Algebra

- alt text de ciptat

<u>ciclii disjuncți</u> $\sigma_1, \sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$

$(a_1, a_2, \dots, a_k)^k = e$ e ~~e~~ perm identică

- ordinul unui ciclu de lungime k este k

$\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ ciclu de lungime ~~k~~ k

$\sigma^k = e$

$\sigma^n(a_1) = ?$

$n = kq + r$, $q, r \in \mathbb{N}$, $r < k$

$\sigma^n(a_1) = \sigma^r(a_1) = \sigma(a_{r+1})$

Demonstrație

<u>formula pt ordinul unei permutări</u>

Fie $n \in \mathbb{N}$, a.î. $\sigma^n = e$

$\Rightarrow \sigma^n(a_1) = a_1 = a_{1+r} \Rightarrow r = 0$

$\sigma^n = (a_1, a_2, \dots, a_{k_1})^n \circ (b_1, b_2, \dots, b_{k_2})^n \circ \dots$

ciclii disjuncți comută

$n = k_1 q_1 + r \Leftrightarrow k_1 / n$
de mai sus

11

Repet argumentul pentru fiecare ciclu care apare în descompunerea lui σ, $K_j | n \Rightarrow [K_1, K_2, \dots, K_t] | n \Rightarrow$

$\Rightarrow [K_1, K_2, \dots, K_t] \leq n$

Trebuie să demonstrăm că $\sigma^{[K_1, K_2, \dots, K_t]} = e$

$[K_1, K_2, \dots, K_t] = K_1 \cdot a, \; a \in \mathbb{N}^*$

$\sigma^{[K_1, K_2, \dots, K_t]}(a_1) = (\sigma^{K_1})^a (a_1) = a_1$

La fel pentru toate $K_1, K_2, \dots, K_t$

$(G, \circ)$ grup

$(H, \circ)$ subgrup al lui G

Se numește subgrup normal al lui G ($H \trianglelefteq G$)

Dacă $x h x^{-1} \in H, \; \forall x \in G, \; h \in H$

<u>Temă</u> 1.- alegem doar un prenume

NUME PRENUME

$$= \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I & J & K & L & M & N & O & P & Q & R & S & T & U & V & X & Y & Z \\ G & I & C & A & L & E & X & N & D & R & U & B & F & \dots \end{pmatrix} \text{- per}$$

Scriem literele rămase (lexicografic)

~~B F H~~ ....

Notăm cu H subgrupul generat de σ. Cercetați dacă H este subgrup normal.

2. τ permutarea asociată - PRENUME NUME

Cercetați dacă se întâmplă următorul lucru:

$$\exists x \in S_{26} \text{ a.î. } x \sigma x^{-1} = \tau$$

3. Găsiți toate nr prime p, q, astfel încât ~~$p \cdot q \mid (7^p - 2^p)($~~

$$(p \cdot q) \mid (7^p - 2^p)(7^q - 2^q)$$

~~Demonstrație~~

Obs $(G, \circ)$ grup comutativ, atunci orice subgrup $(H, \circ)$ este subgrup normal. (Evident)

$$(\{e\}, \circ) \trianglelefteq (G, \circ)$$

$$(G, \circ) \trianglelefteq (G, \circ)$$

~~Fie~~ ~~H~~

H necomutativ $\neq \{e\}$ și $\neq G$

Exemplu G ~~H~~ $= S_3$ ~~subgrup~~ grup necomutativ cu 6 elem

Subgrupurile lui S_3 - $H \Rightarrow |H| \in \{1, 2, 3, 6\}$

$|H| = 1 \Rightarrow H = \{e\}$ - $\quad$ $|H| = 6 \Leftrightarrow H = G$

$|H|=2$ $\qquad e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$

Se numește transpoziție un ciclu de lungime 2.

$H=\{e,(1,2)\}$ NU e normal

$H=\{e,(2,3)\}$ —"—

$H=\{e,(1,3)\}$ —"—

$|H|=3$ $H=\{e,(1,2,3),(1,3,2)\}$

$H=\{e\}$, $H=\{G\}$ normal

Le verificăm și pe celelalte

$(1,3)^{-1}(1,2)(1,3)^{-1}=(1,3)(1,2)(1,3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(2,3)$

$(G,\cdot)$ grup finit

$(H,\cdot)$ subgrup al lui G

nu există alt subgrup al lui G care să aibă același nr de elemente cu H.

Atunci $H \trianglelefteq G$

4/

$H_1 = \{ xhx^{-1} \mid h \in H \} = xHx^{-1}$

Presupun $H_1 \subseteq H$

~~$x_1 H$~~

$(x_1 h_1 x_1^{-1})(x_2 h_2 x_2^{-1}) = x_1 h_1 x_1^{-1} x_2 h_2 x_2^{-1} = h_1 h_2 \in H_1$

$h \in H \quad h^{-1} \in H$

fie $f(h) = x h x^{-1}, \forall h \in H$

f surjectivă

$f(h_1) = f(h_2) \Leftrightarrow x h_1 x^{-1} = x h_2 x^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow f$ injectivă

$\Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow |H| = |H_1|$

$\Rightarrow H_1 = H \Rightarrow H$ subgrup normal

Proprietate $(G, \cdot)$ grup și $(H, \cdot)$ subgrup $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$(H, \cdot)$~~ $H \trianglelefteq G$ ~~$\Leftrightarrow$~~ dacă ~~sunt ade și numai dacă~~ sunt echivalente următoarele afirmaţii

1) ~~$H \trianglelefteq G$~~ $H \trianglelefteq G$

2) $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$

3) $xH = Hx, \forall x \in G$

Notații $xHx^{-1} = \{xHx^{-1} \mid \cancel{h} \in H\}$

$xH = \{xh \mid h \in H\}$

$Hx = \{hx \mid h \in H\}$

Demonstrăm că (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1)

(1) $\Rightarrow$ (2) $\quad H \trianglelefteq G$

$xHx^{-1} \subseteq H$. (a)

$(x^{-1}x)H(x^{-1}x) \subseteq x^{-1}Hx \Leftrightarrow H \subseteq x^{-1}Hx \mid \forall x \in G \mid \Rightarrow$

$x \in x^{-1}$

$\Rightarrow H \subseteq xHx^{-1}$ (b)

(a),(b) $\Rightarrow H = xHx^{-1}$

(2) $\Rightarrow$ (3) evident..

~~$xH \subseteq H$~~

(3) $\Rightarrow$ (1)

$xH = Hx \Rightarrow xHx^{-1} = H$.

consider $xh \in xH \Rightarrow xh \in Hx \Leftrightarrow xh = h_1 x \Leftrightarrow$, $h_1 \in$

$\Leftrightarrow h_1 = xhx^{-1}$, $\forall x \in G \Rightarrow H \trianglelefteq G$

Rol fundamental în grup factor