650	4356

Tabela 1: Valores para o *número de cruzamentos*  $\nu_1(K_n)$  e  $\nu_2(K_n)$  de  $K_n$ .

Faria et al [21] encontraram o melhor *desenho* conhecido para o *grafo n-cubo* com *desenho em 2-páginas* e *retilíneo*:

**Teorema 17** (Faria et al'2015). [21]  $\nu_2(Q_n) \leq \frac{125}{768}4^n - \frac{2^{n-3}}{3}(3n^2 + \frac{9+(-1)^{n+1}}{2})$ .

O *desenho em 2-páginas* para  $Q_n$  obtido é descrito no Algoritmo 2:

**Algoritmo 2** (Algoritmo de Vr'to-Faria'2015). [21]

**Entrada:** *grafo n-cubo*  $Q_n$ .

**Saída:** *desenho em 2-páginas do grafo*  $Q_n$ .

Seja  $Q_n$  um *grafo n-cubo*, onde  $n \in \mathbb{N}$ , e um *plano*  $\alpha$ . Definimos o *desenho em 2-páginas*:

1. *Defina uma reta r em*  $\alpha$ ;

2. Initialize  $i = 0$ ;
3. Desenhe 1 vértice na reta  $r$ .
4. Se  $i = n$  pare o algoritmo, Senão vá para o passo 5;
5. Desenhe na reta  $r$ , ao lado do grafo já desenhado, denotado por  $D'$ , uma cópia do mesmo grafo, denotado por  $D''$ ;
6. Desenha-se as arestas, de acordo com  $Q_n$ , que ligam os vértices de  $D'$  com os  $D''$ , na página  $i \bmod 2$ ;
7. Incremente  $i = i + 1$ ;
8. Vá para o passo 4;

As Figuras 94, 95 e 96 são exemplos de *desenhos em 2-páginas* por meio do Algoritmo de Vr'to-Faria:



Figura 94: Desenho em 2-páginas de  $Q_0, Q_1, Q_2$  seguindo o Algoritmo de Vr'to-Faria.

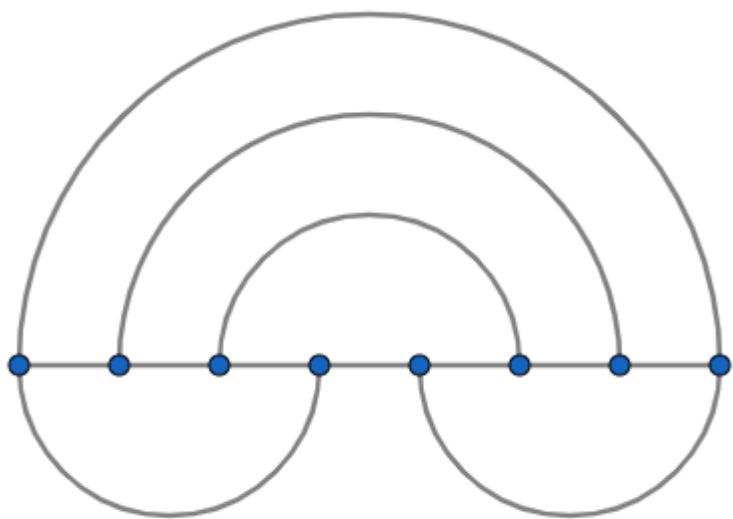


Figura 95: *Desenho em 2-páginas* de  $Q_3$  seguindo o Algoritmo de Vr'to-Faria.

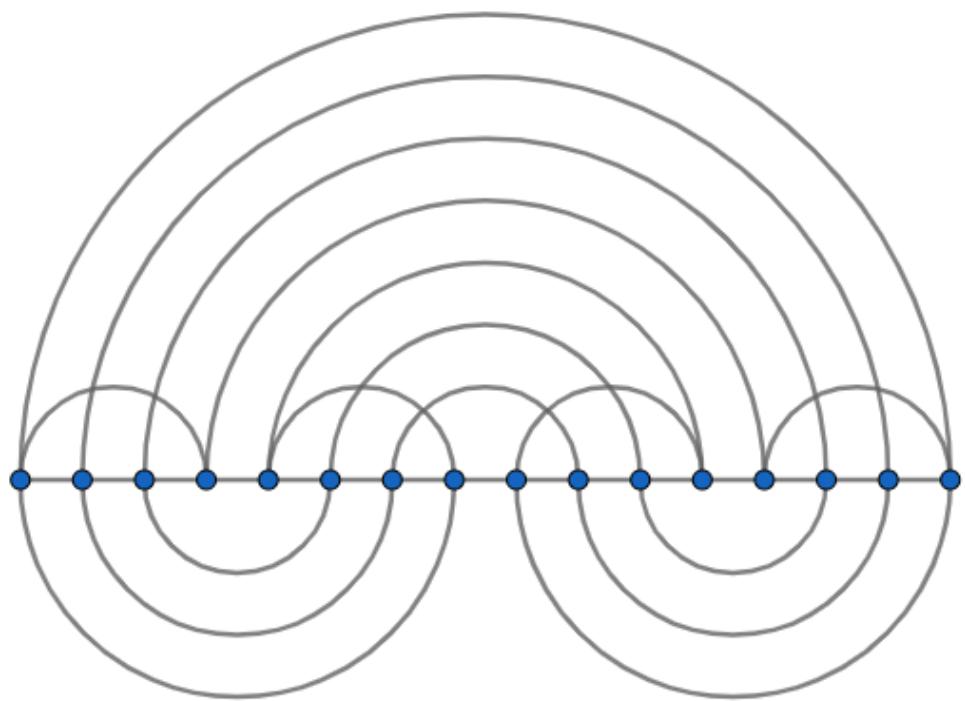


Figura 96: *Desenho em 2-páginas* de  $Q_4$  seguindo o Algoritmo de Vr'to-Faria.

## 2.3 Grafo de Kneser



Figura 97: Martin Kneser.

Martin Kneser [34] (Figura 97) foi um matemático alemão o qual definiu os *grafos de Kneser* em 1955.

**Definição 68** (Grafo de Kneser). *Seja  $n, k \in \mathbb{N}^*$  e um conjunto  $X$ , onde  $|X| = n$  e  $n \geq k$ . Definimos um grafo de Kneser como o grafo  $K(n, k)$  tal que  $V(K(n, k)) = [X]^k$  e  $E(V(K(n, k)) = \{vw \in [V(K(n, k))]^2 \mid v \cap w = \emptyset\}$ , i.e., é um grafo onde cada vértice é um subconjunto de  $k$  elementos de um conjunto de  $n$  elementos, onde 2 vértices são adjacentes se e somente se os 2 subconjuntos correspondentes são disjuntos.*

O *grafo de Kneser* mais famoso é o *Grafo de Petersen* que é o  $K(n, 2)$ , representado na Figura 98. Vamos analisar algumas propriedades do *grafo de Kneser* nesta secção.

**Proposição 20** (Número de Vértices do Grafo de Kneser). *Seja  $K(n, k)$  com  $n, k \in \mathbb{Z}$  e  $n \geq k \geq 1$ , um grafo de Kneser, então  $|V(K(n, k))| = \binom{n}{k}$ , onde  $|V(K(n, k))|$  é o número de vértices de  $K(n, k)$ .*

**Demonstração:** Pela definição de *grafo de Kneser* temos que os *vértices* são subconjuntos de  $k$  elementos de um conjunto de  $n$  elementos. Logo,  $|V(K(n, k))| = \binom{n}{k}$ .  $\square$

**Proposição 21** (Grau dos Vértices do Grafo de Kneser). *Seja  $K(n, k)$  com  $n, k \in \mathbb{Z}$  e  $n \geq k \geq 1$ , um grafo de Kneser.  $\forall v \in V(K(n, k))$  temos  $d(v) = \binom{n-k}{k}$ , onde  $d(v)$  é o grau do vértice  $v$ .*

**Demonstração:** Tome  $v$  um vértice do *grafo de Kneser*  $K(n, k)$ . Um vértice  $v'$  é *adjacente* a  $v$  se  $v'$  for disjunto a  $v$ . Como  $v$  associado a um conjunto  $S'$  com  $k$  elementos e  $v'$  é *adjacente* a  $v$ , então  $v'$  é associado a um subconjunto  $S'' \subseteq S \setminus S'$ . Como  $|S''| = k$  e  $|S \setminus S''| = n - k$ , então existem  $\binom{n-k}{k}$  vértices adjacentes a  $v$ .  $\square$

Como consequência direta da Proposição 21 temos o Corolário 4:

**Corolário 4** (Grafo de Kneser é Regular). *Se  $K(n, k)$  é um grafo de Kneser, então  $K(n, k)$  é um grafo regular.*

Pela Proposições 20 e 21, referentes ao número de *vértices* e ao *grau* de cada vértice do *grafo de Kneser*, é consequência direta a Proposição 22, que fornece o número de *arestas* do *grafo de Kneser*:

**Proposição 22** (Número de Arestas do Grafo de Kneser). *Seja  $K(n, k)$  com  $n, k \in \mathbb{Z}$  e  $n \geq k \geq 1$ , um grafo de Kneser, então  $|E(K(n, k))| = \frac{\binom{n}{k} \binom{n-k}{k}}{2}$ .*

Na Figura 98 temos o *grafo de Petersen*. Observe que é o *grafo*  $K(5, 2)$ , e como as propriedades da Proposições 20, 21 e 22 são verdadeiras.

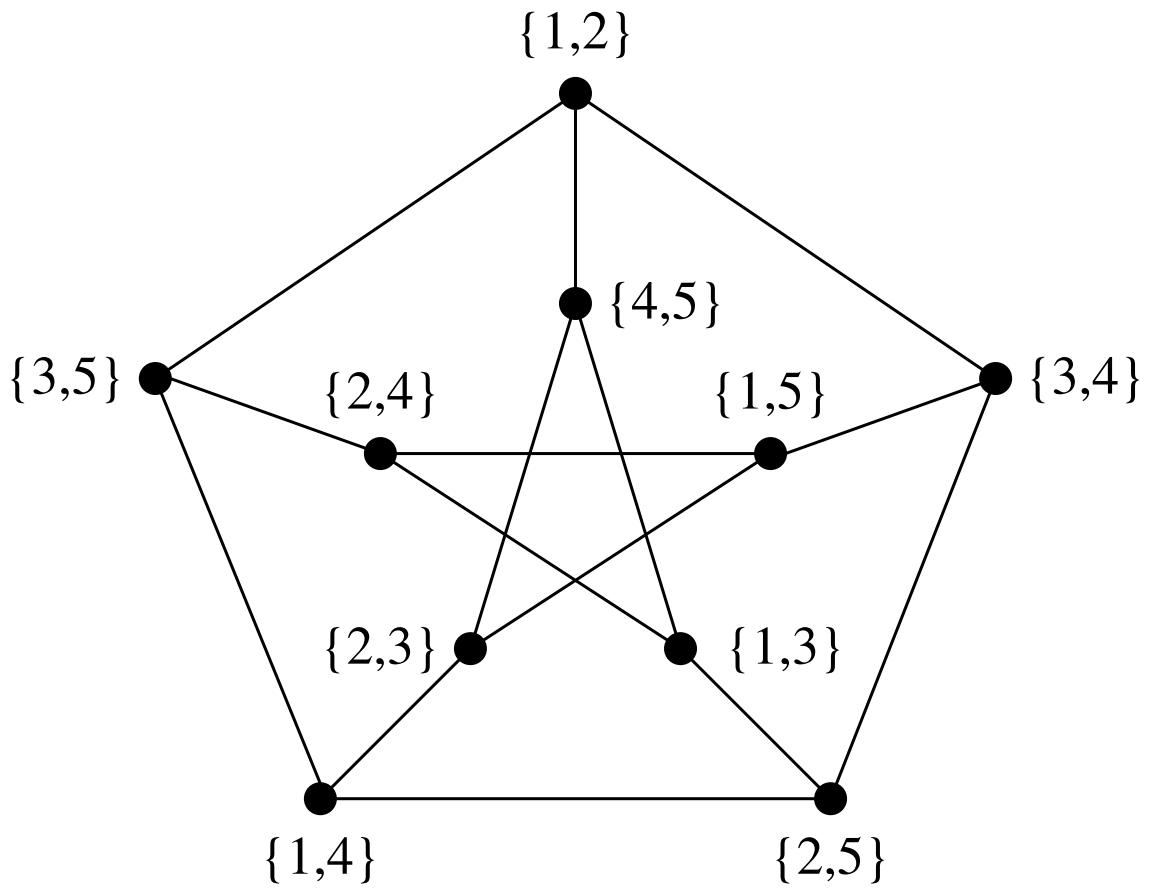


Figura 98: *Grafo de Kneser*  $K(5, 2)$  - o *grafo de Petersen*, que possui 10 vértices, 15 arestas e cada vértice possui grau 3.

Em particular, para  $K(n, 2)$ , *grafo* de interesse neste trabalho, os resultados anteriores implicam:

1.  $|V(K(n, 2))| = \frac{n(n-1)}{2}$ .
2.  $K(n, 2)$  é um *grafo*  $\left(\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right)$ -regular.
3.  $|E(K(n, 2))| = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$ .

**Proposição 23** (*Grafo de Kneser e Grafo Completo*). *O grafo de Kneser*  $K(n, 1)$  é isomorfo ao *grafo completo*  $K_n$ .

**Demonstração:**  $K(n, 1)$  implica que todo o vértice  $v \in V(K(n, 1))$  é um subconjunto de 1 elemento de um conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Logo,  $\forall v_1, v_2 \in V(K(n, 1))$  temos  $v_1 \cap v_2 = \emptyset$ , o que implica  $K(n, 1)$  é *isomorfo* a  $K_n$ .  $\square$

A Figura 99 fornece exemplos de *grafos Kneser*.

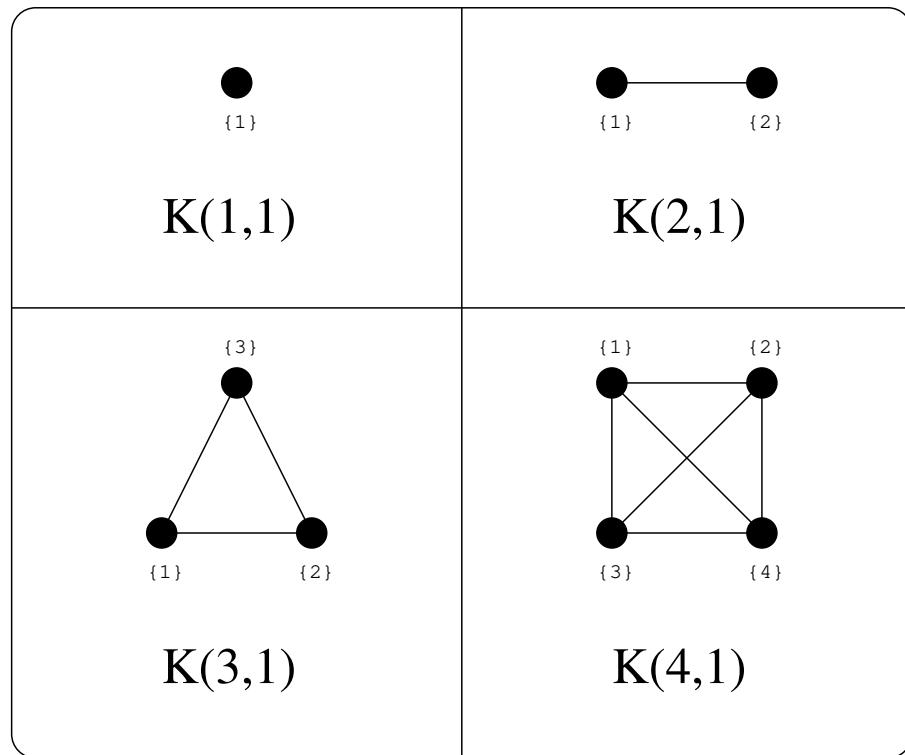


Figura 99: Exemplo de *grafos de Kneser* com  $k = 1$ .  $K(1, 1)$  é *isomoformo* a  $K_1$ ,  $K(2, 1)$  é *isomoformo* a  $K_2$ ,  $K(3, 1)$  é *isomoformo* a  $K_3$  e  $K(4, 1)$  é *isomoformo* a  $K_4$ .

**Proposição 24** (Grafo de Kneser e Grafo Sem Arestas). *Se  $K(n, k)$  é um grafo de Kneser com  $n, k \in \mathbb{N}$  e  $2k > n$ , então  $K(n, k)$  é um grafo sem arestas.*

**Demonstração:** Suponha por absurdo que  $K(n, k)$  com  $2k > n$  seja um grafo com  $|E(K(n, k))| \geq$

1. Então, existem  $v, v'$  tal que  $v \cap v' = \emptyset$ . Como  $|v| + |v'| = 2k \geq n$  temos que existe pelo menos 1 elemento  $x$  que pertence a  $v$  e pertence a  $v'$ , o que implica  $v \cap v' \neq \emptyset$ , uma contradição.

Logo,  $K(n, k)$  com  $2k > n$  é um grafo sem arestas.  $\square$

A Figura 100 fornece como exemplo o *grafo K(5, 3)*.

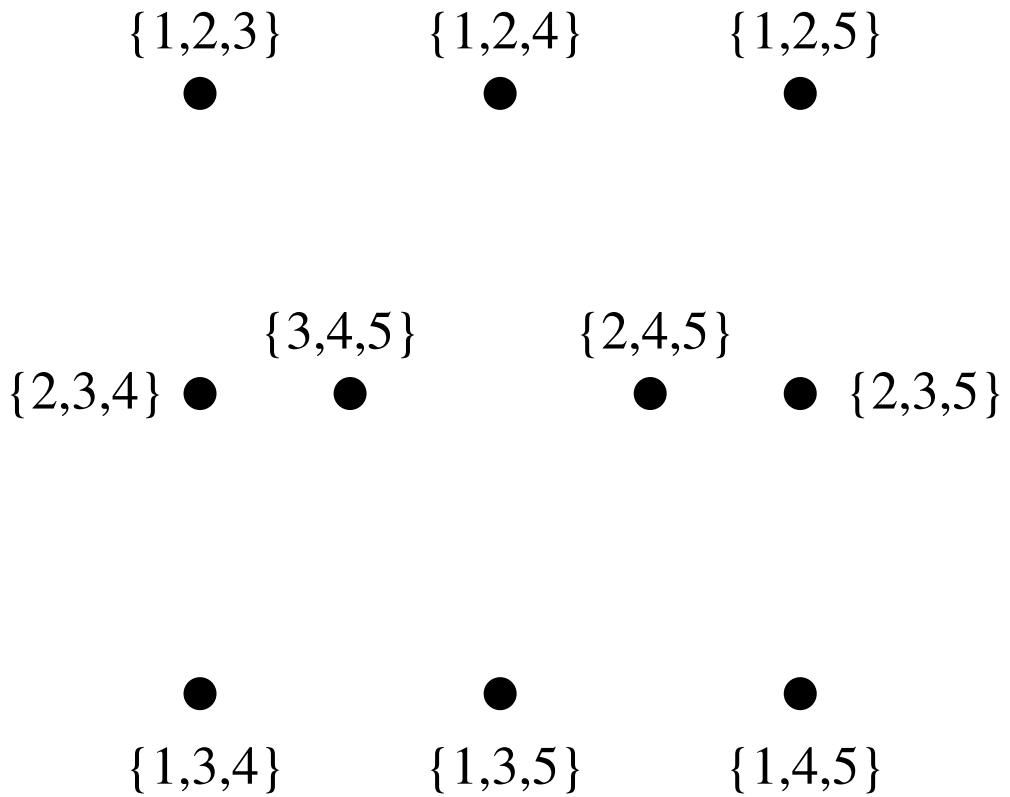


Figura 100: Exemplo do *grafo de Kneser*  $K(5,3)$ . Como  $2k > n$  temos que  $K(5,3)$  sem *arestas*.

Uma propriedade interessante para o *grafo de Kneser*  $K(n,2)$  é dado pela próxima Proposição:

**Proposição 25** (Complemento do Grafo de Linha do Completo).  $K(n,2)$  é isomorfo a  $\overline{L(K_n)}$ .

**Demonstração:** Tome  $L(K_n)$  o *grafo de linha* de  $K_n$  com o *conjunto de vértices*  $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e o *conjunto de arestas*  $E(K_n) = \{v_1v_2, v_1v_3, \dots, v_2v_3, v_2v_4, \dots, v_{n-1}v_n\}$ . É possível ver que cada  $v_i v_j$ , com  $1 \leq i, j \leq n$  é equivalente a um conjunto  $\{v_i, v_j\}$ , que pode ser representado como um subconjunto de 2 elementos de um conjunto  $\{1, 2, \dots\}$ . Como cada aresta de  $K_n$  é um vértice de  $L(K_n)$ , então  $V(K(n,2)) = V(L(K_n))$ . Pela definição de *grafo complementar* temos  $V(L(K_n)) = V(\overline{L(K_n)})$ , que implica  $V(K(n,2)) = V(\overline{L(K_n)})$ . Como  $K_n$  é uma *grafo completo* temos que  $v, w \in V(L(K_n))$  se e somente se  $v \cap w \neq \emptyset$ . Logo, pela

negação da sentença lógica temos que  $v, w \in V(\overline{L(K_n)})$  se e somente se  $v \cap w = \emptyset$ , que implica em  $E(K(n, 2)) = E(\overline{L(K_n)})$ . Portanto,  $K(n, 2)$  é isomorfo a  $\overline{L(K_n)}$ .  $\square$

**Proposição 26** (Teorema Erdős–Ko–Rado' 1961). [18]  $\alpha(K(n, k)) = \binom{n-1}{k-1}$ .

Tome o elemento  $n$  do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Vamos construir um *conjunto independente*  $C$  a partir de  $n$ , tal que  $X \in C$  se e somente se  $X = S \cup \{n\}$  com  $S$  subconjunto de  $k - 1$  elementos de  $\{1, 2, \dots, (n - 1)\}$ . É possível ver que  $C$  é um *conjunto independente* com  $\binom{n-1}{k-1}$  elementos. Desse modo, podemos construir um *conjunto independente* com tamanho  $\alpha(K(n, k))$ , por meio de todos os subconjuntos que possuem um elemento arbitrário  $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Por exemplo, para o caso  $K(6, 3)$  escolhendo o elemento arbitrário 4 temos o *conjunto independente*:

$$\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 4, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 6\}.$$

As Proposições 27 e 28 ilustram 2 propriedades de automorfismo:

**Proposição 27** (Chen' 1987). [11]  $K(n, k)$  é um grafo vértice-transitivo.

**Proposição 28** (Chen' 1987). [11]  $K(n, k)$  é um grafo aresta-transitivo.

A Proposição 28 permite demonstrar que  $\nu(K(5, 2)) = 2$ . A Figura 101 demonstar que  $K(5, 2)$  não é uma *grafo planar*:

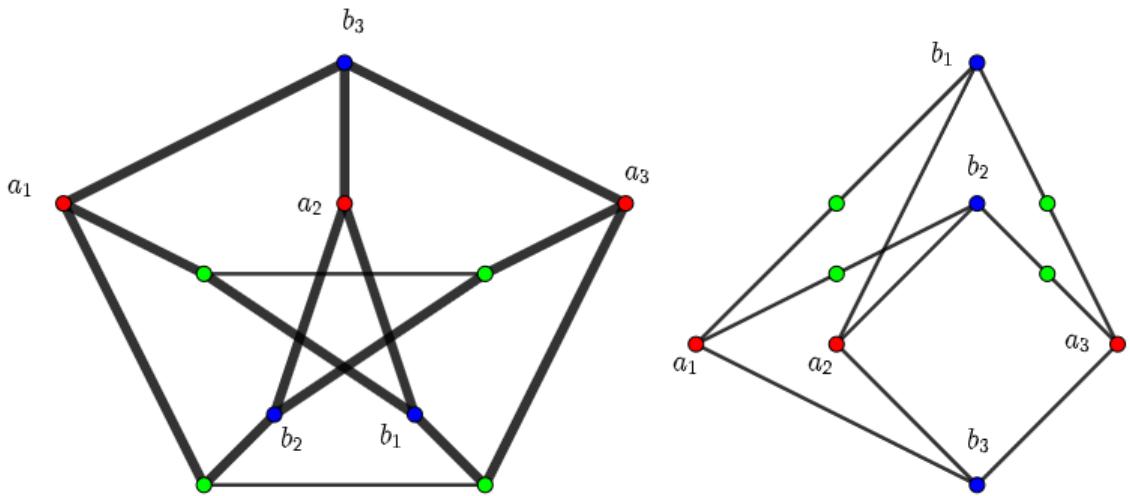


Figura 101: O *grafo de Petersen* é um *grafo não planar*.

Como  $K(5, 2)$  é um *grafo aresta-transitivo* então independente da *aresta* que removemos, construimos *grafos isomorfos*. Após removemos a *aresta* que gera *cruzamento* na Figura 101, construimos um *grafo* que não é *grafo planar*. A Figura 102 demonstar que continua a existir uma *subdivisão* do  $K_{3,3}$ :

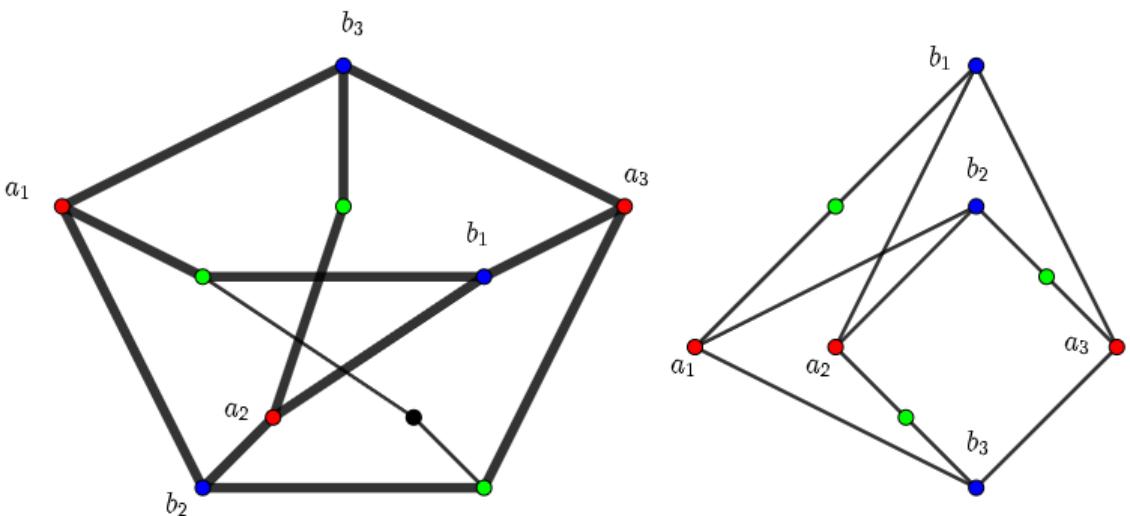


Figura 102: Remover uma *aresta* do *grafo de Petersen* produz um *grafo não planar*.

Realizando o mesmo processo para o novo *grafo* obtido, verificamos que construimos um *grafo planar*. A Figura 103 ilustra isso:

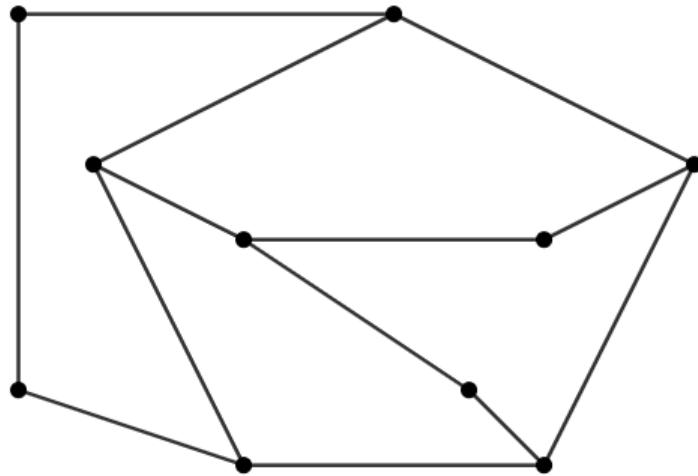


Figura 103: Após remover 2 *arestas* do *grafo de Petersen* temos como resultado um *grafo planar*.

Como base nisso construimos um *desenho no plano* com apenas 2 cruzamentos, representado na Figura 104:

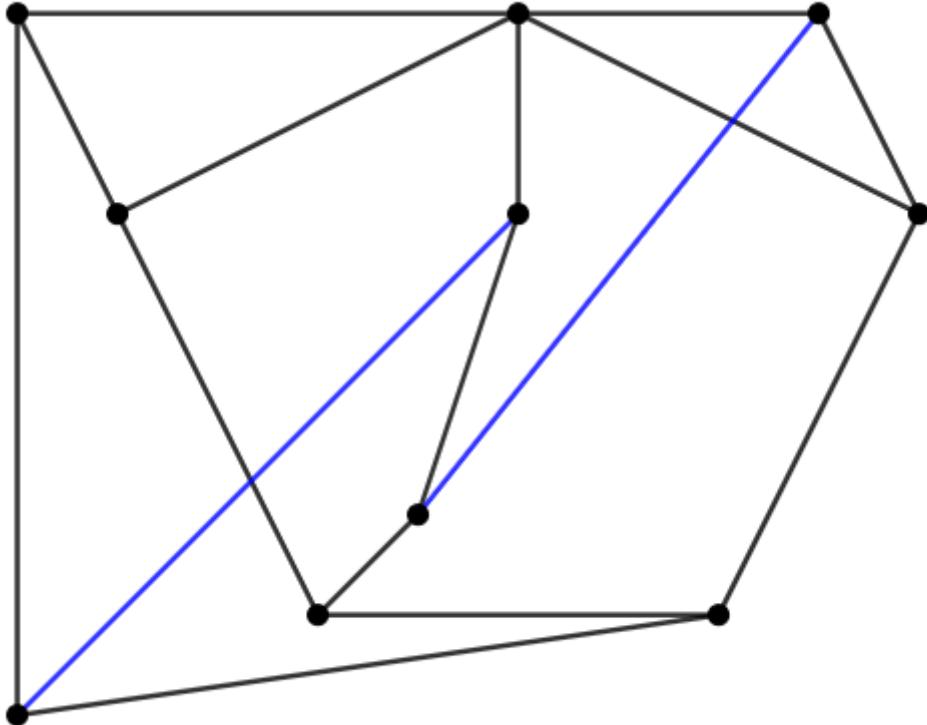


Figura 104: Desenho no plano do grafo de Petersen com 2 cruzamentos.

O Teorema a seguir expressa o *número cromático* dos grafos de Kneser:

**Teorema 18** (Lovász'1978, Greene'2002 e Matouvsek'2004). [37][24][38] Se  $n \geq 2k$ , com  $n, k \in \mathbb{N}$ , então  $\chi(K(n, k)) = n - 2k + 2$ , onde  $K(n, k)$  é um grafo de Kneser.

Se  $n = 2k$ , temos que  $\Delta(K(2k, k)) = \binom{2k-k}{k} = \binom{k}{k} = 1$  e  $\omega(K(2k, k)) = \lfloor \frac{2k}{k} \rfloor = 2$ .

Logo,  $\omega(K(2k, k)) = 2 \leq \chi(K(2k, k)) \leq \Delta(K(2k, k)) + 1 = 2$ , o que implica  $\chi(K(2k, k)) = 2$ . Desse modo, podemos *colorir* os vértices de  $K(2k, k)$  com 2 cores. Vamos construir uma 2-coloração de vértices para  $K(2k, k)$ . Seja  $N = \{1, 2, \dots, 2k\}$ . Para todo o vértice  $v$  associado a um conjunto  $S$  com uma cor  $c$ , colorimos o vértice  $v'$ , associado ao conjunto complementar  $S' = N \setminus S$ , com uma cor  $c'$  tal que  $c \neq c'$ . Como o grau de  $K(2k, k)$  é 1, vemos que é possível *colorir* os vértices de  $K(2k, k)$  por meio desse processo. A partir dessa construção podemos estabelecer uma coloração de vértices de  $K(n, k)$  para  $n \geq 2k$ .

Dado  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , definimos os conjuntos  $X = \{1, 2, \dots, 2k\}$  e  $Y = N \setminus X$ . Todos vértices associados a conjuntos  $S$  tal que  $S \subset X$ , colorimos cada vértice de acordo com o procedimento de *coloração* para  $K(2k, k)$ . Para vértices associados a um conjunto  $S'$  tal que existe um elemento  $e \in S'$  com  $e \in Y$ , vértices com o mesmo elemento máximo do conjunto associado  $S'$  possuem a mesma cor e vértices com elementos máximos diferentes possuem cores diferentes. Observe que essa construção é possível e temos uma *coloração de vértices*  $\chi(K(n, k)) = n - 2k + 2$ .

Por exemplo para o caso  $K(6, 2)$ , temos  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $2k = 4$ , então temos o conjunto  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $Y = \{5, 6\}$ . Vamos *colorir* os vértices que somente possuem elementos  $e \leq 2k$ :

1.  $c(\{1, 2\}) = 1, c(\{3, 4\}) = 2;$
2.  $c(\{1, 3\}) = 1, c(\{2, 4\}) = 2;$
3.  $c(\{1, 4\}) = 1, c(\{2, 3\}) = 2.$

Para o caso os vértices possuam algum elemento  $e > 2k$ , colorimos do seguinte modo:

1.  $c(\{1, 5\}) = 3, c(\{2, 5\}) = 3, c(\{3, 5\}) = 3, c(\{4, 5\}) = 3;$
2.  $c(\{1, 6\}) = 4, c(\{2, 6\}) = 4, c(\{3, 6\}) = 4, c(\{4, 6\}) = 4, c(\{5, 6\}) = 4.$

Observe que essa é uma 4-coloração de vértices e que  $\chi(K(6, 2)) = 4$ , ou seja, é uma *coloração de vértices ótima*.

Em particular temos  $\chi(K(n, 2)) = n - 2$ . A Figura 105 mostra uma coloração de vértices ótima para o *grafo de Kneser*  $K(6, 2)$ .

**Teorema 19** (Chen, Ya-Chen'2000). [12] Seja  $n, k \in \mathbb{N}$ . Se  $K(n, k)$  é um grafo de Kneser e  $n \geq 3k$ , então  $K(n, k)$  é um grafo hamiltoniano.

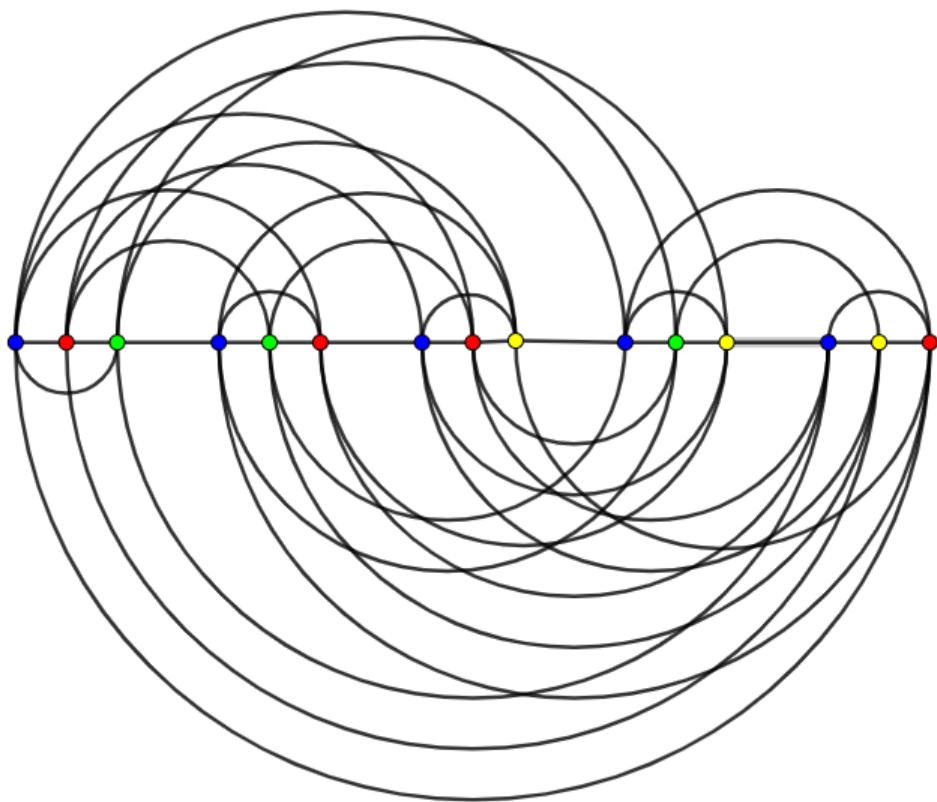


Figura 105: *Coloração de vértices ótima do grafo de Kneser  $K(6, 2)$ .*

Por meio da computação das fórmulas descritas nas Proposições 20, 21 e 22; temos as Tabelas 2, 3 e 4 temos os valores do número de vértices e o grau do grafo de Kneser  $K(n, k)$  para  $1 \leq n \leq 25$  e  $1 \leq k \leq 10$  para o número de vértices e grau, e  $1 \leq k \leq 7$  para o número de arestas:

$ V(K(n, k)) $	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$
$n = 1$	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$n = 2$	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—
$n = 3$	3	3	1	—	—	—	—	—	—	—
$n = 4$	4	6	4	1	—	—	—	—	—	—
$n = 5$	5	10	10	5	1	—	—	—	—	—
$n = 6$	6	15	20	15	6	1	—	—	—	—
$n = 7$	7	21	35	35	21	7	1	—	—	—
$n = 8$	8	28	56	70	56	28	8	1	—	—
$n = 9$	9	36	84	126	126	84	36	9	1	—
$n = 10$	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
$n = 11$	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
$n = 12$	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
$n = 13$	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
$n = 14$	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
$n = 15$	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
$n = 16$	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
$n = 17$	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
$n = 18$	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
$n = 19$	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
$n = 20$	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756
$n = 21$	21	210	1330	5985	20349	54264	116280	203490	293930	352716
$n = 22$	22	231	1540	7315	26334	74613	170544	319770	497420	646646
$n = 23$	23	253	1771	8855	33649	100947	245157	490314	817190	1144066
$n = 24$	24	276	2024	10626	42504	134596	346104	735471	1307504	1961256
$n = 25$	25	300	2300	12650	53130	177100	480700	1081575	2042975	3268760

Tabela 2: Número de vértices do grafo  $K(n, k)$  para  $1 \leq k \leq 10$  e  $k \leq n \leq 25$ .

$ E(K(n, k)) $	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
$n = 1$	0	—	—	—	—	—	—
$n = 2$	1	0	—	—	—	—	—
$n = 3$	3	0	0	—	—	—	—
$n = 4$	6	3	0	0	—	—	—
$n = 5$	10	15	0	0	0	—	—
$n = 6$	15	45	10	0	0	0	—
$n = 7$	21	105	70	0	0	0	0
$n = 8$	28	210	280	35	0	0	0
$n = 9$	36	378	840	315	0	0	0
$n = 10$	45	630	2100	1575	126	0	0
$n = 11$	55	990	4620	5775	1386	0	0
$n = 12$	66	1485	9240	17325	8316	462	0
$n = 13$	78	2145	17160	45045	36036	6006	0
$n = 14$	91	3003	30030	105105	126126	42042	1716
$n = 15$	105	4095	50050	225225	378378	210210	25740
$n = 16$	120	5460	80080	450450	1009008	840840	205920
$n = 17$	136	7140	123760	850850	2450448	2858856	1166880
$n = 18$	153	9180	185640	1531530	5513508	8576568	5250960
$n = 19$	171	11628	271320	2645370	11639628	23279256	19953648
$n = 20$	190	14535	387600	4408950	23279256	58198140	66512160
$n = 21$	210	17955	542640	7122150	44442216	135795660	199536480
$n = 22$	231	21945	746130	11191950	81477396	298750452	548725320
$n = 23$	253	26565	1009470	17160990	144152316	624660036	1402298040
$n = 24$	276	31878	1345960	25741485	247118256	1249320072	3365515296
$n = 25$	300	37950	1771000	37855125	411863760	2402538600	7648898400

Tabela 3: Número de *arestas* do grafo  $K(n, k)$  para  $1 \leq k \leq 7$  e  $k \leq n \leq 25$ .

$ d(v) $	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$
$n = 1$	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$n = 2$	1	0	—	—	—	—	—	—	—	—
$n = 3$	2	0	0	—	—	—	—	—	—	—
$n = 4$	3	1	0	0	—	—	—	—	—	—
$n = 5$	4	3	0	0	0	—	—	—	—	—
$n = 6$	5	6	1	0	0	0	—	—	—	—
$n = 7$	6	10	4	0	0	0	0	—	—	—
$n = 8$	7	15	10	1	0	0	0	0	—	—
$n = 9$	8	21	20	5	0	0	0	0	0	—
$n = 10$	9	28	35	15	1	0	0	0	0	0
$n = 11$	10	36	56	35	6	0	0	0	0	0
$n = 12$	11	45	84	70	21	1	0	0	0	0
$n = 13$	12	55	120	126	56	7	0	0	0	0
$n = 14$	13	66	165	210	126	28	1	0	0	0
$n = 15$	14	78	220	330	252	84	8	0	0	0
$n = 16$	15	91	286	495	462	210	36	1	0	0
$n = 17$	16	105	364	715	792	462	120	9	0	0
$n = 18$	17	120	455	1001	1287	924	330	45	1	0
$n = 19$	18	136	560	1365	2002	1716	792	165	10	0
$n = 20$	19	153	680	1820	3003	3003	1716	495	55	1
$n = 21$	20	171	816	2380	4368	5005	3432	1287	220	11
$n = 22$	21	190	969	3060	6188	8008	6435	3003	715	66
$n = 23$	22	210	1140	3876	8568	12376	11440	6435	2002	286
$n = 24$	23	231	1330	4845	11628	18564	19448	12870	5005	1001
$n = 25$	24	253	1540	5985	15504	27132	31824	24310	11440	3003

Tabela 4: Graus do grafo regular  $K(n, k)$  para  $1 \leq k \leq 10$  e  $k \leq n \leq 25$ .

Antes enunciar-mos o próximo Teorema, vamos definir 2 tipos de *hipergrafos*:

**Definição 69** (Hipergrafo  $k$ -uniforme). *Um hipergrafo  $H$  é dito  $k$ -uniforme se e somente se toda a hiperaresta possuir  $k$  vértices.*

**Definição 70** (Hipergrafo Completo  $k$ -uniforme). *Um hipergrafo  $H$  é dito completo  $k$ -uniforme se e somente se  $H$  o conjunto de arestas são os subconjuntos de  $k$  vértices do conjunto de vértices de  $H$ .*

Denotamos um *hipergrafo completo  $k$ -uniforme* por  $K_n^k$ , onde  $n$  é o número de vértices do hipergrafo. Segue-se o Teorema de Baranyai[5]:

**Teorema 20** (Teorema de Baranyai'1975). [5] Seja  $H$  um hipergrafo completo  $k$ -uniforme com  $n$  vértices e  $k|n$ , com  $k, n \in \mathbb{N}$ , então existe uma 1-fatoração  $\mathcal{F}$  tal que  $\forall F \in \mathcal{F}$  temos  $|F| = \frac{n}{k}$  e  $F_i \cap F_j = \emptyset, i \neq j$ .

É possível observar que  $K_n^k$  possui uma correspondencia com o grafo Kneser  $K(n, k)$ .

Note que cada hiperaresta de  $K_n^k$  é equivalente a um vértice de  $K(n, k)$ . E que 2 hiperarestas de  $K_n^k$  possuirem vértices em comum é equivalente a existir uma aresta em  $K(n, k)$  entre 2 vértices correspondentes às hiperarestas. Segue-se disso:

**Teorema 21** (Wagon'2013). [49]  $\theta(K(n, k)) = \left\lceil \frac{\binom{n}{k}}{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \right\rceil$ .

O Teorema 21 descreve o valor exato do *número de cobertura de cliques* do grafo  $K(n, k)$ . Nós oferecemos na Tabela 5 os valores de  $\theta(K(n, k))$  para  $1 \leq k \leq 10$  e  $k \leq n \leq 25$ , computados a partir da fórmula do Teorema 21:

$\theta(K(n, k))$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$
$n = 1$	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$n = 2$	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—
$n = 3$	1	3	1	—	—	—	—	—	—	—
$n = 4$	1	3	4	1	—	—	—	—	—	—
$n = 5$	1	5	10	5	1	—	—	—	—	—
$n = 6$	1	5	10	15	6	1	—	—	—	—
$n = 7$	1	7	18	35	21	7	1	—	—	—
$n = 8$	1	7	28	35	56	28	8	1	—	—
$n = 9$	1	9	28	63	126	84	36	9	1	—
$n = 10$	1	9	40	105	126	210	120	45	10	1
$n = 11$	1	11	55	165	231	462	330	165	55	11
$n = 12$	1	11	55	165	396	462	792	495	220	66
$n = 13$	1	13	72	239	644	858	1716	1287	715	286
$n = 14$	1	13	91	334	1001	1502	1716	3003	2002	1001
$n = 15$	1	15	91	455	1001	2503	3218	6435	5005	3003
$n = 16$	1	15	112	455	1456	4004	5720	6435	11440	8008
$n = 17$	1	17	136	595	2063	6188	9724	12155	24310	19448
$n = 18$	1	17	136	765	2856	6188	15912	21879	24310	43758
$n = 19$	1	19	162	969	3876	9044	25194	37791	46189	92378
$n = 20$	1	19	190	969	3876	12920	38760	62985	83980	92378
$n = 21$	1	21	190	1197	5088	18088	38760	101745	146965	176358
$n = 22$	1	21	220	1463	6584	24871	56848	159885	248710	323323
$n = 23$	1	23	253	1771	8413	33649	81719	245157	408595	572033
$n = 24$	1	23	253	1771	10626	33649	115368	245157	653752	980628
$n = 25$	1	25	288	2109	10626	44275	160234	360525	1021488	1634380

Tabela 5: Valores para o *número de cobertura* de  $K(n, k)$  com  $1 \leq k \leq 10$  e  $k \leq n \leq 25$ .

No Corolário 5 nós aplicamos o Teorema 21 para nossa classe alvo - os *grafos Kneser*  $K(n, 2)$ .

**Corolário 5** (Wagon'2013). [49] Seja  $K(n, 2)$  um grafo de Kneser temos:

1. Se  $n$  é par, então  $\theta(K(n, 2)) = n - 1$ ,
2. Se  $n$  é ímpar, então  $\theta(K(n, 2)) = n$ .

O Teorema 22 apresenta o resultado de Brouwer e Schrijver que estabeleceu o valor exato do *número de clique*  $\omega(K(n, k))$  do grafo  $K(n, k)$ . Para a conveniência do leitor, nós oferecemos na Tabela 6 os valores de  $\omega(K(n, k))$  para  $1 \leq k \leq 10$  e  $k \leq n \leq 25$ .

Se  $n = kq$  com  $n, q, k \in \mathbb{N}$ , então para um *grafo de Kneser*  $K(n, k)$  é possível construir uma *clique* com cada vértice associado aos subconjuntos  $S_1, S_2, \dots, S_q$ , disjuntos dois a

dois, onde  $|S_i| = k$  para  $1 \leq i \leq q$ , pois como temos  $n$  elementos distintos e  $q$  subconjuntos e  $n = kq$ , basta colocarmos em cada subconjunto  $k$  elementos. Note que não é possível obter uma *clique* com mais vértices que o  $q$ . Suponha por absurdo que exista uma *clique* com  $\ell$  elementos onde  $\ell > q$  e construímos o conjunto  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_q \cup S_{q+1} \cup \dots \cup S_\ell$ . Como  $|S_i| = k$ , então  $|S| = k\ell > kq = n$ , uma contradição. Logo,  $\omega(K(n, k)) = q = \lceil \frac{n}{k} \rceil$ . Vamos ver o caso em que  $k(q + 1) > n > kq$ . Neste caso, utilizando a demonstração por absurdo, sabemos que  $\omega(K(n, k)) < (q + 1)$ , mas utilizando a construção anterior para *clique* podemos construir uma *clique* com  $q$  vértices, o que implica  $q \leq \omega(K(n, k)) < (q + 1)$ . Como  $\omega(K(n, k))$  é um número inteiro positivo, temos  $\omega(K(n, k)) = q = \lceil \frac{n}{k} \rceil$ . Com esses resultados, temos o Teorema:

**Teorema 22** (Brouwer, Schrijver'1979). [8]  $\omega(K(n, k)) = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$

No Corolário 6 nós aplicamos o Teorema 22 para nossa classe alvo - os grafos  $K(n, 2)$ .

**Corolário 6** (Brouwer, Schrijver'1979). [8] Seja  $K(n, 2)$  um grafo de Kneser temos:

1. Se  $n$  é par, então  $\omega(K(n, 2)) = \frac{n}{2}$ ,
2. Se  $n$  é ímpar, então  $\omega(K(n, 2)) = \frac{n-1}{2}$ .

O Teorema 22 permite computar os valores  $\omega(K(n, k))$  para  $1 \leq n \leq 25$  e  $1 \leq k \leq 10$  na Tabela 6:

$\omega(K(n, k))$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$
$n = 1$	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$n = 2$	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—
$n = 3$	3	1	1	—	—	—	—	—	—	—
$n = 4$	4	2	1	1	—	—	—	—	—	—
$n = 5$	5	2	1	1	1	—	—	—	—	—
$n = 6$	6	3	2	1	1	1	—	—	—	—
$n = 7$	7	3	2	1	1	1	1	—	—	—
$n = 8$	8	4	2	2	1	1	1	1	—	—
$n = 9$	9	4	3	2	1	1	1	1	1	—
$n = 10$	10	5	3	2	2	1	1	1	1	1
$n = 11$	11	5	3	2	2	1	1	1	1	1
$n = 12$	12	6	4	3	2	2	1	1	1	1
$n = 13$	13	6	4	3	2	2	1	1	1	1
$n = 14$	14	7	4	3	2	2	2	1	1	1
$n = 15$	15	7	5	3	3	2	2	1	1	1
$n = 16$	16	8	5	4	3	2	2	2	1	1
$n = 17$	17	8	5	4	3	2	2	2	1	1
$n = 18$	18	9	6	4	3	3	2	2	2	1
$n = 19$	19	9	6	4	3	3	2	2	2	1
$n = 20$	20	10	6	5	4	3	2	2	2	2
$n = 21$	21	10	7	5	4	3	3	2	2	2
$n = 22$	22	11	7	5	4	3	3	2	2	2
$n = 23$	23	11	7	5	4	3	3	2	2	2
$n = 24$	24	12	8	6	4	4	3	3	2	2
$n = 25$	25	12	8	6	5	4	3	3	2	2

Tabela 6: Valores para o *número de clique* de  $K(n, k)$  com  $1 \leq k \leq 10$  e  $k \leq n \leq 25$ .

### 3 Algoritmos

#### 3.1 Algoritmo Exaustivo

Um estudo Sobre o *número de cruzamentos* do *grafo de Kneser* no Trabalho Final do aluno Jonas Carvalho[9] em 2019 no curso de bacharelado do IME obteve, por meio de um Algoritmo Exaustivo, o *número de cruzamentos* mínimo em 2-páginas para uma ordenação fixada  $P$  na *espinha*, um *desenho de 2-páginas* de  $K(6, 2)$  (mostrado na Figura 106) e  $K(7, 2)$ , respectivamente, com 49 e 592 *cruzamentos*[9].

O Algoritmo Exaustivo utilizado foi o seguinte: Definimos uma *espinha* no eixo  $x$

formada de um *caminho Hamiltoniano*  $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  no *grafo*  $G = (V, E)$ , tal que a coordenada de  $v_1$  é  $x = 1$ , e dado um  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$  a coordenada de  $v_i$  é menor que a coordenada de  $v_{i+1}$ . Seja  $n$  o número de *vértices* e  $m$  o número de *arestas* do *grafo*  $G$ , definimos como  $m' = m - (n - 1)$  o número de *arestas* que não estão no *caminho*  $P$ . Definimos a partir disso uma  $m'$ -*tupla* composta de 0's e 1's associada, com o seguinte significado que o número 0 associado com a *aresta*  $e$  representa que a *aresta*  $e$  se encontra desenhada no semiplano 0 e o número 1 representa que a *aresta*  $e$  se encontra desenhada no semiplano 1.

A partir disso definimos todas as  $m'$ -*tuplas* possíveis com cada bit correspondente a uma das *arestas* fora da *espinha* em ordem crescente que vão de 0000...0 a 1111...1, onde 0 significa o semiplano inferior e 1 significa o semiplano superior. Assim, 0000...0 considera o *desenho em 2-páginas* com todas as *arestas* no semiplano inferior e 1111...1 considera o *desenho em 2-páginas* com todas as *arestas* no semiplano superior.

Dadas duas *arestas* da *espinha* com coordenadas  $e_1 = a_1 b_1$  e  $e_2 = a_2 b_2$ . Dizemos que  $e_1$  e  $e_2$  se *intercalam* se  $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$  ou se  $a_2 < a_1 < b_2 < b_1$ .

Para cada par de *arestas* verificamos se mesmas *intercalam* e se estão no mesmo semiplano. Caso seja verdadeiro, incrementamos em 1 o *número de cruzamentos* da  $m'$ -*tupla* correspondente.

A cada iteração sobre as  $m'$ -*tuplas*, armazenamos a  $m'$ -*tupla* com o menor *número de cruzamentos*. O resultado final deste algoritmo é o *desenho em 2-páginas* com o menor *número de cruzamentos* para o *grafo*  $G$  com a ordenação dos *vértices*  $P$ .

Cabe destacar que o Algoritmo Exaustivo não determina o *número de cruzamentos em 2-páginas* de um *grafo*  $K(n, 2)$ . Ele determina o *número de cruzamentos em 2-páginas* de  $K(n, 2)$  para uma ordenação fixada pelo *caminho Hamiltoniano*  $P$ . Para determinar o *número de cruzamentos em 2-páginas* do *grafo*, usando o Algoritmo Exaustivo, seria necessário consi-

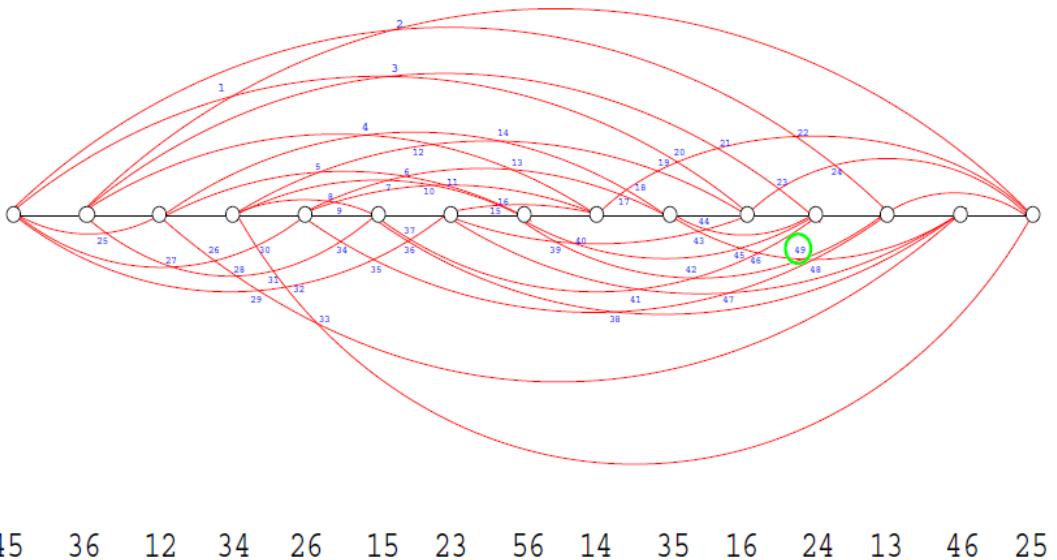


Figura 106: *Desenho em 2-páginas* do grafo de Kneser  $K(6, 2)$  obtido pelo Algoritmo Exaustivo, com a 45-tupla 00001 10011 10110 01110 01100 00010 00000 10000 10010.

derar todas as possíveis ordenações para um *caminho*  $P$  que totalizaria uma complexidade de tempo de  $O(2^{|V|} \cdot 2^{|E|-|V|})$ [9].

Por exemplo, considere o *grafo*  $K_4$ . Como  $|E(K_4)| = 6$  então temos que existem  $2^6 = 64$  6-tuplas que representam o *desenho em 2-páginas* de  $K_4$ . Na Figura 107 temos a representação de cada uma dessas 6-tuplas, onde 0 está representado de cor vermelha e 1 de cor azul. Observe que o *número de cruzamentos* obtido em cada um desses *desenhos* varia de 0 até 2.

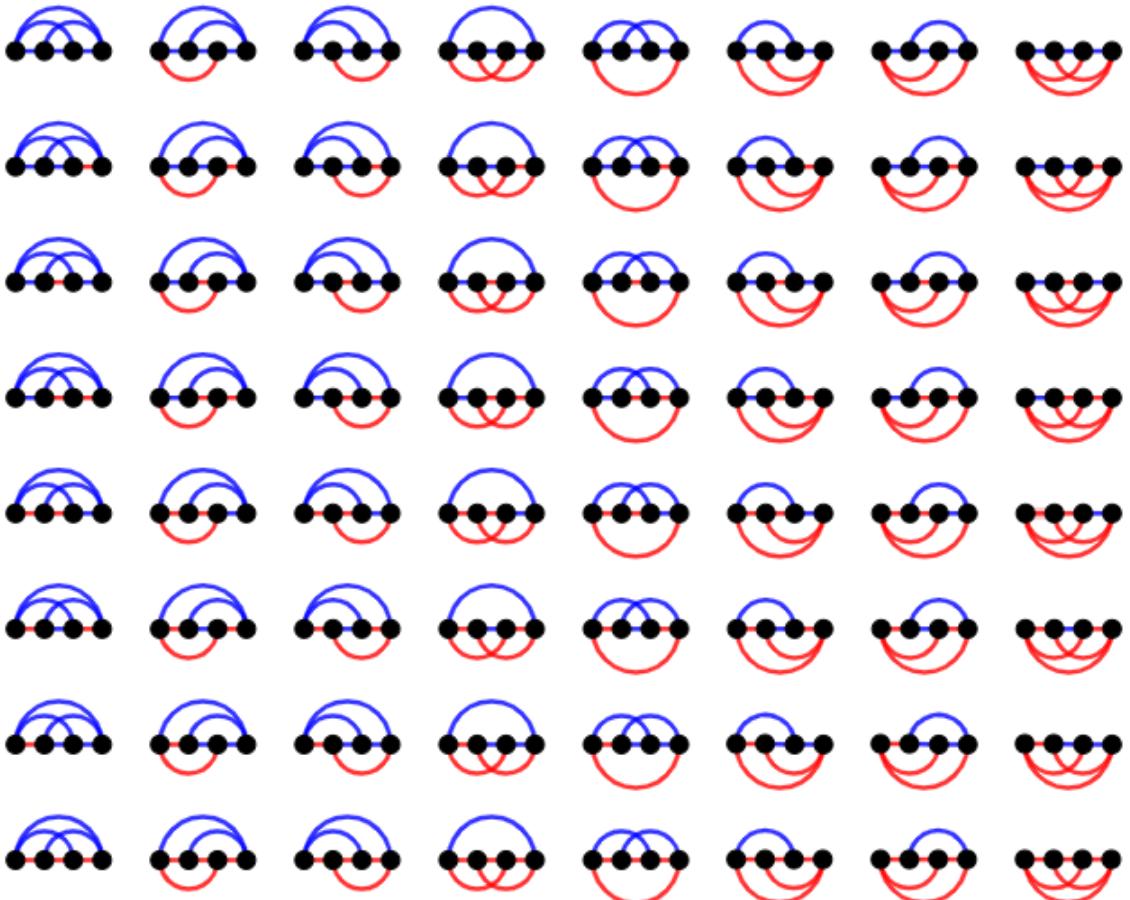


Figura 107: As 64 6-tuplas possíveis de um  $K_4$ .

### 3.2 Algoritmo de Slope

Vamos definir o que *i-emparelhamento* e *emparelhamento consecutivos*, definições necessárias para entender o Algoritmo do Slope:

**Definição 71** (*i-emparelhamento*). *Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $i \in \mathbb{N}$  com  $i \leq (n - 1)$ , onde  $|V| = n$ . Definimos um *i-emparelhamento* de  $G$  como  $M_i = \{uv \in E | (f(u) + f(v)) \text{ mod } n = i\}$ , onde  $f$  é uma função bijetiva  $f : V \rightarrow \mathbb{N}_{0,(n-1)}$ .*

**Definição 72** (Emparelhamentos Consecutivos). *Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $i \in \mathbb{N}$  com  $i \leq (n - 1)$ , onde  $|V| = n$ . Definimos *emparelhamentos consecutivos*  $M_{s,t} = \bigcup_{i=s}^t M_i$ , onde*

$s, t \in \mathbb{N}_{0,(n-1)}$  e  $M_i$  é um  $i$ -emparelhamento de  $G$ .

O Algoritmo de Slope para  $k$  círculos é um método de *desenho* de um *grafo* onde são colocados os *vértices* na circunferência de cada um dos  $k$  círculos e particionamos as *arestas* entre os  $k$  círculos. O Algoritmo é definido pelos seguintes passos:

**Algoritmo 3** (Algoritmo de Slope'2018). [15]

**Entrada:** um grafo  $G$  e um inteiro  $k \geq 1$ .

**Saída:** um desenho em  $k$ -círculos  $S_k(G)$ .

Seja  $G = (V, E)$  um grafo tal que  $n = |V|$ . Definimos o Algoritmo de Slope para  $k$  círculos:

1. A cada vértice  $v \in V$  rotulamos um valor  $0, 1, \dots, (n-1)$ ;
2. Calcule  $p = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  e  $q = n \bmod k$ ;
3. Para cada um dos círculos  $0 \leq \ell < q$  coloque as arestas  $e \in M_{\ell(p+1), \ell(p+1)+p}$ ;
4. Para cada um dos círculos  $q \leq \ell < k$  coloque as arestas  $e \in M_{\ell p+q, \ell p+q+(p-1)}$ .

Vamos denotar um *desenho* de um *grafo*  $G = (V, E)$  em  $k$ -páginas por meio do Algoritmo de Slope como  $S_k(G)$ .

É possível ver que esse método de *desenho* de um *grafo* separando as *arestas* em círculos, pode ser aplicado como um modelo de *desenho* de um *grafo* em  $k$ -páginas, pelos seguintes passos:

1. Desenhamos a *espinha* seguindo a ordem dos rótulos dos *vértices* definidos pelo Algoritmo de Slope, isto é, em ordem os vértices  $0, 1, \dots, (n-1)$ ;
2. Toda a *aresta* colocada no círculo  $\ell$  é colocada na *página*  $\ell$ .

Em particular, neste trabalho usamos o Algoritmo de Slope para 2 círculos para o *grafo*  $K_n$ , pois é equivalente a um *desenho* em 2-páginas.

Rotulados os vértices com os valores  $0, 1 \dots, (n-1)$ , definimos o Algoritmo de Slope específico para um *desenho em 2-páginas* como:

1. Se  $0 \leq (i+j) \bmod (n) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  coloque aresta  $ij$  na página 0;
2. Se  $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq (i+j) \bmod (n) \leq (n-1)$  coloque aresta  $ij$  na página 1.

Por exemplo, vamos obter  $S_3(K_7)$ , isto é, o *desenho* do  $K_7$  em 3 círculos pelo Algoritmo do Slope. Temos que  $p = \lceil \frac{7}{3} \rceil = 2$  e  $q = 7 \bmod 3 = 1$ . Na Figura 108 temos a representação do  $K_7$  em 3 círculos por meio do Algoritmo do Slope. Importante lembrar que esta representação pode ser representada em um *desenho* em 3-páginas bastando associar cada círculo a 1 página. O resultado da divisão das *arestas* do  $K_7$  em 3 páginas pelo Algoritmo do Slope é dado pelas Tabelas 7 e 8.

<i>páginas</i>		<i>emparelhamentos consecutivos</i>	
$\ell = 0$	$0 \leq \ell < q$	$M_{\ell(p+1), \ell(p+1)+p}$	$M_{0,2}$
$\ell = 1$	$q \leq \ell < k$	$M_{\ell p+q, \ell p+q+(p-1)}$	$M_{3,4}$
$\ell = 2$	$q \leq \ell < k$	$M_{\ell p+q, \ell p+q+(p-1)}$	$M_{5,6}$

Tabela 7: Atribuição de *emparelhamentos consecutivos* do  $K_7$  nas páginas do *desenho*  $S_3(K_7)$ .

$i$	$j$	$(i + j) \bmod 7$	$M_{s,t}$	$\ell$
0	1	1	$M_{0,2}$	0
0	2	2	$M_{0,2}$	0
0	3	3	$M_{3,4}$	1
0	4	4	$M_{3,4}$	1
0	5	5	$M_{5,6}$	2
0	6	6	$M_{5,6}$	2
1	2	3	$M_{3,4}$	1
1	3	4	$M_{3,4}$	1
1	4	5	$M_{5,6}$	2
1	5	6	$M_{5,6}$	2
1	6	0	$M_{0,2}$	0
2	3	5	$M_{5,6}$	2
2	4	6	$M_{5,6}$	2
2	5	0	$M_{0,2}$	0
2	6	1	$M_{0,2}$	0
3	4	0	$M_{0,2}$	0
3	5	1	$M_{0,2}$	0
3	6	2	$M_{0,2}$	0
4	5	2	$M_{0,2}$	0
4	6	3	$M_{3,4}$	1
5	6	4	$M_{3,4}$	1

Tabela 8: Tabela que informa em que página fica uma aresta do  $K_7$  no desenho  $S_3(K_7)$ .

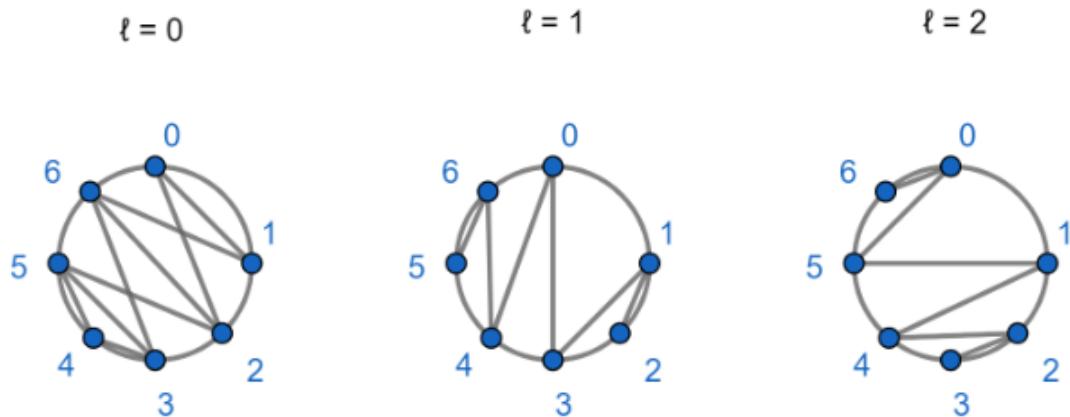


Figura 108:  $S_3(K_7)$ .

O número de cruzamentos neste tipo de desenho é dado pelo Teorema 23:

**Teorema 23** (Klerk et al'2018). [15]  $\nu_k(S_k(K_n)) = (n \bmod k)F(\lceil \frac{n}{k} \rceil + 1, n) + (k - (n \bmod k))F(\lceil \frac{n}{k} \rceil, n)$ , onde  $F(r, n) = -\frac{r^4}{24} + \frac{nr^3}{12} - \frac{nr^2}{4} + \frac{7r^2}{24} + \frac{nr}{6} - \frac{r}{4}$ .

Como  $S_k(G)$  é equivalente a um *desenho em 2-páginas* de  $G$ , então  $\nu_k(S_k(G))$  serve como um limite superior para  $\nu_k(G)$ . Para o caso particular de  $K_n$  segue-se o corolário:

**Corolário 7** (Klerk et al'2018). [15]  $\nu_k(K_n) \leq \nu_k(S_k(K_n))$ .

Aplicando o Teorema 23 para o caso particular  $k = 1$  e  $k = 2$ , obtemos os Teoremas 24 e 25:

**Teorema 24** (Klerk et al'2018). [15]  $\nu_1(S_1(K_n)) = \binom{n}{4} = \nu_1(K_n)$ .

**Teorema 25** (Klerk et al'2018). [15]  $\nu_2(S_2(K_n)) = \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor = \nu_2(K_n)$ .

Os Teoremas 24 e 25 indicam que o *desenho* pelo Algoritmo de Slope do  $K_n$  para  $k = 1$  e  $k = 2$  são respectivamente um *desenho em 1-página* e um *desenho em 2-páginas ótimos*. Desse modo, podemos conjecturar:

**Conjectura 3** (Klerk et al'2018). [15]  $\nu_k(K_n) = \nu_k(S_k(K_n))$ .

### 3.2.1 Desenhos em 2-páginas do $K_n$

Nas Figuras 109, 110, 111, 112, 113 e 114 temos exemplos da aplicação do Algoritmo do Slope para obter um *desenho ótimo* em 2-páginas de um *grafo completo*.

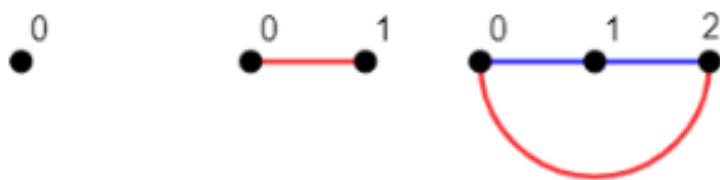


Figura 109: *Desenhos em 2-páginas* do  $K_1$ ,  $K_3$ ,  $K_3$  obtidos pelo Algoritmo do Slope.

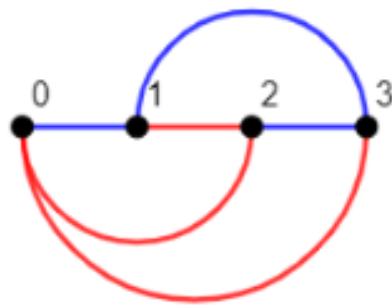


Figura 110: *Desenho em 2-páginas* do  $K_4$  obtido pelo Algoritmo do Slope.

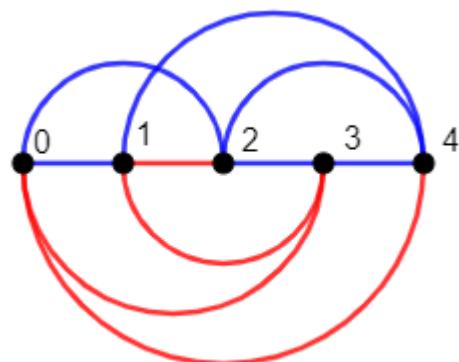


Figura 111: *Desenho em 2-páginas* do  $K_5$  obtido pelo Algoritmo do Slope.

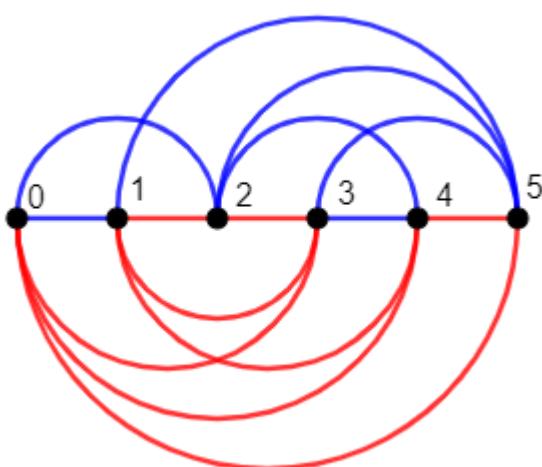


Figura 112: *Desenho em 2-páginas* do  $K_6$  obtido pelo Algoritmo do Slope.

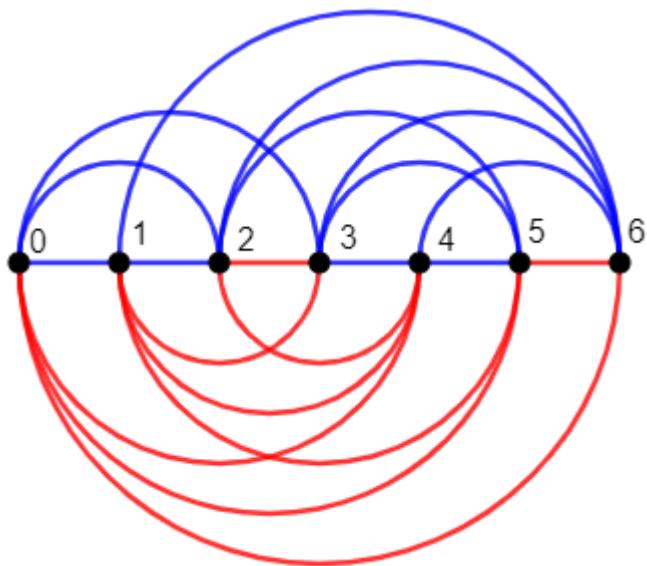


Figura 113: Desenho em 2-páginas do  $K_7$  obtido pelo Algoritmo do Slope.

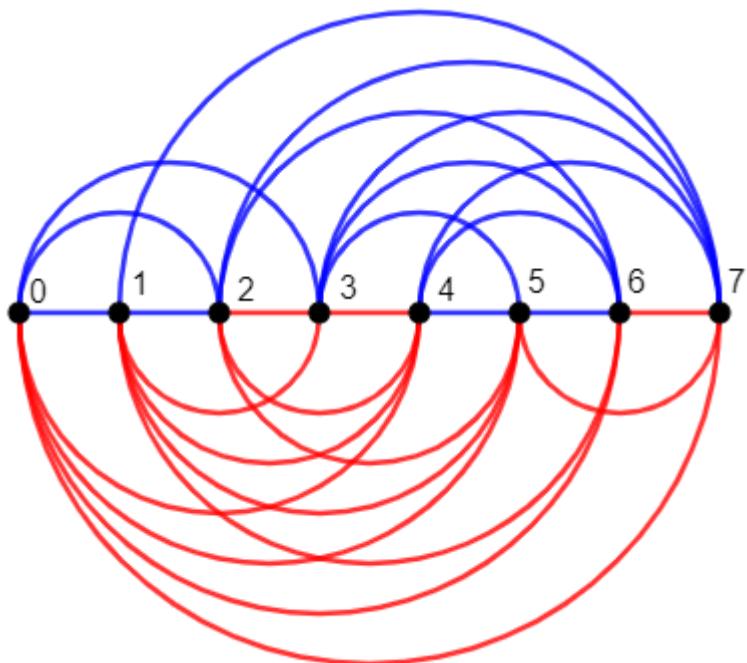


Figura 114: Desenho em 2-páginas do  $K_8$  obtido pelo Algoritmo do Slope.

### 3.3 Algoritmo de Berge

O Algoritmo de Berge [6] produz uma sequência de vértices de um *ciclo Hamiltoniano* em um *grafo*  $K(n, k)$ . Uma de nossas contribuições nesse trabalho foi observar que a ordem desse *ciclo* define uma sequência de *cliques máximas* que consiste em uma *cobertura de cliques* de um  $K(n, k)$ .

Em particular, essa *cobertura de cliques* no *grafo de Kneser*  $K(n, 2)$  obtém uma *cobertura de cliques* com  $n - 1$  *cliques*, onde cada *clique*, que é *máxima*, possui  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  vértices. O fato dessa *cobertura de cliques* portar a ordem de um *ciclo Hamiltoniano*, permite desenhar a *espinha do desenho em 2-páginas* de  $K(n, 2)$ . Nós usamos o Algoritmo de Berge para o caso do *desenho* com  $n$  par, e posteriormente estendemos para o caso com  $n$  ímpar.

Vamos definir algumas conceitos importantes para o Algoritmo de Berge:

**Definição 73** (Clique da Saída de Berge). *Seja  $K(n, 2)$  um grafo de Kneser com  $n, q \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 6$ ,  $n = 2q$  e  $n$  é par. Uma clique da saída do Algoritmo de Berge é  $C_{i-1}$ , com  $2 \leq i \leq n$ , tal que  $C_{i-1} = \{v_j \in V(K(n, 2)) \mid 1 \leq j \leq q\}$ , que satisfaz:*

1. Se  $j = 1$  então  $v_j = \{1, i\}$ ;
2. Se  $j > 1$  então  $v_j = \{(i - j - 1) \bmod (n - 1) + 2, (i + j - 3) \bmod (n - 1) + 2\}$ .

**Definição 74** (Clique de Berge). *Seja  $K(n, 2)$  um grafo de Kneser com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 6$  e  $n$  ímpar.*

*Definimos uma clique de Berge  $C_{i-1}$  como:*

1. Se  $n$  for par, então  $C_{i-1}$  é uma clique de saída de Berge do grafo de Kneser  $K(n, 2)$ ;
2. Se  $n$  for ímpar, então  $C_{i-1} = \{\{x, y\} \in C'_{i-1} \mid (n+1) \notin \{x, y\}\}$ , com  $2 \leq i \leq n$ , onde  $C'_{i-1}$  é uma clique de saída de Berge do grafo de Kneser  $K(n+1, 2)$ .

**Definição 75** (Cobertura de Cliques de Berge). *Uma cobertura de cliques de um grafo de Kneser  $K(n, 2)$ , com  $n \geq 6$  é a coleção  $B_n = \{ C_{i-1} \mid 2 \leq i \leq n \}$ .*

Com essas definições vamos definir o Algoritmo de Berge:

**Algoritmo 4** (Algoritmo de Berge'1973). [6][14]

**Entrada:** *grafo de Kneser  $K(n, 2)$  com  $n \leq 6$ .*

**Saída:** *Cobertura de cliques de Berge  $B_n$ .*

*Dado um grafo de Kneser  $K(n, 2)$  com  $n \geq 6$ :*

1. *Se  $n$  é par calculamos as cliques de Berge  $C_{i-1}$  para  $i$  de 2 até  $n$ .*
2. *Se  $n$  é ímpar calculamos as cliques de Berge de  $K(n+1, 2)$ , usando o item 1, e retiramos os vértices que possuem elemento  $n+1$ .*

Na Tabela 9 temos uma *clique de Berge*  $C_{i-1}$ : para o caso  $K(n, 2)$  com  $n$  par:

$j$	<i>Clique de Berge <math>C_{i-1}</math></i>
1	$(1, i)$
2	$((i-3) \bmod (n-1)+2, (i-1) \bmod (n-1)+2)$
3	$((i-4) \bmod (n-1)+2, (i) \bmod (n-1)+2)$
...	...
$q$	$((i-(q+1)) \bmod (n-1)+2, (i+(q-3)) \bmod (n-1)+2)$

Tabela 9: Saída de uma *clique máxima* de  $K(n, 2)$  do Algoritmo de Berge.

Na Tabela 10 temos o Algoritmo de Berge para o caso  $K(n, 2)$  com  $n$  par:

Algoritmo de Berge caso $n$ par						
	$i = 2$	$\dots$	$i$	$\dots$	$i = n$	
$j = 1$	$(1, 2)$	$\dots$	$(1, i)$	$\dots$	$(1, n)$	
$j = 2$	$(n, 3)$	$\dots$	$((i - 3) \bmod (n - 1) + 2, (i - 1) \bmod (n - 1) + 2)$	$\dots$	$(n - 1, 2)$	
$j = 3$	$(n - 1, 4)$	$\dots$	$((i - 4) \bmod (n - 1) + 2, (i) \bmod (n - 1) + 2)$	$\dots$	$(n - 2, 3)$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$j$	$(n + 2 - j, j + 1)$	$\dots$	$((i - j - 1) \bmod (n - 1) + 2, (i - 3 + j) \bmod (n - 1) + 2)$	$\dots$	$(n + 1 - j, j)$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$j = q$	$(q + 2, q + 1)$	$\dots$	$((i - (q + 1)) \bmod (n - 1) + 2, (i + (q - 3)) \bmod (n - 1) + 2)$	$\dots$	$(q + 1, q)$	

Tabela 10: Algoritmo de Berge para o caso  $n$  par.

A próxima proposição analisa o número de linhas de uma tabela retornada pelo Algoritmo de Berge:

**Proposição 29** (Número de Linhas do Algoritmo de Berge). [14] Seja  $C$  uma clique de Berge de um grafo de Kneser  $K(n, 2)$  então:

1. Se  $n$  é par, então  $|C| = q$ , onde  $n = 2q$ .
2. Se  $n$  é ímpar, então  $|C| = q - 1$ , onde  $n = 2q - 1$ .

**Demonstração:** Se  $n$  é par, isto é,  $n = 2q$ , está demonstrado, pois o Algoritmo de Berge no caso par retorna uma tabela de  $q$  linhas. Para o caso ímpar, isto é,  $n = 2q - 1$ , em cada coluna retiramos um vértice da tabela para o caso  $2q$ , que possui  $q$  linhas, logo temos  $q - 1$  linhas no caso  $n = 2q - 1$ .  $\square$

A proposição a seguir, temos a analisa do número de colunas de uma tabela retornada pelo Algoritmo de Berge:

**Proposição 30** (Número de Colunas do Algoritmo de Berge). [14] Seja  $B_n$  a cobertura de cliques de Berge de um grafo de Kneser  $K(n, 2)$ , então:

1. Se  $n$  é par, então  $|B_n| = n - 1$
2. Se  $n$  é ímpar, então  $|B_n| = n$

**Demonstração:** Se  $n$  é par, está demonstrado, pois o Algoritmo de Berge no caso par retorna uma tabela de  $n - 1$  colunas. Para o caso ímpar, em cada coluna retiramos um vértice da tabela para o caso par  $n + 1$ , que possui  $n$  colunas, logo temos  $n$  colunas no caso ímpar.  $\square$

O próximo Teorema constroi um *ciclo Hamiltoniano na cobertura de cliques de Berge* obtida pelo Algoritmo de Berge:

**Teorema 26** (Teorema Hamiltoniano de Berge). [14] *Seja  $n \in \mathbb{N}$  com  $n$  par, pelo Algoritmo de Berge temos:*

1. *Se  $n \geq 6$  então o vértice  $(1, i)$  é adjacente ao vértice  $((i+1) - (q+1)) \bmod (n-1) + 2, ((i+1) + (q-3)) \bmod (n-1) + 2$ , i.e., o primeiro vértice de uma coluna é adjacente ao último vértice da próxima coluna.*
2. *Se  $n \geq 8$  então o vértice  $(n-1, 2)$  é adjacente ao vértice  $(2 - (q+1)) \bmod (n-1) + 2, (2 + (q-3)) \bmod (n-1) + 2$ , i.e., o segundo vértice da última coluna é adjacente ao último vértice da primeira coluna.*
3. *Se  $n \geq 8$  então o vértice  $(1, i)$  é adjacente ao vértice  $((i+1) - q) \bmod (n-1) + 2, ((i+1) + (q-4)) \bmod (n-1) + 2$ , i.e., o primeiro vértice de uma coluna é adjacente ao penúltimo vértice da próxima coluna.*
4. *Se  $n \geq 8$  então o vértice  $(1, n)$  é adjacente ao vértice  $(2 - (q+1)) \bmod (n-1) + 2, (2 + (q-3)) \bmod (n-1) + 2$ , i.e., o primeiro vértice da última coluna é adjacente ao último vértice da primeira coluna.*

**Demonstração:** Assuma  $n \geq 8$ . Para que um vértice  $v$  seja adjacente a outro vértice  $w$  em um grafo de Kneser  $K(n, 2)$  é necessário que  $v \cap w = \emptyset$ . Vamos provar os itens (1) e (3). É fácil ver que  $((i+1) - (q+1)) \bmod (n-1) + 2, ((i+1) + (q-3)) \bmod (n-1) + 2$  e  $((i+1) - q) \bmod (n-1) + 2, ((i+1) + (q-4)) \bmod (n-1) + 2$  não possuem 1 como elemento, pois pelo

Algoritmo de Berge o elemento 1 só aparece nos *vértices* na primeira linha da tabela. Por outro lado,  $((i+1)-3) \bmod (n-1) + 2 = (i-2) \bmod (n-1) + 2 = (i-2) + 2 = i$ . Então temos que um *vértice*  $(1, i)$  não é *adjacente* ao primeiro e segundo *vértices* da próxima coluna. Como um *vértice* possui apenas 2 elementos e cada coluna representa uma *clique*, temos que o primeiro *vértice* sempre é adjacente ao penúltimo e último *vértice* da próxima coluna, o que demonstra (3). Como a proposição de (1) é valido para  $n \geq 8$  e para  $n = 6$  temos que o último *vértice* da próxima coluna não é o primeiro ou segundo *vértice*, então temos que o primeiro *vértice* é *adjacente* ao último *vértice* da próxima coluna, o que demonstra (1). Vamos provar os itens (2) e (4). É fácil ver que o *vértice*  $(2 - (q+1)) \bmod (n-1) + 2, (2 + (q-3)) \bmod (n-1) + 2$  não possui como elemento 1 e 2, pois 1 e 2 são os elementos do primeiro *vértice* da primeira coluna. Por outro lado,  $(2-3) \bmod (n-1) + 2 = (-1) \bmod (n-1) + 2 = (n-2) + 2 = n$ . Então temos que o *vértice*  $(1, n)$  não é adjacente ao primeiro e segundo *vértice* da primeira coluna. Logo,  $(1, n)$  é adjacente a  $(2 - (q+1)) \bmod (n-1) + 2, (2 + (q-3)) \bmod (n-1) + 2$ , o que demonstra (4). Mas  $(2-4) \bmod (n-1)+2 = (-2) \bmod (n-1)+2 = (n-3)+2 = (n-1)$ . Então temos que o *vértice*  $(1, n-1)$  não é adjacente ao primeiro e terceiro *vértice* da primeira coluna. Logo,  $(1, n-1)$  é *adjacente* a  $(2-(q+1)) \bmod (n-1)+2, (2+(q-3)) \bmod (n-1)+2$ , o que demonstra (2).  $\square$

Na Figura 115 temos um *ciclo Hamiltoniano*, obtido pelo Teorema 26, na *cobertura de cliques de Berge* do  $K(6, 2)$ :

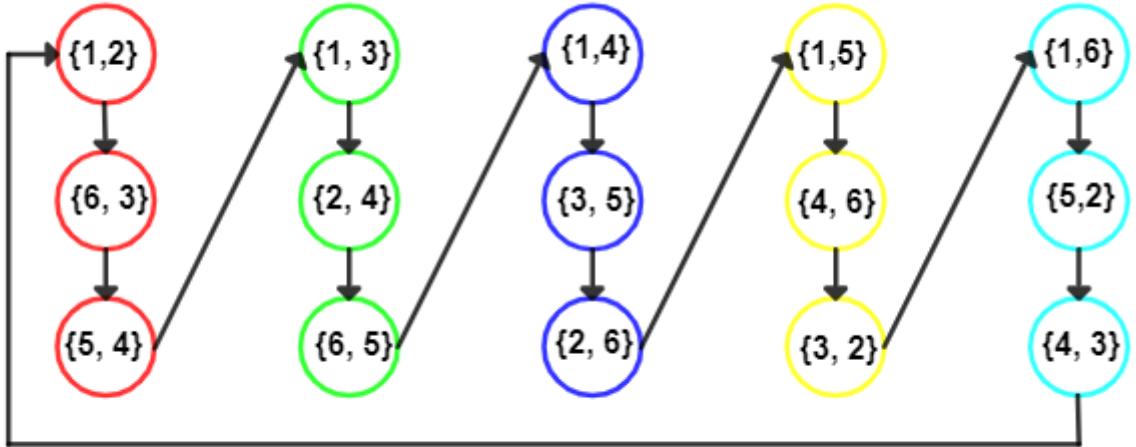


Figura 115: Ciclo Hamiltoniano do  $K(6,2)$ .

Na Tabela 11 temos a saída do Algoritmo de Berge para o caso  $K(8,2)$  com  $n = 8$  par:

$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_5$	$Q_6$	$Q_7$
(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)
(8, 3)	(2, 4)	(3, 5)	(4, 6)	(5, 7)	(6, 8)	(7, 2)
(7, 4)	(8, 5)	(2, 6)	(3, 7)	(4, 8)	(5, 2)	(6, 3)
(6, 5)	(7, 6)	(8, 7)	(2, 8)	(3, 2)	(4, 3)	(5, 4)

Tabela 11: Algoritmo de Berge para o  $K(8,2)$ .

onde  $P = \left( (1, 2), (8, 3), (7, 4), (6, 5), (1, 3), (2, 4), (8, 5), (7, 6), (1, 4), (3, 5), (2, 6), (8, 7), (1, 5), (4, 6), (3, 7), (2, 8), (1, 6), (5, 7), (4, 8), (3, 2), (1, 7), (6, 8), (5, 2), (4, 3), (1, 8), (7, 2), (6, 3), (5, 4) \right)$ .

Observamos que  $P$  é um caminho Hamiltoniano especial, o qual define a seguinte cobertura de cliques para  $K(8,2)$ :

$$Q_1 = \{(1, 2), (8, 3), (7, 4), (6, 5)\}$$

$$Q_2 = \{(1, 3), (2, 4), (8, 5), (7, 6)\}$$

$$Q_3 = \{(1, 4), (3, 5), (2, 6), (8, 7)\}$$

$$Q_4 = \{(1, 5), (4, 6), (3, 7), (2, 8)\}$$

$$Q_5 = \{(1, 6), (5, 7), (4, 8), (3, 2)\}$$

$$Q_6 = \{(1, 7), (6, 8), (5, 2), (4, 3)\}$$

$$Q_7 = \{(1, 8), (7, 2), (6, 3), (5, 4)\}$$

A partir da saída de  $K(8, 2)$  (Tabela 12) vamos obter a saída para  $K(7, 2)$ :

$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_5$	$Q_6$	$Q_7$
(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	<b>(1,8)</b>
<b>(8,3)</b>	(2, 4)	(3, 5)	(4, 6)	(5, 7)	<b>(6,8)</b>	(7, 2)
(7, 4)	<b>(8,5)</b>	(2, 6)	(3, 7)	<b>(4,8)</b>	(5, 2)	(6, 3)
(6, 5)	(7, 6)	<b>(8,7)</b>	<b>(2,8)</b>	(3, 2)	(4, 3)	(5, 4)

Tabela 12: Algoritmo de Berge para o  $K(8, 2)$ . Observe que se removermos os vértices com elemento 8, obtemos  $K(7, 2)$ .

Eliminamos na Tabela 13 todos os vértices da Tabela 12 que possuem elemento 8:

$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_5$	$Q_6$	$Q_7$
(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	
	(2, 4)	(3, 5)	(4, 6)	(5, 7)		(7, 2)
(7, 4)		(2, 6)	(3, 7)		(5, 2)	(6, 3)
(6, 5)	(7, 6)			(3, 2)	(4, 3)	(5, 4)

Tabela 13: Remoção de vértices com elemento 8.

Temos então como resultado Tabela 14 que é a saída do Algoritmo de Berge para o caso  $K(7, 2)$  com  $n = 7$  ímpar:

$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_5$	$Q_6$	$Q_7$
(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(7, 2)
(7, 4)	(2, 4)	(3, 5)	(4, 6)	(5, 7)	(5, 2)	(6, 3)
(6, 5)	(7, 6)	(2, 6)	(3, 7)	(3, 2)	(4, 3)	(5, 4)

Tabela 14: Algoritmo de Berge para o  $K(7, 2)$ .

onde  $P = \left( (1, 2), (7, 4), (6, 5), (1, 3), (2, 4), (7, 6), (1, 4), (3, 5), (2, 6), (1, 5), (4, 6), (3, 7), (1, 6), (5, 7), (3, 2), (1, 7), (5, 2), (4, 3), (7, 2), (6, 3), (5, 4) \right)$  é *caminho Hamiltoniano*. E temos como *cobertura de clique*:

$$Q'_1 = \{(1, 2), (7, 4), (6, 5)\}$$

$$Q'_2 = \{(1, 3), (2, 4), (7, 6)\}$$

$$Q'_3 = \{(1, 4), (3, 5), (2, 6)\}$$

$$Q'_4 = \{(1, 5), (4, 6), (3, 7)\}$$

$$Q'_5 = \{(1, 6), (5, 7), (3, 2)\}$$

$$Q'_6 = \{(1, 7), (5, 2), (4, 3)\}$$

$$Q'_7 = \{(7, 2), (6, 3), (5, 4)\}$$

### 3.3.1 Tabelas do Algoritmo de Berge

No apêndice desse trabalho de final de curso apresentamos uma implementação em Python 3.11.3 para o Algoritmo de Berge. E nessa seção apresentamos as Tabelas 15, 16, 17, 18, 19 e 20, com as saídas do Algoritmo de Berge para  $K(9, 2)$ ,  $K(10, 2)$ ,  $K(11, 2)$ ,  $K(12, 2)$ ,  $K(13, 2)$  e  $K(14, 2)$ .

<i>Algoritmo de Berge para K(9,2)</i>								
(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)	(1, 9)	(9, 2)
(9, 4)	(2, 4)	(3, 5)	(4, 6)	(5, 7)	(6, 8)	(7, 9)	(7, 2)	(8, 3)
(8, 5)	(9, 6)	(2, 6)	(3, 7)	(4, 8)	(5, 9)	(5, 2)	(6, 3)	(7, 4)
(7, 6)	(8, 7)	(9, 8)	(2, 8)	(3, 9)	(3, 2)	(4, 3)	(5, 4)	(6, 5)

Tabela 15: Algoritmo de Berge para  $K(9, 2)$ .

<i>Algoritmo de Berge para K(10,2)</i>								
(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)	(1, 9)	(1, 10)
(10, 3)	(2, 4)	(3, 5)	(4, 6)	(5, 7)	(6, 8)	(7, 9)	(8, 10)	(9, 2)
(9, 4)	(10, 5)	(2, 6)	(3, 7)	(4, 8)	(5, 9)	(6, 10)	(7, 2)	(8, 3)
(8, 5)	(9, 6)	(10, 7)	(2, 8)	(3, 9)	(4, 10)	(5, 2)	(6, 3)	(7, 4)
(7, 6)	(8, 7)	(9, 8)	(10, 9)	(2, 10)	(3, 2)	(4, 3)	(5, 4)	(6, 5)

Tabela 16: Algoritmo de Berge para  $K(10, 2)$ .

<i>Algoritmo de Berge para K(11,2)</i>										
(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)	(1, 9)	(1, 10)	(1, 11)	(11, 2)
(11, 4)	(2, 4)	(3, 5)	(4, 6)	(5, 7)	(6, 8)	(7, 9)	(8, 10)	(9, 11)	(9, 2)	(10, 3)
(10, 5)	(11, 6)	(2, 6)	(3, 7)	(4, 8)	(5, 9)	(6, 10)	(7, 11)	(7, 2)	(8, 3)	(9, 4)
(9, 6)	(10, 7)	(11, 8)	(2, 8)	(3, 9)	(4, 10)	(5, 11)	(5, 2)	(6, 3)	(7, 4)	(8, 5)
(8, 7)	(9, 8)	(10, 9)	(11, 10)	(2, 10)	(3, 11)	(3, 2)	(4, 3)	(5, 4)	(6, 5)	(7, 6)

Tabela 17: Algoritmo de Berge para  $K(11, 2)$ .

Algoritmo de Berge para $K(14,2)$												
(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)	(1, 9)	(1, 10)	(1, 11)	(1, 12)	(1, 13)	(1, 14)
(14, 3)	(2, 4)	(3, 5)	(4, 6)	(5, 7)	(6, 8)	(7, 9)	(8, 10)	(9, 11)	(10, 12)	(11, 13)	(12, 14)	(13, 2)
(13, 4)	(14, 5)	(2, 6)	(3, 7)	(4, 8)	(5, 9)	(6, 10)	(7, 11)	(8, 12)	(9, 13)	(10, 14)	(11, 2)	(12, 3)
(12, 5)	(13, 6)	(14, 7)	(2, 8)	(3, 9)	(4, 10)	(5, 11)	(6, 12)	(7, 13)	(8, 14)	(9, 2)	(10, 3)	(11, 4)
(11, 6)	(12, 7)	(13, 8)	(14, 9)	(2, 10)	(3, 11)	(4, 12)	(5, 13)	(6, 14)	(7, 2)	(8, 3)	(9, 4)	(10, 5)
(10, 7)	(11, 8)	(12, 9)	(13, 10)	(14, 11)	(2, 12)	(3, 13)	(4, 14)	(5, 2)	(6, 3)	(7, 4)	(8, 5)	(9, 6)
(9, 8)	(10, 9)	(11, 10)	(12, 11)	(13, 12)	(14, 13)	(2, 14)	(3, 2)	(4, 3)	(5, 4)	(6, 5)	(7, 6)	(8, 7)

Tabela 20: Algoritmo de Berge para  $K(14, 2)$ .

Algoritmo de Berge para $K(12,2)$											
(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)	(1, 9)	(1, 10)	(1, 11)	(1, 12)	
(12, 3)	(2, 4)	(3, 5)	(4, 6)	(5, 7)	(6, 8)	(7, 9)	(8, 10)	(9, 11)	(10, 12)	(11, 2)	
(11, 4)	(12, 5)	(2, 6)	(3, 7)	(4, 8)	(5, 9)	(6, 10)	(7, 11)	(8, 12)	(9, 2)	(10, 3)	
(10, 5)	(11, 6)	(12, 7)	(2, 8)	(3, 9)	(4, 10)	(5, 11)	(6, 12)	(7, 2)	(8, 3)	(9, 4)	
(9, 6)	(10, 7)	(11, 8)	(12, 9)	(2, 10)	(3, 11)	(4, 12)	(5, 2)	(6, 3)	(7, 4)	(8, 5)	
(8, 7)	(9, 8)	(10, 9)	(11, 10)	(12, 11)	(2, 12)	(3, 2)	(4, 3)	(5, 4)	(6, 5)	(7, 6)	

Tabela 18: Algoritmo de Berge para  $K(12, 2)$ .

Algoritmo de Berge para $K(13,2)$												
(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)	(1, 9)	(1, 10)	(1, 11)	(1, 12)	(1, 13)	(13, 2)
(13, 4)	(2, 4)	(3, 5)	(4, 6)	(5, 7)	(6, 8)	(7, 9)	(8, 10)	(9, 11)	(10, 12)	(11, 13)	(11, 2)	(12, 3)
(12, 5)	(13, 6)	(2, 6)	(3, 7)	(4, 8)	(5, 9)	(6, 10)	(7, 11)	(8, 12)	(9, 13)	(9, 2)	(10, 3)	(11, 4)
(11, 6)	(12, 7)	(13, 8)	(2, 8)	(3, 9)	(4, 10)	(5, 11)	(6, 12)	(7, 13)	(7, 2)	(8, 3)	(9, 4)	(10, 5)
(10, 7)	(11, 8)	(12, 9)	(13, 10)	(2, 10)	(3, 11)	(4, 12)	(5, 13)	(5, 2)	(6, 3)	(7, 4)	(8, 5)	(9, 6)
(9, 8)	(10, 9)	(11, 10)	(12, 11)	(13, 12)	(2, 12)	(3, 13)	(3, 2)	(4, 3)	(5, 4)	(6, 5)	(7, 6)	(8, 7)

Tabela 19: Algoritmo de Berge para  $K(13, 2)$ .

## 4 Limite de $\nu_2(K(n, 2))$

Nessa seção nós apresentamos o principal resultado desse trabalho – um *desenho em 2-páginas* para  $K(n, 2)$  que obtém um limite superior para  $\nu_2(K(n, 2))$ .

### 4.1 Um Desenho do $K(n, 2)$

Nós descrevemos a seguir um algoritmo que reproduz nosso *desenho em 2-páginas*:

**Algoritmo 5** (Algoritmo de Desenho'2022). [41][42][43]

**Entrada :** grafo de Kneser  $K(n, 2)$  com  $n \geq 6$ .

**Saída :** um desenho em 2-páginas de  $K(n, 2)$ .

Seja  $K(n, 2)$  um grafo de Kneser com  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Faça o desenho  $D(S_2(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}))$  a partir do Algoritmo Slope para  $S_2(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1})$  ;
2. Em  $D(S_2(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}))$  para cada vértice  $v_i \in K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$ ,  $1 \leq i \leq 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ , substitua pelos  $q = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$  vértices correspondentes da clique de Berge  $C_i$  ;
3.  $\forall uv \in E(K(n, 2))$  onde  $u \in C_i$ ,  $v \in C_j$ ,  $i \neq j$ , desenhamos a aresta  $uv$  na página de equivalente à página da aresta  $u_iv_j$  no desenho  $S_2(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1})$  ;
4. Substitua cada clique de Berge  $C_i$  por um desenho em 1-página  $K_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$ , desenhando as arestas na página que possui menos arestas partindo de  $v_i$  no desenho  $S_2(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1})$  .

Como exemplo de aplicação do Algoritmo de Desenho proposto temos a figura 116

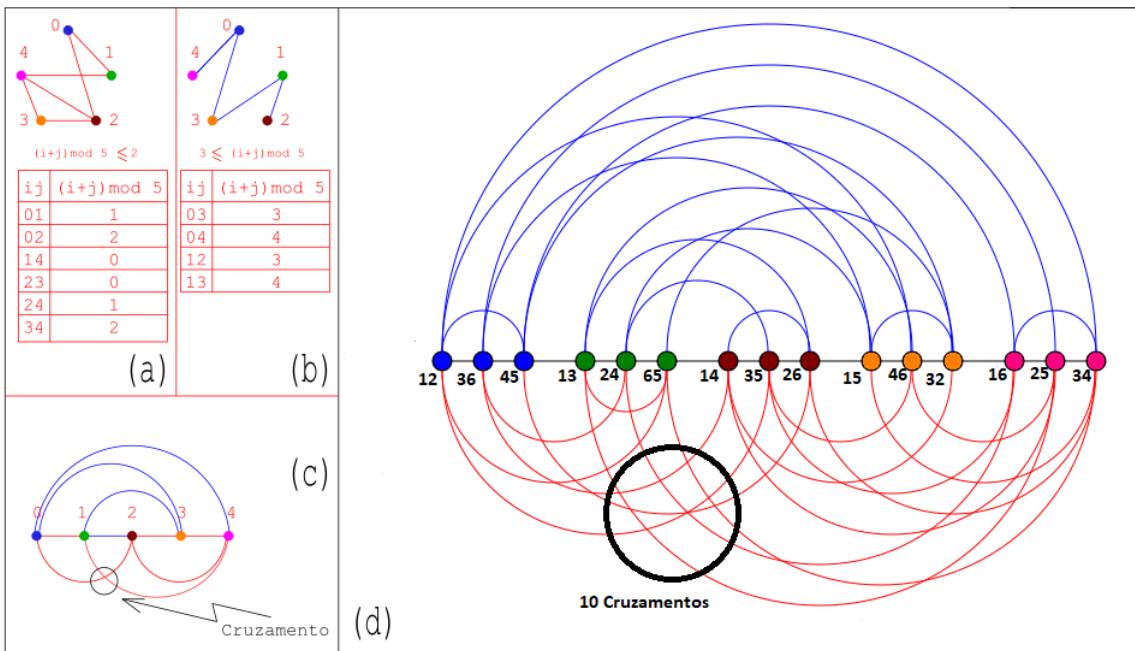


Figura 116: *Desenho ótimo de  $K_5$  em 2-páginas em (a) e (b). Desenho ótimo de  $K_5$  em (c) obtido a partir do *desenho em 2-páginas* de (a) e (b). Desenho em 2-páginas de  $K(6, 2)$  em (d) obtido a partir de (c) pelo Algoritmo de Desenho com 63 cruzamentos.*

Vamos descrever os passos da Figura 116:

1.  $K(6, 2)$  implica em  $n = 6$ ;
2. Obtemos o  $S_2(K_{n-1}) = S_2(K_5)$ , isto é, obtemos o *desenho ótimo em 2-páginas* do  $K_5$  pelo Algoritmo de Slope. (a) e (b) representam uma *página* cada uma, as tabelas são obtidas pelo Algoritmo de Slope e partcionam as *arestas* como representado em (a) e (b). O *desenho em 2-páginas ótimo* está representado em (c);
3.  $q = \omega(K(6, 2)) = \frac{6}{2} = 3$  ;
4. Cada *vértice* de (c) é substituído por  $q = 3$  *vértices* na representação em (d);
5. Rotulamos cada *vértice* em (d) de acordo com Algoritmo de Berge;

6. Arestas entre vértices de *cliques* distintas são desenhadas de acordo com o *desenho* em (c), isto é, cada vértice em (c) representa uma *clique* em (d), ou seja,  $vw$  para cima em (c) e  $v', w'$  correspondem às *cliques* associadas respectivamente a  $v, w$  em (d) implica em  $v'w'$  para cima em (d).

7. As arestas de cada *clique* são desenhadas todas para cima ou para baixo, dependendo de qual opção resulta em um menor *número de cruzamentos*.

A figura 117 desenha o  $K(6, 2)$  com base no Algoritmo de Desenho.

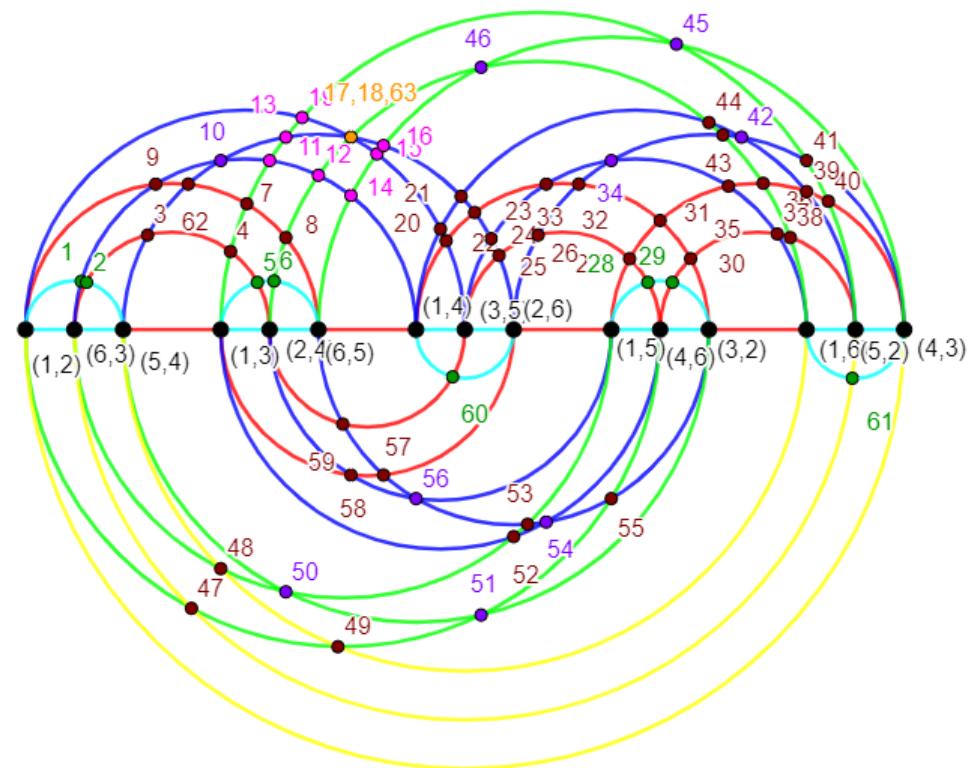


Figura 117:  $K(6, 2)$  com 63 cruzamentos.

A seguir nas figuras 118 e 119 temos 2 *desenhos* obtidos aplicando-se o Algoritmo de Desenho.

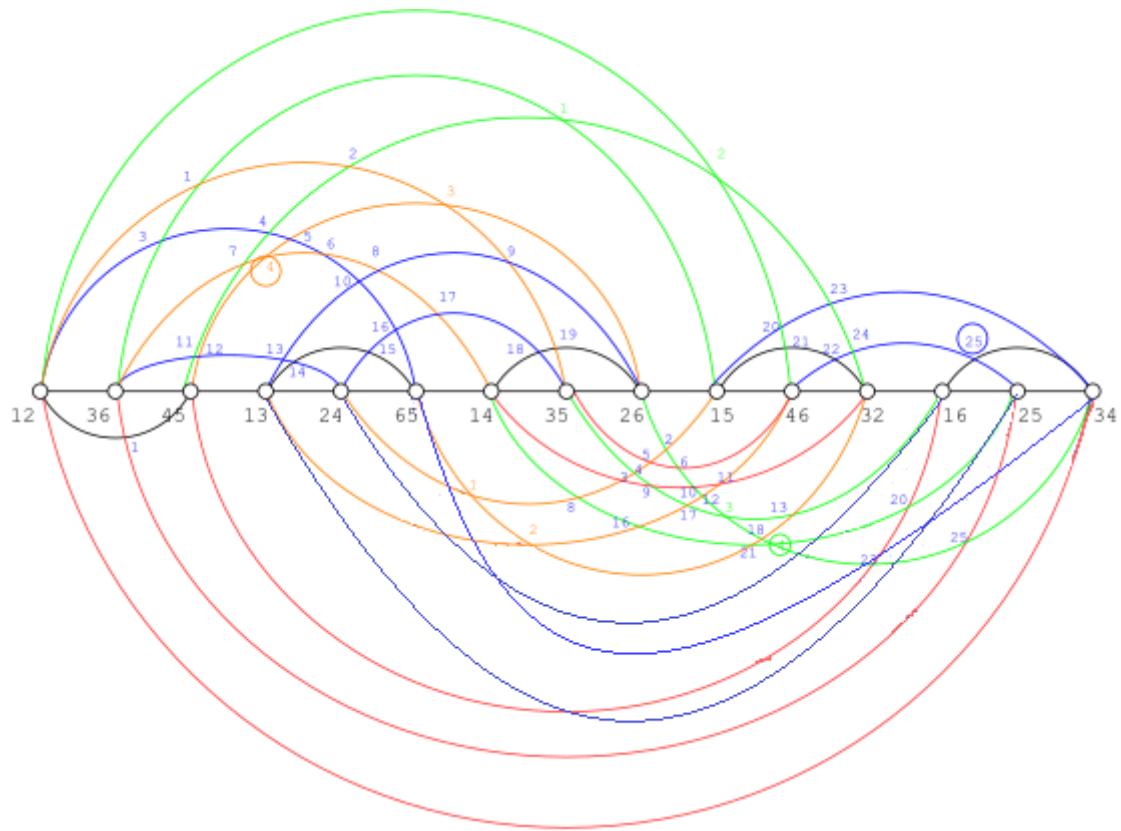


Figura 118: Desenho em 2-páginas de  $K(6,2)$  com 63 cruzamentos.

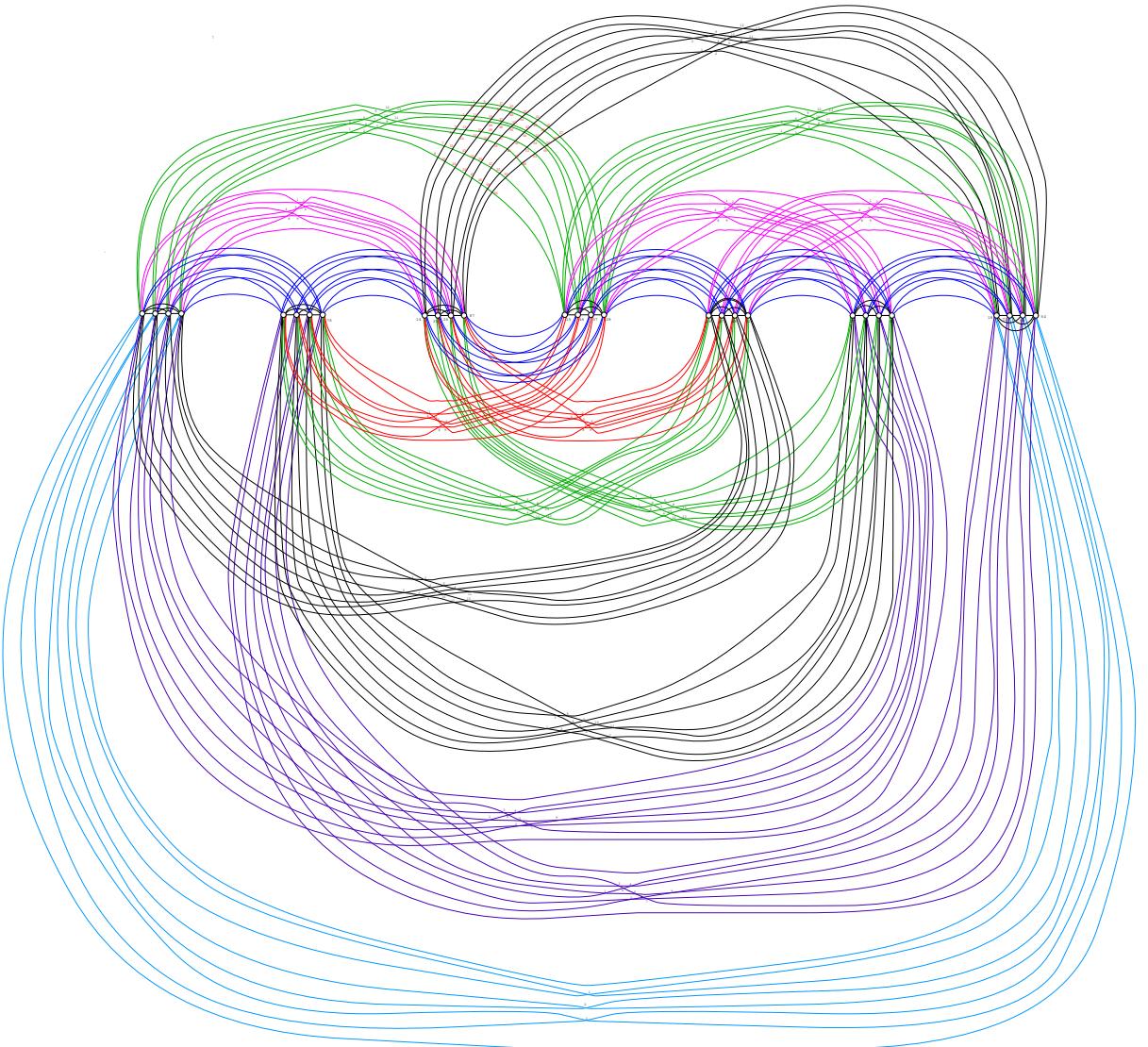


Figura 119: Desenho em 2-páginas de  $K(8, 2)$  com 1982 cruzamentos.

Para contarmos o *número de cruzamentos*, vamos dividir os *cruzamentos* das *arestas* do  $K(n, 2)$  em 5 conjuntos  $cr(K(n, 2)) = cr_1(n) + cr_2(n) + cr_3(n) + cr_4(n) + cr_5(n)$ .

1.  $cr_1(n)$  : *Cruzamentos herdados do  $K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$* ;
2.  $cr_2(n)$  : *Cruzamentos internos da clique  $C_i$* ;
3.  $cr_3(n)$  : *Cruzamentos entre as arestas internas de um  $C_i$  com as outras arestas*;
4.  $cr_4(n)$  : *Cruzamentos entre as arestas que ligam 2 cliques  $C_i$  e  $C_j$ ,  $i \neq j$* ;

5.  $cr_5(n)$  : Cruzamentos entre as arestas que ligam a clique  $C_i$  a  $C_j$  com as arestas que ligam  $C_i$  a uma clique  $C_k$   $i \neq j, i \neq k, k \neq j$ .

#### 4.1.1 Tabela com Resultados da Implementação

Para a conveniência do leitor, nós oferecemos na Tabela 4.1.1 os valores para o *número de cruzamentos*  $cr_1(n), cr_2(n), cr_3(n), cr_4(n)$  e  $cr_5(n)$  com  $6 \leq n \leq 25$ .

$n$	$cr_1(n)$	$cr_2(n)$	$cr_3(n)$	$cr_4(n)$	$cr_5(n)$	$cr(n)$
6	9	0	8	10	36	63
7	144	0	24	33	243	444
8	576	7	144	175	1080	1982
9	2916	9	308	380	3396	7009
10	8100	45	1020	1224	10080	20469
11	25600	55	1725	2140	23000	52520
12	57600	165	4320	5280	54000	121365
13	140625	195	6326	8160	103060	258366
14	275625	455	13300	17030	207900	514310
15	571536	525	18719	24325	353596	968701
16	1016064	1050	34944	45255	642096	1739409
17	1882384	1190	46640	61208	1008134	2999556
18	3111696	2142	79968	104720	1693440	4991966
19	5308416	2394	101535	136080	2506239	8054664
20	8294400	3990	163200	218424	3965760	12645774
21	13286025	4410	204120	275280	5608897	19378732
22	19847025	6930	311850	420210	8464500	29050515
23	30250000	7590	380986	516945	11548880	42704401
24	43560000	11385	558800	757735	16770600	61658520
25	63776196	12375	665490	914100	22223641	87591802

Tabela 21: Valores para o *número de cruzamentos*  $cr_1(n), cr_2(n), cr_3(n), cr_4(n)$  e  $cr_5(n)$  com  $6 \leq n \leq 25$ .

## 4.2 Cálculo de cruzamentos do Desenho

Para os *cruzamentos*  $cr_1(n)$  e  $cr_2(n)$  foram obtidos resultados exatos para os casos  $n$  par e  $n$  ímpar.

#### 4.2.1 Cálculo de $cr_1(n)$ para $n \geq 6$

Vamos calcular o valor de  $cr_1(n)$  para  $n$  par:

**Teorema 27** ( $cr_1(n)$  caso par'2022). [41][42][43]  $cr_1(n) = \frac{q^2(q-1)^2(q-2)^4}{4}$ , onde  $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Seja  $K(n, 2)$  um *grafo de Kneser* com  $n = 2q \geq 6$ . Pela definição de  $cr_1(n)$  é fácil ver que  $cr_1(n) = z^2\nu_2(K_{n-1})$ , onde  $z \in \mathbb{N}$  e corresponde ao número de *arestas* que conectam vértices de uma *clique de Berge*  $C_i$  com vértices de uma *clique de Berge*  $C_j$ , com  $i \neq j$ . Como  $n = 2q$  é par então existem  $q$  vértices em uma *clique de Berge*. Tome  $v \in C_i$ . Como  $v$  possui 2 elementos e uma *clique de Berge* para o caso par possui todos os elementos em seu *conjunto de vértices*, então  $(q-2)$  vértices adjacentes a  $v$ . Isso implica que  $z = q(q-2)$ . Logo

$$cr_1(n) = z^2\nu_2(K_{n-1}) = (q(q-2))^2 \nu_2(K_{n-1}) = (q(q-2))^2 \frac{1}{4} \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor = \frac{q^2(q-1)^2(q-2)^4}{4}.$$

□

Analogamente obtemos o valor para  $cr_1(n)$  para  $n$  ímpar:

**Teorema 28** ( $cr_1(n)$  caso ímpar).  $cr_1(n) = \frac{q^2(q-1)^6}{4}$ , onde  $n = 2q + 1 \geq 7, q \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Seja  $K(n, 2)$  um *grafo de Kneser* com  $n = 2q + 1 \geq 7$ . Definimos analogamente para o caso ímpar  $cr_1(n) = z^2\nu_2(K_n)$ , onde  $z \in \mathbb{N}$ . Como  $n = 2q + 1$  é ímpar então existem  $q$  vértices em uma *clique de Berge*. Devido ao Algoritmo de Berge para o caso ímpar retirar de cada *clique* um vértice, temos que a cada *clique* falta 1 elemento. Então, diferente do caso  $n$  par, temos que na ligação entre *cliques de Berge* distintas  $C_i, C_j$  existem  $(q-1)$  vértices de  $C_i$  com  $(q-2)$  vértices adjacentes em  $C_j$  e 1 vértice de  $C_i$  com  $(q-1)$  vértices adjacentes em  $C_j$ . Então entre  $C_i$  e  $C_j$  temos  $z = (q-1)(q-2) + (q-1) = (q-1)^2$ . Logo

$$cr_1(n) = z^2\nu_2(K_n) = (q-1)^4 \nu_2(K_n) = (q-1)^4 \frac{1}{4} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor = \frac{q^2(q-1)^6}{4}. \quad \square$$

#### 4.2.2 Cálculo do $cr_2(n)$ para $n \geq 6$

Note uma propriedade importante de  $cr_2(n)$ :

**Teorema 29** ( $cr_2(n)$  caso zero). Se  $n \leq 7$  então  $cr_2(n) = 0$ .

**Demonstração:** Se  $n \leq 7$  então  $q \leq 3$ , logo  $\nu_1(K_q) = 0$ , o que implica  $cr_2(n) = 0$ .

□

Isto quer dizer que só com  $n \geq 8$  que  $cr_2(n)$  tem *cruzamentos*.

Vamos obter o valor de  $cr_2(n)$  para  $n$  ímpar e  $n \geq 9$ :

**Teorema 30** ( $cr_2(n)$  caso ímpar'2022). [41][42][43]  $cr_2(n) = \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q+1)}{24}$ , onde

$$n = 2q + 1 \geq 9, q \in \mathbb{N}.$$

**Demonstração:** Se  $n = 2q + 1$  é ímpar, então pelo Algoritmo de Berge existem  $n$  cliques de Berge com  $q$  vértices. Como as cliques estão desenhadas em 1-página, então temos  $cr_2(n) = n\nu_1(K_q) = (n)\binom{q}{4} = \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q+1)}{24}$ . □

Analogamente obtemos o valor de  $cr_2(n)$  para  $n$  par:

**Teorema 31** ( $cr_2(n)$  caso par'2022). [41][42][43]  $cr_2(n) = (n-1)\binom{q}{4} = \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q-1)}{24}$ ,

$$\text{onde } n = 2q \geq 8, q \in \mathbb{N}.$$

**Demonstração:** Se  $n = 2q$  é par, então pelo Algoritmo de Berge existem  $n - 1$  cliques de Berge com  $q$  vértices. Como as cliques estão desenhadas em 1-página, então temos  $cr_2(n) = (n-1)\nu_1(K_q) = (n-1)\binom{q}{4} = \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q-1)}{24}$ . □

#### 4.2.3 Cálculo de $cr_3(n)$ para $n \geq 6$ par

O próximo Teorema caracteriza quantas arestas ficam para cima ou para baixo nos vértices de acordo com o Algoritmo de Slope:

**Teorema 32** (Teorema da Orientação do Slope'2022). [41][42][43] Seja o desenho  $S_2(K_{2q-1})$  e  $\ell \in \{0, 1\}$  as páginas do desenho, então:

1. Existem  $q$  vértices com  $q - 1$  arestas na página  $\ell = 0$  e  $q - 1$  arestas na página  $\ell = 1$ ;
2. Existem  $q - 1$  vértices com: (a)  $q - 2$  arestas na página  $\ell = 0$  e  $q$  arestas na página  $\ell = 1$ , ou (b)  $q - 2$  arestas na página  $\ell = 1$  e  $q$  arestas na página  $\ell = 0$ .

**Demonstração:** Seja  $n = 2q - 1$  e  $k = 2$ , então temos  $p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = q - 1$  e  $r = n \bmod 2 = 1$ .

Logo a página  $\ell = 0$  possui as arestas  $e \in M_{0,q-1}$  e a página  $\ell = 1$  possui as arestas  $e \in M_{q,2q-2}$ .

Vamos denotar  $P_0 = \{0, 1, \dots, (q - 1)\}$  e  $P_1 = \{q, (q + 1), \dots, (2q - 2)\}$ , como os conjuntos de valores de slope possíveis para que uma aresta pertença à página  $\ell = 0$  e  $\ell = 1$ , respectivamente. Temos  $|P_0| = q$  e  $|P_1| = (q - 1)$  o número de valores de slope possíveis respectivamente às páginas  $\ell = 0$  e  $\ell = 1$ . O total de valores de slope possíveis é dado por  $|P_0| + |P_1| = (2q - 1)$ .

Tome um  $i \in \mathbb{N}_{0,2q-2}$ , i.e., um vértice arbitrário entre os valores possíveis dos vértices.

Vamos provar que se  $j \neq j'$  distintos de  $i$ ,  $0 \leq j, j' \leq (n - 1)$  então  $(i + j) \bmod n \neq (i + j') \bmod n$ . Suponha por absurdo que  $(i + j) \bmod n = (i + j') \bmod n = t$ , com  $0 \leq t \leq (n - 1)$ , então pelo Algoritmo de Euclides temos  $(i + j) = nk_1 + t$  e  $(i + j') = nk_2 + t$ , onde  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ , o que implica  $(j - j') = n(k_1 - k_2)$ . Como  $i, j, j' \leq (n - 1)$  então  $0 \leq k_1, k_2 \leq 1$ . Logo  $(k_1 - k_2) = 0$  ou  $(k_1 - k_2) = 1$ . Se  $(k_1 - k_2) = 0$  então  $j = j'$ , contradição. Se  $(k_1 - k_2) = 1$  então  $j = n + j'$ , o que implica  $j > n$ , um absurdo. Logo  $(i + j) \bmod n \neq (i + j') \bmod n$ .

Como  $K_{2q-1}$  é um grafo completo, temos que existem  $2q - 2$  slopes diferentes para cada vértice  $i$ , o que implica  $\exists! v \in (P_0 \cup P_1)$  tal que  $\nexists j \in \mathbb{N}_{0,2q-2}$  com  $(i + j) \bmod n = v$ . Como  $j \neq i$  e  $0 \leq j \leq (n - 1)$  então  $v = i$ . Mas se  $i \neq j$  com  $0 \leq i, j \leq (n - 1)$ , então  $2i \bmod (n) \neq 2j \bmod (n)$ , i.e., vértices diferentes não possuem como slope valores diferentes.

Como  $q$  vértices com valores em  $P_0$  então existem  $q$  vértices com  $q - 1$  arestas na página  $\ell = 0$  e  $q - 1$  arestas na página  $\ell = 1$ . Mas existem  $(q - 1)$  vértices com valores em  $P_1$ . Logo existem  $q - 1$  vértices com  $q - 2$  arestas na página  $\ell = 0$  e  $q$  arestas na página  $\ell = 1$ , ou  $q - 2$  arestas na página  $\ell = 1$  e  $q$  arestas na página  $\ell = 0$ .  $\square$

Esse último Teorema é fundamental para obtermos os próximos resultados. Antes de obter o valor de  $cr_3(n)$  precisaremos de definir 2 definições:

**Definição 76** (Vértice Exterior). *Seja  $G$  um grafo e  $D(G)$  um desenho plano de  $G$ . Definimos  $v$  como um vértice exterior de  $D(G)$  se somente se  $v$  não está no interior do desenho plano  $D(G)$ , i.e,  $v$  não está localizado dentro de uma curva fechada formada por arestas geométricas em  $D(G)$ .*

**Definição 77** (Aresta de Saída). *Seja  $D(G)$  um desenho plano de um grafo  $G$ . Definimos e uma aresta de saída como uma aresta que inserimos no desenho do grafo  $G$  que conecta um vértice de  $G$  no desenho a um vértice exterior de  $D(G)$ .*

Os 2 lemas a seguir são necessários para o cálculo de  $cr_3(n)$ :

**Lema 1** (Série de Números Triangulares'2022). [41][42][43]  $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i = \frac{n}{6}(n+1)(n+2)$ .

**Demonstração:** Vamos provar por indução. Para o caso  $n = 1$  temos  $\sum_{j=1}^1 \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^1 1 = 1 = \frac{1}{6}(1+1)(1+2)$ . Suponha que é verdadeiro para um caso  $n$  arbitrário, vamos provar que é verdadeiro para o caso  $n+1$ :  $\sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^j i = \sum_{i=1}^{n+1} i + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i = \frac{(n+2)(n+1)}{2} + \frac{n}{6}(n+1)(n+2) = \frac{(n+1)}{6}(n+2)(n+3)$ .  $\square$

**Lema 2** (Número de Cruzamentos com as Arestas de Saída'2022). [41][42][43] Seja  $D(K_q)$  um desenho em 1-página de um grafo  $K_q$ . Se a cada  $v \in V(K_q)$  inserirmos uma aresta  $e'$  tal que  $e'$  é uma aresta de saída, então existem  $\frac{(q-2)(q-1)q}{6}$  cruzamentos das arestas  $e \in E(K_q)$  com as arestas de saída.

**Demonstração:** Seja  $v_i$  um vértice na sequência  $v_1, \dots, v_q$  de uma *clique de Berge* desenhada em 1-página. O vértice  $v_i$  possui  $q - i$  arestas com os vértices  $v_j$  com  $j > i$ . Se cada vértice  $v_j$  com  $j > i$  possuir uma *aresta de saída* e que cruza as *arestas da clique de Berge*, então existem  $(q - i) - (j - i) = (q - j)$  cruzamentos entre a *aresta de saída* e as *arestas* que partem de  $v_i$  para os vértices seguintes na sequência. Realizando o mesmo procedimento para todos os vértices  $v_j$   $j > i$  temos que o *número de cruzamentos* das *arestas de saída* com as *arestas* que partem de  $v_i$  para os vértices seguintes é  $(q - (i + 1)) + (q - (i + 2)) + \dots + 2 + 1 = \sum_{j=1}^{q-(i+1)} j$ . O vértice  $v_{q-1}$  apenas possui uma *aresta* com um vértice seguinte da sequência  $v_q$  não existindo outro vértice no meio desses 2 vértices, o que implica  $v_{q-1}$  não possuir *cruzamentos* com *arestas de saída*. O vértice  $v_q$  não possui *cruzamentos* com *arestas de saída*, pois é o último vértice. Sendo assim, apenas  $q - 2$  vértices possuem *cruzamentos* com as *arestas de saída*. Logo o *número de cruzamentos* das *arestas de saída*, saindo apenas 1 de cada vértice, com os vértices de uma *clique de Berge* em um *desenho em 1-página*  $D(q)$  é  $\sum_{i=1}^{q-2} \sum_{j=1}^{(q-(i+1))} j = \sum_{i=1}^{q-2} \sum_{j=1}^i j = \frac{(q-2)(q-1)q}{6}$ . Pelo Lema 1 temos que o *número de cruzamentos* entre *arestas de saída* e as *arestas do desenho do grafo*  $K_q$  em 1-página é  $\frac{(q-2)(q-1)q}{6}$ .  $\square$

Para conveniencia do leitor a Figura 120 mostra a contagem dos *cruzamentos*  $cr_3$  no caso de um *grafo*  $K_5$  desenhado em 1-página.

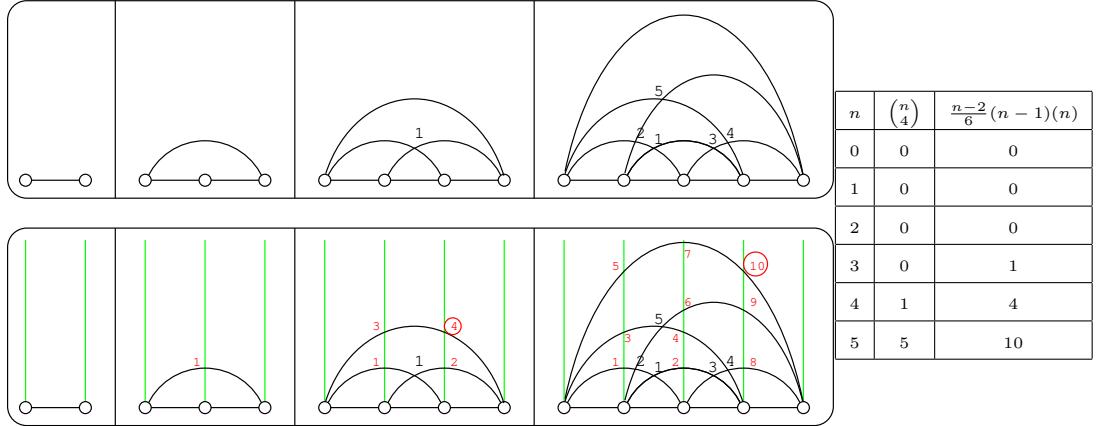


Figura 120:  $\binom{n}{4}$  cruzamentos nos desenhos de 1-página de  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$  e  $K_5$  e  $\frac{(n-2)}{6}(n-1)(n)$

cruzamentos com retas verticais.

Vamos calcular o valor de  $cr_3(n)$  para  $n$  par:

**Teorema 33** ( $cr_3(n)$  caso par'2022). [41][42][43]  $cr_3(n) = \frac{q(q-1)^3(q-2)^2}{3}$ , onde  $n = 2q \geq 6$ ,  $q \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Pelo Teorema 32 temos que em um desenho  $S_2(K_{n-1})$  existem  $q$  vértices que possuem  $q-1$  arestas em cada página  $\ell = 0$  e  $\ell = 1$ . Neste caso não é importante a direção em que o desenho em 1-página  $D(K_q)$  está desenhado, não importando se está na página  $\ell = 0$  ou  $\ell = 1$ . Mas pelo Teorema 32 existem  $q-1$  vértices que possuem  $q$  arestas em uma página  $\ell$  e outras  $q-2$  arestas em uma página  $\ell'$ , onde  $\ell \neq \ell'$ . Neste caso desenhemos o desenho em 1-página  $D(K_q)$  na direção da página que possuir  $q-2$  arestas. Sejam  $C, C'$  cliques de Berge distintas. Se  $\forall v \in C$  existem  $(q-2)$  arestas com vértices  $v' \in C'$ , então existem  $(q(q-1) + (q-1)(q-2))(q-2)$  arestas de saída. O Lema 2 implica  $cr_3(n) = \frac{(q-2)(q-1)q}{6}(q(q-1) + (q-1)(q-2))(q-2) = \frac{q-2}{6}(q-1)q(q-1)(2q-2)(q-2) = \frac{q(q-1)^3(q-2)^2}{3}$ .

#### 4.2.4 Cálculo de $cr_5(n)$ para $n \geq 6$ par

O cálculo de  $cr_5(n)$  é com base em *malhas*, que são formados por *montes de arestas*, que são formados por *grupos de arestas*. A seguir estão as definições de *grupo de arestas*,

monte de arestas e malha:

**Definição 78** (Grupo de Arestas). *Um grupo de arestas  $g$  é um conjunto de arestas que partem de um ponto  $p$  para um vértice externo  $w$ .*

**Definição 79** (Monte de Arestas). *Um monte de arestas  $(r, s)$  é conjunto de  $r$  grupos de arestas  $g_1, g_2, \dots, g_r$  tal que  $\forall g_i$ , com  $1 \leq i \leq r$ , temos  $|g_i| = s$ , i.e., existem exatamente  $s$  arestas em  $g_i$ .*

**Definição 80** (Malha). *Seja  $p, r, s \in \mathbb{N}^*$ , uma malha  $(p, r, s)$  é um conjunto de  $p$  pontos  $a_1 < a_2, \dots, < a_p$ , definidos em uma linha reta, onde:*

1. *Para cada  $a_i$ , com  $1 \leq i \leq p$ , existe um monte de arestas  $(r, s)$  formado  $r$  grupos de arestas  $g_1, g_2, \dots, g_r$ .*
2.  *$\forall g_i$ , com  $1 \leq i \leq r$  temos  $|g_i| = s$ , i.e., existem exatamente  $s$  arestas em  $g_i$ .*
3.  *$\forall e \in g_i$ , com  $1 \leq i \leq r$ , então  $e = a_k w$ , onde  $w$  é um vértice externo à malha, onde  $1 \leq k \leq p$ , i.e., toda a aresta pertencente a um grupo de arestas é incidente a um mesmo vértice externo à malha  $w$  e toda a aresta pertencente a um grupo de arestas de um monte de arestas correspondente a um vértice  $a_k$  é incidente ao vértice  $a_k$ .*
4. *Se  $i \neq j$  então  $\forall e \in g_i, e' \in g_j$  temos que  $e = a_k w$  e  $e' = a_{k'} w'$  onde  $1 \leq k \leq p$ , i.e., se arestas pertencem a um grupos de arestas distintos então conectam o vértice  $a_k$  a um vértice externo à malha diferente.*

Na Figura 121 temos exemplos de *malhas* e os seus respectivos *cruzamentos*.

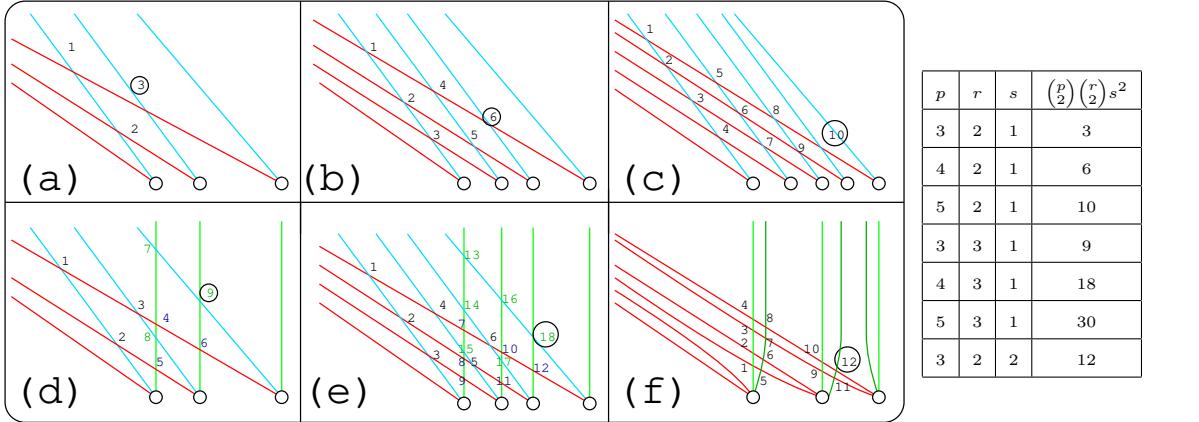


Figura 121: *Malhas* com  $p = 3, 4, 5$  vértices nas Figuras(a), (b) e (c) e *montes de arestas*  $(r, s) = (2, 1)$ . *Malhas* com  $p = 3, 4$  vértices nas Figuras(d) e (e) *montes de arestas*  $(r, s) = (3, 1)$ . Finalmente em (f) temos a *malha*  $(p, r, s) = (3, 2, 2)$ . Cada cor representa um *grupo de arestas*.

Vamos de demonstrar o *número de cruzamentos* de uma *malha*:

**Lema 3** (Número de Cruzamentos da Malha'2022). [41][42][43] *O número de cruzamentos na malha*  $(p, r, s)$  é  $\binom{p}{2} \cdot \binom{r}{2} \cdot s^2$ .

**Demonstração:** Tome  $s = 1$ . Vamos provar por indução que o *número de cruzamentos* da *malha*  $(p, r, s)$  é  $\binom{p}{2} \cdot \binom{r}{2}$ . Para o caso  $r = 0$  e  $r = 1$  os resultados são triviais, i.e., o resultado é 0, pois não há *cruzamentos*. Suponha  $r = 2$ . Tome  $g_1^i$  e  $g_2^i$  como os 2 *grupos de arestas* de um vértice  $1 \leq i \leq p$  da *malha*. É fácil ver direcionando os *grupos de arestas*  $g_1^1, \dots, g_1^p$  para o lado oposto dos *grupos de arestas*  $g_2^1, \dots, g_2^p$  temos *número de cruzamentos*  $\sum_{j=0}^{(p-1)} j = \frac{p(p-1)}{2} = \binom{p}{2} = \binom{p}{2} \binom{2}{2}$ . Suponha que o *número de cruzamentos*  $\binom{p}{2} \cdot \binom{r}{2}$  seja verdadeiro para um caso geral  $r$ . Vamos provar que é verdadeiro para o caso  $r + 1$ . Se adicionar-mos mais 1 *grupo de arestas* nos  $p$  vértices e assumindo  $g_1^i, \dots, g_r^i$  como uma *aresta única*  $e_i$ , então temos  $\sum_{j=0}^{(p-1)} j = \binom{p}{2}$  *cruzamentos* a mais adicionando mais um *grupo de arestas*  $r + 1$ . Como cada  $e_i$  possui  $r$  *arestas*, então o *número de cruzamentos* é  $\binom{p}{2} \cdot \binom{r}{2} + r \binom{p}{2} = \binom{p}{2} \left( \frac{r(r-1)}{2} + r \right) = \binom{p}{2} \cdot \binom{r+1}{2}$ . Logo, pelo princípio da indução,  $\binom{p}{2} \cdot \binom{r}{2}$  é verdadeiro. Vamos generalizar os resultados para um

caso geral  $s$ . O número de cruzamentos de 2 feixes com  $s$  sequências de arestas é  $s^2$ . Como o número de cruzamentos da malha  $(p, r, 1)$  para  $s = 1$  é  $\binom{p}{2} \cdot \binom{r}{2}$ , então o número de cruzamentos da malha  $(p, r, s)$  é  $\binom{p}{2} \cdot \binom{r}{2} s^2$ .  $\square$

A partir do Lema 3, vamos calcular  $cr_5(n)$  para  $n$  par:

**Teorema 34** ( $cr_5(n)$  caso par). [41][42][43]  $cr_5(n) = \frac{q(q-1)^3(q-2)^2(2q-3)}{2}$ , onde  $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Seja  $D(K_{2q-1})$  o desenho do grafo completo correspondente às cliques de Berge do grafo de Kneser  $K(2q, 2)$ . Temos em  $D(K_{2q-1})$ :

1.  $q$  vértices com  $q - 1$  arestas em cada página  $\ell = 0$  e  $\ell = 1$ , e cada vértice da clique de Berge tem grau  $q - 2$ . Logo temos  $2q$  malhas com  $q$  vértices com  $q - 1$  montes e grau  $q - 2$ , o que implica  $2q \binom{q}{2} \cdot \binom{q-1}{2} \cdot (q-2)^2$  cruzamentos.
2.  $q - 1$  vértices com  $q$  arestas e  $q - 2$  arestas nas páginas  $\ell = 0$  e  $\ell = 1$ , e cada vértice da clique de Berge tem grau  $q - 2$ . Logo temos  $q - 1$  malhas com  $q$  vértices com  $q$  montes e grau  $q - 2$  e  $q - 1$  malhas com  $q$  vértices com  $q - 2$  montes e grau  $q - 2$ , o que implica  $(q - 1) \left( \binom{q}{2} \cdot \binom{q}{2} \cdot (q - 2)^2 + \binom{q}{2} \cdot \binom{q-2}{2} \cdot (q - 2)^2 \right)$  cruzamentos.

Portanto  $cr_5(n) = 2q \binom{q}{2} \cdot \binom{q-1}{2} \cdot (q - 2)^2 + (q - 1) \left( \binom{q}{2} \cdot \binom{q}{2} \cdot (q - 2)^2 + \binom{q}{2} \cdot \binom{q-2}{2} \cdot (q - 2)^2 \right) = \frac{q(q-1)^3(q-2)^2(2q-3)}{2}$   $\square$

### 4.3 Limite inferior e superior para $\nu_2(K(n, 2))$

Nessa seção nós apresentamos uma aplicação da técnica de [44] que permite definir um limite inferior para o número de cruzamentos  $\nu(G)$  de um grafo  $G$ .

Essa técnica depende do encontro de um multigrafo regular  $M$  como um menor de  $G$ .

O resultado da nossa aplicação permitiu mostrar que o *número de cruzamentos* e o *número de cruzamentos em 2-páginas* de  $K(n, 2)$  é  $\nu(K(n, 2)) = \Theta(n^8) = \nu_2(K(n, 2))$ .

#### 4.3.1 Limite inferior para $\nu_2(K(n, 2))$

Székely estabeleceu em 1997 um limite inferior para o *número de cruzamentos* usando um homeomorfismo do grafo com um *multigrafo* expresso pelo Teorema 35:

**Teorema 35** (Székely'1997). [44] Se  $M$  é um multigrafo com  $n$  vértices,  $m$  arestas e entre cada par de vértices existem exatamente  $k$  arestas, então  $\nu(M) \geq \frac{m^3}{64n^2k}$ .

Aplicando o Teorema 35 ao *grafo de Kneser*  $K(n, 2)$  temos como resultado o limite inferior para  $\nu(K(n, 2))$ :

**Teorema 36** (Limite Inferior de  $\nu(K(n, 2))$ ). [41][42][43] Se  $n \in \mathbb{N}^*$ , então  $\nu(K(n, 2)) \geq \frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9}$ .

**Demonstração:** Seja  $(C_1, \dots, C_\lambda)$  uma partição por *cliques* para  $K(n, 2)$ . Seja  $M = (V, E)$  o multigrafo onde  $V = \{C_1, \dots, C_\lambda\}$  e  $E = \{uv \mid \text{existe um vértice } x \in u, \text{ e } y \in v \text{ tal que } xy \in E(K(n, 2)) \text{ e } u, v \in V\}$ . Assim,  $M$  terá  $\lambda = 2\lceil\frac{n}{2}\rceil - 1$  vértices,  $m = \frac{2q(2q-1)}{2}q(q-2)$  arestas e entre cada par de vértices existirão  $k = \lceil\frac{n-1}{2}\rceil(\lceil\frac{n-1}{2}\rceil - 2)$  arestas. A partir do Teorema 35 temos que:  $\nu(K(n, 2)) \geq \frac{1}{64} \cdot \frac{\left(\frac{2\lceil\frac{n}{2}\rceil(2\lceil\frac{n}{2}\rceil-1)}{2}\lceil\frac{n-1}{2}\rceil(\lceil\frac{n-1}{2}\rceil - 2)\right)^3}{(2\lceil\frac{n}{2}\rceil - 1)^2 \cdot \lceil\frac{n-1}{2}\rceil(\lceil\frac{n-1}{2}\rceil - 2)} \geq \frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} + \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9}$ .

□

Assintoticamente o Teorema 36 pode ser expresso pelo Corolário 8:

**Corolário 8** (Limite Inferior Assintótico de  $\nu(K(n, 2))$ ). [41][42][43]

$\nu(K(n, 2)) = \Omega(|V(K(n, 2)|^4) = \Omega(n^8)$  e o termo líder para o limite inferior é  $2^{-13}$ .

**Demonstração:** Segue do Teorema 36 que  $\nu(K(n, 2)) \geq \frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} = \Omega(n^8) = \Omega(|V(K(n, 2)|^4)$ , com termo líder  $2^{-13}$ . □

### 4.3.2 Limite superior para $\nu_2(K(n, 2))$

Primeiro vamos obter o limite superior para  $\nu_2(K(n, 2))$  para o caso  $n$  par. O limite superior para  $cr_4(n)$  é dado pelo Teorema:

**Teorema 37** (Limite Superior de  $cr_4(n)$  caso par). [41][42][43]  $cr_4(n) \leq \frac{q(q-1)(2q-1)(q^3-2q^2-7q+16)}{4}$ ,

onde  $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:**

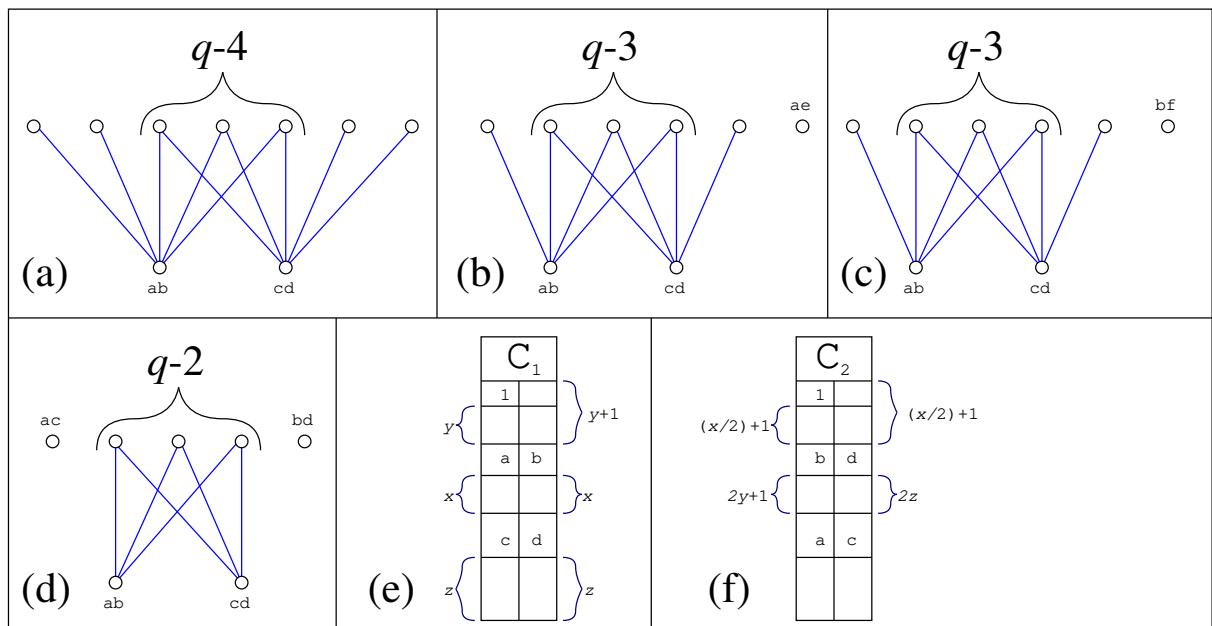


Figura 122: Dois vértices  $ab, cd$  de  $C_i$  com  $|N_{C_j}(ab) \cap N_{C_j}(cd)| = q - 4$  (a), com  $|N_{C_j}(ab) \cap N_{C_j}(cd)| = q - 3$  em (b) e (c), com  $|N_{C_j}(ab) \cap N_{C_j}(cd)| = q - 2$  (d) e redução ao absurdo em (e) e (f) para provar que (d) não é possível.

Dadas 2 cliques  $C_i$  e  $C_j$  com  $i \neq j$ . Sejam  $C_i = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$  e  $C_j = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$ .

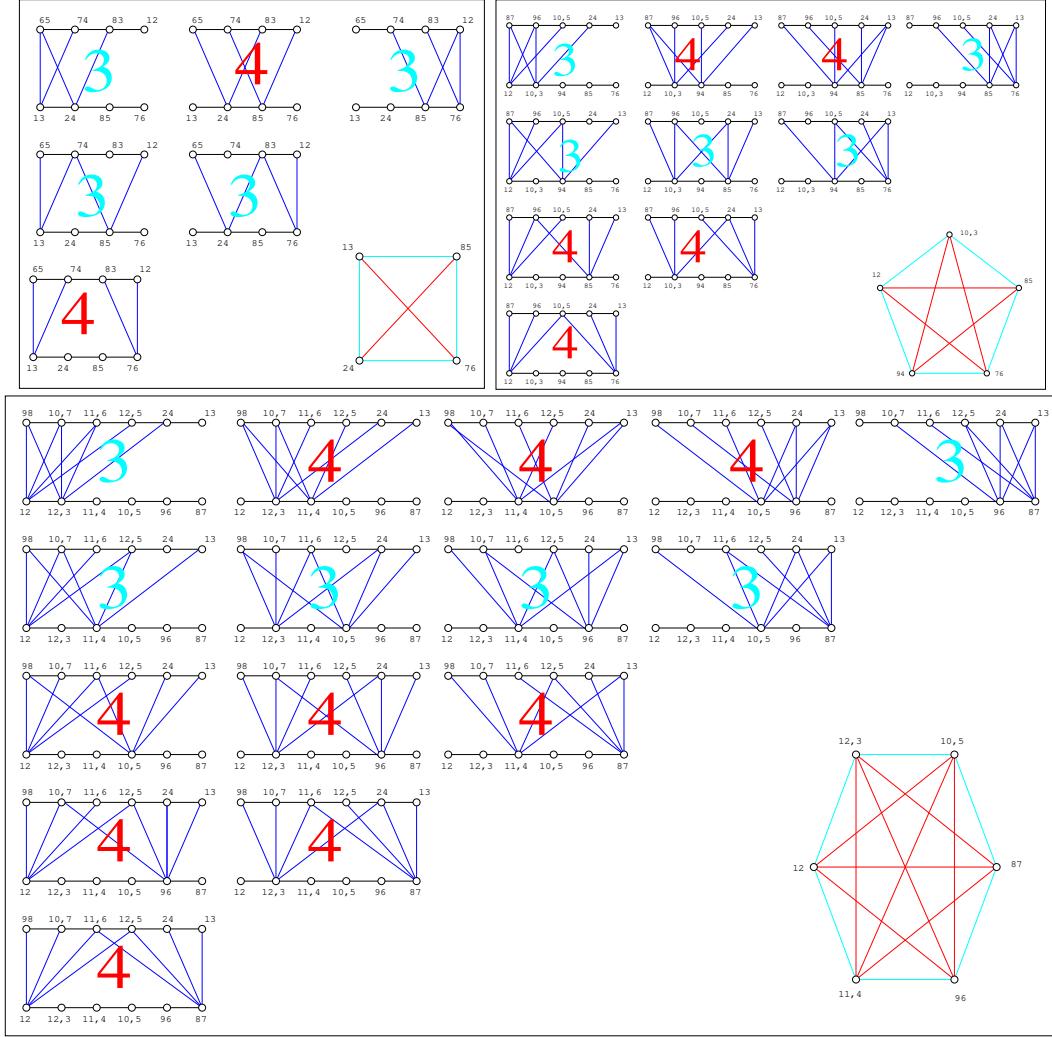


Figura 123: Limite superior para  $-cr_4(n)$  - o número de cruzamentos entre as arestas que ligam 2 completos  $C_i$  e  $C_j$ . O número 3 em ciano significa que a interseção da vizinhança entre os 2 vértices de  $C_i$  tem tamanho  $q - 3$ . O número 4 em vermelho significa que a interseção da vizinhança entre os 2 vértices de  $C_i$  tem tamanho  $q - 4$ .

Seja  $ab \in C_i$ . Vamos contar primeiro os *cruzamentos* entre as *arestas* que ligam  $a_\ell$  até  $C_j$  com as *arestas* que ligam  $a_k$  até  $C_j$ . Observe que o tamanho da interseção das *vizinhanças*  $N_{C_j}(a_k) \cap N_{C_j}(a_\ell)$  pode ser  $|N_{C_j}(a_k) \cap N_{C_j}(a_\ell)| = q - 4, q - 3, q - 2$ . Vamos mostrar que não pode ser  $q - 2$ . Seja  $a_k = ab$  e  $a_\ell = cd$ ,  $a, b, c, d \in \{1, \dots, n\}$ . Se por absurdo, for  $|N_{C_j}(ab) \cap N_{C_j}(cd)| = q - 2$ , então existem dois vértices  $ac, bd \in C_j$ . Nós assumimos que  $ab$

fica mais perto do vértice de  $C_i$  que contém o número 1, veja a Figura 122(e) e (f). Dados:

1.  $x$  ser o número de números entre  $a$  e  $c$  e entre  $d$  e  $b$  em  $C_i$ ,
2.  $y$  ser o número de números entre 1 e  $a$  em  $C_i$ ,
3.  $z$  ser o número de números entre  $c$  e  $d$  até o final de  $C_i$ .

Assim, temos que em  $C_j$ , entre os vértices  $bd$  e  $ac$  existem ao mesmo tempo  $2y+1$  e  $2z$  números e como  $2y+1$  e  $2z$  tem paridades distintas temos uma contradição. Vamos considerar os 2 casos restantes:

1. Se  $|N_{C_j}(ab) \cap N_{C_j}(cd)| = q - 3$  (Figura 122(b) e (c)), então o *número de cruzamentos* entre as *arestas* que ligam  $a_\ell$  até  $C_j$  com as *arestas* que ligam  $a_k$  até  $C_j$  é no máximo

$$1 + 2(q - 3) + \sum_{i=1}^{q-4} i = \sum_{i=1}^{q-2} i = \frac{(q-1)(q-2)}{2}.$$

2. Se  $|N_{C_j}(ab) \cap N_{C_j}(cd)| = q - 4$  (Figura 122(d)), então o *número de cruzamentos* entre as *arestas* que ligam  $a_\ell$  até  $C_j$  com as *arestas* que ligam  $a_k$  até  $C_j$  é no máximo

$$4 + 4(q - 4) + \sum_{i=1}^{q-5} i = -2 + \sum_{i=1}^{q-1} i = -2 + \frac{q(q-1)}{2}.$$

Nós observamos que dado  $a_k = ab \in C_i$   $af, be \in C_j$ , então existem exatamente dois vértices  $fg$  e  $ce$  de  $C_i$  tais que  $|N_{C_j}(ab) \cap N_{C_j}(fg)| = |N_{C_j}(ab) \cap N_{C_j}(ce)| = q - 3$ . Os demais  $q - 3$  vértices  $a$  de  $C_i$  possuem  $|N_{C_j}(ab) \cap N_{C_j}(a)| = q - 4$ .

Se consideramos agora o *grafo completo*  $K_q$  com pesos formado pelo *conjunto de vértices*  $C_i$  tal que a *aresta*  $a_k a_\ell$  tenha um peso igual ao *número de cruzamentos* associado ao *número de cruzamentos* entre as *arestas* que ligam  $a_k$  até  $C_j$  com as *arestas* que ligam  $a_\ell$  até  $C_j$ . Temos que a soma dos pesos das *arestas* do *completo*  $K_q$  será um limite superior para os *cruzamentos* das *arestas* que ligam os vértices de  $C_i$  aos vértices de  $C_j$ . Para conveniência do Revisor, nós oferecemos na Figura 123 um exemplo com  $q = 4, 5, 6$ .

Que totalizam:

$$q \frac{(q-1)(q-2)}{2} + \left( \frac{q(q-1)}{2} - q \right) \left( -2 + \frac{q(q-1)}{2} \right) = \frac{q(q^3 - 2q^2 - 7q + 16)}{4}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} cr_4(n) &\leq |E(K_{2q-1})| \times \frac{q(q^3 - 2q^2 - 7q + 16)}{4} = \frac{(2q-1)(2q-2)}{2} = \frac{q(q^3 - 2q^2 - 7q + 16)}{4} = \\ &= \frac{q(q-1)(2q-1)(q^3 - 2q^2 - 7q + 16)}{4}. \end{aligned}$$

□

Tendo os resultados exatos para  $cr_1(n), cr_2(n), cr_3(n), cr_5(n)$  e usando o limite superior para  $cr_4(n)$  obtido no Teorema 37 segue o seguinte Teorema:

**Teorema 38** (Limite Superior de  $\nu_2(K(n, 2))$  caso par). [41][42][43] Se  $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$ , então

$$\begin{aligned} \nu_2(K(n, 2)) &\leq \frac{6q^8 - 36q^7 + 62q^6 + 84q^5 - 563q^4 + 1034q^3 - 801q^2 + 214q}{24} = \\ &= \frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^8 3} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^7 3} + \frac{517n^3}{2^5 3} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^3 3}. \end{aligned}$$

**Demonstração:** Pelos Teoremas 27, 31, 33, 37 e 34 temos:

$$\begin{aligned} \nu_2(K(n, 2)) &\leq cr_1(n) + cr_2(n) + cr_3(n) + cr_4(n) + cr_5(n) \leq \\ &\leq \frac{6q^8 - 36q^7 + 62q^6 + 84q^5 - 563q^4 + 1034q^3 - 801q^2 + 214q}{24} = \\ &= \frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^8 3} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^7 3} + \frac{517n^3}{2^5 3} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^3 3} \quad \square \end{aligned}$$

O Teorema 38 obtemos o valor assintótico do limite superior de  $\nu_2(K(n, 2))$  para o caso  $n$  par definido no Corolário 9:

**Corolário 9** (Limite Superior Assintótico de  $\nu_2(K(n, 2))$  caso par). [41][42],[43]  $\nu_2(K(n, 2)) = O(n^8) = O(|V(K(n, 2))|^4)$  com o termo líder  $\ell = 2^{-10}$ , onde  $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Pelo Teorema 38 temos que  $\nu_2(K(n, 2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^8 3} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^7 3} + \frac{517n^3}{2^5 3} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^3 3} = O(n^8) = O(|V(K(n, 2))|^4)$ , com termo líder  $2^{-10}$ . □

O valor assintótico de  $\nu(K(n, 2))$  para o caso  $n$  par é definido no Corolário 10:

**Corolário 10** (Valor Assintótico de  $\nu(K(n, 2))$ ). [41][42],[43]  $\nu(K(n, 2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n, 2))|^4) \leq \nu_2(K(n, 2))$  com o termo líder é  $2^{-13} \leq \ell \leq 2^{-10}$ , onde  $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Pelo Corolários 8 e 9 temos que  $\Omega(n^8) = \Omega(|V(K(n, 2))|^4) \leq \nu(K(n, 2)) \leq \nu_2(K(n, 2)) \leq O(n^8) = O(|V(K(n, 2))|^4)$  com termo líder  $2^{-13}$  no limite inferior e  $2^{-10}$  no limite superior, temos então  $\nu(K(n, 2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n, 2))|^4) = \nu_2(K(n, 2))$  com termo líder  $2^{-13} \leq \ell \leq 2^{-10}$ .  $\square$

Agora vamos obter um limite superior para  $\nu_2(K(n, 2))$  para o caso  $n$  ímpar.

Já temos o resultado exato para  $cr_1(n)$  e  $cr_2(n)$ . Vamos obter um limite superior para  $cr_3(n)$ :

**Teorema 39** (Limite Superior de  $cr_3(n)$  caso ímpar).  $cr_3(n) \leq \frac{q^3(q+1)(q-1)^2}{3}$ , onde  $n = 2q+1 \geq 7, q \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Pelo Teorema 33 temos que

$$cr_3(n) \leq cr_3(n+1) = \frac{(q+1)q^3(q-1)^2}{3} = \frac{q^3(q+1)(q-1)^2}{3}.$$

Vamos obter um limite superior para  $cr_4(n)$ :

**Teorema 40** (Limite Superior de  $cr_4(n)$  caso ímpar).  $cr_4(n) \leq \frac{(q+1)(q)(2q)(q^3+q^2+12)}{4}$ , onde  $n = 2q+1 \geq 7, q \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Pelo Teorema 37 sabemos que

$$\begin{aligned} cr_4(2q+1) &< cr_4(2(q+1)) = \frac{(q+1)(q)(2q)((q+1)^3-2(q+1)^2-7(q+1)+16)}{4} = \\ &= \frac{(q+1)(q)(2q)((q^3+3q^2+3q+1)-2(q^2+2q+1)-7q-7+16)}{4} = \frac{(q+1)(q)(2q)(q^3+3q^2+3q+1-2q^2+4q+2-7q-7+16)}{4} = \\ &= \frac{(q+1)(q)(2q)(q^3+q^2+12)}{4} \end{aligned}$$

Vamos obter um limite superior para  $cr_5(n)$ :

**Teorema 41** (Limite Superior de  $cr_5(n)$  caso ímpar).  $cr_5(n) \leq \frac{q^3(q+1)(q-1)^2(2q-1)}{2}$ , onde  $n = 2q+1 \geq 7$

**Demonstração:** Pelo Teorema 34 temos  $cr_5(n) \leq cr_5(n+1) = \frac{(q+1)q^3(q-1)^2(2(q+1)-3)}{2} = \frac{q^3(q+1)(q-1)^2(2q-1)}{2}$   $\square$

Como temos o limite superior de  $cr_1(n)$ ,  $cr_2(n)$ ,  $cr_3(n)$ ,  $cr_4(n)$  e  $cr_5(n)$  para o  $n$  ímpar, então podemos calcular o limite superior de  $\nu_2(K(n, 2))$ :

**Teorema 42** (Limite Superior de  $\nu_2(K(n, 2))$  caso ímpar). Se  $n = 2q + 1 \geq 6$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , então

$$\nu_2(K(n, 2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} + \frac{-3n^7}{2^8} + \frac{79n^6}{2^8 \cdot 3} + \frac{-421n^5}{2^8 \cdot 3} + \frac{2603n^4}{2^9 \cdot 3} + \frac{-4219n^3}{2^8 \cdot 3} + \frac{2759n^2}{2^8 \cdot 3} + \frac{-2711n}{2^8 \cdot 3} + \frac{4723}{2^{10} \cdot 3}.$$

**Demonstração:** Pelos Teoremas 28, 30, 39, 40 e 41 temos:

$$cr_1(2q+1) + cr_2(2q+1) + cr_3(2q+1) + cr_4(2q+1) + cr_5(2q+1) \leq$$

$$\frac{q^2(q-1)^6}{4} + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q+1)}{24} + \frac{q^3(q+1)(q-1)^2}{3} + \frac{(q+1)(q)(2q)(q^3+q^2+12)}{4} + \frac{q^3(q+1)(q-1)^2(2q-1)}{2} =$$

$$\frac{6q^2(q-1)^6}{24} + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q+1)}{24} + \frac{8q^3(q+1)(q-1)^2}{24} +$$

$$\frac{6(q+1)(q)(2q)(q^3+q^2+12)}{24} + \frac{12q^3(q+1)(q-1)^2(2q-1)}{24} =$$

$$\frac{6q^2(q-1)^6}{24} + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q+1)}{24} + \frac{8q^3(q+1)(q-1)^2}{24} +$$

$$\frac{6(q+1)(q)(2q)(q^3+q^2+12)}{24} + \frac{12q^3(q+1)(q-1)^2(2q-1)}{24} =$$

$$\frac{6q^2(q^6 - 6q^5 + 15q^4 - 20q^3 + 15q^2 - 6q + 1)}{24} + \frac{(q^2 - q)(q^2 - 5q + 6)(2q + 1)}{24} +$$

$$\begin{aligned} & \frac{(8q^4 + 8q^3)(q^2 - 2q + 1)}{24} + \frac{(12q^3 + 12q^2)(q^3 + q^2 + 12)}{24} + \\ & \frac{(12q^4 + 12q^3)(q^2 - 2q + 1)(2q - 1)}{24} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(6q^8 - 36q^7 + 90q^6 - 120q^5 + 90q^4 - 36q^3 + 6q^2)}{24} + \frac{(2q^3 - q^2 - q)(q^2 - 5q + 6)}{24} + \\ & \frac{(8q^6 - 16q^5 + 8q^4 + 8q^5 - 16q^4 + 8q^3)}{24} + \frac{(12q^6 + 12q^5 + 144q^3 + 12q^5 + 12q^4 + 144q^2)}{24} + \\ & \frac{(12q^4 + 12q^3)(2q^3 - 4q^2 + 2q - q^2 + 2q - 1)}{24} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(6q^8 - 36q^7 + 90q^6 - 120q^5 + 90q^4 - 36q^3 + 6q^2)}{24} + \\ & \frac{(2q^5 - q^4 - q^3 - 10q^4 + 5q^3 + 5q^2 + 12q^3 - 6q^2 - 6q)}{24} + \frac{(8q^6 - 8q^5 - 8q^4 + 8q^3)}{24} + \\ & \frac{(12q^6 + 24q^5 + 12q^4 + 144q^3 + 144q^2)}{24} + \frac{(12q^4 + 12q^3)(2q^3 - 5q^2 + 4q - 1)}{24} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(6q^8 - 36q^7 + 110q^6 - 104q^5 + 94q^4 + 116q^3 + 150q^2)}{24} + \frac{(2q^5 - 11q^4 + 16q^3 - q^2 - 6q)}{24} + \\ & \frac{(24q^7 - 60q^6 + 48q^5 - 12q^4)}{24} + \frac{24q^6 - 60q^5 + 48q^4 - 12q_3}{24} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{6q^8}{24} + \frac{(-36q^7 + 24q^7)}{24} + \frac{(110q^6 - 60q^6 + 24q^6)}{24} + \frac{(-104q^5 + 2q^5 - 60q^5 + 48q^5)}{24} + \\ & \frac{(-11q^4 - 12q^4 + 48q^4 + 94q^4)}{24} + \frac{(16q^3 - 12q_3 + 116q^3)}{24} + \frac{(150q^2 - q^2) - 6q}{24} = \end{aligned}$$

$$\frac{6q^8}{24} - \frac{12q^7}{24} + \frac{74q^6}{24} - \frac{94q^5}{24} + \frac{119q^4}{24} + \frac{120q^3}{24} + \frac{149q^2}{24} - \frac{6q}{24}$$

$$cr_1(2q + 1) + cr_2(2q + 1) + cr_3(2q + 1) + cr_4(2q + 1) + cr_5(2q + 1) \leq$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{24} \left( 6 \frac{(n-1)^8}{2^8} - 12 \frac{(n-1)^7}{2^7} + 74 \frac{(n-1)^6}{2^6} - 94 \frac{(n-1)^5}{2^5} + 119 \frac{(n-1)^4}{2^4} + 120 \frac{(n-1)^3}{2^3} + \right. \\
& \quad \left. 149 \frac{(n-1)^2}{2^2} - 6 \frac{(n-1)}{2} \right) = \\
& \frac{1}{3} \left( 6 \frac{(n^8 - 8n^7 + 28n^6 - 56n^5 + 70n^4 - 56n^3 + 28n^2 - 8n + 1)}{2^{11}} \right. \\
& \quad \left. - 12 \frac{(n^7 - 7n^6 + 21n^5 - 35n^4 + 35n^3 - 21n^2 + 7n - 1)}{2^{10}} \right. \\
& \quad \left. + 74 \frac{(n^6 - 6n^5 + 15n^4 - 20n^3 + 15n^2 - 6n + 1)}{2^9} - 94 \frac{(n^5 - 5n^4 + 10n^3 - 10n^2 + 5n - 1)}{2^8} \right. \\
& \quad \left. + 119 \frac{(n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1)}{2^7} + 120 \frac{(n^3 - 3n^2 + 3n - 1)}{2^6} + 149 \frac{(n^2 - 2n + 1)}{2^5} - 6 \frac{(n-1)}{2^4} \right) = \\
& \frac{6n^8}{2^{11} \cdot 3} + \frac{(-8 \cdot 6 - 2 \cdot 12)n^7}{2^{11} \cdot 3} + \frac{(6 \cdot 28 + 12 \cdot 7 \cdot 2 + 74 \cdot 2^2)n^6}{2^{11} \cdot 3} + \\
& \quad \frac{(-56 \cdot 6 - 12 \cdot 21 \cdot 2 - 6 \cdot 74 \cdot 2^2 - 94 \cdot 2^3)n^5}{2^{11} \cdot 3} + \\
& \quad \frac{(6 \cdot 70 + 35 \cdot 12 \cdot 2 + 74 \cdot 15 \cdot 2^2 + 5 \cdot 94 \cdot 2^3 + 119 \cdot 2^4)n^4}{2^{11} \cdot 3} + \\
& \quad \frac{(-56 \cdot 6 - 12 \cdot 35 \cdot 2 - 20 \cdot 74 \cdot 2^2 - 94 \cdot 10 \cdot 2^3 - 4 \cdot 119 \cdot 2^4 - 3 \cdot 120 \cdot 2^5)n^3}{2^{11} \cdot 3} + \\
& \quad \frac{(28 \cdot 6 + 12 \cdot 21 \cdot 2 + 74 \cdot 15 \cdot 2^2 + 94 \cdot 10 \cdot 2^3 + 119 \cdot 6 \cdot 2^4 - 120 \cdot 3 \cdot 2^5 + 149 \cdot 2^6)n^2}{2^{11} \cdot 3} + \\
& \quad \frac{(-8 \cdot 6 - 12 \cdot 7 \cdot 2 - 6 \cdot 74 \cdot 2^2 - 94 \cdot 5 \cdot 2^3 - 4 \cdot 119 \cdot 2^4 + 120 \cdot 3 \cdot 2^5 - 2 \cdot 149 \cdot 2^6 - 6 \cdot 2^7)n}{2^{11} \cdot 3} + \\
& \quad \frac{(6 + 12 \cdot 2 + 74 \cdot 2^2 + 94 \cdot 2^3 + 119 \cdot 2^4 - 120 \cdot 2^5 + 149 \cdot 2^6 + 6 \cdot 2^7)}{2^{11} \cdot 3} = \\
& \frac{n^8}{2^{10}} + \frac{-3n^7}{2^8} + \frac{79n^6}{2^8 \cdot 3} + \frac{-421n^5}{2^8 \cdot 3} + \frac{2603n^4}{2^9 \cdot 3} + \frac{-4219n^3}{2^8 \cdot 3} + \frac{2759n^2}{2^8 \cdot 3} + \frac{-2711n}{2^8 \cdot 3} + \frac{4723}{2^{10} \cdot 3}.
\end{aligned}$$

□

A seguir temos nos Corolários 11, 12 e 13 os resultados dos valores assintóticos do  $\nu_2(K(n, 2))$  e  $\nu(K(n, 2))$ :

**Corolário 11** (Limite Superior Assintótico de  $\nu_2(K(n, 2))$ ).  $\nu_2(K(n, 2)) = O(n^8) = O(|V(K(n, 2))|^4)$

com o termo líder  $\ell = 2^{-10}$ , onde  $n = 2q + 1 \geq 6, q \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Pelo Teorema 42 temos o valor assintótico para o limite superior:  $\nu_2(K(n, 2)) \leq$

$$\frac{n^8}{2^{10}} + \frac{-3n^7}{2^8} + \frac{79n^6}{2^8 \cdot 3} + \frac{-421n^5}{2^8 \cdot 3} + \frac{2603n^4}{2^9 \cdot 3} + \frac{-4219n^3}{2^8 \cdot 3} + \frac{2759n^2}{2^8 \cdot 3} + \frac{-2711n}{2^8 \cdot 3} + \frac{4723}{2^{10} \cdot 3} = O(n^8) = O(|V(K(n, 2))|^4),$$

com termo líder  $2^{-10}$ . □

**Corolário 12** (Valor Assintótico de  $\nu_2(K(n, 2))$ ).  $\nu_2(K(n, 2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n, 2))|^4)$

com o termo líder é  $2^{-13} \leq \ell \leq 2^{-10}$ , onde  $n = 2q + 1 \geq 6, q \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Pelos Corolários 8 e 11 temos  $\Omega(n^8) = \Omega(|V(K(n, 2))|^4) \leq \nu_2(K(n, 2)) \leq$

$O(n^8) = O(|V(K(n, 2))|^4)$  com termo líder  $2^{-13}$  no limite inferior e  $2^{-10}$  no limite superior,

temos então  $\nu_2(K(n, 2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n, 2))|^4)$  com termo líder  $2^{-10} \leq \ell \leq 2^{-10}$ . □

**Corolário 13** (Valor Assintótico de  $\nu(K(n, 2))$ ).  $\nu(K(n, 2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n, 2))|^4)$

com o termo líder é  $2^{-13} \leq \ell \leq 2^{-10}$ , onde  $n = 2q + 1 \geq 6, q \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Pelos Corolários 8 e 11 temos  $\Omega(n^8) = \Omega(|V(K(n, 2))|^4) \leq \nu(K(n, 2)) \leq$

$O(n^8) = O(|V(K(n, 2))|^4)$  com termo líder  $2^{-13}$  no limite inferior e  $2^{-10}$  no limite superior,

temos então  $\nu(K(n, 2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n, 2))|^4)$  com termo líder  $2^{-10} \leq \ell \leq 2^{-10}$ . □

A síntese dos resultados para o limite superior e inferior de  $\nu(K(n, 2))$  e  $\nu_2(K(n, 2))$  é definido pelo Teorema 43:

**Teorema 43** (Limite de  $\nu(K(n, 2))$  e  $\nu_2(K(n, 2))$ ). Seja  $n \in \mathbb{N}$  com  $n \geq 6$ , então:

1. Para  $n$  par:  $\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq \nu(K(n, 2)) \leq \nu_2(K(n, 2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^8 \cdot 3} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^7 \cdot 3} + \frac{517n^3}{2^5 \cdot 3} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^3 \cdot 3}$ .

$$2. \text{ Para } n \text{ ímpar: } \frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq \nu(K(n, 2)) \leq \nu_2(K(n, 2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} + \frac{-3n^7}{2^8} + \frac{79n^6}{2^8 \cdot 3} + \frac{-421n^5}{2^8 \cdot 3} + \frac{2603n^4}{2^9 \cdot 3} + \frac{-4219n^3}{2^8 \cdot 3} + \frac{2759n^2}{2^8 \cdot 3} + \frac{-2711n}{2^8 \cdot 3} + \frac{4723}{2^{10} \cdot 3}.$$

**Demonstração:** Consequência direta dos Teoremas 36, 38 e 42.  $\square$

A síntese dos valores assintóticos de  $\nu(K(n, 2))$  e  $\nu_2(K(n, 2))$  são definidos pelo Teorema 44:

**Teorema 44** (Valor Assintótico de  $\nu(K(n, 2))$  e  $\nu_2(K(n, 2))$ ). *Seja  $n \in \mathbb{N}$  com  $n \geq 6$ , então:*

1.  $\nu_2(K(n, 2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n, 2))|^4)$  com o termo líder é  $2^{-13} \leq \ell \leq 2^{-10}$ ;
2.  $\nu(K(n, 2)) = \Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n, 2))|^4)$  com o termo líder é  $2^{-13} \leq \ell \leq 2^{-10}$ .

**Demonstração:** Consequência direta dos Corolários 10, 12 e 13.  $\square$

## 5 Conclusão

Neste trabalho foi desenvolvido um Algoritmo de *Desenho em 2-páginas* de um grafo de Kneser  $K(n, 2)$ , definindo a *espinha do desenho* que contém uma *cobertura de cliques* mínima consecutiva por meio do Algoritmo de Berge, onde os vértices tomados formam um *ciclo Hamiltoniano*. Por meio deste Algoritmo de Desenho foi obtido um limite superior para  $\nu_2(K(n, 2))$  e  $\nu(K(n, 2))$  com o valor  $\frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^8 \cdot 3} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^7 \cdot 3} + \frac{517n^3}{2^5 \cdot 3} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^3 \cdot 3}$  para o caso  $n$  par e  $\frac{n^8}{2^{10}} + \frac{-3n^7}{2^8} + \frac{79n^6}{2^8 \cdot 3} + \frac{-421n^5}{2^8 \cdot 3} + \frac{2603n^4}{2^9 \cdot 3} + \frac{-4219n^3}{2^8 \cdot 3} + \frac{2759n^2}{2^8 \cdot 3} + \frac{-2711n}{2^8 \cdot 3} + \frac{4723}{2^{10} \cdot 3}$  para o caso  $n$  ímpar. Em particular, foram obtidos um *desenho* para  $K(6, 2)$  com 63 *cruzamentos* e um *desenho* para  $K(8, 2)$  com 1982 *cruzamentos*.

Foi estabelecido um limite inferior para  $\nu_2(K(n, 2))$  e  $\nu(K(n, 2))$  como o valor de  $\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9}$  para todo  $n$ . Para  $\nu_2(K(n, 2))$  e  $\nu(K(n, 2))$  foi obtido o valor assintótico  $\Theta(n^8) = \Theta(|V(K(n, 2))|^4)$  com o termo líder é  $2^{-13} \leq \ell \leq 2^{-10}$ .

Neste trabalho foi implementado um algoritmo que conta o *número de cruzamentos* exato que o *desenho em 2-páginas* proposto possui. Uma outra implementação desenvolvida permitiu gerar um imagem png para esse *desenho* de modo automático. Foram também implementados em linguagem python o Algoritmo Slope e o Algoritmo de Berge que seguem o código Python no apêndice do trabalho. Os resultados apresentados aqui, bem como algumas demonstrações estão presentes em três artigos [42, 43, 41] publicados no ETC'2022, no III Encontro de Mulheres na Ciência e no LAWCG'2022. Nesses artigos nós contamos com a co-autoria do ex-aluno de TCC – Jonas Carneiro e com o pesquisador Mario Valencia Pabon.

## Referências

- [1] B. M. Ábrego, O. Aichholzer, S. Fernández-Merchant, P. Ramos, and G. Salazar. The 2-page crossing number of  $k_n \times k_n$ . *Discrete & Computational Geometry*, 49:747–777, 2013.
- [2] B. M. Ábrego, O. Aichholzer, S. Fernández-Merchant, P. Ramos, and G. Salazar. The 2-page crossing number of  $k_n$ . *Discret. Comput. Geom.*, 49(4):747–777, 2013.
- [3] L. D. Andersen, S. Ding, G. Sabidussi, and P. D. Vestergaard. Edge orbits and edge-deleted subgraphs. *Graphs and Combinatorics*, 8:31–44, 1992.
- [4] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable. 1976.
- [5] Z. Baranyai. On the factorization of the complete uniform hypergraphs. *Infinite and finite sets*, 1974.
- [6] C. Berge. *Graphs and hypergraphs*. North-Holland Pub. Co., 1973.

- [7] R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 37, pages 194–197. Cambridge University Press, 1941.
- [8] A. Brouwer and A. Schrijver. Uniform hypergraphs. *Packing and Covering in Combinatorics, Mathematical Centre Tracts*, 106:39–73, 1979.
- [9] J. Carneiro. Um estudo sobre o crossing number do grafo de kneser. Trabalho de conclusão de curso, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2019.
- [10] M. R. Cerioli, L. Faria, T. O. Ferreira, C. A. J. Martinhon, F. Protti, and B. A. Reed. Partition into cliques for cubic graphs: Planar case, complexity and approximation. *Discret. Appl. Math.*, 156(12):2270–2278, 2008.
- [11] B.-L. Chen and K.-W. Lih. Hamiltonian uniform subset graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 42(3):257–263, 1987.
- [12] Y.-C. Chen. Kneser graphs are hamiltonian for  $n \geq 3k$ . *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 80(1):69–79, 2000.
- [13] F. R. Chung, F. T. Leighton, and A. L. Rosenberg. Embedding graphs in books: a layout problem with applications to vlsi design. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 8(1):33–58, 1987.
- [14] J. de C. Carneiro L. Faria M. Valencia-Pabon. A hamiltonian path in the kneser graph  $k(n,2)$ .
- [15] E. de Klerk, D. V. Pasechnik, and G. Salazar. Improved lower bounds on book crossing numbers of complete graphs. *SIAM J. Discret. Math.*, 27(2):619–633, 2013.

- [16] R. Diestel. *Graph theory: Springer graduate text gtm 173*, volume 173. Reinhard Diestel, 2012.
- [17] G. A. Dirac. Some theorems on abstract graphs. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1):69–81, 1952.
- [18] P. Erdos. Intersection theorems for systems op finite sets. *Quart. J. Math. Oxford Ser.(2)*, 12:313–320, 1961.
- [19] L. Euler. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pages 128–140, 1741.
- [20] L. Euler. Elementa doctrinae solidorum. *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pages 109–140, 1758.
- [21] L. Faria, C. M. de Figueiredo, R. B. Richter, and I. vrt'o. The same upper bound for both: The 2-page and the rectilinear crossing numbers of the n-cube. In *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science: 39th International Workshop, WG 2013, Lübeck, Germany, June 19-21, 2013, Revised Papers 39*, pages 249–260. Springer, 2013.
- [22] M. R. Garey. Computers and intractability: A guide to the theory of np-completeness, freeman. *Fundamental*, 1997.
- [23] M. R. Garey and D. S. Johnson. Crossing number is np-complete. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 4(3):312–316, 1983.
- [24] J. E. Greene. A new short proof of kneser’s conjecture. *The American mathematical monthly*, 109(10):918–920, 2002.
- [25] H. Grotzsch. Ein dreifarbensatz fur dreikreisfreie netze auf der kugel. *Wiss. Z. Martin Luther Univ. Halle-Wittenberg, Math. Nat. Reihe*, 8:109–120, 1959.

- [26] F. Guthrie. Tinting maps. *The Athenaeum, June*, 10:726, 1854.
- [27] R. K. Guy. A combinatorial problem. *Nabla (Bulletin of the Malayan Mathematical Society)*, 7:68–72, 1960.
- [28] R. K. Guy. The decline and fall of zarankiewicz’s theorem. (*No Title*), 1968.
- [29] C. Haslinger and P. F. Stadler. Rna structures with pseudo-knots: Graph-theoretical, combinatorial, and statistical properties. *Bulletin of mathematical biology*, 61:437–467, 1999.
- [30] M. Held and R. M. Karp. The construction of discrete dynamic programming algorithms. *IBM systems journal*, 4(2):136–147, 1965.
- [31] P. Hlinený. Crossing number is hard for cubic graphs. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 96(4):455–471, 2006.
- [32] F. István. On straight-line representation of planar graphs. *Acta scientiarum mathematicarum*, 11(229-233):2, 1948.
- [33] P. C. Kainen. The book thickness of a graph ii. *Congressus Numerantium*, 71:121–132, 1990.
- [34] M. Kneser. Aufgabe 360, jber. deutsch. math. Verein, 58:27, 1955.
- [35] D. Kőnig. Gráfok és mátrixok. *Matematikai és Fizikai Lapok*, 38:116–119, 1931.
- [36] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fundamenta Mathematicae*, 15(1):271–283, 1930.
- [37] L. Lovász. Kneser’s conjecture, chromatic number, and homotopy. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 25(3):319–324, 1978.

- [38] J. Matoušek. A combinatorial proof of kneser's conjecture. *Combinatorica*, 24(1):163–170, 2004.
- [39] J. Petersen. Die theorie der regulären graphs. 1891.
- [40] J. Petersen. Sur le théoreme de tait. *L'intermédiaire des Mathématiciens*, 5:225–227, 1898.
- [41] A. Sousa, J. Carneiro, L. Faria, and M. Pabon. How to draw a  $k(n, 2)$  kneser graph? In *10th Latin American Workshop on Cliques in Graphs (LAWCG)*, page 45, 2022.
- [42] A. Sousa, J. Carneiro, L. Faria, and M. Pabon. Sobre o número de cruzamentos do grafo de kneser  $k(n, 2)$ . In *Anais do VII Encontro de Teoria da Computação*, pages 61–64, Porto Alegre, RS, Brasil, 2022. SBC.
- [43] A. Sousa, J. Carneiro, L. Faria, and M. Pabon. Sobre o número de cruzamentos do grafo de kneser  $k(n, 2)$ . In *III Encontro de Mulheres na Matemática*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2022. CCOMP.
- [44] L. A. Székely. Crossing numbers and hard erdős problems in discrete geometry. *Combinatorics, Probability and Computing*, 6(3):353–358, 1997.
- [45] P. Turán. A note of welcome. *Journal of Graph Theory*, 1(1):7–9, 1977.
- [46] K. Urbanik. Solution du problème posé par p. turán. In *Colloq. Math*, volume 3, pages 200–201, 1955.
- [47] V. G. Vizing. Critical graphs with given chromatic class (in russian). *Metody Discret. Analiz.*, 5:9–17, 1965.
- [48] H. von Warnsdorf. *Des Rösselsprunges einfachste und allgemeinste Lösung*. Verhagen, 1823.

- [49] S. Wagon. pers. comm., Fevereiro 2013.
- [50] K. Zarankiewicz. On a problem of p. turán concerning graphs. *Fundamenta Mathematicae*, 1(41):137–145, 1955.

## 6 Apêndice

Nesse apêndice nós incluímos as implementações em Python 3.11.3 dos algoritmos referidos nesse trabalho. Além disso, incluímos os desenhos obtidos de alguns  $K(n, 2)$  por meio do Algoritmo de Desenho automático. Finalmente, acrescentamos uma cópia dos artigos publicados provenientes desse trabalho [41, 42, 43]. Todas as implementações estão no repositório do github <https://github.com/AntonioDRSousa/TCC-Grafos>.

### 6.1 Implementação do Algoritmo de Berge

O código da implementação está no link:

<https://github.com/AntonioDRSousa/TCC-Grafos/blob/main/berge.py>.

```
def berge (n) :
    q=n//2
    brg=[ [None for x in range(q)] for y in range(n-1) ]
    for i in range(0,n-1):
        brg[i][0]=(1,i+2)
        for j in range(1,q):
            l= ( ((i+2)-(j+2)) % (n-1) ) + 2
            r= ( ((i+2)+(j-2)) % (n-1) ) + 2
            brg[i][j]=(l,r)
    return brg

def hamiltoniano (b) :
    p=[]
    for i in b:
        p+=i
    return p

def bergeParImpar (n) :
    if n%2==0:
        b=berge (n)
    else:
        brg=berge (n+1)
        b=[ ]
        for i in brg:
            b+=[list(filter(lambda x: x[0]!=(n+1) and x[1]!=(n+1), i))]
    return b

def impr (b,p) :
    print("-----")
    print("Algoritmo de Berge\n\n")
    for j in range(0,len(b[0])):
```

```

        for i in range(0, len(b)):
            print(str(b[i][j]), end=" ")
        print()
print("\n\nCaminho Hamiltoniano")
print("P = ( ", end="")
print(*p, sep=" , ", end=" )\n\n")
print("-----")

while True:
    n = int(input("n = "))

    t=bergeParImpar(n)
    h=hamiltoniano(t)
    impr(t,h)

    ch=input("\nDigite 'c' para continuar: ")
    if ch!='c':
        break
    print()

```

## 6.2 Implementação do Algoritmo de Slope

O código da implementação está no link:

<https://github.com/AntonioDRSousa/TCC-Grafos/blob/main/slope.py>.

```

def slope(vertices, edges, n, k):
    p=n//k
    q=n%k

    print("=="*25)
    print("p = "+str(p))
    print("q = "+str(q))
    print("=="*25)

    pages = []
    rot = dict()

    for i in range(0,n):
        rot[vertices[i]]=i
        print(str(vertices[i])+" : "+str(i))

    print("=="*25)
    for l in range(0,k):
        if l<q:
            s,t = (l*(p+1)) , ((l*(p+1))+p)
        else:
            s,t = (l*p+q) , (l*p+q+(p-1))
        pages.append((s,t))
        print("l="+str(l)+" -> "+"M_"+str(s)+", "+str(t))
    print("=="*25)

```

```

print("=".*25)
for e in edges:
    i,j = rot[e[0]], rot[e[1]]
    slp = (i+j)%n
    for l in range(0,len(pages)):
        x=pages[l]
        if ((slp>=x[0]) and (slp<=x[1])):
            s,t=x[0],x[1]
            break
    print(str(e)+" : "+str((i,j)),end="")
    print(" -> ("+str(i)+"+"+str(j)+" mod "+str(n),end="")
    print(" -> "+"M_"+str(s)+","+"str(t)+" -> "+"l = "+str(l))
print("=".*25)

def read_graph():
    vertices = set()
    edges = set()

    print("Write vertices: ")
    while True:
        s=str(input())
        if s=="":
            break
        vertices.add(s)

    vertices = list(vertices)
    vertices.sort()

    print("Write edges how v,w : ")
    while True:
        try:
            s=str(input())
            if s=="":
                break
            t = tuple(s.split(','))
            if len(t) != 2 :
                raise
            elif not((set(t)).issubset(vertices)):
                raise
            edges.add(t)
        except:
            print("Error.....")

    edges = list(edges)
    m=len(edges)
    n=len(vertices)

    return vertices, edges, n, m

def read_k():
    while True:
        try:

```

```

        k=int(input("k = "))
        if k<2:
            raise
            break
        except:
            print("Error.....")
    return k

def kn():
    vertices = []
    edges = []
    n=int(input("n = "))
    for i in range(0,n):
        vertices.append("v_"+str(i))
    for i in range(0,n):
        for j in range(i+1,n):
            edges.append((vertices[i],vertices[j]))
    m=len(edges)
    return vertices, edges, n, m

def impr(vertices,edges,n,m):
    print("=".*25)
    print("n = "+str(n))
    print("m = "+str(m))
    print("=".*25)
    print("=".*25)
    print("vertices")
    print(vertices)
    print("=".*25)
    print("=".*25)
    print("edges")
    print(edges)
    print("=".*25)

while True:
    try:
        print("-".*25)
        print("[1] - New Graph")
        print("[2] - Complete Graph")
        print("[3] - Quit")
        print("-".*25)
        op=int(input("Write option: "))
        if op==1:
            vertices, edges, n, m = read_graph()
        elif op==2:
            vertices, edges, n, m = kn()
        elif op==3:
            break
        else:
            raise
        impr(vertices,edges,n,m)
        k = read_k()
        slope(vertices,edges, n, k)
    
```

```

except:
    print("Error.....")

```

### 6.3 Implementação do Algoritmo Contador de Cruzamentos

O seguinte algoritmo implementado em linguagem Python, recebe como entrada um valor  $n$  e constroi uma  $n$ -tupla de acordo com o Algoritmo 5 e retorna como saída  $cr_1(n)$ ,  $cr_2(n)$ ,  $cr_3(n)$ ,  $cr_4(n)$ ,  $cr_5(n)$  e  $cr(n)$ .

O código da implementação está no link:

<https://github.com/AntonioDRSousa/TCC-Grafos/blob/main/desenho.py>.

```

def berge(n):
    q=n//2
    brg=[[None for x in range(q)] for y in range(n-1)]
    for i in range(0,n-1):
        brg[i][0]=(1,i+2)
        for j in range(1,q):
            l= ((i+2)-(j+2)) % (n-1) + 2
            r= ((i+2)+(j-2)) % (n-1) + 2
            brg[i][j]=(l,r)
    return brg

def hamiltoniano(b):
    p=[]
    for i in b:
        p+=i
    return p

def bergeParImpar(n):
    if n%2==0:
        b=berge(n)
    else:
        brg=berge(n+1)
        b=[]
        for i in brg:
            b+=[list(filter(lambda x: x[0]!=(n+1) and x[1]!=(n+1), i))]
    return b

def t_count(omega,x1,x2,y1,y2):
    v1=x1//omega
    v2=x2//omega
    v3=y1//omega
    v4=y2//omega
    v=[v1,v2,v3,v4]
    s = set(v)
    size = len(s)

```

```

    if (size==4):
        return 1
    elif (size==1):
        return 2
    elif (size==3):
        return 5
    elif (v.count(v1)==2):
        return 4
    else:
        return 3

def count_cruz(edges,s,k,omega):
    ncruz=0
    cruz = [0,0,0,0,0]
    for i in range(0,len(edges)):
        for j in range(i+1,len(edges)):
            if s[i]==s[j]:
                e1 , e2 = edges[i] , edges[j]
                x1 , y1 , x2 , y2 = e1[0] , e1[1] , e2[0] , e2[1]
                b1=((x2 < x1) and (x1 < y2) and (y2 < y1))
                b2=((x1 < x2) and (x2 < y1) and (y1 < y2))
                if (b1 or b2):
                    ncruz += 1
                    cruz[t_count(omega,x1,x2,y1,y2)-1]+=1

    return ncruz, cruz

```

```

def main():
    ntuple = ""

    n=int(input("n = "))

    k=2
    h = hamiltoniano(bergeParImpar(n))

    omega = n//2
    theta = (n-1)+(n%2)
    p = theta//2
    q = theta % 2

    kn_edges = [None]*theta
    for i in range(0,theta):
        kn_edges[i] = [None]*theta
    kn_vertices = []

    for i in range(0,theta):
        ud = 0
        for j in range(i+1,theta):
            slp = (i+j) % theta
            if slp<=(p-1+q):

```

```

        kn_edges[i][j]=0
        ud-=1
    else:
        kn_edges[i][j]=1
        ud+=1
    if ud<=0:
        kn_vertices.append(0)
    else:
        kn_vertices.append(1)

edges = []
pos_edges = []
cliques = []
for i in range(0, len(h)):
    for j in range(i+1, len(h)):
        a, b = set(h[i]), set(h[j])
        if a.intersection(b) == set():
            edges.append((a,b))
            pos_edges.append((i,j))
            v1=i//omega
            v2=j//omega
            cliques.append((v1,v2))

        if (v1==v2):
            if (kn_vertices[v1]==0):
                ntuple+="1"
            else:
                ntuple+="0"
        else:
            ntuple+=str(kn_edges[v1][v2])

ncruz,cruz = count_cruz(pos_edges,ntuple,k,omega)

print("-"*25)
print(h)
print("-"*25)
print("-"*25)
for i in range(0, len(edges)):
    print("edge = "+str(edges[i])+" | ",end="")
    print("position = "+str(pos_edges[i])+" | ",end="")
    print("cliques = "+str(cliques[i])+" | ",end="")
    print("up/down = "+str(ntuple[i]))
print("-"*25)
print("-"*25)
print(ntuple)
print("-"*25)
print("-"*25)
print("cr1(n) = "+str(cruz[0]))
print("cr2(n) = "+str(cruz[1]))
print("cr3(n) = "+str(cruz[2]))
print("cr4(n) = "+str(cruz[3]))
print("cr5(n) = "+str(cruz[4]))
print("crossing number = "+str(ncruz))

```

```

print("-"*25)

main()

```

## 6.4 Implementação do Algoritmo de Desenho

O Algoritmo a seguir implementado em python com o uso da biblioteca pycairo, recebe como entrada um valor  $n$  e retorna um arquivo .pgn que corresponde ao desenho do grafo  $K(n, 2)$  em 2-páginas pelo Algoritmo 5.

O código da implementação está no link:

<https://github.com/AntonioDRSousa/TCC-Grafos/blob/main/drawing-graph-1.py>.

```

import cairo
import math

width = 600 # width of image
height = 600 # height of image
cv = (0,0,0) # color of vertices
cs = (0,1,0) # color of spine
cu = (0,0,1) # color of up edges
cd = (1,0,0) # color of down edges
cb = (1,1,1) # color of background
o = True # orientation
ew = 1 # edge width
fw = 1 # foreground width
cf = (0,0,0) # foreground color
cq = 0 # orientation of clique in case equal
name = True # automatically or manually naming

def berge(n):
    q=n//2
    brg=[[None for x in range(q)] for y in range(n-1)]
    for i in range(0,n-1):
        brg[i][0]=(1,i+2)
        for j in range(1,q):
            l= ((i+2)-(j+2)) % (n-1) + 2
            r= ((i+2)+(j-2)) % (n-1) + 2
            brg[i][j]=(l,r)
    return brg

def hamiltoniano(b):
    p=[]
    for i in b:
        p+=i
    return p

```

```

def bergeParImpar(n):
    if n%2==0:
        b=berge(n)
    else:
        brg=berge(n+1)
        b=[]
        for i in brg:
            b+= [list(filter(lambda x: x[0]!=(n+1) and x[1]!=(n+1), i))]
return b

def draw(n):
    global width, height, cv, cs, cu, cd, cb, o, ew, fw, cf, ecc, cq, name
    ntuple = ""

    k=2
    h = hamiltoniano(bergeParImpar(n))

    omega = n//2
    theta = (n-1)+(n%2)
    p = theta//2
    q = theta % 2

    kn_edges = [None]*theta
    for i in range(0,theta):
        kn_edges[i] = [None]*theta
    kn_vertices = []

    for i in range(0,theta):
        ud = 0
        for j in range(i+1,theta):
            slp = (i+j) % theta
            if slp<=(p-1+q):
                kn_edges[i][j]=0
                ud-=1
            else:
                kn_edges[i][j]=1
                ud+=1
        if ud<0:
            kn_vertices.append(0)
        elif ud>0:
            kn_vertices.append(1)
        else:
            kn_vertices.append(cq)

    edges = []
    pos_edges = []
    cliques = []
    for i in range(0,len(h)):
        for j in range(i+1,len(h)):
            a , b = set(h[i]) , set(h[j])
            if a.intersection(b) == set():
                edges.append((a,b))
                pos_edges.append((i,j))

```

```

        v1=i//omega
        v2=j//omega
        cliques.append((v1,v2))

    if (v1==v2):
        if (kn_vertices[v1]==0):
            ntuple+="1"
        else:
            ntuple+="0"
    else:
        ntuple+=str(kn_edges[v1][v2])

return (n,ntuple,pos_edges,omega,theta)

def oposite(ntuple):
    nt=""
    for i in range(0,len(ntuple)):
        if ntuple[i]=="0":
            nt+="1"
        else:
            nt+="0"
    return nt

def plot(t):
    global width, height, cv, cs, cu, cd, cb, o, ew, fw, cf, ecc, cq, name
    n,ntuple,pos_edges,omega,theta = (t[0],t[1],t[2],t[3],t[4])

    if (not o):
        ntuple=oposite(ntuple)

    nvertices = (n*(n-1))//2
    cut_x = width//(2*nvertices + theta)
    radius = cut_x//2

    surface = cairo.ImageSurface(cairo.FORMAT_RGB24, width, height)
    ctx = cairo.Context(surface)

    ctx.rectangle(0, 0, width, height)
    ctx.set_source_rgb(cb[0],cb[1],cb[2])
    ctx.fill()

    pos_vertices = []
    for i in range(0,2*nvertices):
        if (i%2==0):
            clique = ((i//2)//omega)+1
            pos_vertices.append(((i+clique)*cut_x+radius))

            ctx.arc(pos_vertices[i//2],height//2, radius, 0, 2*math.pi)
            ctx.set_source_rgb(cv[0],cv[1],cv[2])
            ctx.fill()
            ctx.stroke()

        ctx.arc(pos_vertices[i//2],height//2, radius, 0, 2*math.pi)

```

```

        ctx.set_source_rgb(cf[0],cf[1],cf[2])
        ctx.set_line_width(fw)
        ctx.stroke()

    for i in range(0, len(pos_edges)):
        e = pos_edges[i]
        x , y = e[0] , e[1]
        ctx.set_line_width(ew)
        if ((abs(x-y))==1):
            ctx.set_source_rgb(cs[0],cs[1],cs[2])
            ctx.move_to(pos_vertices[max(x,y)] - radius, height//2)
            ctx.line_to(pos_vertices[min(x,y)] + radius, height//2)
        else:
            v1=x//omega
            v2=y//omega
            r = (abs(pos_vertices[x]-pos_vertices[y]))//2
            center = pos_vertices[min(x,y)] + r

            if (ntuple[i]=="0"):
                ctx.set_source_rgb(cd[0],cd[1],cd[2])
                ctx.arc(center, (height//2)+radius, r , 0, math.pi)
            else:
                ctx.set_source_rgb(cu[0],cu[1],cu[2])
                ctx.arc_negative(center, (height//2)-radius, r , 0, math.pi)
        ctx.stroke()

    if(name):
        surface.write_to_png('k'+str(n)+'2'+'.'+png')
    else:
        surface.write_to_png(str(input("name = "))+'.png')

def dsettings():
    global width, height, cv, cs, cu, cd, cb, o, ew, fw, cf, ecc, cq, name
    width = 600
    height = 600
    cv = (0,0,0)
    cs = (0,1,0)
    cu = (0,0,1)
    cd = (1,0,0)
    cb = (1,1,1)
    orientation = True
    ew = 1
    fw = 1
    cf = (0,0,0)
    cq = 0
    name = True

def set_color(s):
    c=str(input("color of "+s+" = "))
    v = c.split(',')
    v = (float(v[0]),float(v[1]),float(v[2]))
    return tuple(v)

def settings():

```

```

global width, height, cv, cs, cu, cd, cb, o, ew, fw, cf, ecc, cq, name
while True:
    print("-"*25)
    print("[ 1 ] - width")
    print("[ 2 ] - height")
    print("[ 3 ] - color of vertices")
    print("[ 4 ] - color of spine")
    print("[ 5 ] - color of up edges")
    print("[ 6 ] - color of down edges")
    print("[ 7 ] - color of background")
    print("[ 8 ] - orientation of tuple")
    print("[ 9 ] - edge width")
    print("[ 10 ] - foreground width")
    print("[ 11 ] - foreground color")
    print("[ 12 ] - clique orientation in case equal")
    print("[ 13 ] - automatically/manually naming")
    print("[0] - Quit")
    print("-"*25)
    op=int(input(""))
    if op==0:
        break
    elif op==1:
        print("width = "+str(width))
        width = int(input("width = "))
    elif op==2:
        print("height = "+str(height))
        height = int(input("height = "))
    elif op==3:
        print("color of vertices = "+str(cv))
        cv = set_color("vertices")
    elif op==4:
        print("color of spine = "+str(cs))
        cs = set_color("spine")
    elif op==5:
        print("color of up edges = "+str(cu))
        cu = set_color("up edges")
    elif op==6:
        print("color of down edges = "+str(cd))
        cd = set_color("down edges")
    elif op==7:
        print("color of background = "+str(cb))
        cb = set_color("background")
    elif op==8:
        print("orientation of tuple = "+str(orientation))
        orientation = bool(int(input("orientation = ")))
    elif op==9:
        print("edge width = "+str(ew))
        ew = float(str(input("edge width = ")))
    elif op==10:
        print("foreground width = "+str(fw))
        fw = float(str(input("foreground width = ")))
    elif op==11:
        print("foreground color = "+str(cf))
        fw = set_color("foreground")

```

```

elif op==12:
    print("clique orientation in case equal = "+str(cq))
    cq = bool(str(input("clique orientation = ")))
elif op==13:
    print("automatically/manually naming = "+str(name))
    name = bool(str(input("auto/man = ")))
else:
    raise

def read_settings():
    global width, height, cv, cs, cu, cd, cb, o, ew, fw, cf, ecc, cq, name
    print("-"*25)
    print("width = "+str(width))
    print("height = "+str(height))
    print("color of vertices = "+str(cv))
    print("color of spine = "+str(cs))
    print("color of up edges = "+str(cu))
    print("color of down edges = "+str(cd))
    print("color of background = "+str(cb))
    print("orientation of tuple = "+str(orientation))
    print("edge width = "+str(ew))
    print("foreground width = "+str(fw))
    print("foreground color = "+str(cf))
    print("clique orientation in case equal = "+str(cq))
    print("automatically/manually naming = "+str(name))
    print("-"*25)

def main():
    while True:
        try:
            print("-"*25)
            print("[ 1 ] - Draw K(n,2)")
            print("[ 2 ] - Draw List of K(n,2)")
            print("[ 3 ] - Settings")
            print("[ 4 ] - Default Settings")
            print("[ 5 ] - Read Settings")
            print("[ 0 ] - Quit")
            print("-"*25)
            op = int(input(""))
            if op==0:
                break
            elif op==1:
                n=int(input("n = "))
                t=draw(n)
                plot(t)
            elif op==2:
                i=int(input("i = "))
                f=int(input("f = "))
                for j in range(i,f):
                    t=draw(j)
                    plot(t)
            elif op==3:
                settings()
            elif op==4:

```

```

        dsettings()
elif op==5:
    read_settings()
else:
    raise
except:
    print("Error.....")

main()

```

## 6.5 Desenhos do $K(n, 2)$ em 2-páginas

As imagens a seguir são os desenhos em 2-páginas do grafo  $K(n, 2)$  obtidos pelo Algoritmo 5, o qual está descrito no apêndice desse trabalho. Todas as imagens foram obtidas pela implementação em python anterior. Seguem-se as Figuras 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131 e 132:

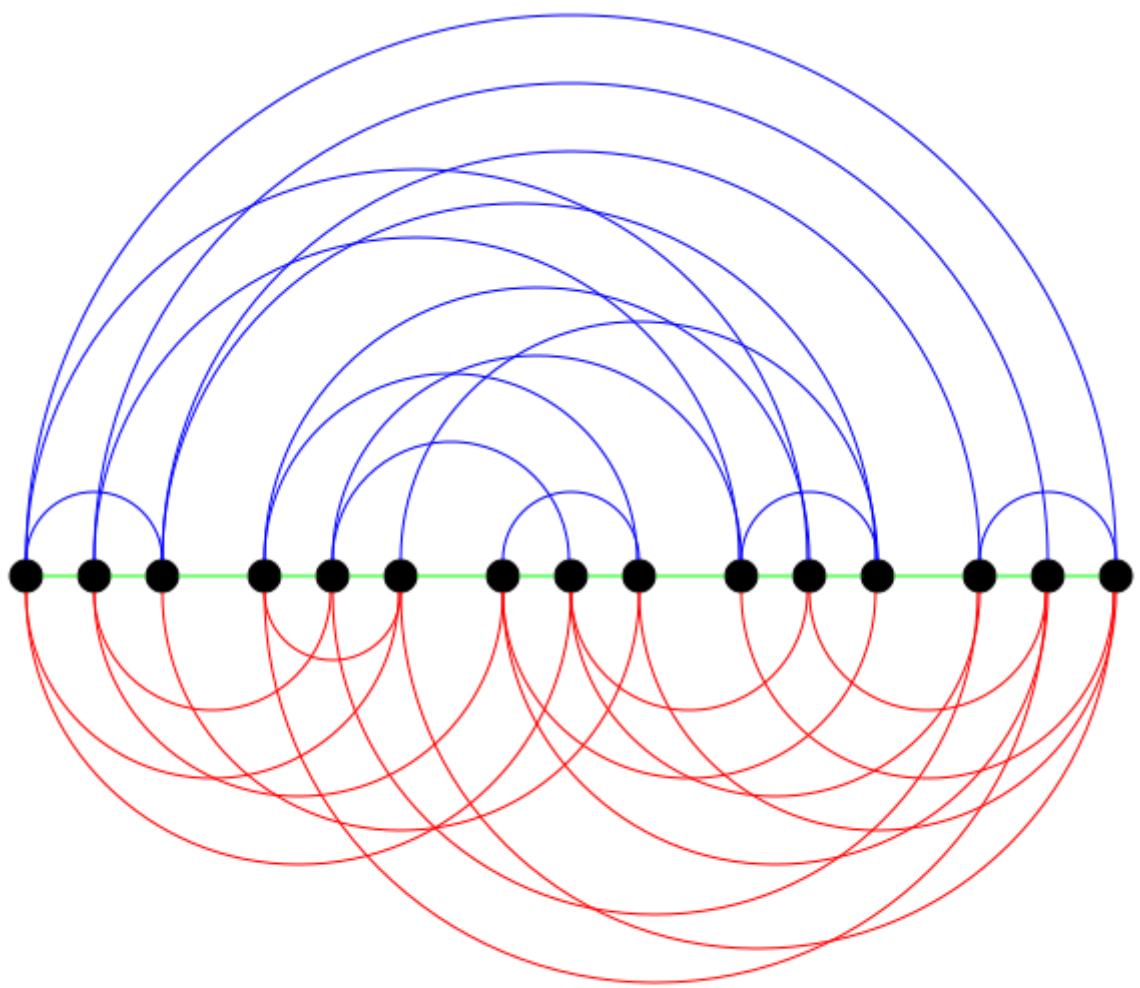


Figura 124:  $K(6, 2)$ .

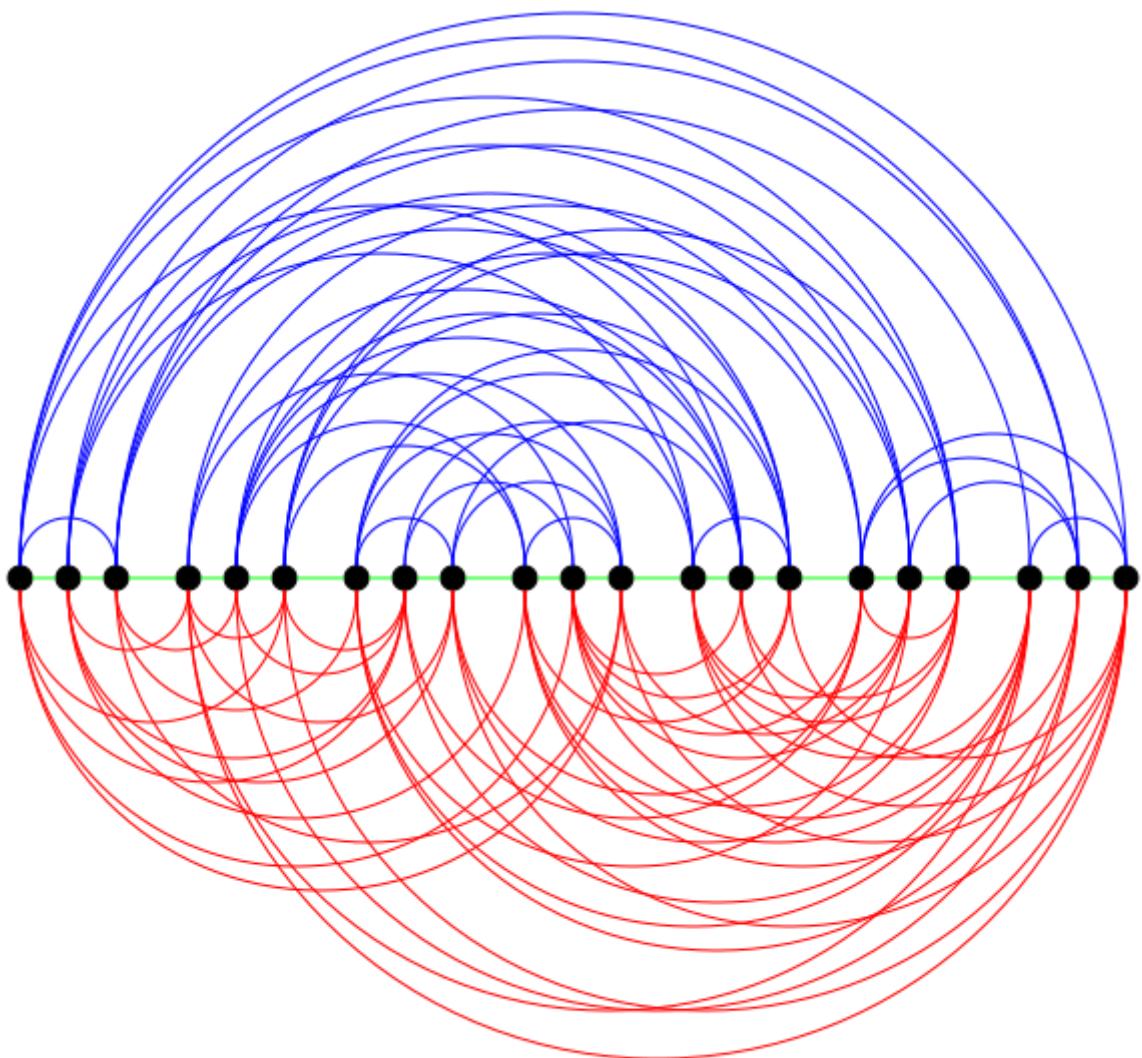


Figura 125:  $K(7, 2)$ .

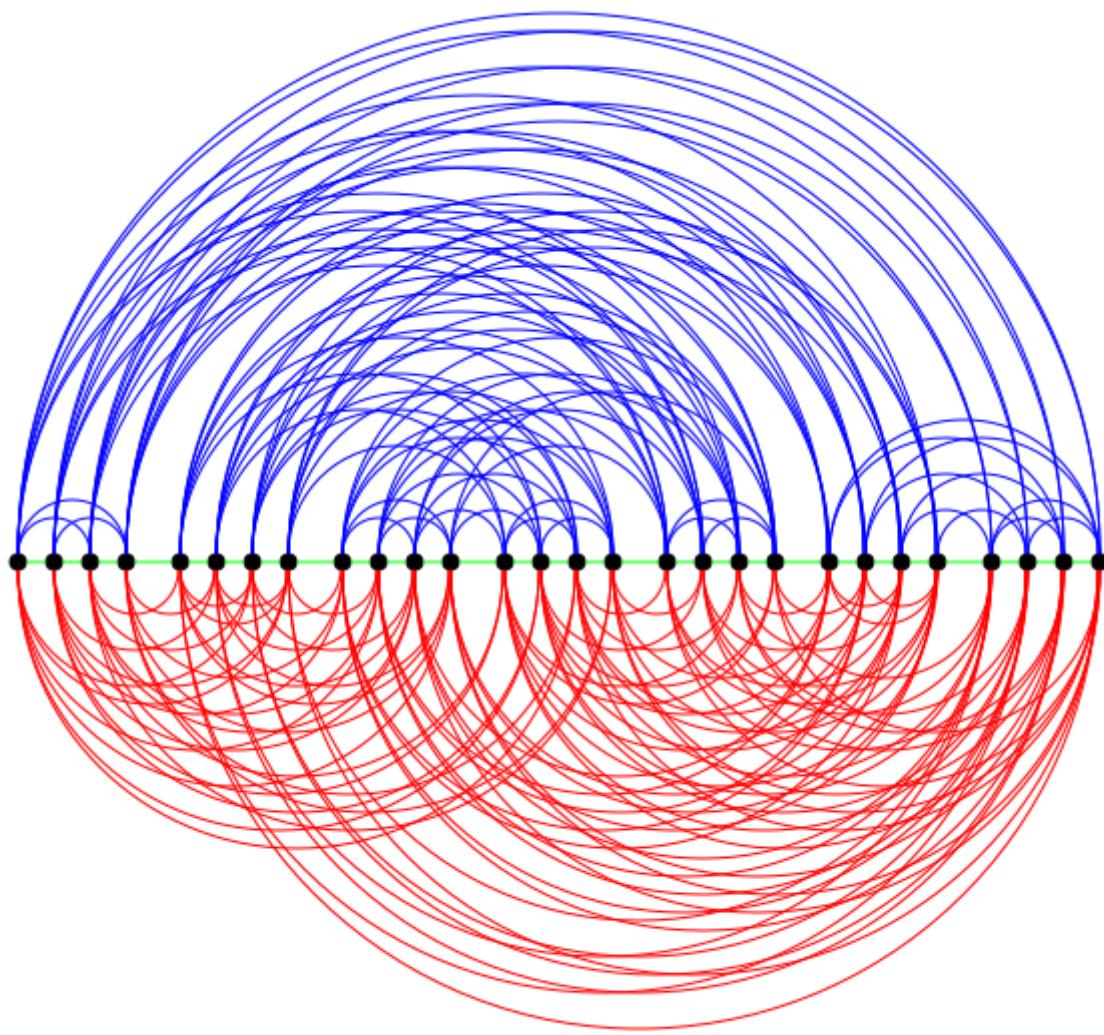


Figura 126:  $K(8, 2)$ .

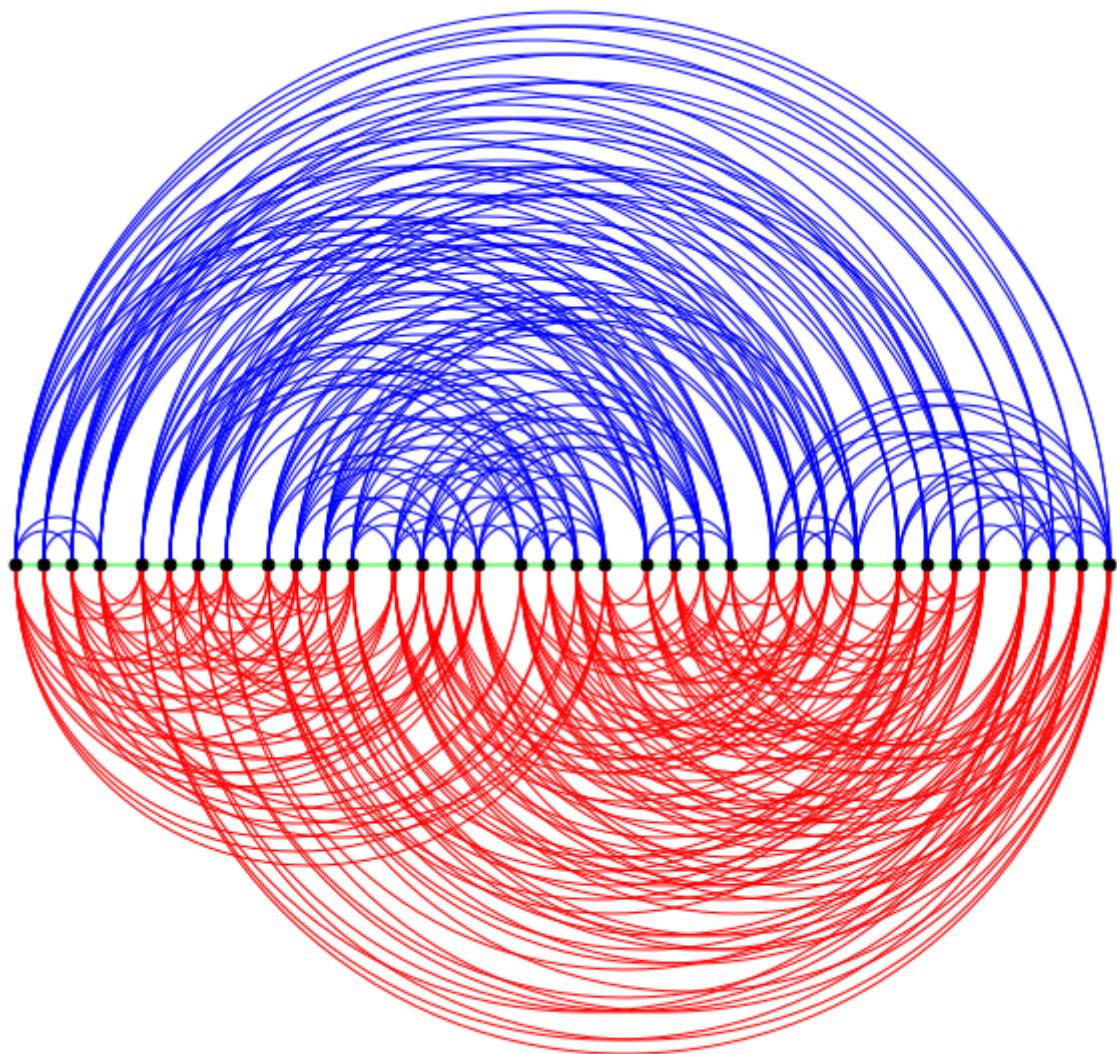


Figura 127:  $K(9, 2)$ .

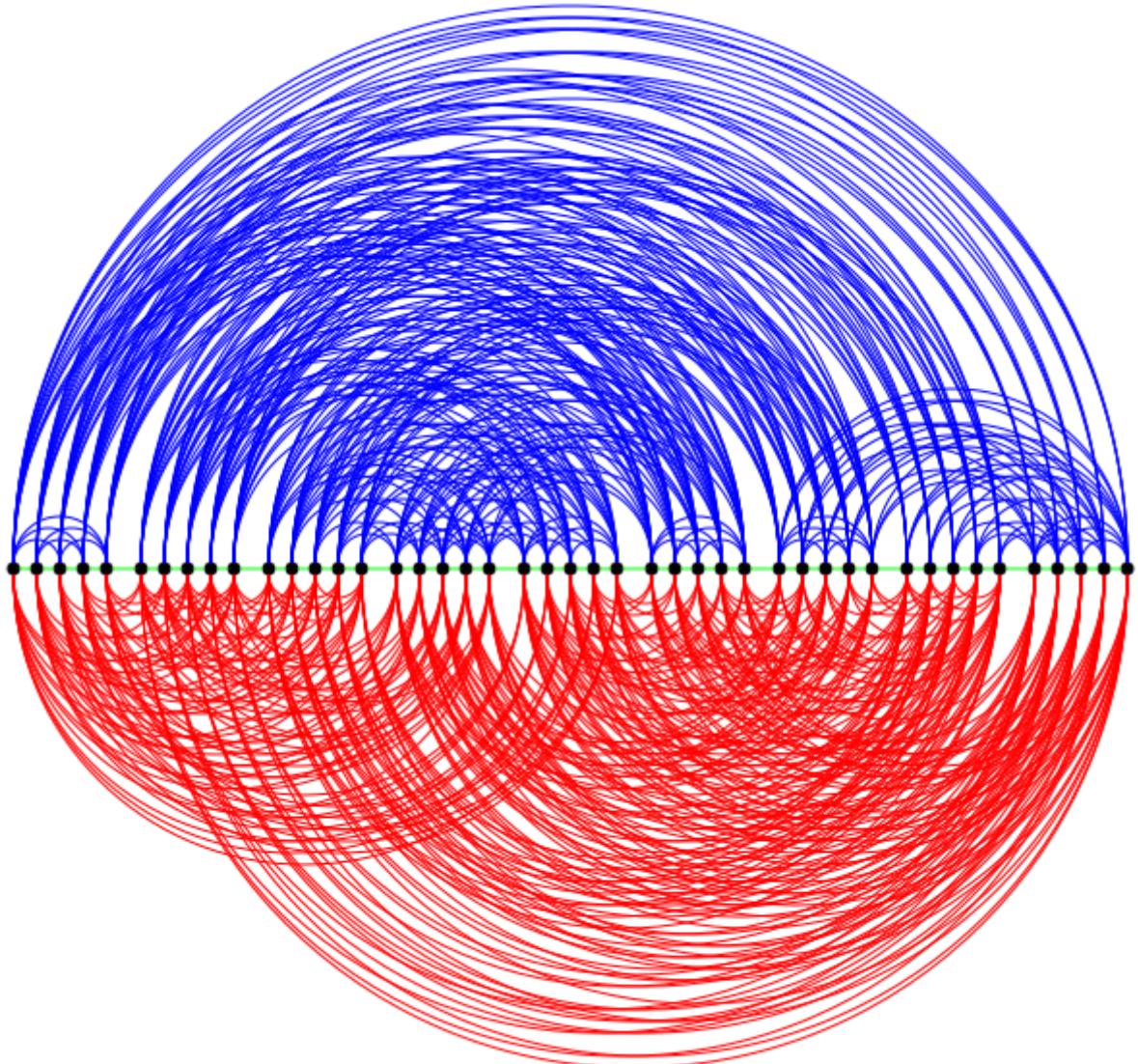


Figura 128:  $K(10, 2)$ .

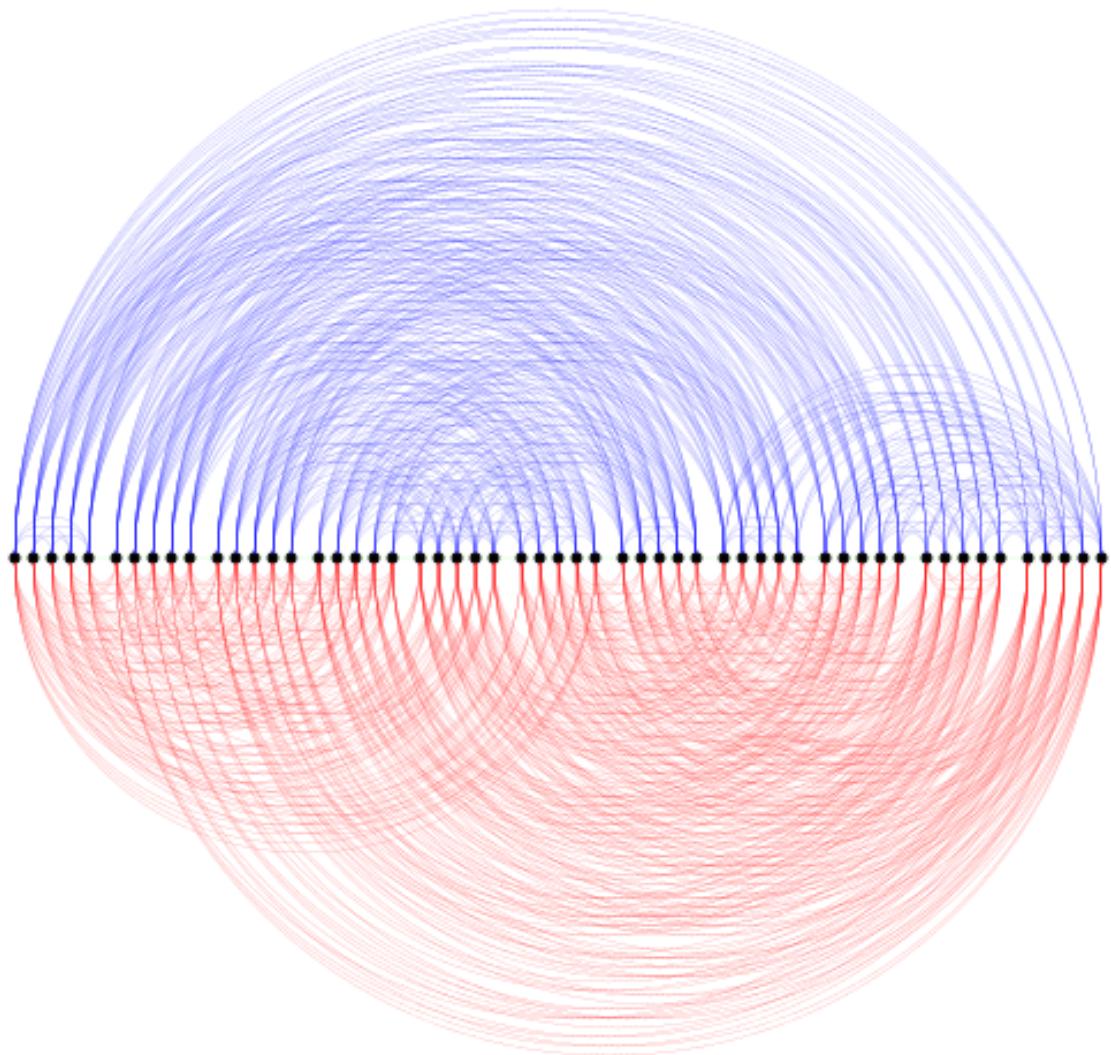


Figura 129:  $K(11, 2)$ .

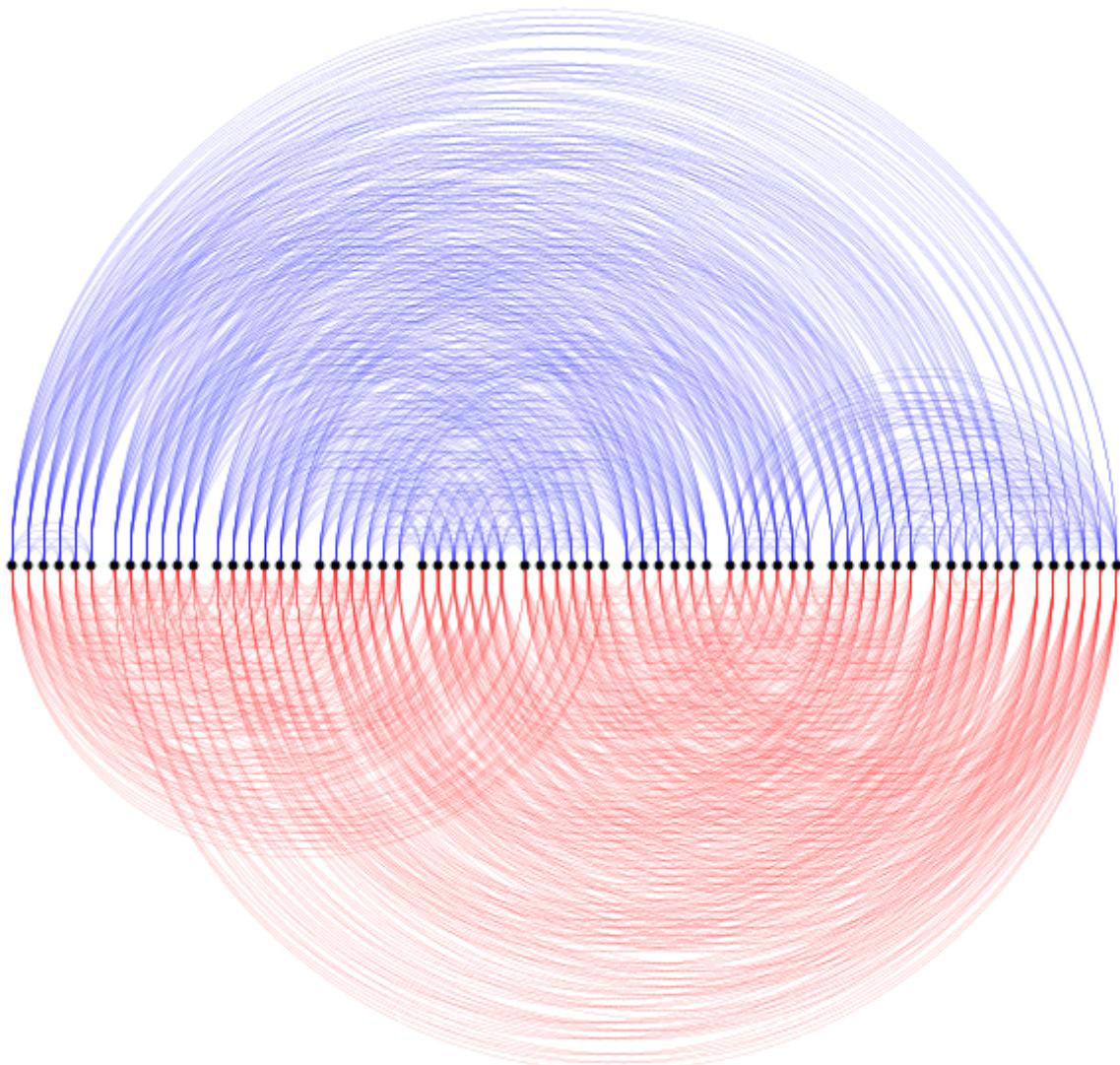


Figura 130:  $K(12, 2)$ .

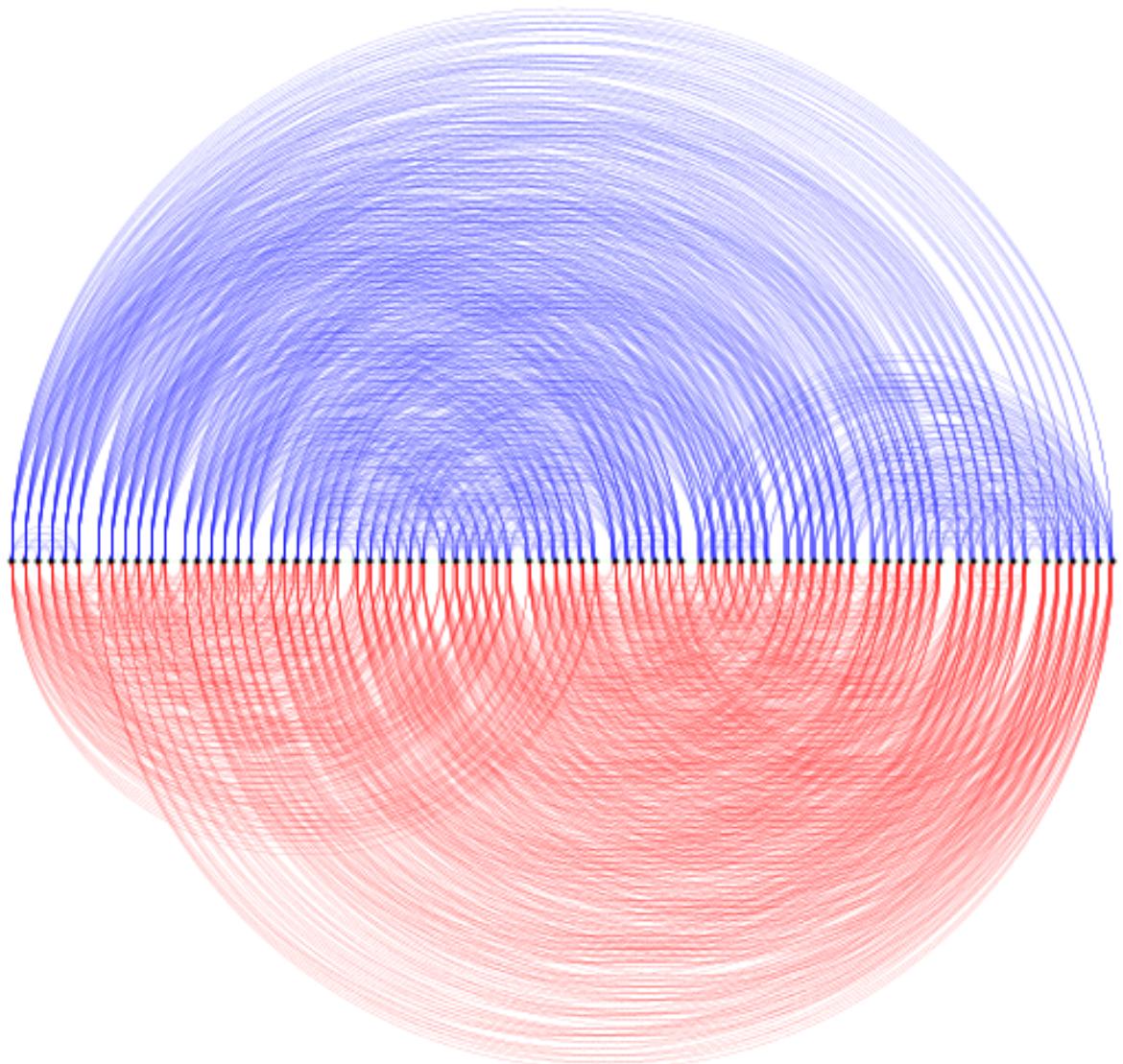


Figura 131:  $K(13, 2)$ .

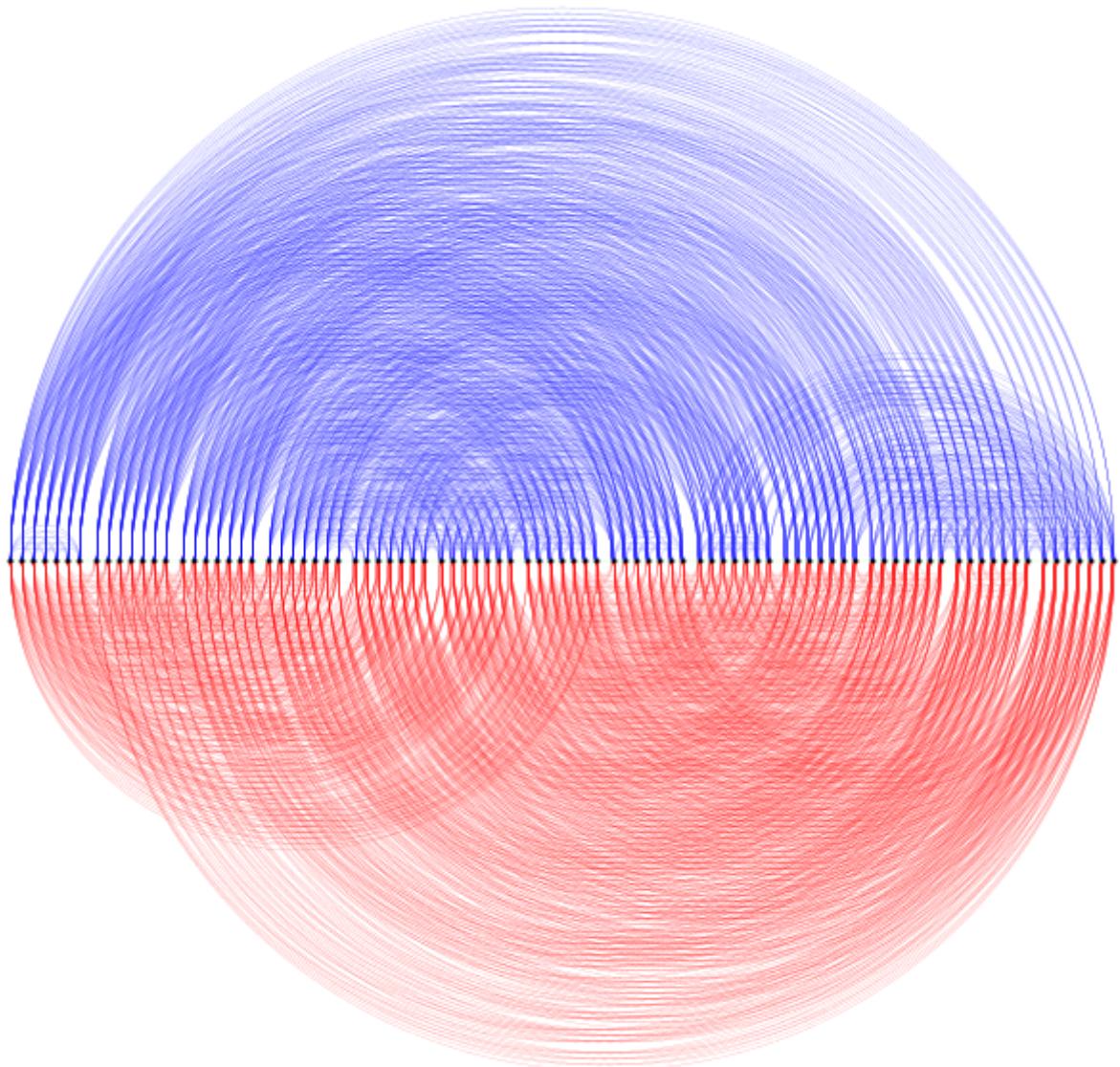


Figura 132:  $K(14, 2)$ .

# Sobre o número de cruzamentos do grafo de Kneser $K(n, 2)^*$

A. D. R. de Sousa, J. C. Carneiro, L. Faria<sup>1</sup>, M. V. Pabon<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) Rio de Janeiro, RJ - Brasil

<sup>2</sup>Université Paris-13, Sorbonne Paris Cité LIPN, CNRS UMR7030, Villejuif, France

antoniodrsousa@gmail.com, jonas.uerj@yahoo.com.br

luerbio@ime.uerj.br, valencia@lipn.univ-paris13.fr

**Abstract.** The crossing number  $\nu(G)$  of a graph  $G = (V, E)$  is the minimum number of crossings in a drawing  $D(G)$  in the plane of  $G$ . Let  $r$  be a straight line, called spine,  $p \geq 1$ , and  $S_1, \dots, S_p$  be  $p$  distinct half-planes bounded by  $r$ . A drawing of  $G = (V, E)$  in  $p$ -pages has the vertices of  $V$  drawn in  $r$  and each edge of  $G$  is drawn in one of  $S_1, \dots, S_p$ . The crossing number in  $p$ -pages  $\nu_p(G)$  of  $G$  is the minimum number of crossings in a drawing in  $p$ -pages of  $G$ . We prove that if  $n = 2q \geq 6$ , then  $\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq \nu(K(n, 2)) \leq \nu_2(K(n, 2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^{83}} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^{73}} + \frac{517n^3}{2^{53}} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^{33}}$ . Like complete graphs,  $\nu_2(K(n, 2)) = \Theta(|V(K(n, 2)|^4) = \nu(K(n, 2))$  and the leading term is  $\ell(n)$ , such that  $\frac{1}{2^{13}} \leq \ell(n) \leq \frac{1}{2^{10}}$ .

**Resumo.** O número de cruzamentos  $\nu(G)$  de um grafo  $G = (V, E)$  é o menor número de cruzamentos em um desenho  $D(G)$  no plano de  $G$ . Dada uma reta  $r$ , chamada espinha,  $p \geq 1$ , e  $S_1, \dots, S_p$  serem  $p$  semiplanos distintos limitados por  $r$ . Um desenho de  $G = (V, E)$  em  $p$ -páginas tem os vértices de  $V$  desenhados em  $r$  e cada aresta de  $G$  é desenhada em um  $S_1, \dots, S_p$ . O número de cruzamentos em  $p$ -páginas  $\nu_p(G)$  de  $G$  é o menor número de cruzamentos em um desenho de  $G$  em  $p$  páginas. Nós provamos que se  $n = 2q \geq 6$ , então  $\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq \nu(K(n, 2)) \leq \nu_2(K(n, 2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^{83}} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^{73}} + \frac{517n^3}{2^{53}} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^{33}}$ . Como os grafos completos  $\nu_2(K(n, 2)) = \Theta(|V(K(n, 2)|^4) = \nu(K(n, 2))$  cujo termo líder  $\ell(n)$  satisfaz  $\frac{1}{2^{13}} \leq \ell(n) \leq \frac{1}{2^{10}}$ .

## 1. Introdução

Martin Kneser [Kneser 1955] definiu os grafos de Kneser em 1955. Dados  $n, k$  dois inteiros com  $0 < k \leq n$  o grafo de Kneser  $K(n, k) = (V, E)$  tem  $V$  a coleção dos  $\binom{n}{k}$  subconjuntos com  $k$  elementos de  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  e  $uv \in E$  se e somente  $u \cap v = \emptyset$ . O grafo  $K(n, k)$  possui inúmeras aplicações na classificação de fenômenos da combinatória, por exemplo  $K(n, 2)$  é o complemento do grafo de linha de um grafo completo  $K_n$ . Algumas propriedades dos grafos de Kneser são que  $|E| = \binom{n}{k} \binom{n-k}{k}/2$ ,  $K(n, k)$  é um grafo  $\binom{n-k}{k}$ -regular, com número de clique  $\omega(K(n, 2)) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$  e partição mínima de cliques  $\lambda(K(n, 2)) = 2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ . O problema do número de cruzamentos é difícil [Hlinený 2006] mesmo para cúbicos e é conhecido exatamente para pouquíssimas classes de grafos,

\*O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, do CNPq (406036/2021-7 Universal, 308654/2018-8 Produtividade, 152340/2021-1 Iniciação Científica) e da FAPERJ (E26/202.902/2018 CNE).

entre elas  $K_n$  os grafos completos [Ábrego et al. 2013] e alguns limites para  $Q_n$  os  $n$ -cubos [Faria et al. 2016]. O único resultado conhecido para os grafos de Kneser é que o grafo de Petersen -  $K(5, 2)$  tem  $\nu(K(5, 2)) = \nu_2(K(5, 2)) = 2$ . Nossa contribuição principal nesse artigo é o número de cruzamentos  $\nu(K(n, 2)) = \nu_2(K(n, 2)) = \Theta(n^8)$  e o desenho que a realiza. O número de cruzamentos do desenho não é ótimo, mesmo para  $K(6, 2)$ . Com o auxílio do computador encontramos um desenho com 49, nossa construção possui 61 e nosso limite superior prevê 83 cruzamentos.

## 2. O limite inferior

Em 1997, Székely estabeleceu um limite inferior para o número de cruzamentos usando um homeomorfismo do grafo com um multigrafo.

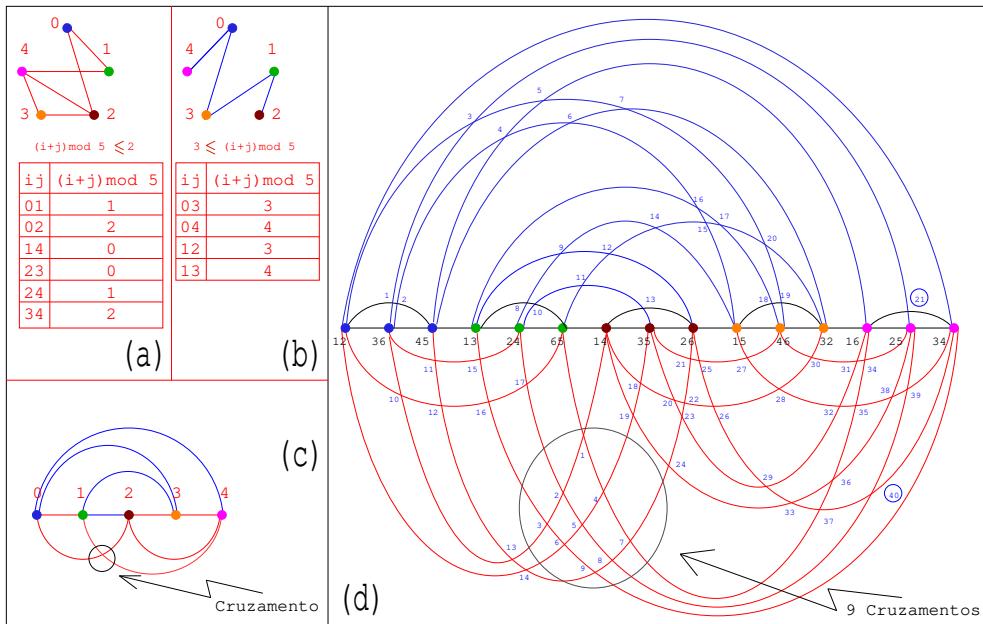
**Teorema 1** [Székely 1997] Se  $M$  é um multigrafo com  $n$  vértices,  $m$  arestas e entre cada par de vértices existem exatamente  $k$  arestas, então  $\nu(M) \geq \frac{m^3}{64n^2k}$ .

**Teorema 2** Se  $n \in \mathbb{N}^*$ , então  $\nu(K(n, 2)) \geq \frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9}$ .

**Prova:** Seja  $(C_1, \dots, C_\lambda)$  uma partição por cliques para  $K(n, 2)$ . Seja  $M = (V, E)$  o multigrafo onde  $V = \{C_1, \dots, C_\lambda\}$  e  $E = \{uv \mid \text{existe um vértice } x \in u, \text{ e } y \in v \text{ tal que } xy \in E(K(n, 2))\}$ . Assim,  $M$  terá  $\lambda = 2\lceil\frac{n}{2}\rceil - 1$  vértices,  $m = \frac{2q(2q-1)}{2}q(q-2)$  arestas e entre cada par de vértices existirão  $k = \lceil\frac{n-1}{2}\rceil(\lceil\frac{n-1}{2}\rceil - 2)$  arestas. Do Teorema 1 temos:

$$\nu(K(n, 2)) \geq \frac{1}{64} \cdot \frac{\left(\frac{2\lceil\frac{n}{2}\rceil(2\lceil\frac{n}{2}\rceil-1)}{2} \lceil\frac{n-1}{2}\rceil(\lceil\frac{n-1}{2}\rceil - 2)\right)^3}{(2\lceil\frac{n}{2}\rceil - 1)^2 \cdot \lceil\frac{n-1}{2}\rceil(\lceil\frac{n-1}{2}\rceil - 2)} \geq \frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} + \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9}. \quad \square$$

**Corolário 3**  $\nu(K(n, 2)) = \Omega(|V(K(n, 2)|^4)$  e o termo líder para o limite inferior é  $2^{-13}$ .



**Figura 1.** Desenho ótimo de  $K_5$  em 2-páginas em (a) e (b). Desenho ótimo de  $K_5$  em (c) obtido a partir do desenho em 2-páginas de (a) e (b). Desenho em 2-páginas de  $K(6, 2)$  em (d) obtido a partir de (c) pelo algoritmo com 61 cruzamentos.

### 3. O limite superior

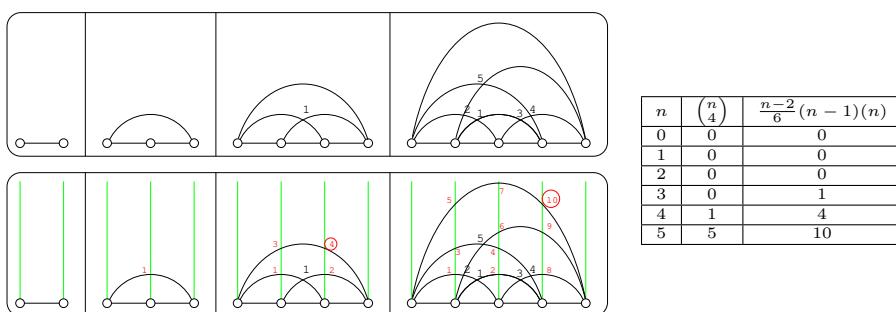
de Klerk, E., D. V. Pasechnik e G. Salazar [de Klerk et al. 2013] apresentaram a técnica do *slope* que realiza simultaneamente o número de cruzamentos e o número de cruzamentos em 2-páginas exatos do grafo completo  $K_n$ . Como um exemplo para o leitor mostramos um desenho ótimo de  $K_5$  na Figura 1(a-c). Usando a técnica do slope, Ábrego e outros estabeleceram o Teorema 4.

**Teorema 4** [*Ábrego et al. 2013*]  $\nu(K_n) = \nu_2(K_n) = \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$ .

Claude Berge [Berge 1973] projetou um algoritmo que dado um inteiro  $n$  permite definir uma partição em cliques  $C_1, C_2, \dots, C_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$  e um ciclo Hamiltoniano, que usa a ordem das cliques, em um grafo de Kneser  $K(n, 2)$ ,  $n \geq 6$ . Nossa desenho  $D(K(n, 2))$ ,  $n = 2q \geq 6$  é construído com o algoritmo.

1. Tome um desenho  $D(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1})$  em 2-páginas de  $K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$  do algoritmo de [de Klerk et al. 2013].
2. Substitua cada vértice de  $K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$  por  $q = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$  vértices correspondentes a clique  $C_i, i \in \{1, 2, \dots, 2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1\}$  com a ordem do ciclo Hamiltoniano do algoritmo de [Berge 1973].
3. Ligue as arestas entre os vértices de duas cliques de acordo com a posição geométrica das arestas de  $D(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1})$ .
4. Coloque o desenho em 1-página de  $K_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$  de [de Klerk et al. 2013] para cada clique  $C_i$  no semiplano com o menor número de arestas que sai do vértice  $C_i$  de  $D(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1})$ .

Vamos dividir os cruzamentos das arestas de  $D(K(n, 2))$  em 5 parcelas  $cr(K(n, 2)) = cr_1(n) + cr_2(n) + cr_3(n) + cr_4(n) + cr_5(n)$ . Cruzamentos herdados do  $K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} - (cr_1(n))$ ; Cruzamentos internos da clique  $C_i - (cr_2(n))$ ; Cruzamentos entre as arestas internas de um  $C_i$  com as outras arestas - ( $cr_3(n)$ ); Cruzamentos entre as arestas que ligam 2 cliques  $C_i$  e  $C_j, i \neq j - (cr_4(n))$ ; Cruzamentos entre as arestas que ligam a clique  $C_i$  a  $C_j$  com as arestas que ligam  $C_i$  a uma clique  $C_k, i \neq j, i \neq k, k \neq j - (cr_5(n))$ . [de Klerk et al. 2013] estabeleceram que cada conjunto de 4 vértices de  $K_n$ ,  $n \geq 4$  produz exatamente 1 cruzamento no desenho de  $K_n$  em 1-página (Figura 2).



**Figura 2.**  $\binom{n}{4}$  cruzamentos nos desenhos de 1-página de  $K_2, K_3, K_4$  e  $K_5$  e  $\frac{(n-2)(n-1)(n)}{6}$  cruzamentos com retas verticais.

**Teorema 5** [*de Klerk et al. 2013*]  $\nu_1(K_n) = 0$ , se  $n \leq 3$  e  $\nu_1(K_n) = \binom{n}{4}$ , se  $n \geq 4$ .

**Teorema 6**  $cr_1(n) = (q(q-2))^2 \nu_2(K_{n-1}) = (q(q-2))^2 \frac{1}{4} \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor = \frac{q^2(q-1)^2(q-2)^4}{4}$ , onde  $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$ .

**Prova:** O valor de  $cr_1(n)$  será o produto do número de cruzamentos de  $D(K_{n-1})$  vezes o quadrado do número de arestas  $q(q-2)$  que substitui 1 aresta de  $K_{n-1}$ . Que totalizam  $cr_1(n) = (q(q-2))^2 \nu_2(K_{n-1}) = (q(q-2))^2 \frac{1}{4} \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor$ .  $\square$

**Teorema 7**  $cr_2(n) = (n) \binom{q}{4} = \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q+1)}{24}$ , onde  $n = 2q + 1 \geq 7, q \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 8**  $cr_2(n) = (n-1) \binom{q}{4} = \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(2q-1)}{24}$ , onde  $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$ .

**Prova:** Como cada clique  $C_i$  corresponde a um  $K_q$  desenhado em 1-página, estes cruzamentos serão dados por  $cr_2(n) = (n-1) \binom{q}{4}$ .  $\square$

**Teorema 9** O desenho  $D(K_{2q-1})$  de  $K_{2q-1}$  em 2 páginas de [de Klerk et al. 2013] tem

1.  $q$  vértices com  $q-1$  arestas para cima e  $q-1$  arestas para baixo e
2.  $q-1$  vértices com ou (a)  $q-2$  arestas para cima e  $q$  arestas para baixo, ou (b)  $q-2$  arestas para baixo e  $q$  arestas para cima.

**Teorema 10**  $cr_3(n) = \frac{q(q-1)^3(q-2)^2}{3}$ , onde  $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$ .

Dado um par de retas paralelas  $(s^1, s^2)$  e  $p$  pontos  $a_1, a_2, \dots, a_p$  serem  $p$  pontos com  $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ , um *monte* pelos  $p$  pontos de *grau*  $s$  é um conjunto de  $p$  curvas tal que existem  $s$  curvas cuja única interseção é o vértice  $a_i, i \in \{1, \dots, p\}$ . Dados  $p, r, s$  3 inteiros positivos com  $p \geq 2$ . Dados  $a_1, a_p$  dois pontos em uma espinha. Dadas  $r$  pares  $(s_1^1, s_1^2), \dots, (s_r^1, s_r^2)$ , de semiretas paralelas não coincidentes passando, respectivamente por  $a_1, a_p$  contidas em um semiplano definido pela espinha. Uma *malha*  $(p, r, s)$  é um conjunto com  $p$  pontos  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , com  $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ , mais  $r$  pares  $(s_1^1, s_1^2), \dots, (s_r^1, s_r^2)$ , de semiretas paralelas não coincidentes passando, respectivamente por  $a_1, a_p$  e  $s$  montes para cada  $(s_i^1, s_i^2)$ .

**Teorema 11**  $cr_4(n) \leq \frac{q(q-1)(2q-1)(q^3-2q^2-7q+16)}{4}$ , onde  $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 12**  $cr_5(n) = \frac{q(q-1)^3(q-2)^2(2q-3)}{2}$ , onde  $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 13** Se  $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$ , então  $\nu_2(K(n, 2)) \leq \frac{6q^8 - 36q^7 + 62q^6 + 84q^5 - 563q^4 + 1034q^3 - 801q^2 + 214q}{24}$ , onde  $n = 2q \geq 6, q \in \mathbb{N}$ .

## Referências

- Ábrego, B. M., Aichholzer, O., Fernández-Merchant, S., Ramos, P., and Salazar, G. (2013). The 2-page crossing number of  $K_n$ . *Discret. Comput. Geom.*, 49(4):747–777.
- Berge, C. (1973). *Graphs and hypergraphs*. North-Holland Pub. Co.
- de Klerk, E., Pasechnik, D. V., and Salazar, G. (2013). Improved lower bounds on book crossing numbers of complete graphs. *SIAM J. Discret. Math.*, 27(2):619–633.
- Faria, L., de Figueiredo, C. M. H., Richter, R. B., and Vrt'o, I. (2016). The same upper bound for both: The 2-page and the rectilinear crossing numbers of the  $n$ -cube. *J. Graph Theory*, 83(1):19–33.
- Hlinený, P. (2006). Crossing number is hard for cubic graphs. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 96(4):455–471.
- Kneser, M. (1955). Aufgabe 360, Jber. Deutsch. Math. Verein, 58:27.
- Székely, L. A. (1997). Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry. *Combinatorics, Probability and Computing*, 6(3):353–358.

## How to draw a $K(n, 2)$ Kneser graph?<sup>†</sup>

A. D. R. de Sousa<sup>1\*</sup> J. C. Carneiro<sup>1</sup> L. Faria<sup>1</sup> M. V. Pabon<sup>2</sup>  
<sup>1</sup> UERJ <sup>2</sup> Université Paris-13

**Keywords:** Kneser graph  $K(n, k)$ , crossing number, 2-page crossing number

Take a 2-page drawing  $D(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1})$  of the complete graph  $K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$  from algorithm (de Klerk, Pasechnik and Salazar (2013)) (a), (b) and (c). Replace each vertex of  $K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$  by  $q = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$  vertices corresponding to clique  $C_i, i \in \{1, 2, \dots, 2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1\}$  with the order of the Hamiltonian cycle from algorithm (Berge (1973)). Add the edges between the pair of vertices of each 2 cliques according to the geometric position of the  $D(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1})$  edges. Place the 1-page drawing of  $K_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$  from (de Klerk, Pasechnik and Salazar (2013)) for each clique  $C_i$  on the half-plane with the fewest outgoing edges of the vertex  $C_i$  of  $D(K_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1})$  (d).

Let  $v(G)$  and  $v_2(G)$  be the minimum number of crossings for a drawing  $D(G)$  of  $G$ , respectively, in the plane, and into a 2-page drawing, we prove that  $\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq v(K(n, 2)) \leq v_2(K(n, 2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^{23}} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^{23}} + \frac{517n^3}{2^{23}} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^3}$ .

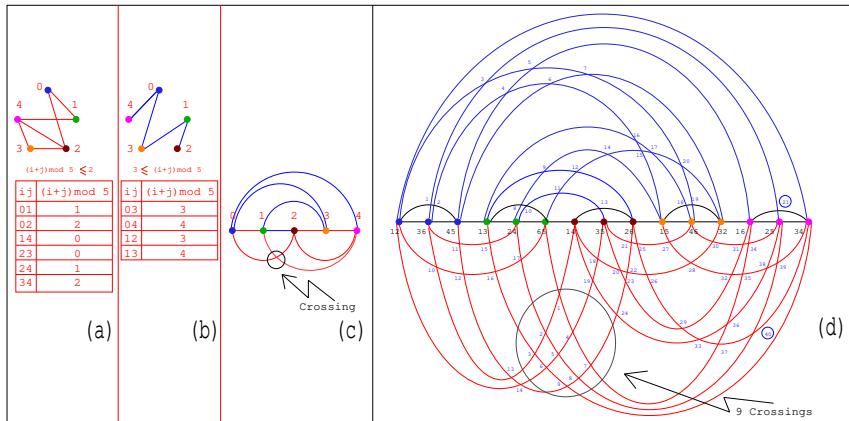


Figure 1 2-page drawing construction of  $K_5$  in (a) and (b), and 2-page drawings of  $K_5$  in (c) and  $K(6, 2)$  in (d).

<sup>†</sup> CAPES 001, CNPq 406036/2021-7, 308654/2018-8, 152340/2021-1, FAPERJ E26/202.902/2018.

## Sobre o número de cruzamentos do grafo de Kneser $K(n, 2)$

A. D. R. de Sousa<sup>1</sup>, J. C. Carneiro<sup>1</sup>, L. Faria<sup>1</sup>, e M. V. Pabon<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) Rio de Janeiro, RJ - Brasil

<sup>2</sup> Université Paris-13, Sorbonne Paris Cité LIPN, CNRS UMR7030, Villejuif, France

*antoniodrsousa@gmail.com, jonas.uerj@yahoo.com.br, luerbio@ime.uerj.br,  
valencia@lipn.univ-paris13.fr*

Martin Kneser [3] definiu os grafos de Kneser em 1955. Dados  $n, k$  dois inteiros com  $0 < k \leq n$  o grafo de Kneser  $K(n, k) = (V, E)$  tem  $V = \binom{n}{k}$  – a coleção dos subconjuntos de  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  com  $k$  elementos e existe uma aresta  $uv \in E$  se e somente  $u \cap v = \emptyset$ . O grafo  $K(n, k)$  possui inúmeras aplicações na classificação de fenômenos da combinatória e da teoria dos grafos como na partição de ciclos de um grafo completo. Algumas propriedades dos grafos de Kneser são que  $|V(K(n, k))| = \binom{n}{k}$ ,  $|E(K(n, k))| = \binom{n}{k} \binom{n-k}{2}/2$ ,  $K(n, k)$  é um grafo  $\binom{n-k}{k}$ -regular, com número de clique  $\omega(K(n, 2)) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$  e partição mínima de cliques  $\lambda(K(n, 2)) = 2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ . O *número de cruzamentos*  $\nu(G)$  de um grafo  $G = (V, E)$  é o menor número de cruzamentos em um desenho  $D(G)$  no plano de  $G$ . Dada uma reta  $r$ , chamada *espinha*,  $p \geq 1$ , e  $S_1, \dots, S_p$  serem  $p$  semiplanos distintos limitados por  $r$ . Um *desenho* de  $G = (V, E)$  em  $p$ -páginas tem os vértices de  $V$  desenhados em  $r$  e cada aresta de  $G$  é desenhada em um  $S_1, \dots, S_p$ . O *número de cruzamentos em p-páginas*  $\nu_p(G)$  de  $G$  é o menor número de cruzamentos em um desenho de  $G$  em  $p$  páginas. O número de cruzamentos é conhecido exatamente para pouquíssimas classes de grafos, entre elas  $K_n$  os grafos completos [1] e alguns limites para  $Q_n$  os  $n$ -cubos [2]. O único resultado conhecido para os grafos de Kneser é que o grafo de Petersen -  $K(5, 2)$  tem  $\nu(K(5, 2)) = \nu_2(K(5, 2)) = 2$ . Nossa contribuição principal nesse artigo é a função de cruzamentos  $\nu(K(n, 2)) = \nu_2(K(n, 2)) = \Theta(n^8)$  e o desenho que a realiza. O número de cruzamentos do desenho não é ótimo, mesmo para  $K(6, 2)$ . Com o auxílio do computador encontramos um desenho com 49, nossa construção possui 61 e nosso limite superior prevê 83 cruzamentos.

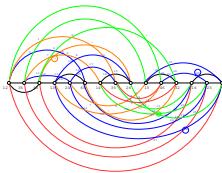


Figura 1: Um desenho em 2 páginas de  $K(6, 2)$  com 61 cruzamentos.

Nós provamos que se  $n = 2q \geq 6$ , então  $\frac{n^8}{2^{13}} - 9\frac{n^7}{2^{13}} - \frac{n^6}{2^{10}} - \frac{n^4}{2^7} - \frac{n^3}{2^9} \leq \nu(K(n, 2)) \leq \nu_2(K(n, 2)) \leq \frac{n^8}{2^{10}} - \frac{3n^7}{2^8} + \frac{31n^6}{2^8} + \frac{7n^5}{2^6} - \frac{563n^4}{2^7} + \frac{517n^3}{2^5} - \frac{267n^2}{2^5} + \frac{107n}{2^3}$ . Como os grafos completos  $\nu_2(K(n, 2)) = \Theta(|V(K(n, 2)|^4) = \nu(K(n, 2))$  cujo termo líder  $\ell(n)$  satisfaz  $\frac{1}{2^{13}} \leq \ell(n) \leq \frac{1}{2^{10}}$ .

**Teorema 1.** Se  $n = 2q \geq 6$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , então  $\nu_2(K(n, 2)) \leq \frac{6q^8 - 36q^7 + 62q^6 + 84q^5 - 563q^4 + 1034q^3 - 801q^2 + 214q}{24}$ , onde  $n = 2q \geq 6$ ,  $q \in \mathbb{N}$ .

## Referências

- [1] B. M. ÁBREGO, O. AICHHOLZER, S. FERNÁNDEZ-MERCHANT, P. RAMOS, AND G. SALAZAR, *The 2-page crossing number of  $K_n$* , Discret. Comput. Geom., 49 (2013), pp. 747–777.
- [2] L. FARIA, C. M. H. DE FIGUEIREDO, R. B. RICHTER, AND I. VRT’O, *The same upper bound for both: The 2-page and the rectilinear crossing numbers of the n-cube*, J. Graph Theory, 83 (2016), pp. 19–33.
- [3] M. KNESER, *Aufgabe 360*, Jber. deutsch. math. Verein, 58 (1955), p. 27.