e^{ix}

(S1) Inele și corpuri

Def Un inel este un triplet de forma $(A, +, \cdot)$, unde A este o mult nevidă și $+, \cdot$ două op. pe A cu prop:

1) $(A, +)$ grup abelian
2) $(A, \cdot)$ monoid
3) înmulțirea e distrib. față de adunare

$a(b+c) = ab + ac$
$(b+c)a = ba + ca$, $\forall a, b \in A$

Def Un inel nenul în care orice element nenul este inversabil se numește corp.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ } inele comutative
$(\mathbb{C}, +, \cdot)$
$(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$

$U(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ corp $U(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^*$
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ corpuri

$\forall n \geq 2$, $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este corp $\Leftrightarrow$ n este nr prim
$\mathbb{Z}_n$ este corp $\Leftrightarrow$ $U(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n \setminus \{\hat{0}\}$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ nr neprime cu n se divid cu n $\Leftrightarrow$ n prim

$(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$, ... corpuri

$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$
$(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ inel
$U(\mathbb{Z}[i]) = ?$

Fie $z_1 = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$; $a, b \in \mathbb{Z}$
$z_1 \in U(\mathbb{Z}[i]) \Leftrightarrow \exists\ z_2 \in \mathbb{Z}[i]$, $z_2 = c + di$ a.î.

aî $(a+bi)(c+di)=1$

$|(a+bi)(c+di)|=1 \;|^2$

$\underbrace{(a^2+b^2)}_{\in \mathbb{N}}\underbrace{(c^2+d^2)}_{\in \mathbb{N}}=1 \Rightarrow a^2+b^2=1$ $\left\langle \begin{array}{l} a^2=0,\ b^2=1 \Rightarrow a=0,\ b=\pm 1 \Rightarrow 0 \pm i \\ a^2=1,\ b=0 \Rightarrow a=\pm 1,\ b=0 \Rightarrow \pm 1 \end{array}\right.$

$c^2+d^2=1$

$U(\mathbb{Z}[i])=\{\pm 1, \pm i\}$

Def: Spunem că inelul A are divizori ai lui zero, dacă $\exists\, x, y \in A$, $x, y \neq 0$ aî $x \cdot y = 0$.

ex. $\mathbb{Z}_6$: $\hat{2}\cdot\hat{3}=\hat{6}=\hat{0} \Rightarrow (\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ are divizori ai lui 0

$(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+,\cdot)$ $(0,1)\cdot(1,0)=(0,0)$

R inel, $\forall n \geq 2$, $(M_n(R),+,\cdot)$ = inelul matricelor de ordin n cu elem din R

$\forall n \geq 2$, $(M_n(R),+,\cdot)$ este un inel necomutativ, cu divizori ai lui zero

$n=2$ $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{\neq O_2}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}_{\neq O_2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow M_2(\mathbb{R})$ este necom $\Rightarrow M_2(R)$ are div ai lui zero

$U(M_n(R)) = GL_n(R)$ - grupul general liniar de ordin n cu elem din R

(matr. inversabile)

$GL_n(R)=\{A\in M_n(R) \mid \det A \neq 0\}$

$GL_n(\mathbb{Z}_6)=\{A\in M_n(\mathbb{Z}_6) \mid \text{cmmdc}(\det A, 6)=1\}$

① Fie $a,b\in\mathbb{R}^*$, $c\in\mathbb{R}$.
Def pe $\mathbb{R}$ legea de comp
$x * y = ax+by+c$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.
Det a,b,c aî $(\mathbb{R},*,\cdot)$ să fie inel. Ce observați?

Verif asoc. lui $*$: $(x * y) * z = x * (y * z)$

$(ax + by + c) * z = x * (ay + bz + c)$

$\cancel{a(ax + by + c) + bz + c}$

$a(ax + by + c) + bz + c =$

$= ax + b(ay + bz + c) + c$

$a^2x + aby + ac + bz = ax + aby + b^2z + bc$

$\cancel{ax(a-1) + c(a-b) + zb(1-b) = 0}$

$a^2 = a \Rightarrow a = 1$

$ac = bc$

$b^2 = b \Rightarrow b = 1$

$a, b \neq 0$

$x * y = x + y + c$

Com. este evidentă

Elem. neutru, $x * e = x$.

$x + e + c = x$

$e + c = 0 \Rightarrow e = -c$.

Elem. inv, $(\forall) x \in \mathbb{R}^*$, $\exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ a.î. $x * x^{-1} = -c$

$x + x^{-1} + c = -c$

$x^{-1} = -x - 2c \in \mathbb{R}$.

$(\mathbb{R}, *)$ grup com

Verif. asoc pt $\mathbb{R}$, 1 elem neutru

este $\cancel{(x \cdot y) \cdot z = x(y \cdot z)}$

Distributivitatea:

$(x * y) \cdot z = xz * yz$

$(x + y + c) \cdot z = xz + yz + c$

$xz + yz + cz = xz + yz + c \Rightarrow c = cz \ \forall z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow c = 0$

Deci $x * y = x + y$

În concluzie, $\exists$ un singur inel $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ cu legea $*$ de forma $x * y = ax + by + c$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$ și anume $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$a^2 = a$ elem. idempotente

(2) Să se rezolve sist de ec în inelul $\mathbb{Z}_{12}$

a) $\begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{1} \\ \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \hat{7}x + \hat{3}y = \hat{2} \\ \hat{4}x + \hat{6}y = \hat{3} \end{cases}$

a) $(-)\begin{cases} x + y = \hat{1} \;|\cdot 2 \\ \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{1} \end{cases} \begin{cases} \hat{2}x + \hat{2}y = \hat{2} \\ \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{1} \end{cases} \Big| \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{-1} \Rightarrow x = \hat{11} \Rightarrow y = \hat{2}$

b) ~~cmmdc $12 : 7 = 1 \cdot 7 + 5$~~

$12 = 1 \cdot 7 + 5$

$7 = 1 \cdot 5 + 2$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

	s_j	q_j	t_j
$j=0$	12	—	0
$j=1$	7	1	1
$j=2$	5	1	-1
$j=3$	2	2	2
$j=4$	1	2	-5

$t_j = t_{j-2} - t_{j-1} \cdot q_{j-1}, \forall j \geq 2$

$t_0 = 0, t_1 = 1.$

$(t_j)_{j \geq 0}$ $t_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$

$t_3 = 1 + 1 \cdot 1 = 2$

$t_4 = -1 - 2 \cdot 2 = -5$

$7^{-1} (\bmod 12) = -5 = 7.$

$7x + 3y = 2 \;|\cdot \hat{7}^{-1} = \hat{7}$

$x + \hat{21}y = \hat{14}$

$x + \hat{9}y = \hat{2}$

$\hat{x} = \hat{2} - \hat{9}y$

$4(\hat{2} - \hat{9}y) + \hat{6}y = \hat{3}$

$\hat{8} - \hat{36}y + \hat{6}y = \hat{3}$

$\hat{8} + \hat{6}y = \hat{3}$

$\hat{6}y = \hat{-5} \rightarrow \hat{6}y = \hat{7} \Rightarrow$ nu are sol.

$\hat{6}y \neq \hat{7} \Rightarrow$ sist e incompatibil

Fie A un inel

O submult $\emptyset \neq B \subseteq A$ se numeste subinel dacă

1) $B \leq (A, +)$, adică $x - y \in B, \forall x, y \in B$

2) B este parte stabilă în ~~A~~ rap cu „$\cdot$", adică $xy \in B, \forall x, y \in B$

3) $1 \in B$

$\mathbb{Z}[i] \subseteq \mathbb{C}$

$\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

$(a+bi) - (c+di) = \underbrace{(a-c)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(b-d)}_{\in \mathbb{Z}} i \in \mathbb{Z}[i]$ $\forall x, y \in B$

$(a+bi)(c+di) = \underbrace{(ac-bd)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(ad+bc)}_{\in \mathbb{Z}} i \in \mathbb{Z}[i]$

$1 = 1 + 0 \cdot i \in \mathbb{Z}[i]$

$\Rightarrow \mathbb{Z}[i]$ subinel al lui $\mathbb{C}$.

Alt exemplu:

$\left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b - \text{impar}\right\} \underset{\text{subinel}}{\subseteq} \mathbb{Q}$

<u>Def</u> Fie A un inel. Se numeste ideal stâng o mulțime $\emptyset \neq J \subseteq A$ cu

i) $x - y \in J, \forall x, y \in J$

ii) $ax \in J, \forall a \in A, x \in J$

A = comut $\Rightarrow ax = xa$ - not de ideal stg $\equiv$ id. drept (idealuri)

③ Să se studieze dacă urm. submulțimi sunt ideale ~~at~~ în inelele respective:

a) $J_1 = \{f \in \mathbb{Z}[x] \mid \text{grad}(f) \geq 6\}$, ~~R~~ $R = \mathbb{Z}[x]$.

fie $f = x^6 + x \in J_1$

$g = x^6 \in J_1$

$f - g = x^6 + x - x^6 = x \notin J_1 \Rightarrow J_1$ nu e ideal în $\mathbb{Z}[x]$

$0 \notin J_1 \Rightarrow J_1$ nu e subinel

b) $J_2 = \{f \in \mathbb{Z}[x] \mid \text{grad} f = 5\} \cup \{0\}$.

$f = x^5 + x^2 \in J_2$

$g = x^5 \in J_2$

dar $f - g = x^2 \notin J_2 \Rightarrow J_2$ nu e ideal în $\mathbb{Z}[x]$

c) $J_3 = \{ f \in \mathbb{Z}[x] \mid \text{grad } f \leq 3 \}$

$\left.\begin{array}{l} i = x^2 \in J_3 \\ g = x^3 + x \in \mathbb{Z}[x] \end{array}\right\} \Rightarrow ig = x^5 + \dots \notin J_3$

d) $J_4 = \{ f \in \mathbb{Q}[x] \mid 2 \text{ este răd pt } f \}$

$R = \mathbb{Q}[x]$

Fie $f, g \in J_4 \Rightarrow f(2) = 0$

$g(2) = 0$

$(f - g)(2) = f(2) - g(2) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow f - g \in J_4$

Fie $f \in J_4$, $P \in \mathbb{Q}[x]$

$(fP)(2) = f(2)P(2) = 0 \Rightarrow fP \in J_4$ $\Rightarrow J_4$ ideal

e) $J_5 = \{ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),\ a, b \in \mathbb{R} \}$

Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in J_5$

$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a-c & b-d \end{pmatrix} \in J_5$

- ideal stâng

Fie $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \in J_5$, $\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na & \\ & \end{pmatrix} \notin J_5 \Rightarrow$ nu e ideal stâng

- ideal drept

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ am + bp & an + bq \end{pmatrix} \in J_5 \Rightarrow J_5$ e ideal drept