Geometrie 07.03.2012

-curs 3-

Subspații vectoriale

Fie V/K și $U \subseteq V$

Def. U este subspațiu vectorial pentru oricare $x, y \in U$,

$x + y \in U$

$a \cdot x \in U$, $\forall a \in K$

Obs.1: U este subspațiu $\Leftrightarrow$ $ax + by \in U$, $\forall a, b \in K; x, y \in U$

Obs.2. În particular $(U, +)$ subgrup în $(V, +)$

0) $\{0\} \subseteq V$, $m V \subseteq V$

Exemplu: 1) $V = K^n$, $m < n$ $K^m \to K^n$

$(x_1, \dots x_m) \mapsto (x_1, \dots x_m, 0, \dots 0)$

2) $\{A \in \mathcal{M}(m, n, K) / \underset{\downarrow}{tr} A = 0\} \subseteq \mathcal{M}(m, n, K)$

matricile de urmă nulă

3) $\{A \in \mathcal{M}(m, n, K) \mid \underset{\downarrow}{A = A^t}\} \subseteq \mathcal{M}(m, n, K)$

simetrice

4) $V = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\}$

$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue}\}$

e subspațiu din V.

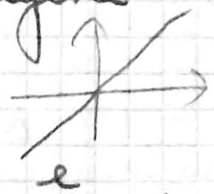
5) $\mathcal{P}_m(X) \subset K[X]$

Obs. $\dim U = p$ se numește p-plan

$\dim V = n$, $\dim U = n-1 \Rightarrow$ hiperplan

Contraexemplu: sferele nu sunt subspații, reuniunile de drepte nu sunt subspații.

Obs. În $\mathbb{R}^n$ orice dreaptă prin origine e un subspațiu 1-dimensional



Obs. Dacă U_1, U_2 subspații $\Rightarrow U_1 \cap U_2$ e subspațiu, dar $U_1 \cup U_2$ nu e subspațiu. De fapt $\bigcap_{k \in \Lambda} U_k$ e subspațiu Λ - lambda (mulț. arbitrară) S de mână

Exemplu important.

Fie $A \in \mathcal{M}(m, n, K)$ matrice cu m linii și n coloane și $S(A) := \{X \in K^n \mid AX = 0\}$ (sistem omogen cu matricea A), $S(A) \subset K^n$ subspațiu

$X_1, X_2 \in S(A) \Rightarrow AX_1 = 0,\ AX_2 = 0 \Rightarrow$

$A(X_1 + X_2) = 0$

$A(a \cdot X_1) = a(AX_1) = a \cdot 0 = 0.$

$$\boxed{\dim S(A) = n - \text{rang}(A)}$$

$AX = 0$

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}X_1 + \dots + a_{1n}X_n = 0 \\ a_{21}X_1 + \dots + a_{2n}X_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + \dots + a_{mn}X_n = 0 \end{array}\right|$$

Fie $r = \text{rang}A$.
$$\begin{cases} a_{11}X_1 + \dots + a_{1r}X_r = -a_{1r+1}\lambda_1 - \dots - a_{1n}\lambda_{n-r} \\ \vdots \\ a_{r1}X_1 + \dots + a_{rr}X_r = -a_{rr+1}\lambda_1 - \dots - a_{rn}\lambda_{n-r} \end{cases}$$

Sol. generală $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots \frac{\Delta_r}{\Delta}, \lambda_1, \dots \lambda_{n-r}\right)$

depinde liniar de $\lambda_1, \dots \lambda_{n-r}$.

$X = \sum X_1\lambda_1 + \dots + X_{n-r}\lambda_{n-r}$

$$\Delta_k = (-1)\begin{vmatrix} \dots a_{1\,n+1}\lambda_1 + \dots + a_{1n}\lambda_{n-1} \\ \\ \dots a_{n\,n+1}\lambda_1 + \dots + a_{nn}\lambda_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha \cdot a & x+y & b \\ \alpha \cdot c & x+y & d \\ \alpha \cdot m & x+y & n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & x & b \\ c & x & d \\ m & x & n \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} & y & \\ & y & \\ & y & \end{vmatrix}$$

Teoremă Fie $U \subset V$ submulțime. U e subspațiu vectorial (de dimensiune p) dacă există o bază în V a.î. coordonatele vectorilor din U satisfac un sistem liniar omogen

Dem „$\Rightarrow$" Fie $\{e_1, \dots e_p\}$ în U. În particular $\{e_1, \dots e_p\}$ e liniar independent în V $\Rightarrow$ îl pot completa la o bază $\{e_1, \dots e_p, e_{p+1}, \dots e_n\}$ în V, $\forall\, u \in U \Rightarrow u = a_1 e_1 + \dots + a_p e_p + 0 \cdot e_{p+1} + \dots + 0 \cdot e_n$.

U are în baza lui V coordonatele

$$[u] = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

coord. lui sunt soluțiile unui sistem $\begin{cases} x_{p+1} = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$

Obs Odată fixată o bază în V, pot privi V ca pe K^n, $\forall\, v \in V$.

$$v = \sum x_i e_i \qquad v \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

$\Rightarrow$ orice subspațiu $U \subset V$ poate fi privit ca $K^p \subset K^n$

Teoria subspațiilor vectoriale se reduce la studiul sistemelor liniare.

Deci dacă U e subspațiu de dimensiune p în V fixând o bază $\{e'_1, \dots e_n\}$ în V subspațiul U e descris de ecuațiile:

$$\begin{cases} A \cdot X' = 0 \\ rg A = n-p \end{cases}$$

X reprez. coord vectorilor din U în baza dată.

$A \cdot X = 0$ se va putea scrie sub forma:

$x_i = \sum_{j=1}^{p} b_{ij} t_j$, $i \leq p$ (forma parametrică

$x_i = t_i$, $i = \overline{p+1, n}$

În particular, ecuația unui hiperplan ($\dim U = n-1$) este $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$.

Obs. Un subspațiu de dimensiune p e intersecția a n-p hiperplane

Fie S o submulțime $\subset V$

$L(S) := \{ \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in K, v_i \in S$

acoperirea liniară / span-ul lui S

$$\sum^{k} a_i v_i + \sum_{1}^{l} b_j v_j$$

$$= \sum_{1}^{k+l} a_i v_i \in L(S) \qquad b_1 = a_{k+1}$$

$$b_l = a_{k+l}$$

$\alpha \cdot \sum a_i v_i = \sum (\alpha a_i) \cdot v_i \in L(S) \Rightarrow$

$L(S)$ e subspațiu

Ex: $v \neq 0 \quad S = \{v\}$

$\angle(S) = \{a \cdot v \mid a \in K\}$

dreapta generată de v

P: $\angle(S) = \bigcap_{U \supseteq S} U$, U subspațiu

(cel mai mic subspațiu care-l conține pe S)

Dublă incluziune

$\supset$ trivială

Corolar $\angle(U) = U$

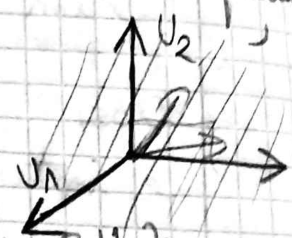
Cor. $\angle(\angle(S)) = \angle(S)$

Obs $\underline{U_1 \cup U_2 \text{ nu e subspațiu}}$

! Reuniunea a 2 subspații nu e subspațiu lin ind.

Def.

$U_1 + U_2 := \angle(U_1 \cup U_2)$



Obs. $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$

Scrierea nu e unică!

Atunci când descompunerea $u_1 + u_2$ e unică suma se numește directă $U_1 \oplus U_2$

P: Suma e directă $\Leftrightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\}$

$u_1 + u_2 = u_1' + u_2' \Leftrightarrow$

$\underbrace{u_1 - u_1'}_{U_1} = \underbrace{u_2' - u_2}_{U_2}$.

Teorema Grossmann

$$\boxed{\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)}$$

Demonstratie

Fie $\{e_1, \dots e_p\}$ bază în $U_1 \cap U_2$

$(\dim U_1 \cap U_2 = p) \Rightarrow \{e_1, \dots e_p\}$ liniar indep. în U_1, U_2

Completez la o bază $\{e_1, \dots e_p, f_{p+1}, \dots f_q\}$ a lui U_1 ($\dim U_1 = q$)

$\{e_1, \dots e_p, g_{p+1}, \dots g_s\}$ a lui U_2 ($\dim U_2 = s$)

Arat că $\{e_1, \dots e_p, f_{p+1}, \dots f_q, g_{p+1}, \dots g_s\}$ bază în $U_1 + U_2$. Cum? lin ind + sist generatori

lin ind

$$\underline{a_1 e_1 + \dots + a_p e_p + b_{q+1} f_{p+1} + \dots + b_q f_q} = \underbrace{-(c_{p+1} \cdot g_{p+1} + \dots + c_s g_s)}_{U_1 \cap U_2}$$

$\Rightarrow b_j = 0, \quad c_j = 0 \Rightarrow a_1 e_1 + \dots + a_p e_p = 0$

$\Rightarrow a_i = 0 \Rightarrow$ lin ind

sist de generatori

$u \in U_1 + U_2 \Rightarrow u = u_1 + u_2 = \sum a_i e_i$

$= (\sum a_i e_i + \sum b_j \cdot f_j) + (\sum a_i' e_i + \sum c_j g_j)$

$\dim = \cancel{p} + s - p + q - \cancel{p} = s + q - p$