1 Secvenţe de grade

Materialul din această secţiune urmează cartea [1].

Fie $s_0 = \{d_1, \ldots, d_n\}$ o secvenţă de numere naturale.

Problemă. Să se construiască, dacă se poate, un (multi)graf neorientat G cu $s(G) = s_0$.

Observaţie 1.1. *Deoarece suma gradelor vârfurilor într-un (multi)graf este egală cu dublul numărului de muchii, o condiţie necesară pentru existenţa unui (multi)graf G cu $s(G) = s_0$ este ca suma*

$$d_1 + \ldots + d_n$$

să fie număr par.

? Este condiţia din Observaţia 1.1 şi suficientă?

1.1 Construcţia unui multigraf neorientat cu secvenţa gradelor dată

Teorema 1.2. *O secvenţă de $n \geq 2$ numere naturale $s_0 = \{d_1, \ldots, d_n\}$ este secvenţa gradelor unui multigraf neorientat dacă şi numai dacă suma $d_1 + \ldots + d_n$ este număr par.*

Demonstraţie. " $\Longrightarrow$ " Presupunem că există un multigraf neorientat G cu $s(G) = s_0$. Atunci

$$d_1 + \ldots + d_n = 2|E(G)| \text{ este număr par.}$$

" $\Longleftarrow$ " Presupunem că $d_1 + \ldots + d_n$ este număr par.

Rezultă că există un număr par de numere impare în secvenţa (multisetul) s_0

Construim un multigraf G cu $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ având $s(G) = s_0$ (mai exact cu $d_G(x_i) = d_i$) după următorul algoritm:

1. Adăugăm în fiecare vârf $x_i \in V(G)$ $\left\lfloor \frac{d_i}{2} \right\rfloor$ bucle.
2. Formăm perechi disjuncte cu vârfurile care trebuie să aibă gradul impar şi unim vârfurile din aceste perechi cu câte o muchie.

Formalizând, dacă renotăm numerele din secvenţa s_0 astfel încât primele $2k$ numere din secvenţă: $d_1, \ldots, d_{2k}$ să fie impare şi celelalte pare, definim

$$E(G) = \left\{ x_i x_i^{\left\lfloor \frac{d_i}{2} \right\rfloor} | i \in \{1, \ldots, n\}, d_i > 0 \right\} \cup \{x_i x_{i+1} | i \in \{1, \ldots, 2k-1\}\}.$$

Atunci, pentru i cu $1 \leq i \leq 2k$ avem d_i impar şi

$$d_G(x_i) = 2\left\lfloor \frac{d_i}{2} \right\rfloor + 1 = 2\frac{d_i - 1}{2} + 1 = d_i,$$

iar pentru $2k+1 \leq i \leq n$ avem d_i par şi

$$d_G(x_i) = 2\left\lfloor \frac{d_i}{2} \right\rfloor = d_i,$$

deci $s(G) = s_0$. $\square$

1.2 Construcţia unui graf neorientat cu secvenţa gradelor dată

Dat un graf neorientat G, pentru a obţine grafuri neorientate cu aceeaşi secvenţă de grade ca şi G se poate folosi următoarea transformare t (pe care o vom numi de interschimbare pe pătrat). Fie x, y, u, v patru vârfuri distincte ale lui G astfel încât $xy, uv \in E(G)$, dar $xu, yv \notin E(G)$. Considerăm graful notat $t(G, xy, uv)$ definit astfel:

$$t(G, xy, uv) = G - \{xy, uv\} \cup \{xu, yv\}$$

Spunem că $t(G, xy, uv)$ este graful obţinut din G prin aplicarea transformării t de interschimbare pe pătratul $xyvu$ - figura 1.

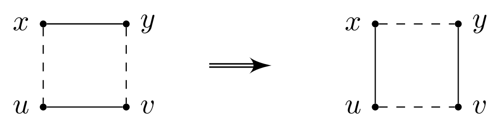

Figura 1: Transformarea t de interschimbare pe pătrat

Observaţie 1.3. *Graful $t(G, xy, uv)$ are aceeaşi secvenţă de grade ca şi G.*

Teorema 1.4. *(Havel-Hakimi) O secvenţă de $n \geq 2$ numere naturale $s_0 = \{d_1 \geq \ldots \geq d_n\}$ cu $d_1 \leq n-1$ este secvenţa gradelor unui graf neorientat (cu n vârfuri) dacă şi numai dacă secvenţa $s'_0 = \{d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n\}$ este secvenţa gradelor unui graf neorientat (cu $n-1$ vârfuri).*

Demonstraţie. " $\Longleftarrow$ " Presupunem că s'_0 este secvenţa gradelor unui graf neorientat. Fie $G' = (V', E')$ un graf neorientat cu $V' = \{x_2, \ldots, x_n\}$ având secvenţa gradelor $s(G') = s'_0$, mai precis cu

$$d_{G'}(x_i) = \begin{cases} d_i - 1, & \text{dacă } i \in \{2, \ldots, d_1 + 1\} \\ d_i, & \text{dacă } i \in \{d_1 + 2, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Construim pornind de la G' un nou graf $G = (V, E)$ adăugând un vârf nou x_1 pe care îl unim cu vârfurile $x_2, \ldots, x_{d_1+1}$:

- $V = V' \cup \{x_1\}$
- $E = E' \cup \{x_1 x_i | i \in \{2, \ldots, d_1 + 1\}\}$.

Pentru un $i \in \{1, \ldots, n\}$ avem atunci

$$d_G(x_i) = \begin{cases} d_{G'}(x_i) + 1 = d_i - 1 + 1 = d_i, & \text{dacă } i \in \{2, \ldots, d_1 + 1\} \\ d_{G'}(x_i) = d_i, & \text{dacă } i \in \{d_1 + 2, \ldots, n\} \\ d_1, & \text{dacă } i = 1. \end{cases}$$

Rezultă că $s(G) = s_0$, deci s_0 este secvenţa gradelor unui graf neorientat.

" $\Longrightarrow$ " Presupunem că s_0 este secvenţa gradelor unui graf neorientat.

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat cu $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ astfel încât $d_G(x_i) = d_i$ pentru orice $i \in \{1 \ldots, n\}$. Vom construi un graf G' cu $s(G') = s_0'$ pornind de la G.

Pentru aceasta, construim întâi din G un graf G^* având secvenţa gradelor tot s_0, dar în care vârful x_1 are mulţimea vecinilor $N_{G^*}(x_1) = \{x_2, \ldots, x_{d_1+1}\}$.

Cazul 1**.** Dacă $N_G(x_1) = \{x_2, \ldots, x_{d_1+1}\}$, atunci considerăm $G^* = G$.

Cazul 2**.** Există cel puţin un indice $i \in \{2, \ldots, d_1 + 1\}$ cu $x_1x_i \notin E$ (i.e $x_i \notin N_G(x_1)$). Fie i minim cu această proprietate.

Deoarece $d_G(x_1) = d_1$, rezultă că există $j \in \{d_1 + 2, \ldots, n\}$ cu $x_1x_j \in E$. Mai mult, deoarece $j > d_1 + 1 \geq i$, avem $d_i = d_G(x_i) \geq d_G(x_j) = d_j$. În plus, x_1 este adiacent cu x_j, dar nu şi cu x_i. Rezultă că există un alt vârf x_k cu $k \in \{2, \ldots, n\} - \{i, j\}$ care este adiacent cu x_i ($x_ix_k \in E$), dar care nu este adiacent cu x_j ($x_jx_k \notin E$) - figura 2.

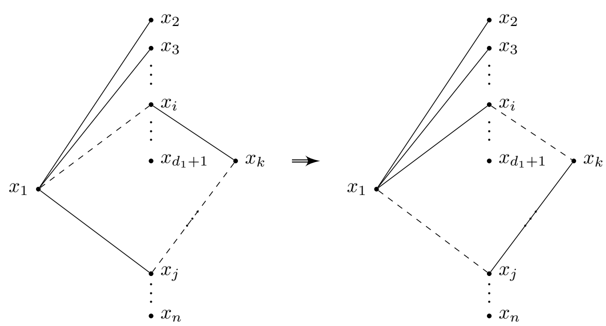

Figura 2: Transformare din demonstraţia teoremei Havel-Hakimi

Considerăm graful G_i obţiunt din G prin aplicarea transformării de interschimbare t pentru pătratul $x_ix_kx_jx_1$:

$$G_i = t(G, x_ix_k, x_1, x_j) = G - \{x_ix_k, x_1x_j\} \cup \{x_1x_i, x_kx_j\}$$

Avem $N_{G_i}(x_1) \cap \{x_2, \ldots, x_{d_1+1}\} = (N_G(x_1) \cap \{x_2, \ldots, x_{d_1+1}\}) \cup \{x_i\}$ (x_1 are un vecin în plus în $\{x_2, \ldots, x_{d_1+1}\}$) şi, conform Observaţiei 1.3, $s(G_i) = s(G) = s_0$.

Aplicând succesiv transformări de tip t pentru fiecare indice $i \in \{2, 3, \ldots, d_1 + 1\}$ pentru care x_1 şi x_i nu sunt adiacente obţinem în final un graf G^* cu $s(G^*) = s_0$ şi $N_{G^*}(x_1) = \{x_2, \ldots, x_{d_1+1}\}$.

Fie $G' = G^* - x_1$. Atunci $V(G') = \{x_2, \ldots, x_n\}$ şi pentru orice $i \in \{2, \ldots, n\}$:

$$d_{G'}(x_i) = \begin{cases} d_{G^*}(x_i) - 1 = d_i - 1, & \text{dacă } i \leq d_1 + 1 \\ d_{G^*}(x_i) = d_i, & \text{dacă } i \geq d_1 + 2, \end{cases}$$

deci $s(G') = s_0'$. Rezultă că $s_0' = \{d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n\}$ este secvenţa gradelor unui graf neorientat. □

Din Teorema Havel-Hakimi se obţine următorul algoritm de determinare a unui graf neorientat cu secvenţa gradelor dată.

Algoritmul Havel-Hakimi

Intrare: o secvenţă de n numere naturale $d_1, \ldots, d_n$

Ieşire: un graf G cu $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ cu $s(G) = s_0$ dacă s_0 este secvenţa gradelor unui graf, sau mesajul NU altfel.

Idee: La un pas unim un vârf de grad maxim d din secvenţa s_0 cu vârfurile corespunzătoare următoarelor cele mai mari d elemente din s_0 diferite de d şi actualizăm secvenţa s_0 (s_0=s_0'). Se repetă pasul până când secvenţa conţine numai 0 sau conţine elemente negative.

Pseudocod:

Pasul 1. Dacă $d_1 + \ldots + d_n$ este număr impar sau există în s_0 un număr $d_i > n - 1$, atunci scrie NU, STOP.

Pasul 2.

cât timp s_0 conţine valori nenule execută

  alege d_k cel mai mare număr din secvenţa s_0

  elimină d_k din s_0

  fie $d_{i_1}, \ldots, d_{i_{d_k}}$ cele mai mari d_k numere din s_0

  pentru $j \in \{i_1, \ldots, i_{d_k}\}$:

    adaugă la G muchia $x_k x_j$

    înlocuieşte d_j în secvenţă s_0 cu $d_j - 1$

    dacă $d_j - 1 < 0$, atunci scrie NU, STOP.

Observaţie. Pentru a determina uşor care este cel mai mare număr din secvenţă şi care sunt cele mai mari valori care îi urmează, este util ca pe parcursul algoritmului secvenţa s_0 să fie ordonată descrescător.

Exemplu. - vezi curs + laborator

Teorema 1.5. *(Extindere a teoremei Havel-Hakimi) Fie $s_0 = \{d_1 \geq \ldots \geq d_n\}$, o secvenţă de $n \geq 2$ numere naturale cu $d_1 \leq n - 1$ şi fie $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixat. Fie $s_0^{(i)}$ secvenţa obţinută din s_0 prin următoarele operaţii:*

- eliminăm elementul d_i

- scădem o unitate din primele d_i componente în ordine descrescătoare ale secvenţei rămase.

Are loc echivalenţa:

s_0 este secvenţa gradelor unui graf neorientat $\Longleftrightarrow$

$s_0^{(i)}$ este secvenţa gradelor unui graf neorientat

Demonstraţie. Demonstraţia este similară cu cea a Teoremei Havel-Hakimi ([2] - exerciţiul 2.11). □

Exerciţiu ([2] - exerciţiul 2.12) Fie G_1 şi G_2 două grafuri neorientate cu mulţimea vârfurilor $V = \{1, \ldots, n\}$. Atunci $s(G_1) = s(G_2)$ dacă şi numai dacă există un şir de transformări t de interschimbare pe pătrat prin care se poate obţine graful G_2 din G_1.

2 Arbori

Definiţie 2.1. *Un arbore este un graf neorientat conex fară cicluri.*

Lema 2.2. *Orice arbore cu $n \geq 2$ vârfuri are cel puţin două vârfuri terminale (de grad 1).*

Demonstraţie. Fie T un arbore cu $n \geq 2$ vârfuri. Fie P cel mai lung lanţ elementar în T. Extremităţile lui P sunt vârfuri terminale, altfel am putea extinde lanţul P cu o muchie sau se formează un ciclu elementar în T. Într-adevăr, fie x, y extremităţile lui P. Presupunem prin absurd că $d_T(x) \geq 2$. Atunci există un vârf v adiacent cu x astfel încât $xv \notin E(P)$.

- Dacă $v \in V(P)$, atunci există în T ciclul $[x \overset{P}{-} v, x]$, contradicţie (T este aciclic).

- Dacă $v \notin V(P)$, atunci lanţul $P' = [v, x \overset{P}{-} y]$ este elementar şi $l(P') = l(P) + 1$ contradicţie (P este lanţ elementar maxim în T). □

Lema 2.3. *Fie T un arbore cu $n \geq 2$ vârfuri şi v un vârf terminal în T. Atunci $T - v$ este arbore.*

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din faptul că un vârf terminal nu poate fi vârf intern al unui lanţ elementar, deci pentru orice $x, y \neq v$ un xy-lanţ elementar din T este lanţ şi în $T - v$. □

Propozitia 2.4. *Un arbore cu n vârfuri are $n - 1$ muchii.*

Demonstraţie. Demonstrăm afirmaţia prin inducţie.

Pentru $n = 1$, un arbore cu n vârfuri are un vârf şi zero muchii. Pentru $n = 2$, un arbore cu 2 vârfuri are o singură muchie (este izomorf cu P_2).

"$n - 1 \Longrightarrow n$" Presupunem afirmaţia adevărată pentru un arbore cu $n - 1$ vârfuri.

Fie T un arbore cu n vârfuri. Conform Lemei 2.2, există un vârf terminal v în T. Atunci $T' = T - v$ este arbore cu $n - 1$ vârfuri (Lema 2.3) şi $|E(T')| = |E(T)| - 1$. Din ipoteza de inducţie, T' are $|E(T')| = |V(T')| - 1 = n - 2$ muchii. Rezultă $|E(T)| = |E(T')| + 1 = n - 1$. □

Lema 2.5. *Fie G un graf neorientat conex şi C un ciclu in G. Fie $e \in E(C)$ o muchie din ciclul C. Atunci $G - e$ este tot un graf conex.*

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din definiţia unui graf conex şi din următoarea observaţie: dintr-un xy-lanţ care conţine muchia e în G se poate obţine un xy-lanţ în $G - e$ înlocuind muchia e cu $C - e$. □

Propozitia 2.6. *Fie T un graf neorientat cu $n \geq 1$ vârfuri. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. *T este arbore (conex şi aciclic)*
2. *T este conex muchie-minimal (prin eliminarea unei muchii din T se obţine un graf care nu mai este conex)*
3. *T este aciclic muchie-maximal*
4. *T este conex şi are $n - 1$ muchii*
5. *T este aciclic şi are $n - 1$ muchii*

6. *Între oricare două vârfuri din T există un unic lanţ elementar.*

Demonstraţie. "1 $\iff$ 2": Pentru $n = 1$ este evident. Presupunem $n \geq 2$.

1 $\implies$ 2: Presupunem că T este arbore (conex şi aciclic).

Fie $e = xy \in E(T)$. Arătăm că $T - e$ nu este conex (deci T este conex muchie-minimal). Presupunem prin absurd că $T - e$ este conex. Atunci există un lanţ elementar P în $T - e$ de la x la y. Atunci $P + xy = [x \overset{P}{-} y, x]$ este ciclu în T, contradicţie.

2 $\impliedby$ 1: Presupunem că T este conex muchie-minimal. Demonstrăm că T este aciclic.

Presupunem prin absurd că T conţine un ciclu C. Fie $e \in E(C)$. Din Lema 2.5 rezultă că $T - e$ este conex, contradicţie (T este conex muchie-minimal).

"1 $\iff$ i" pentru $i \in \{3, 4, 5, 6\}$ - Exerciţii ([3] - v. Secţiunea 2.1, [1] - v. Secţiunea 4.1) □

Corolar 2.7. *Orice graf conex conţine un arbore parţial (un graf parţial care este arbore).*

2.1 Construcţia unui arbore cu secvenţa gradelor dată

Teorema 2.8. *O secvenţă de $n \geq 2$ numere naturale* **strict pozitive** $s_0 = \{d_1, \ldots, d_n\}$ *este secvenţa gradelor unui arbore dacă şi numai dacă* $d_1 + \ldots + d_n = 2(n-1)$.

Demonstraţie. "$\implies$" Presupunem că există un arbore T cu $s(T) = s_0$. Atunci

$$d_1 + \ldots + d_n = 2|E(T)| = 2(n-1) \text{ (conform Propoziţiei 2.6)}$$

"$\impliedby$" **Varianta** 1**.** Demonstrăm prin inducţie după n că o secvenţă de n numere naturale (strict) pozitive $s_0 = \{d_1, \ldots, d_n\}$ cu proprietatea că $d_1 + \ldots + d_n = 2(n-1)$ este secvenţa gradelor unui arbore.

Pentru $n = 2$ avem $d_1, d_2 > 0$ şi $d_1 + d_2 = 2(2-1) = 2$, deci $d_1 = d_2 = 1$. Există un arbore cu secvenţa gradelor $s_0 = \{1, 1\}$, izomorf cu graful P_2 (lanţ cu două vârfuri).

Presupunem afirmaţia adevărată pentru $n - 1$. Fie $s_0 = \{d_1, \ldots, d_n\}$ o secvenţă de $n \geq 3$ numere naturale (strict) pozitive cu proprietatea că $d_1 + \ldots + d_n = 2(n-1)$. Arătăm că există un arbore cu secvenţa gradelor s_0.

Presupunem (fără a restrânge generalitatea) că $d_1 \geq \ldots \geq d_n$. Demonstrăm că $d_1 > 1$ şi $d_n = 1$.

- Presupunem prin absurd că $d_1 = 1$. Atunci $d_1 = \ldots = d_n = 1$. Rezultă $d_1 + \ldots + d_n = n$, de unde $2(n-1) = n$, deci $n = 2$, contradicţie ($n \geq 3$).
- Presupunem prin absurd că $d_n \geq 2$. Atunci $d_1 \geq \ldots \geq d_n \geq 2$. Rezultă $d_1 + \ldots + d_n \geq 2n$, de unde $2(n-1) \geq 2n$, contradicţie.

Considerăm secvenţa $s_0' = \{d_1 - 1, d_2, \ldots, d_{n-1}\}$. Numerele din secvenţă sunt pozitive şi avem

$$d_1 - 1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} = d_1 + \ldots + d_n - (1 + d_n) = 2(n-1) - (1+1) = 2((n-1) - 1).$$

Atunci putem aplica ipoteza de inducţie pentru secvenţa s_0'. Rezultă că există un arbore T' cu mulţimea vârfurilor $V' = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ având secvenţa gradelor $s(T') = s_0'$, mai exact cu:

$$d_{T'}(x_i) = \begin{cases} d_i - 1, & \text{dacă } i = 1 \\ d_i, & \text{dacă } i \in \{2, \ldots, n-1\}. \end{cases}$$

Construim pornind de la T' un nou arbore $T = (V, E)$ adăugând un vârf nou x_n pe care îl unim cu vârful x_1: $V = V' \cup \{x_n\}$, $E = E' \cup \{x_1x_n\}$. Pentru un $i \in \{1, \ldots, n\}$ avem atunci

$$d_T(x_i) = \begin{cases} d_{T'}(x_i) + 1 = d_i - 1 + 1 = d_i, & \text{dacă } i = 1 \\ d_{T'}(x_i) = d_i, & \text{dacă } i \in \{2, \ldots, n-1\} \\ 1 = d_n, & \text{dacă } i = n. \end{cases}$$

Rezultă că $s(T) = s_0$, deci s_0 este secvenţa gradelor unui arbore.

Varianta 2. Presupunem (fără a restrânge generalitatea) că $d_1 \geq \ldots \geq d_n$. Avem $d_1 \geq 1$ şi $d_n = 1$ (ca în varianta 1). Fie k astfel încât $d_k > 1$ şi $d_{k+1} = 1$.

Construim un arbore T de tip omidă cu mulţimea vârfurilor $\{x_1, \ldots, x_n\}$ având secvenţa gradelor s_0 astfel.

1. Unim printr-un lanţ vârfurile $x_1, \ldots, x_k$ (care trebuie să fie neterminale - formează corpul omizii), în această ordine
2. Considerăm mulţimea de vârfuri $\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ (care trebuie să fie terminale) şi unim
   - x_1 cu primele $d_1 - 1$ vârfuri din această mulţime
   - x_2 cu următoarele $d_2 - 2$ vârfuri
   - ...
   - x_{k-1} cu următoarele $d_{k-1} - 2$ vârfuri
   - x_k cu ultimele $d_k - 1$ vârfuri din această mulţime.

Deoarece $d_1 - 1 + \sum_{i=2}^{k-1}(d_i - 2) + d_k - 1 = \sum_{i=1}^{n} d_i - 2k - (n-k) = n - k = |\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}|$, construcţia este corectă.

Avem $s(T) = s_0$. □

Din demonstraţia Teoremei 2.8 se desprind următorii algoritmi de determinare a unui arbore cu secvenţa gradelor dată.

Algoritm de construţie a unui arbore cu secvenţa de grade dată

Intrare: o secvenţă de n numere naturale pozitive $d_1, \ldots, d_n$

Ieşire: un arbore T cu $V(T) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ cu $s(T) = s_0$ dacă s_0 este secvenţa gradelor unui arbore, sau mesajul NU altfel.

Idee: La un pas unim un vârf de grad 1 cu un vârf de grad mai mare decât 1 şi actualizăm secvenţa s_0. Se repetă de $n - 2$ ori, în final rămânând în secvenţă două vârfuri de grad 1, care se unesc printr-o muchie.

Pseudocod:

Varianta 1.

Pasul 1. Dacă $d_1 + \ldots + d_n \neq 2(n-1)$, atunci scrie NU, STOP.

Pasul 2.

Cât timp s_0 conţine valori mai mari decât 1 execută *//sau pentru* $i = 1, n-2$

alege un număr $d_k > 1$ şi un număr $d_t = 1$ din secvenţă s_0 şi adaugă la T muchia x_kx_t.

eliminӑ d_t din s_0

înlocuieşte d_k în secvenţa s_0 cu $d_k - 1$

Pasul 3.

fie d_k, d_t unicele elemente nenule (egale cu 1) din s_0; adaugă la T muchia $x_k x_t$.

Varianta 2**.** Corespunde variantei a doua de demonstrare a teoremei anterioare - construim un arbore de tip omidă.

Bibliografie

[1] Drago-Radu Popescu, *Combinatorică şi teoria grafurilor*. Editura Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Bucureşti, 2005.

[2] Drago-Radu Popescu, R. Marinescu-Ghemeci, *Combinatorică şi teoria grafurilor prin exerciţii şi probleme*. Editura Matrixrom, 2014.

[3] Douglas B. West, *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall 1996, 2001.