Geometrie C5

21.03.2018

Structura endomorfismelor

$f \in End(V)$ $f: V \to V$

$f(ax+by) = af(x) + bf(y)$

Broblema: Existența (găsirea) unor baze „convenabile" pt. ~~ma~~ $\underset{\uparrow}{\overset{\text{matrice}}{[f]}}$ (să fie cât mai simplă)

Ex: $V = V_1 \oplus V_2$ ($V = V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2 = \{0\}$)

$f(V_1) \subseteq V_1$ $\quad f(V_2) \subseteq V_2$

Dacă ~~Aleg~~ $\mathcal{B} = \{\underbrace{e_1, \dots e_{n_1}}_{V_1}, \underbrace{e_{n_1+1}, \dots e_n}_{V_2}\} \Rightarrow [f] = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, $A_i = [f|_{V_i}]$

Def: $f(U) \subseteq U$, U subspațiu, atunci U s.n. subspațiu invariant

Idealul: să avem n subspații invariante de dim 1 în sumă directă

$\exists \{e_1, \dots e_n\}$ bază, cu $f(e_i) = \lambda_i e_i$

$$\Rightarrow [f] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_i)$$

Def: $v \in V \setminus \{0\}$ s.n. vector propriu (principal) asociat valorii proprii (principale) $\lambda \in K$ dacă $f(v) = \lambda \cdot v$

Obs: 1) $f(v) = \lambda v \Rightarrow \langle v \rangle$ e invariant

$\langle v \rangle = \{a \cdot v \mid a \in K\}$

$f(av) = af(v) = a\lambda \cdot v = (a\lambda)v \in \langle v \rangle$

2) Dacă $V_\lambda : \{v \in V \setminus \{0\} \mid f(v) = \lambda v\} \cup \{0\}$ e subspațiu vectorial

$v_1, v_2 \in V_\lambda \Rightarrow f(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) =$ (K corp com.)

$= a_1 \lambda v_1 + a_2 \lambda v_2 = \lambda(a_1 v_1 + a_2 v_2) \in V_\lambda$

Fie λ o valoare proprie $\Rightarrow \exists v \neq 0$, $f(v) = \lambda v$ (1)

Fie $\mathcal{B} = \{e_1, \dots e_n\}$ bază arbitrară

$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$

$v = \sum v_j e_j$

$$f(v) = \lambda v \iff A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I_n)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

Din (1), (2) $\Rightarrow$ sistemul are sol nenulă $\Rightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

(Determinant
$B = (b_{ij})$

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$
)

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

$P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ pol. de grad n

Valorile proprii ale lui f sunt rădăcinile din K ale lui P_f (=polinomul caracteristic)

<u>Obs:</u> Dacă se folosește o altă bază B' în care matricea lui f este A', avem relația : $A' = C^{-1}AC$ pt. C inversabilă.

$$\det(A' - \lambda I_n) = \det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}C) = \det(C^{-1}(A - \lambda I_n)C) =$$

$= \det C^{-1} \det(A - \lambda I_n) \det C$ (produs com. de nr. în corpul K)

$= \det(A - \lambda I_n)$

$\Rightarrow P_f$ e bine definit (nu depinde de baza în care îl calculăm)

Fie $m_\lambda :=$ multiplicitatea valorii proprii λ ca rădăcină (în K) a lui P_f.

Lui λ i se asociază subsp V_λ

<u>P1</u> $\dim V_\lambda \leq m_\lambda$

Dem: Presup prin red. la abs.:

Fie ~~m_λ~~ $n_\lambda = \dim V_\lambda > m_\lambda$

Fie $\{\underbrace{e_1, \ldots e_{n_\lambda}}_{V_\lambda}, e_{n_\lambda+1}, \ldots e_n\}$ bază în V

$f(e_i) = \lambda e_i, i \leq n_\lambda$

$$[f] = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \ddots \lambda & 0 \\ \hline * & * \end{array}\right) \leftarrow \text{linia } n_\lambda$$

$$P_f(X) = (X-\lambda)^{n_\lambda} \cdot Q(X) \Rightarrow m_\lambda \geq n_\lambda > m_\lambda \quad \text{⨳}$$

P2 Vectorii proprii asociați unor valori proprii distincte sunt liniar indep.

(Fie $v_i \sim \lambda_i$, $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \{v_1, \dots v_k\}$ indep)

Dem

Fie $\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0 \qquad | \cdot \lambda_k \neq 0$

$$\sum_{1}^{k} a_i f(v_i) = f\left(\sum a_i v_i\right) = 0$$

$$\| \qquad\qquad \Rightarrow \sum_{1}^{k} a_i \lambda_i v_i = 0$$

$$\sum_{1}^{k} a_i \lambda_i v_i$$

$$\sum \lambda_k a_i v_i = 0$$

$$\sum \lambda_i a_i v_i = 0 \quad \ominus$$

$$\sum_{1}^{k-1} a_i (\lambda_k - \lambda_i) v_i = 0 \Rightarrow \{v_i\}_{\overline{1,k-1}} \text{ lin. indep} \quad \text{⨳}$$

~~Teorema~~

Obs: Dacă $\exists \{e_1, \dots, e_n\}$ a.î. $f(e_i) = \lambda_i$, spunem că f e diagonalizabil

T. Fie $f \in End(V/K)$, f e diagonalizabil (există o bază de vectori proprii $\Leftrightarrow$ P_f are toate rădăcinile în K și $m_\lambda = \dim V_\lambda$ $\forall$ val. proprie λ

Dem „$\Rightarrow$" Fie $\{e_i\}$, $f(e_i) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$ $\quad [f] = diag(\mu_i)$

$\lambda_1, \dots \lambda_r$ val distincte ale lui μ_i

$\underset{m_1}{\wr} \quad \underset{m_r}{\wr} \qquad m_1 + \dots + m_r = n$

$$[f] = A = \left(\begin{array}{c} \lambda_1 \ddots \lambda_1 \\ \hline \lambda_2 \ddots \lambda_2 \\ \hline \\ \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{lin } m_1 \\ \\ \text{lin } m_1 + m_2 \end{array}$$

$\det(A - X\cdot I_n) = (X-\lambda_1)^{m_1}\cdot(X-\lambda_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(X-\lambda_r)^{m_r}$

$\quad \overset{\shortparallel}{P_f(X)}$

$\Rightarrow$ răd. lui $P_f(X)$ sunt $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ cu multiplicitățile $m_1, \ldots, m_r$

„$\Leftarrow$"

Aleg baze în V_{λ_i}

$\{e_1, \ldots e_{m_1}\}$ bază V_{λ_1}

$\{e_{m_1+1}, \ldots, e_{m_1+m_2}\}$ V_{λ_2}

$\vdots$

Arăt că $B_1 \cup B_2 \ldots$ e bază în V

$[f|V_{\lambda_1}] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix}$ $m_1 \times m_1$

$[f|V_{\lambda_2}] = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $m_2 \times m_2$

Cum $\underset{\text{cardinal}}{\#}(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_r) = n$

e suficient să arăt că e lin indep

$\underbrace{\sum_{1}^{m_1} a_i e_i}_{V_{\lambda_1}} + \underbrace{\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} a_i e_i}_{V_{\lambda_2}} + \ldots = 0$

$\overset{P2}{\Longrightarrow} \{\sum_{1}^{m_1} a_i e_i, \sum_{m_1+1}^{m_1+m_2} a_i e_i, \ldots\}$ ind

$\Rightarrow \sum_{1}^{m_1} a_i e_i = 0 \Rightarrow a_i = 0$

$\sum_{m_1+1}^{m_1+m_2} a_i e_i = 0 \rightarrow a_i = 0$

$\vdots$

Obs: Fie f diagonalizabil și $A = [f]_B$. Atunci $\exists$ o bază B' în care $[f]$ e diag. Fie C - matricea de trecere $B \rightarrow B'$ $\Rightarrow C^{-1}AC$ e diagonală

Def o rel de echivalență: $A \sim A' \Leftrightarrow \exists\, C$ diag $A' = C^{-1}AC$

$A^n = ?$

$A = C^{-1}AC = C^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} C$

$A^n = C^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^n \end{pmatrix} C$

Exerciții

1) $f(x,y,z) = (x+y+3z,\ x+5y+z,\ 3x+y+z)$

$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2+\lambda \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -\lambda-2 \end{vmatrix} =$

$= (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2+\lambda \\ 3 & -\lambda-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2+\lambda \\ 1 & -\lambda-2 \end{vmatrix} = (5-\lambda)[(1-\lambda)(-\lambda+2) - 6-3\lambda] -$
$[(-\lambda+2) - 2 - \lambda] =$

$= (\lambda-4)(2-\lambda)(2+\lambda) \Rightarrow f$ e diag

$[f] = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$

Găsirea vectorilor proprii

pt $\lambda = 4$

$(A - 4I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} -3x+y+3z = 0 \\ x+y+z = 0 \\ 3x+y-3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+y = -3\alpha \\ x+y = -\alpha \\ 3x+y = 3\alpha \end{cases} \Rightarrow x = \cancel{\alpha}\ \frac{1}{2}\alpha$
$y = \cancel{-2\alpha}\ -\frac{3}{2}\alpha$

$V_4 = \{(\frac{1}{2}\alpha, \frac{-3}{2}\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\cancel{e_1 = (1,-2,1)}$

$e_1 = (1,-3,2)\quad (\alpha = 2)$

2) $f(x,y,z) = (3x+8z,\ 3x-y+6z,\ -2x-5z)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 8 \\ 3 & -1-\lambda & 6 \\ -2 & 0 & -5-\lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda = -1, \quad m_\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x + 2z = 0$

Soluția : $(-2\alpha, \beta, \alpha)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\dim V_{-1} = 2 < m_{-1} = 3$

$\Downarrow$

f nu e diagonalizabil

O bază în V_{-1}: $e_1 = (0,1,0)$

$e_2 = (-2,0,1)$

Ex: Găsiți cond necesară și suficientă ca 2 endom diag să se diag. simultan