Algebră C5

Inel factor

$(R,+,\cdot)$ inel

J ideal bilateral al lui R ($J \trianglelefteq R$)

1) $(J,+)$ grup

2) $\forall r \in R, \forall i \in J \Rightarrow \begin{cases} i \cdot r \in J \\ r \cdot i \in J \end{cases}$

Analoge cu construcția grupului factor

$\dfrac{R}{J}$ $\quad \overline{r_1} = \overline{r_2} \iff r_1 - r_2 \in J$

$r_1, r_2 \in R$

Definim $+, \cdot$ $\quad \overline{r_1} + \overline{r_2} \overset{def}{=} \overline{r_1 + r_2}$

$\overline{r_1} \cdot \overline{r_2} \overset{def}{=} \overline{r_1 \cdot r_2}$

Definiția este corectă

$(R,+)$ grup com

$(\frac{R}{J},+)$ grup factor

Trebuie să arătăm că: $\left.\begin{array}{l} \overline{r_1} = \overline{s_1} \\ \overline{r_2} = \overline{s_2} \\ r_1, r_2, s_1, s_2 \in R \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{array}{ccc} \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} & = & \overline{s_1} \cdot \overline{s_2} \\ \| & & \| \\ \overline{r_1 \cdot r_2} & \overset{?}{=} & \overline{s_1 s_2} \end{array}$

Trebuie să arăt că $r_1 \cdot r_2 - s_1 \cdot s_2 \in J$

$\overline{r_1} = \overline{s_1} \Rightarrow r_1 = s_1 + i_1$

$r_2 = s_2 + i_2$

$i_1, i_2 \in J$

$$r_1 \cdot r_2 - s_1 \cdot s_2 = (s_1 + i_1)(s_2 + i_2) - s_1 \cdot s_2 = \underset{\substack{\Uparrow \\ J}}{s_1 \cdot i_2} + \underset{\substack{\cap \\ J}}{i_1 \cdot s_2} + \underset{\substack{\cap \\ J}}{i_1 \cdot i_2} \in J$$ (pt că $(J,+)$ e subgrup

$\Rightarrow (\frac{R}{J}, +, \cdot)$ inel factor

Exemplu:

$(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$

Teorema fundamentală de izomorfism pentru inele

Def: $(R_1, +, \cdot)$, $(R_2, +, \cdot)$ inele O funcție $f: R_1 \to R_2$ s.n. morfism de inele dacă:

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x, y \in R_1$
2) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ $\forall x, y \in R_1$
3) $f(1_1) = 1_2$

0_1 - elem. neutru $(R_1, +)$
0_2 - e.n. pt. $(R_2, +)$
1_1 - elem. neutru pt $(R_1, \cdot)$
1_2 - e.n. pt $(R_2, \cdot)$

$\operatorname{Ker} f = \{ r \in R_1 \mid f(r) = 0_2 \}$

$\operatorname{Im} f = \{ f(r) \mid r \in R_1 \}$

TFi pt. inele

$(R_1, +, \cdot)$, $(R_2, +, \cdot)$ inele
$f: R_1 \to R_2$ morfism de inele. Atunci $\boxed{\dfrac{R_1}{\operatorname{Ker} f} \simeq \operatorname{Im} f}$

$(S_1, +, \cdot)$ $(S_2, +, \cdot)$ inele
Spunem că inelele S_1 și S_2 sunt izomorfe ($S_1 \simeq S_2$) dacă
$\exists\, g: S_1 \to S_2$ morfism de inele și g e fc. bijectiva

Dem analogica cu cea de la TFi grupuri

$\operatorname{Ker} f \trianglelefteq R_1$ (ideal bilateral)

$r_1, r_2 \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow r_1 + r_2 \in \operatorname{Ker} f$
$r_1 - r_2 \in \operatorname{Ker} f$
$a \in R_1 \overset{?}{\Rightarrow} a \cdot r_1 \in \operatorname{Ker} f$
$r_1 \cdot a \in \operatorname{Ker} f$

$f(r_1) = 0_2$

$f(r_2) = 0_2$

$f(r_1+r_2) = f(r_1)+f(r_2) = 0_2+0_2 = 0_2$

$f(r_1-r_2) = f(r_1) - f(r_2) = 0_2 - 0_2 = 0_2$

$f(a \cdot r_1) = f(a) \cdot f(r_1) = f(a) \cdot 0_2 = 0_2$

$f(r_1 \cdot a) = f(r_1) \cdot f(a) = 0_2 \cdot f(a) = 0_2$

Dem TFI ind

$$g : \frac{R_1}{\text{Ker} f} : \longrightarrow \text{Im} f$$

$g(\bar{r}_1) \overset{\text{def}}{=\!=} f(r_1)$

g bine definită

$\bar{r}_1 = \bar{r}_2 \overset{?}{\Longrightarrow} g(\bar{r}_1) = g(\bar{r}_2)$

$r_1 = r_2 + i$

$i \in \text{Ker} f \quad f(i) = 0_2$

$$g(\bar{r}_1) \overset{\text{def}}{=} f(r_1) = f(r_2+i) \underset{\uparrow}{=} f(r_2)+f(i) = f(r_2)+0_2 = f(r_2) = g(\bar{r}_2)$$

f morf.
de inele

Pasi:

1) $g(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = g(\bar{r}_1) + g(\bar{r}_2) \quad \forall r_1, r_2 \in R_1$

2) $g(\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2) = g(\bar{r}_1) \cdot g(\bar{r}_2) \quad \forall r_1, r_2 \in R_1$

3) $g(\bar{1}_1) = 1_2$

4) g bij

1) $g(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = g(\overline{r_1+r_2}) \overset{\text{def}}{=\!=} f(r_1+r_2) = f(r_1)+f(r_2) = g(\bar{r}_1)+g(\bar{r}_2)$

3) $g(\bar{1}_1) = f(1_1) = 1_2$

4) - surjectivitatea e evidentă

- injectivitate: $g(\bar{r}_1) = g(\bar{r}_2) \overset{?}{\Longrightarrow} \bar{r}_1 = \bar{r}_2$

$$\overset{\shortparallel}{f(r_1)} = \overset{\shortparallel}{f(r_2)}$$

$f(r_1-r_2) = f(r_1) - f(r_2) = 0_2$

$\Rightarrow r_1-r_2 \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \overline{r_1-r_2} = \overline{0} \Rightarrow \overline{r_1} = \overline{r_2}$

C. Altă teorema de izomorfism

$(R,+,\cdot)$ inel com.

$I \subseteq J \subseteq R$

$I \trianglelefteq R,\ J \trianglelefteq R$

$$\Rightarrow \frac{R/I}{J/I} \simeq \frac{R}{J}$$

$$\frac{J}{I} \trianglelefteq \frac{R}{I}$$

Ex: $(R,+,\cdot)$ inel

$I \trianglelefteq R$

În ce situație se poate întâmpla ca $1 \in I$?

$(u \in I)$

$u \in U(R)$

Obs: K, L corpuri, $f: K \to L$ morfism de corpuri $\Rightarrow f$ inj.

Dem: Fie $x, y \in K$ a.î. $f(x) = f(y)$. Trebuie să arăt că $x = y$.

Presupun că $x \neq y \Rightarrow x-y \neq 0_K \Rightarrow \exists z \in K$ a.î. $(x-y)\cdot z = z(x-y) = 1_K$

$$1_L \underset{\substack{\downarrow \\ \text{def morf} \\ \text{de inele}}}{=} f(1_K) = f((x-y)\cdot z) = f(x-y)\cdot f(z) = (\underbrace{f(x)-f(y)}_{0_K})\, f(z) = 0_L \cdot f(z) = 0_L$$

$$\Downarrow$$

$1_L = 0_L$ ↯

$$\left(\begin{array}{l} f(x) - f(y) = f(x-y) \\ f(x-y) + f(y) = f((x-y)+y) = f(x) \end{array} \right)$$

$K \simeq f(K)$, $f(K) \subseteq L$

$K \subseteq L$

Polinoame simetrice

R inel comutativ $R[X]$ - inelul de polinoame cu coef. în R

$R[x_1, x_2, \dots x_n]$

└ inel de polinoame cu coef. în R, în nedeterminatele $x_1, x_2, \dots x_n$

$R[X_1]$

$$R[X_1, X_2] \overset{def}{=} \underbrace{R[X_1]}_{\text{îl considerăm un inel } S}[X_2]$$

$$R[x_1, \dots x_n] = R[X_1, \dots X_{n-1}][X_n]$$

Def: f. s.n. simetric dacă $f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)} \dots X_{\sigma(n)}) = f(X_1, X_2, \dots X_n)$ $\forall \sigma \in S_n$

$(S_n = \{\sigma : \{1, 2, \dots n\} \to \{1, 2, \dots n\}, \sigma \text{ bij}\})$

$f(X_1, X_2) = X_1^2 \cdot X_2^3 + X_1^3 X_2^2 + X_1^2 X_2$ e simetric? NU

$f(X_1, X_2) = X_1^2 X_2^3 + X_1^3 X_2^2 + X_1^2 X_2 + X_1 X_2^2$ e simetric

$f(X_2, X_1) = X_2^2 X_1^3 + X_2^3 X_1^2 + X_2^2 X_1 + X_2 X_1^2 = f(X_1, X_2)$

$f(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 X_2 + X_1 X_2^2 + X_2 X_3^2 + X_2^2 X_3 + X_1 X_3^2 + X_3 X_1^2 = S_1 S_2 - 3 S_3$

Exemple de pol. sim.

$$\begin{cases} S_1(X_1, X_2, \dots X_n) = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n \\ S_2(X_1, X_2, \dots X_n) = X_1 X_2 + X_1 X_3 + \dots + X_1 X_n + X_2 X_3 + X_2 X_4 + \dots + X_2 X_n + \dots + X_{n-1} X_n \\ S_3(X_1, \dots X_n) = X_1 X_2 X_3 + X_1 X_2 X_4 + \dots \\ \vdots \\ S_n(X_1, \dots X_n) = X_1 X_2 \dots X_n \end{cases}$$

└ polinoame simetrice fundamentale

$f(X_1, X_2) = X_1^2 \cdot X_2^3 + X_1^3 X_2^2 + X_1^2 X_2 + X_2^2 X_1 = X_1 X_2 [X_1 X_2^2 + X_1^2 X_2 + X_1 + X_2] =$

$= S_2 [S_1 + S_1 S_2] = S_1 S_2 + S_1 S_2^2$

Teorema fundamentală a polinoamelor simetrice

$\begin{cases} f \in R[X_1, \dots X_n] \\ f \text{ simetric} \end{cases} \Rightarrow \exists g \in R[X_1, \dots X_n]$ a.î. $f(X_1, \dots X_n) = g(S_1(X_1 \dots X_n), S_2(X_1 \dots X_n) \dots S_n(X_1 \dots X_n))$

Algoritm de calcul pt. g

$$S_1^2 - 2S_2$$

$$\|$$

1) descompunerea în componente omogene

$$f(x_1,x_2,x_3) = \left[x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_1^3x_3 + x_1x_3^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3\right] + \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)$$

↓ comp. omogenă

↑ $(3,1,0)$ (x_1^3, x_2^1, x_3^0)

↓ o comp. omogenă

2) detectarea <u>monoamelor</u> $S_1^{a_1} S_2^{a_2} \dots S_n^{a_n}$ care apar

componentă omogenă de grad K (4)

└ iau cu 1 mai mult decât coef max.

Trebuie să găsesc „toate"

$$K_1 \geq K_2 \geq \dots \geq K_n \geq 0 \quad K_j \in \mathbb{N} \ \forall j$$

$$\sum_{j=1}^{n} K_j = K$$

Posibilități: $(3,1,0)$ ← le iau lexicografic, descrescător

$3+1+0=4$

$$\boxed{\begin{matrix}(2,2,0)\\(2,1,1)\end{matrix}} \rightarrow \text{au niște coeficienți}$$

$$S_1^{K_1-K_2} \cdot S_2^{K_2-K_3} \cdot S_3^{K_3-K_4} \cdot \dots S_{n-1}^{K_{n-1}-K_n} \cdot S_n^{K_n}$$

$$(3,1,0) \rightarrow S_1^{3-1} \cdot S_2^{1-0} S_3^{0} = S_1^2 S_2$$

$$(2,2,0) \rightarrow S_1^{2-2} S_2^{2-0} S_3^{0} = S_2^2$$

$$(2,1,1) \rightarrow S_1 S_2^{0} S_3 = S_1 S_3$$

Comp. omogena: $\overset{f(x_1,x_2,x_3)=}{}$ $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_1^3x_3 + x_1x_3^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 = S_1^2S_2 + \underline{A} \cdot S_2^2 + \underline{B}\, S_1S_3$

3) Aflarea coef. monoamelor

Pt. a det. coef A și B dăm valori nedeterminate;

$x_1 = 1$ $S_1 = 2$

$x_2 = 1$ $S_2 = 1$

$x_3 = 0$ $S_3 = 0$

$$f(1,1,0) = 2 = 4 + A \Rightarrow \underline{A = -2}$$

$x_1 = 1$ $S_1 = 3$

$x_2 = 1$ $S_2 = 3$

$x_3 = 1$ $S_3 = 1$

$$f(1,1,1) = 6 = 27 + (-2)\cdot 9 + B \cdot 3 = 9 + 3B$$

$$\Rightarrow 6 = 9 + 3B \Rightarrow 3B = -3 \Rightarrow \underline{B = -1}$$