PROJE RAPORU

Geometrik Serilerin Görselleştirme Metoduyla Hesaplanması ve Genel Çözüm Geliştirilmesi

İçindekiler

1. Giriş

Matematik, insanların gördüğü uzaya göre belirledikleri aksiyomları inceleyen bir bilim dalıdır. Yıllar içinde matematik bilimi şekillenmiş ve birçok önemli bilim adamı tarafından geliştirilmiştir. Matematiksel seriler ise yıllar boyu gelişen matematik biliminin ortaya çıkardığı konulardan bir tanesidir. Günümüze kadar, matematiği kullanan bilim dallarındaki problemlere çözümler getiren bu konu; evren bilimleri için büyük önem taşımaktadır. Geometrik seriler ise matematiğin seriler konusunun bir alt başlığında bulunmaktadır.

1.1 Geometrik Seriler ve Genel, Özel Durumlar

Matematikte geometrik seri art arda gelen iki terimi arasında sabit bir oran bulunan seridir (Knopp, K., Infinite Sequences And Series). Örneğin:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\cdots$$

serisi bir geometrik seridir çünkü ilk terim dışında tüm terimler kendinden bir önceki terime sabit bir katsayı “r” ile bağlıdır. Bu seriye terimler eklendikçe sonsuz seri bir değere yakınsayacaktır. Bunun gibi geometrik seriler, sonlu toplamı olan sonsuz serilere verilebilecek en basit örneklerdendir. Bu seriye benzer şekilde, sonsuza kadar terimler eklendikçe belli bir değere yakınsayan birçok geometrik seri vardır. Böyle serilerin yakınsaması tarih boyunca kalkülüsün gelişiminde büyük bir öneme sahiptir. Aynı zamanda bu tür yakınsamalar kullanılarak fizik, mühendislik, biyoloji, ekonomi ve finans gibi alanlarda birçok veriler elde edilmiştir (Knopp, K., Infinite Sequences And Series).

Genel ve özel durum için yapılan çözümler şöyle tanımlanır:

Özel Durum için Çözüm: Çözümün, denklemlerdeki değişkenlerin belirli sayısal değerine göre yapılmasıdır.

Genel Durum için Çözüm: Çözümün, denklemlerdeki değişkenlerin belirtilen sınırlardaki herhangi bir değerine göre yapılmasıdır.

1.2 Problem ve Soru

Buna benzer geometrik serilerin yakınsadığı değerler hesaplanmış olmasına rağmen; diğer matematik konularına kıyasla kanıtlama ve hesaplama yolları oldukça kısıtlı ve karmaşıktır. Bundan dolayı bu önemli konunun anlaşılması, yeni öğrenen bireyler için diğer konulardan çok daha zor olmaktadır. Aynı zamanda, matematiğin bu önemli konusunda kanıt sayısının yetersiz ve kısıtlı olması büyük bir eksikliktir. Bu eksiklikler ve sorunlardan yola çıkarak “Geometrik serilerin hesaplanması için daha kolay ve yeni bir yol geliştirilebilir mi ve bu yol matematiğe ne tür katkılar sağlar ?” sorusuna cevap aranmıştır.

1.3 Amaç

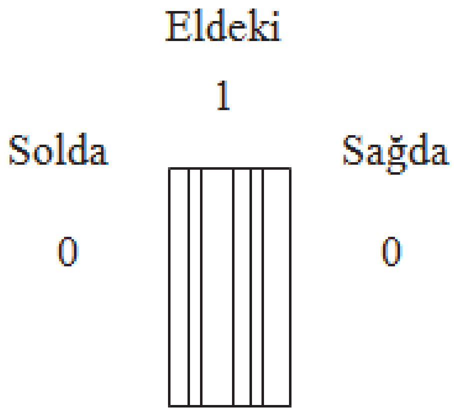
Projede çözülmek istenen temel iki sorun, geometrik serilerin hesaplanmasında kullanılan matematiksel yöntemlerin basit ve çeşitli olmaması, ve karışık yöntemlerin eğitim ve öğretimi zorlaştırmasıdır. Bu sorunlar doğrultusunda yapılacak projenin amacı, geometrik serilerin özelliklerinin kapsamlı bir şekilde incelenmesinin ardından; bu serilerin yeni yöntemler kullanılarak hesaplanması olarak belirlenmiştir.

Yeni bulunan hesaplama yöntemi, hem matematiğe yeni bir bakış açısı geliştirecek; hem de yöntemin efektif ve basitliğinden dolayı eğitim öğretime katkı sağlayacaktır. Bu katkının artması için, çalışma boyunca matematikte öğretme ve öğrenmede en etkili yöntemlerden biri kullanılacaktır. Bu bağlamda, hem matematiğin bu konusuna yeni bir bakış açısı geliştirilecek; hem de konuyu öğrenmek isteyen öğrencilerin ufukları açılacaktır.

2. Yöntem

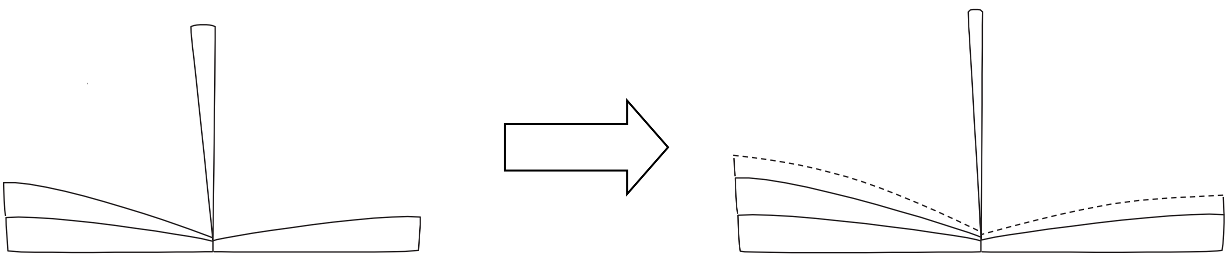
2.1 Geometrik Serilerin Hesaplanması İçin Görselleştirme Metodu

Bu bilimsel çalışmadaki temel amaç, hesaplama yöntemleri kısıtlı ve nispeten karmaşık olan geometrik seriler konusuna farklı bir hesaplama yöntemiyle yeni bir bakış açısı geliştirmektir. Aynı zamanda bulunan metodun, eğitim ve öğrenimi kolaylaştıracak nitelikte olması gerekmektedir. Bu iki amaç göz önünde bulundurularak geliştirilen yeni yöntemde, eğitim ve öğrenimin kolaylaştırması için; matematik öğrenmede oldukça etkili bir metot olan görselleştirme metodu kullanılmıştır.



Şekil Y1: Yöntemde kullanılan matematiksel model

Kullanılan metotta, her bir yeni serinin geliştirilmesi bir matematiksel kitap modellemesi yapılmıştır. Öncelikle, kitabın tüm sayfaları matematiksel olarak bir sayıya eşitlenmiştir. Ardından kitaptaki sayfaların belli oranlara göre sağa ve sola bırakılmasıyla sınırlı seriler elde edilmiştir. Son olarak da, sağa ve sola bırakma işleminin sonsuza kadar tekrar edilmesiyle sonsuz geometrik seriler elde edilmiştir.



Şekil Y2: Yöntemin 1. ve 2. aşamaları

Yöntemin son aşaması ise elde edilen sonsuz geometrik serilerin hesaplanmasıdır. Bunu yapmak için, sağa ve sola bırakılan sayfalar arasında baştan belirlenmiş olan bir oran ve toplam sayfaların hangi değere eşit olduğunun bilinmesi kullanılacaktır. Sağ tarafa atılan sayfalar ile sol tarafa atılan sayfaların oranı ve toplam sayfaların eşit olduğu matematiksel değer değiştirilerek birçok farklı seri hesaplanacaktır.

Birçok seri hesaplandıktan sonra, serilerin birbirleriyle ilişkilerinin incelenmesi yapılmıştır. Bu ilişki bir serinin diğer seriyi belli bir katsayıya bağlı olarak içermesi ya da bir serinin diğer serinin bir kısmını içermesi olabilir. Böyle ilişkiler kurularak, birçok farklı serilerin hesaplaması yapılmıştır. Bu yöntemlerin hepsinin kullanılmasıyla neredeyse bütün geometrik seriler elde edinilip hesaplanabilir. Böylece yeni genel sonuçlara da ulaşılabilmektedir.

Genel ve özel durumlar için ulaşılan denklemler, bilgisayardan hesaplama yapılarak kontrol edilmiştir. Her bir seri için kodlar yazılmış ve kodlarla hesaplanan sonuçlar, görselleştirme yöntemiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu işlem yapılırken Python 3.5 yazılım dilinden faydalanılmıştır.

2.2 Görselleştirme ile Öğrenimin Matematikteki Etkisi

Bu çalışmadaki kanıtlarda görselleştirme metodu kullanılmıştır. Buna bağlı olarak, çalışma sırasında "Bu yöntemin ve çalışmanın eğitime katkısı olabilir mi ?" sorusu üstüne düşünülmüştür. Bu amaçla, görselleştirme metodunun matematik öğrenmede ne kadar etkili olduğunu öğrenmek amacıyla kaynaklar taranmış, aynı zamanda bu konu hakkında bilimsel bir çalışma yapılmıştır.

Yapılan sosyal deneyde, lise, 7 ve 8'inci sınıf öğrencileri test edilmiştir. Öncelikle 10 sorudan oluşan bir anket yapılmış ve öğrencilerin görsel yöntemlere ne kadar alışkın olduğu ve alışkın olanların yöntemi ne kadar beğendiği; öğrenci açısından gözlemlemiştir. Ardından aynı kademelerden, bilmedikleri birer konu bir sınıfa klasik yöntemle anlatılmış; bir sınıfa da görselleştirme metoduyla anlatılmıştır. Yapılan çalışmaların ardından elde edilen veriler analiz edilmiştir ve sonuçlar üstünde yorumlar yapılmıştır.

Sosyal deneyin ardından sonuçlar, daha önceden yapılmış olan çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılmış ve ne kadar uyuştuğu incelenmiştir. Bunun üstünden yorumlar yapılmış ve sonuçlara ulaşılmıştır.

3. Bulgular

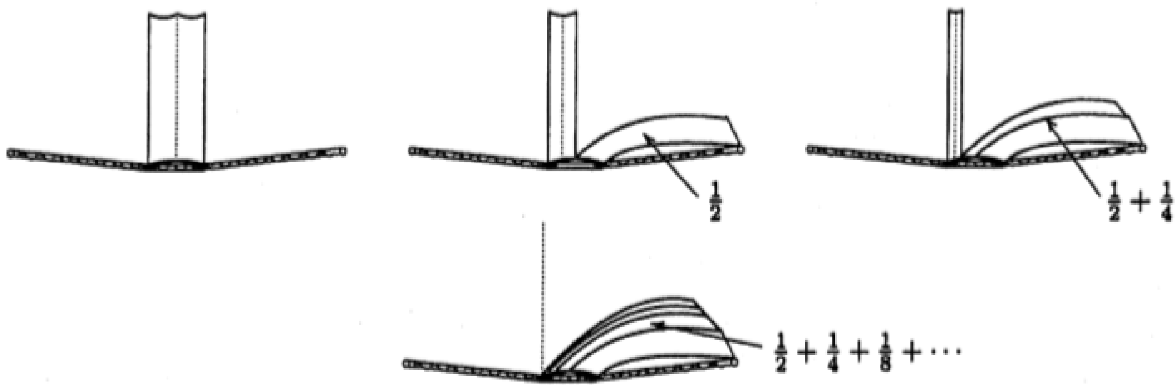
3.1 Görselleştirme Yöntemiyle Geometrik Serilerin Hesaplanması

3.1.1 Yöntemin Açıklanması ve Basit Bir Örnekte Gösterilmesi

Öncelikle, yöntemin tam olarak açıklanması için basit bir örnek ele alınmıştır. Bu basit gösterim için, ilk olarak $r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots\ ;\ 0 < r < 1$ formundaki bir geometrik seri incelenmiştir. Örnek olarak $r = \frac{1}{2}$ alınmış ve seri sonsuza kadar tamamlandığında σ sayısına yakınsadığı kabul edilmiştir. Bu durumda elimizdeki seri, denklem 1'deki gibi yazılır.

$$\sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots \quad (1)$$

Yöntemde belirtildiği üzere, görselleştirmenin temel yapısını bir kitap oluşturmaktadır. Bu durumda, yöntemi uygulamak için bir kitap ele alınmış ve tüm sayfaları matematiksel olarak 1 değerine eşitlenmiştir. Sonrasında sayfaların sağa veya sola belli oranda bırakılma işlemi gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmadaki örneklerde bu oran, genelde ilk başta alınan r sayısına ve serinin türüne göre belirlenecektir. Bu örnekte, daha elverişli olacağı için oran 1/2 olarak belirlenmiştir. İlk olarak, tümünün toplamı 1'e eşitlenen sayfaların yarısı sağa bırakılmıştır. Bu işlemin sonunda elde 1/2, sağ tarafta 1/2 sayfa kalmış olacaktır. Ardından işlem tekrarlanır. Böylece elde 1/4, sağ tarafta 1/2+1/4 sayfa kalmış olacaktır. Bir kere daha tekrarlanır. Bu sefer de elde 1/8, sağ tarafta 1/2+1/4+1/8 sayfa bırakılmış olunacaktır.



Şekil 1: Çözümün $r = \frac{1}{2}$ oranı için kitap ile görsel yaklaşım

(College Mathematics Journal, A Visual Approach to Geometric Series, 2004)

Bu işlem sonsuza kadar tekrarlandığında elde hiç sayfa kalmamışken; sağ tarafta bu problemde incelenen geometrik seri elde edilmiştir. Tüm sayfaların matematiksel olarak 1'e eşit olması kullanılarak denklem 1'deki σ geometrik serisinin hangi değere yakınsadığı hesaplanacaktır. Şekil 1'de de görüldüğü üzere, son durumda kitabın tüm sayfaları sağ tarafta olduğuna göre, elimizdeki sonsuz serinin değeri 1 sayısına yakınsamaktadır. Sonuç olarak, denklem 2'deki gibi bir sonuca varılacaktır.

$$\sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ \dots = 1 \ (2)$$

3.1.2 Sonuçların Python 3.5 Dili Kullanılarak Kontrol Edilmesi

Sonrasında, hesaplanmış olan örnek seri Python 3.5 programlama dili kullanılarak kontrol edilmiştir. Kod yazılırken, geometrik serilerin tanımından faydalanılmıştır. Geometrik serilerin tanımına göre, toplama eklenecek her bir terimin arasında sabit bir oran vardır. Bu oran kullanılarak bir döngü yazılmış ve döngünün her bir dönüşünde sayılar toplama eklenmiştir. Bu algoritmayla yazılmış kod Şekil 2'deki gibidir.

```
def toplam():
    toplam = 0
    i=1
    while i<100:
        f=2**i
        toplam += (1/f)
        i+=1

    return toplam

print (toplam())
```

Şekil 2: Sonuçların kontrol edilmesi için hesaplama yapan Python 3.5 kodu

Kod derlenip çalıştırıldığında, ekrana bulduğu sonucu verecektir. Ekrana Şekil 3'deki gibi bir sonuç gelmiştir.

```
1.0
>>> |
```

Şekil 3: Şekil 2'deki kodun çıktısı

Sonuçtan da görüldüğü üzere bulunan sonuç, kod ile hesaplanan değerler ile uyuşmaktadır. Böylece elde edilen verilerin doğruluğu gösterilmiştir.

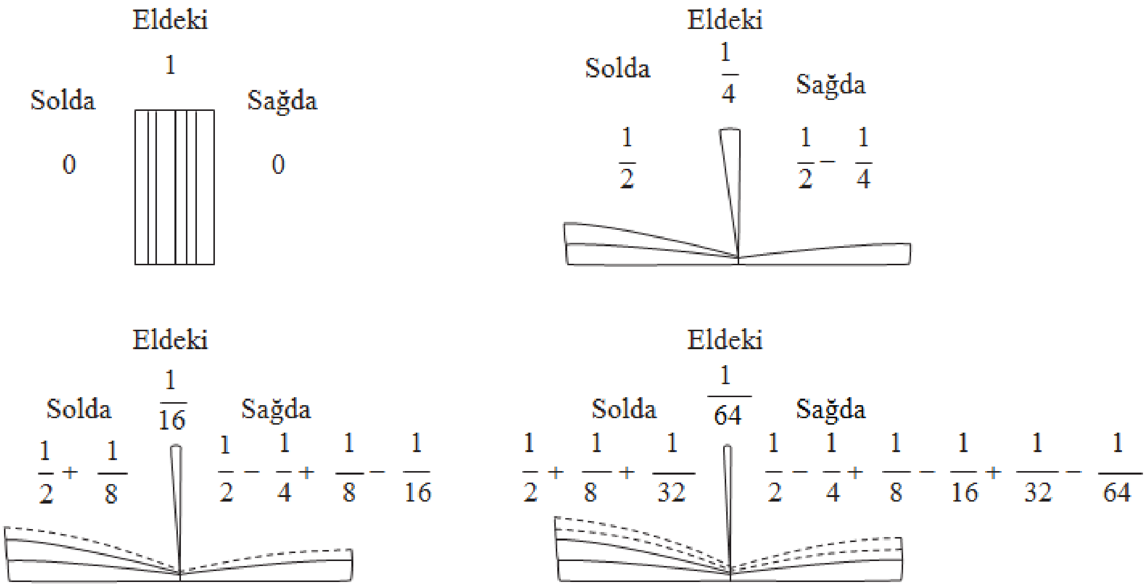
Denklem 2'deki gibi hesaplanmış ve Python 3.5 programlama dili kullanılarak kontrol edilmiş olan bu örnekte, $r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots\ ;\ 0 < r < 1$ şeklindeki bir seri incelenmiştir. Bu örnek, geliştirilen yöntemin en basit uygulamalarından biridir. Yöntemin farklı uygulamalarında daha kompleks seriler incelenecek; hem sağa hem de sola farklı oranlarda sayfalar yollanarak, birçok farklı geometrik seriler elde edinilecek ve hesaplanacaktır. Elde edilen geometrik seriler için farklı kodlar yazılarak, bu örnekteki gibi kontrol edilecektir.

3.1.3 Görselleştirme Metodu Uygulaması 1

Yöntemin her bir uygulamasında yapıldığı ve yapılacağı gibi, öncelikle görselleştirilecek bir geometrik seri tanımlanmıştır. Bu uygulamada serinin tipi $r - r^2 + r^3 - r^4 + r^5 - \cdots\ ; 0 < r < 1$ şeklinde belirlenmiştir. İlk örnek olarak $r = \frac{1}{2}$ alınmıştır ve seri oluşturulmuştur. Seri sonsuza kadar devam ettirildiğinde τ değerine yakınsadığı kabul edilmiştir.

$$\tau = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \cdots \text{(3)}$$

İlk örnekte olduğu gibi tüm sayfaları matematiksel olarak 1'e eşit olan bir kitap ele alınmıştır. Sayfalar belli bir orana göre 3 parçaya ayrılmıştır. Sağ ve sol taraflara atılacak sayfaların oranları, her bir aşamada sağ tarafa, sol tarafa atılanın yarısı kadar sayfa atılacak şekilde belirlenmiştir. İlk olarak sol tarafa sayfaların 1/2'si, sağ tarafa sayfaların 1/2-1/4 kadarı atılmıştır. Bu durumda elde de sayfaların 1/4'ü kalmış olacaktır. Bu işlem yeni değerler üzerinden tekrarlanmıştır. İkinci işlemin sonunda, sağ tarafta sayfaların 1/2 -1/4+1/8-1/16'sı; sol tarafta ise sayfaların 1/2+1/8'i kalmıştır. Elde ise toplam sayfaların 1/16'sı kadar sayfa kalmış olacaktır. İşlemin tekrarlanmasıyla Şekil 4'deki bir görsel elde edilecektir.



Şekil 4: Metodun ilk uygulamasının bir kitapla görselleştirmesi

İşlem sonsuza kadar devam ettirilmiş, sağ ve sol tarafta geometrik serilere ulaşılmıştır. Ortada hiçbir sayfa kalmamış ve sırayla sağ tarafta ve sol tarafta denklem 4 ve 5'teki gibi seriler elde edilmiştir.

$$\tau = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \cdots \ (4)$$

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \frac{1}{512} + \cdots \ (5)$$

Ortada hiç sayfa kalmadığına göre, elde edilen bu iki serinin toplamı matematiksel olarak 1 sayısına eşit olacaktır. Her bir aşamada sol tarafa bırakılan sayfalar sağ tarafa bırakılanın iki katı olarak belirlenmişti. Bundan çıkarak, ρ sayısının τ sayısına oranı 2 olarak bulunmuştur. Böylece denklem 6 ve 7 elde edilmiştir:

$$\tau + \rho = 1 \ (6)$$

$$\rho = 2\tau \ \ (7)$$

Elde edilen denklemler çözülürse τ ve ρ serilerinin sayısal değerleri hesaplanmış olunacaktır.

$$\tau = \frac{1}{3} \ ; \ \rho = \frac{2}{3}$$

Bulunan sonuçlar seri halinde gösterildiğinde denklem 8 ve 9 elde edilmiştir.

$$\tau = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{3} \ \ (8)$$

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \frac{1}{512} + \cdots = \frac{2}{3} \ (9)$$

Böylece bu geometrik serinin de yakınsadığı değerler hesaplanmıştır. Hesaplanan iki ifade, denklem 8 ve 9 sigma notasyonu kullanılarak gösterilmiş, böylece iki tane eşitlik elde edilmiştir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2^{n+1}} = \frac{2}{3}$$

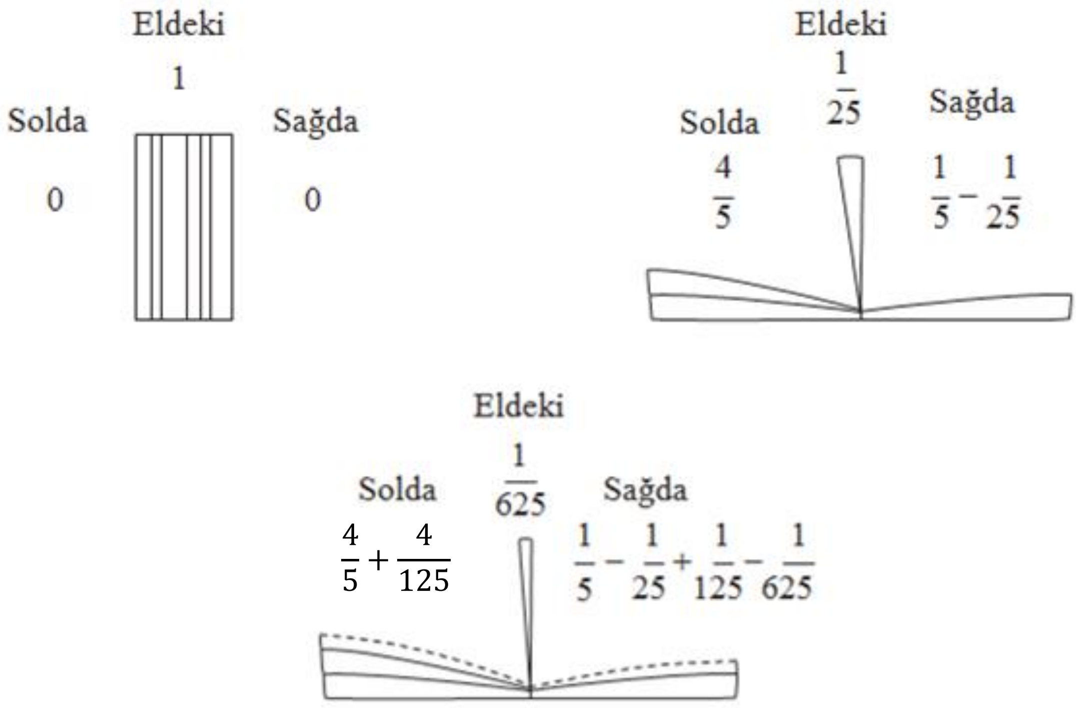
Böylece $r = \frac{1}{2}$ için $r - r^2 + r^3 - r^4 + r^5 - \cdots \ ; 0 < r < 1$ serisinin yakınsadığı değer hesaplanmıştır.

3.1.4 Görselleştirme Metodu Uygulaması 2

Uygulamanın daha iyi incelenmesi için $r = \frac{1}{5}$ alarak bir örnek daha çözümlenmiştir. Bu örnekte denklem 10'da belirtildiği gibi bir seri ele alınmıştır.

$$\gamma = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125} - \frac{1}{625} + \cdots (10)$$

Yöntemin uygulanması için her zamanki gibi tüm sayfaları matematiksel olarak 1 sayısına eşit olan bir kitap ele alınmıştır. İlk aşamada sayfalar 3 parçaya bölünmüştür. Sayfaların 1/5-1/25 kadarı sağa, 4/5 kadarı sola atılmıştır. Bu durumda elimizde de sayfaların 1/25 kadarı kalmış olacaktır. İşlemin tekrarlanmasıyla, sayfaların 1/625'i elde kalmış, 1/5-1/25+1/125-1/625 kadarı sağa gitmiş ve 4/5+4/125 kadarı da solda kalmış olacaktır.



Şekil 5: $r = \frac{1}{5}$ örneği için kitap modellemesiyle görselleştirme

Açıkça görüldüğü üzere, işlem sonsuz kere tekrarlandığında, sağda ve solda sırayla şu seriler elde edilecektir:

$$\gamma = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125} - \frac{1}{625} + \cdots$$

$$\beta = \frac{4}{5} + \frac{4}{125} + \frac{4}{3125} + \cdots$$

Sağda ve solda elde edilen γ ve β serilerinin toplamının 1 olduğunu ve oranlarının 5 olduğunu bilinmektedir. Bu kullanarak basit matematiksel işlemlerle serilerin sonuçları hesaplanmıştır.

$$\beta + \gamma = 1$$

$$5\gamma = \beta$$

Denklemler çözüldüğünde γ ve β'nın sayısal değerleri bulunmuştur.

$$\gamma = \frac{1}{6}$$

$$\beta = \frac{5}{6}$$

Bulunan sonuçların seri olarak gösterilmesi ve ardından sigma notasyonunun kullanılmasıyla şöyle veriler elde edilmiştir:

$$\gamma = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125} - \frac{1}{625} + \cdots = \frac{1}{6}$$

$$\frac{\beta}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{125} + \frac{1}{3125} + \cdots = \frac{5}{24}$$

Sigma notasyonuyla gösterim yapıldığında sırayla bu verilere varılmıştır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n} = \frac{1}{6}$$

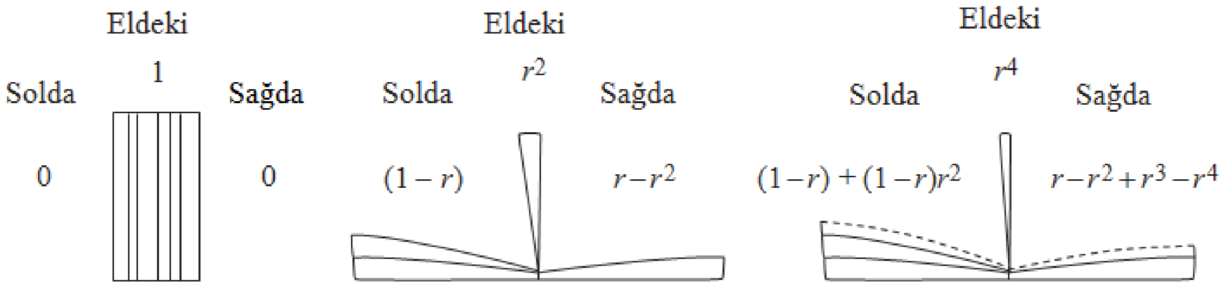
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2.5^n} = \frac{5}{6}$$

Elde edilen bu verilerden yola çıkarak, yöntemin ilk genel çözümü yapılmıştır.

3.1.5 Genel Çözüm 1

İlk uygulamada alındığı gibi $r - r^2 + r^3 - r^4 + r^5 - \cdots$; $0 < r < 1$ şeklinde bir seri ele alınmıştır. Bu durumda r sayısına herhangi bir değer verilmemiş ve verilen aralıktaki herhangi bir r sayısı için çözüm geliştirilmiştir. Her zamanki gibi ele bir kitap alınmış ve tüm sayfaları matematiksel olarak 1 sayısına eşitlenmiştir. İlk olarak, sayfaların $1 - r$ kadarı sola, $r(1 - r)$ kadarı sağa bırakılmıştır. Böylece, sağa ve sola bırakılan seriler arasındaki oran belirlenmiştir. Bu durumda elde de sayfaların r^2 kadarı kalmış olacaktır. Sonra işlem tekrarlanmıştır. Bu sefer sayfaların $(1 - r) + (1 - r)r^2$ kadarı solda, $r - r^2 + r^3 - r^4$

kadarı sağda kalmıştır. Elimizde ise sayfaların r^4 kadarı kalmış olacaktır.



Şekil 6: Genel durum 1 için görselleştirme yöntemi

İşlem sonsuza kadar tekrarlandığında, sağ ve sol tarafta sırayla ω ve φ serileri elde edilecektir.

$$\omega = r - r^2 + r^3 - r^4 + r^5 - \cdots$$

$$\varphi = (1-r) + (1-r)r^2 + (1-r)r^4 + (1-r)r^6 + \cdots$$

Yöntemin her adımında sağ tarafa sol tarafın r katı sayfa atılmıştı. Bu durumda φ ve ω arasındaki oran denklem 11'de olduğu gibi verilmiştir. Ayrıca φ ve ω serilerinin toplamının da 1 olduğu da bilinmektedir. O halde, herhangi bir r oran için serilerin sonuçları hesaplanmıştır.

$$\frac{\omega}{\varphi} = r \quad (11)$$

$$\varphi + \omega = 1 \quad (12)$$

Denklem 11 ve 12 çözüldüğünde sonuçlar elde edilmiştir.

$$\varphi = \frac{1}{1+r}$$

$$\omega = \frac{r}{1+r}$$

Bulunan sonuçlar seri halinde yazılıp, ardında sigma notasyonu kullanılarak gösterilmiş, böylece genel sonuçlara varılmıştır.

$$\varphi = (1-r) + (1-r)r^2 + (1-r)r^4 + (1-r)r^6 + \cdots = \frac{1}{1+r}$$

$$\omega = r - r^2 + r^3 - r^4 + r^5 - \cdots = \frac{r}{1+r}$$

Ve sonuçların sigma notasyonu formunda yazılmasıyla iki tane genel ifade ispatlanmıştır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{r^{-n}} = \frac{r}{r+1} \ ; \ 0 < r < 1 \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-r)(r^{n-1})\left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right) = \frac{1}{r+1} \ ; \ 0 < r < 1 \quad (14)$$

Tüm işlemler sonucu elde edilen serilerin sigma notasyonunda yazılması sonu iki tane genel çözüme ulaşılmıştır. Bunun ardından, bulunan genel sonuç Python 3.5 programlama dili kullanılarak doğrulanmıştır.

3.1.6 Genel Çözüm 1'in Bilgisayardan Hesaplamayla Doğrulanması

Elde edilen genel denklemlerin Python 3.5 programlama diliyle denenmesi için kodlar yazılmıştır. Kodlardaki temel prensip, sigma notasyonunun etkisi olmayacak kadar düşük bir sayıya gelinene kadar devam ettirilmesidir. Denklem 13'ü kontrol edecek kod Şekil 7'de verildiği gibidir.

```
"""07.12.2016
Python 3.5 de calistirilmasi gerekmektedir.
2016-2017 Tubitak Projesi icin sigma notasyonlarinin sonuclarinin dogrulugunu
kontrol eden python kodu"""
#Asagidaki fonksiyon r nin herhangi bir degeri icin S=(r-r^2)+(r^3-r^4)+.... seklinde
#uzayan sigma notasyonunu hesapliyor.
def sigma1():
    payda=int(input("Oranin paydasini giriniz: "))
    toplam,sayi=0,10000
    while sayi>=1:
        pay1=(-1)**(sayi+1)
        payda1=payda**sayi
        kesir=pay1/payda1
        toplam+=kesir
        sayi-=1
#sonsuza kadar gidiyorsa uzun uzun basamaklari yazdirmamasi icin gereken kod
    if len(str(toplam))>16:
        print(str(toplam)[0:16])
    else:
        print(toplam)
while True:
    sigma1()
```

Şekil 7: $r - r^2 + r^3 - r^4 + r^5 - \cdots$ şeklindeki geometrik serileri hesaplayan kod

Şekil 7'de verilen kodu kullanarak yukarıda çözümlenmiş olan $r = \frac{1}{5}$ ve $r = \frac{1}{2}$ için çözümler bulunacak ve doğruluğu kontrol edilecektir. Genel denkleme göre seriler hesaplandığında serilerin sonuçları denklem 15 ve 16'daki gibi bulunur:

$$r = \frac{1}{2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{r^{-n}} = \frac{r}{r+1} = \frac{1}{3} \quad (15)$$

$$r = \frac{1}{5} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{r^{-n}} = \frac{r}{r+1} = \frac{1}{6} \quad (16)$$

Aynı seriler bilgisayarda hesaplandığında ise Şekil 8'deki gibi veriler elde edilir.

```
Oranin paydasini giriniz: 2
0.3333333333333
Oranin paydasini giriniz: 5
0.1666666666666
```

Şekil 8: Şekil 7'deki kodun çıktısı

Şekil 8'de görüldüğü üzere payda 2 girildiğinde seri 1/3'e; payda 5 girildiğinde seri 1/6'ya yakınsamaktadır. Böylece uygulanan metodun ve çıkarılan 1. sonucun doğruluğu gösterilmiştir. Şimdi de ikinci çözüm için yazdığımız koda ve sonuçlara bakalım, 2. sonucun doğruluğunu test edelim.

İkinci çözüm test etmek için yazılan kod Şekil 9'daki gibidir.

```
Python 3.5 de calistirilmasi gerekmektedir.
2016-2017 Tubitak Projesi icin sigma notasyonlarinin sonuclarinin dogrulugunu
kontrol eden python kodu"""
#Asagidaki fonksiyon r'nin herhangi bir degeri icin (1-r)+(1-r)*r^2+(1-r)*r^4..
#seklinde uzayan sigma notasyonunu hesapliyor.
def sigma2():
    payda=int(input("Oranin paydasini giriniz: "))
    toplam=0
    for sayi in range(1,10000):
        if (1-(-1)**sayi)==0:
            toplam+=0
        else:
            toplam+=((1-(1/payda))*((1/payda)**(sayi-1))*((1-(-1)**sayi)/2))
#sonsuza kadar gidiyorsa uzun uzun basamaklari yazdirmamasi icin gereken kod
    if len(str(toplam))>16:
        print(str(toplam)[0:16])
    else:
        print(toplam)
while True:
    sigma2()
```

Şekil 9: $(1-\mathrm{r})+(1-\mathrm{r})r^2+(1-r)r^4+\cdots$ şeklindeki geometrik serileri hesaplayan kod

Şekil 9'da verilen kodun kullanılmasıyla çözümlenmiş olan $r=\frac{1}{5}$ ve $r=\frac{1}{2}$ örnekleri için çözümler bulunacak ve sonuçların doğruluğu kontrol edilecektir. Genel denkleme göre seriler hesaplandığında serilerin sonuçları denklem 17 ve 18'deki gibi bulunmuştur.

$$r=\frac{1}{2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2^{n+1}}=\frac{2}{3} \quad (17)$$

$$r=\frac{1}{5} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2.5^n}=\frac{5}{6} \quad (18)$$

Aynı seriler bilgisayarda hesaplandığında Şekil 10'daki sonuçlar elde edilmiştir.

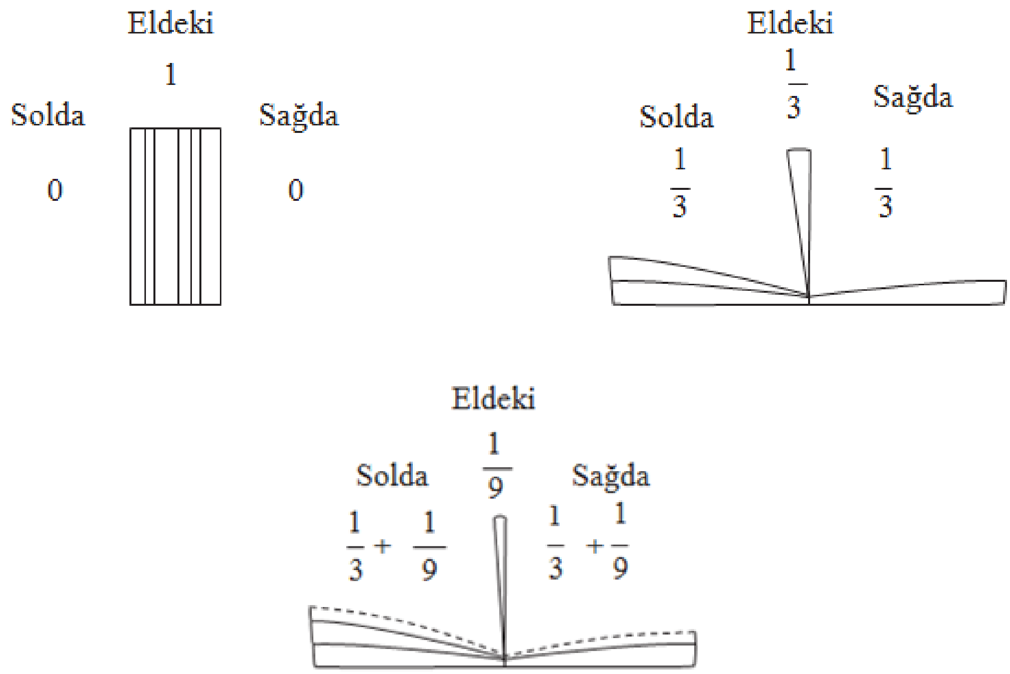
```
Oranin paydasini giriniz: 2
0.66666666666666
Oranin paydasini giriniz: 5
0.83333333333333
```

Şekil 10: Şekil 8'deki kodun çıktısı

Şekil 10'da görüldüğü üzere bilgisayar tarafından bulunan sonuçlar, $r=\frac{1}{5}$ için $\frac{5}{6}$; $r=\frac{1}{2}$ için $\frac{2}{3}$'tür. Yani, bilgisayarda bulunan sonuçlar ile genel denklemlerde bulunan sonuçlar uyuşmaktadır. Böylece 2. genel denklem de doğrulanmıştır.

3.1.7 Görselleştirme Metodu Uygulaması 3

Bu örnekte tekrar $r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots$ şeklinde bir seri ele alınmıştır ve $r = \frac{1}{3}$ olarak kabul edilmiştir. Öncelikle sayfaların üç eşit parçaya bölünmesiyle sayfaların 1/3 kadarı sağa, 1/3 kadarı sola atılmıştır. Bu durumda, elde de sayfaların 1/3'ü kalmıştır. Geometrik seriyi elde etmek için, her analizdeki gibi işlem sonsuza kadar tekrarlanmıştır. Son durumda elde hiç sayfa kalmamış, sağda ve solda eşit olan iki tane geometrik seri elde edilmiştir. Bu seri P sayısına eşitlenmiştir ve yine sayfaların toplamının 1 sayısına eşit olduğu kullanılarak bu seri hesaplanmıştır.



Şekil 11: P serisinin hesaplanması için görselleştirme

Son durumda, sağ taraftaki seri ile sol taraftaki seri birbirine eşit olmuştur. Bu serilerin toplamları 1 olduğu bilindiğinden P serisi aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$2P = 1 \longrightarrow P = \frac{1}{2}$$

Seri şeklinde yazılmış ve denklem 19 elde edilmiştir.

$$P = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{1}{2} \quad (19)$$

Sonuç sigma notasyonu kullanılarak gösterilmiş ve denklem 20 elde edilmiştir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1}{2} \quad (20)$$

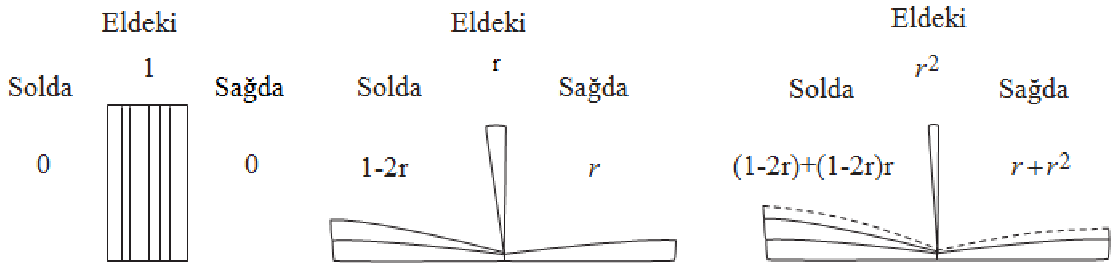
İlk örnekte ve bu örnekte elde edilen bu sonuçların hesaplanmasının ardından, bu durum için de genel bir çözüm geliştirilmiştir.

3.1.8 Genel Çözüm 2

Bu kısımda genel çözüm önce belli sınırlar içinde çözülmüş, ardından sınırlar genelleştirilmiştir. Öncelikle, sınırların belirli olduğu çözüm toplam sayfaların 1 sayısına eşit kabul edilmesiyle hesaplanmıştır. Ardından sınırların farklı şekilde alınması için, tüm sayfalar herhangi bir sayıya eşitlenmiş ve buna göre hesaplama yapılmıştır. Böylece çözüm daha da genelleştirilmiştir.

3.1.8.1 Genel Çözüm 2'nin Bilinen Sınırlarda Çözümü

Bu genel çözümde, $r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots$ şeklinde bir seri alınmıştır. Bu problem için sınırlar $r < \frac{1}{2}$ olarak belirlenmiştir. Eldeki serinin r kadarı sağa, 1-2r kadarı sola bırakılmıştır. Bu durumda, elde de sayfaların r kadarı kalmıştır. Ardından işlem tekrarlanmıştır. Bu sefer sayfaların $r + r^2$ kadarı sağ tarafta, $(1-2r) + (1-2r)r$ kadarı sol tarafta kalmıştır. Ortada ise sayfaların r^2 kadarı bulunmaktadır.



Şekil 11: Genel Çözüm 2'nin görselleştirme

Şekil 11'de gösterilen işlemlerin ardından, geometrik seriler elde etmek için işlem sonsuza kadar tekrarlanmıştır, ardından sağ ve sol tarafta sırayla λ ve ψ serileri elde edilmiştir.

$$\lambda = r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots$$

$$\psi = (1-2r) + (1-2r)r + (1-2r)r^2 + \cdots = (1-2r)(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots)$$

Elde edilen serilerin toplamının 1 sayısına eşit olması kullanılarak denklemler yazılmış ve çözülmüştür.

$$(1-2r)(1+\lambda) + \lambda = 1$$

$$(1-2r)(1+\lambda) + (1+\lambda) = 2$$

$$(1+\lambda)(1+1-2r) = (1+\lambda)(2-2r) = 2$$

$$1 + \lambda = \frac{2}{2-2r} = \frac{1}{1-r}$$

Elde edilen denklem seri halinde yazılmıştır ve denklem 21 elde edilmiştir.

$$\lambda = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots = \frac{1}{1-r} \quad (21)$$

Ve sonuç sigma notasyonu kullanılarak gösterilmiştir. Böylece denklem 22 elde edilmiştir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad ; r < \frac{1}{2} \quad (22)$$

3.1.8.2'inci kısmında bu denklemin sınırlarını düzenlenip daha genel bir sonuç çıkarılmıştır.

3.1.8.2 Sınırların Genelleştirilmesi

Sınırların genelleştirilmesi için kitabın tüm sayfalarını 1 sayısına eşitleme yaklaşımı değiştirilmiştir ve bunun yerine toplam sayfa sayısı herhangi bir f sayısı olarak atanmıştır. Yapılan bu değişiklik $\frac{1}{2}$ olan sınırda bir değişiklik yaratmıştır. Toplam sayfalar 1 iken $\frac{1}{2}$ olan bu sınır toplam sayılar f iken $\frac{f}{f+1}$ olmuştur. İşlemler ise aynı kalmış, sadece işlemin her bir tarafı f sayısı ile çarpılmıştır. Bu sınır kullanılarak genel çözüm yazıldığında denklem 23 elde edilmiştir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad ; r < \frac{f}{f+1} \quad (23)$$

3.1.9 Genel Çözüm 2'in Bilgisayardan Hesaplamayla Doğrulanması

Bölüm 3.1.8'de ulaşılan genel denklemin bilgisayardan hesaplama yöntemiyle denenmesi için Şekil 12'deki kod yazılmıştır.

```
def sigma5(r):
    i,s = 0,0
    while i < 1000:
        s += (r)**(i)
        i += 1
    return s

while True:
    r = input("r oranını giriniz: ")
    print(sigma5(r))
```

Şekil 12: Genel denklem 2'nin bilgisayardan hesaplanması için Python 3.5 kodu

Bu örnekte kodu kullanarak deneme yapmak için r için seçilen değerler ve bulunan genel denkleme göre sonuçlar denklem 24 ve 25'deki gibi elde edilmiştir.

$$r = \frac{1}{3} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{3}{2} \quad (24)$$

$$r = \frac{1}{5} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{5}{4} \quad (25)$$

Şekil 12'deki kod çalıştırıldığında Şekil 13'deki sonuçlara varılmaktadır.

```
r oranını giriniz: 0.33333333333333
1.5
r oranını giriniz: 0.2
1.25
```

Şekil 13: Şekil 12'deki Python 3.5 kodun çıktısı

Sonuçlarda görüldüğü üzere, yazılan Python 3.5 kodlarının sonuçları ile genel denklemin sonuçları uyuşmaktadır. Böylece genel denklem 2, bazı sayısal değerler için denenmiş ve doğruluğu gösterilmiştir.

3.1.10 Bulunan Sonuçların İlişkilendirilmesi ve Yeni Hesaplanabilir Seriler

Yapılan işlemler ve görsel analizler sonucu birçok geometrik serinin hesaplama işlemi yapılmıştır. Birkaç inceleme sonucu, bilinen serilerin birbiriyle ilişkilerinin incelenmesiyle yeni seriler elde edilebileceği düşüncesine varılmıştır. Bir örnekle gösterim yapmak için bilinen iki seri kullanılarak yeni bir seri elde edilmiştir. Öncelikle bilinen iki seri ve yakınsadıkları değerler yazılmıştır.

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ \dots = 1$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \frac{1}{512} + \cdots = \frac{2}{3}$$

Gösterilen ilk seri yöntemin örnek uygulamasında (Bölüm 3.1.1), ikinci seri ise Görselleştirme Metodu Uygulaması 1 (Bölüm 3.1.3) kısmında hesaplanmıştı. Açıkça görüldüğü üzere, ilk seri ikinci seriyi içermektedir. Bu durumda, ilk serinin içindeki ikinci seri, hesaplanan ikinci seriye eşitlenmiştir. Öncelikle ilk serinin içindeki iki seri değişkenlere atanmıştır

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ \dots = S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = 1$$

Arta kalan serinin S_3 olarak tanımlanması ve $S_2 = \frac{2}{3}$ olduğunun bilinmesiyle, yeni bir seri hesaplanmıştır.

$$S_2 + S_3 = \frac{2}{3} + S_3 = 1$$

Bu durumda denklemin çözülmesiyle S_3 değeri de hesaplanmıştır.

$$S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Bu yöntem kullanılarak, bu örnekte olduğu gibi birçok farklı seriler hesaplanabilmektedir. Serilerin birbirleriyle ilişkilendirilmesiyle bu işlemlerin yapılması için tek şart serilerin birbirini kısmen ya da tamamen içermesidir. Şartlar karşılandığı sürece, yöntem genel çözümler arasında da uygulanabilmektedir.

3.1.11 İlişkilendirme ile Seri Hesaplama Yönteminin Bilgisayardan Hesaplamayla Doğrulanması

Bölüm 3.1.10'daki örnekte Python 3.5 programlama dilinden yazılan kodlarla doğrulanmıştır.

```python
def sigma4():
    us,limit,toplam=2,10000,0
    while us<limit:
        toplam += 1/(2**(us))
        us+=2
    print(toplam)

sigma4()
```

Şekil 14: Bölüm 3.1.10'daki örneğin doğrulanması için Python 3.5 kodu

Kod kullanılarak 3.1.10'daki örnek hesaplandığında, Şekil 15'deki sonuç elde edilmiştir.

```
0.3333333333333333
>>> 
```

Şekil 15: Şekil 14'daki kodun çıktısı

Görüldüğü üzere, bu çalışmada yapılan hesap ile bilgisayar hesapları uyuşmaktadır. Böylece serilerin ilişkilendirilmesi metodu da doğrulanmıştır.

3.2 Görselleştirme Yönteminin Matematikte Öğrenme Üzerine Etkisi

Yapılan çalışmanın eğitim öğretime katkısının incelenmesi için yapılan sosyal deneyde ve incelenen çalışmalarda aşağıdaki yargılara varılmıştır:

1. Çalışmada öğrencilere bir anket uygulanmıştır. Anketin sonuçlarında, görsel yöntemlerle daha iyi anlayan öğrenci sayısı klasik yöntemle öğrenenlere nazaran çok daha fazla olduğu görülmüştür.

2. Çalışmada görsel yöntemlerle anlatılan bir dersin akılda daha çok kaldığı görülmüştür.

3. Çalışmada görsel yöntemlerle yapılan matematik eğitiminden öğrencilerin daha çok zevk aldığı ve birçoğunun "Dersler her zaman böyle anlatılsa daha başarılı olabilirim." benzeri cümleler sarf ettiği görülmüştür.

4. Görselleştirme yaklaşımı ile yapılan matematik öğretiminin, öğrencilerin matematikte soyut düşünme becerilerinin olumlu yönde değişmesinde geleneksel öğretim yönteminden daha etkili olduğu ortaya çıkmıştır (Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi) .

5. Görselleştirme yaklaşımı ile yapılan matematik öğretiminin, öğrencilerin matematikte öğrenilmiş çaresizliklerinin olumlu yönde değişmesinde geleneksel öğretim yönteminden daha etkili olduğu çıkmıştır (Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi) .

6. Görselleştirme metodunun uygun bir biçimde matematik eğitimine yerleştirilmesi, ve analitik metotla bağlantılı şekilde kullanılması matematik öğrenme açısından oldukça önemli bir yer tutmaktadır (Coordinating Visual and Analytic Strategies: a Study of Students Understanding. Journal for Research in Mathematics Educations).

Yapılan çalışmanın sonuçları Batı Anadolu Bilimleri Dergisi (2011, 3) dergisinde yayımlanan Görselleştirme Yaklaşımının Matematikte Öğrenilmiş Çaresizliğe Ve Soyut Düşünmeye Etkisi adlı çalışma ile paralel niteliktedir. Diğer birçok çalışmayla da uyuşan bu çalışmadaki sonuçlarda açıkça görüldüğü üzere; bu yöntem matematikte öğrenme üzerine oldukça etkili olacaktır.

4. Sonuç ve Tartışma

Bu çalışmada geometrik serilerin görsel yollardan kanıtlanması için yöntemler üzerine çalışılmıştır. Son olarak gelinen noktada, sayfalar arasındaki oran herhangi bir r sayısından bir fonksiyon olarak atanmış ve böylece 3 tane genel denklem görselleştirme yoluyla ispatlanmıştır. Bu matematiksel çalışmada elde edilen matematiksel ifadeler denklem 1,2 ve 3'teki gibidir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{r^{-n}} = \frac{r}{r+1} \;\; ; \;\; 0 < r < 1 \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-r)(r^{n-1}) \left(\frac{1-(-1)^{n}}{2}\right) = \frac{1}{r+1} \;\; ; \;\; 0 < r < 1 \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{n} = \frac{1}{1-r} \;\; ; \;\; r < \frac{f}{f+1} \quad (3)$$

1, 2 ve 3 numaralı denklemler r'nin denklemlerin yanlarında verilen belirli aralıklar için hesaplanmıştır. Tabii ki de sonsuza giden geometrik seriler belirtilen değerlere sadece yakınsamaktadır çünkü hiçbir sonsuz serinin sonucu tam bir değere eşit değildir. Bu yakınsamanın doğru hesaplanıp hesaplanmadığını kontrol etmek için; belirtilen aralıklarda bulunan r sayıları için Python 3.5 programlama dilinden yazılan kodlarla denklemlerin sonuçları bilgisayarda hesaplanmış, denenmiş ve sonuçların belirtilen değerlere yakınsadığı gösterilmiştir. Bu yolla kanıtlanan, yukarıdaki üç matematiksel ifade gibi; birçok farklı geometrik seri de bu görselleştirme yöntemi kullanılarak hesaplanabilir ve farklı genel ifadelere ulaşılabilir. Bu bağlamda, projenin önünün yeni geliştirmelere oldukça açık olmasıyla beraber birçok farklı seri için yeni yöntemler geliştirilebilir.

Bölüm 3.1.10'daki gibi metotlarla birçok yeni seriler hesaplanabilir. Bu bakımdan da, sonsuz serilerin bir kısmının hesaplanması; diğer birçok serinin hesaplanmasında kolaylık sağlamaktadır. Bunun sebebi ise bazı serilerin diğerlerini içermesi, ya da serilerin bir şekilde diğerleriyle ilişkili olmasıdır. Bu metodun kullanılması, birçok farklı serilerin daha hızlı hesaplanmasını sağlayacaktır.

Bilgisayarda yapılan hesaplamalarda, çok küçük de olsa bir hata payı vardır. Bundan dolayı hesaplamalarda bulunan denklemdeki formüllere çok yakın değerlere ulaşılmıştır, ki bu da görselleştirme yönteminin doğru olduğunu göstermeye yetecek bir hesaplamadır.

Projenin amacı giriş bölümünde belirtildiği üzere, geometrik serilerin hesaplanmasındaki kısıtlı yöntemlere çeşitlilik katmak, matematiğin bu konusuna farklı bir bakış açısı geliştirmek ve bu konunun eğitim öğretimde daha anlaşılır şekilde anlatılmasını sağlamaktır. Bu çalışmanın sonucunda 3 tane, birçok geometrik serinin hesaplanmasında kullanılan matematiksel ifade yeni yollarla kanıtlanmıştır ve böylece konuya yeni bir perspektif kazandırılmıştır. Ayrıca incelenen ve yapılan sosyal deneylerle görselleştirme ile öğrenme ve öğretmenin açıkça çok etkili olduğu görülmüştür. Bu bağlamda, bu çalışmadaki yöntem kullanılarak yapılan eğitim ve öğrenim çok daha efektif olacaktır. Böylece eğitim ve öğretim konusundaki amaca da ulaşılmış olunacaktır.

5. Öneriler

Bu bilimsel çalışmada geometrik serilerin Yöntem, Bulgular ve Sonuç kısmında gösterildiği şekilde görselleştirilebildiği sonucuna ulaşılmıştır. Çalışmadaki temel amaç matematiğin bu önemli konusuna yeni bir bakış açısı geliştirmektir. Bu çalışmada 3 farklı matematiksel ifadeye ulaşılmış olunmasına rağmen, birçok farklı matematiksel ifade gösterilen yöntemler ile hesaplanabilmektedir. Bu bağlamda, çalışma geliştirilmeye oldukça açıktır. Projenin ilerletilebilmesi için, birçok farklı geometrik serilerin belirtilen metotlarla hesaplanması amacıyla yeni yöntemler geliştirilmesi ve görselleştirme metodundan en uygun şekilde faydalanılması önerilir. Böylece projenin kapsamı da genişletilmiş olunacaktır.

Aynı zamanda çalışma boyunca incelenen ve yapılan çalışmalara göre, matematikte görsel yolla öğrenmenin çok efektif bir yöntem olduğu gösterilmiştir. Bundan dolayı, bu çalışmada bulunan görselleştirme metoduyla yapılan hesaplamaların eğitim ve öğretimde yaygınlaştırılması, bu önemli metodun tanıtılması ve anlatılması öneriler arasındadır.

Bölüm 3.1.10’da gösterilen, serilerin ilişkilendirilmesiyle yeni serilerin hesaplanması metodu, birçok farklı seri için de uygulanabilir ve böylece birçok farklı seri de hesaplanabilir. İlişkilendirmenin farklı seriler için uygulanması ve yaygınlaştırılması önerilir.

Temel konu ile alakası olmamasına rağmen, bu çalışmada geometrik serilerin bilgisayarda hesaplanması sürecinde küçük bir hata payı olduğu görülmüştür. Bunun için geometrik seriler bilgisayarda hesaplanırken, en son ulaşılan değerin yeterince yakınsaması durumunda sonucun yakınsayan değer olarak vermesini sağlayacak bir kodlama çalışması yapılması önerilir. Böylece bu konu hakkında başka çalışmalar yapan insanların da önleri açılmış olacaktır.

Kaynaklar

Saha, A. (2015). Doing Math With Python 3.5. USA: No Starch Press.

Sweıgart, A. (2015). Automate The Boring Stuff With Python 3.5. USA: No Starch Press.

Randrianantoanina, B. (2004). A Visual Approach to Geometric Series, American Mathematics Journal. USA: The Mathematical Association of America.

Caltech Library Authors . Calculus 2 , Infinite Series. USA: Caltech.

Koğ O. , Başer N. (2011). Görselleştirme Yaklaşımının Matematikte Öğrenilmiş Çaresizliğe Ve Soyut Düşünmeye Etkisi, Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi(3), 89-108.

Knopp, K. (1956). Infinite Sequences and Series. Dover Publications.

Hırschman, I. (2014). Infinite Series. USA: Dover Publications

Zazkis R., Dubinsky, E. , Dautermann, J.(1996): Coordinating Visual and Analytic Strategies: a Study of Students Understanding. Journal for Research in Mathematics Educations.