Curs 9 | Geometrie

Transformări ortogonale

$(E/\mathbb{R}, <,>) \rightsquigarrow \|x\| = \sqrt{<x,x>}$ $\qquad <x,y> = \frac{1}{2}(\|x+y\| - \|x\| - \|y\|)$

Def: $f:(E_1,<,>_1) \to (E_2,<,>_2)$ liniară cu propr. $<x,y>_1 = <f(x),f(y)>_2$

Aplic ortogonală;

Obs: $\|f(x)\|^2 = <f(x),f(x)>_2 = <x,x>_1 = \|x\|_1^2 \Rightarrow f$ păstrează normele

În particular dacă $x \neq 0 \Rightarrow \|x\|_1 \neq 0 \Rightarrow \|f(x)\|_2 \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\} \Rightarrow f$ inject.

De acum încolo: $E_1 = E_2 = E <,>$

$f: E \to E, <f(x),f(y)> = <x,y>$; f inj $\Rightarrow f$ izomorfism;

Fie $h: E \to E$, ortog. $\Rightarrow f\circ h, h\circ f$ sunt ortogonale.

$<f\circ h(x), f\circ h(y)> = <f(h(x)), f(h(y))> \overset{f\,ortog}{=} <h(x),h(y)> \overset{h\,ortog}{=} <x,y>$

id e aplic. ortonormată

f ortog $\Rightarrow f^{-1}$ e ortog $\Rightarrow \mathcal{O}(E,<,>) := \{f: E \to E \text{ ortog}\}$ grup.

Transf. ortogonale

Pb: Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ orton; $f \in \mathcal{O}(E,<,>) \Rightarrow [f]_B$ e ortog

Dem: $f(e_i) = \sum a_{ki} e_k$; $A \to [f]_B$

$<f(e_i), f(e_j)> = <\sum a_{ki} e_k, \sum a_{lj} e_l>$

$\qquad \|$

$<e_i, e_j> = \sum_{k,l} a_{ki} a_{lj} \delta$

$\qquad \|$

$\qquad \delta_{ij}$

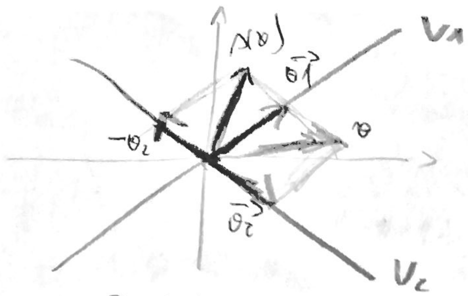
$\sum_k a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \Leftrightarrow A \cdot {}^t A = I_n$; $\quad A \in \mathcal{O}(n)$

Ex: În gen: fie V sp. vect, $V = V_1 \oplus V_2$

Fie $s: V \to V$ prin $s|_{V_1} = 1_{V_1}$, $s|_{V_2} = -1_{V_2}$

$V \ni v = v_1 + v_2 \Rightarrow s(v) = s(v_1+v_2) = s(v_1) + s(v_2) = v_1 - v_2$

Simetria a lui V de axă V_1 și V_2.

Obs: 

$s(s(v)) = s(v_1 - v_2) = v_1 + v_2 = v$

$s^2 = 1_V$

$\boxed{\text{simetrie vect} = \text{transf lin cu } s^2 = 1_V}$

Dacă $V = (E, <,>)$ vreau $V_1 \oplus V_2 = E$ și $V_1 \perp V_2$

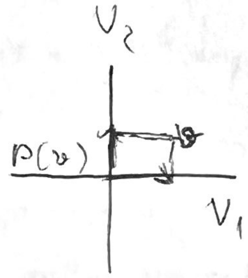
$(V_2 = V_1^\perp) \Rightarrow$ simetrie ortogonală

Obs: $\|s(v)\| = \|v_1 - v_2\|^2 = <v_1 - v_2, v_1 - v_2> = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 - 2\underbrace{<v_1, v_2>}_{0}$

$\|v\|^2 = <v_1 + v_2, v_1 + v_2> = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$

Obs: Proiecții $V = V_1 \oplus V_2$ $\quad p: V \to V$ a.î. $p(v) = v_1$

$p(p(v)) = p(v) \qquad p^2 = p;$



Dacă $V_1 \oplus V_2$ ortog $\Rightarrow$ proiecție ortog.

! Nu e transf. ortog $\Rightarrow \ker p = V_2$

$p(v) = v_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{1}{2} 1_V + \frac{1}{2} s(v)$

$\boxed{2p = 1_V + s}$

Dacă $\{\underbrace{e_1, \ldots, e_k}_{V_1}, \underbrace{e_{k+1}, \ldots, e_n}_{V_2}\}$ $[s] = \begin{pmatrix} I_k & \\ & -I_{n-k} \end{pmatrix}$ $\qquad [p] = \begin{pmatrix} I_k & \\ & 0 \end{pmatrix}$

Pb: Rădăcinile polin. caract. ale unei transf. ortogonale au modulul 1.
În particular, răd. reale, dacă există sunt 1 sau -1

Dem: Fie $\lambda = a + ib$ rădăc. a lui $P_f = \det(A - \lambda I_n)$

Fie $f(x+iy) := f(x) + if(y)$

Dacă λ e răd. a lui P_f, $\exists\, x+iy \neq (0,0)$ a.î. $f(x+iy) = \lambda(x+iy)$

$f(x) + if(y) = (a+ib)(x+iy) = ax + by + i(bx + ay)$

$f(x) = ax - by$

$f(y) = bx + ay$

$\|x\|^2 = \|f(x)\|^2 = <ax - by, ax - by> = a^2\|x\|^2 + b^2\|y\|^2 - 2ab<x,y>$

$\|y\|^2 = \|f(y)\|^2 = <bx + ay, bx + ay> = b^2\|x\|^2 + a^2\|y\|^2 + 2ab<x,y>$

$\oplus$

$\|x\|^2 + \|y\|^2 = (a^2 + b^2)(\|x\|^2 + \|y\|^2) \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$

~~Obs:~~ Corolar: O aplic ortog. invariază un subspațiu de dim 1 sau 2

Curs 9.2 Geometrie

<u>Obs</u>: Fie $f \in O(E, <,>)$, $U \subset E$ subsp.
Dacă $f(U) = U$, atunci $f(U^{\perp}) = U^{\perp}$

<u>Dem</u> $E = U \oplus U^{\perp}$ Fie $x \in U^{\perp}$, $f(x) \in V^{\perp} \Leftrightarrow <f(x), y> = 0 \; \forall y \in V$

$$\overset{\shortparallel}{f(z)} = <x, z> = 0$$

<u>Obs</u>: Dacă $f \in O(E, <,>)$ şi $E = U \oplus U^{\perp}$ este o bază ~~ortog~~ ortonorm $\{\underbrace{e_1, \dots, e_k}_{U}, \underbrace{e_{k+1}, \dots e_n}_{U^{\perp}}\}$

$$[f] = \begin{pmatrix} [f|_U] & 0 \\ 0 & [f|_{U^{\perp}}] \end{pmatrix}$$

<u>Clasificarea transformărilor ortogonale</u>

i) <u>$\dim E = 1$</u> $\forall x \neq 0 \to f(x) = \lambda x \to \lambda$ e val proprie;

f ortog $\Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow f = \pm 1_E$

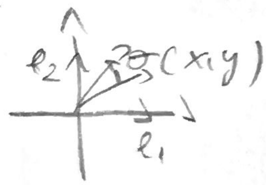
ii) <u>$\dim E = 2$</u> Fie $\{e_1, e_2\}$ bază ortog, pozitiv orientată

Fie $A = [f]_B \Rightarrow A^t A = I_2$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$

1) $\det A = 1 \Rightarrow a = \cos\theta, b = -\sin\theta,$
$c = \sin\theta, d = \cos\theta$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



~~1) $a = \cos\theta$, $b = -\sin\theta$~~

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & -y\sin\theta \\ x\sin\theta & +y\cos\theta \end{pmatrix}$$

rotaţie de $\sphericalangle \theta$ în sens trigon.

2) $\det A = -1 \to \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ $A^2 = I_2 \Rightarrow f^2 = 1_E \Rightarrow f$ e o simetrie ortogonală $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ există $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ ortogon a.î. $f(\overline{e_1}) = \overline{e_1}$, $f(\overline{e_2}) = -\overline{e_2} \Rightarrow [f]_{\overline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & \sin \\ \sin\pi & -\cos \end{pmatrix}$

<u>$\dim E = 3$</u> gr $P_f = 3 \Rightarrow \exists$ răd reală $\to \exists$ val proprii

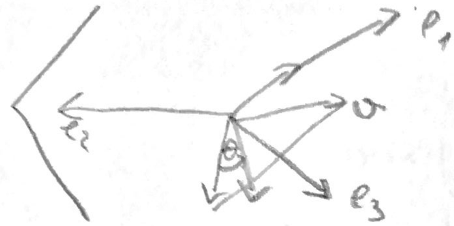
a) $\det f = 1$

a1) f are val proprie $\lambda = 1 \Rightarrow \exists e_1, \|e_1\| = 1$ a.î. $f(e_1) = e_1$

Fie $U = e_1^{\perp} \Rightarrow <e_1> \oplus U = E$; $\dim U = 2 \Rightarrow f(U) = U \Rightarrow f|_U \in O(U, <,>)$

ortonormată

$\Rightarrow [f]$ într-o bază ~~ortog~~ $\{e_1, e_2, e_3\}$ va fi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$



$a_2)$ $\lambda = -1$ $\exists e_1$ cu $\|e_1\| = 1$ și $f(e_1) = -1$

sau $U = e_1^{\perp}$ $\det(f|_U) = -1$

$\exists$ o bază ortonormată $\{e_2, e_3\}$ $[f|U] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow [f] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

În baza $\{e_3, e_1, e_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\det f = -1$; $a_1)$ $\lambda = 1$

$a_2)$ $\lambda = 2$

Concluzie: P-t $f = O(E^3, \langle , \rangle)$ există o bază orton. în care f are matricea de forma: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & +\cos\theta \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & +\cos\theta \end{pmatrix}$

În general forma ortog