Elemente de teoria funcțiilor

Curs 2

Def 1: Fie $f: X \to Y$ și $g: M \to N$ a.î. $Y \subseteq M$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "g\circ f"'] & Y \subseteq & M \arrow[d, "g"] \\ & & N \end{tikzcd}$$

Fcția $g \circ f : X \to N$ def prin:

$$(g\circ f)(x) \overset{def}{=} g(f(x))$$ se numește compunerea funcțiilor g și f

Def 2: s.n. <u>fcția identică</u> a unei mulț nevide X funcția $1_X : X \to X$ definită $1_X(x) = x \quad \forall x \in X$

Def 3: Fcția $f : X \to Y$ s.n. <u>inversabilă</u> dacă $\exists$ o fcție $g : Y \to X$ a.î.

$$f \circ g = 1_Y \quad \text{și} \quad g \circ f = 1_X$$

Teorema 1

O fcție $f : X \to Y$ este inversabilă dacă și numai dacă f este <u>fcție bij</u>. În plus $f \circ f^{-1} = 1_Y$ și $f^{-1} \circ f = 1_X$

Mulțimi ordonate

<u>Definiție 1</u>: Se numește relație binară pe o mț nevidă X orice submț

$R \subseteq X \times X$

Notație: $(x,y) \in R \overset{\text{not}}{\Longleftrightarrow} x R y$

<u>Definiție 2</u> o ~~ref~~ relație binară $R \subseteq X \times X$

-> <u>reflexivă</u> dacă $x R x \ \forall x \in R$ (orice el e în relație cu el)

-> <u>Antisimetrică</u> dacă din $x R y$ și $y R x$ rezultă că $x = y$

-> <u>Tranzitivă</u> dacă $x R y$ și $x R z$ rezultă $x R z$

<u>Definiție 3</u> Se <u>numește</u> <u>relație de ordine</u> pe o mț nevidă X, o relație binară $\leq \subseteq R \times R$ care este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă

Se numește ~~sel~~ o mț <u>ordonată</u> o mț nevidă X pe care se definește o relație de ordine

Notații: 1) $x R y \overset{\text{not}}{\Longleftrightarrow} x \leq y$ (un simbol oarecare)

2) $(X, \leq)$ - mț ordonată

<u>Definiția 4</u>: Fie $(X, \leq)$ o mulț ordonată și $A \subseteq X$

a) Un element $a \in X$ se numește majorant al mulț A dacă $x \leq a$ $\forall x \in A$

mulțimea A se numește <u>majorată</u> sau mărginită superior în X dacă are cel puțin un majorant în mulț X

b) Un element $b \in X$ s.n. <u>minorant</u> al mulțimii A dacă $b \leq x$ $\forall x \in A$

Mulțimea A se numește <u>minorată</u>/ mărginită inferior) în X dacă au cel puțin un minorant.

c) Mulț $A \subseteq X$ se numește <u>mărginită</u> în X dacă A este <u>mărginită inferior</u> <u>și superior</u>.

d) O mulț $A \subseteq X$ mărginită superior are <u>maxim</u> dacă $\exists$ cel puțin un majorant al mulț A care aparține mulțimii A

not: $\max(A)$

e) O mulț $A \subseteq X$ mărginită inferior are <u>minim</u> dacă $\exists$ cel puțin un minorant al mulț A care aparține mulț A

Not: min A

f) O mț $A \subseteq X$ mărginită superior are supremum (margine ~~suprem~~ superioară) în X dacă $\exists$ cel mai mic majorant al mț A

Not: sup A

g) O mț $A \subseteq X$ mărginită inferior are infimum (sau margine inferioară) în X dacă $\exists$ cel mai mare minorant al mț A

Not: inf A

Obs:
$$a = \max A \Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ a \in A \\ 2)\ x \leq a \ \forall x \in A \end{cases}$$

$$b = \min A \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ b \in A \\ 2)\ b \leq x \ \forall x \in A \end{cases}$$

$$\alpha = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ x \leq \alpha \ \forall x \in A \\ 2)\ x \leq \alpha_1, \ \forall x \in A \Rightarrow \alpha \leq \alpha_1 \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \beta \leq x \ \forall x \in A \\ 2)\ \beta_1 \leq x \ \forall x \in A \Rightarrow \beta_1 \leq \beta \end{cases}$$

$$\exists \max A \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \exists \sup A = \max A$$

$$\exists \min A \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \exists \inf A = \min A$$

<u>Definiția 5</u>: a) Mt ordonată $(X, \leq)$ se numește total ordonată dacă $\forall x, y \in X \Rightarrow x \leq y \vee y \leq x$

b) Mt ordonată $(X, \leq)$ se numește <u>bine ordonată</u> dacă orice <u>submt</u> <u>nevidă</u> are <u>minimum</u>

c) Mt ordonată $(X, \leq)$ se num. <u>complet ordonată</u> dacă orice submt mărginită a lui X admite supremum și infimum

<u>Exemple</u>:

$(\mathbb{N}, \leq) \Rightarrow$ total ordonată; bine ordonată; complet ordonată

$(\mathbb{Z}, \leq) \Rightarrow$ total ordonată; <u>nu</u> e bine ordonată; complet ordonată

$(\mathbb{Q}, \leq) \Rightarrow$ total ordonat; <u>nu</u> e bine ordonată; <u>nu</u> este complet ordonată

$(\mathbb{R}, \leq) \Rightarrow$ total ordonat; <u>nu</u> e bine ordonată; complet ordonată

Exemplu de mulț. ordonată care nu e total ordonată

Pe $\mathbb{C}$ introducem rel binară „$\leq$" în felul următor $z_1 \leq z_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} Re\, z_1 \leq z_2 \\ im\, z_1 \leq z_2 \end{cases}$

Reflexivitate

$z \leq z \ \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow Re\, z \leq Re\, z \wedge im\, z \leq z$ (A)

Antisimetrie

$z_1 \leq z_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} Re\, z_1 \leq Re\, z_2 \wedge im\, z_1 \leq im\, z_2$

$z_2 \leq z_1 \overset{def}{\Leftrightarrow} Re\, z_2 \leq Re\, z_1 \wedge im\, z_2 \leq im\, z_1$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} Re\, z_1 = Re\, z_2 \\ im\, z_1 = im\, z_2 \end{array}\right| \Rightarrow z_1 = z_2$ (A)

Tranzitivitate:

$z_1 \leq z_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} Re\, z_1 \leq Re\, z_2 \wedge im\, z_1 \leq im\, z_2$

$z_2 \leq z_3 \overset{def}{\Leftrightarrow} Re\, z_2 \leq Re\, z_3 \wedge im\, z_2 \leq im\, z_3$

$\Rightarrow Re\, z_1 \leq Re\, z_3 \wedge im\, z_1 \leq im\, z_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1 \leq z_3$

$(\mathbb{C}, \leq)$ mulțime ordonată

$z_1 = 1 + 2i$ $\quad Re\, z_1 \leq Re\, z_2 \Rightarrow z_2 \not\leq z_1$

$z_2 = 2 + i$ $\quad im\, z_1 > im\, z_2 \Rightarrow z_1 \not\leq z_2$ $\Big| \Rightarrow (\mathbb{C}, \leq)$ nu e total ord.

$(\mathbb{Q}, \leq)$ nu este complet ordonat

$A = (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$

$1 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

$0 \leq x \leq 2 \quad \forall x \in A \Rightarrow A$ este mărginită în $\mathbb{Q}$

Dem prin reducere la absurd că $\nexists$ $\sup A \in \mathbb{Q}$

Pp. că $\exists$ $a = \sup A \in \mathbb{Q}$

$a \neq \sqrt{2}$ < $a < \sqrt{2}$ (I) ; $a > \sqrt{2}$ (II)

<u>Caz I</u> $a < \sqrt{2}$

$\exists \alpha \in \mathbb{Q}$, a.î. $a < \alpha < \sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l}\alpha \in (a, \sqrt{2}) \\ \alpha \in \mathbb{Q}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha \in A$

$\left.\begin{array}{l}\alpha \in A \\ \alpha \leq \sup A\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha \leq a \\ a < \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow$ ⨳