Șiruri de numere reale

Aplicații la teorema lui Weierstrass:

Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln n$, $\forall n \geq 1$ este convergent.

Se folosește inegalitatea $\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a}$, $\forall 0<a<b$

Monotonia: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$, $\forall n \geq 1$.

$\left.\begin{matrix} a = n \\ b = n+1 \end{matrix}\right| \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{n+1-n} < \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n} < \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$

$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n < 0$, $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow x_{n+1} - x_n < 0$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ șir strict descrescător

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ șir mărginit superior

Marginea inferioară:

$\cancel{\ln 2} - \ln 1 < 1$

$\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} < \frac{1}{2}$

$\cancel{\ln 4} - \cancel{\ln 3} < \frac{1}{3}$

$\ldots$

$\cancel{\ln n} - \cancel{\ln(n-1)} < \frac{1}{n-1}$

$\ln(n+1) - \cancel{\ln n} < \frac{1}{n}$

(+)

$\ln(n+1) - \ln 1 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1 \;|- \ln n \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(n+1) - \ln n < x_n$, $\forall n \geq 1$.

$\ln(n+1) - \ln n, \forall n \geq 1$ ||

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și mărginit inferior

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este șir monoton și mărginit din $\mathbb{R}$ $\xrightarrow[\text{Weierstrass}]{\text{Th.}}$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și convergent.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right) \overset{\text{not}}{=} \gamma \in (0,1)}$$

γ se numește constanta lui Euler.

Obs!: $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) = +\infty}$

limite remarcabile de șiruri

Lema Stolz - Cezaro (varianta $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

Se consideră șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți:

a) $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător.

($\lim_{n\to-\infty} b_n = -\infty$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strict descrescător)

b) $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \in \overline{\mathbb{R}}$

Atunci $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$

Lema Stolz - Cezaro (varianta $\frac{0}{0}$)

Se consideră șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$, cu următoarele proprietăți:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este șir strict monoton

c) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \in \overline{\mathbb{R}}$

Atunci $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$

$a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$

Criteriul raportului pentru șiruri cu termeni strict pozitivi:

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din $\mathbb{R}_+^*$, astfel încât ~~$\exists l$~~
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Dacă $l < 1$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

Dacă $l > 1$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

Criteriul radicalului pentru șirul cu termeni strict pozitivi

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din $\mathbb{R}_+^*$, astfel încât $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$

Definiția 1: Spunem că $l \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct limită al unui șir de nr. reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă $\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ un subșir al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $l = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}$

Notații: $\mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \overset{def}{=} \{ l \in \overline{\mathbb{R}} / l =$ punct limită al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \}$

Lema lui Cezaro generalizată:

Din orice șir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se poate extrage un subșir care are limită în $\overline{\mathbb{R}}$. (Orice șir de nr. reale are cel puțin un punct ~~[illegible]~~ limită).

Limita inferioară și limita superioară a unui șir de nr. reale

Unui șir de nr. reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ îi asociem două șiruri din $\overline{\mathbb{R}}$ notate $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definite astfel

$$u_n = \sup_{k\geq n} x_k = \sup \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$v_n = \inf_{k\geq n} x_k = \inf \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Șirurile $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\overline{\mathbb{R}}$ au următoarele proprietăți:

a) $u_{n+1} \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b) $v_{m+1} \geq v_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$

c) $v_m \leq u_m$, $\forall m, m \in \mathbb{N}$

<u>Definiția 2:</u> Se numește <u>limita superioară</u> a unui șir de numere reale $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ numărul $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \overline{\mathbb{R}}$

Se numește <u>limita inferioară</u> a unui șir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numărul $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n \in \overline{\mathbb{R}}$

<u>Notație</u> $\overline{\lim}\, x_n \overset{def 2}{=} \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} x_k \right) \in \overline{\mathbb{R}}$

$\underline{\lim}\, x_n \overset{def 2}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} x_k \right) \in \overline{\mathbb{R}}$

<u>Obs!</u>: $\underline{\lim}\, x_m \leq \overline{\lim}\, x_m$

<u>Teorema 1:</u> Pentru orice șir de nr. reale $(x_m)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt adevărate următoarele egalități:

1) $\overline{\lim}\, x_m = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} \mathcal{L}\left((x_m)_{m\in\mathbb{N}} \right)$

2) $\underline{\lim}\, x_m = \inf_{\overline{\mathbb{R}}} \mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \right)$

<u>Exemplu</u>: $x_m = (-1)^m$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{k\to\infty} x_{2k} = 1 \\ \lim_{k\to+\infty} x_{2k+1} = -1 \end{array}\right\| \Rightarrow \mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) = \{-1, 1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\lim}\, x_n = 1$ și $\underline{\lim}\, x_n = -1$

Teorema 21 a) Un șir de nr. reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită $\Leftrightarrow$ $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$, în plus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$.

b) Un șir de nr. reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit superior $\Leftrightarrow$ $\overline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R}$

Un șir de nr. reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit inferior $\Leftrightarrow$ $\underline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R}$

Un șir de nr. reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit $\Leftrightarrow$ $\overline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R}$ și $\underline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R}$,

Aplicații: $x_n = n\cdot(-1)^n$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = +\infty \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \{-\infty, +\infty\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overline{\lim}\, x_n = +\infty$ și $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$