Elemente de teoria funcțiilor și a mulțimilor

CURS 1

Definiția 1 a) Spunem că mulțimile A și B sunt egale ($A=B$) dacă au aceleași elem.

b) Spunem că mult. A este inclusă în mulțimea B ($A \subseteq B$) dc. orice elem. al mult. A este elem. al. mult. B.

Obs: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ și $B \subseteq A$

Definiția 2: Fie mult. A și B arbitrar alese

a) $\{x \mid x \in A$ și $x \notin B\} \overset{not}{=} A \setminus B$ se num. dif. mult. A și B

b) Mult. elem $\{x \mid x \in A$ și $x \in B\} \overset{not}{=} A \cap B$ s.n. intersecția mult. A și B

c) Mulțimea $\{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\} \overset{not}{=} A \cup B$ s.n. reuniunea mult. A și B

d) Dacă $A \subseteq B$, mulțimea $B \setminus A \overset{not}{=} C_B A$ s.n. complementara mulț. A în rap. cu B

Definiția 3: Fie X o mulțime arbitrar aleasă. Mulțimea $\{A \mid A \subseteq X\} \overset{not}{=} P(X)$ s.n. mult. părților lui X

Obs.: $A \subseteq X \Leftrightarrow A \in P(X)$

Definiția 4: Fie X, Y două mult. arbitrare nevide. S.n. relație binară de la mult. X la mult. Y orice sub. nevidă $R \subseteq X \times Y$

Notații

$(x, y) \in R \overset{not}{\Longleftrightarrow} xRy$

Definiția 5: S.n. funcție de la mult X la Y o rel binară ~~de~~ f de la X la Y dc. $\forall x \in X \; \exists! \, y \in Y$ a.î. $x f y$.

Notații: $y \overset{not}{=} f(x)$ - val. funcției f în elem. $x \in X$.

$f \subseteq X \times Y \overset{not}{\Longleftrightarrow} f: X \to Y$ sau $X \xrightarrow{f} Y$

X s.n. domeniul de def. al fct. f

Y s.n. codomeniul [illegible] fct f.

Definiția 6: Fie X o mult. nevidă. S.n. fam. de elem. din mult. X orice fct $f: I \to X$, unde $I \neq \emptyset$. Mult. I s.n. mult. indicilor fam. de elem.

Notații: $f: I \to X$

$f(i) \overset{not}{=} x_i$

$f \overset{not}{=} (x_i)_{i \in I}$

Obs.: Fie $f: I \to X$ o fam. de elem. din mult. X.
Dacă $I = \mathbb{N}$ funcția $f: \mathbb{N} \to X$ s.n. șir de elem. din mult X
$((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Dacă I este mult. finită, funcția $f: I \to X$ s.n. fam. finită de elem. din X. ($I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \Rightarrow (x_{i_j})_{\substack{\cancel{j \in [1,n]} \\ 1 \le j \le n}}$)

Definiția 7: S.n. fam. de părți ale mult. X orice fam. de elem. din. mult. $\mathcal{P}(X)$.

NOTAȚII: $f: I \to \mathcal{P}(X)$
$$f(i) = A_i$$
$$f \stackrel{not}{=} (A_i)_{i \in I}$$

Definiția 8: Fie X o mult. și (A_i) o fam. de părți ale lui X.
a) $\{x \in X \mid x \in A_i \ \forall i \in I\} \stackrel{not}{=} \bigcap_{i \in I} A_i$ s.n. intersecția fam $(A_i)_{i \in I}$
b) $\{x \in X \mid \exists i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\} \stackrel{not}{=} \bigcup_{i \in I} A_i$ s.n. reuniunea fam $(A_i)_{i \in I}$

Definiția 9: Mult. A și B s.n. disjuncte dc. $A \cap B = \emptyset$

Obs: 1) $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow x \notin A_i \ \forall i \in I$

2) $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I$ a.î. $x \notin A_i$

Teorema (1) (Legile lui de Morgan)
Fie X o mult. și $(A_i)_{i \in I}$ o fam de părți ale mult X.
Sunt adev. urm. afirmații:

a) $C_X\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} C_X A_i$

b) $C_X\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} C_X A_i$

Dem. a)' „$\subseteq$" Fie $x \subseteq C_X\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Rightarrow x\in X$ și $x\notin \bigcup_{i\in I} A_i$

$\Rightarrow x \in X$ și $x\notin A_i\ \forall i\in I \Rightarrow x\in X\setminus A_i\ \forall i\in I \Rightarrow x\in C_X A_i\ \forall$

$i\in I \Rightarrow x\in \bigcap_{i\in I} C_X A_i$

„$\supseteq$" Fie $x\in \bigcap_{i\in I} C_X A_i \Rightarrow x\in C_X A_i,\ \forall i\in I \Rightarrow x\in X$ și

$x\notin A_i\ \forall i\in I \Rightarrow x\notin \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow x\in X\setminus\left\{\bigcup_{i\in I} A_i\right\} \Rightarrow$

$x\left(C_X \bigcup_{i\in I} A_i\right)$

Din dubla incluziune $\Rightarrow C_X\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} C_X A_i$

b)' În relația dem. la a' înlocuiesc A_i cu $C_X A_i$.

$C_X\left(\bigcup_{i\in I} C_X A_i\right) = \bigcap C_X\left(C_X A_i\right) \Rightarrow$

$C_X\left(\bigcup_{i\in I} C_X A_i\right) = \bigcap_{i\in I} C_X A_i \mid \cdot C_X$

$\bigcup_{i\in I} C_X A_i = C_X\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$

Definiția 10: a) Fie $f: X\to Y$ o fct. Mulț. $\{y\in Y \mid \exists x\in X$ a.î. $y = f(x)\} = \operatorname{Im} f \subseteq Y$ s.n. imaginea fct f.

b) Fie $f: X\to Y$ o fct. și $A\subseteq X$ nevidă. Funcția $f|_A : A\to Y$ $f|_A(x) \overset{def}{=} f(x)$ s.n. restricția funcției f la mulț A.

c) Funcția $f: X\to Y$ s.n. inj. dacă din egalitatea $f(x_1) = f(x_2)$ $\Rightarrow x_1 = x_2$ ($x_1 \neq x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)

d) Funcția $f: X \to Y$ s.n. surj. dacă $\forall y \in Y \exists x \in X$ a.î. $f(x) = y$ ($\operatorname{Im} f = Y$)

e) Funcția f s.n. bij. dacă f este surj. și inj.

Obs: $f: X \to Y$ s.n. bij.

$f^{-1}: Y \to X$

$f^{-1}(y) = x \overset{def}{\iff} f(x) = y$

Def 11: Fie $f: X \to Y$ o fct.

a) Pt. o mult. $A \subseteq X$, mult. elem. $\{ y \in Y \mid \exists x \in A \text{ a.î. } f(x) = y \}$ $\underline{\text{not}}$ $f(A) \subseteq Y$ s.n. imag. directă a mulțimii A prin fct f.

b) Pt. o mult. $B \subseteq Y$, mult. $\{ x \in X \mid f(x) \in B \} \overset{not}{=} f^{-1}(B) \subseteq X$ s.n. preimag. (imag. inversă) a mult. B prin funcția f.

Obs: 1) Fie $f: X \to Y$ o fct. arbitrară și $A \subseteq X$ nevidă

$f(A) = \operatorname{Im} f|_A$

2) Fie $f: X \to Y$ o fct.

$f(X) = \operatorname{Im} f$

$f(\emptyset) = \emptyset$

$f^{-1}(\emptyset) = \{ x \in X \mid f(x) \in \emptyset \} = \emptyset$

$f^{-1}(Y) = \{ x \in X \mid f(x) \in Y \} = X$

Ex: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$

$f((0, +\infty)) = \mathbb{N}$

$f^{-1}((-1, 1)) = \{ x \in X \mid f(x) \in (-1, 1) \} \subseteq$

$f(x) \in (-1, 1) \iff -1 < [x] < 1 \iff [x] = 0 \iff x \in [0, 1)$

$f^{-1}((-1, 1)) = [0, 1) \cap \mathbb{R} \Rightarrow [0, 1)$

Curs 2

Elemente de teoria mulțimilor

Def 1. $f: X \to Y$ și $g: M \to N$ a.î. $Y \subseteq M$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "g \circ f"'] & Y \subseteq & M \arrow[d, "g"] \\ & & N \end{tikzcd}$$

Funcția $g \circ f: X \to N$ definită prin $(g \circ f)(x) \overset{def}{=} g(f(x))$ s.n. compunerea funcțiilor g și f

Def 2 S.n. funcția identică a mulț nevide X funcția $1_X: X \to X$ definită $1_X(x) = x \ \forall x \in X$

Def 3 Funcția $f: X \to Y$ s.n. inversabilă dacă $\exists$ o funcție $g: Y \to X$ a.î. $f \circ g = 1_Y$ și $g \circ f = 1_X$

Teorema 1: O funcție $f: X \to Y$ este inv. dacă și numai dacă f este funct. bij. În plus $f \circ f^{-1} = 1_Y$ și $f^{-1} \circ f = 1_X$

Mulțimi ordonate

Definiția 1: S.n. rel. binară pe mulț. nevidă X orice submulț nevidă $R \subseteq X \times X$

Notație: $(x, y) \in R \overset{not}{\Longleftrightarrow} xRy$

Def 2: O relație binară $R \subseteq X \times X$ s.n.

a) reflexivă dacă $xRx \ \forall x \in X$

b) antisimetrică dacă din xRy și $yRx \Rightarrow x = y$

c) tranzitivă dacă xRy și $yRz \Rightarrow xRz$

Def 3: S.n. rel de ordine pe o mulț nevidă X o rel binară ("$\leq$") $R \subseteq X \times X$ care este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.
S.n. mulțime ordonată o mulțime nevidă X pe care se def

a rel de ordine.

Notații: 1) $x R y \overset{not}{\Longleftrightarrow} x \leq y$

2) $(X, \leq)$ - mulțime ordonată

4. Def. 4 Fie $(X, \leq)$ o mult. ordonată și ~~pe~~ $A \subseteq X$

a) Un elem. $a \in X$ s.n. majorant al mult. A dacă $x \leq a$ $\forall x \in A$

Mult. A s.n. mărginită superior (majorată) în X dacă are cel puțin un majorant în mult. X.

b) Un elem. $b \in X$ s.n. minorant al mult. A dacă $b \leq x$ $\forall x \in A$

Mult. A s.n. minorată (mărginită inferior) în X dacă ~~at~~ are cel puțin un minorant în mult X.

c) Mult. $A \subseteq X$ s.n. mărginită în X dacă A este mărginită inferior și superior în X.

d) O mult. $A \subseteq X$ mărg. superior are maxim (cel mai mare elem.) dacă $\exists$ cel puțin un majorant al acestei mult A care $\in A$.

Notație: $\max A$

e) O mult. $A \subseteq X$ mărg. inferior are minim (cel ~~puțin~~ mai mic elem) dacă $\exists$ cel puțin un minorant al mult. A care aparține mult A.

Notație: $\min A$

f) O mult. A mărg. superior are supremum (marg superioară) în X dacă $\exists$ cel mai mic majorant al mult. A.

Notație: $\sup A$

g) O mult. A mărg inferior ~~are~~ infimum (marg inferioară) în X dacă $\exists$ cel mai mare minorant al mult. A.

Notație: $\inf A$

Obs: $a = \max A \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & a \in A \\ 2) & x \leq a \ \forall x \in A \end{cases}$

$$b = \min A \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \ b \in A \\ 2) \ b \le x \ \forall x \in A \end{cases}$$

$$\alpha = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \ x \le \alpha, \forall x \in A \\ 2) \ x \le \alpha_1 \ \forall x \in A \Rightarrow \alpha \le \alpha_1 \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \ \beta \le x, \ \forall x \in A \\ 2) \ \beta_1 \le x \in A \Rightarrow \beta_1 \le \beta \end{cases}$$

$$\exists \max A \Rightarrow \exists \sup A = \max A$$
$$\not\Leftarrow$$

$$\exists \min A \Rightarrow \exists \inf A = \min A$$
$$\not\Leftarrow$$

__Def__ a) Mult. ordonată $(X, \le)$ s.n. total ordonată dacă $\forall$ 2 elem. din X se compară $(\forall x, y \in X \Rightarrow x \le y \underset{\text{sau}}{\vee} y \le x)$

b) Mult. ordonată $(X, \le)$ s.n. bine ordonată dacă orice submult. nevidă a lui X admite minim.

c) Mult. ordonată s.n. complet ordonată dacă orice submult. mărginită a lui X admite supremum și infimum în X.

Exemple: $(\mathbb{N}, \le)$ – total ordonată
– bine ordonată
– complet ordonată

$(\mathbb{Z}, \le)$ – total ordonată
– nu este bine ordonată
– complet ordonată

$(\mathbb{Q}, \le)$ – total ordonată
– nu este bine ordonată
– nu este complet ordonată

$(\mathbb{R}, +)$ - total ordonată
- nu este bine ordonată
- complet ordonată

Exemplu de mulțime ordonată care nu este total ordonată.
pe $\mathbb{C}$ introducem relația binară „$\le$" în felul urm: $z_1 \le z_2 \overset{def}{\Leftrightarrow}$ $Re\, z_1 \le Re\, z_2$ și $Im(z_1) \le Im(z_2)$

- Reflexivitate: (1)

$z \le z \ \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow Re(z) \le Re(z)$ și $Im\, z \le Im\, z \ \forall z \in \mathbb{C}$ (A)

- Asimetria (2)

$z_1 \le z_2 \Leftrightarrow Re(z_1) \le Re(z_2)$ și $Im\, z_1 \le Im\, z_2 \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
$z_2 \le z_1 \Leftrightarrow Re(z_2) \le Re(z_1)$ și $Im\, z_2 \le Im\, z_1 \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow Re\, z_1 = Re\, z_2$ și $Im\, z_1 = Im\, z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$

- Tranzitivitate (3)

$z_1 \le z_2 \Leftrightarrow Re\, z_1 \le Re\, z_2$ și $Im\, z_1 \le Im\, z_2$
$z_2 \le z_3 \Leftrightarrow Re\, z_2 \le Re\, z_3$ și $Im\, z_2 \le Im\, z_3$ $\Bigg| \Rightarrow Re\, z_1 \le Re\, z_3$, $Im\, z_1 \le Im\, z_3$ $\Bigg| \Rightarrow z_1 \le z_3$

Din (1)(2)(3) $\Rightarrow (\mathbb{C}, \le)$ mult. ordonată

$z_1 = 1 + 2i$

$z_2 = 2 + i$

$Re(z_1) < Re(z_2) \Rightarrow z_2 \not\le z_1$
$Im(z_1) > Im(z_2) \Rightarrow z_2 \not\ge z_1$ $\Bigg| \Rightarrow$ nu este total ordonată

Ex de mult. ordonată care nu este complet ordonată
$(\mathbb{Q}, \le)$ nu este complet ordonată
$A = [0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$
$1 \in A \Rightarrow A \ne \emptyset$
$0 \le x \le 2 \ \forall x \in A \Rightarrow A$ este mărg în $\mathbb{Q}$

Dem. prin reducere la absurd că $\nexists$ sup $A \in \mathbb{Q}$.

P.P.C.A. $a = \sup A \in \mathbb{Q}$

$a \neq \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a < \sqrt{2} \\ \sqrt{2} < a \end{cases}$

Caz 1.

$a < \sqrt{2} \Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{Q}$ a.î. $a < \alpha < \sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l} \alpha \in (a, \sqrt{2}) \\ \alpha \in \mathbb{Q} \end{array}\right| \Rightarrow \alpha \in (a, 2) \cap \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha \in A$

$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \alpha \in A \\ a = \sup A \end{array}\right| \Rightarrow \alpha \leq a \\ a < \alpha \end{array}\right| \Rightarrow$ contradicție

$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Curs 3

Mulțimi ordonate

Teorema 1: Mulțimea ordonată $(\mathbb{Q}, \leq)$ nu este complet ordonată.

Dem: Alegem: $A = (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$

$1 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$.

$\left.\begin{array}{l} 0 < x < \sqrt{2} \ \forall x \in A \\ 0, 2 \in \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow A$ este mărg în $\mathbb{Q}$

Dem: prin reducere la absurd că nu $\nexists \sup A \in \mathbb{Q}$

Presupun că $\exists \sup A = a \in \mathbb{Q}$

$a \neq \sqrt{2} \Rightarrow a < \sqrt{2}$ (dem. contradicția în cursul 2)

$\sqrt{2} < a$ (

Dem. contradicția în cazul $\sqrt{2} < a$

$\sqrt{2} < a \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$ a.î. $\sqrt{2} < r < a$.

Fie $x \in A$ arbitrar $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < \sqrt{2} \\ \sqrt{2} < r \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < r \ \forall x \in A \\ r \in \mathbb{Q} \end{array}\right| \Rightarrow r$ este un maj al mulț. A

$a = \sup A \overset{(1)}{\Rightarrow} a \leq r$ (2)

$\left.\begin{array}{l} r < a \\ a \leq r \end{array}\right| \Rightarrow \cancel{r < a}$ $r < r$ contradicție.

Presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow \nexists \sup A \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\mathbb{Q}, \leq)$ nu este complet ordonată

Spații topologice

Def 1: Fie $X \neq \emptyset$. O fam. de submulț. a mulț X notată $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ s.n. topologie pe X dacă îndeplinește urm. condiții:

i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

ii) $G_1, G_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ este închisă la intersecții finite)

iii) $G_i \in \mathcal{T}\ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ este închisă la reuniuni oarecare)

Se numește spațiu topologic o mulț. nevidă X pe care se definește cel puțin o topologie $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Notație: $(X, \mathcal{T})$

Obs: Pe orice mulțime nevidă X se pot construi minim 2 topologii.

$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ și $\mathcal{T}_2 = \mathcal{P}(X)$

Def 2: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic

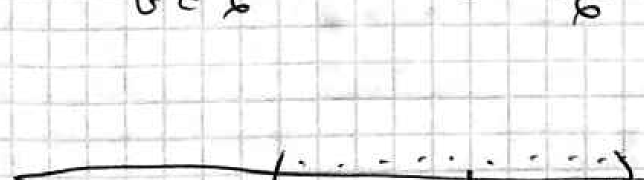
a) O mulț. $G \subseteq X$ s.n. deschisă relativ la topologia $\mathcal{T}$ dacă $G \in \mathcal{T}$

b) O mulț $F \subseteq X$ s.n. închisă relativ la topologia $\mathcal{T}$ dacă $C_X F = X \setminus F \in \mathcal{T}$

c) O mulț. $V \subseteq X$ este vecinătate pt elem. $x \in X$ dacă $\exists\, G \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in G \subseteq V$

Notație $\mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x) \overset{def}{=} \{V \subseteq X \mid \text{vecinătate pt } x\}$

Obs $x \in G$ și $G \in \mathcal{T} \Longrightarrow G \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$



$(-1,1) \in \mathcal{V}_{\mathcal{C}}(0)$

$[-1,1]$ mult. inclusă conține mult. deschisă $(-1,1) \in \mathcal{V}_{\mathcal{C}}(0)$

$[-1,1] \in \mathcal{V}_{\mathcal{C}}(0)$

Teorema: (Prop mult. închise)

Fie $(X, \mathcal{C})$ spațiu topologic. Sunt adevărate urm. afir.

1) $\emptyset$, X sunt mult. închise

2) Dacă $F_1, F_2 \subset X$ și sunt închise $\Rightarrow F_1 \cup F_2$ este mulțime închisă

3) Dacă $F_i \subseteq X$ închisă $\forall\ i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i$ este închisă

Dem: 1) $C_X \emptyset = X \in \mathcal{C}$ comp. mult. $\emptyset$ este deschisă $\Rightarrow \emptyset$ mult închisă

$C_X X = \emptyset \in \mathcal{C} \Rightarrow X$ mult. închisă

2) $C_X(F_1 \cup F_2) = C_X F_1 \cap C_X F_2$

$C_X F_1 \in \mathcal{C},\ C_X F_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_X F_1 \cap C_X F_2 \in \mathcal{C}$ $\Big| \Rightarrow C_X(F_1 \cup F_2) \in \mathcal{C}$ $\Rightarrow F_1 \cup F_2$ mult închisă

3) $C_X(\bigcap_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} C_X F_i$

$C_X F_i \in \mathcal{C}\ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} C_X F_i \in \mathcal{C}$ $\Big| \Rightarrow C_X(\bigcap_{i \in I} F_i) \in \mathcal{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i$ mult. închisă

Teorema2 (prop vecinătăților unui punct)

Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic și $x \in X$

a) Dacă $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$ și $V \subseteq W$, atunci $W \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$

b) Dacă $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$ atunci $V_1 \cup V_2 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}$ și $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$

Dem: a) $\left.\begin{array}{l} V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x) \Rightarrow \exists G \in \mathcal{T} \text{ a.î. } x \in G \subseteq V \\ V \subseteq W \end{array}\right\} \Rightarrow \exists G \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in G \subseteq W \Rightarrow$

$\Rightarrow W$ vecinătate a lui x

$(W \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x))$

b) $\left.\begin{array}{l} V_1 \subseteq V_1 \cup V_2 \\ V_1 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x) \end{array}\right\} \Rightarrow V_1 \cup V_2 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$

$V_1 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x) \Rightarrow \exists G_1 \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in G_1 \subseteq V_1$

$V_2 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x) \Rightarrow \exists G_2 \in \mathcal{T}$ a.î. $x \in G_2 \subseteq V_2$

Fie $G = G_1 \cap G_2 \Rightarrow \begin{cases} x \in G \\ G \in \mathcal{T} \\ G \subseteq V_1 \cap V_2 \end{cases} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$

<u>Obs</u>: 1) $V_i \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)\ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$

2) $V_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*$ $i \in I$

$V_n \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(0)\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} V_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\} \notin \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(0)$

Def. 3: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic și $A \subseteq X$

a) Elem. $a \in X$ s.n. punct interior al mult. A dacă $A \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(a)$ (A este în mult. vecinătăților)

b) Elem. $a \in X$ s.n. punct de aderență al mult. A dacă $\forall\, V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(a)$ avem $V \cap A \neq \emptyset$

c) Elem. $a \in X$ s.n. punct de acumulare al mult. A dacă $\forall\, V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(a)$ avem $V \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$

d) Elem. $a \in X$ s.n. punct izolat al mult. A dacă $\exists\, V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(a)$ a.î. $V \cap A = \{a\}$

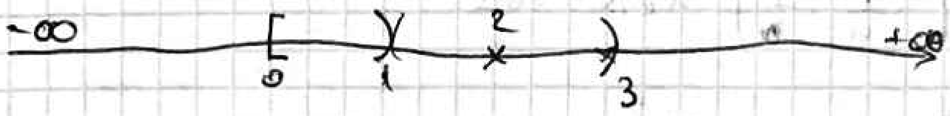
Notație: $\mathring{A} \overset{def}{=} \{a \in X \mid a \text{ pct. interior al mult. } A\}$ și se num interiorul mult A.

$\overline{A} \overset{def}{=} \{a \in X \mid a \text{ pct de aderență al mult. } A\}$ - aderența (închiderea mult A)

$A' \overset{def}{=} \{a \in X \mid a \text{ pct de acumulare al mult. } A\}$

$\text{Izo}\, A = \{a \in X \mid a \text{ pct. izolat al mult. } A\}$

Exemplu: $A = [0, 1) \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$



$V = (1, 3) \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(2)$

$V \cap A = \{2\}$

$\Rightarrow$ 2 pct izolat al mult. A

Prob:

$f: A \to \mathbb{R}, \; f(x) = \begin{cases} x^2; x \in [0,1) \\ 100, x = 2 \end{cases}$

f continuă pe A

Curs - 4

Spații topologice

Def. 1) Un spațiu topologic $(X, \mathcal{T})$ s.n. separat dacă $\forall x, y \in X$ cu $x \neq y$ $\exists V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$, $\exists W \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(y)$ a.î. $V \cap W = \emptyset$

2) Într-un spațiu topologic $(X, \mathcal{T})$ o submulț. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$ cu $x \in X$ s.n. bază de vecinătăți a elem. x dacă $\forall V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$ $\exists B \in \mathcal{B}$ a.î. $B \subseteq V$.

Exemplu: $\mathcal{B} = \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x) \cap \mathcal{T} = \{ G \mid G \in \mathcal{T}; x \in G \}$ bază de vecinătăți a elem. x

Teorema 1 (Prop interiorului unei mulț.)

- Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic. Sunt adev. urm. afirmații

a) $\mathring{A} \subseteq A$; $\forall A \subseteq X$

b) $G \in \mathcal{T}$; $G \subseteq A \Rightarrow G \subseteq \mathring{A}$

$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{G \in \mathcal{T} \\ G \subseteq A}} G$ = ($\mathring{A}$ este cea mai mare mulțime deschisă inclusă în A)

c) $\mathring{A} \in \mathcal{T}$

$A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A = \mathring{A}$

d) $A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$

e) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$

f) $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$

Teorema 2 (Prop. aderentei unei mulțimi)

Fie $(X, \mathcal{T})$ spațiu topologic. Sunt adev. urm. afirm.

a) $\overline{A} \subseteq A \quad \forall A \subseteq X$

b) $A \subseteq F$, F mult. închisă $\Rightarrow \overline{A} \subseteq F$

$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ închisă} \\ A \subseteq F}} F$ ($\overline{A}$ este „cea mai mică" mult. închisă care conține mult A)

c) A închisă $\forall A \subseteq X$

A închisă $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

d) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

e) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B} \quad \forall A, B \subseteq X$

d) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \quad \forall A, B \subseteq X$

Teorema 3 (Prop. mult. punctelor de acumulare)

Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic. Sunt adev. urm. afirmații

a) $\overline{A} = A \cup A'$

$A' \subseteq \overline{A}$

b) A închisă $\Leftrightarrow A' \subseteq A$

c) $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$

d) $A' \cup B' = (A \cup B)' \quad \forall A, B \subseteq X$

e) $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B' \quad \forall A, B \subseteq X$

Teorema 4 (Prop. mult. punctelor izolate)

Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic. Oricare ar fi $A \subseteq X$ avem

$\operatorname{Iz} A \subseteq A \setminus A'$

Teorema 5: Într-un spațiu topologic $(X, \mathcal{T})$ sunt adev. egalitățile:

$\overline{C_X A} = C_X \mathring{A} \quad \forall A \subseteq X$ și $\widehat{C_X A}^{\circ} = C_X \overline{A}$

Dem: $\overline{C_X A} = C_X \mathring{A}$

„$\subseteq$" Fie $x \in \overline{C_X A} \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}_{\tau}(x),\ V \cap C_X A \neq \emptyset$

$A \cap C_X A = \emptyset$ $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow A \notin \mathcal{V}_{\tau}(x) \Leftrightarrow x \notin \mathring{A} \Rightarrow x \in C_X \mathring{A}$

„$\supseteq$" Fie $x \in C_X \mathring{A} \Rightarrow x \notin \mathring{A} \Rightarrow A \notin \mathcal{V}_{\tau}(x)$

Fie $V \in \mathcal{V}_{\tau}(x)$ arbitrar aleasă $\Bigg| \Rightarrow V \not\subseteq A \Rightarrow$

$\Rightarrow V \cap C_X A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{C_X A}$

Din dubla incluziune $\Rightarrow \overline{C_X A} = C_X \mathring{A}\ \forall A \subseteq X$

$A \to C_X A \Rightarrow C_X(\overline{C_X A}) = C_X(\overset{\circ}{\widehat{C_X A}}) = \bar{A} = C_X(\overset{\circ}{\widehat{C_X A}}) | C_X$

$\Rightarrow C_X \bar{A} = \overset{\circ}{\widehat{C_X A}}$

<u>Definiția 3</u>. Fie (X, τ) un spațiu topologic. $A \subseteq X$. Elem. $x \in X$ s.n. punct frontieră al mult. A dacă x este punct de aderență pt. A și pt $C_X A$.

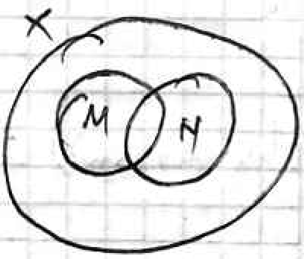
Notație: $Fr A \overset{def}{=} \{ x \in X \mid x$ pct frontieră al mult. $A \}$ - frontiera topologică a mult. A

$Fr A = \bar{A} \cap \overline{C_X A}$

<u>Obs</u>. $Fr. A = \bar{A} \cap \overline{C_X A} \overset{\text{teorema 5}}{=} \bar{A} \cap C_X \mathring{A} = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

$M, N \subseteq X$

$M \cap C_X N = M \setminus N$



Spații metrice

Def 1: S.n. distanță metrică pe o mult. nevidă X o funcți
$d : X \times X \to \mathbb{R}$ care are urm prop.

a) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$

b) $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$

$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \ \forall x, y, z \in X$

Def 2: S.n. spațiu metric o mult. nevidă X pe care se def. cel puțin o distanță d.

Notație: (X, d)

Exemple de spații metrice

1) $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$d(x, y) \stackrel{def}{=} |x - y|$ - distanța uzuală a lui $\mathbb{R}$

$|x - y| = |(x - z) + (x - y)| \leq |x - z| + |z - y|$

$d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$d_1 (x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ distanță pe $\mathbb{R}$

2) $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$d((a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$

distanța uzuală a lui $\mathbb{R}^n$

$d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$d_1 ((a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| + \dots + |b_n - a_n|$

distanță pe $\mathbb{R}$

$d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$d_\infty ((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = \max \{ |b_1 - a_1|, |b_2 - a_2|, \dots, |b_n - a_n| \}$ - distanța pe $\mathbb{R}^n$

Curs - 5 　　　　 Spații metrice

Definiția 1: Fie (X, d) un spațiu metric, $x \in X$ și un $r > 0$ s.n. bila deschisă de centru $x \in X$ și raza $r > 0$ mulțimea $\{ y \in X \mid d(y, x) < r \}$

S.n. bila închisă de centru $x \in X$ și raza $r > 0$ mulțimea $\{ y \in X \mid d(y, x) \leq r \}$

Notație: $\{ y \in X \mid d(y, x) < r \} \overset{not}{=} B(x, r)$

$\{ y \in X \mid d(y, x) \leq r \} \overset{not}{=} B[x, r]$

Obs: $x \in B(x, r)$

$x \in B[x, r]$

$\cancel{x \in} B(x, r) \subseteq B[x, r]$

Exemple

1) $(\mathbb{R}, d)$

$d(x, y) = |x - y|$

$B(x, r) = \{ y \in \mathbb{R} \mid |y - x| < r \} = (x - r, x + r)$

$B[x, r] = \{ y \in \mathbb{R} \mid |y - x| \leq r \} = [x - r, x + r]$

2) $(\mathbb{R}^2, d)$

$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

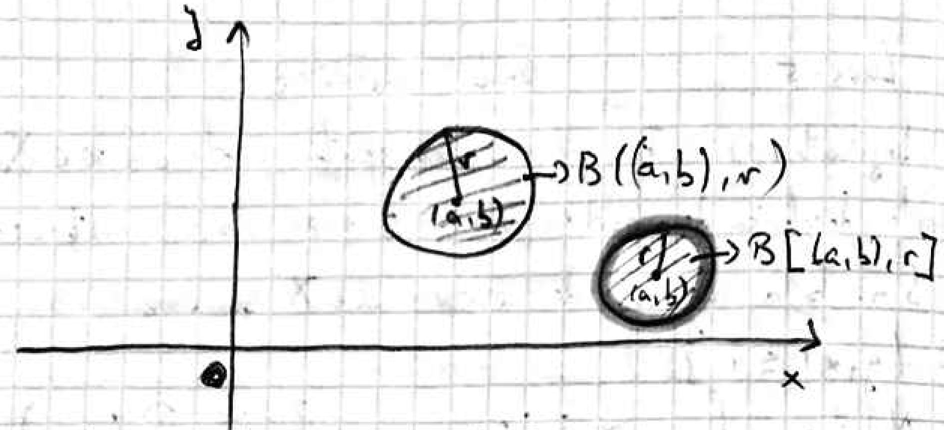
$B(\underbrace{(a, b)}_{x}, r) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r \} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{ (x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2 \} = \text{Int } \mathcal{C}((a, b), r)$

$B[(a, b), r] = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \leq r \} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2 \} = \text{Int } \mathcal{C}((a, b), r) \cup \mathcal{C}((a, b), r)$

$= D((a, b), r) = \text{disc}$



3) $(\mathbb{R}, d_1)$

$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$

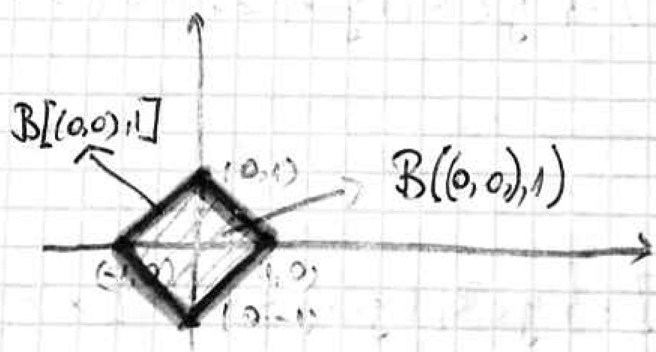
$B((0,0),1) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1 \}$

$\cancel{|x|+|y|}$ $\underbrace{|x|}_{\text{nec princ}} + \underbrace{|y|}_{\text{nec sec}} = 1 \Rightarrow |x| = 1 - |y|$

$1 - |y| \geq 0 \Rightarrow |y| \leq 1 \Rightarrow y \in [-1, 1]$

$|x| = 1 - |y| \Rightarrow |x| = \alpha, \alpha \geq 0.$

$x = 1 - |y| \vee x = |y| - 1$



$B[(0,0),1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$

Teorema 1: Orice spațiu metric (X, d) este spațiu topologic.

Dem: Se construiește o fam de submulțimi

$\mathcal{T}_d \overset{def}{=} \{\emptyset\} \cup \{ G \subseteq X \mid G$ nevidă, $\forall x \in G\ \exists r > 0$ a.î. $B((x,r)) \subseteq$

1) Este evident că $\emptyset \in \mathcal{T}_d$

$\forall x \in X\ \exists r = \pi$ a.î. $B(x, \pi) \subseteq X \Rightarrow X \in \mathcal{T}_d$

2) Fie $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_d$. Vom dem. că $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_d$

Dacă $G_1 \cap G_2 = \emptyset \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_d$

P.P. $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$

Fie $x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow x \in G_1 \wedge x \in G_2$

$\left.\begin{array}{l} x \in G_1 \\ G_1 \in \mathcal{T}_d \end{array}\right\} \Rightarrow \exists r_1 > 0$ a.î. $B(x, r_1) \subseteq G_1$

$\left.\begin{array}{l} x \in G_2 \\ G_2 \in \mathcal{T}_d \end{array}\right\} \Rightarrow \exists r_2 > 0$ a.î. $B(x, r_2) \subseteq G_2$

Alegem $r = \min\{r_1, r_2\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B(x, r) \subseteq G_1 \\ B(x, r) \subseteq G_2 \end{array}\right\} \Rightarrow B(x, r) \subseteq G_1 \cap G_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_d$

3) Fie $G_i \in \mathcal{T}_d$ $\forall i \in I$. Demonstrez că $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}_d$

Dacă $\bigcup_{i \in I} G_i = \emptyset$ atunci $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}_d$

Presupunem că $\bigcup_{i \in I} G_i \neq \emptyset$

Fie $x \in \bigcup_{i \in I} G_i \Rightarrow \exists i_0 \in I$ a.î. $x \in G_{i_0}$

$\left.\begin{array}{l} x \in G_{i_0} \\ G_{i_0} \in \mathcal{T}_d \end{array}\right| \Rightarrow \exists r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq G_{i_0}$

$\left.\begin{array}{l} B(x, r) \subseteq G_{i_0} \\ G_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \end{array}\right| \Rightarrow B(x, r) \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$

Din 1), 2), 3) $\Rightarrow \mathcal{T}_d$ este topologie pe X

Definiția 2: a) Topologia $\mathcal{T}_d$ s.n. topologia generată de distanța d.

b) O mulțime $G \subseteq (X, d)$ s.n. deschisă dacă $G \in \mathcal{T}_d$

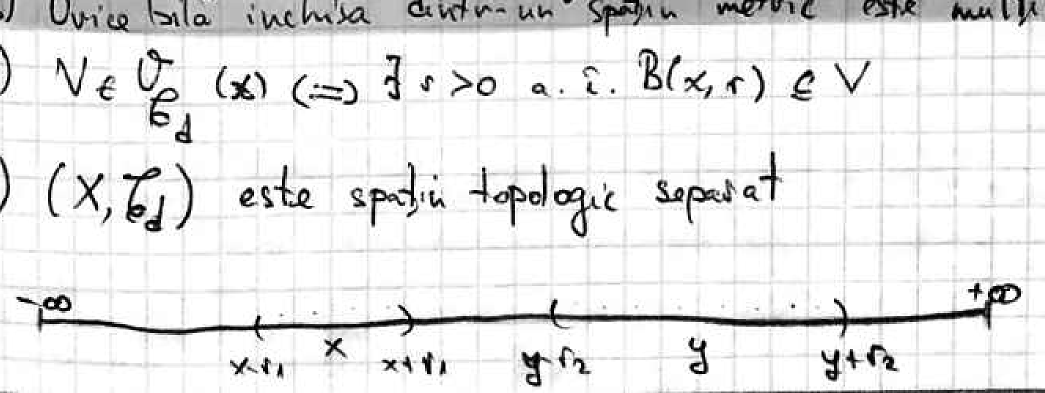
c) O mulțime $G \subseteq (X, d)$ s.n. închisă dacă $X \setminus F \in \mathcal{T}_d$

Teorema 2: Într-un spațiu metric (X, d) sunt adevarate urm. afirmații: a) Orice bilă deschisă $B(x, r)$ este mulțime deschisă

b) Orice bilă închisă $B[x, r]$ dintr-un spațiu metric este mulțime închisă.

c) $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_d}(x) \iff \exists r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq V$

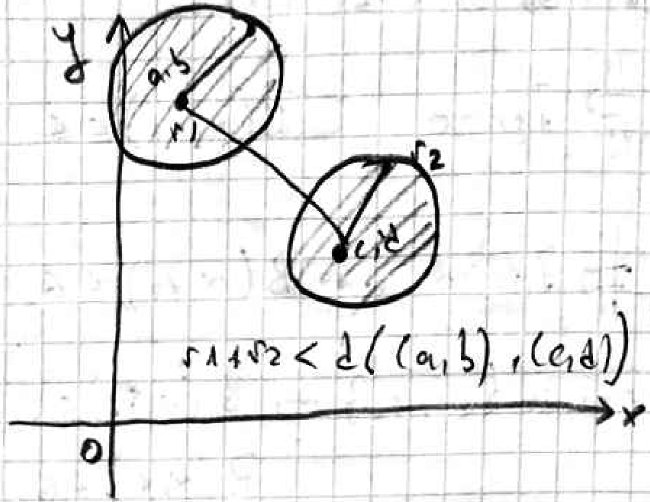
d) $(X, \mathcal{T}_d)$ este spațiu topologic separat



$B(x, r_1) \cap B(y, r_2) \neq \emptyset$

$r_1 + r_2 < d(x,y)$

$r_2 + r_1 < y - x$



<u>Teorema 3</u> : Fie (X, d) ~~conform~~ un spațiu metric ~~și o submu~~ și $A \subseteq X$.

a) $x \in \mathring{A} \iff \exists\, r > 0$ a.î. $B(x,r) \subseteq A$

b) $x \in \overline{A} \iff \forall\, r > 0$ avem $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

c) $x \in A' \iff \forall\, r > 0$ avem $B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

d) $x \in \text{izo}\, A \iff \exists\, r > 0$ a.î. $B(x,r) \cap A = \{x\}$

<u>Exemplu</u>: $A = (0,2] \cup \{3\} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathring{A}, \overline{A} = ?$

$\mathring{A} \subseteq A = (0,2] \cup \{3\}$

$(0,2) = B(1,1) \in \mathcal{T}_d$

$(0,2) \subseteq A$ $\implies (0,2) \subseteq \mathring{A}$

$\mathring{A} \subseteq (0,2] \cup \{3\} \implies (0,2) \subseteq \mathring{A} \subseteq (0,2] \cup \{3\}$ (1)

$\forall\, r > 0,\ B(2,r) \not\subseteq A \Rightarrow 2 \notin \mathring{A}$ (2)

$\forall\, r > 0\ B(3,r) \not\subseteq A \Rightarrow 3 \notin \mathring{A}$ (3)

Din (1) (2) (3) $\Rightarrow \mathring{A} = (0,2)$

Curs - 6

Analiza topologică a unei mulțimi

$(\mathbb{R}, d)$

$d(x,y) = |x-y|$ distanța uzuală a lui $\mathbb{R}$

$d \to \mathcal{T}_d \overset{not}{=} \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ - topologia uzuală a lui $\mathbb{R}$

Exemple de mulțimi deschise din $\mathbb{R}$: (a, b) $a<b$

$(a, +\infty)$ - nu e bilă

$(-\infty, b)$ - nu e bilă

Exemple de mulțimi închise în $\mathbb{R}$: $[a, b]$ cu $a<b$

$[a, +\infty)$ cu $a \in \mathbb{R} \to$ nu e bilă

$(-\infty, b]$ cu $b \in \mathbb{R} \to$ nu e bilă

mulțimi finite

$(\mathbb{R}^n, d)$, $n \geq 2 \Rightarrow d\left((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)\right) =$

$= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2} \to$ distanța uzuală a lui $\mathbb{R}^n$

$d - \mathcal{T}_d \overset{not}{=} \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} \to$ topologia uzuală a lui $\mathbb{R}^n$

Analiza topologică a unei mulțimi $A = (0, 2] \cup \{3\}$

$\overset{\circ}{A} = ?$; $\bar{A} = ?$; $Fr\,A = ?$; $A' = ?$; $Izo\,A = ?$

$\overset{\circ}{A} = (0, 2)$

$A \neq \overset{\circ}{A} \Rightarrow A \notin \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$

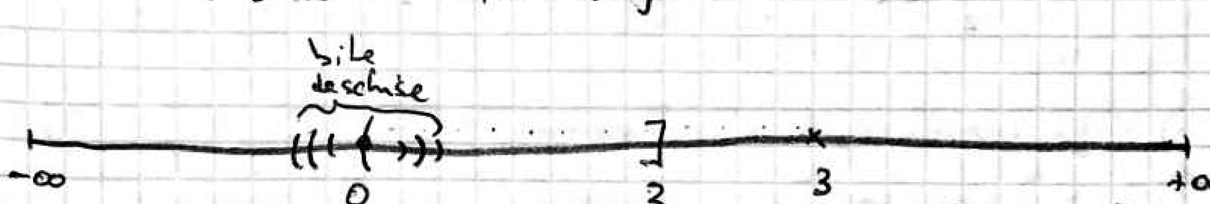
$\bar{A} = ? \Rightarrow A \subseteq \bar{A} \Rightarrow (0,2] \cup \{3\} \subseteq \bar{A}$

$F = [0, 2] \cup \{3\} \Rightarrow$ mulțime închisă

$A \subseteq F$

$\Rightarrow \bar{A} \subseteq F \Rightarrow \bar{A} \subseteq [0,2] \cup \{3\}$

$(0,2] \cup \{3\} \subseteq \bar{A} \subseteq [0,2] \cup \{3\}$



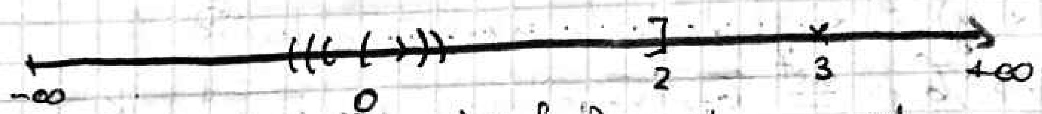
$\forall r > 0$ avem $B(0,2) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow 0 \in \bar{A} \Rightarrow \bar{A} = [0,2] \cup \{3\}$

$A \neq \bar{A} \Rightarrow A$ nu este mulțime închisă

$Fr\,A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \{0, 2, 3\}$

$A' = ?$

$A' \subseteq \bar{A} \Rightarrow \bar{A} \subseteq [0,2] \cup \{3\}$



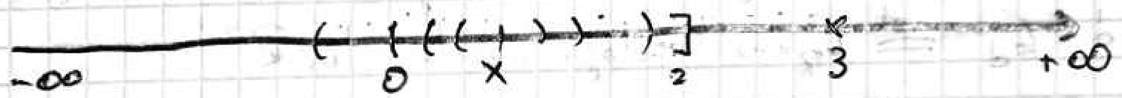
$\forall\, r>0$ avem $\cancel{B(0,r) \setminus \{0\}} \neq \emptyset \Rightarrow 0 \in A'$

$B(0,r) \cap A \setminus \{0\}) \neq 0 \Rightarrow$

$\forall\, r>0$ avem $B(2,r) \cap A \setminus \{2\} \neq \emptyset \Rightarrow 2 \in A'$

$\exists\, r = \frac{1}{2}$ a.î. $B(3, \frac{1}{2}) \cap A \setminus \{3\} = \emptyset \Rightarrow 3 \notin A'$

fie $x \in (0,2)$



$\forall\, r>0$ avem $B=(x,r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$

$A' = [0,2]$

$Izo\, A = ?$

$Izo\, A \subseteq A \setminus A' \Rightarrow Izo\, A = \{3\}$

$\exists\, r = \frac{1}{2}$ a.î. $B(3, \frac{1}{2}) \cap A = \{3\} \Leftrightarrow 3 \in Izo\, A \Rightarrow Izo\, A = \{3\}$

ŞIRURI ÎN SPAŢII METRICE

(X, d) spaţiu metric

DEFINIŢIA 1: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din (X, d). S.n. un subşir al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ unde $n_k < n_{k+1}$ $\forall k\in\mathbb{N}$

DEFINIŢIA 2: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X, d) este convergent dacă $\exists\ l\in X$ cu proprietatea că $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $d(x_n, l)<\varepsilon$ $\forall n\geq n_\varepsilon$

Elementul l s.n. limită şirului x_n şi se not. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

DEFINIŢIE ECHIVALENTĂ Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X, d) este convergent dacă $\exists\ l\in X$ cu proprietatea că $\forall\ V\in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_d}(l)\ \exists\ n_V\in\mathbb{N}$ a.î. $x_n\in V\ \forall\ n\geq n_V$

DEFINIŢIA 3: Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X, d) s.n. divergent dacă acesta nu este convergent.

DEFINIŢIA 4. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X, d) s.n. mărginit dacă $\exists\ a\in X,\ \exists\ r>0$ a.î. $x_n\in B(a, r)\ \forall n\in\mathbb{N}$

DEFINIŢIA 5: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din (X, d). Elem. $a\in X$ s.n. punct limită al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă $\exists\ (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ al acestui şir a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$

Exemplu: $x_n=(-1)^n,\ n\in\mathbb{N}$

$\lim\limits_{k\to+\infty} x_{2k}=1$

$\lim\limits_{k\to+\infty} x_{2k+1}=-1$

$\Rightarrow$ 1 şi -1 punctele limită ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

DEFINIŢIA 6: Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X, d) s.n. şir CAUCHY (şir fundamental) dacă $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $d(x_n, x_m)<\varepsilon$ $\forall\ m, n\geq n_\varepsilon$

Teorema 1: Orice şir convergent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X, d) este şir CAUCHY.

Demonstraţie: $\exists l \in X$ cu prop că $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.

$d(x_n, l) < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq n_\varepsilon$

$$d(x_n, x_m) \leq \underbrace{d(x_n, l)}_{< \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq n_\varepsilon} + \underbrace{d(l, x_m)}_{< \frac{\varepsilon}{2},\ \forall m \geq m_\varepsilon} \Bigg| \Rightarrow$$

$\Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon\ \forall m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir Cauchy

Obs: Reciproca teoremei 1 este, în general, falsă.

DEFINIŢIA 7: S.n. spaţiu metric complet un spaţiu metric (X, d) ~~în care~~ cu prop că orice şir CAUCHY este convergent.

TEOREMA 2: Orice şir Cauchy cu elem. într-un spaţiu metric (X, d) este şir mărginit.

TEOREMA 3: Orice şir Cauchy din (X, d) care are cel puţin un punct limită în X este şir convergent.

COROLAR: Orice şir convergent din (X, d) este şi mărginit.

$(n\cdot m)+x_0 \le x_n \le n\cdot M + x_0 \ \forall n\in\mathbb{N} \ | : n^2$

$$\frac{(n\cdot m)+x_0}{n^2} \le \frac{x_n}{x_n^2} \le \frac{(n\cdot M+x_0)}{n^2} \ \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \exists \lim_{n\to 0}\frac{x_n}{n^2}=0$$

$\to 0$

Curs - 7

Convergența în spații metrice

Teorema 1: Orice șir Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d) este șir m

Dem: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - șir Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $\forall m,n\ge n_\varepsilon$ este adev că $d(x_n,x_m)<\varepsilon$.

$\varepsilon=1 \Rightarrow \exists n_1\in\mathbb{N}$ a.î. $d(x_n,x_m)<1 \ \forall m,n\ge n_1 \xRightarrow{m=n_1} d(x_n,x_{n_1})$

Toți termenii de la x_{n_1} sunt în bila deschisă

Alegem $r=\max\{d(x_0,x_{n_1}), d(x_1,x_{n_1}),\dots,d(x_{n_1-1},x_{n_1}),1\}$

Avem $d(x_n,x_{n_1})\le r \ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow x_n\in B[x_{n_1},r] \ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir mărginit

COROLAR: Orice șir convergent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d) este șir mărginit.

TEOREMA 2: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir Cauchy din (X, d) care are cel puţin un punct limită în X. Atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent

Demonstraţie: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir Cauchy $\forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $d(x_n, x_m) < \varepsilon\ \forall n, m \geq n_\varepsilon$ ①

Fie $l\in X$ un punct limită al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subşir al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a.i. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists K_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $d(x_{n_k}, l) < \varepsilon, \forall k\geq K_\varepsilon$ ②

$(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ şir strict cresc din $\mathbb{N}$
$n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow \exists K_\varepsilon^1\in\mathbb{N}$ a.î. $n_k\geq n_\varepsilon\ \forall k\geq K_\varepsilon^1$ ③

Alegem $K_\varepsilon^2 = \max\{K_\varepsilon, K_\varepsilon^1\}$

$K_\varepsilon^2 \geq K_\varepsilon \overset{②}{\Rightarrow} d(x_{n_{K_\varepsilon^2}}, l) < \varepsilon$

$K_\varepsilon^2 \geq K_\varepsilon^1 \overset{③}{\Rightarrow} n_{K_\varepsilon^2} \geq n_\varepsilon \overset{①}{\Rightarrow} d(x_n, x_{n_{K_\varepsilon^2}}) < \varepsilon\ n\geq n_\varepsilon$

$d(x_n, l) \leq \underbrace{d(x_n, x_{n_{K_\varepsilon^2}})}_{<\varepsilon\ \forall n>n_\varepsilon} + \underbrace{d(x_{n_{K_\varepsilon^2}}, l)}_{<\varepsilon} \Rightarrow d(x_n, l) < 2\varepsilon\ \forall n\geq n_\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.i. $d(x_n, l) < 2\varepsilon\ \forall n\geq n_\varepsilon \to$ def şir convergent

$\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$

Convergenţa in $\mathbb{R}^k$

$\mathbb{R}^k;\ k\geq 2$

$d((x_1, x_2, x_3, \dots, x_k), (y_1, y_2, y_3, \dots, y_k)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_k-y_k)^2}$

Obs: $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)\in\mathbb{R}^k$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_k)\in\mathbb{R}^k$

$d(x_i, y_i) \geq |x_i - y_i|\ \forall 1\leq i\leq k$

$\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|$

$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leq |a|+|b|+|c|$

$d(x, y) \leq |x_1-y_1| + |x_2-y_2| + \dots + |x_k-y_k|$

TEOREMA 1: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir din $\mathbb{R}^k$, $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{kn})$ şiruri reale

a) şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este mărginit $\Leftrightarrow (x_{1n})_{n\in\mathbb{N}}, (x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (x_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$

sunt şiruri mărginite din $\mathbb{R}$.

b) şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este şir Cauchy $\Leftrightarrow (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ sunt şiruri Cauchy în $\mathbb{R}$.

c) şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este convergent $\Leftrightarrow (x_{1n})_{n\in\mathbb{N}}, (x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \dots (x_{kn})_{k\in\mathbb{N}}$ sunt şiruri convergente în $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_{1n}, \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}\right), \left(\lim\limits_{k\to\infty} x_{kn}\right)\right)$

APLICAŢII

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = (0, e)$

2) $x_n \left((-1)^n, \left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$x_{1n} = (-1)^n$

$x_{2n} = \left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = 0$

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \Rightarrow \text{nu are limită} \;/\; \text{subşir } (-1)^{2k} \to \text{limita } 1,\ (-1)^{2k+1} \to \text{limita } -1 \Rightarrow}$ $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir divergent

Dar x_n mărginit în $\mathbb{R}^2$

Şiruri de nr reale

DEFINIŢIA 1 a) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ s.n. cresc (strict cresc) dacă $x_{n+1} \geq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ ($x_{n+1} > x_n \ \forall n\in\mathbb{N}$)

b) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ s.n. desc (strict desc) dacă $x_{n+1} \leq x_n \ \forall n\in\mathbb{N}$ ($x_{n+1} < x_n \ \forall n\in\mathbb{N}$)

c) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s.n. monoton dacă este cresc sau desc.

d) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s.n. strict monoton dacă este strict cres sau strict desc.

Notaţie: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Definiţia 2 a) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limita $+\infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n > \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon$

b) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limita $-\infty$ dacă $\forall \varepsilon < 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n < \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon$

c) Spunem că un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$

Lema lui CESARO: Din orice şir mărginit de nr reale se poate extrage cel puţin un subşir convergent. (Orice şir mărginit de nr reale are cel puţin un punct limită în $\mathbb{R}$)

Criteriul lui Cauchy pt şiruri de nr reale: Un şir de nr reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir Cauchy $\Longleftrightarrow$ este şir convergent ($\mathbb{R}$ este spaţiu metric complet)

Demonstraţie „$\Leftarrow$" Afirmaţia este valabilă într-un spaţiu metric

„$\Rightarrow$" $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir Cauchy în $\mathbb{R} \Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir mărginit în $\mathbb{R}$

$\xrightarrow[\text{CESARO}]{\text{Lema}} (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are cel puţin un punct limită în $\mathbb{R}$

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir Cauchy şi are cel puţin un punct limită în $\mathbb{R} \Longrightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir convergent

COROLAR: $\mathbb{R}^k$ este spaţiu metric complet

Demonstraţie: $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir Cauchy în $\mathbb{R}^k \Longleftrightarrow (x_{1n})_{n\in\mathbb{N}}, (x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ sunt şiruri Cauchy în $\mathbb{R} \xLeftrightarrow[\text{Cauchy}]{\text{CRITERIUL}} (x_{1n})_{n\in\mathbb{N}}, (x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ sunt şiruri convergente în $\mathbb{R} \Longleftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir convergent în $\mathbb{R}^k$

TEOREMA LUI WEIERSTRASS: Orice şir monoton şi mărginit de nr reale este convergent.

Dem: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir mărginit $\Longrightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a \le x_n \le b\ \forall n\in\mathbb{N}$

$\exists$ ~~infimum~~ $\inf x_n = \alpha \in \mathbb{R}$

$\sup x_n = \beta \in \mathbb{R}$

Presupunem şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescător

Fie $\varepsilon > 0 \Rightarrow \beta - \varepsilon$ - nu este majorant al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $x_{n_\varepsilon} > \beta - \varepsilon$

$n \ge n_\varepsilon \Rightarrow \beta - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \le x_n < \beta < \beta + \varepsilon \Rightarrow \beta - \varepsilon < x_n < \beta + \varepsilon\ \forall n \ge n_\varepsilon \mid -\beta$

$-\varepsilon < x_n - \beta < \varepsilon, \forall n \ge n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - \beta| < \varepsilon \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - \beta| < \varepsilon\ \forall n \ge n_\varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = \beta$

Curs - 8

Şiruri de nr reale

Aplicaţii la teorema lui Weierstrass

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} - \ln n \ \forall n\geq 1$ este convergent

Se foloseşte inegalitatea $\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a} \ \forall\ 0<a<b$

Monotonia: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \ \forall n \geq 1$

$\left.\begin{array}{l} a = n \\ b = n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n} \ \forall n\geq 1$

$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) \ \forall n\geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) < 0 \ \forall n\geq 1 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow x_{n+1} - x_n < 0 \ \forall n\geq 1 \Leftrightarrow x_{n+1} < x_n \ \forall n\geq 1 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şir strict desc

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şir mărginit superior

Mărginirea inferioară

$\ln 2 - \ln 1 < 1$

$\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$

$\ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3}$

$\vdots$

$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$ $(+)$

$\ln(n+1) - \ln 1 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \ \forall n\geq 1$

$\ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} \ \Big| - \ln n$

$\ln(n+1) - \ln n < \underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} - \ln n\right)}_{x_n} \ \forall n\geq 1$

$0 < \ln(n+1) - \ln(n) \ \forall n \geq 1$

$\Rightarrow 0 < x_n \ \forall n\geq 1$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şir mărg. inf.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şir monoton şi mărginit din $\mathbb{R} \xRightarrow{\text{Th. W}} (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şir monoton conv.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} - \ln n\right) \underline{\text{not}}\ \gamma \in (0,1)$, γ - s.n. constanta lui Euler

Obs. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) = +\infty$

Lema STOLZ - CESARO (varianta $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

Se consideră şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ cu urm prop:

a) $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict cresc. ($\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strict desc)

$$\boxed{b) \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}}$$

Varianta $\left(\frac{0}{0}\right)$

Se consideră şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ cu urm prop:

a) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

b) $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict monoton

$$\boxed{\begin{array}{l} c) \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \in \overline{\mathbb{R}} \\ \text{Atunci } \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \end{array}}$$

Criteriul raportului pentru şiruri cu termeni strict poz:

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din $\mathbb{R}_+^*$ a.î. $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Dacă } l < 1, \text{ atunci } \exists \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \\ \text{Dacă } l > 1, \text{ atunci } \exists \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \end{array}}$$

Criteriul radicalui pt şiruri cu termeni strict poz:

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din $\mathbb{R}_+^*$ a.î. $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $\exists$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l}$$

Definiţia: Spunem că $l \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct limită al unui şir de nr reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă $\exists$ $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ un subşir al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a.î. $l = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}$.

Notaţie: $\mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \overset{\text{def}}{=} \{ l \in \overline{\mathbb{R}} \mid l \text{ punct limită al şirului } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \}$

Lema lui Cesaro generalizată: Din orice şir de nr reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se poate extrage un şir care are limită în $\overline{\mathbb{R}}$ (orice şir de nr reale are cel puţin un punct limită).

Limita inferioară și limita superioară a unui șir de nr reale

Unui șir de nr reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ îi atribuim două șiruri din $\overline{\mathbb{R}}$ not $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definite astfel:

$$u_n = \sup_{k\geq n} x_k = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$v_n = \inf_{k\geq n} x_k = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Șirurile $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\overline{\mathbb{R}}$ au urm prop:

1) $u_{n+1} \leq u_n \ \forall n\in\mathbb{N}$

2) $v_{n+1} \geq v_n \ \forall n\in\mathbb{N}$

3) la întâmplare: $v_m \leq u_n \ \forall m, n\in\mathbb{N}$

<u>Definiția 1)</u> S.n. <u>limita superioară</u> a unui șir de nr. reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numărul $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

2) S.n. <u>limita inferioară</u> a unui șir de nr reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numărul $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

<u>Notații</u>: $\overline{\lim}\, x_n \overset{\text{def}}{=} \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (\sup\limits_{k\geq n} x_k) \in \overline{\mathbb{R}}$

$\underline{\lim}\, x_n \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\inf\limits_{k\geq n} x_k) \in \overline{\mathbb{R}}$

<u>Obs.</u> $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$

<u>Teorema 1</u>: Pt. orice șir de nr reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt adev urm. egalități:

$$\overline{\lim}\, x_n = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$$

$$\underline{\lim}\, x_n = \inf_{\overline{\mathbb{R}}} \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$$

Exemplu: $x_n = (-1)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2k} = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2k+1} = -1$

$\Rightarrow \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{-1, 1\} \Rightarrow \overline{\lim}\, x_n = 1$

$\underline{\lim}\, x_n = -1$

Teorema 2: a) Un șir de nr. reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită $\Leftrightarrow$

$\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$. În plus $\lim_{n\to+\infty} x_n = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$

b) Un șir de nr reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit superior $\Leftrightarrow \overline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R}$

Un șir de nr reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit inferior $\Leftrightarrow \underline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R}$

Un șir de nr reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit $\Leftrightarrow \overline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R}$ și $\underline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R}$.

APLICAȚIE: $x_n = n(-1)^n$

Mă uit în formula șirului și identific părțile care necesită explicitare => acestea sunt subșirurile reprezentate

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{k\to+\infty} x_{2k} = +\infty \\ \lim_{k\to+\infty} x_{2k+1} = -\infty\end{array}\right| \Rightarrow \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{+\infty, -\infty\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\lim}\, x_n = +\infty \\ \underline{\lim}\, x_n = -\infty\end{array}\right| \Rightarrow \overline{\lim}\, x_n \neq \underline{\lim}\, x_n \Rightarrow \text{nu are lim}$$

Curs - 9

Serii de nr reale

Considerăm $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din $\mathbb{R}$ și definim șirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ în felul urm.

$$s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$$

Definiția 1: Perechea de șiruri de nr reale $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$ s.n. seria de nr reale asociată șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și se not $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

x_n s.n. termenul general de rang n al seriei $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

s_n ~~s.n.~~ se numește suma parțială de rang n a seriei $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Definiția 2: a) Seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ se num. convergentă dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergentă. În acest caz $\lim_{n\to+\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$ se num. suma seriei $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

b) Seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ se num. divergentă, dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergentă.

c) Seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ are sumă (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă șirul sumelor parțiale

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită. În acest caz $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \overline{\mathbb{R}}$ se num. suma seriei $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

d) Seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ se num. absolut convergent dacă seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ este o serie convergentă.

Teorema 1: Dacă seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ s.n. convergentă atunci $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Demonstrație: $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ serie convergentă $\xRightarrow{def} \exists \lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

$x_n = S_n - S_{n-1}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

$\exists \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = S - S = 0$

COROLAR: Dacă $\nexists \lim_{n\to+\infty} x_n$ sau $\exists \lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0$, atunci seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este divergentă.

Exemple remarcabile de serii de nr reale

1) Seria armonică

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ — convergentă dacă $\alpha > 1$; divergentă dacă $\alpha \leq 1$

2) Seria putere

$\sum_{n=1}^{+\infty} a^n$ — absolut convergentă $|a| < 1$; divergentă dacă $|a| \geq 1$

3) Seria exponențială

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ - absolut convergenta $\forall a \in \mathbb{R}$ și suma ei este e^a.

Criteriul lui Cauchy pt serii de nr reale:

a) Seria de nr reale $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergenta dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon\ \forall p \in \mathbb{N}$

b) Seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty}$ este absolut convergentă $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n| + |x_{n+1}| + \dots + |x_{n+p}| < \varepsilon$

Teorema 2 : Orice serie de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ absolut convergentă este convergentă

Demonstrație:

$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ serie absolut convergentă $\xrightarrow[b)]{\text{Criteriul Cauchy}}$ $\forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n|+|x_{n+1}|+\dots+|x_{n+p}|<\varepsilon\ \forall n\geq n_\varepsilon\ \forall p\in\mathbb{N}$ (1).

Știm că $|x_n+x_{n+1}+\dots+x_{n+p}|\leq|x_n|+|x_{n+1}|+\dots+|x_{n+p}|\ \forall n,p\in\mathbb{N}$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a. î. $|x_n+x_{n+1}+\dots+x_{n+p}|<\varepsilon$ $\forall n\geq n_\varepsilon$; $\forall p\in\mathbb{N}$ $\xrightarrow[\text{Cauchy (a)}]{\text{Criteriul}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ serie convergentă

Definiția 3 a) Seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este semiconvergentă dacă aceasta este o serie convergentă care nu este absolut convergentă.

b) Seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ se num. serie alternată dacă $\forall n\in\mathbb{N}$ avem $x_n\cdot x_{n+1}<0$.

Criterii de convergență pt serii de nr reale

1. Criteriul lui LEIBNIZ : Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din $\mathbb{R}_+$ a. î. $a_{n+1}<a_n$ și $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n=0$. Atunci seriile alternate de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ sunt convergente.

Exemplu de serie semiconvergentă

- $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$; $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ serie divergentă $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ nu este absolut convergentă

Aceasta este o serie alternată.

$x_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n}=(-1)^n\cdot a_n$

$a_n\geq 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

$a_{n+1}<a_n\ \forall n\in\mathbb{N}$ $\xrightarrow[\text{Leibniz}]{\text{crit}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ serie convergentă

$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n=0$

Criteriul lui ABEL

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri din $\mathbb{R}$ care verif. urm. ipoteze:

a) $a_{n+1} < a_n \ \forall n\in\mathbb{N}$

$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

b) $\exists M>0$ a.î. $|b_0+b_1+\dots+b_n| \le M \ \forall n\in\mathbb{N}$. Atunci seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\cdot b_n$ este convergentă.

Criteriul lui DIRICHLET

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri din $\mathbb{R}$ care verif. urm. ip.

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir monoton şi mărginit

b) seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ este convergentă

Atunci seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\cdot b_n$ este convergentă.

Serii de nr reale poz

Proprietăţile seriei cu termeni pozitivi

Fie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1) Seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ ~~se num~~ este absolut convergentă $\Leftrightarrow$ este convergentă.

2. Şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir cresc din $\mathbb{R}_+$.

3. Seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărg superior.

4. Orice serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ de nr reale poz este fie convergentă, fie divergentă cu suma $+\infty$.

Criteriile de convergenţă pt serii cu termeni pozitivi

1) Criteriul rap. pt serii cu termeni pozitivi.

Fie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi a.î. $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Dacă $l<1$, atunci seria este convergentă.

Dacă $l>1$, atunci seria este divergentă.

Dacă $l=1$ nu pot să aplic criteriul.

2) Criteriul radicalului pt serii cu termeni poz.

Fie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ o serie cu termeni poz. a.î. $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Dacă $l<1 \Rightarrow$ seria este convergentă

Dacă $l>1 \Rightarrow$ seria ~~ti~~ este divergentă

Curs - 10

Serii de nr reale

1. Criterii de convergență pt serii cu termeni pozitivi

•3) Criteriul lui RAABE-DUHAMEL

Se consideră o serie de nr reale poz. $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ a.î. $\exists \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Dacă $l < 1 \Rightarrow$ seria $\sum^{+\infty} x_n$ divergentă

Dacă $l > 1 \Rightarrow$ seria $\sum_{0}^{+\infty} x_n$ este convergentă

•4) Criteriul ~~lui~~ de condensare al lui Cauchy.

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din $\mathbb{R}_+$ a.î. $x_{n+1} \le x_n \ \forall n\in\mathbb{N}$ și $\exists \lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.
Atunci seriile de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \cdot x_{2^n}$ au aceeași natură. (ori amândouă convergente ori divergente)

Dacă nu mă ajută niciunul $\Rightarrow$ 5) ★Criteriul de comparație cu inegalități:

Se consideră două serii de nr reale poz $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ a.î. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ pt ~~orice~~ care $y_n \ge x_n \ \forall n \ge n_0$.

Dacă seria $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este serie convergentă.

Dacă seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ este serie divergentă.

6. ★Criteriul de comp cu limite

Se consideră două serii cu termeni poz a.î. $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}_+$

Dacă $l \in (0, +\infty)$ seriile $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ au aceeași natură.

Dacă $l = 0$ și seria $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este conv.

Dacă $l = +\infty$ și seria $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este div.

Produsul a două serii de nr reale

Definiția 1: S.n. seria produs pt seriile $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$, unde $z_n = x_0 \cdot y_n + x_1 \cdot y_{n-1} + \dots + x_2 \cdot y_{n-2} + \dots + x_n \cdot y_0 = \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot y_{n-k} \; \forall n \in \mathbb{N}$

Teorema lui Cauchy: Dacă seriile $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ sunt absolut convergente, atunci seria produs $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ este abs. converg. În plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$.

Teorema lui Mertens: Dacă seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este converg. și seria $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ este abs. converg. atunci seria produs $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ este serie convergentă. În plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} y_n\right)$

Mulțimi compacte și mulțimi conexe

1. Mult. compacte în spații topologice

Definiția 1: O mult. $K \subseteq (X, \mathcal{T})$ s.n. compactă, dacă din orice acoperire cu mult. deschise a mult. K se poate extrage o ~~submult.~~ subacoperire finită.

$$\left.\begin{array}{l} K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \\ G_i \in \mathcal{T} \; \forall i \in I \end{array}\right\| \Longrightarrow \exists\, i_1, i_2, i_3, \dots, i_p \in I \text{ a.î. } K \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_p}$$

Teorema 1: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic separat și $K \subseteq X$ o mult. compactă. Sunt adev. urm. afirm.:

a) K este mult. închisă

b) Dacă $F \subseteq K$ este o mult. închisă, atunci F este compactă

Teorema 2: (Caract. mult. compacte în spații metrice)

O mult. $K \subseteq (X, d)$ este compactă $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din K $\exists ((x_n)_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un subșir converg. al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a.î. $\lim_{k \to \infty} x_{n_k}$

Definiția 2: O mult. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ s.n. mărg. dacă $\exists\, a \in \mathbb{R}^n, \exists\, r > 0$ a.î. $A \subseteq B(a, r)$.

Teorema HEINE-BOREL: O mult. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ este compactă $\Leftrightarrow$ K este mult. închisă și mărginită.

Exemple: 1) $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mult. compactă

2) $[a, b) \subseteq \mathbb{R}$ mult mărg
$[a, b) \subseteq \mathbb{R}$ nu este mult închisă $\Big| \Rightarrow [a, b)$ nu este mult compactă

3) $[a, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ mult. închisă
$[a, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ nu este mult mărg. $\Big| \Rightarrow [a, +\infty)$ nu este mult compactă

Mult conexe în spații topologice

Definiția 3: O mult. $A \subseteq (X, \mathcal{T})$ s.n. neconexă dacă $\exists\, G_1, G_2 \in \mathcal{T}$ a.î.: 1) $G_1 \cap A \neq \emptyset$ și $G_2 \cap A \neq \emptyset$

2) $(G_1 \cap A) \cap (G_2 \cap A) \neq \emptyset$

3) $(G_1 \cap A) \cup (A \cap G_2) = A$

Definiția 4: O mult. $A \subseteq (X, \mathcal{T})$ s.n. conexă dacă nu este mult neconexă.

Exemplu: $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$G_1 = (-\infty, \sqrt{2}) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$

$G_2 = (\sqrt{2}, +\infty)$

1) $G_1 \cap A \neq \emptyset$, $G_2 \cap A \neq \emptyset$

2) $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset \Rightarrow (G_1 \cap A) \cup (G_2 \cap A) \neq \emptyset$

3) $(G_1 \cap A) \cup (G_2 \cap A) = ((-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}) \cup ((\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$

$A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ mult. neconexă.

Definiția 5: O mult. $I \subseteq \mathbb{R}$ nevidă s.n. interval dacă $\forall\, x, y \in I$ a.î. $x \leq y$ și $\forall\, z \in \mathbb{R}$ cu $x \leq z \leq y$, avem $z \in I$.

Teorema de caract. a mult. conexe din $\mathbb{R}$

O mult. $I \subseteq \mathbb{R}$ este conexă $\iff$ $I = \emptyset$ sau I = interval.

Exemplu: 1) $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ - mult conexă

2) $\mathbb{N}$ - mult neconexă

3) $\mathbb{R}^*$ - mult neconexă

$\sum_{n=1} (\bar{a})$ = serie convergentă | $\Rightarrow$ x_n conv.

Curs 11
Funcții continue în spații metrice

Definiția 1: O funcție $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ s.n. continuă în punctul $x_0 \in D$ dacă $\forall\ W \in \mathcal{V}_{\mathcal{E}_{d_2}}(f(x_0))$ $\exists\ V \in \mathcal{V}_{\mathcal{E}_{d_1}}(x_0)$ a.î. $f(V \cap D) \subseteq W$

Definiția 2: O funcție $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este continuă pe mulț. $A \subseteq D$ dacă f este continuă în orice punct $x_0 \in A$.

Definiții echivalente ale funcțiilor continue

a) Funcția $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_1)$ este continuă în punctul $x_0 \in D$ dacă $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0$ a. î. $\forall\ x \in D$ cu $d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon$ avem $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

b) Funcția $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este continuă în punctul $x_0 \in D$ dacă $\forall\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din D cu $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$ avem $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$

$$\left(\begin{matrix} x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0 \\ f \text{ continuă în } x_0 \end{matrix} \Longrightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0) \right)$$

Teorema 1: Fie $D \subseteq (X, d_1)$ și $x_0 \in \text{Izo } D$. Orice funcție $f : D \to (Y, d_2)$ este continuă în x_0.

Demonstrație:

$x_0 \in \text{Izo } D \Rightarrow \exists V_0 \in \mathcal{V}_{\mathcal{B}d_1}(x_0)$ a.î. $V_0 \cap D = \{x_0\}$

$f(V_0 \cap D) = f(\{x_0\}) = \{f(x_0)\}$

$\{f(x_0)\} \subseteq W \ \forall W \in \mathcal{V}_{\mathcal{B}d_2}(f(x_0)) \Rightarrow f(V_0 \cap D) \subseteq W$
$\forall W \in \mathcal{V}_{\mathcal{B}d_2}(f(x_0)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este continuă în x_0.

Teorema 2 (Prop funcțiilor continue)

Fie $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ o funcție continuă pe X. Sunt adev urm afirmații:

a) $\forall G \in \mathcal{C}_{d_2} \Rightarrow f^{-1}(G) \in \mathcal{C}_{d_1}$ (Orice fct ~~deschi~~ cont intoarce mult deschise din Codomeniu in domeniu)

b) $\forall F \in \mathcal{C}_{d_2}$ Y mult închisă $\Rightarrow f^{-1}(F) \in \mathcal{C}_{d_1}$ - mult închisă

c) $\forall K$ ~~(mult compactă)~~ $\underset{\text{mult compactă}}{\subseteq X} \Rightarrow f(K) \subseteq Y$ mult compactă

d) $\forall A \subseteq X$ mult conexă $\Rightarrow f(A) \subseteq Y$ mult conexă.

Teorema 3: Fie $K \subseteq (X, d_1)$ o mult compactă. Orice funcție continuă $f : K \to \mathbb{R}$ este mărginită și-și atinge marginile (are maxim și minim).

Demonstrație: K este mult compactă;
f continuă pe K $\xRightarrow{T2.c)} f(K) \subseteq \mathbb{R}$ - mult compactă

$f(K) \subseteq \mathbb{R}$ mult. ~~conexă~~ compactă $\xRightarrow[\text{HEINE-BOREL}]{\text{Th}} f(K)$ mult închisă și mărginită

$f(K) \subseteq \mathbb{R}$ mult mărginită $\Rightarrow f$ funcție mărginită

$f(K) \subseteq \mathbb{R}$ mult mărginită $\Rightarrow \exists \alpha = \sup f(K)$
$\beta = \inf f(K)$

Se dem că $\alpha, \beta \in f(K)$

$\alpha \in f(K)$
$\alpha = \sup(f(K))$

$\alpha - \frac{1}{n} < \alpha \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \alpha - \frac{1}{n}$ este mărg al mult. $f(K)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists y_n \in f(K)$ a. î. $y_n > \alpha - \frac{1}{n}$

$\alpha - \frac{1}{n} < y_n < \alpha \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} y_n = \alpha$ $\boxed{1}$

Pt orice $n \in \mathbb{N}^*$ $\exists x_n \in K$ a.î. $y_n = f(x_n)$ $\boxed{2}$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din K
$K \subseteq (X, d_1)$ mult compactă $\Rightarrow \exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ subșir conv. la un elem $l \in K$

$x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} l \in K$
f continuă în $l \in K$ $\Rightarrow f(x_{n_k}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} f(l)$ $\overset{\boxed{2}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow y_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} f(l) \overset{\boxed{1}}{\Longrightarrow} f(l) = \alpha \Rightarrow \alpha \in f(K) \Rightarrow \alpha$ este maximul $f(K)$

Definiția 3. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. O funcție $f: I \to \mathbb{R}$ are prop lui Darboux dacă $\forall x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 \neq x_2$ și $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ situat între $f(x_1)$ și $f(x_2)$ $\exists c \in I$ situat între x_1 și x_2 are prop că $f(c) = \lambda$

Obs: Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție cu prop lui Darboux.

a) Dacă $\exists a, b \in I$ a.î. $f(a) \cdot f(b) < 0$ $\exists c \in I$ ~~a.î.~~ situat între a și b a.î. $f(c) = 0$.

b) Dacă $f(x) \neq 0$ $\forall x \in I$, funcția f are semn constant pe I ($f(x) < 0$ $\forall x \in I$ sau $f(x) > 0$ $\forall x \in I$)

Teorema 4 : Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Orice funcție continuă $f: I \to \mathbb{R}$ are prop lui Darboux.

Dem: Fie $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 \neq x_2$

Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ situat intre $f(x_1)$ și $f(x_2)$

Considerăm $x_1 < x_2$ și $f(x_1) \leq f(x_2)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2 \in I \\ x_1 < x_2 \end{array}\right| \Rightarrow [x_1, x_2] \subseteq I$$

$$\left.\begin{array}{l} [x_1, x_2] \subseteq I \text{ interval} \Rightarrow [x_1, x_2] \subseteq I \text{ mult convexă} \\ f \text{ cont pe } I \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f([x_1, x_2]) \subseteq \mathbb{R} \text{ mult conexă} \overset{\#}{\Longrightarrow} f([x_1, x_2]) \underset{\text{interval}}{\subseteq} \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} f([x_1, x_2]) \neq \emptyset \\ f(x_1) \in f([x_1, x_2]) \\ f(x_2) \in f([x_1, x_2]) \\ f(x_1) \leq f(x_2) \\ f(x_1) \leq \lambda \leq f(x_2) \\ f([x_1, x_2]) \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda \in f([x_1, x_2]) \Rightarrow \exists c \in [x_1, x_2] \text{ a.î. } f(c) = \lambda \Rightarrow f \text{ are prop lui Darboux.}$$

Teorema 5: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție cont. și injectivă. Atunci este strict monotonă.

Dem: Dem afirmația prin reducere la absurd

P.P.C.A. funcția nu este strict monotonă:

$$\exists\, x_1, x_2, x_3 \in I \text{ cu } x_1 < x_2 < x_3 \text{ a.î. } \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) > f(x_3) \\ \text{sau} \\ f(x_1) > f(x_2) < f(x_3) \end{cases}$$

Alegem varianta $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$

Alegem λ ($\max(f(x_1, x_3)) < \lambda < f(x_2)$)

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) < \lambda < f(x_2) \Rightarrow \exists\, c_1 \in [x_1, x_2] \text{ a.î. } f(c_1) = \lambda \\ f(x_3) < \lambda < f(x_2) \Rightarrow \exists\, c_2 \in [x_2, x_3] \text{ a.î. } f(c_2) = \lambda \end{array}\right\} \underset{f \text{ inj}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \underset{f \text{ inj}}{f(c_1) = f(c_2)} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1 = c_2 \\ c_1 \in [x_1, x_2] \\ c_2 \in [x_2, x_3] \end{array}\right| \overset{\#}{\Longrightarrow} c_1 = c_2 = x_2 \Rightarrow f(c_1) = f(c_2) \text{ (-)}$$

$\Rightarrow x = f(x_2)$ || , $x < f(x_2)$ || $\Rightarrow$ f strict monotonă.

Curs 12

Funcții uniform continue

Def 1: O funcție $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ s.n. <u>uniform continuă</u> pe mulțimea D dacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ $\forall x, y \in D$ cu $d_1(x, y) < \delta_\varepsilon$.

Obs: $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ uniform continuă pe $D \Rightarrow f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ continuă pe D. Reciproca nu este valabilă.

Teorema 1: O funcție $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este uniform continuă pe mult. $D \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri din D cu $\lim_{n\to\infty} d_1(x_n, y_n) = 0$ avem $\lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n), f(y_n)) = 0$.

Corolar: O funcție $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ nu este uniform continuă pe mult. $D \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri din D a.î. $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$ și $\lim_{n\to+\infty} d(f(x_n), f(y_n)) \neq 0$.

Exemplu de funcție continuă care nu este uniform continuă

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

f funcție continuă pe $\mathbb{R}$

Ne trebuie: $|x_n - y_n| \to 0$

$$|f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$$

$$|x_n^2 - y_n^2| \not\to 0$$

Alegem $x_n = \sqrt{n+1}$ și $y_n = \sqrt{n}$

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = \lim_{n\to\infty} |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| \overset{conj}{=} \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = \lim_{n\to\infty} |x_n^2 - y_n^2| = \lim_{n\to\infty} |\cancel{n}+1-\cancel{n}| =$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ f nu este funcție uniform continuă

Definiția 2: O funcție $f : D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ s.n. funcție LIPSCHITZ dacă $\exists\, \alpha > 0$ a. î. $d_2(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d_1(x, y)$ $\forall\, x, y \in D$

Exemple: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. Orice funcție derivabilă $f: I \to \mathbb{R}$ care are f' funcție mărginită este funcție LIPSCHITZ.

Teorema 2

a) Orice funcție LIPSCHITZ $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este uniform continuă pe mulțimea D.

b) Fie K (mult. compactă) $\subseteq (X, d_1)$. Orice funcție continuă $f: K \to (Y, d_2)$ este uniform continuă pe mult K.

Demonstrație:

a) $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ funcție LIPSCHITZ $\Rightarrow \exists\, \alpha > 0$ a. î. $d_2(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y)$ $\forall\, x, y \in D$

Alegem: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri din D a. î. $\lim_{n\to\infty} d_1(x_n, y_n) = 0$

Sunt adev inegalitățile $0 \leq d_2(f(x_n), f(y_n)) \leq \alpha \cdot d_1(x_n, y_n)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Conform criteriului cleștelui $\exists \lim\limits_{n\to\infty} d_2(f(x_n), f(y_n)) = 0$

Conform teoremei 1, funcția f este uniform continuă pe D.

b) Demonstrăm afirmația prin reducere la absurd

P.P. că $f: K \to Y$ o funcție continuă pe K care nu este uniform continuă pe K.

f nu este uniform continuă pe $K \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri din K a.î. $\lim\limits_{n\to+\infty} d_1(x_n, y_n) = 0$ și $\lim\limits_{n\to+\infty} d_2(f(x_n), f(y_n)) \neq 0$ (1)

$$\left.\begin{array}{l}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ șir din } K \\ K \text{ mulțime compactă}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ subșir al lui } (x_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

$$\exists x \in K \text{ a.î. } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$$

Sunt adev inegalitățile $0 \le d_1(y_{n_k}, x) \le d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x)\ \forall k\in\mathbb{N}$

$$\xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$\exists \lim\limits_{k\to\infty} d_1(y_{n_k}, x) = 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = x$

$$\left.\begin{array}{l}x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x \\ f \text{ cont în } x\end{array}\right\} \Rightarrow f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to+\infty} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l}y_{n_k} \to x \\ f \text{ cont in } x\end{array}\right\} \Rightarrow f(y_{n_k}) \xrightarrow{k\to+\infty} f(x)$$

Sunt adevărate inegalitățile $0 \le d_2(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \le$
$\le d_2(f(x_{n_k}), f(x)) + d_2(f(x), f(y_{n_k}))\ \forall k\in\mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l}\exists \lim\limits_{k\to\infty} d_2(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) = 0. \\ \text{Conform rel (1)} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d_2(f(x_n), f(y_n)) \neq 0.\end{array}\right\} \Rightarrow \text{contradicție}$$

Teorema 3

Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$

$g : (a, b] \to \mathbb{R}$

$h : [a, b) \to \mathbb{R}$

Trei funcții continue.

Funcția h este uniform continuă pe $[a, b) \to \mathbb{R} \iff$

$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} h(x) \in \mathbb{R}$

Funcția g este uniform continuă pe $(a, b] \iff$

$\lim_{\substack{x \to a \\ x > 0}} g(x) \in \mathbb{R}$

Funcția f este uniform cont pe $(a, b) \iff$

$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \in \mathbb{R}$ și $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) \in \mathbb{R}$

Teorema 4: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nemărginit. O funcție $\mathbb{R}$ este uniform continuă pe $I \iff \exists c \in I$ a.î. $f|_{I \cap (-\infty, c]}$ și $f|_{I \cap [c, +\infty)}$ sunt uniform continue.

Aplicatii:

1) Studiați uniform continuitatea funcției $f : (0, +\infty) \to$

$f(x) = \ln x$

f continuă pe $(0, +\infty)$

f derivabilă pe $(0, +\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{x} \; \forall x \in (0, +\infty)$ $\Rightarrow$

$|f'(x)| \leq 1 \; \forall x \in [1, +\infty) \Rightarrow f|_{[1, +\infty)}$ (restricția) este funcție Lipschitz

$\Rightarrow f|_{[1, +\infty)}$ uniform continuă pe $[1, +\infty)$

Studiem uniform continuitatea $f|_{(0,1]}$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \cancel{+\infty}\ -\infty \Rightarrow f|_{(0,1]}$ nu este uniform continuă pe $[0,1]$ ②

Din ① și ② rez că f nu este uniform continuă pe $[0,+\infty)$

2) $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \in (0,+\infty) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

f continuă pe $[0,+\infty)$

$f|_{[0,2]}$ continuă
$[0,2]$ - mult compactă
$\Rightarrow f|_{[0,2]}$ uniform cont pe $[0,2]$

$f|_{[2,+\infty)}$ funcție LIPSCHITZ $\Rightarrow f|_{[2,+\infty)}$ uniform cont pe $[2,+\infty)$

$f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ uniform cont

Curs 13

Șiruri de funcții

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$f_n: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}$

Def 1: Sp. că șirul de funcții <u>converge simplu</u> pe mulțimea $A \subseteq D$ dacă $\forall x \in A$ șirul de nr reale $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Notație: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{not}{=} f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – funcția limită a șirului de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad f_n \xrightarrow[A]{s} f$ simplă

$x>y$

$x>y$

$x \ngtr y$

$x<0$

Def 2: Sp că șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>converge uniform</u> pe mulțimea $A \subseteq D$ către funcția $f: A \to \mathbb{R}$ dacă $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall n > n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $\forall x \in A$.

Not: $f_n \xrightarrow[A]{u} f$ uniform

Obs: $f_n \xrightarrow[A]{u} f \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f_n \xrightarrow[A]{s} f$

Teorema 1 (Criteriul practic de convergență uniformă)

Șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform pe mulțimea $A \subseteq D$ către funcția $f: A \to \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0$

Teorema lui Weierstrass pt șiruri de funcții

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții care converge uniform pe mulțimea $A \subseteq D$ către funcția $f: A \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in A$ a.î. f_n este funcție continuă în punctul x_0 $\forall n \in \mathbb{N}$. Atunci funcția f este continuă în x_0.

Demonstrație: $f_n \xrightarrow[A]{u} f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \; \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in A.$

$\xRightarrow{n = n_\varepsilon} |f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \; \forall x \in A$ (1)

f_{n_ε} funcție continuă în $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0$

a.î. $|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$; $\forall x \in A$ cu $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ (2)

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x) + f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0) + f_{n_\varepsilon}(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ (1)}} + \underbrace{|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \; \forall x \in A \text{ cu } |x - x_0| < \delta_\varepsilon \text{ (2)}} + \underbrace{|f_{n_\varepsilon}(x_0) - f(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ (1)}}$$

$\forall x \in A$ cu $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $\forall x \in A$ a.î. $|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ fct. continuă în x_0

COROLAR: Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții care converge simplu pe mulțimea A către funcția $f: A \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in A$. Dacă f_n este funct. cont în x_0 $\forall n \in \mathbb{N}$ și f nu este cont în x_0, atunci

$f_n \not\xrightarrow[A]{u} f$ (f șirul de fct nu converge uniform pe mulț.

Teorema lui Dini.

Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții cu $f_n: [a, b] \to \mathbb{R}$ și funcție $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ care verifică urm condiții:

a) f_n funcție continuă pe $[a, b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

b) f funcție continuă pe $[a, b]$

c) $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{s} f$

d) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $\forall x \in [a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

sau

$f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ $\forall x \in [a, b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Din a), b), c), d) $\Rightarrow f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{u} f$

APLICAȚII: a) $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = \sin^{2n}(x)\ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) $f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R};\ f_n(x) = \frac{nx}{n+x}\ \forall x \in (0, +\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}$

c) $f_n : [1, +\infty) \to \mathbb{R}.\ f_n(x) = \frac{nx}{n+x}\ \forall x \in [1, +\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}$

a) Fie $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sin^{2n}(x) = \lim_{n\to\infty} (\sin x)^{2n} = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$A = \{x \in [0, \frac{\pi}{2}] \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\} = [0, \frac{\pi}{2}]$$

↳ mult pe care are loc conv. simplă

$$f : A = [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R};\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f_n \xrightarrow[A = [0, \frac{\pi}{2}]]{s} f$$

f_n - fct continuă pe $[0, \frac{\pi}{2}]\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

f nu este fct cont în $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ COROLAR T.W. $\Rightarrow f_n \not\xrightarrow[{[0, \frac{\pi}{2}]}]{u} f$

b) Fie $x \in (0, +\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n+x} = x$$

$A = (0, +\infty)$

$f : A = (0, +\infty) \to \mathbb{R};\ f(x) = x$

$f_n \xrightarrow[(0,+\infty)]{s} f$

Studiem convergența uniformă

Fie $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in (0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (0,+\infty)} \left| \frac{nx}{n+x} - x \right| = \sup_{x \in (0,+\infty)}$$

$$= \sup_{x\in(0,+\infty)} \left| \frac{nx - nx - x^2}{n+x} \right| = \sup_{x\in(0,+\infty)} \left| \frac{-x^2}{n+x} \right| = \sup_{x\in(0,+\infty)} \frac{x^2}{n+x}$$

$\sup$ = pct extrem => derivez => tabel de variație

Fie $g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{x^2}{n+x}$

$$g(n) = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}, \ n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \sup_{x\in(0,+\infty)} g(x) \geq \frac{n}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_n \geq \frac{n}{2} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in(0,+\infty)}\right) |f_n(x) - f(x)| = +\infty \ \cancel{\neq 0}$$

$$\Rightarrow f_n \ \cancel{\xrightarrow[(0,+\infty)]{u}} \ f \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$