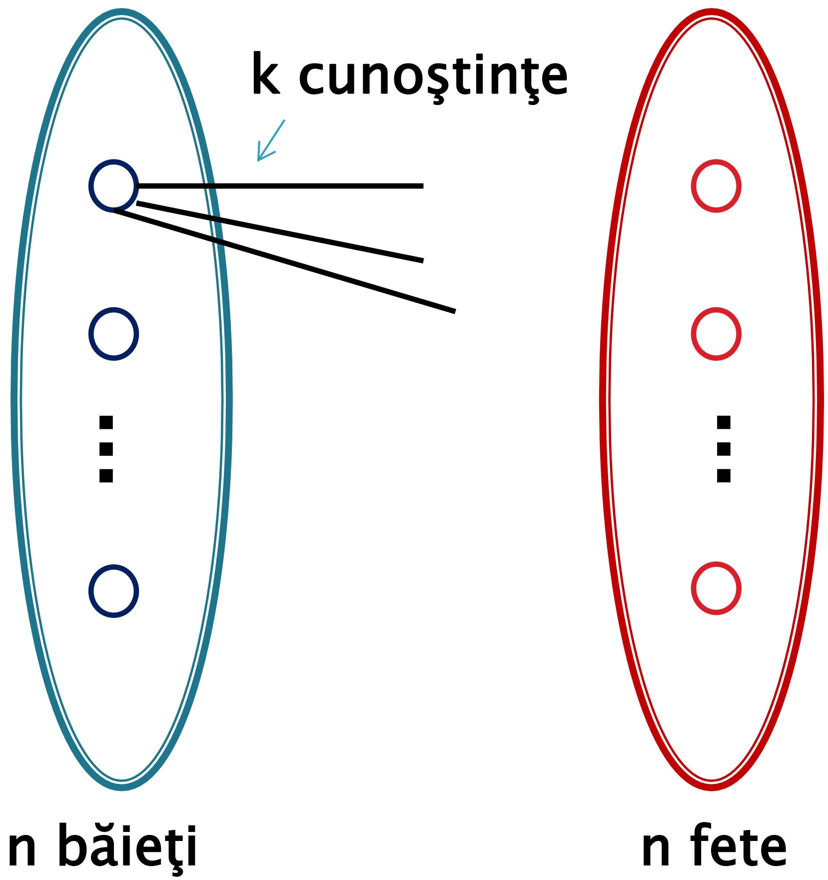
Cuplaje

Repere istorice. Aplicaţii

- **Problema seratei (perechilor)** – sec XIX
  - n băieţi, n fete
  - Un băiat cunoaşte exact k fete
  - O fată cunoaşte exact k băieţi

Repere istorice. Aplicaţii

- **Problema seratei (perechilor)**



Repere istorice. Aplicaţii

- **Problema seratei (perechilor)** – sec XIX
  - Se poate organiza o repriză de dans astfel încât fiecare participant să danseze cu o cunoştinţă a sa?

Repere istorice. Aplicaţii

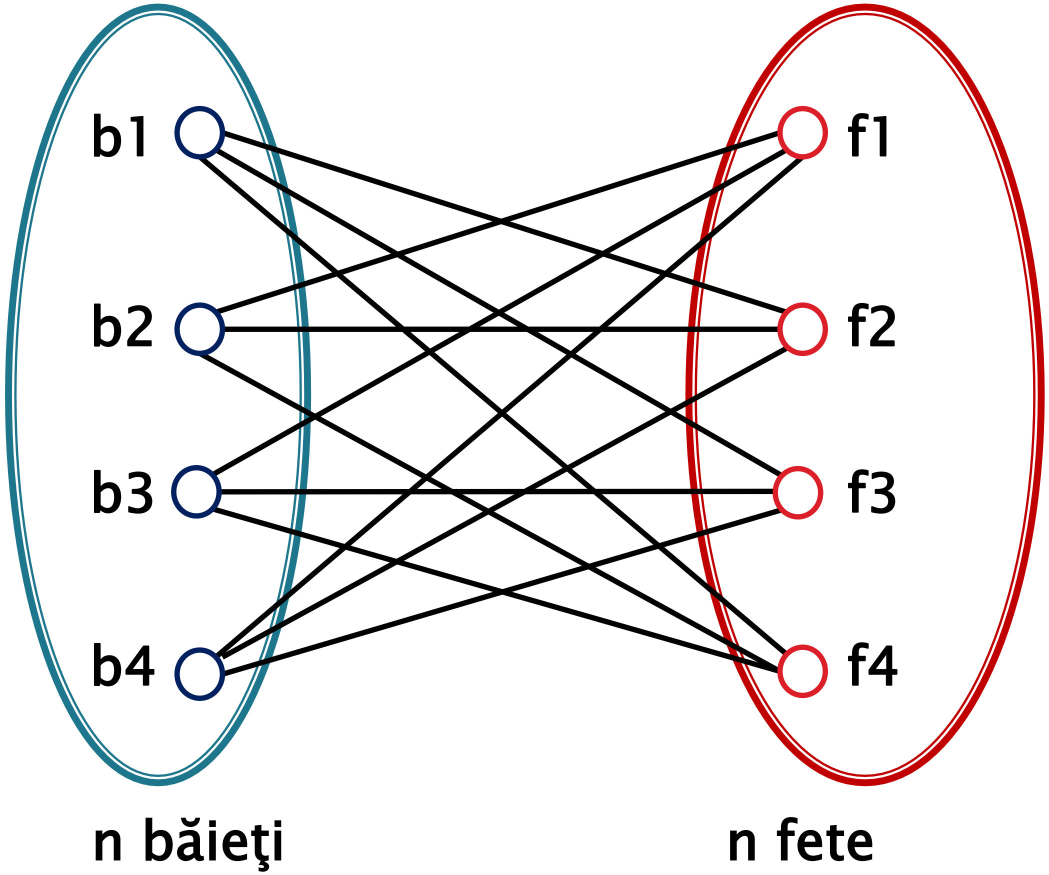
- **Problema seratei (perechilor)** – sec XIX
  - Se poate organiza o repriză de dans astfel încât fiecare participant să danseze cu o cunoştinţă a sa?
  - Se pot organiza **k** reprize de dans în care fiecare participant să danseze câte un dans cu fiecare cunoştinţă a sa?

Repere istorice. Aplicaţii

- **Problema seratei (perechilor)** – sec XIX

n=4

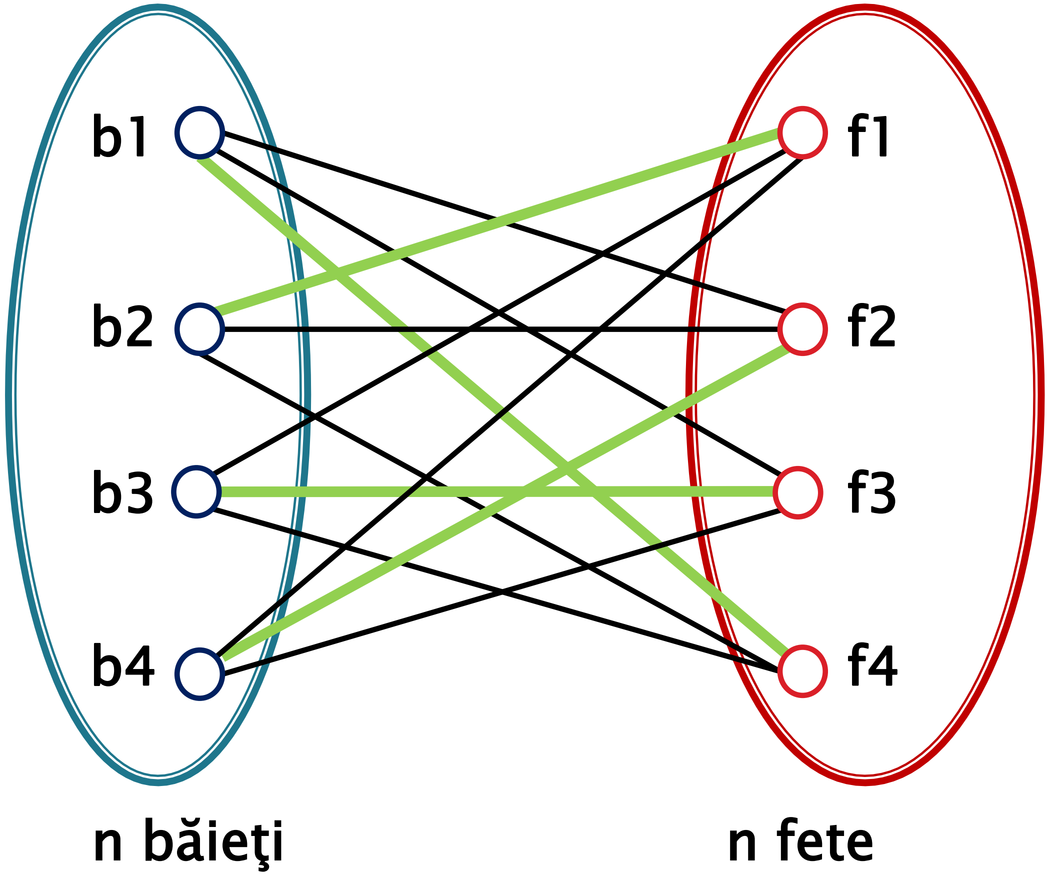
k=3



Repere istorice. Aplicaţii

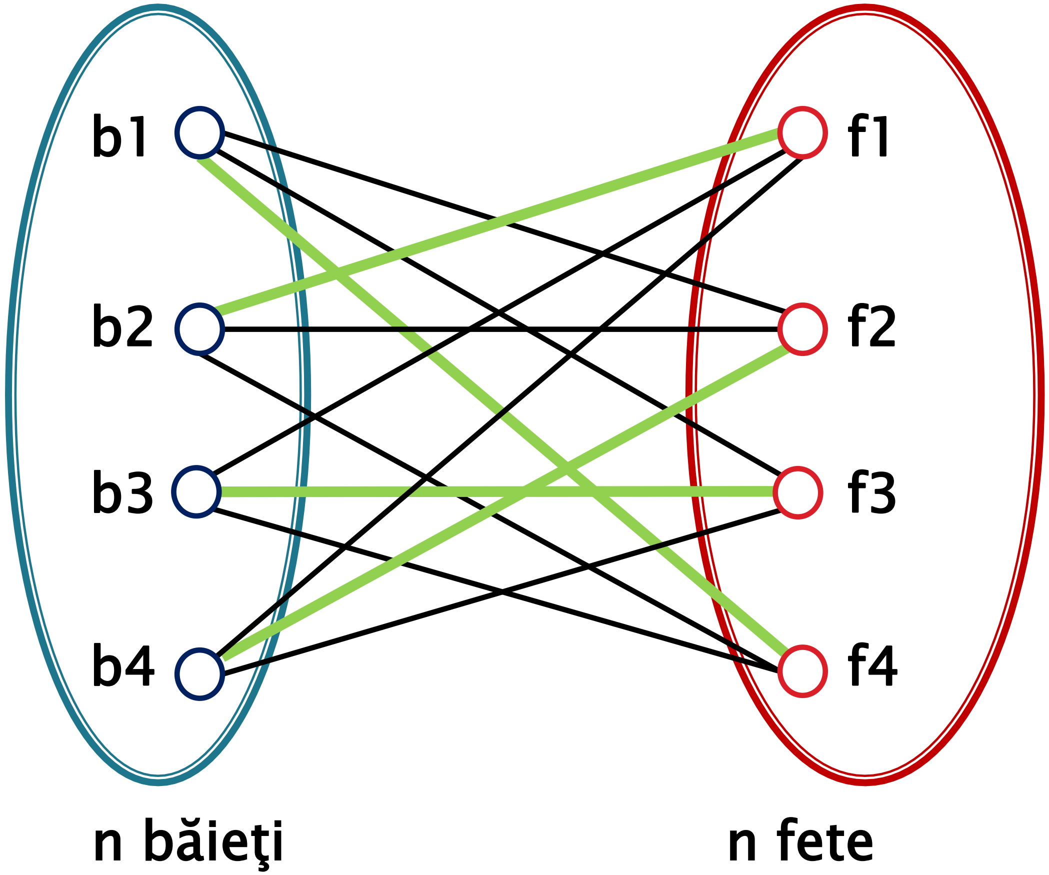
- O repriză de dans

b1,f4
b2,f1
b3,f3
b4,f2



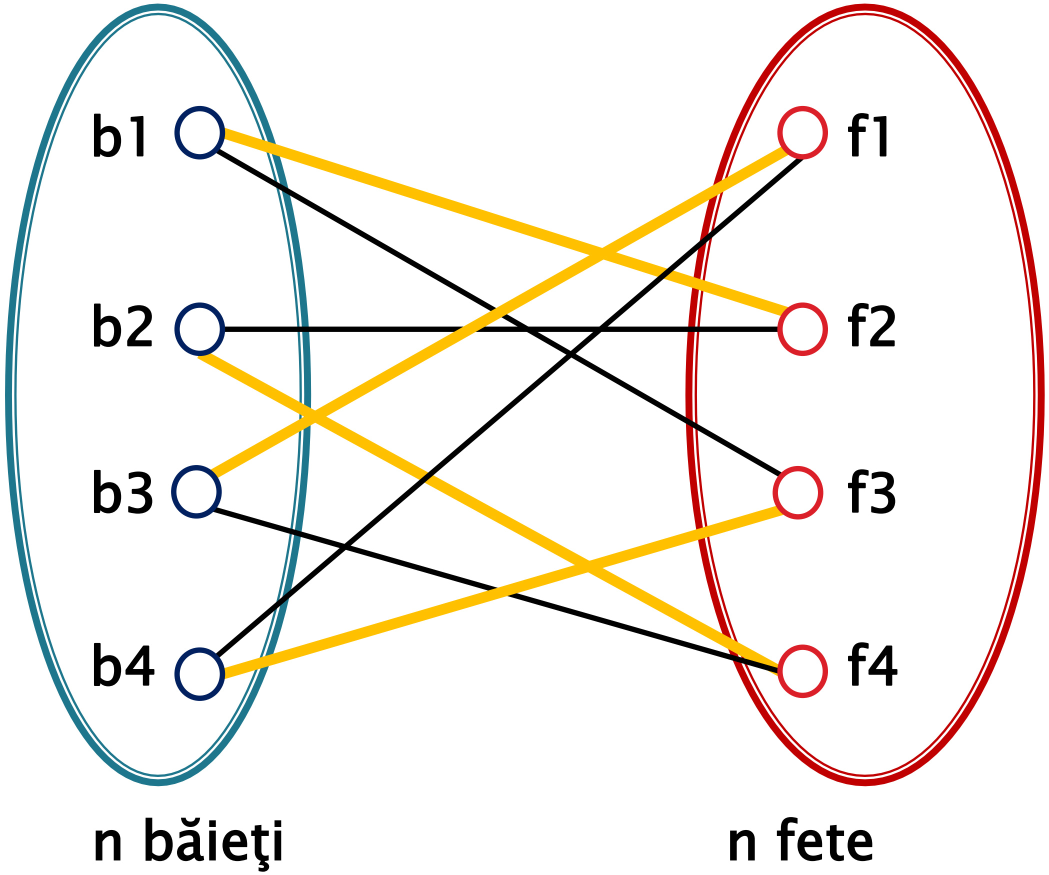
Repere istorice. Aplicaţii

- A doua repriză de dans



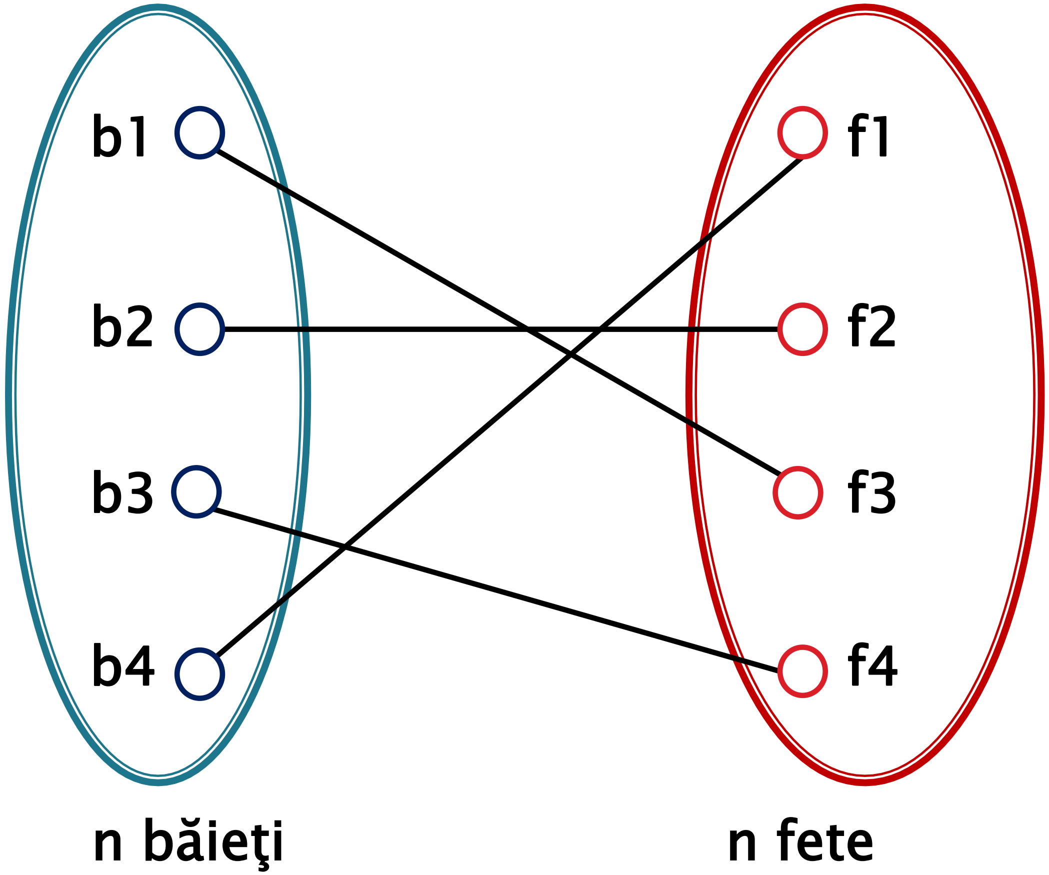
Repere istorice. Aplicaţii

- A doua repriză de dans



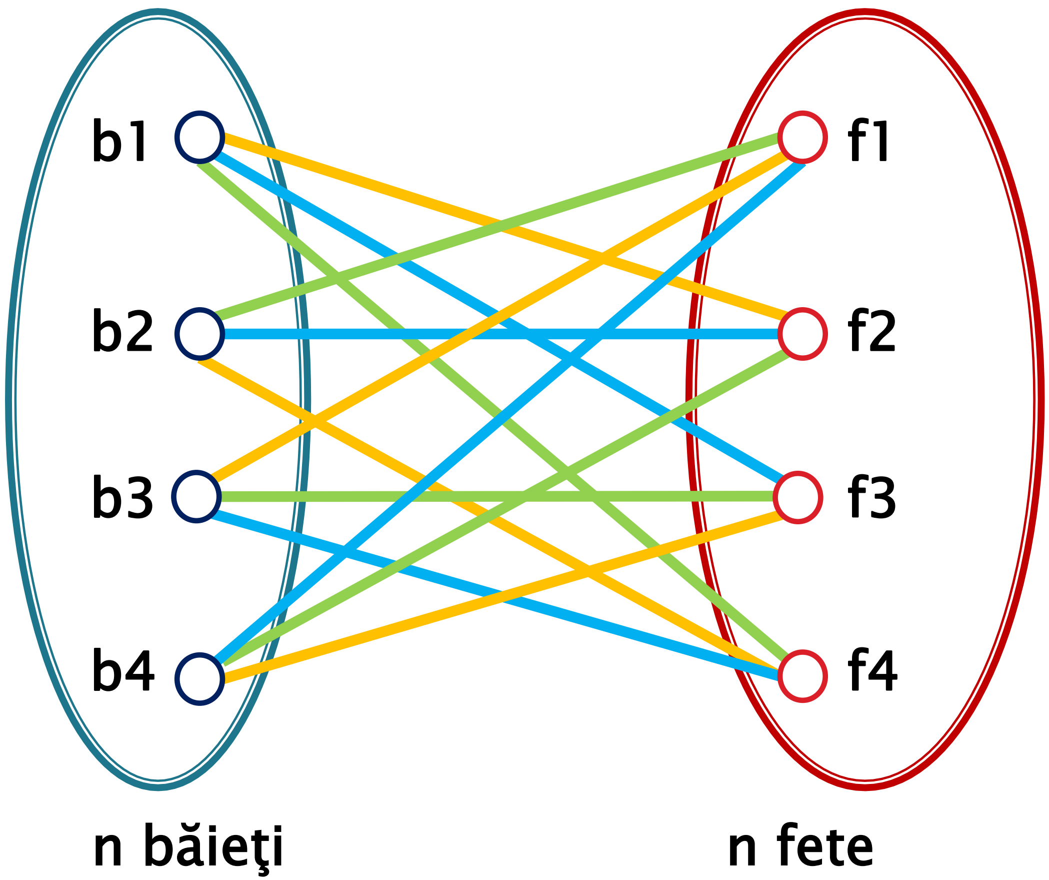
Repere istorice. Aplicaţii

- A treia repriză de dans



Repere istorice. Aplicaţii

Descompunere în cuplaje = colorări proprii de muchii



Repere istorice. Aplicaţii

- **Organizarea meciurilor unui turneu**
  - Două echipe cu câte n jucători
  - Sistem “**fiecare cu fiecare**” (fiecare jucător dintr-o echipă trebuie să joace cu fiecare din cealaltă echipă)

Repere istorice. Aplicaţii

- **Organizarea meciurilor unui turneu**
  - Două echipe cu câte n jucători
  - Sistem "**fiecare cu fiecare**" (fiecare jucător dintr-o echipă trebuie să joace cu fiecare din cealaltă echipă)

  - Graf bipartit complet

Repere istorice. Aplicaţii

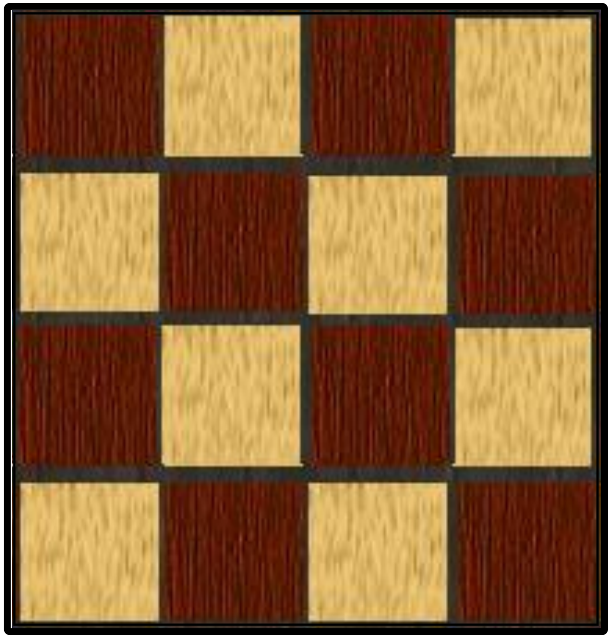
- **Probleme de repartiţie**
  - lucrători – locuri de muncă
  - profesori – examene /conferinţe

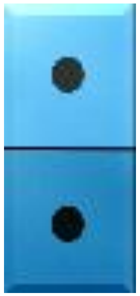
Repere istorice. Aplicaţii

- **Probleme de repartiţie**
  - lucrători – locuri de muncă
  - profesori – examene /conferinţe
    - **Problema orar**

Repere istorice. Aplicaţii

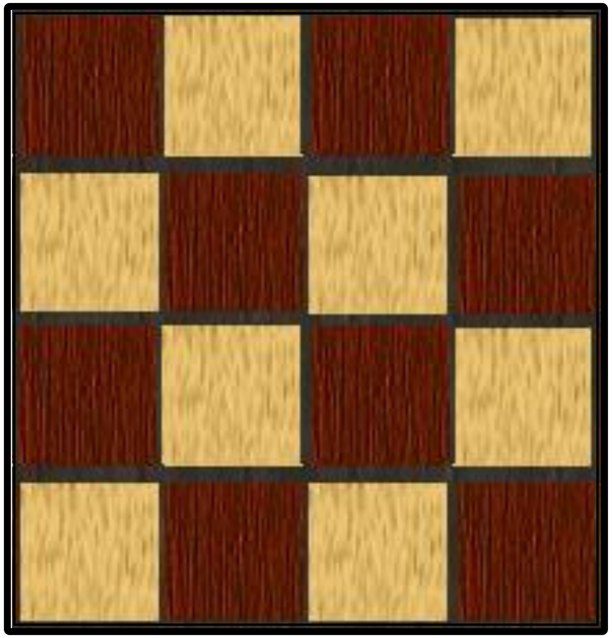
- **Acoperirea unei table cu piese de domino**

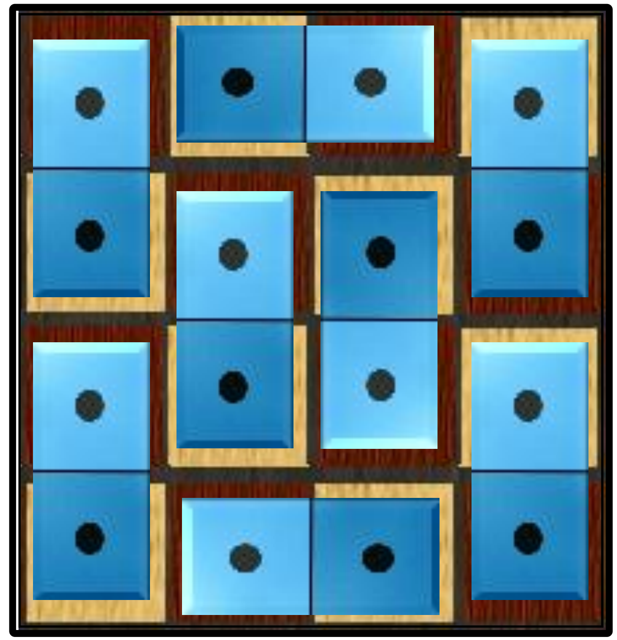




Repere istorice. Aplicaţii

- **Acoperirea unei table cu piese de domino**

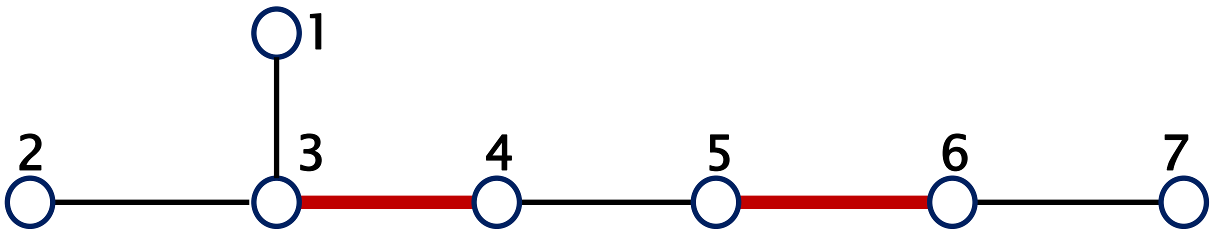




Definiţii

Fie G = (V, E) un graf simplu şi **M** ⊆ **E**.

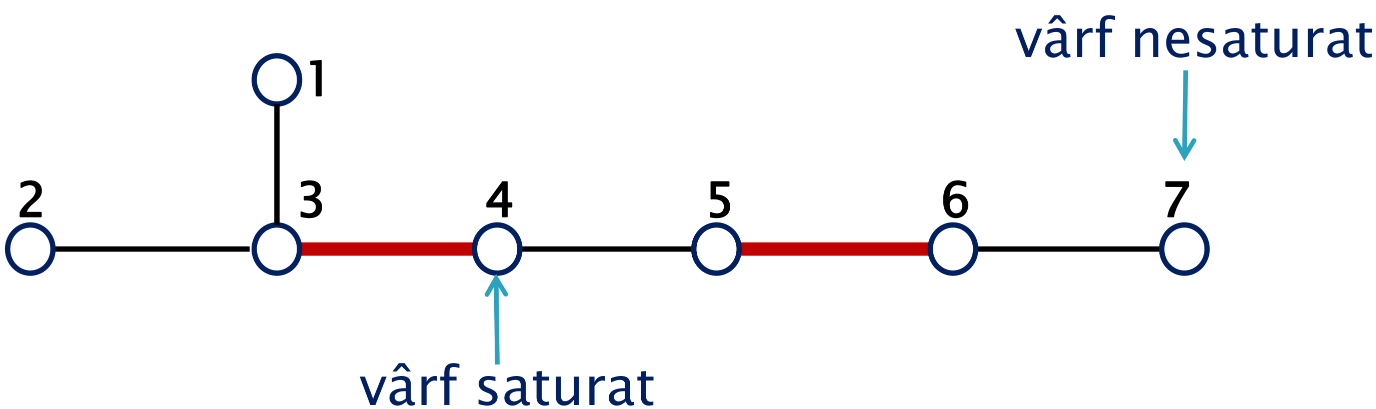
- M s.n **cuplaj** dacă orice două muchii din M sunt neadiacente



cuplaj M={ {3,4}, {5,6} }

Fie $G = (V, E)$ un graf simplu şi $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{E}$.

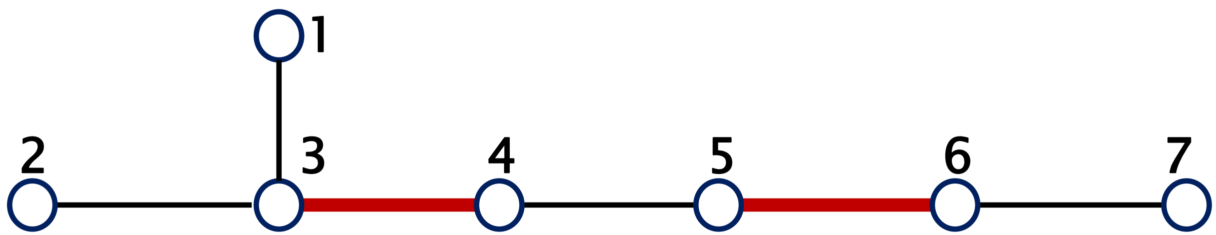
- M s.n **cuplaj** dacă orice două muchii din M sunt neadiacente
- $V(M)$ = mulţimea vârfurilor **M-saturate**
- $V(G) - V(M)$ = mulţimea vârfurilor **M-nesaturate**



Fie $G = (V, E)$ un graf simplu şi $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{E}$.

- Notăm $[M]$ = **graful indus de mulţimea de muchii M**

  = **(V(M), M)**



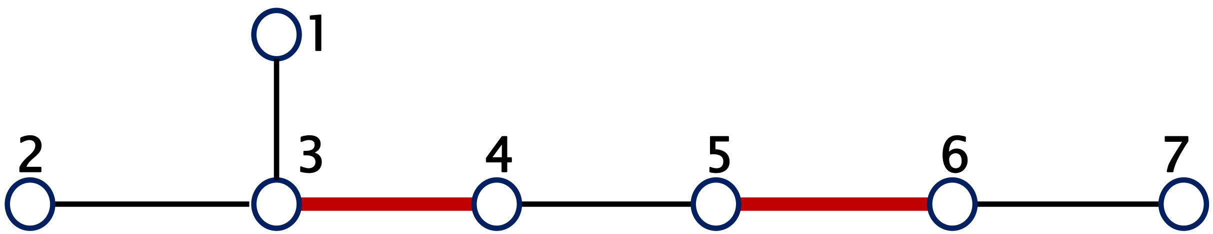
[M]:

- Un cuplaj M^* s.n **cuplaj de cardinal maxim** (**cuplaj maxim**):

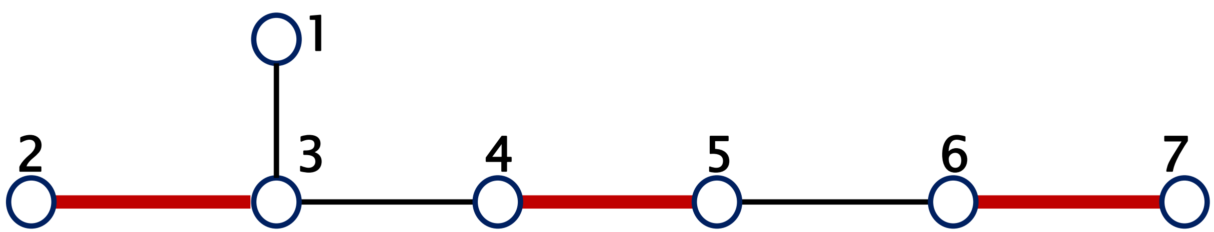
$$|M^*| \geq |M|, \forall M \subseteq E \text{ cuplaj}$$

- Un cuplaj M^* s.n **cuplaj de cardinal maxim** (**cuplaj maxim**):

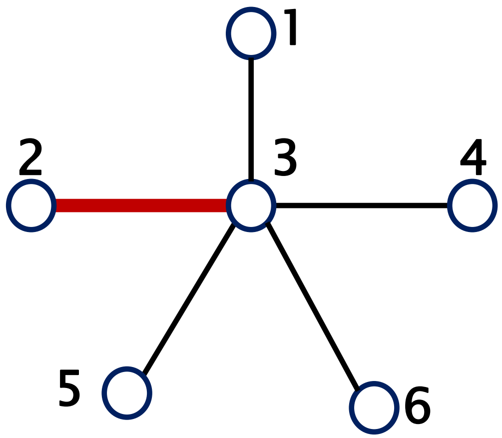
$$|M^*| \geq |M|, \forall M \subseteq E \text{ cuplaj}$$



cuplaj

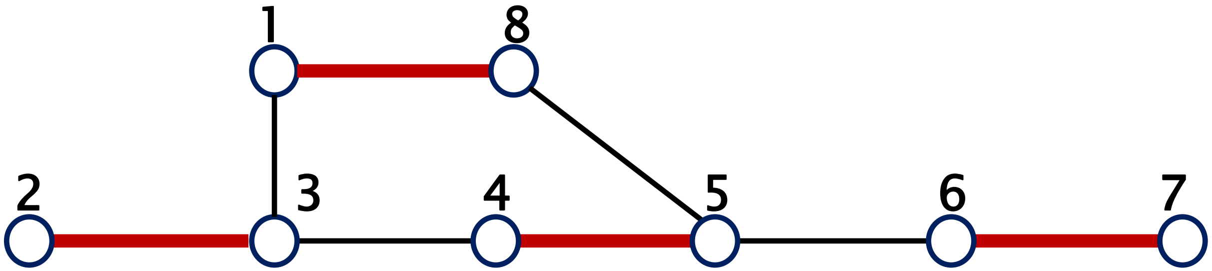


cuplaj de cardinal maxim



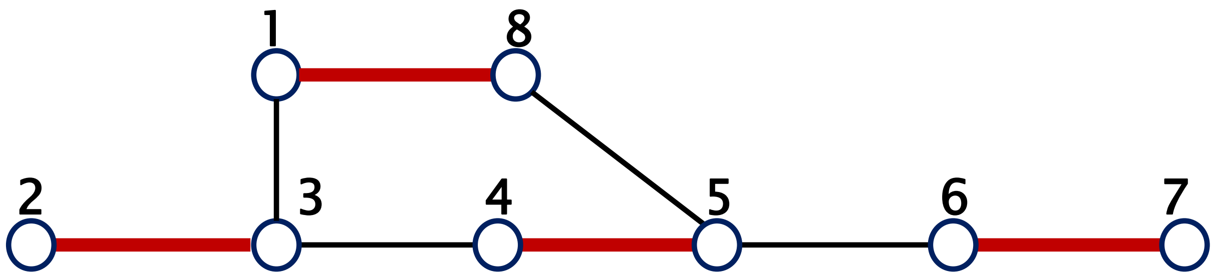
cuplaj de cardinal maxim

- Un cuplaj M s.n **cuplaj perfect** dacă orice vârf este M-saturat



cuplaj perfect

- Un cuplaj M s.n **cuplaj perfect** dacă orice vârf este M-saturat

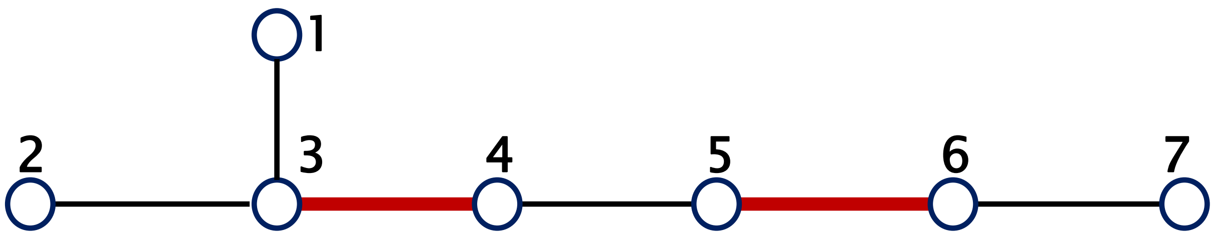


cuplaj perfect

- **Nu orice graf admite un cuplaj perfect**

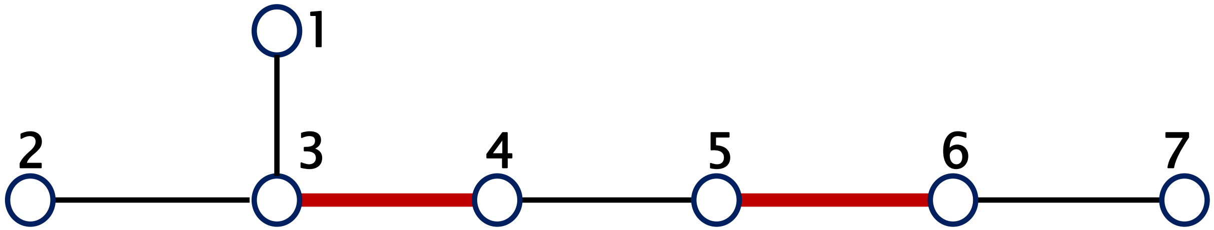
Fie **M** ⊆ **E** cuplaj.

- Un lanţ elementar P s.n. **lanţ M-alternant** dacă muchiile sale aparţin alternativ lui M şi E – M



Fie **M** ⊆ **E** cuplaj.

- Un lanţ elementar P s.n. **lanţ M-alternant** dacă muchiile sale aparţin alternativ lui M şi E – M



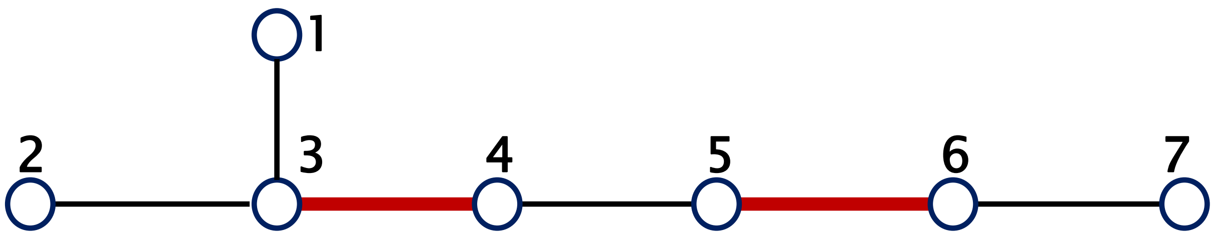
P = [4, 3, 2]

P = [3, 4, 5, 6, 7]

P = [1, 3, 4, 5, 6, 7]

Fie **M** $\subseteq$ **E** cuplaj.

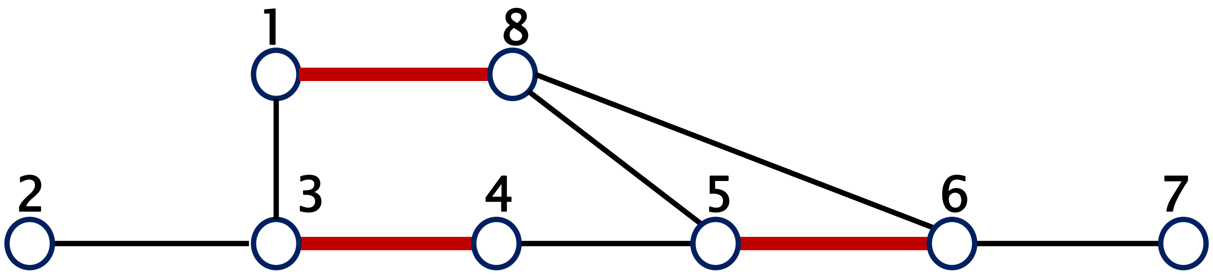
- Un lanţ M-alternant P s.n. **lanţ M-alternant deschis** dacă extremităţile sale sunt M-nesaturate



P = [1, 3, 4, 5, 6, 7]

P = [2, 3, 4, 5, 6, 7]

- **Ciclu M-alternant**



- Fie P un lanţ M-alternant **deschis**

- **Operaţie de transfer** de-a lungul lanţului P = obţinerea unui nou cuplaj M' din M astfel:

$$M' = M \Delta E(P) = (M - E(P)) \cup (E(P) - M)$$

- Fie P un lanţ M-alternant **deschis**

- **Operaţie de transfer** de-a lungul lanţului P = obţinerea unui nou cuplaj M' din M astfel:

$$M' = M \,\Delta\, E(P) = (M - E(P)) \cup (E(P) - M)$$

- Fie P un lanţ M-alternant **deschis**

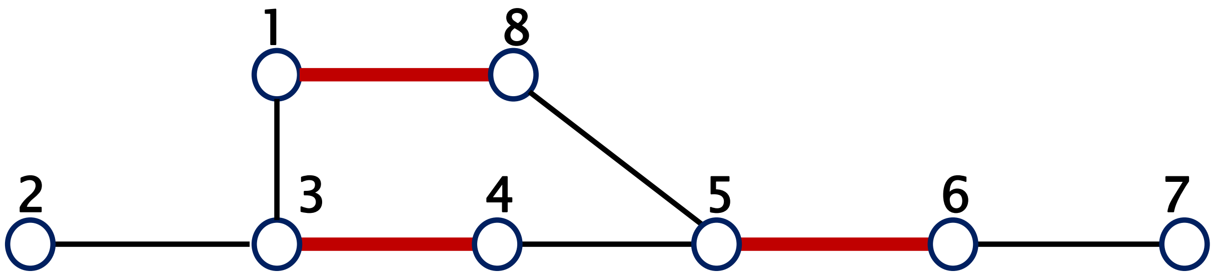
- **Operaţie de transfer** de-a lungul lanţului P = obţinerea unui nou cuplaj M' din M astfel:

$$M' = M \,\Delta\, E(P) = (M - E(P)) \cup (E(P) - M)$$

- **Observaţie**

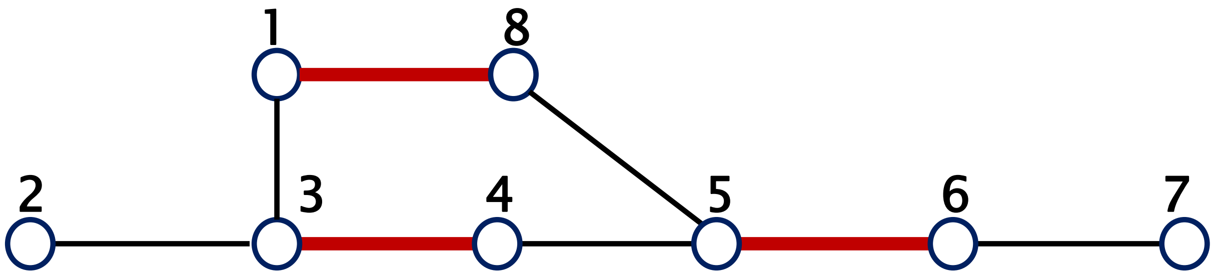
$$|M'| = |M| - \left\lfloor \frac{|E(P)|}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{|E(P)|}{2} \right\rceil = |M| + 1$$

M:



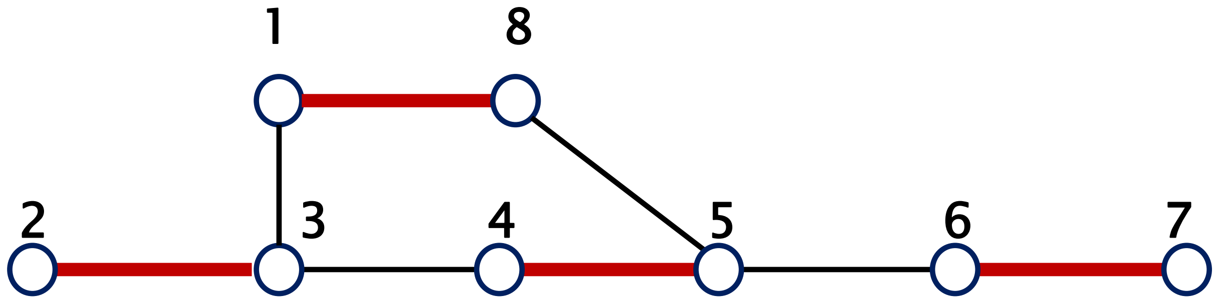
P = [2, 3, 4, 5, 6, 7]

M:



P = [2, 3, 4, 5, 6, 7]

M':



- Condiţii necesare şi suficiente ca un cuplaj să fie de cardinal maxim
- Algoritmi de determinare a unui cuplaj maxim / cuplaj perfect

Condiţii necesare şi suficiente ca un cuplaj să fie de cardinal maxim

- **Observație**: Dacă există un lanț M-alternant deschis în graf, atunci M nu este cuplaj de cardinal maxim (putem obține unul mai mare prin operația de transfer)

- **Condiții suficiente?**
- **Cum putem compara două cuplaje?**

Teorema lui BERGE

Fie $G=(V, E)$ un graf simplu cu $E \neq \emptyset$, şi $M \subseteq E$ un cuplaj. Avem echivalenţa:

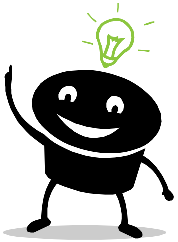
M este **cuplaj de cardinal maxim** în G $\Leftrightarrow$

nu există nici un lanţ M-alternant <u>**deschis**</u> în G

Idee algoritm de determinare a unui cuplaj maxim

- **Fie** M un cuplaj arbitrar în G (exp. $\emptyset$)
- Cât timp **există un lanţ M-alternant deschis P în G**
  - determină un astfel de lanţ P
  - $M = M \,\Delta\, E(P)$

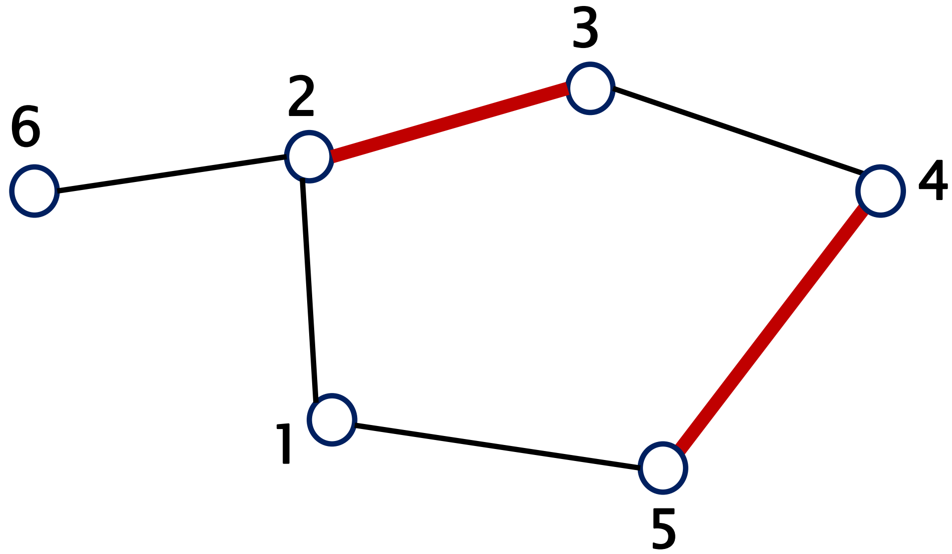
Cum determinăm un lanţ M-alternant deschis?

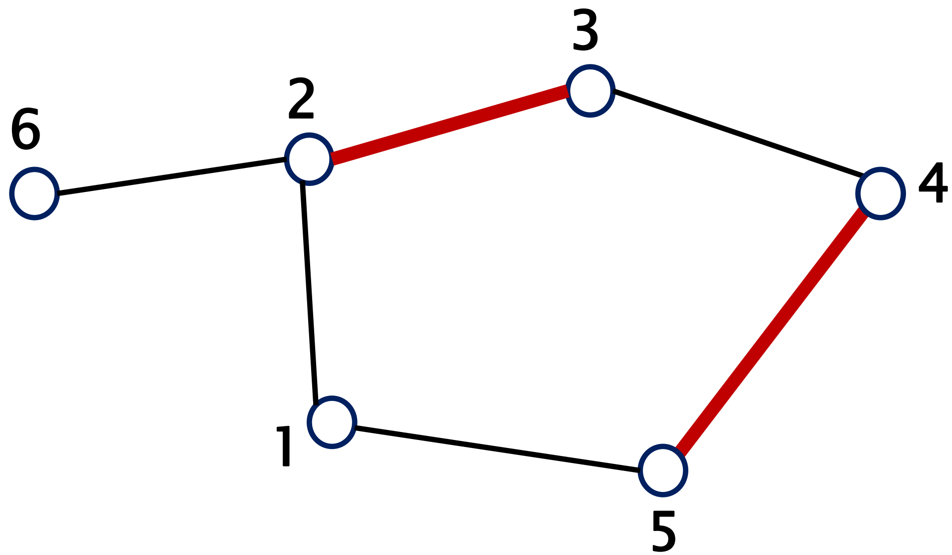


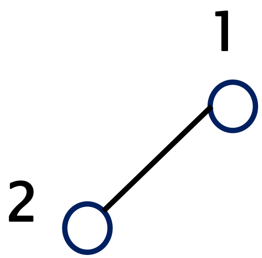
Prin parcurgerea grafului, vector tata…

Prin parcurgere nu determinăm toate lanţurile elementare dintr-un graf.

Dacă există un lanţ M-alternant deschis, va fi sigur el găsit printr-o parcurgere?


6
2
3
4
1
5





Prin parcurgere (BF sau DF) din 1 nu găsim lanţul M-alternant deschis, deoarece 2 este deja vizitat ca fiu al lui 1

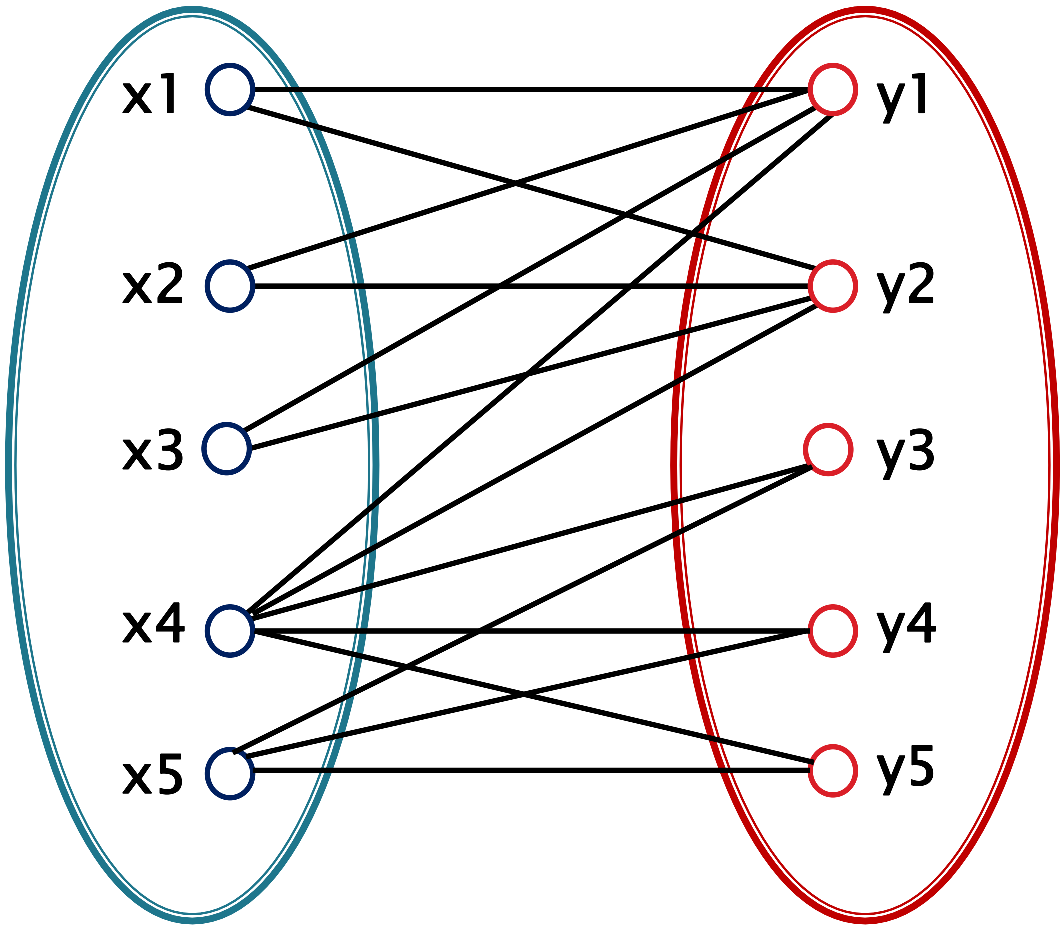
Prin parcurgere **nu** putem determina **toate** lanţurile elementare dintr-un graf.

Dacă există un lanţ M-alternant deschis, va fi sigur el găsit printr-o parcurgere?

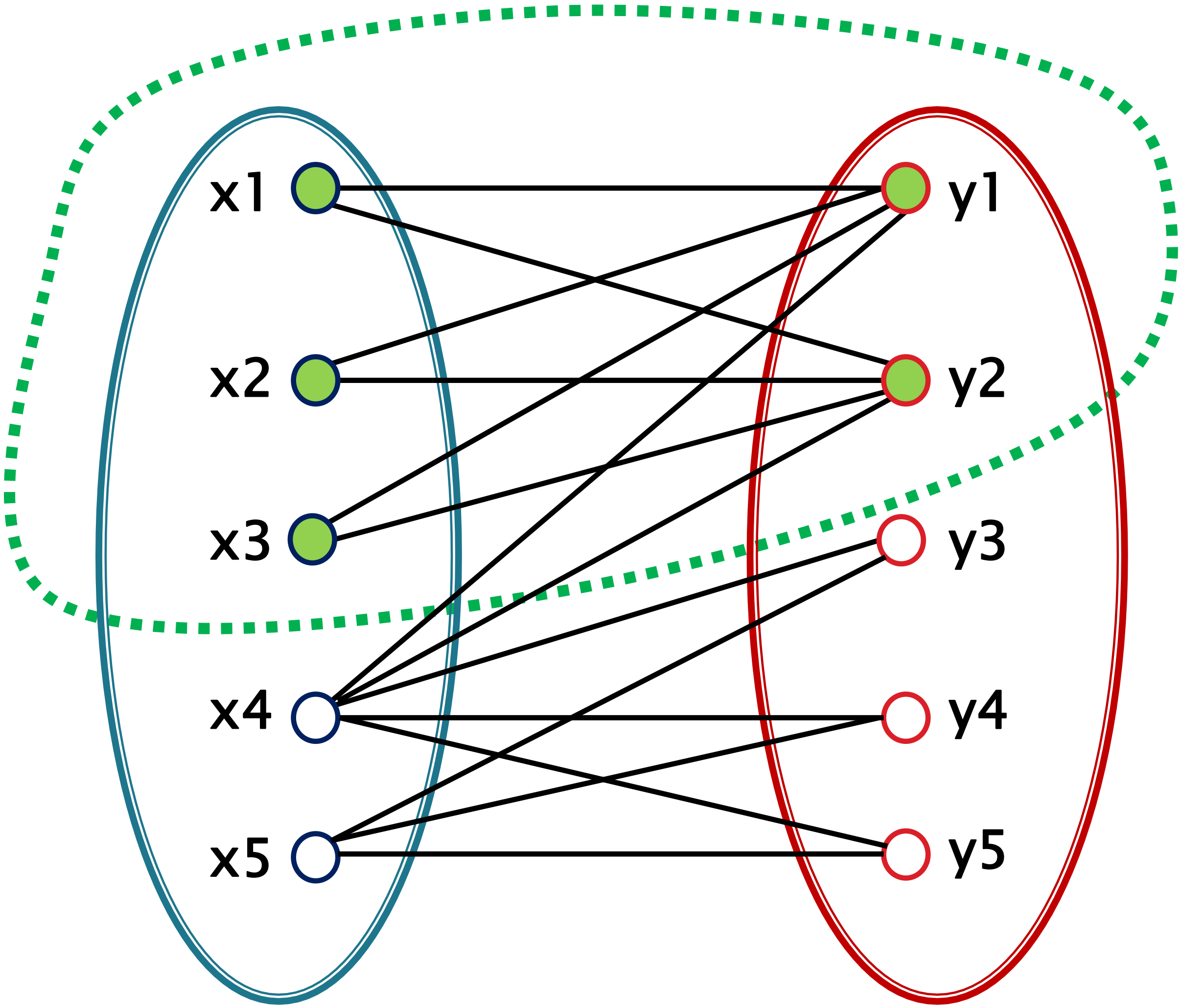
- Da, pentru grafuri bipartite

Cuplaje în grafuri bipartite

Cuplaje perfecte în grafuri bipartite



Cuplaje perfecte în grafuri bipartite



nu există cuplaj perfect

Teorema lui HALL

Notăm

$$N_G(S) = \bigcup_{s \in S} N_G(s) = \{u \mid \exists s \in S \text{ cu } \{s,u\} \in E(G)\}$$

= mulţimea vecinilor vârfurilor din S.

Teorema lui HALL

Fie G=(V, E) un graf **bipartit** cu bipartiţia V = **X** $\cup$ **Y.**

Atunci

G conţine un **cuplaj care saturează toate vârfurile din X** (un cuplaj **al lui X în Y**) $\Leftrightarrow$

$\forall \mathbf{S} \subseteq \mathbf{X}, |\mathbf{S}| \leq |\mathbf{N_G(S)}|$

Corolar 1 (Teorema căsătoriei)

Fie $G=(V, E)$ un graf bipartit p-regulat ($p>0$). Atunci G are un cuplaj perfect.

Corolar 2

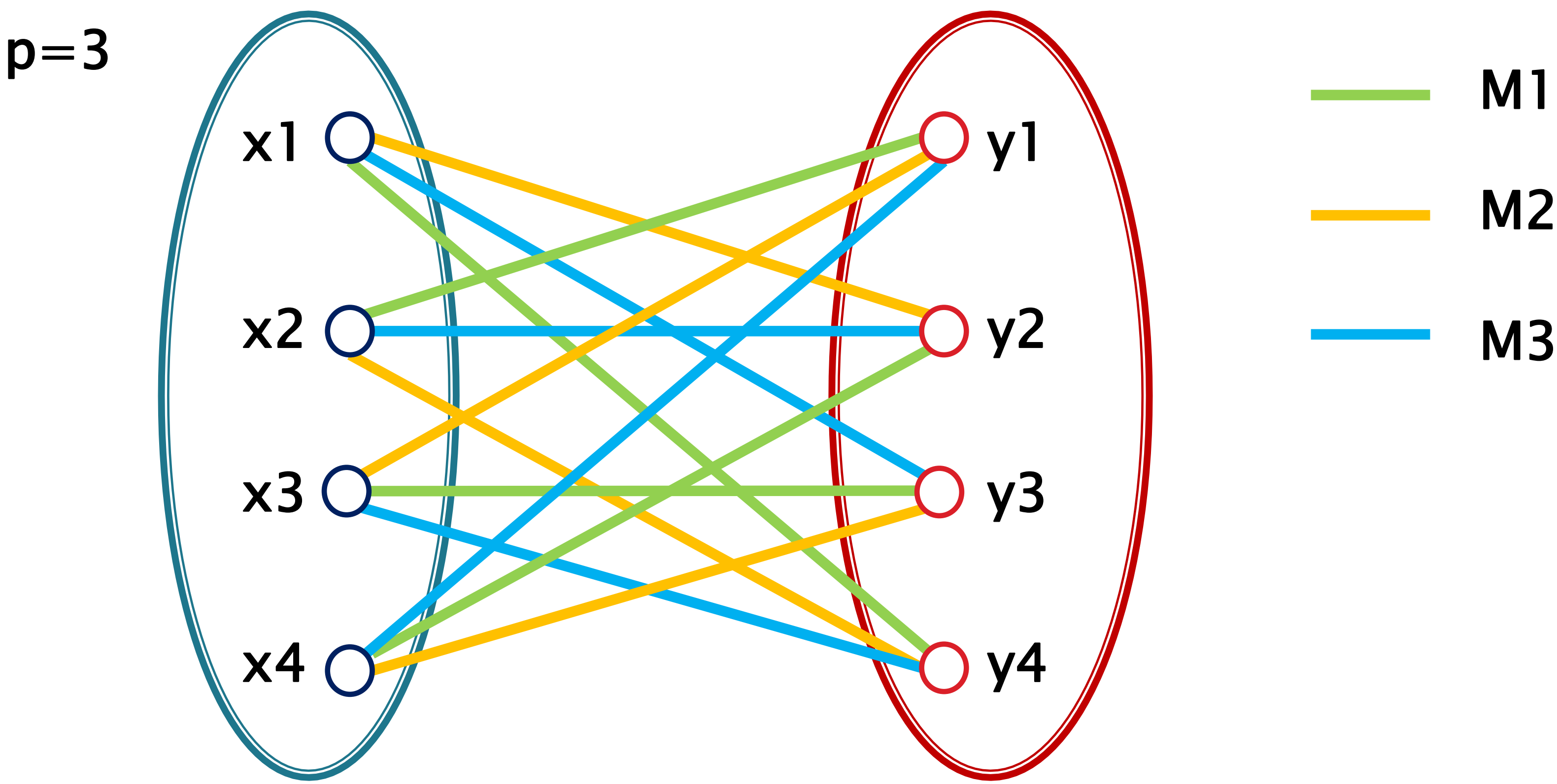
Fie $G=(V, E)$ un graf bipartit p-regulat ($p>0$). Atunci există $M_1, M_2, \ldots, M_p$ cuplaje perfecte disjuncte în G cu

$$\mathbf{E(P) = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_p}$$

Corolar 2

Fie $G=(V, E)$ un graf bipartit p-regulat ($p>0$). Atunci există $M_1, M_2, \ldots, M_p$ cuplaje perfecte disjuncte în G cu

$$E(P) = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_p$$



Corolar 2

Fie G=(V, E) un graf bipartit p-regulat (p>0). Atunci există M_1, M_2,..., M_p cuplaje perfecte disjuncte în G cu

$$\mathbf{E(P) = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_p}$$

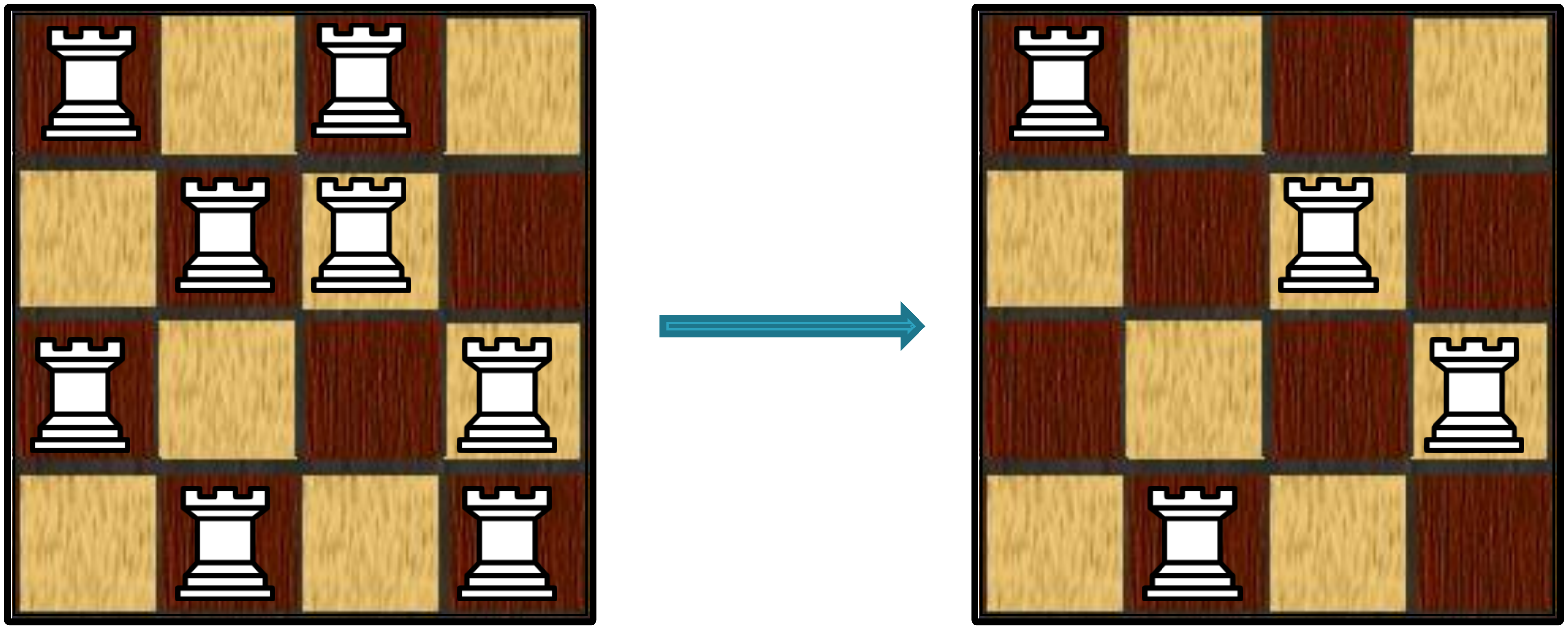
Interpretare: Muchiile unu graf bipartit p-regulat pot fi colorate cu p culori astfel încât orice două muchii adiacente au culori diferite

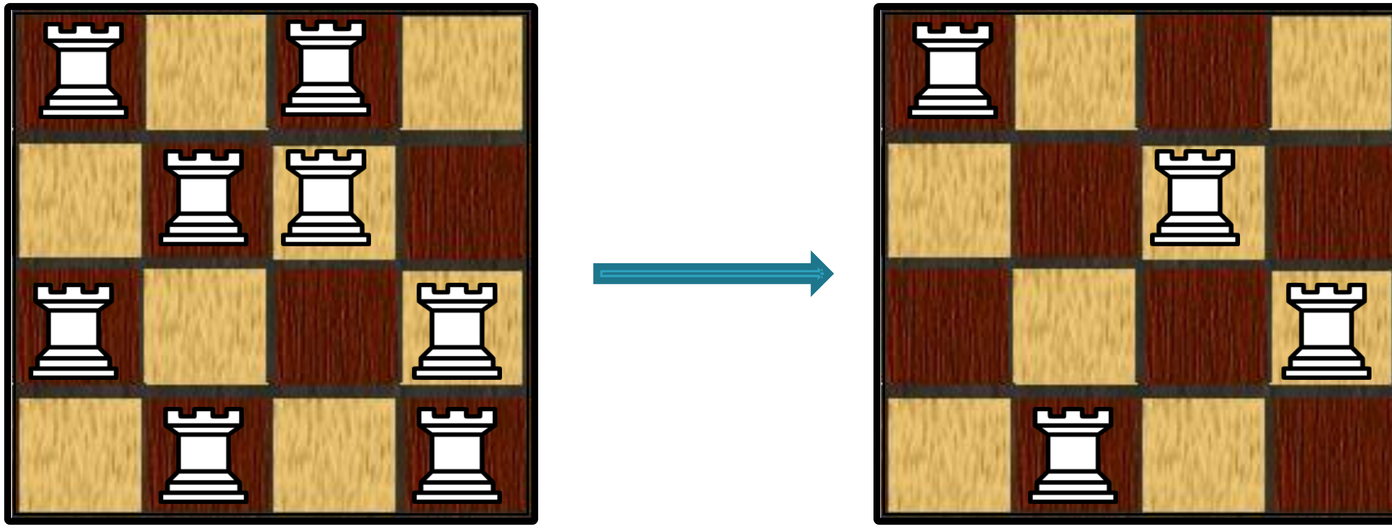
- p este numărul minim de culori necesar unei astfel de colorări a muchiilor

Aplicaţie:
Matrice de permutări

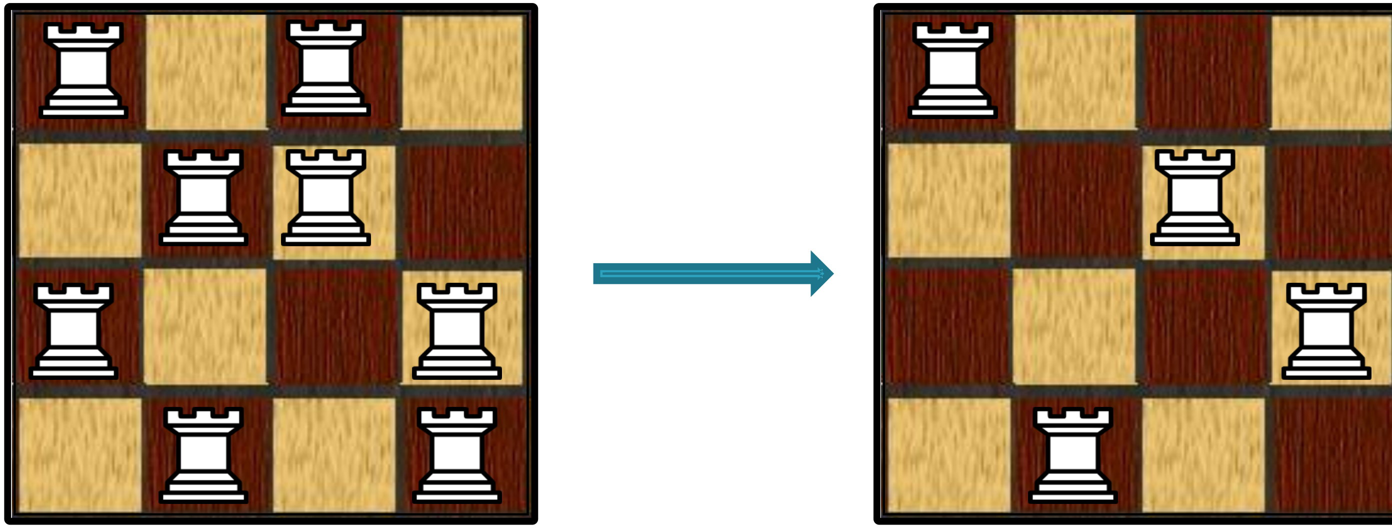
Problemă

Pe o tablă de tip șah de dimensiuni nxn sunt așezate ture, astfel încât pe fiecare linie și fiecare coloană sunt **același număr de ture**. Să se arate că se pot păstra pe tablă n dintre aceste ture, care nu se atacă două câte două





$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



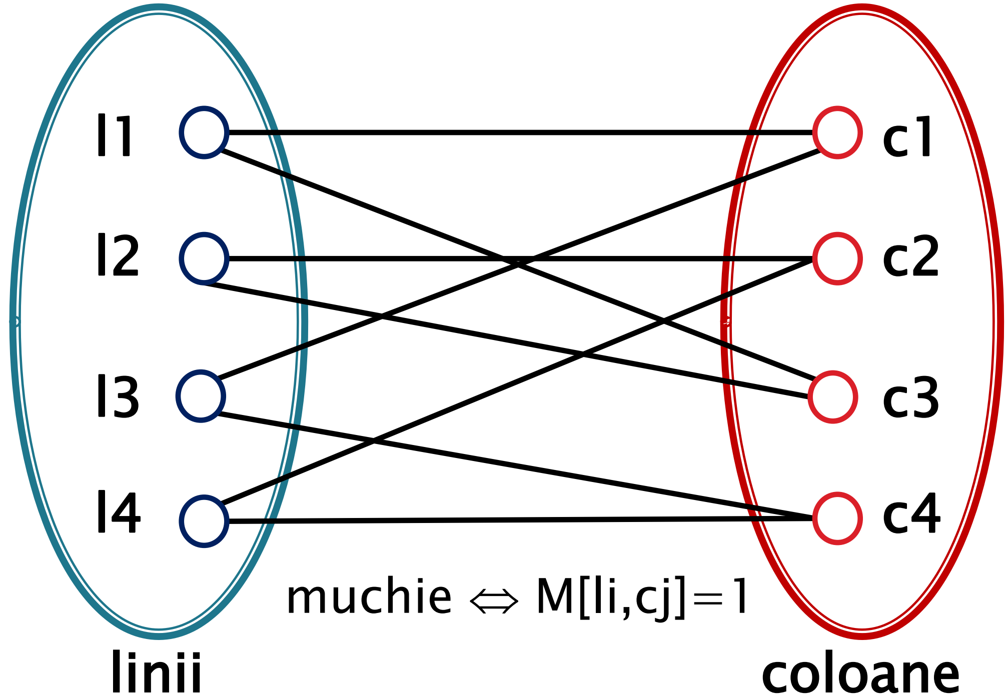
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Reformulare cu matrice

Fie $p>1$ și M o matrice nxn cu elemente {0,1} a.î pe fiecare linie și pe fiecare coloană sunt exact p elemente 1.

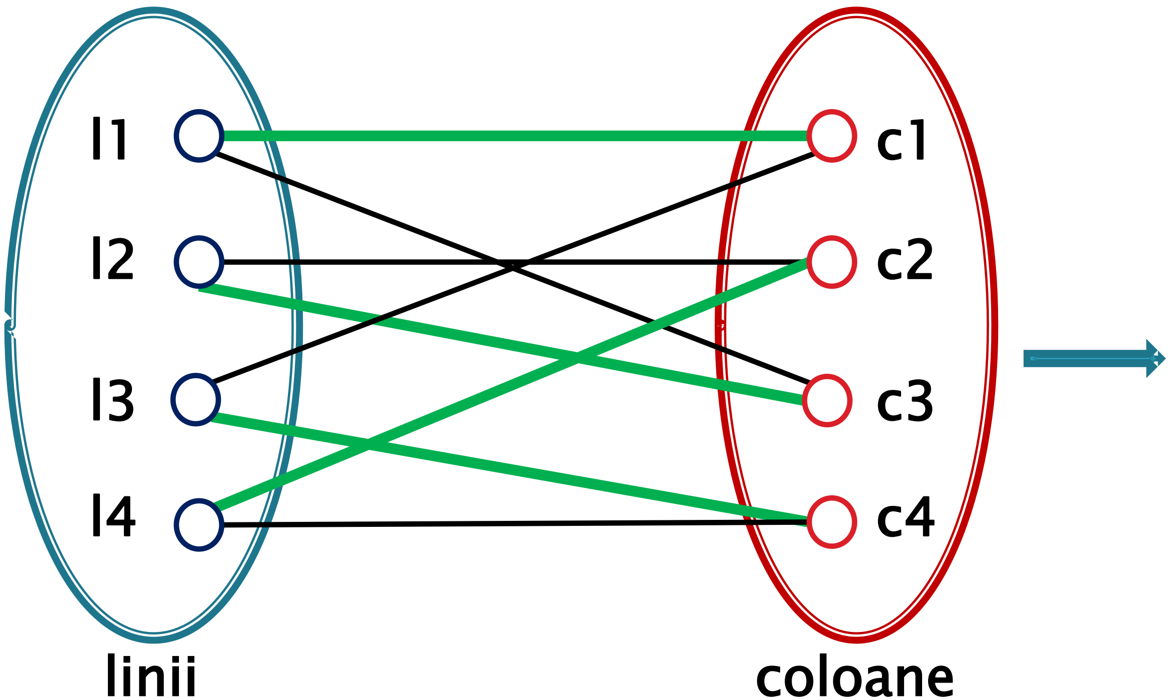
Atunci M conține o matrice de permutări (având un unic 1 pe fiecare linie și coloană)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$



G – graf bipartit p-regulat

- **există matrice de permutări în M** ⇔ există cuplaj perfect în G
- **Rezultă din consecințele teoremei lui HALL**



$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

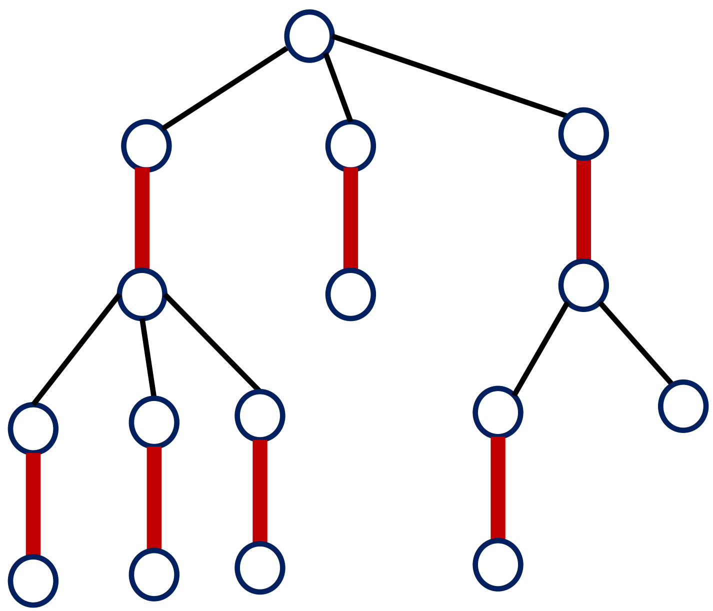
Cuplaj perfect

Algoritmul ungar

Amintim următorul algoritm generic de determinare a unui cuplaj maxim:

- **Fie** M un cuplaj arbitrar în G (exp. $\emptyset$)
- Cât timp **există un lanţ M-alternant deschis P în G**
  - determină un astfel de lanţ P
  - $M = M \,\Delta\, E(P)$

Pentru grafuri bipartite putem determina lanţuri M-alternante deschise **parcurgând "alternant"** graful dintr-un vârf nesaturat u şi construind un **arbore M-alternant**



Algoritmul ungar

- **Schema**:
  1. Fie M un cuplaj arbitrar în G (de exemplu $\emptyset$)
  2. Cât timp M nu saturează toate vârfurile din X execută
     - Alege u un vârf **M-nesaturat** din X
     - Construieşte un arbore M-alternant cu rădăcina în u până când
       a. un vârf nesaturat y este adăugat la arbore;
          fie P unicul u-y lanţ elementar din arbore
          $M \leftarrow M \Delta E(P)$
       b. Arborele nu mai poate fi extins (este maximal).
          STOP, NU există cuplaj al lui X în Y

Algoritmul ungar - sugestii de implementare

Construcţia arborelui M-alternant folosind BF din u

1. Iniţializări
2. Cât timp $C \neq \emptyset$ execută

    $x \leftarrow$ extrage(C)

    pentru y vecin al lui x execută

        daca viz[y]=0 atunci

            tata[y] $\leftarrow$ x; viz[y] $\leftarrow$1

Algoritmul ungar - sugestii de implementare

Construcţia arborelui M-alternant folosind BF din u

1. Iniţializări
2. Cât timp $C \neq \emptyset$ execută

    $x \leftarrow$ extrage(C)

    pentru y vecin al lui x execută

      daca viz[y]=0 atunci

        tata[y] $\leftarrow$ x; viz[y] $\leftarrow$1

        dacă y este M-nesaturat

          fie P u-y lanţul elementar din T (obţinut folosind tata)

          $M \leftarrow M \Delta E(P)$; **break**

        altfel

          fie z unicul vârf cu $yz \in M$

          viz[z] $\leftarrow$1; tata[z] $\leftarrow$ y;

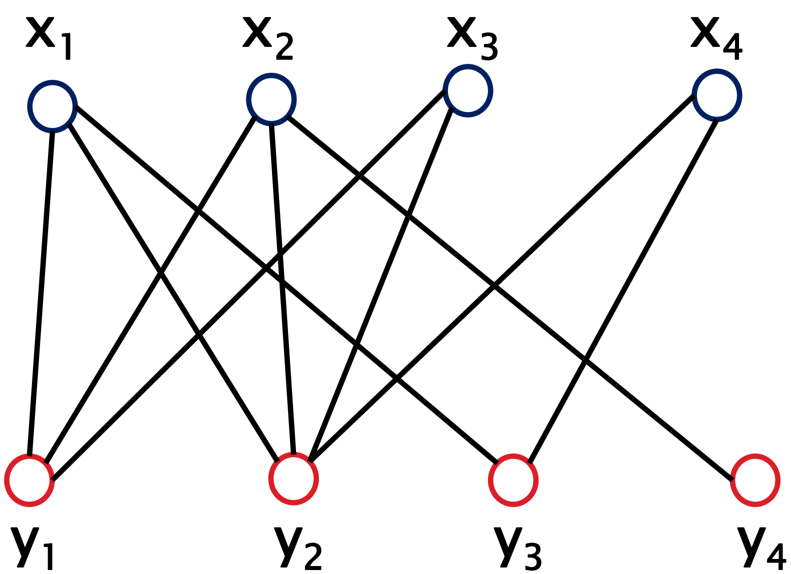
          adauga(z, C) (!!**nu si y**)

Algoritmul ungar – sugestii de implementare

Construcţia arborelui M-alternant se poate face şi folosind metoda de parcurgere DF

Algoritmul ungar
Exemplu

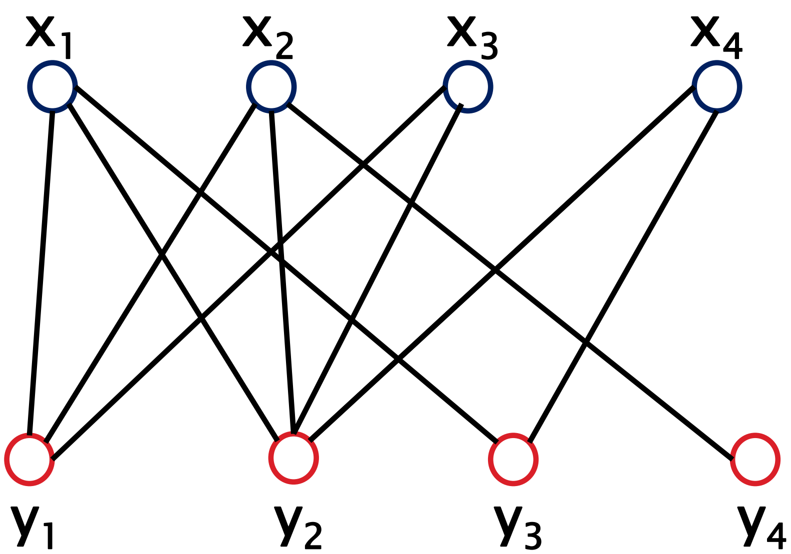
Iniţializări



$M = \varnothing$

Etapa 1

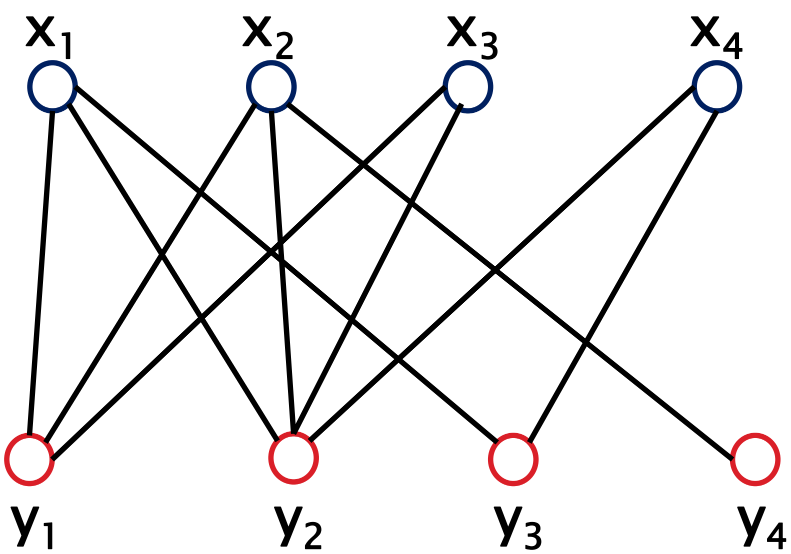
$M = \varnothing$



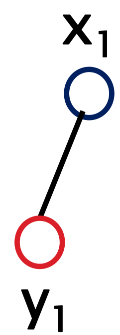
$u = x_1$

Etapa 1

$M = \varnothing$

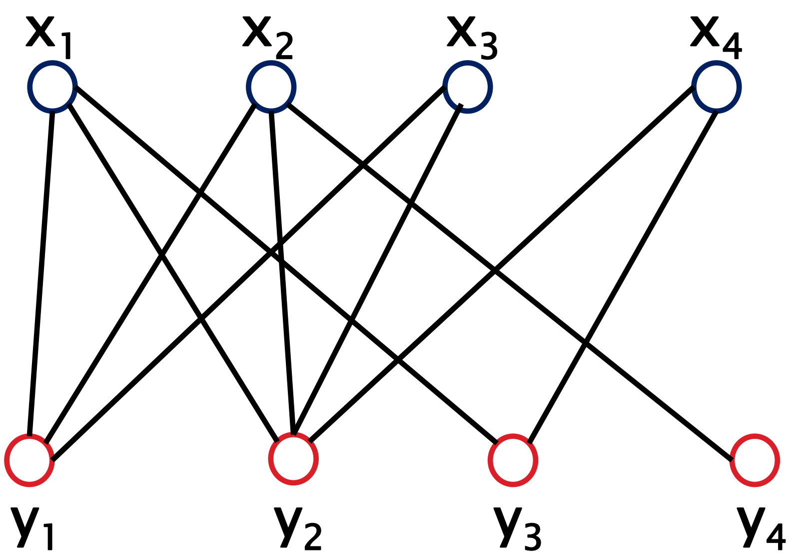


$u = x_1$

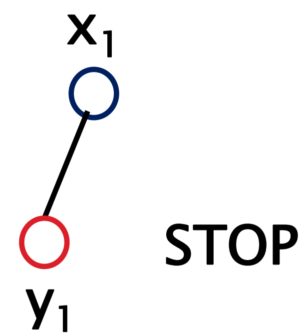


Etapa 1

$M = \varnothing$

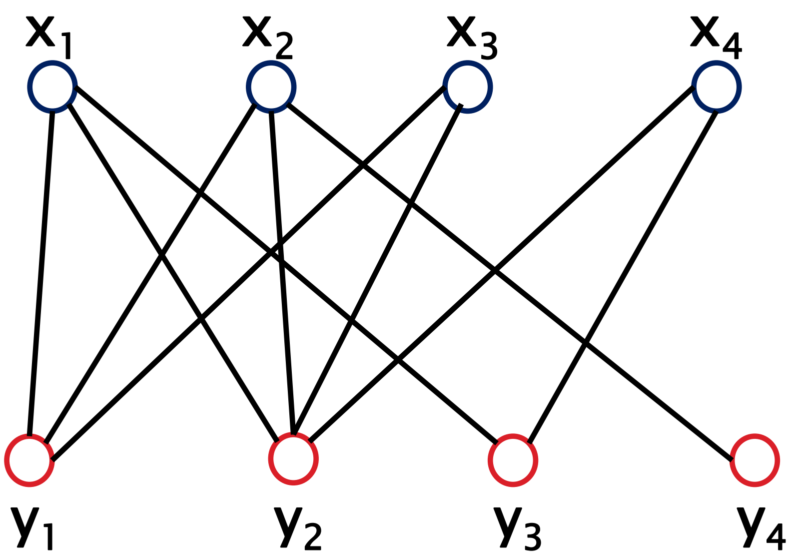


$u = x_1$

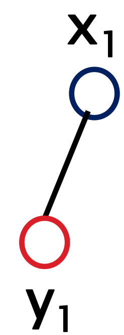


Etapa 1

$M = \varnothing$

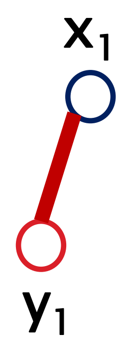


$u = x_1$



STOP

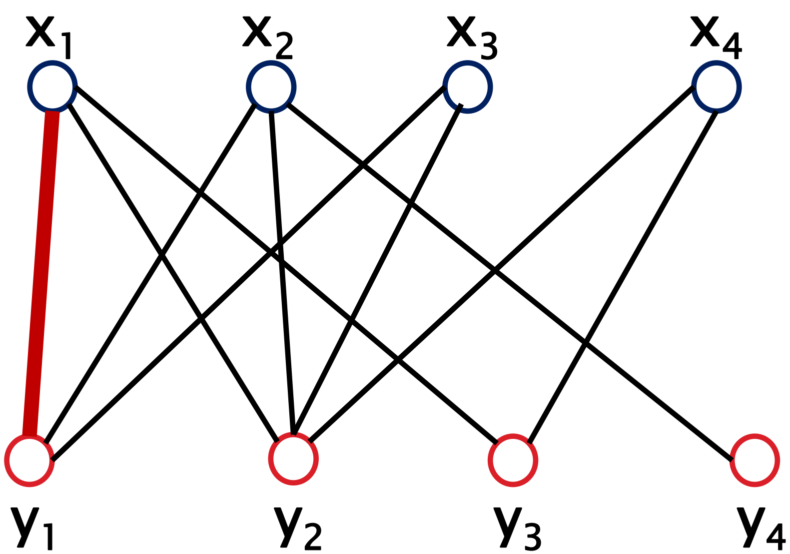
$P = [x_1, y_1]$



$M_1 = \{x_1\ y_1\}$

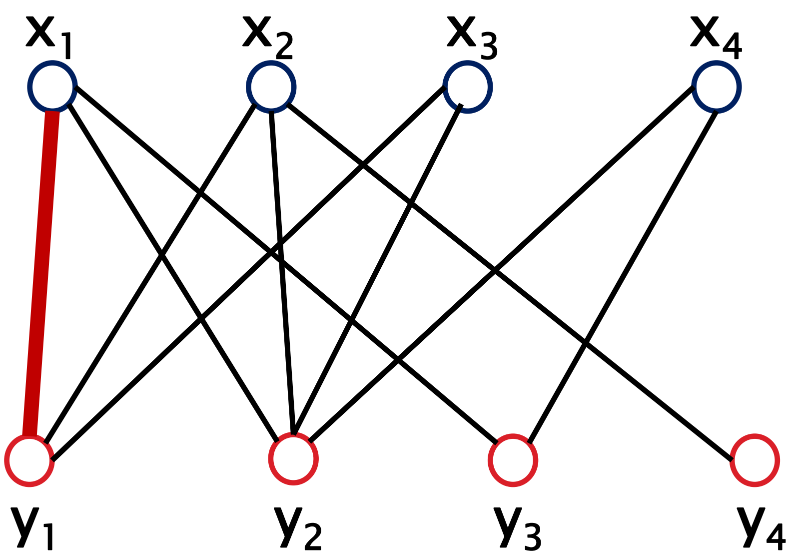
Etapa 2

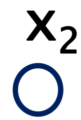
$M = \{x_1y_1\}$



Etapa 2

$M = \{x_1y_1\}$ $u = x_2$

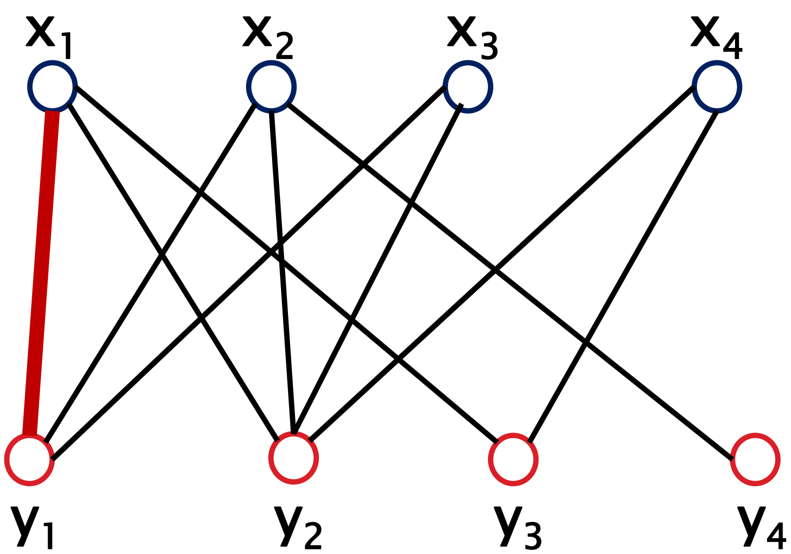


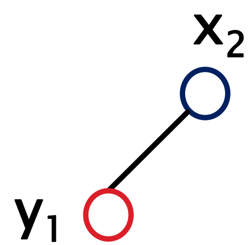


Etapa 2

$M = \{x_1 y_1\}$

$u = x_2$

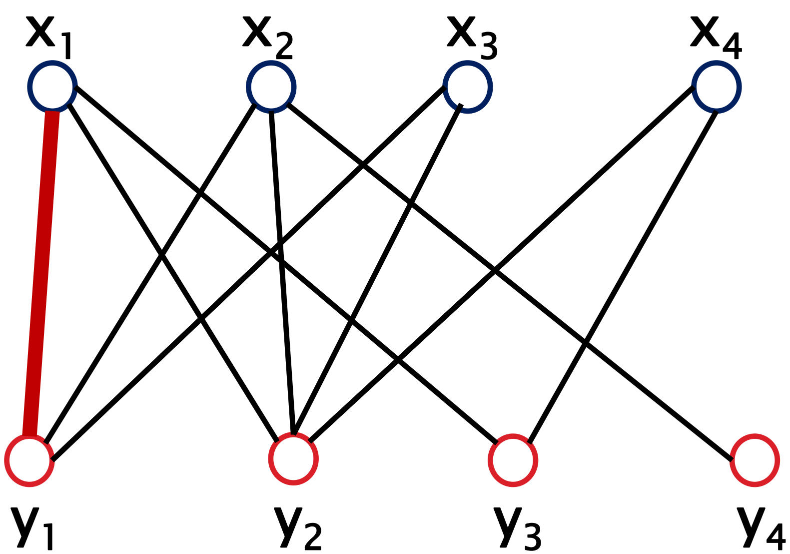


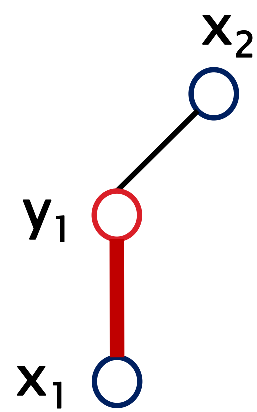


Etapa 2

$M = \{x_1y_1\}$

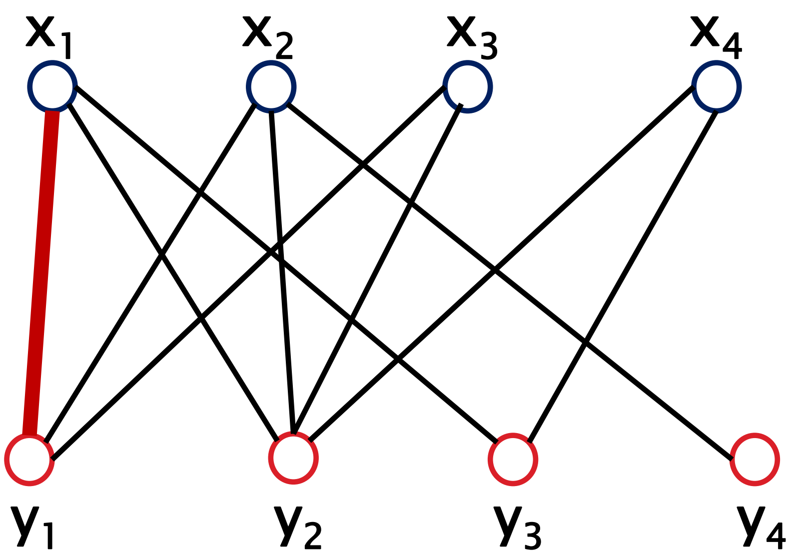
$u = x_2$



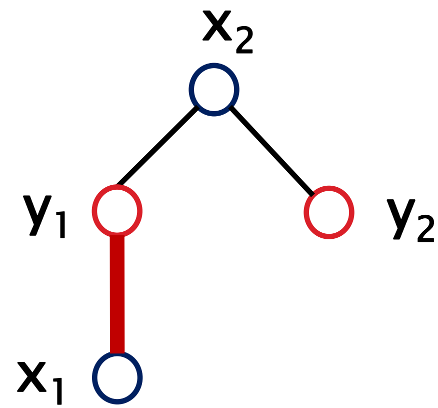


Etapa 2

$M = \{x_1y_1\}$

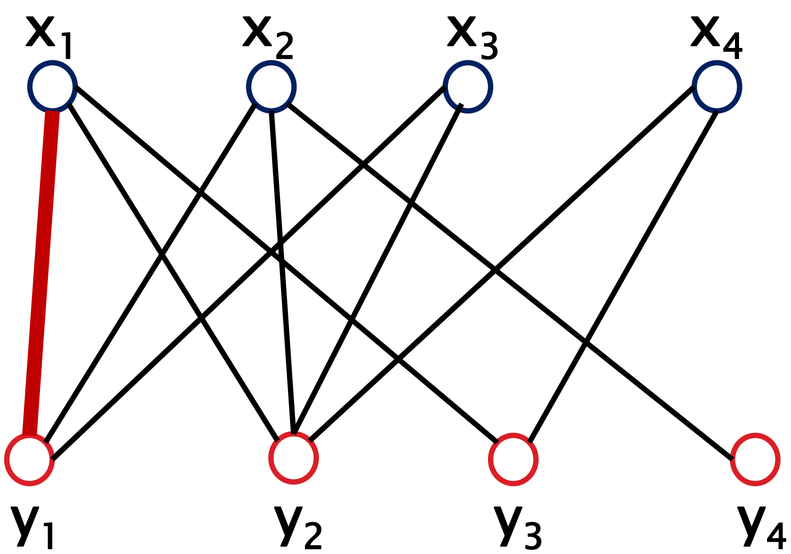


$u = x_2$

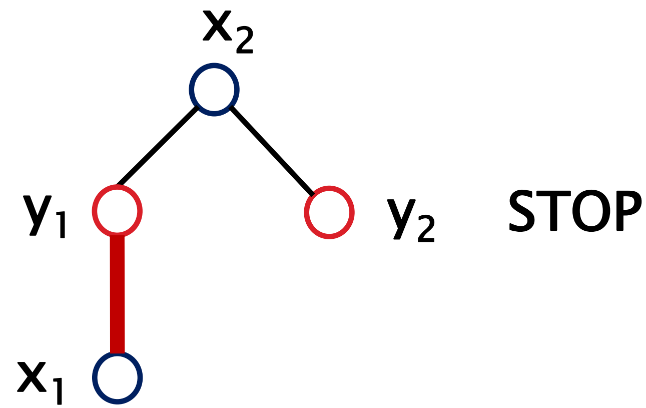


Etapa 2

$M = \{x_1 y_1\}$



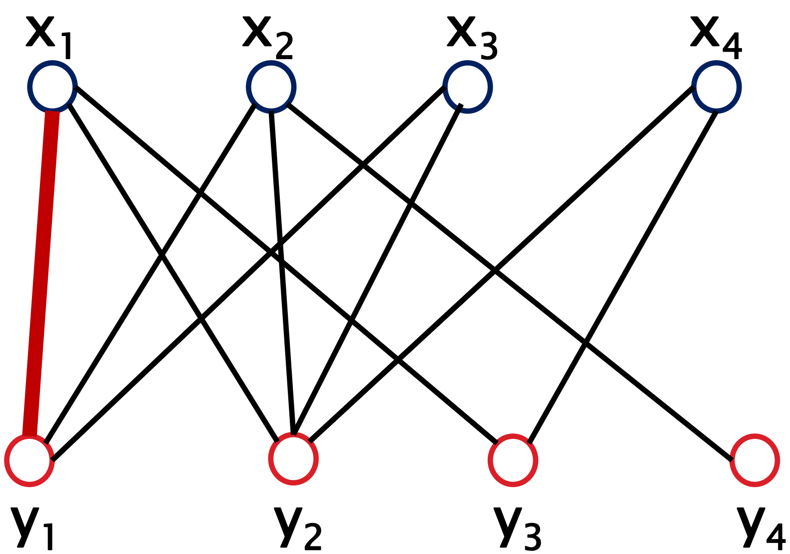
$u = x_2$

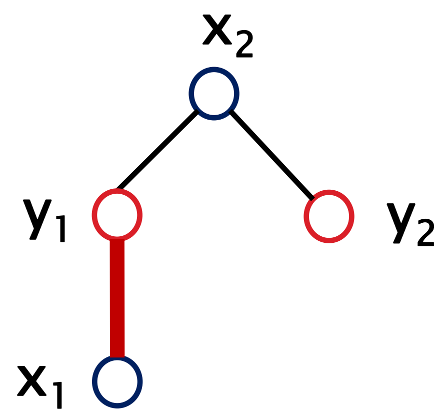


Etapa 2

$M = \{x_1 y_1\}$

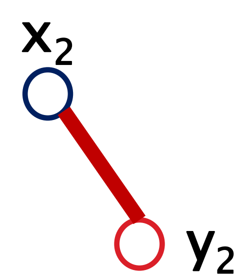
$u = x_2$





STOP

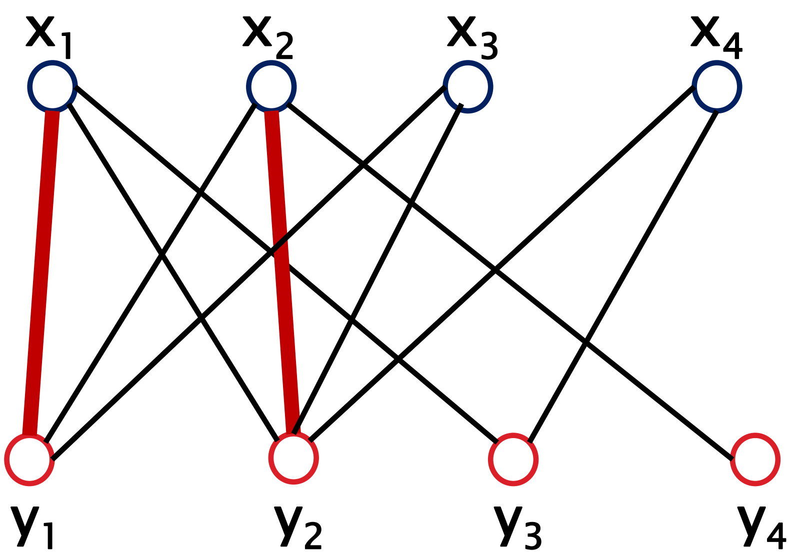
$P = [x_2, y_2]$



$M = \{x_1 y_1, x_2 y_2\}$

Etapa 3

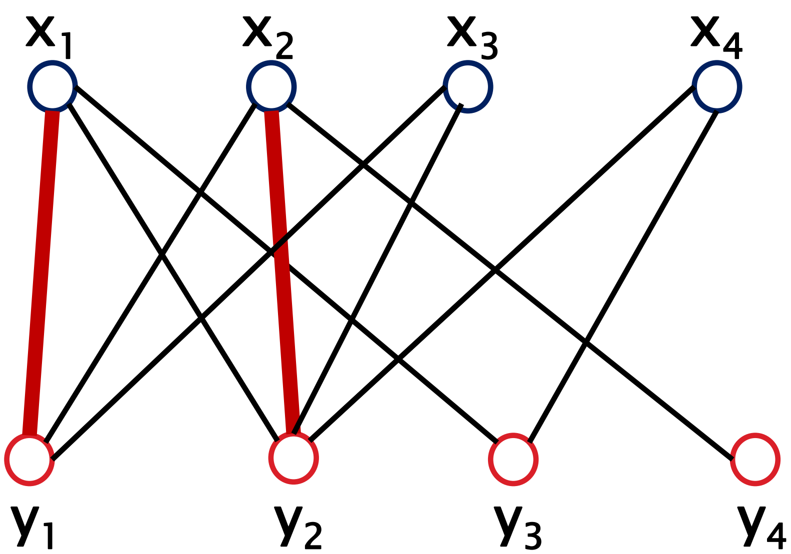
$$M = \{x_1y_1,\ x_2y_2\}$$



Etapa 3

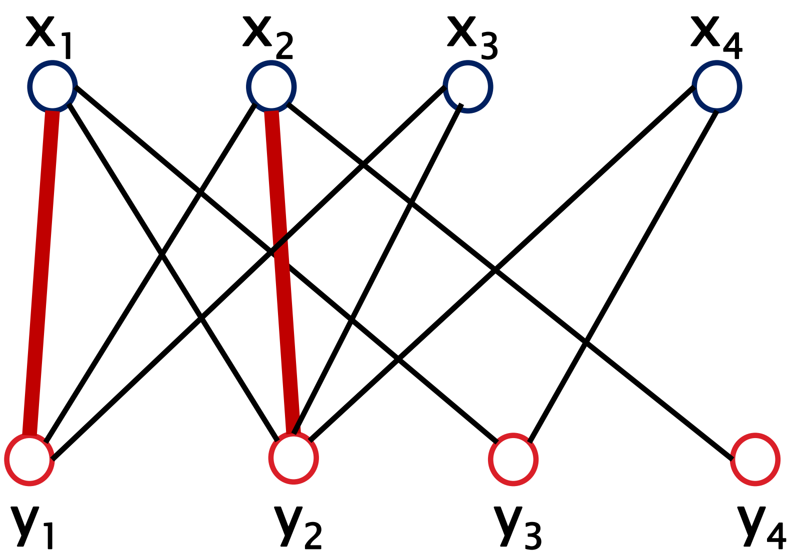
$u = x_3$

$M = \{x_1y_1, x_2y_2\}$

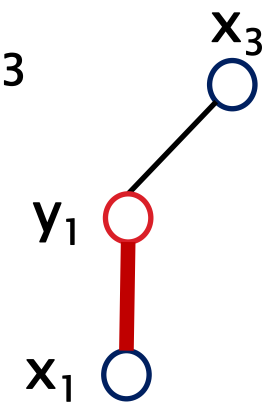


Etapa 3

$M = \{x_1y_1, x_2y_2\}$



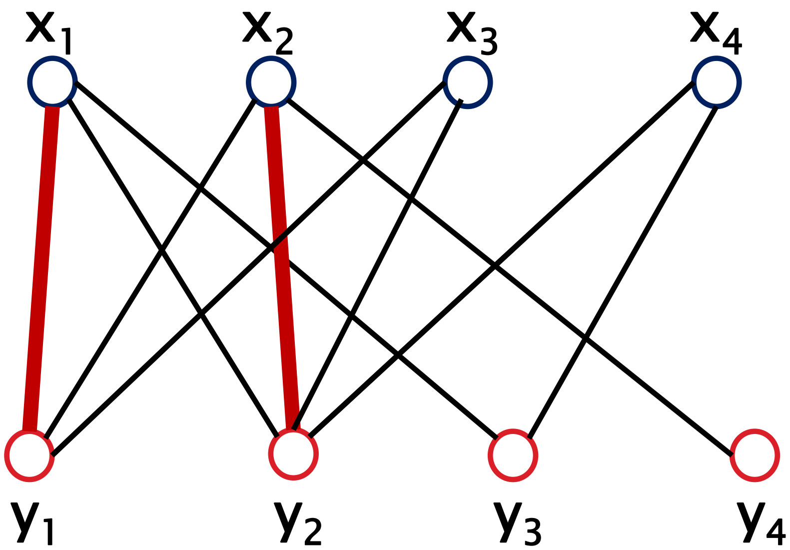
$u = x_3$

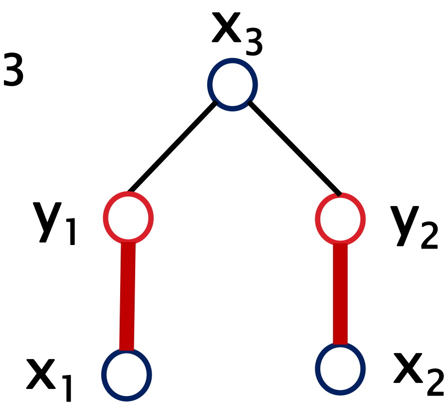


Etapa 3

$u = x_3$

$M = \{x_1y_1,\ x_2y_2\}$

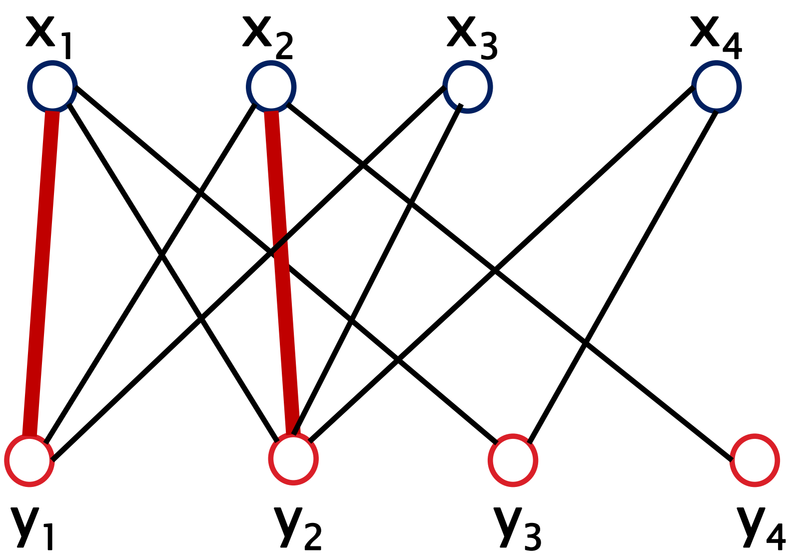


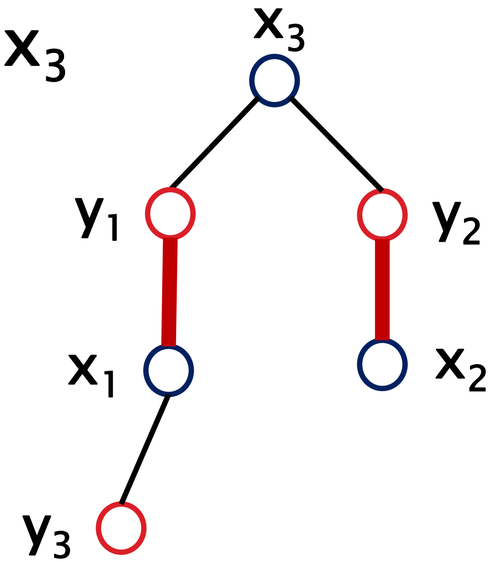


Etapa 3

$u = x_3$

$M = \{x_1y_1, x_2y_2\}$

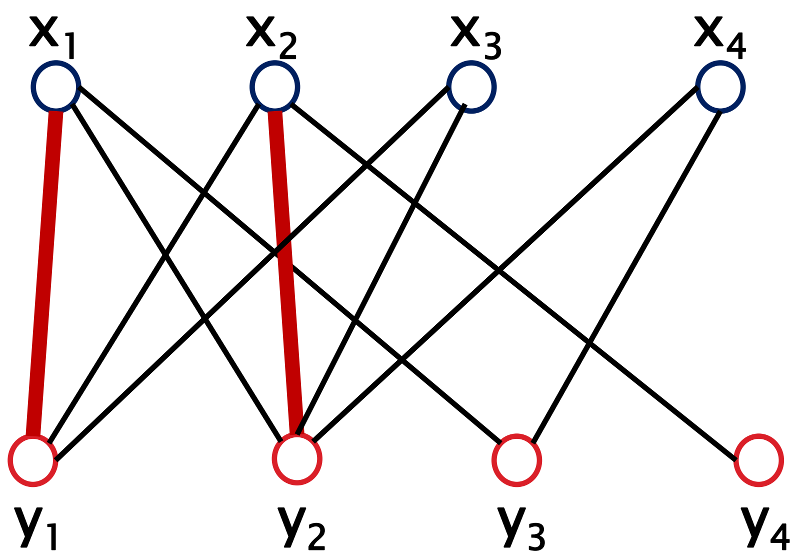


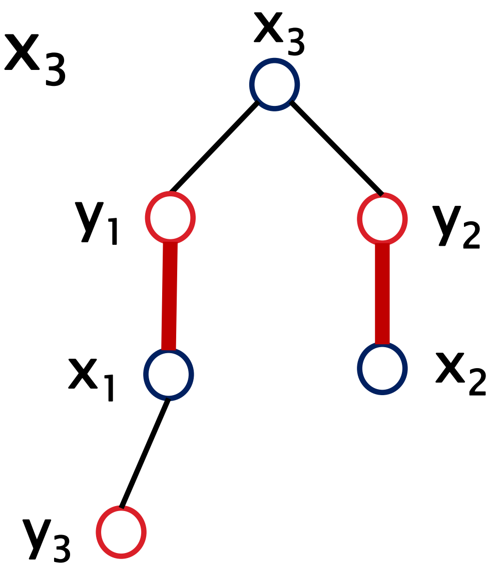


Etapa 3

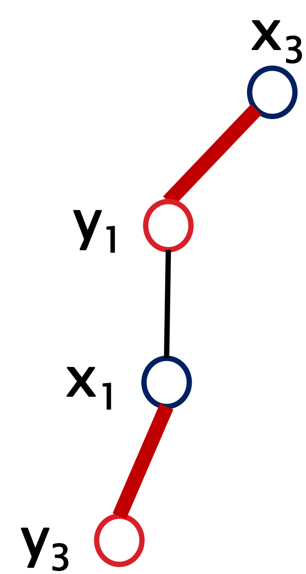
$u = x_3$

$M = \{x_1y_1, x_2y_2\}$





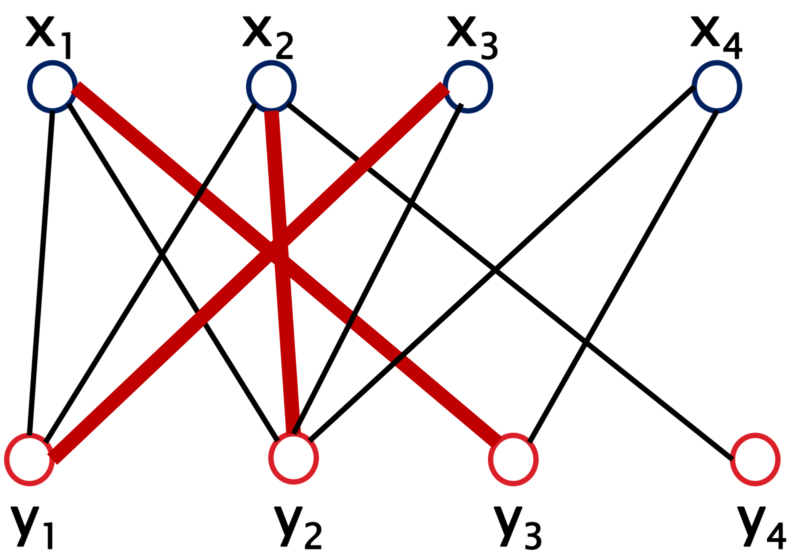
$P = [x_3, y_1, x_1, y_3]$



$M = \{x_3y_1, x_1y_3, x_2y_2\}$

Etapa 4

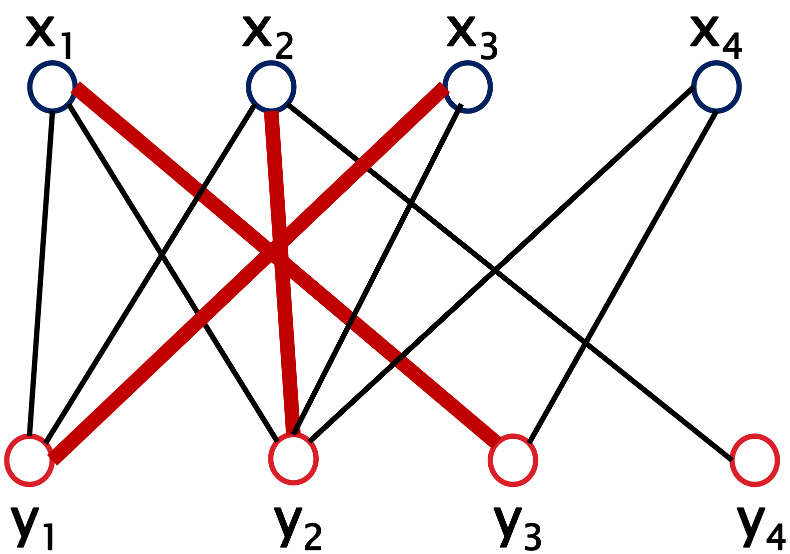
$M = \{x_3y_1, x_1y_3, x_2y_2\}$



Etapa 4

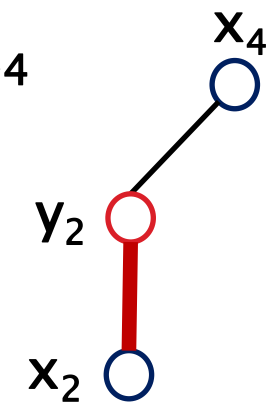
$u = x_4$

$M = \{x_3y_1,\ x_1y_3,\ x_2y_2\ \}$

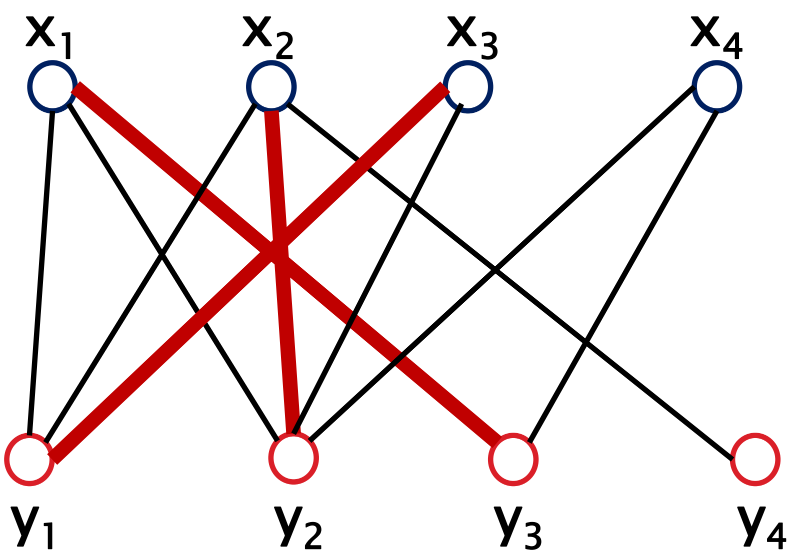


Etapa 4

$u = x_4$

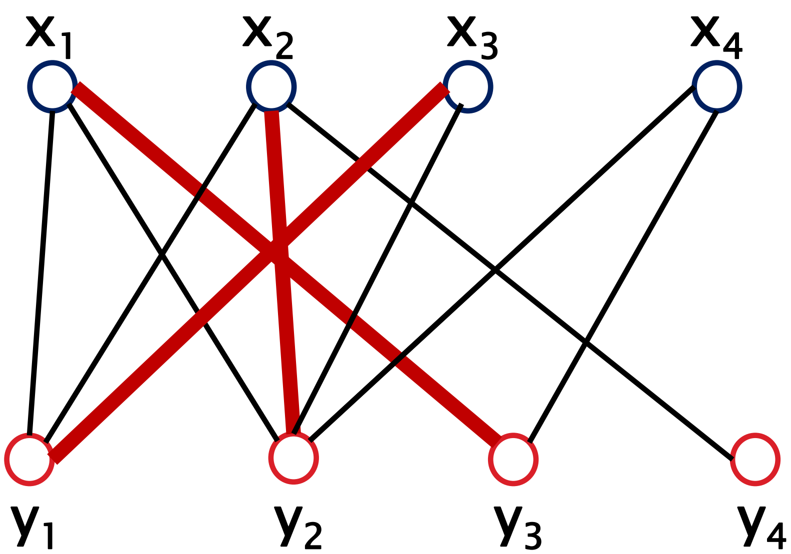


$M = \{x_3y_1, x_1y_3, x_2y_2\}$

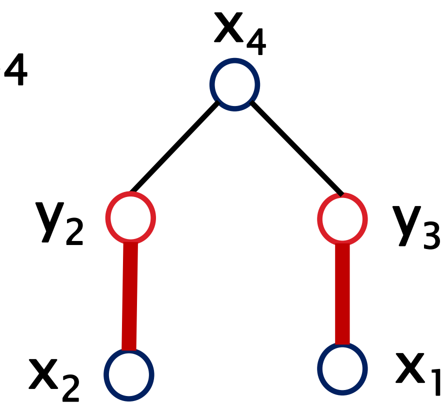


Etapa 4

$M = \{x_3y_1, x_1y_3, x_2y_2\}$

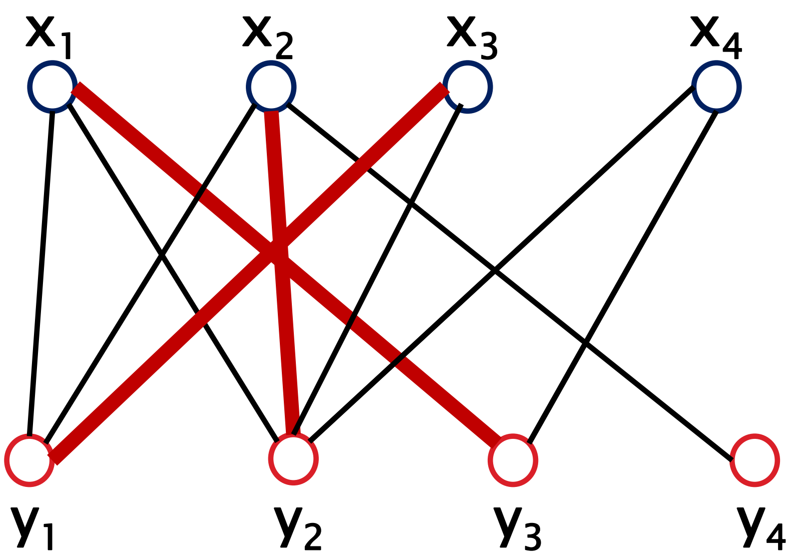


$u = x_4$

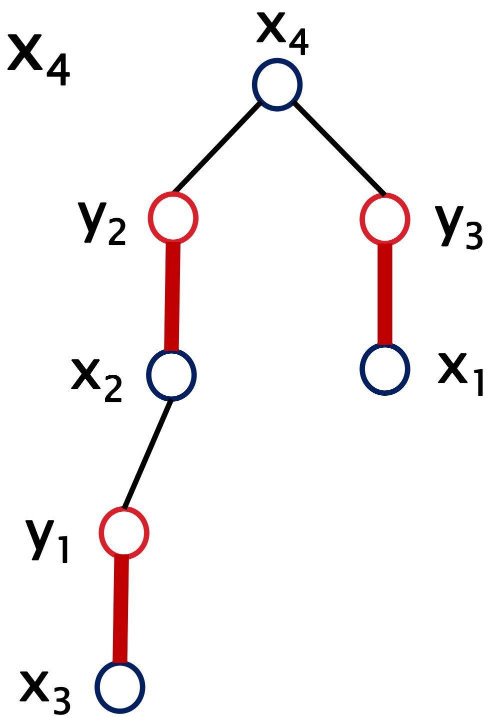


Etapa 4

$$M = \{x_3y_1, x_1y_3, x_2y_2\}$$



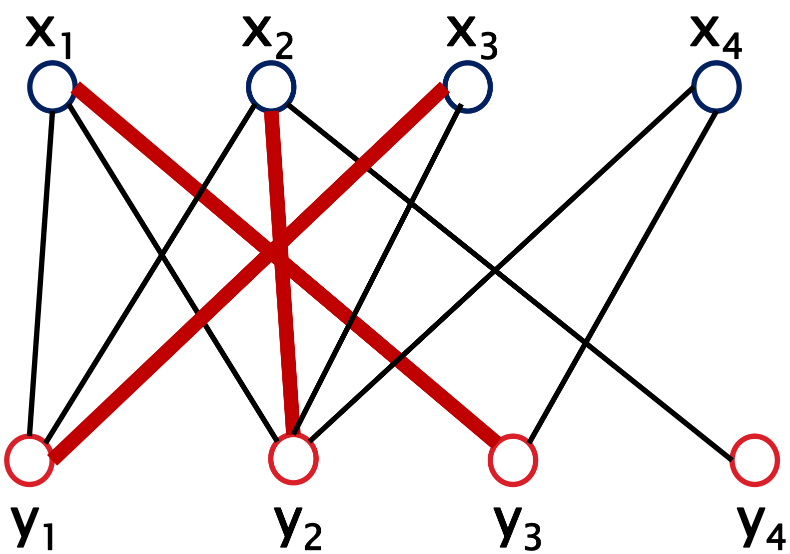
$u = x_4$

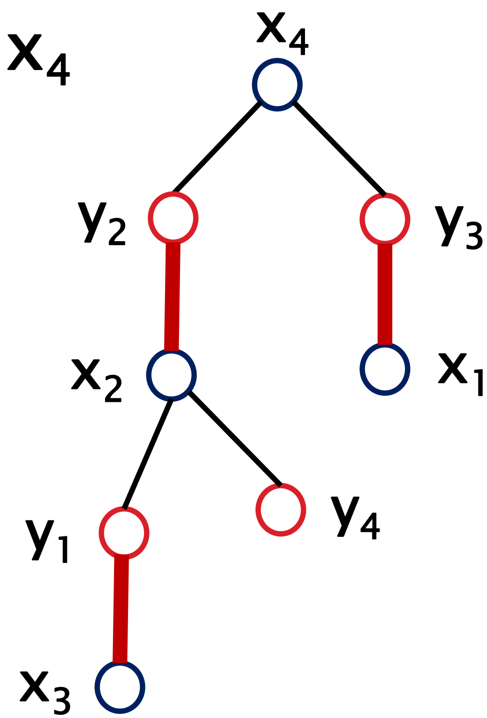


Etapa 4

$u = x_4$

$M = \{x_3y_1, x_1y_3, x_2y_2\}$

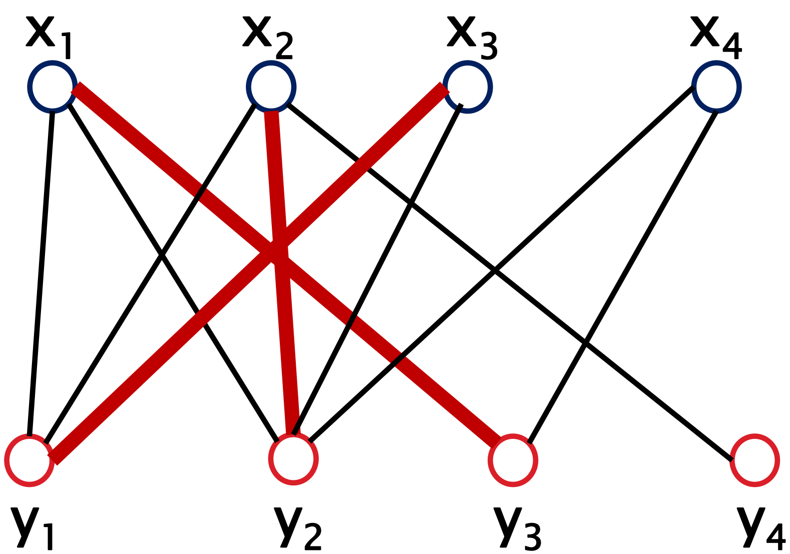


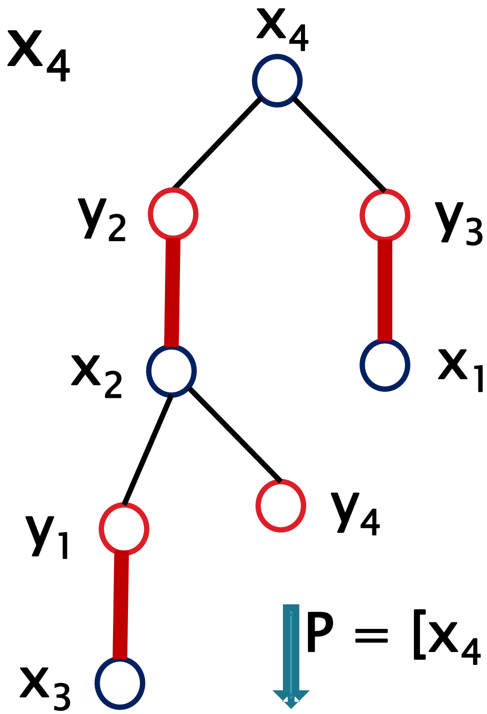


Etapa 4

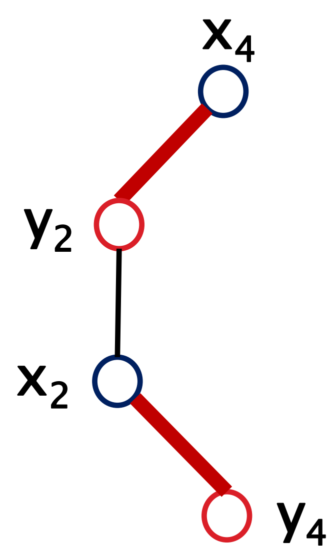
$u = x_4$

$M = \{x_3y_1,\ x_1y_3,\ x_2y_2\}$





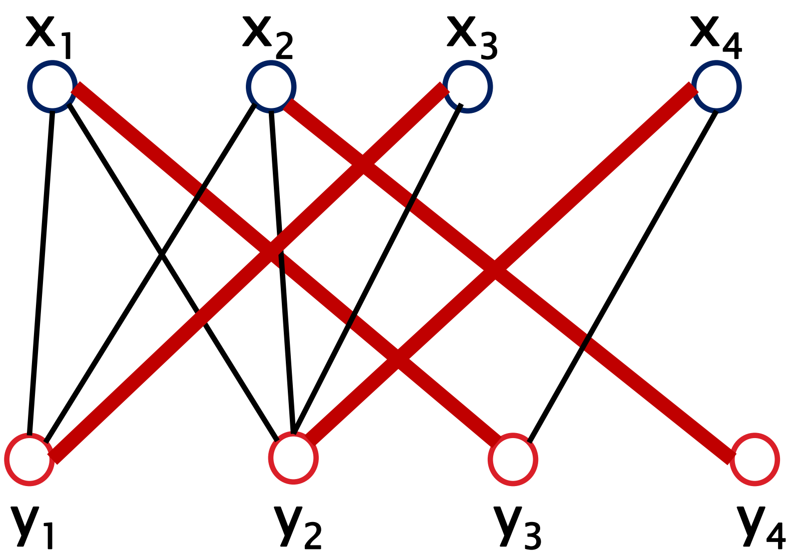
$P = [x_4,\ y_2,\ x_2,\ y_4]$



$M = \{x_3y_1,\ x_1y_3,\ x_4y_2,\ x_2y_4\}$

Etapa 4

$M = \{x_3y_1, x_1y_3, x_4y_2, x_2y_4\}$



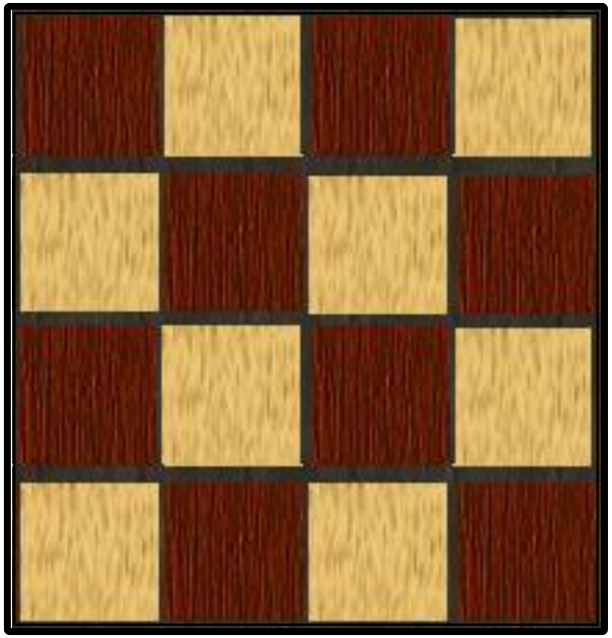
Cuplaj al lui X în Y
STOP

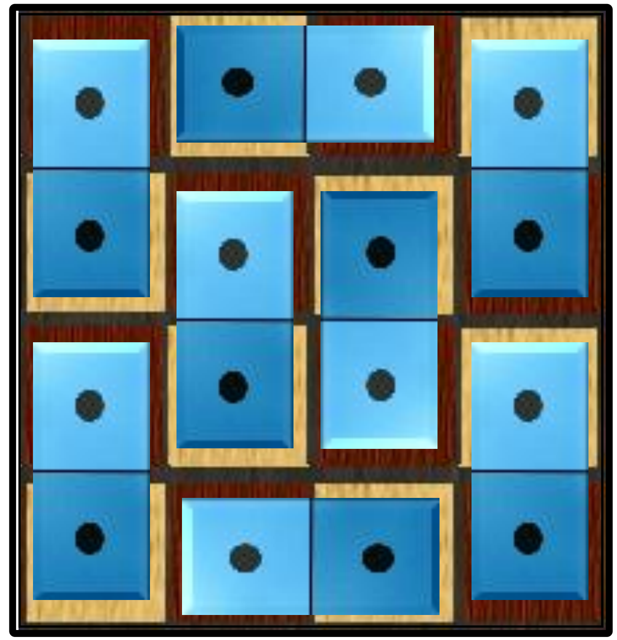
Aplicaţii

Aplicaţie:
Acoperire tabla cu piese de domino

Acoperire

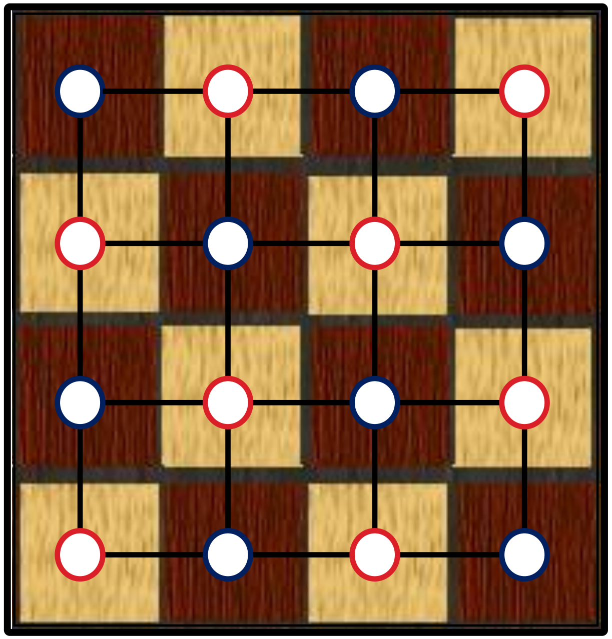
- **Acoperirea unei table cu piese de domino**

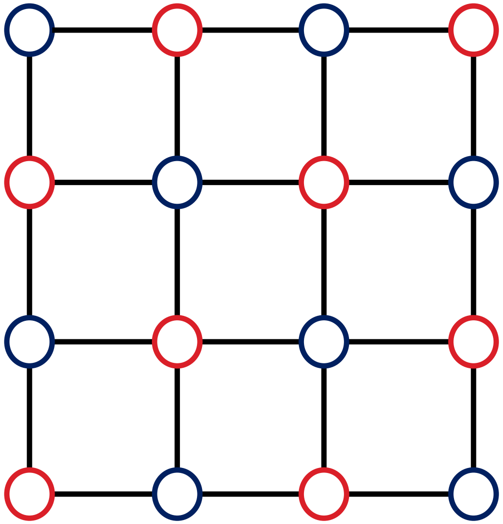




Acoperire

- Tabla $\Rightarrow$ graful grid
- Acoperire $\Rightarrow$ cuplaj perfect

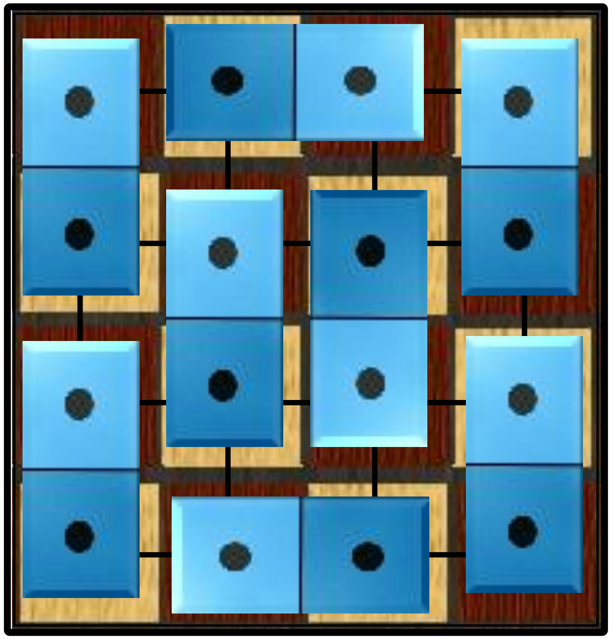


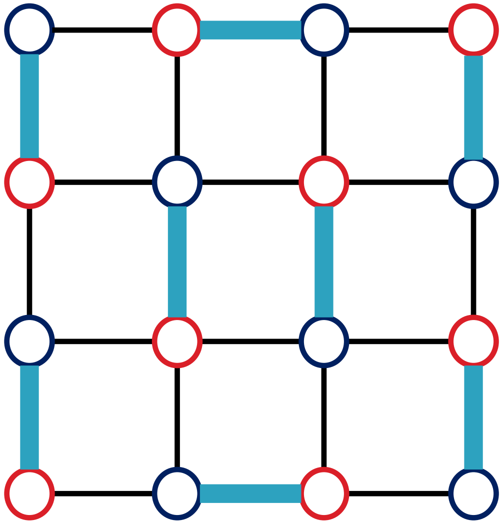


Graful grid

Acoperire

- Tabla ⇒ graful grid
- Acoperire ⇒ cuplaj perfect





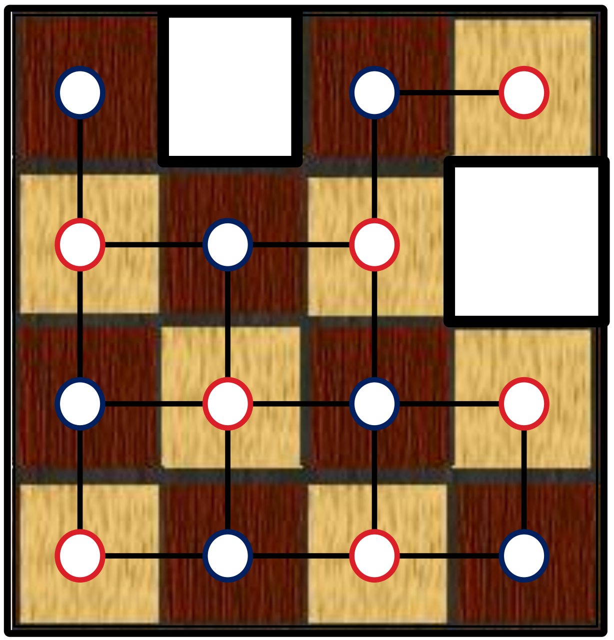
Graful grid

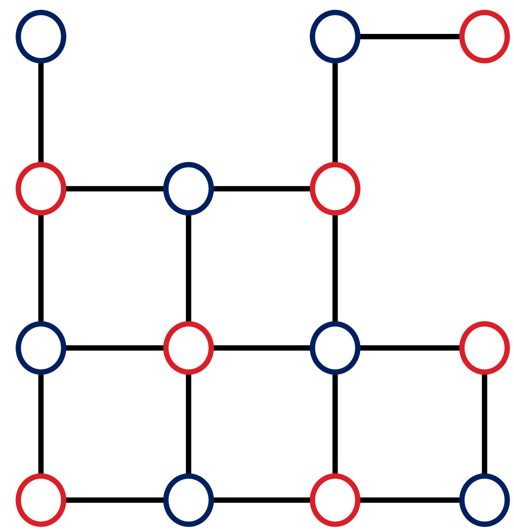
Acoperire

- **Acoperirea unei table m x n cu piese de domino**
  - Este acoperibilă $\Leftrightarrow$ mn par
  - Dacă tabla este acoperibilă, dar eliminăm două pătrățele din ea, în ce condiții rămâne acoperibilă?

Acoperire

- Tabla ⇒ graful grid
- Acoperire ⇒ cuplaj perfect





Graful grid

Aplicaţie:
Pătrate latine

Problemă

Dreptunghi latin mxn = matrice mxn cu elemente în {1, 2, …, n} cu elemente distincte pe fiecare linie și coloană

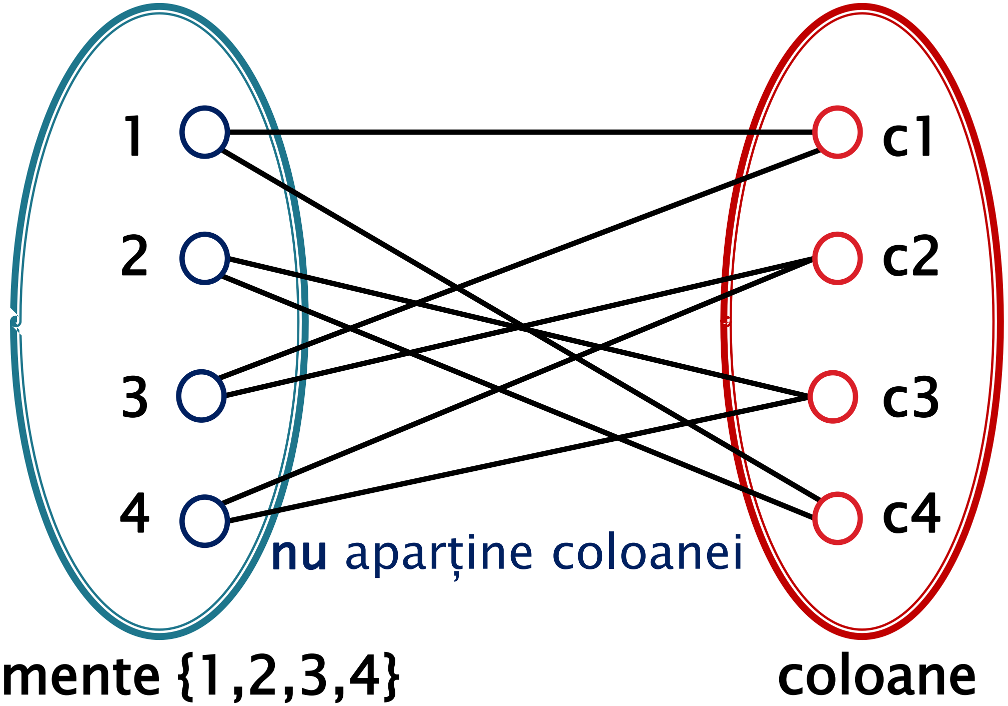
Pătrat latin = **Dreptunghi latin** nxn

Orice dreptunghi latin se poate extinde la un pătrat latin

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Modelare cu grafuri

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

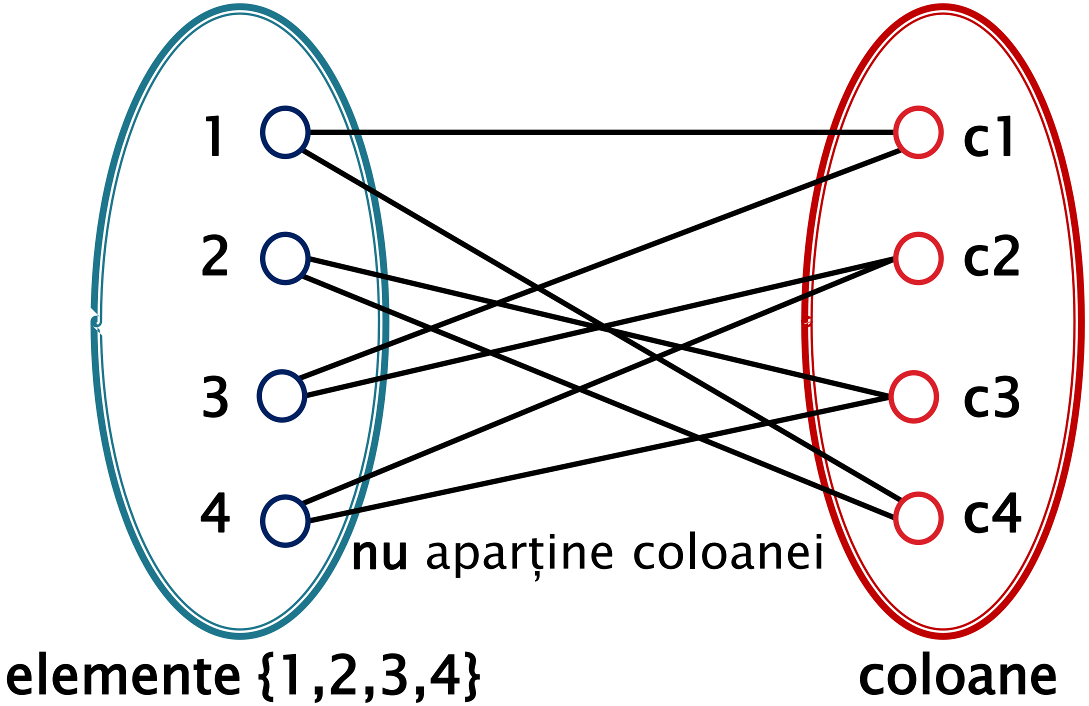


G - graf bipartit (n−m)-regulat

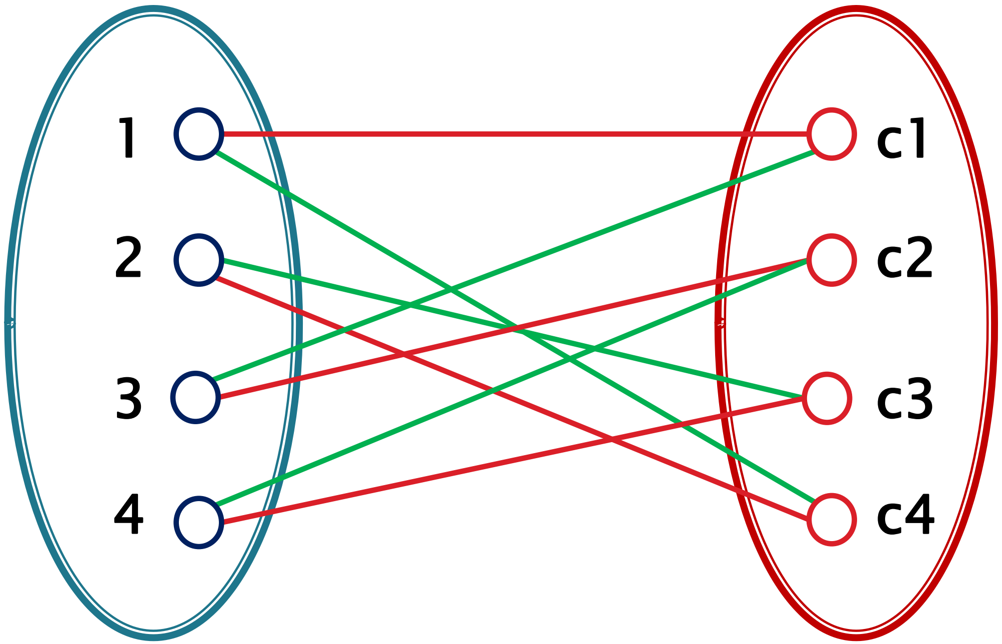
- **Completarea unei linii** ⇔ cuplaj perfect în G
- **Completarea celor n−m linii** ⇔ partiționarea muchiilor lui G în n−m cuplaje perfecte (colorare proprie a muchiilor cu n−m culori)
- **Rezultă din consecințele teoremei lui HALL**

Modelare cu grafuri

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



G – graf bipartit (n–m)–regulat



$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Partiționarea muchiilor în cuplaje perfecte

- M_1={ {1, c1}, {2, c4}, {3, c2}, {4, c3} } $\Rightarrow$
- M_2={ {1, c4}, {2, c3}, {3, c1}, {4, c2} } $\Rightarrow$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Joc

Joc

- **Strategie joc**

  Pe o tablă de tip șah (cu pătrățele alb-negru, nu neapărat dreptunghiulară) 2 jucători A și B mută alternativ.

  - A este primul care marchează un pătrat
  - Jucătorul care este la mutare trebuie să marcheze un pătrat (nemarcat) adiacent cu unul marcat de celălalt jucător, păstrând mereu culoarea pătratelor marcate

    (i.e adiacent= pe verticală sau orizontală)
  - Câștigă jucătorul care a marcat ultimul pătrat

  Arătați că dacă tabla este acoperibilă cu piese de domino, jucătorul B are o strategie de câștig, altfel A are o strategie de câștig.

Joc

- **Strategie joc**

  Modelare – marcarea vârfurilor unui graf

  - La o mutare se poate marca doar un vârf adiacent cu unul deja marcat de către celălalt jucător
  - Câștigă jucătorul care a marcat ultimul un vârf

  Dacă graful are cuplaj perfect atunci B are o strategie de câștig, altfel A are o strategie de câștig

Aplicaţie:
Sistem de reprezentanţi distincţi pentru submulţimi

Problemă – sistem de reprezentanţi distincţi

Fie A – mulţime finită cu n elemente

$$X_1, X_2, \ldots, X_m \subseteq A$$

S.n. **sistem de reprezentanţi distincţi** pentru colecţia de submulţimi $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ un vector $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ cu proprietățile

- $r_i \in X_i, \forall i=1,\ldots,m$
- $r_i \neq r_j, \forall i, j=1,\ldots,m, i \neq j$

Problemă - sistem de reprezentanţi distincţi

Nu orice colecție de submulțimi admite un sistem de reprezentanţi distincţi.

Exemplu:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$X_1 = \{2, 3\}$

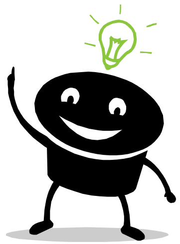
$X_2 = \{3\}$

$X_3 = \{2\}$

Problemă – sistem de reprezentanţi distincţi

Condiții necesare și suficiente pentru existența unui sistem de reprezentanți distincți ai unei colecții de submulțimi din A

Problemă – sistem de reprezentanţi distincţi



Modelăm problema cu ajutorul uni graf bipartit:

- vârf x_i – asociat submulțimii X_i, $i=1,\ldots,m$

  $\Rightarrow$ mulțimea **X** de vârfuri

- vârf a_j –asociat fiecărui element din A, $j = 1,\ldots,n$,

  $\Rightarrow$ mulțimea **Y** de vârfuri

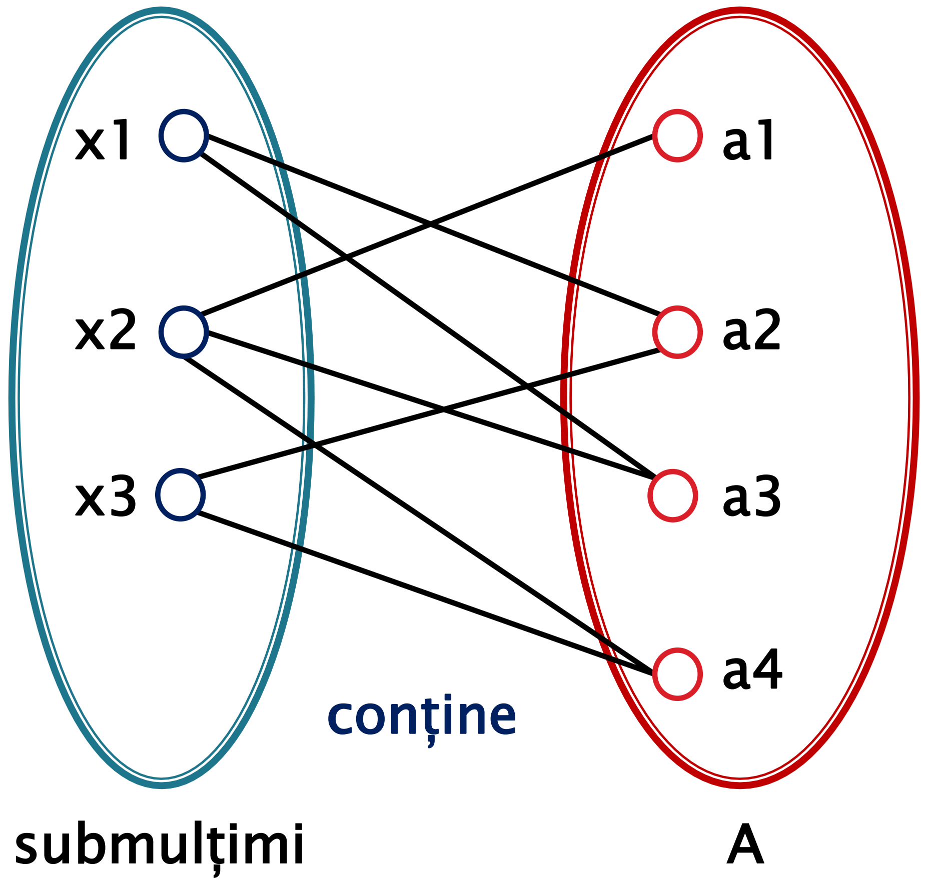
- muchie de la $\mathbf{x}_i$ la $a_j \Leftrightarrow a_j \in X_i$

Problemă – sistem de reprezentanţi distincţi

Exemplu:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

- $X_1 = \{2, 3\}$
- $X_2 = \{1, 3, 4\}$
- $X_3 = \{2, 4\}$

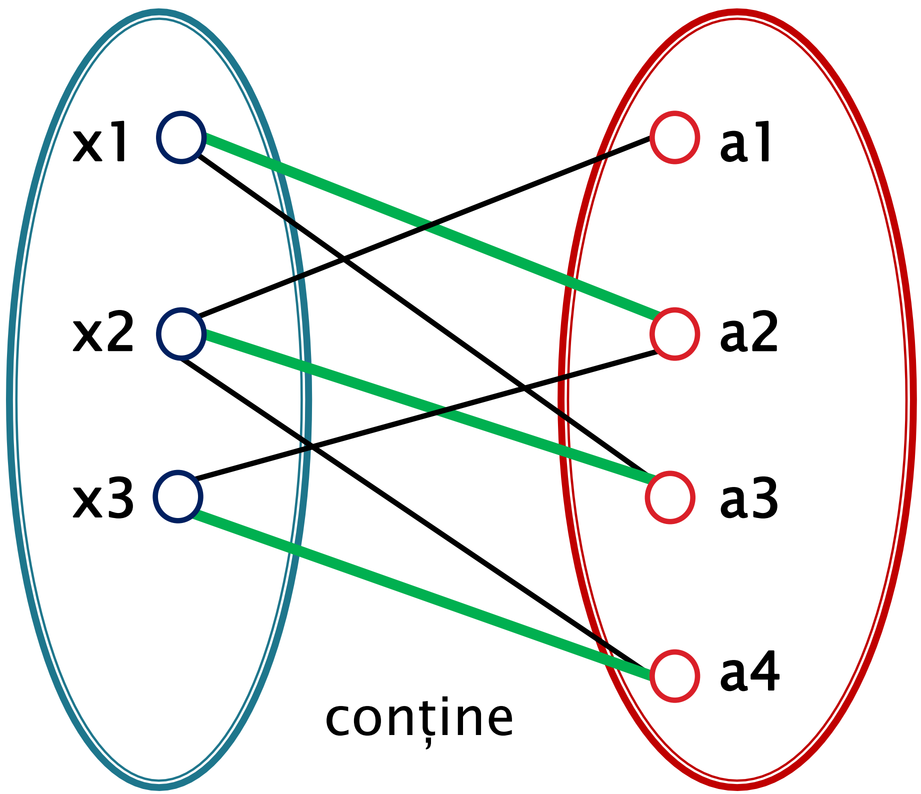


Observație

- Există un sistem de reprezentanți pentru colecția de submulțimi $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ ale lui A $\Leftrightarrow$ **există un cuplaj al lui X în Y în graful asociat**

$X_1 = \{2, 3\}$
$X_2 = \{1, 3, 4\}$
$X_3 = \{2, 4\}$

$r=(2, 3, 4)$



Observație

- Există un sistem de reprezentanți pentru colecția de submulțimi $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ ale lui A $\Leftrightarrow$
  există un cuplaj al lui X în Y în graful asociat
- Teorema lui HALL:

  Pentru $S=\{x_{i1}, x_{i2},\ldots, x_{ik}\} \subseteq X$ avem

  $$|N(S)| \geq |S| = k$$

  $$N(S) = X_{i1} \cup X_{i2} \cup \ldots \cup X_{ik}$$

- Are loc astfel următorul rezultat

Teoremă –exi stența unui sistem de reprezentanţi distincţi

Fie A o mulțime finită și (X_1, X_2, …, X_m) o colecţie de submulţimi din A.

Colecția **nu** are un sistem de reprezentanți distincți $\Leftrightarrow$

$\exists$ k submulțimi în colecție a căror reuniune are mai puțin de k elemente