polinomul monic de grad minim care are A printre rădăcini.

$$\left(\mu_A(A)=0 \text{ și } (\forall) f \text{ cu } f(A)=0,\ gr f \geq gr\,\mu_A\right)$$

<u>Corolar</u>: Polinomul minimal divide polinomul caracteristic.

20.04.2018

<u>CURS 8</u>

<u>SPAȚII VECTORIALE EUCLIDIENE</u>

$E/\mathbb{R}$ dim $E = n$

*<u>DEF</u>: Un produs scalar pe $E/\mathbb{R}$ e o formă biliniară simetrică și pozitiv definită.

$\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$

$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ (simetria

$\langle x, x\rangle \geq 0$, $(\forall)\, x \in E$ cu egalitate $\Leftrightarrow x = 0$

<u>Ex</u>: Pe $\mathbb{R}^n$ $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

*<u>OBSV</u>: pozitiv definită $\Rightarrow$ nedegenerare

$\langle x, y\rangle = 0$, $(\forall)\, y \Rightarrow x = 0$

Norma asociată produsului scalar este $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

INEGALITATE $\Rightarrow$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (1)

PROP: (INEGALITATEA CBS)

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (2)$$

cu egalitate $\Leftrightarrow$ $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(2) $\Rightarrow$ (1) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle =$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$

DEM: CBS pot presupune $x \neq 0$, $y \neq 0$

$\boxed{\text{în } \mathbb{R}^n \quad x = (x_i), \; y = (y_i) \quad \left(\sum x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)}$

$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geq 0$, $(\forall)\lambda$

$\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0$, $(\forall)\lambda$

$\Delta = \langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0$

$x \perp y$ dacă $\langle x, y\rangle = 0$

Definim $\measuredangle(x, y)$ prin $\cos\theta = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$

OBSV: $\{v_1, \dots, v_k\}$ mutual ortogonal

$\langle v_i, v_j\rangle = 0$ dacă $i \neq j$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ lin. indep.: $\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0$

$0 = \langle v_j, \sum a_i v_i\rangle = \sum a_i \langle v_j, v_i\rangle = a_j \|v_j\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_j = 0$

Baze ortogonale (ortonormate)

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ cu $\langle e_i, e_j \rangle = 0, (\forall) i \neq j$ ortog.

$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ orton.

Ex: Baza canonică din $\mathbb{R}^n$ e orton. ~~față~~ de $\sum x_i y_i$.

TEOREMA: (~~G~~ Gram - Schmidt) - procedeu de ortogonalizare

Fie $\{f_1, \ldots, f_n\}$ bază arbitrară în $(E^n, \langle , \rangle)$. Atunci există o bază ortonormată $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a.î. $sp\{e_1, \ldots, e_n\} = sp\{f_1, \ldots, f_n\}$, $(\forall) i$.

Dem: Construiesc întâi o bază $\{e'_i\}$ ortogonală.

Apoi $e_i = \frac{e'_i}{\|e'_i\|}$

$e'_1 = f_1$

Presupun $e'_1, \ldots, e'_i$ construiți, definesc:

$e'_{i+1} = f_{i+1} + \sum_{j=1}^{i} a_j e'_i$

cu scalari a_j determinați de condițiile

$\langle e'_{i+1}, e_j \rangle = 0 \qquad j \leq i$

$0 = \langle e'_{i+1}, e_j \rangle = \langle f_{i+1}, e'_j \rangle + a_j \|e'_j\|^2$

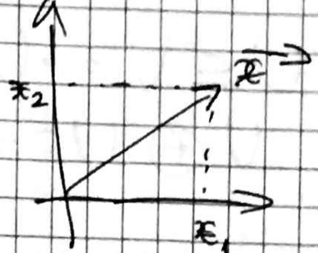
$$a_j = -\frac{\langle f_{i+1}, e'_j \rangle}{\|e'_j\|^2}, \ (\forall)\ j \leq i$$

$sp\{e'_1, \ldots, e'_{i+1}\} = sp\{e'_1, \ldots, e'_i, f_{i+1}, e'_1 \ldots e'_i\}$

$= sp\{e'_1, \ldots e'_i, f_{i+1}\} = sp\{f_1, \ldots, f_i, f_{i+1}\}$

Fie $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ bază orton. în E.

Fie $x=\sum x_i e_i \Rightarrow x_i = \langle x, e_i\rangle$



Fie $B'=\{e'_1,\dots,e'_n\}$ orton.

$$e'_i = \sum a_{ji} e_j$$

$$\delta_{kl} = \langle e'_k, e'_l\rangle = \langle \sum_i a_{ik} e_i, \sum_j a_{jl} e_j\rangle =$$

$$= \sum_{i,j} a_{ik} a_{jl} \delta_{ij} = \sum_i a_{ik} a_{il}$$

$$\boxed{A \cdot {}^tA = I_n}$$

$O(n) := \{A / {}^tA A = I_n\}$ grupul ortogonal

Fie $x \neq 0$, $x^\perp := \{y\in E / \langle x, y\rangle = 0\} \subset E$ subspațiu

ortogonalul lui x

Ex: În $\mathbb{R}^3$, $x=(1,-1,0)$

$$x^\perp = \{y / y_1\cdot 1 + y_2(-1) + y_3 \cdot 0 = 0\} =$$

$$= \{y / y_1 - y_2 = 0\}$$

Dacă ~~...~~ $U \subset E$ subspațiu

$U^\perp := \{x\in E / \langle x, u\rangle = 0, (\forall) u \in U\} \subset E$ subsp.

Se arată:

I: $(U^{\perp})^{\perp} = U$

$U \subseteq V \Rightarrow U^{\perp} \supseteq V^{\perp}$

$U \oplus U^{\perp} = E$

~~*~~ OBSV: Dat U, fie $\{u_1, \dots, u_k\}$ bază orton. în U.

$\Rightarrow \{u_1, \dots, u_k\}$ e lin. indep. în $E \Rightarrow$

$\Rightarrow$ se completează la o bază în E

$\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$

Aplic G-S $\Rightarrow \{u_1, \dots, u_k, \underbrace{u_{k+1}, \dots, u_n}_{U^{\perp}}\}$ orton.

PRODUS VECTORIAL

în $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Se notează $x \times y$ și e definit prin

$\langle x \times y, z \rangle = \det(x, y, z)$, $(\forall) z \in \mathbb{R}^3$

(definesc $\langle u, z \rangle = \dots$ $(\forall) z$

$$\det(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$ (componente în baza canonică)

$\Rightarrow x \times y = -y \times x$

$z = e_1, e_2, e_3 \Rightarrow x \times y = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2$

$+ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3$

* **OBSV:** $\langle x\times y, x\rangle = \langle x\times y, y\rangle = 0$

$$x\times y \perp x,\quad x\times y \perp y$$

$x\times y = 0 \Leftrightarrow x = \alpha y$

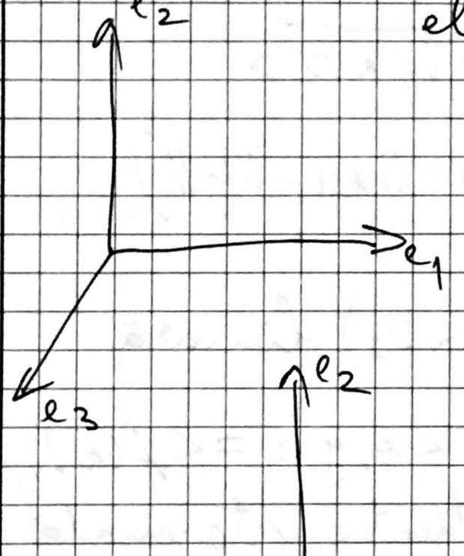
* **OBSV:** $\underbrace{\langle x\times y, x\times y\rangle}_{=\det(x,y,x\times y)} = \|x\times y\|^2 \geq 0$

$\det(x,y,x\times y)\geq 0$ $\{x, y, x\times y\}$

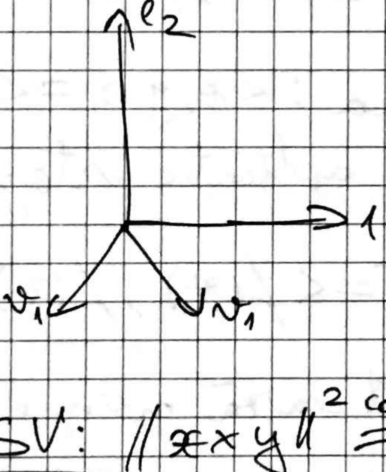
$\Rightarrow$ e la fel orientată cu baza canonică.

<u>Paranteză despre orientare:</u>

$V^n/\mathbb{R}$ B, B' ~~s~~ sunt la fel orientate dacă matricea de trecere dintre ele are $\det > 0$



În $\mathbb{R}^n$, o bază se numește pozitiv orientată dacă se schimbă cu det. poz. din baza canonică



* **OBSV:** $\|x\times y\|^2 \overset{\text{calcul}}{=} \|x\|^2\cdot\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2 =$

$$= \|x\|^2\cdot\|y\|^2 - \|x\|^2\cdot\|y\|^2\cdot\cos^2\theta$$

$$= \|x\|^2\cdot\|y\|^2\cdot\sin^2\theta$$

$\Rightarrow \|x\times y\| = \|x\|\cdot\|y\|\cdot\sin\theta$

*OBSV: $\langle x \times y, z \rangle$ s.n. produs mixt.

*OBSV: Prod. vectorial nu e asociativ.

$$(x \times y) \times z = \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x$$

*OBSV: $(x \times y) \times z + (z \times x) \times y + (y \times z) \times x =$

IDENTITATEA LUI JACOBI