Curs 4 Geometrie Aplicații liniare

V/K, W/K

Def: $f: V \to W$ s.n. aplicație liniară

dacă $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(ax) = a f(x)$, $\forall a \in K$

Obs: 1) $f(0)=0$

2) f e morfism între $(V,+),(W,+)$

Obs: f e aplic. liniară $\Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(x_i)$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $x_i \in V$, $a_i \in K$

Exemple:

1) $V \to W$, $f(x)=0$

2) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x_1, \dots, x_n) = (a_1 x_1, \dots, a_n x_n)$

3) Fie $A \in M(n,m,K)$ $f: K^m \to K^n$ prin

$f(X) = A \cdot X$

Obs: ex 2) e caz part pt 3), pt $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & a_3 & \\ 0 & & & \ddots & a_n \end{pmatrix}$

4) $D: C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$ $D(f) = f'$

toate funcțiile ce se derivă de o inf. de ori iar derivatele sunt funcții continue

5) $f_\lambda: K[X] \to K$, $f_\lambda(P) \stackrel{\cdot}{=} P(\lambda)$

6) $\mathcal{M}(n,K) \xrightarrow{f} \mathcal{M}(n,K)$

$f(A) = {}^tA$

7) $\mathcal{M}(n,K) \xrightarrow{Tr} K \qquad A \mapsto Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii})$

Trace

el. de pe diag principală

Obs: $V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \Rightarrow f_2 \circ f_1$ liniară

Def: $f: V \to W$ s.n izomorfism dacă e liniară bijectivă

în acest caz $f^{-1}: W \to V$ e liniară

$L(V,W) := \{f: V \to W \text{ liniare}\}$

Obs: $L(V,W)$ e sp vectorial$/K$

$(f+g)(x) := f(x)+g(x) \qquad \forall x \in V$

ad. fcții

ad. vectori

$(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$

$End(V) := L(V,V)$

aplicații liniare de la V la V

$GL(V) := \{f: V \to V, \text{ izomorf.}\}$

grup cu „zero"

Obs: Dacă există $V \xrightarrow{f} W$ izom., spațiul V și W s.n izomorfe

Obs: Fie $E \neq \emptyset$, V/K sp. vect. și există o bij. $f: E \to V$

Def. o struct de sp. vect$/K$ pe E

$x, y \in E \quad x + y := f^{-1}(f(x) + f(y))$ $\Rightarrow E$ sp. vect$/K$

$a \in K \quad a \cdot x := f^{-1}(a \cdot f(x))$

Fie $f : V \to W$ liniară

$\operatorname{Ker} f = \{x \in V / f(x) = 0\} \subset V$

„Kernel" = „nucleu"

$x, y \in \operatorname{Ker} f \to f(x) = 0, \ f(y) = 0$

$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$

$f(ax) = af(x) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f$ e subspațiu vectorial în V

$\operatorname{im} f = \{y \in W / \exists x \in V, f(x) = y\} \subset W$ subspațiu

P: Fie $f \in L(V, W)$ Atunci

1) f e inj. $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$

2) f e surjectivă $\Leftrightarrow \operatorname{im} f = W$

Dem: 1) „$\Rightarrow$" f in $\Rightarrow \{f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Pres. că $f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = f(0) \Rightarrow x = 0$

„$\Leftarrow$" Dacă $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

Th: Fie $f \in L(V,W)$ Atunci

dimensiunea $\operatorname{Ker} f$ + dim. $\operatorname{Im} f$ = dim V

Dem Fie $\{e_1, \dots, e_k\}$ în $\operatorname{Ker} f$

Completam la o bază $\{e_1, \dots, e_k, g_{k+1}, \dots, g_n\}$ în V

Arăt că $\{f(g_{k+1}), \dots, f(g_n)\}$ bază în $\operatorname{Im} f$

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i f(g_i) = 0$$

$$f\left(\sum_{k+1}^{n} a_i g_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{k+1}^{n} a_i g_i \in \operatorname{Ker} f$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n} a_i g_i = \sum_{j=1}^{k+1} b_j e_j \Rightarrow a_i = 0, b_j = 0$$

Prop: Fie $f \in L(V,W)$. Atunci

1) f transformă un sistem liniar independent într-un sist liniar independent $\Leftrightarrow$ injectivă $\forall S \subset V$, S lin. ind., $f(S) \subset W$ lin ind.

2) $\forall S \subset V$, S s. gen., $f(S) \subset W$ s. gen $\Leftrightarrow$ surjectivă.

3) f(bază) = bază $\Leftrightarrow$ f e izomorfism

Th $V \simeq K^n \Leftrightarrow \dim V = n$

în particular $V \simeq W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$

Dem: Fie $n = \dim V$ Fie $\{e_1, \dots, e_n\}$ bază $V \to x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$f : V \to K^n$, $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$

$x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$

$\Rightarrow x + y = \sum (x_i + y_i) e_i = f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(ax) = a f(x)$ izomorf.

$ax = \sum (a x_i) e_i$

Fie $f: V \to V'$ liniară

$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ bază în V

$\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_{n'}\}$ — " — V'

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n'} a_{ji} e'_j \quad , \quad i = \overline{1,n}$$

$$\underset{\in V}{x} = \sum_1^n x_i e_i \quad , \quad f(x) = f\left(\sum_1^n x_i e_i\right) = \sum_1^n x_i f(e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{j=1}^{n'} a_{ji} e'_j = \sum_{j=1}^{n'} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \right) e'_j$$

Dar $f(x) \in V'$, $f(x) = \sum_{j=1}^{n'} x'_j e'_j \xRightarrow{\text{„morala"}} \boxed{x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i}$

$$V \ni x \xmapsto{\mathcal{B}} [x] = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

$$[f(x)]_{\mathcal{B}'} = A \cdot [x]_{\mathcal{B}} \quad , \quad A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Ce se întâmplă la schimbarea bazei?

Fie $\overline{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$, $\overline{\mathcal{B}}' = \{\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_{n'}\}$

$$\bar{e}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} e_j \qquad C = (c_{ij}) \text{ inversabilă}$$

$$\bar{e}'_k = \sum_{l=1}^{n'} \bar{c}_{lk} e'_l \qquad \bar{C} = (\bar{c}_{lk}) \text{ inversabilă}$$

$$f(\bar{e}_i) = \sum_{j=1}^{n'} \bar{a}_{ji} \bar{e}'_j = f\left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} f(e_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \sum_{j=1}^{n'} a_{jk} e'_j = \sum_{j=1}^{n'} \underline{\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} c_{ki} \right)} e'_j = \sum_{j=1}^{n'} \bar{a}_{ji} \sum_{l=1}^{n'} \bar{c}_{lj} e'_l$$

$$= \sum_{l=1}^{n'} \underline{\left(\sum_{j=1}^{n'} \bar{c}_{lj} \bar{a}_{ji} \right)} e'_l$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_{lj} \bar{a}_{ji}$$

$$\bar{C}^{-1} \cdot | \quad A \cdot C = \bar{C} \cdot \bar{A}$$

$$\boxed{\bar{A} = \bar{C}^{-1} A C}$$

<u>Corolar</u>: Se poate defini $rg(f) := rg\, A$ și $rg(f)$ nu depinde de bazele în care se calculează A

<u>Aplicație</u>: $f: V \to W$ cine e $Ker\, f$?

Fixez baze $B, B' \rightsquigarrow A = [f]$

$V \ni x \in Ker\, f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow A[x] = 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ sist lin. omogen

$Ker\, f$ e spațiul soluțiilor $S_A \Rightarrow \dim Ker\, f = n - rg(f)\, A$,

$n = \dim V \Rightarrow rg(f) = \dim Im\, f$

<u>Ex</u>: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3)$

$$A := [f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A \neq 0 \Rightarrow rg(f) = 3$$

$\Rightarrow f$ izomorf

$$\bar{B} = \{e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3\} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \det C \neq 0$$

$$[f]_{\bar{B}}^{\bar{B}} = A \cdot C = A^2$$

$$f(\bar{e}_1) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = col_1(A) + col_2(A)$$

$f(\bar{e}_2) = f(e_1) - f(e_2) = col_1(A) - col_2(A)$

$f(\bar{e}_3) = f(e_3) = col_3(A)$

Ex: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_3)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Pt im f

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \\ x_1 + x_2 = y_3 \\ x_1 + x_3 = y_4 \end{cases} \Rightarrow y_2 = y_3$$

$\text{Ker } f = \{(0,0,0)\}$ $\qquad$ $\text{im } f = \{(\alpha, \beta, \beta, \gamma)\}$

Prop

Fie $\{e_1, \dots, e_n\}$ bază în V și $v_1, \dots, v_n$

Atunci există o unică aplicație liniară $f: V \to W$ a.î.

$f(e_i) = v_i$

$\forall x \in V, x = \sum x_i e_i \Rightarrow f(x) = f(\sum x_i e_i) = \sum f x_i f(e_i) = \sum x_i v_i$