Algoritmica Grafurilor

Despre ce e vorba?

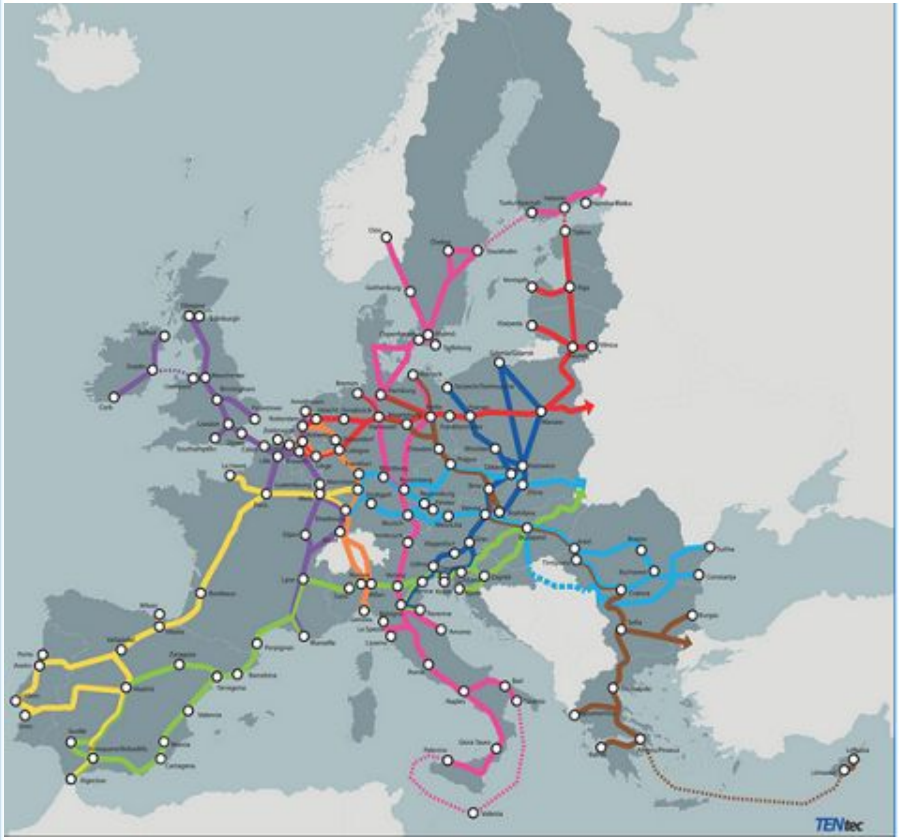
- Noțiuni fundamentale de teoria grafurilor
- Însușirea și familiarizarea cu algoritmii fundamentali din teoria grafurilor
- Însușirea deprinderii de a modela problemele folosind grafuri
- Aplicații

Obiective specifice:

- Cunoașterea principalelor noțiuni și rezultate din teoria grafurilor și a utilității acestora
- **Modelarea problemelor** cu ajutorul grafurilor și **elaborarea de algoritmi** de grafuri pentru rezolvarea acestora
- Abilități de **justificare a corectitudinii** algoritmilor propuși si de a estima eficiența acestora
- **Implementarea <u>eficientă</u>** a algoritmilor

Aplicații

- Transport, căi de comunicare, etc

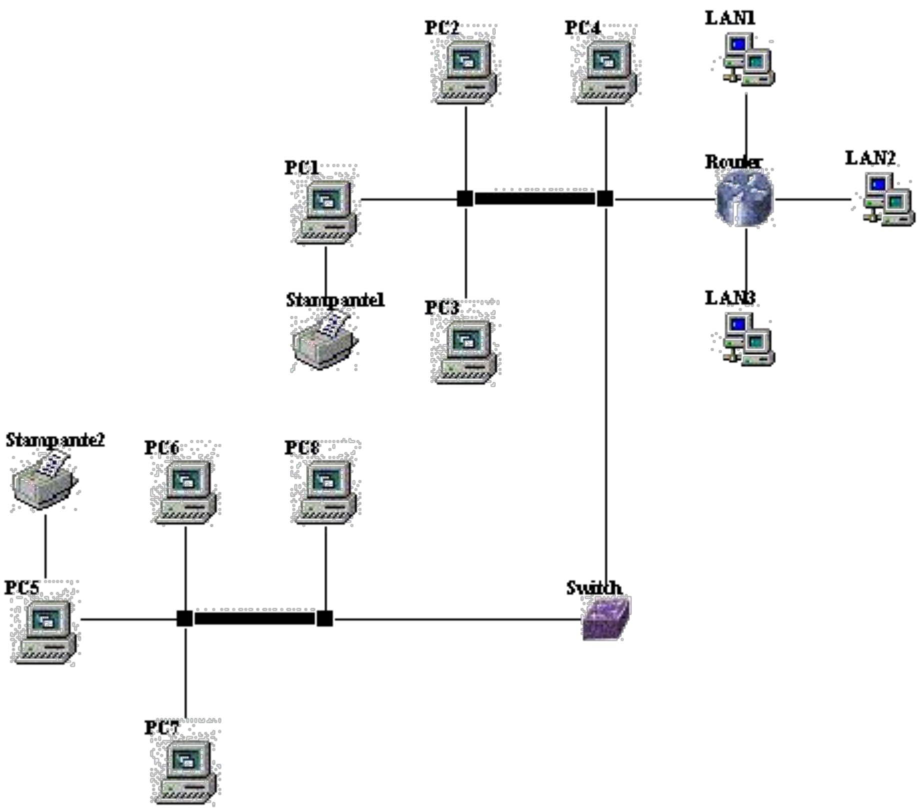


Aplicații

- Rețele sociale, sociologie

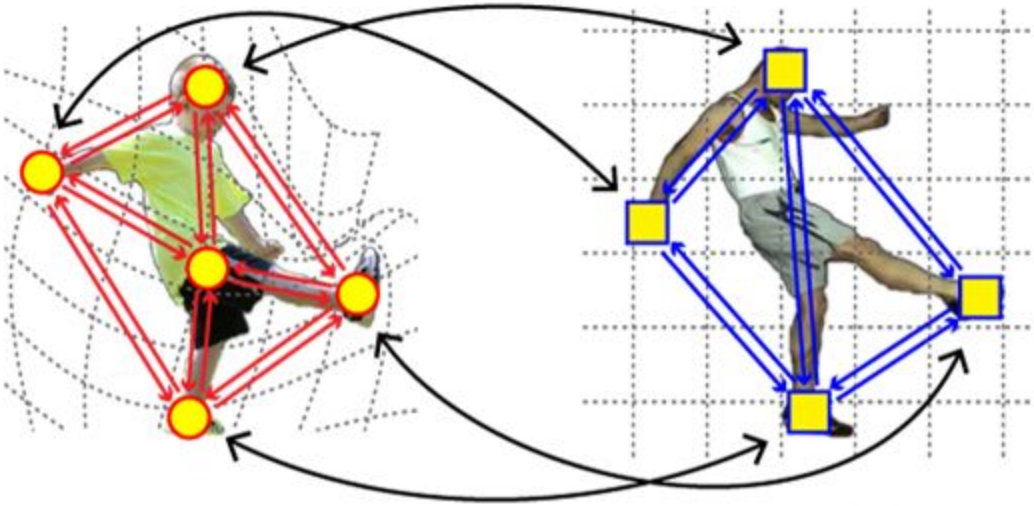
Aplicații

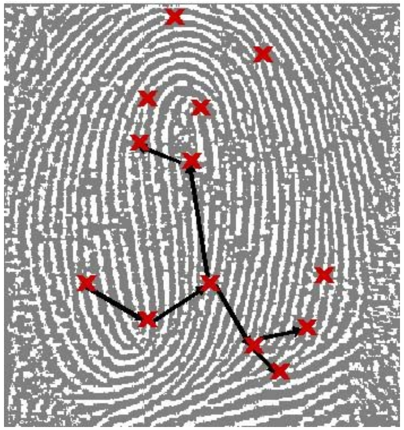
- Rețele de calculatoare

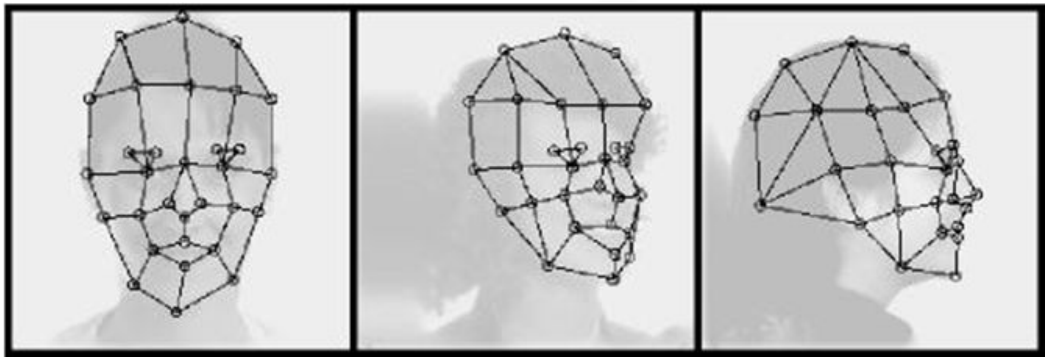


Aplicații

- Computer Vision

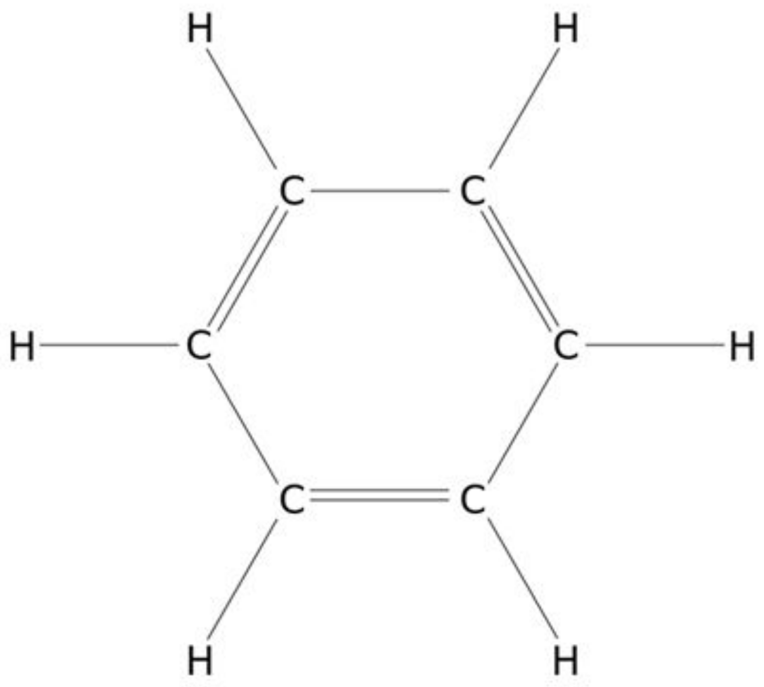






Aplicații

- Chimie



Aplicații

- Limbaje Formale, Tehnici de Compilare
- Optimizare
- Bioinformatică
- Baze de date
- Diverse jocuri (șah, Catan, StarCraft,...)

Motivație

- Domeniu fundamental
- Bază pentru alte cursuri
- Examen de licență
- Interviuri

Bibliografie

Bibliografie

- Dragoș-Radu Popescu, **Combinatorică şi teoria grafurilor**, Editura Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Bucureşti, 2005.
- Dragoș-Radu Popescu, R. Marinescu-Ghemeci, **Combinatorică şi teoria grafurilor prin exerciții și probleme**, Editura Matrixrom, 2014

Bibliografie

- Jon Kleinberg, Éva Tardos, **Algorithm Design**, Addison-Wesley 2005 http://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos/
- T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.R. Rivest – **Introducere in algoritmi**, MIT Press, trad. Computer Libris Agora

Bibliografie

- Douglas B. West, **Introduction to Graph Theory**, Prentice Hall 1996, 2001
- J.A. Bondy, U.S.R Murty – **Graph theory with applications**, The Macmillan Press 1976 / Springer 2008

Evaluare și Examen

Evaluare și Examen

- Laborator - 30 puncte:
  - Test la sfarsit de semestru
  - Se va lucra in C/C++. Lucrul OOP si cu folosirea elementelor din STL nu este obligatorie dar este încurajată.

Evaluare și Examen

- Laborator - 30 puncte:
  - Test la sfarsit de semestru
  - Se va lucra in C/C++. Lucrul OOP si cu folosirea elementelor din STL nu este obligatorie dar este încurajată.
- Examen scris - 60 puncte:
  - Teorie + Exercitii + Algoritmică

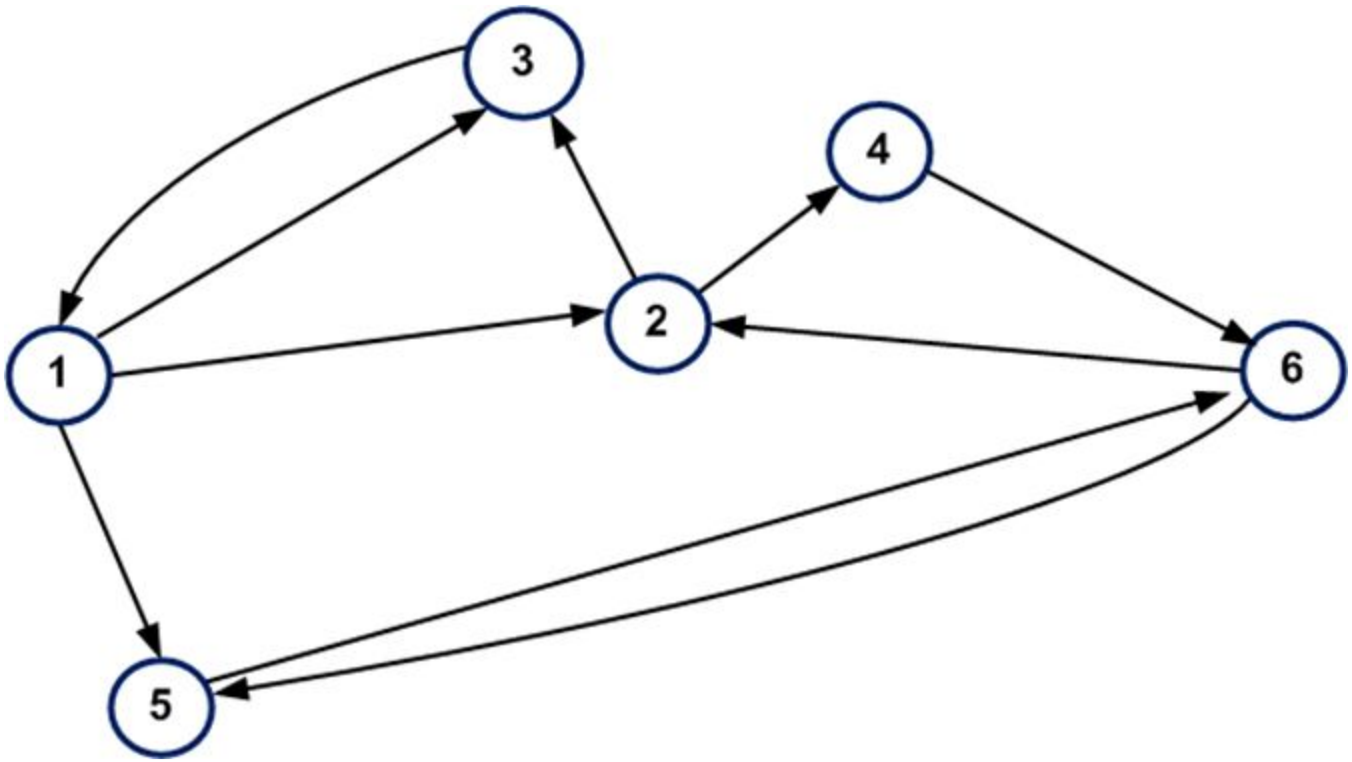
Evaluare și Examen

- Laborator - 30 puncte:
    - Test la sfarsit de semestru
    - Se va lucra in C/C++. Lucrul OOP si cu folosirea elementelor din STL nu este obligatorie dar este încurajată.
- Examen scris - 60 puncte:
    - Teorie + Exercitii + Algoritmică
- Seminar:
    - Înțelegerea mai bună a noțiunilor prezentate la curs; Exerciții;
    - BONUSURI!!!

Definiții & Noțiuni de bază

Graf orientat

Graf orientat



Graf orientat - definiții

Graf orientat - definiții

Graf orientat ”G” - pereche de mulțimi $G = (V, E)$;

- **V** - mulțimea vârfurilor (de obicei notate cu numere)
- **E ⊆ VxV** - mulțimea arcelor - mulțime de perechi <u>ordonate</u> (*n.e.* (2,5)≠(5,2))

$v \in V$ **- vârf;** $e=(u,v) \in E$; uv **- arc**

$u = e^-$ - **vârf iniţial / origine / extremitate iniţială**

$v = e^+$ - **vârf final / terminus / extremitate finală**

Graf orientat - Exemplu

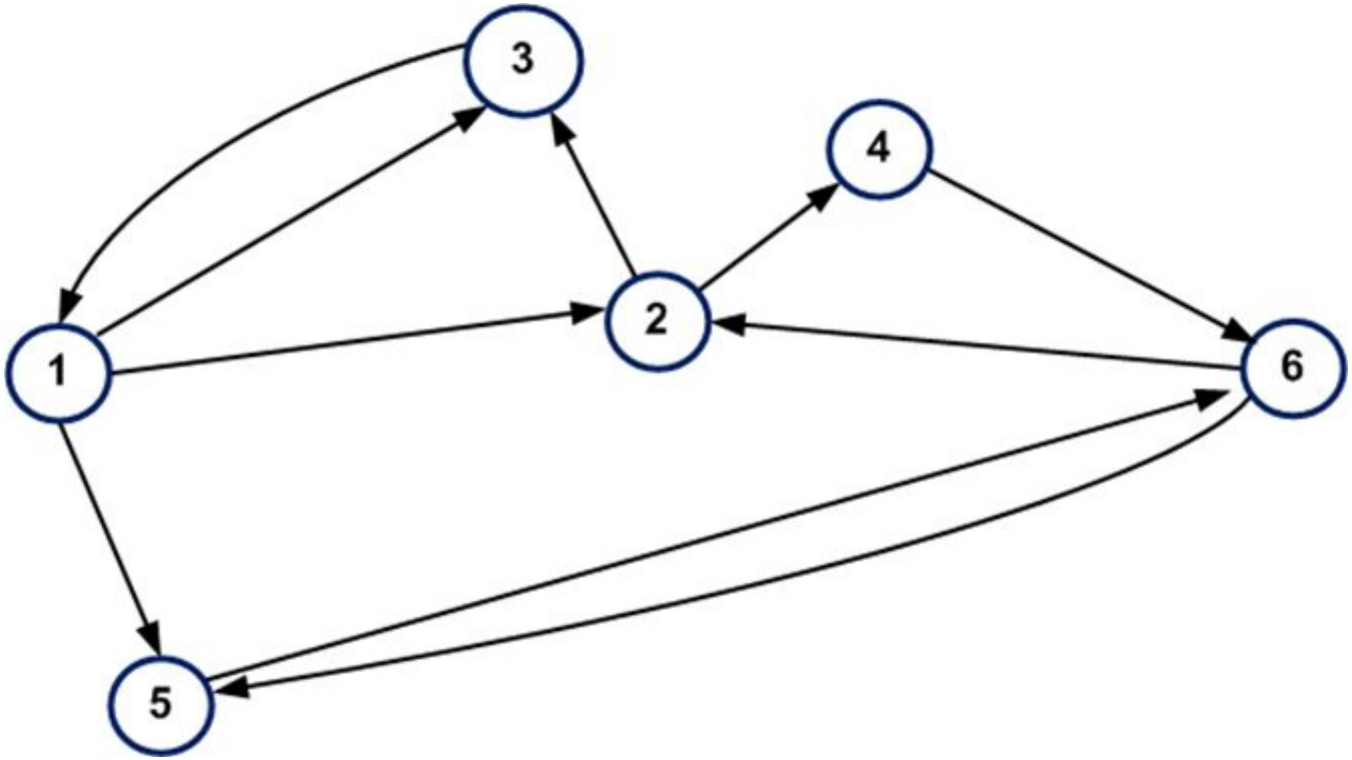
V={1,2,3,4,5,6}

E={(1,2);(1,3);(1,5);(2,3);(2,4);(3,1);(4,6);(5,6);(6,5)}

Graf orientat - Exemplu

V={1,2,3,4,5,6}

E={(1,2);(1,3);(1,5);(2,3);(2,4);(3,1);(4,6);(5,6);(6,5)}



Multiset

Multiset

Definiție:

- Fie S o mulţime (finită) nevidă
- **Multiset**
  - **Intuitiv: “mulțime” în care se pot repeta elementele**

Multiset

Definiție:

- Fie S o mulţime (finită) nevidă
- **Formal:**
    - Mai exact, un multiset este format dintr-o mulțime S căreia i se atașează un ordin de multiplicitate pentru fiecare element al lui S
    - Multitestul $M=(S,r)$, unde $\mathbf{r : S} \to \mathbb{N}$ este funcția de multiplicitate

Multiset

Definiție:

- Fie S o mulţime (finită) nevidă
- **Formal:**
  - Mai exact, un multiset este format dintr-o mulțime S căreia i se atașează un ordin de multiplicitate pentru fiecare element al lui S
  - Multitestul $M=(S,r)$, unde $\mathbf{r : S}\rightarrow\mathbb{N}$ este funcția de multiplicitate
  - Notație: $R=(x^{r(x)} \mid x\in S)$

Multiset

- **Exemplu**
  - $S=\{2,3,5,7\}$
  - $R= \{2^3,3,5^2,7^4\}$
  - $|R|= 10$ (suma multiplicităților)

Graf orientat (revenire)

G=(V,E)

- $d_G^-(u)$ - gradul interior

$$d_G^-(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate finala pentru } e\}|$$

- $d_G^+(u)$ - gradul exterior

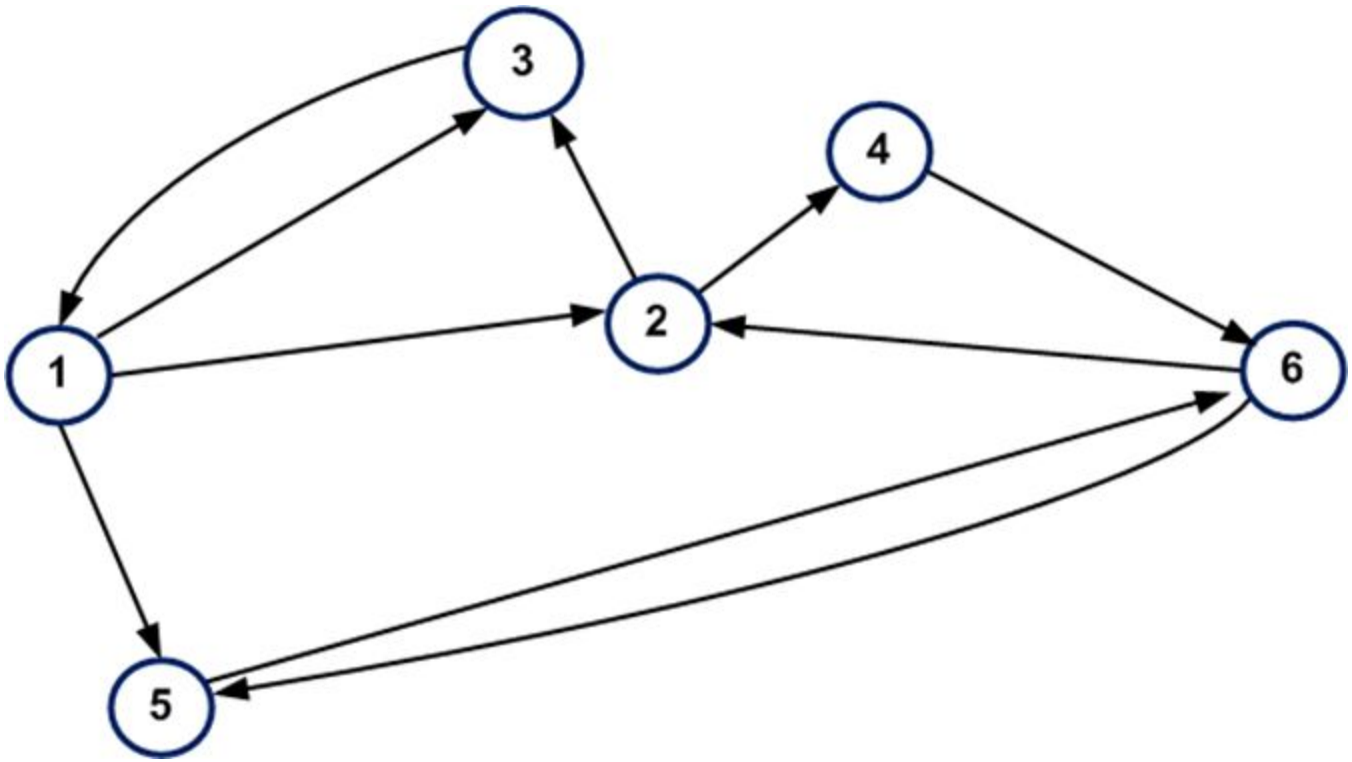
$$d_G^+(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate initiala pentru } e\}|$$

- $d_G(u)$ - grad

$$d_G(u) = d_G^+(u) + d_G^-(u)$$

Graf orientat - grade

Exemplu



Graf orientat - grade

Are loc relația:

$$\sum_{u \in V} d_G^-(u) =$$

Graf orientat - grade

Are loc relația:

$$\sum_{u \in V} d_G^-(u) = \sum_{u \in V} d_G^+(u) =$$

Graf orientat - grade

Are loc relația:

$$\sum_{u \in V} d_G^-(u) = \sum_{u \in V} d_G^+(u) = |E|$$

Graf orientat - grade

Fie **G=(V,E)**; **V={v_1,v_2,...v_n}**

- Multisetul gradelor interioare:

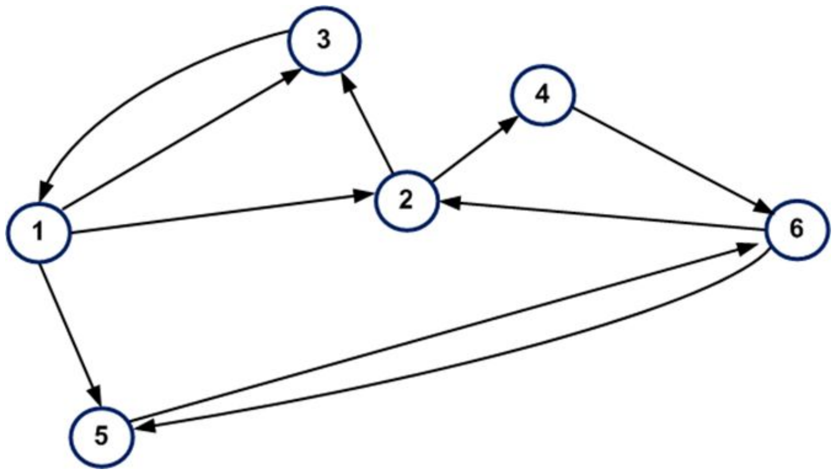
$$s^-(G) = \{d_G^-(v_1), \ldots, d_G^-(v_n)\}$$

- Multisetul gradelor exterioare:

$$s^+(G) = \{d_G^+(v_1), \ldots, d_G^+(v_n)\}$$

Graf orientat - grade

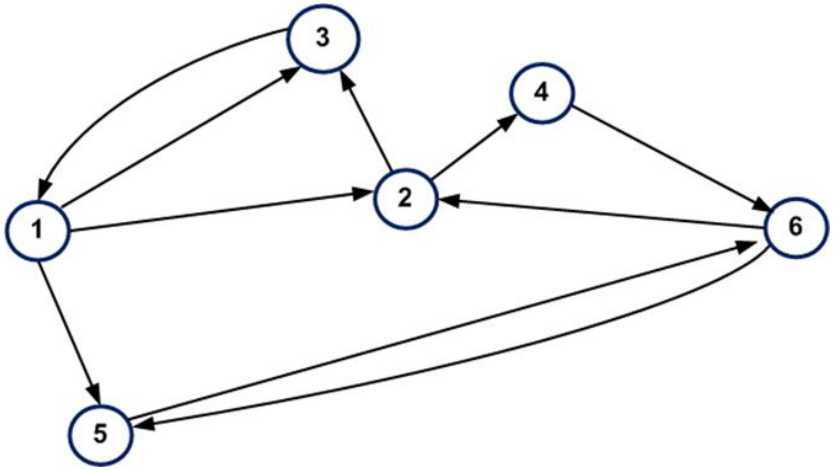
Exemplu



$s^{-}(G)=$

Graf orientat - grade

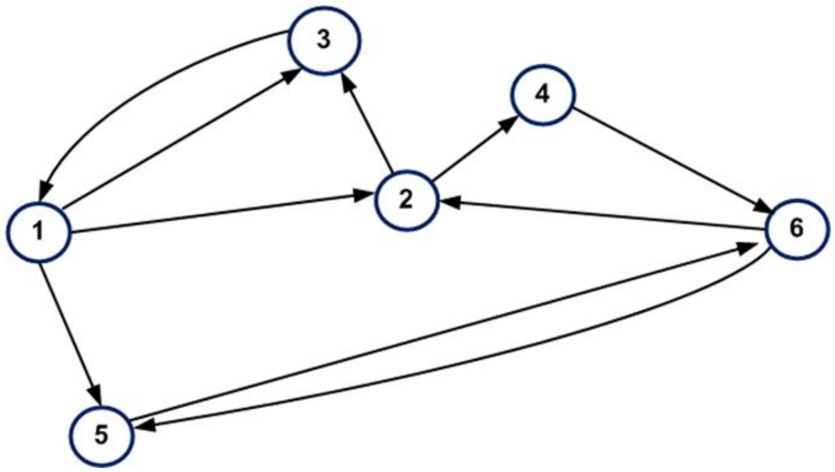
Exemplu



$s^-(G)=\{1,$

Graf orientat - grade

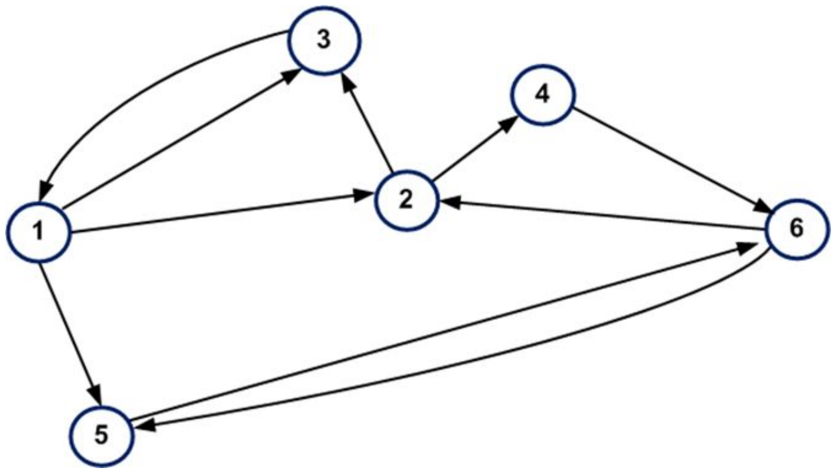
Exemplu



$s^{-}(G)=\{1,2,$

Graf orientat - grade

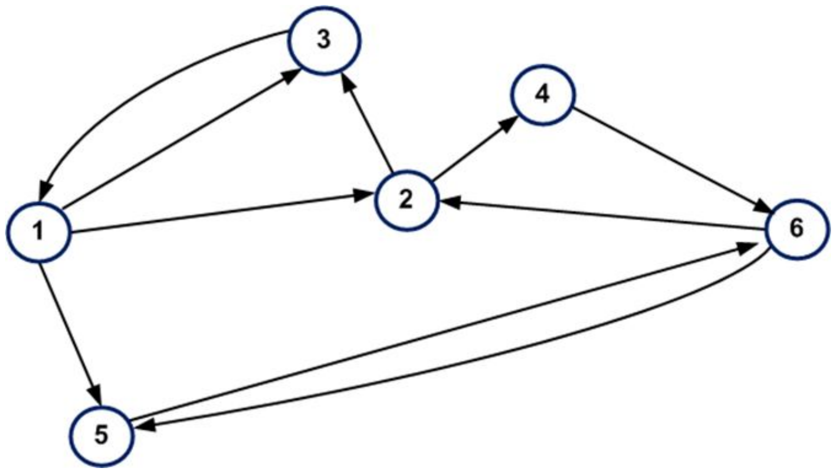
Exemplu



$s^-(G)=\{1,2,2,1,2,2\}=$

Graf orientat - grade

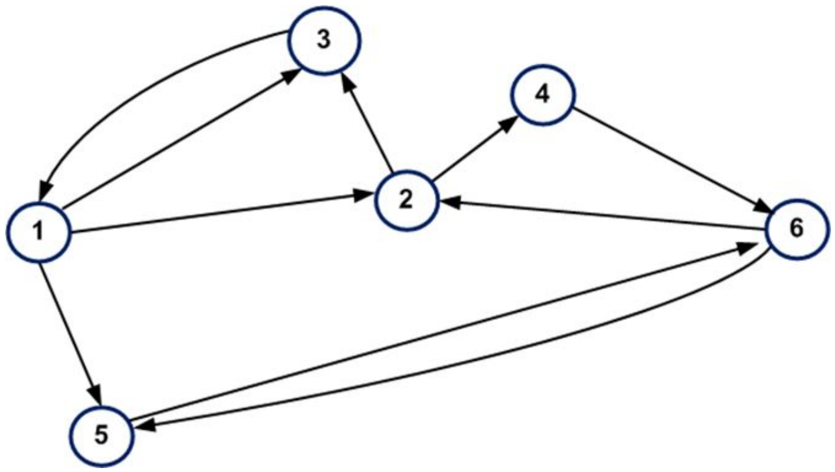
Exemplu



$s^{-}(G)=\{1,2,2,1,2,2\}=\{1^2,2^4\};$

Graf orientat - grade

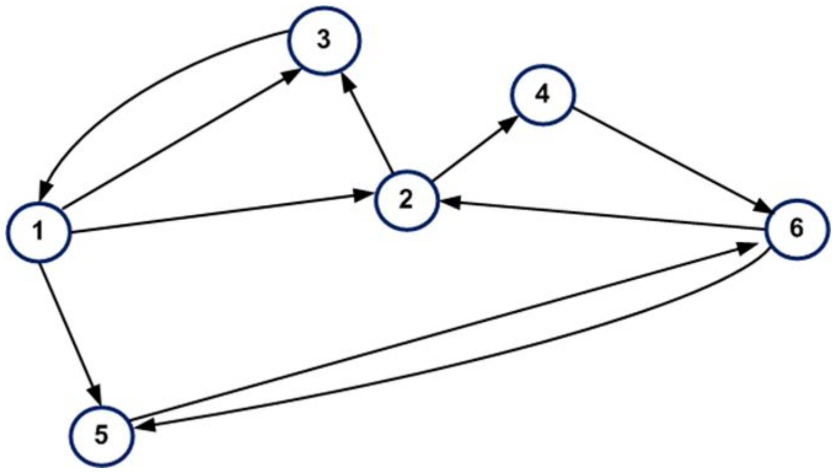
Exemplu



$s^+(G)=$

Graf orientat - grade

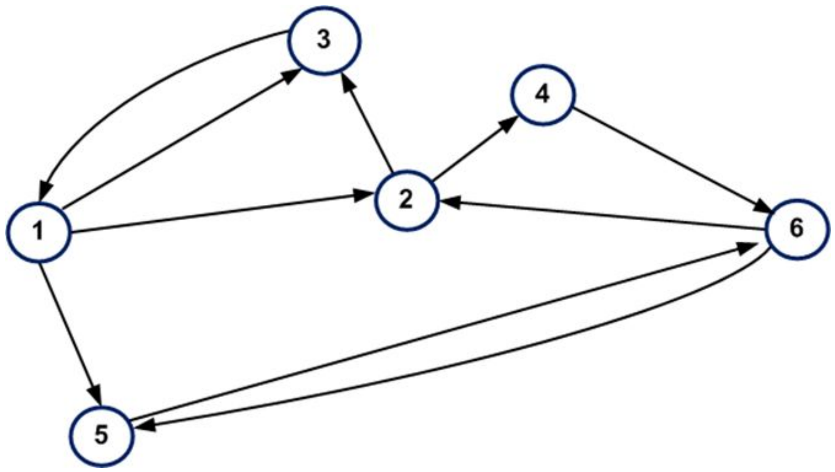
Exemplu



$s^{+}(G)=\{3$

Graf orientat - grade

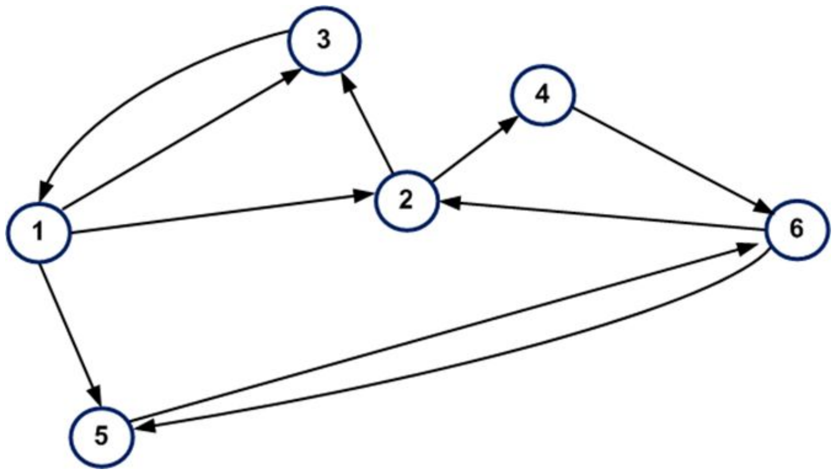
Exemplu



$s^+(G)=\{3,2,$

Graf orientat - grade

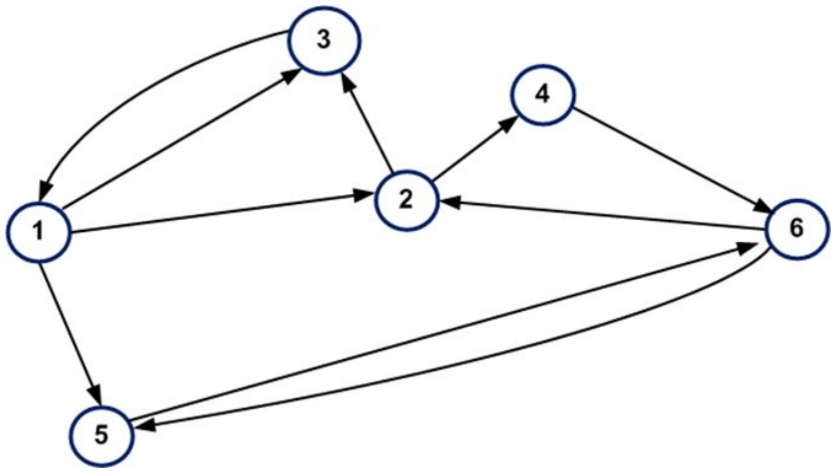
Exemplu



$s^+(G)=\{3,2,1,1,1,2\}=$

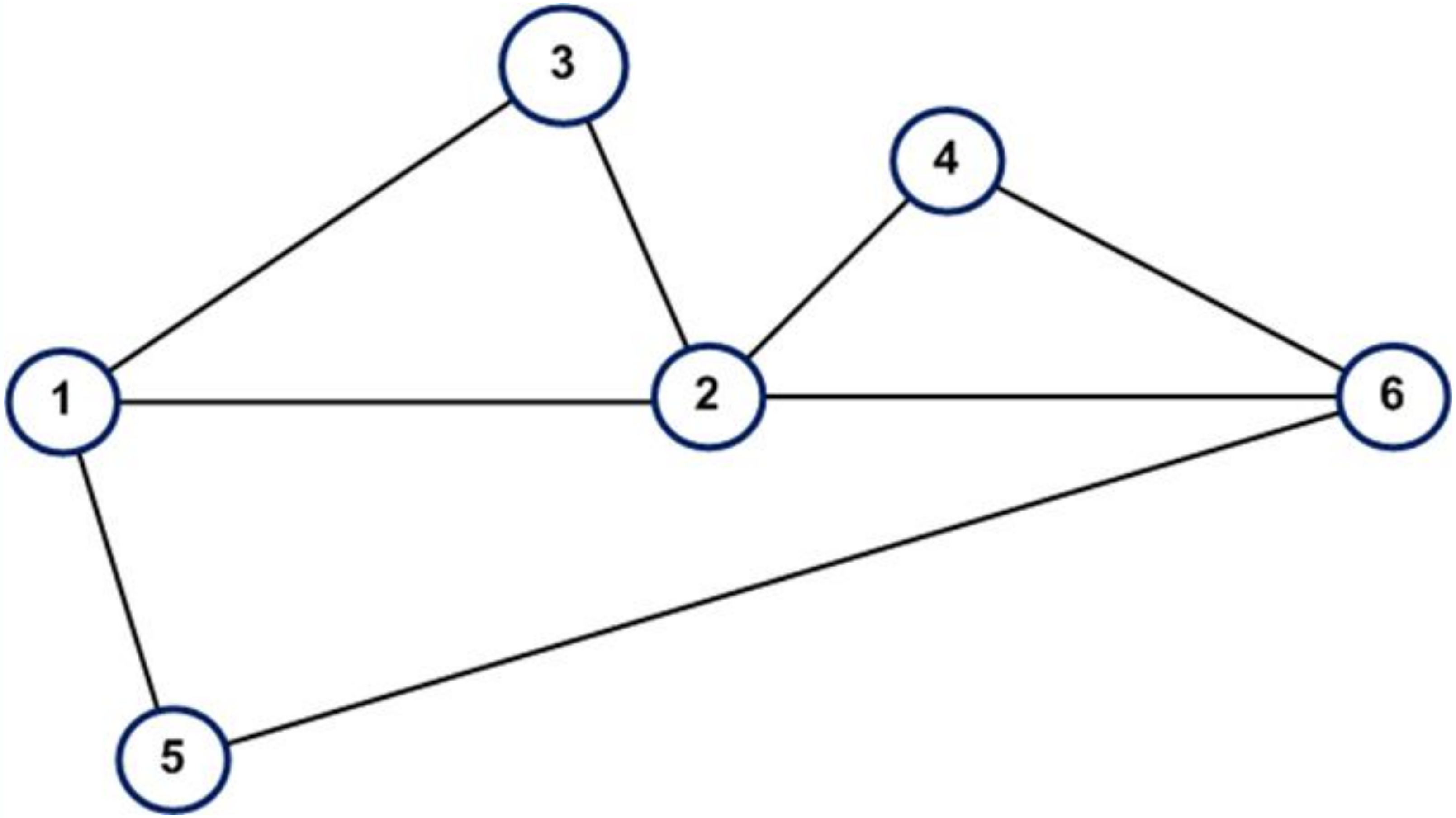
Graf orientat - grade

Exemplu



$s^{+}(G)=\{3,2,1,1,1,2\}=\{1^{3},2^{2},3\};$

Graf neorientat



Graf neorientat - definiții

Graf orientat "G" - pereche de mulțimi G = (V, E);

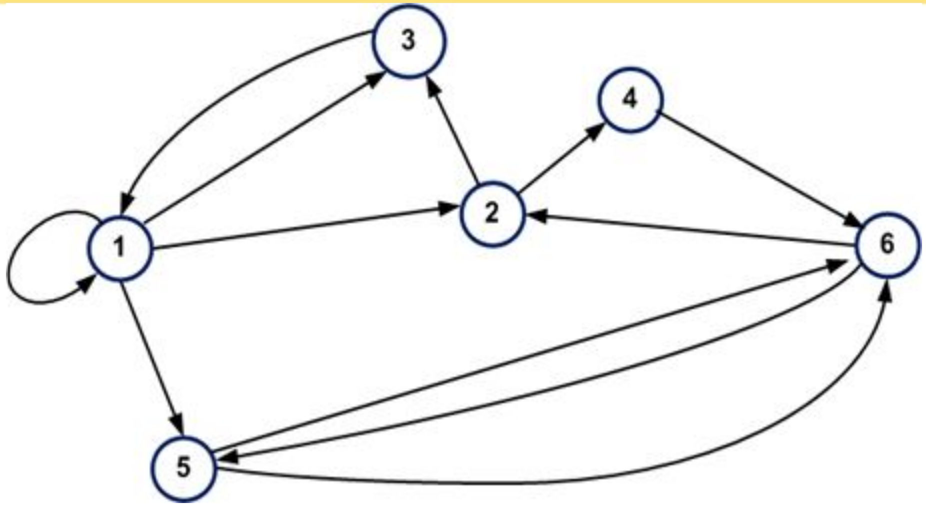
- **V** - mulțimea *nodurilor*
- **E ⊆ VxV -** mulțimea muchiilor- mulțime de perechi neordonate (*n.e.* (2,5)=(5,2))

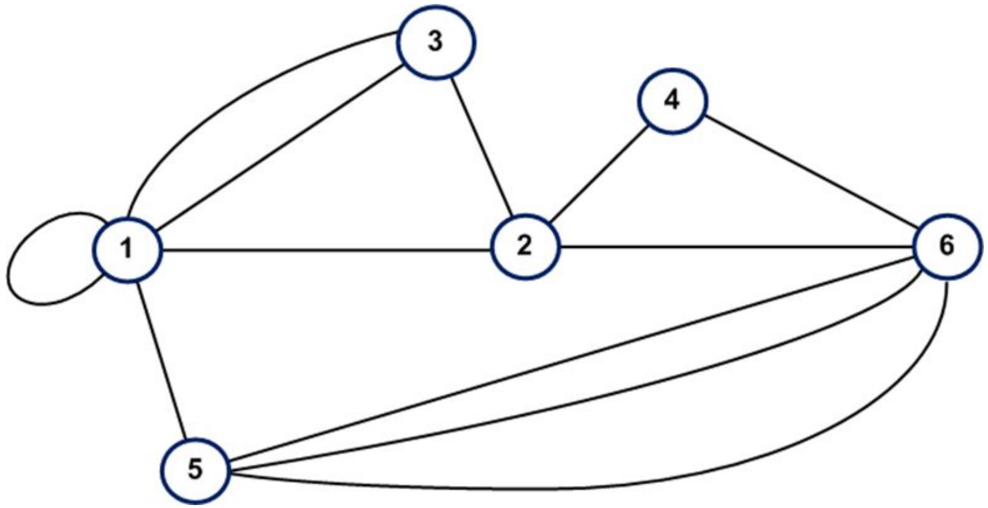
v∈V **- nod;** e=(u,v)∈E; uv **- muchie**

u, v **- capete / extremități**

$\mathbf{d_G}(\boldsymbol{u})\mathbf{=|\{}\boldsymbol{e}\in E|\ u$ este unul dintre capetele lui $e\mathbf{\}|}$

Multigraf orientat/neorientat





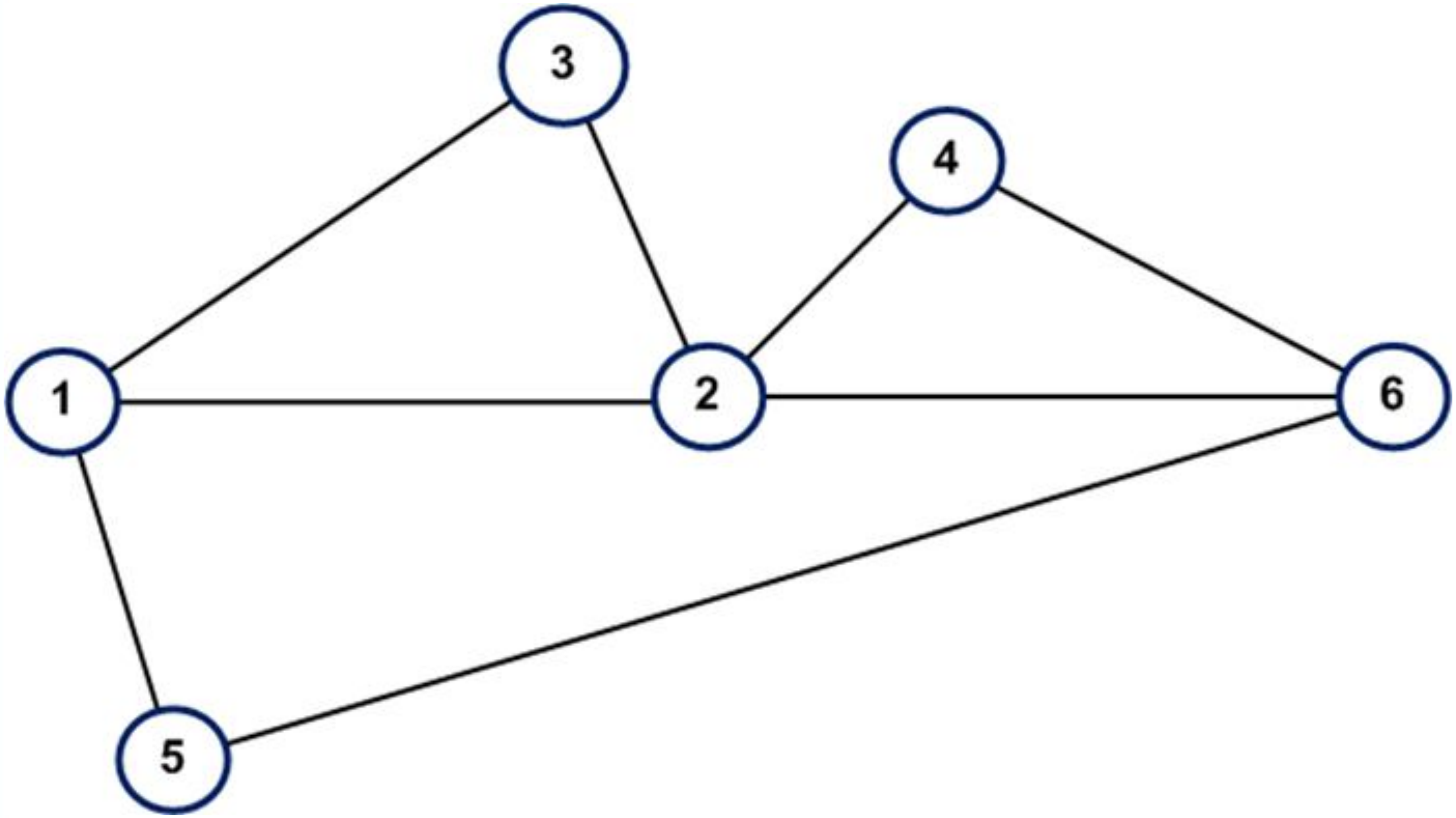
Multigraf - definiții

Graf orientat ”G” - pereche de mulțimi G = (V, E, r);

- **r(e)** - multiplicitatea muchiei **e**
  - dacă e=(v,v) - **buclă**
  - dacă r(e)>1 - **muchie multiplă**

$$\begin{aligned} d_G(u) = &\,|\{e \in E \mid e \text{ nu este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}| + \\ &2 \cdot |\{e \in E \mid e \text{ este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}| + \end{aligned}$$

Adiacență, incidență



Adiacență, incidență

Graf neorientat - **G=(V,E)**

- *u,v*∈V sunt noduri **<u>adiacente</u>**, dacă *(u,v)*∈E
- Altfel spus, *u* este **<u>vecin</u>** al lui *v*

<u>Notație:</u>

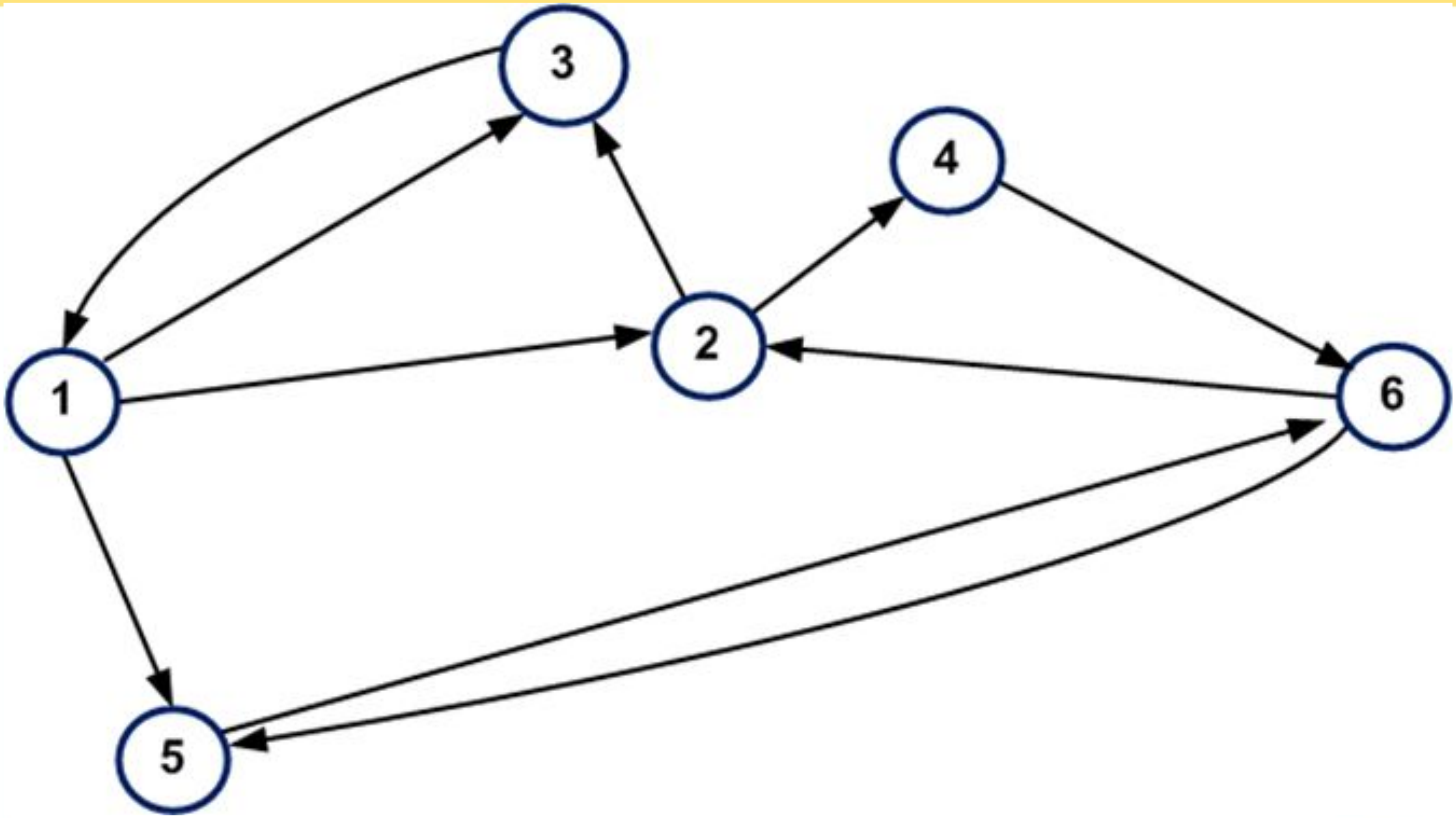
N_G(*u*) - mulțimea vecinilor lui *u*

Adiacență, incidență

Graf neorientat - **G=(V,E)**

- O muchie *e* este **incidentă** cu un nod *u*, dacă acesta este o extremitate de a sa
- Două muchii, *e* și *f* sunt **adiacente** dacă există un nod *v* care este extremitate pentru ambele muchii.

Drumuri, circuite



Drumuri, circuite

- **Drum**
- **Drum simplu**
- **Drum elementar**
- **Circuit + simplu/elementar**
- **Lungimea unui drum**
- **Distanță între două vârfuri**

Drumuri, circuite

Graf orientat- **G=(V,E)**

- Un **drum** *P* este o secvență de vârfuri $P=[v_1,v_2,\ldots,v_k]$ unde
  - $v_1,v_2,\ldots,v_k \in V$
  - $(v_i,v_{i+1}) \in E,\ \forall i \in \{1,\ldots,k-1\}$

Drumuri, circuite

Graf orientat- **G=(V,E)**

- Un **drum** *P* este o secvență de vârfuri *P*=[v_1,v_2,...,v_k] unde
  - $v_1,v_2,...,v_k \in V$
  - $(v_i,v_{i+1}) \in E$, $\forall i \in \{1,...,k-1\}$

- Un **lanț** *L* este o secvență de vârfuri *L*=[v_1,v_2,...,v_k] unde
  - $v_1,v_2,...,v_k \in V$
  - $(v_i,v_{i+1}) \in E$ sau $(v_{i+1},v_i) \in E$, $\forall i \in \{1,...,k-1\}$

Drumuri, circuite

Graf orientat- **G=(V,E)**

- Un **<u>drum</u>** *P* este o secvență de vârfuri $P=[v_1,v_2,...,v_k]$ unde
  - $v_1,v_2,...,v_k \in V$
  - $(v_i,v_{i+1}) \in E,\ \forall i \in \{1,...,k-1\}$

- Un **<u>lanț</u>** *L* este o secvență de vârfuri $L=[v_1,v_2,...,v_k]$ unde
  - $v_1,v_2,...,v_k \in V$
  - $(v_i,v_{i+1}) \in E$ sau $(v_{i+1},v_i) \in E,\ \forall i \in \{1,...,k-1\}$

OBS: In cazul grafuriler neorientate cele două noțiuni sunt echivalente

Drumuri, circuite

Graf orientat- **G=(V,E)** și *P*=[v_1,v_2,...,v_k] un drum în G

- *P* este **drum simplu** dacă nu conține un arc de mai multe ori ((v_i,v_{i+1})≠(v_j,v_{j+1}) ∀ i≠j)
- *P* este **drum elementar** dacă nu conține un vârf de mai multe ori (v_i≠v_j , ∀ i≠j)

Lungimea lui *P* este k-1 și este numărul de arce din alcătuirea lanțului

Un lanț (drum) cu extremitățile v_1, v_k se numește **v_1-v_k lanț** (drum)

Drumuri, circuite

Distanța dintre două vârfuri *u* și *v* este definită astfel:

$$d_G(u,v) = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{ daca } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \\ \infty, \text{ daca nu exista } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G} \\ \mathbf{min}\{l(P) \mid P \text{ este } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\}, \text{ altfel} \end{cases}$$

Drumuri, circuite

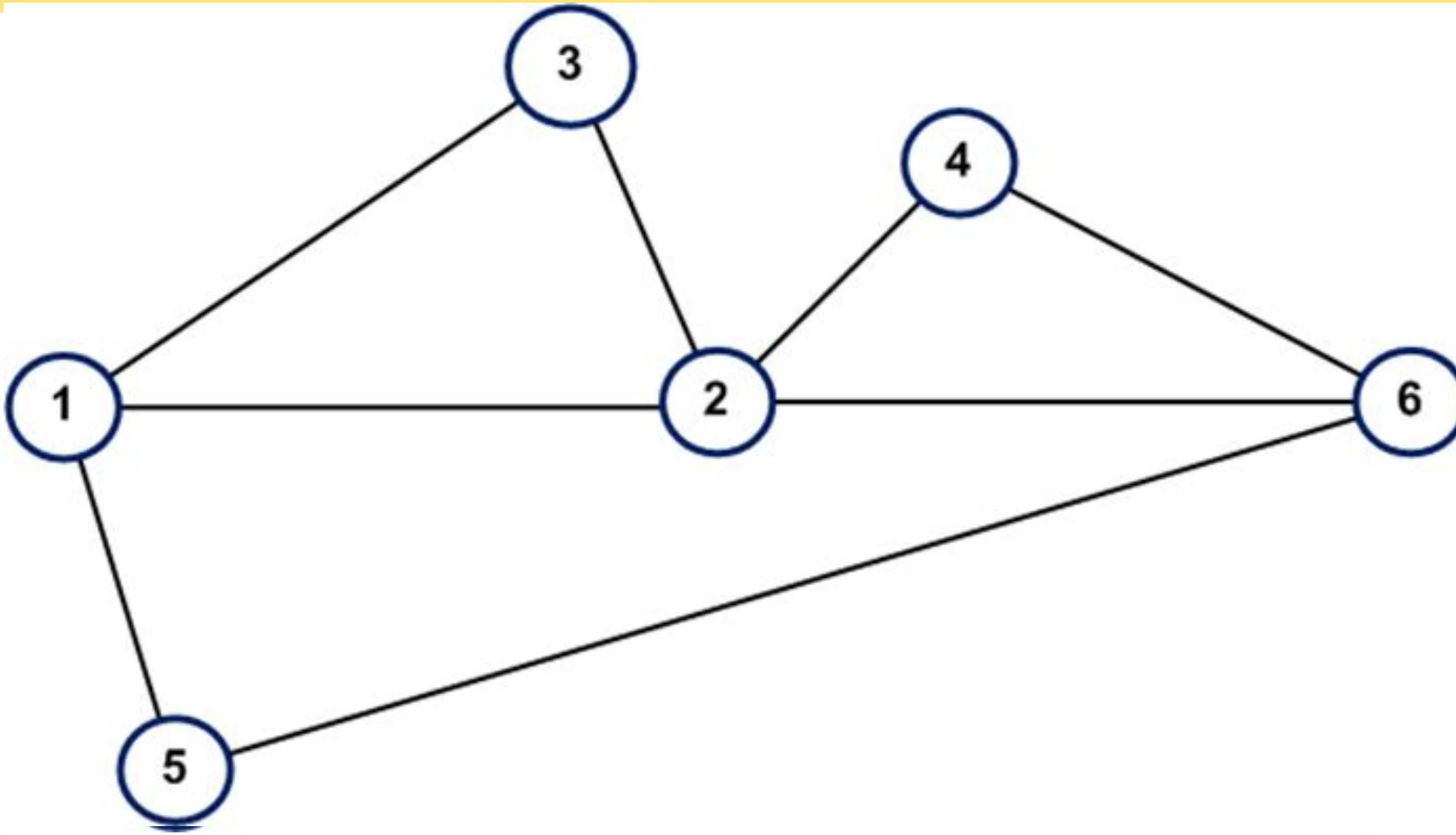
Graf orientat- **G=(V,E)**

Un circuit este un drum cu capetele identice

$C=[v_1,v_2,\ldots,v_k,v_1]$ un drum în G

- **Circuit elementar** - un ciclu in care nu se repetă vârfurile

Lanțuri, cicluri



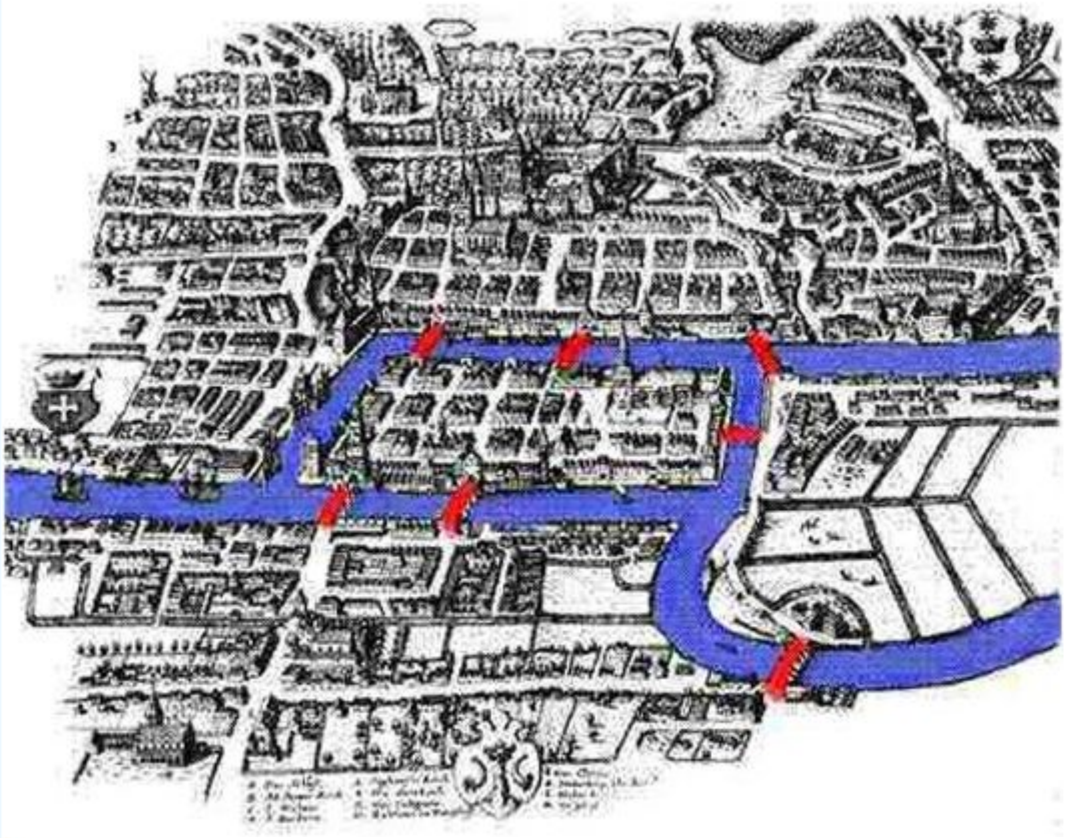
Lanțuri, cicluri

Graf **ne**orientat- **G=(V,E) -** noțiuni similare

- Un **lanț** este o secvență P de vârfuri cu proprietatea că oricare două vârfuri consecutive sunt adiacente
- $P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$
- **lanț simplu / lanț elementar / lungime**
- **ciclu / ciclu elementar**
- **distanță / lanț minim**

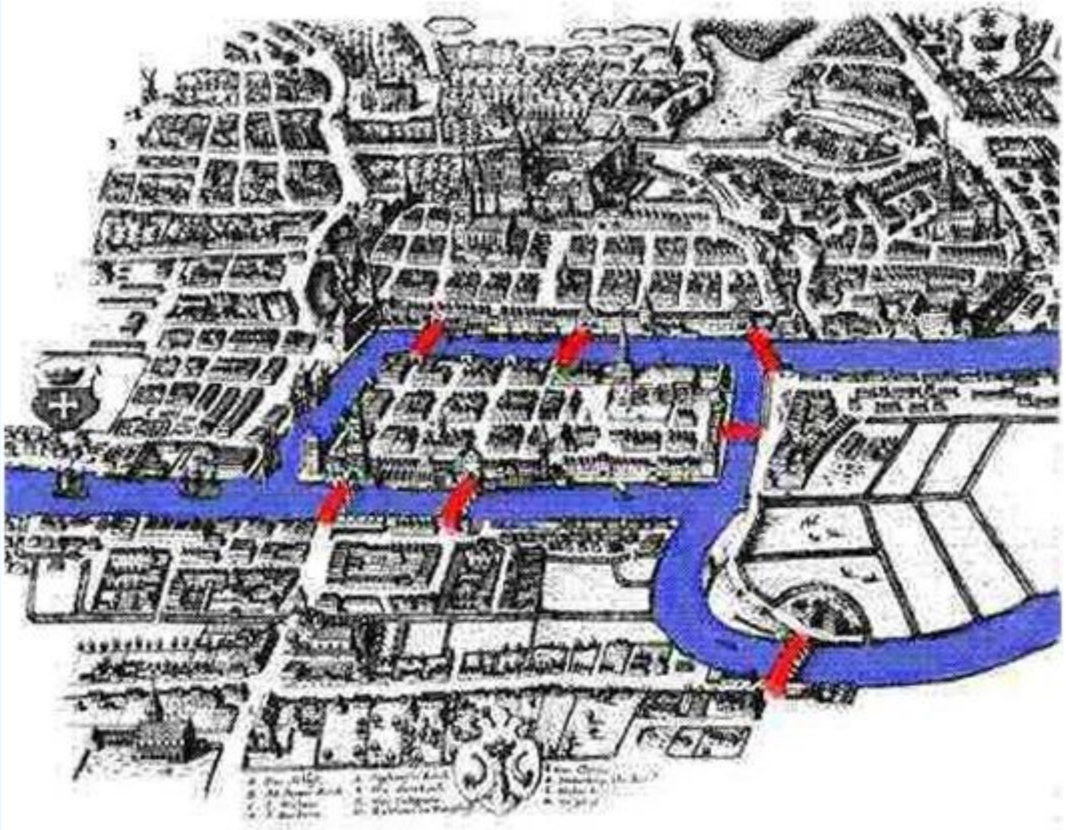
Istoric, Aplicații

Cele 7 poduri din Königsberg



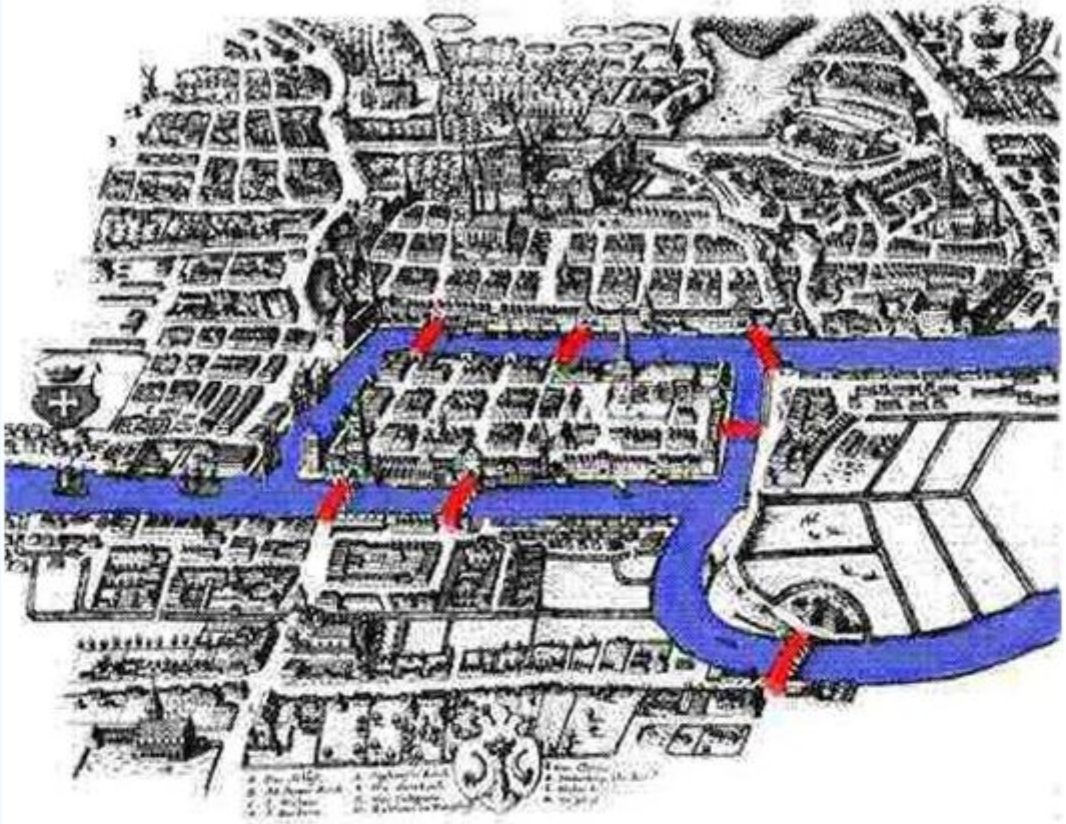
Orașul Köningsberg, aflat pe râul Pragel

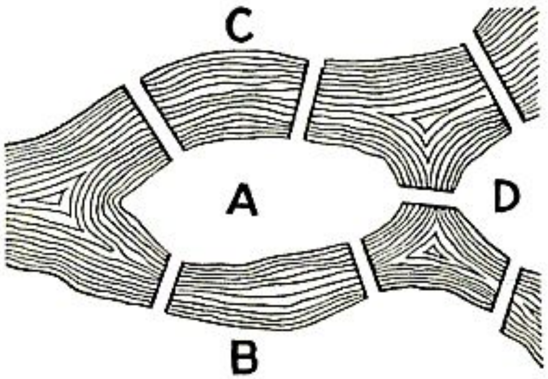
Cele 7 poduri din Königsberg

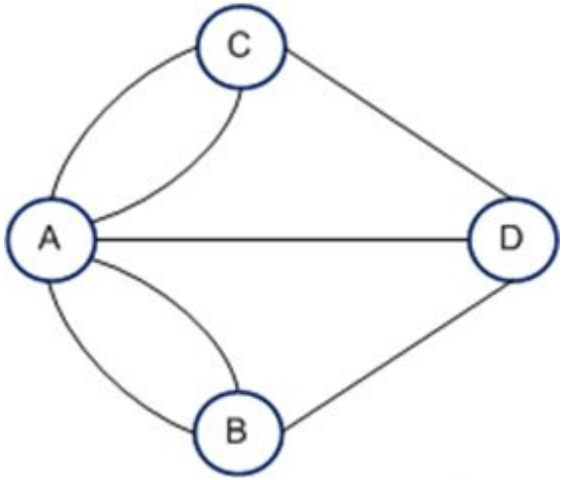


Este posibil ca un om să facă o plimbare în care să treacă pe toate cele 7 poduri o singură dată?

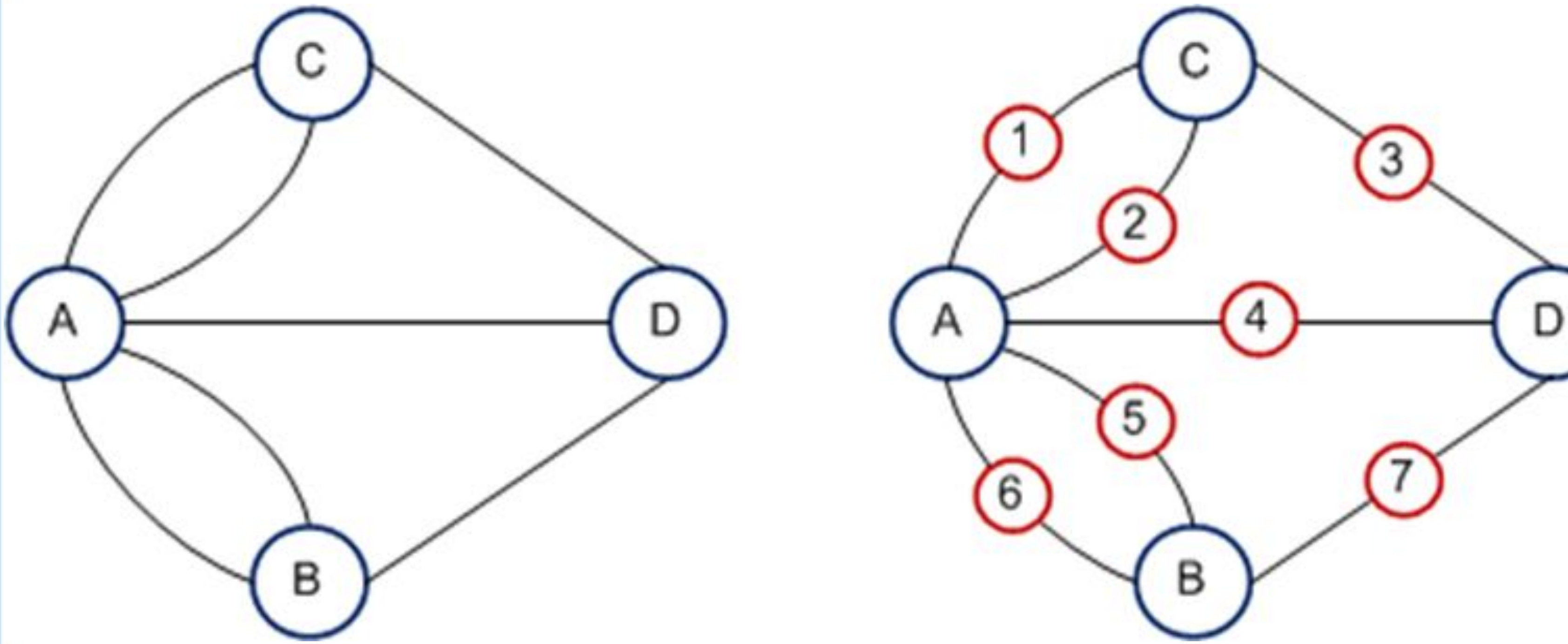
Cele 7 poduri din Königsberg



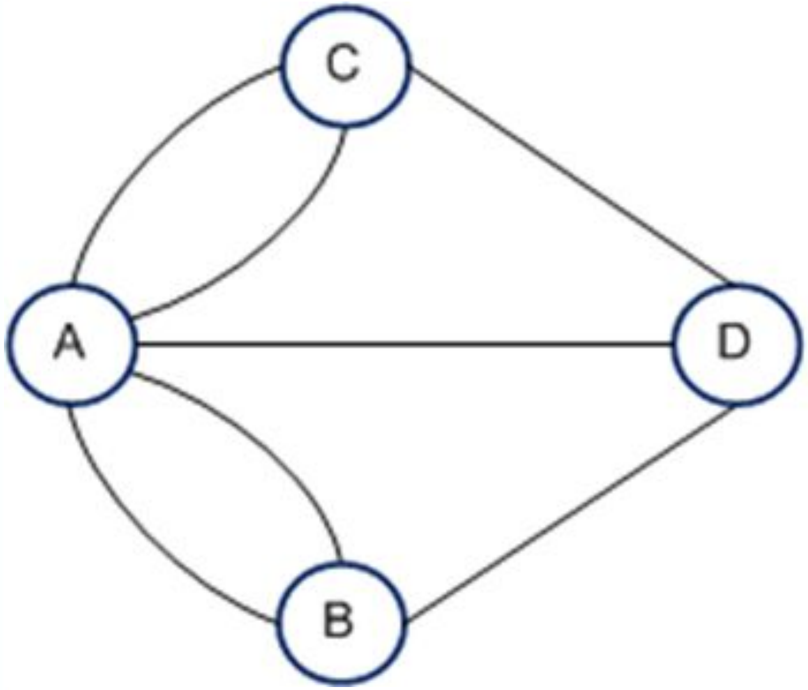




Cele 7 poduri din Königsberg



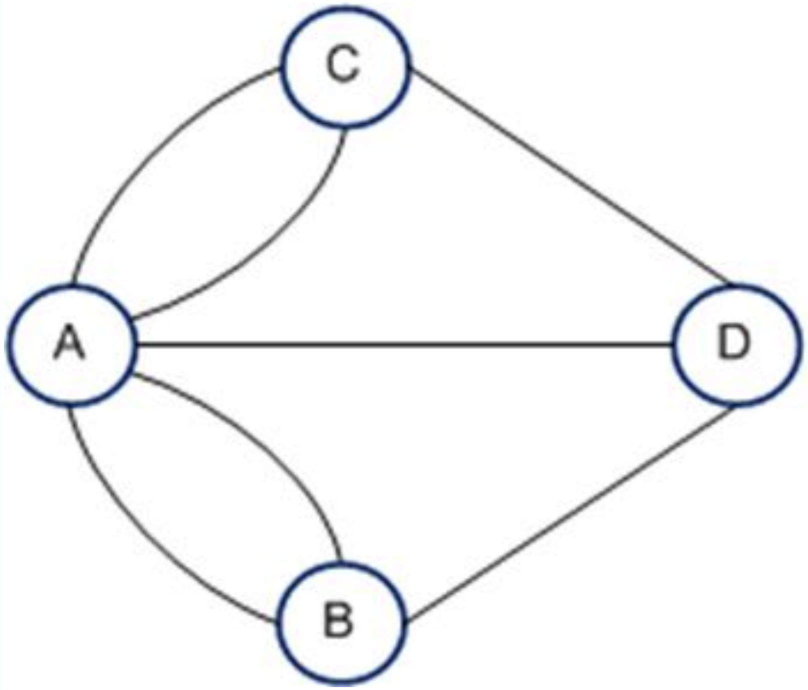
Cele 7 poduri din Königsberg



1736 - Leonhard Euler

Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis

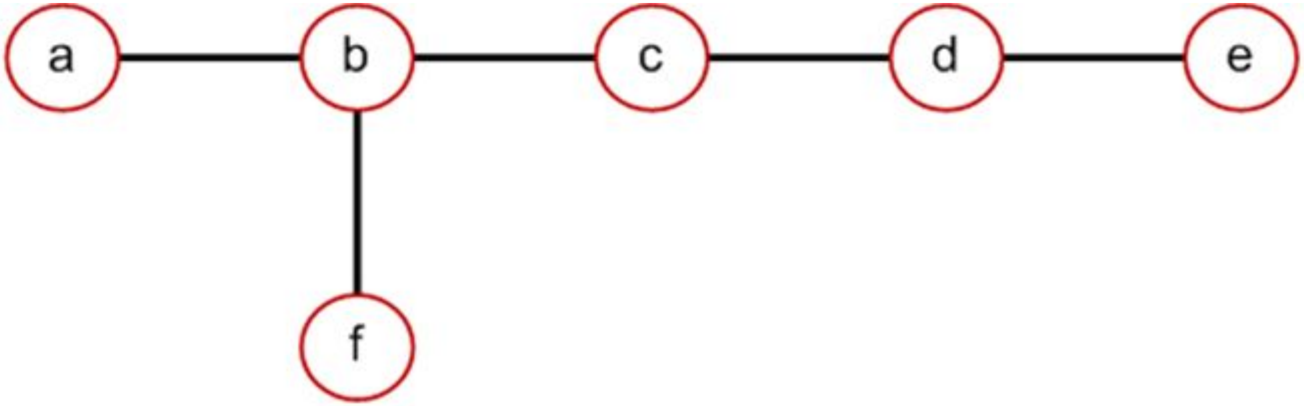
Cele 7 poduri din Königsberg

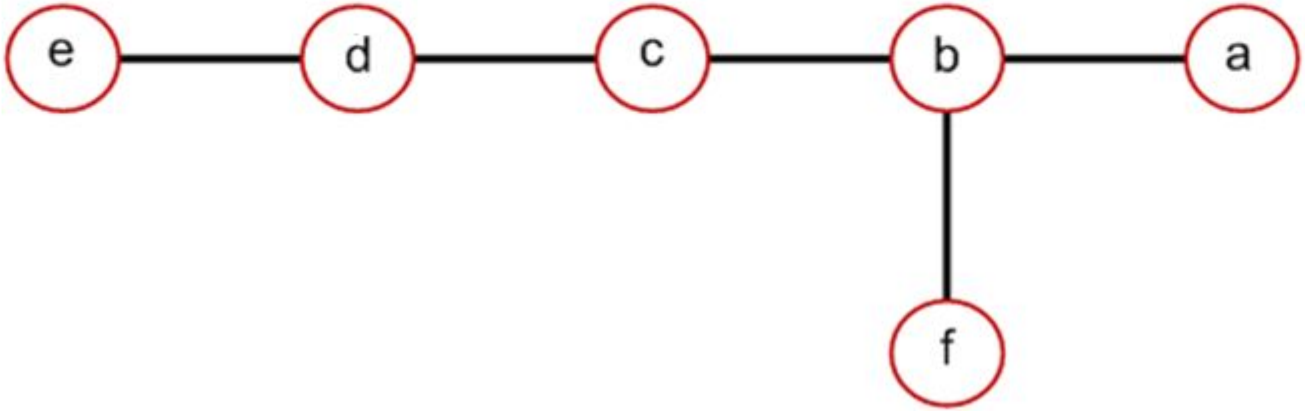


Lanț Eulerian / Ciclu Eulerian

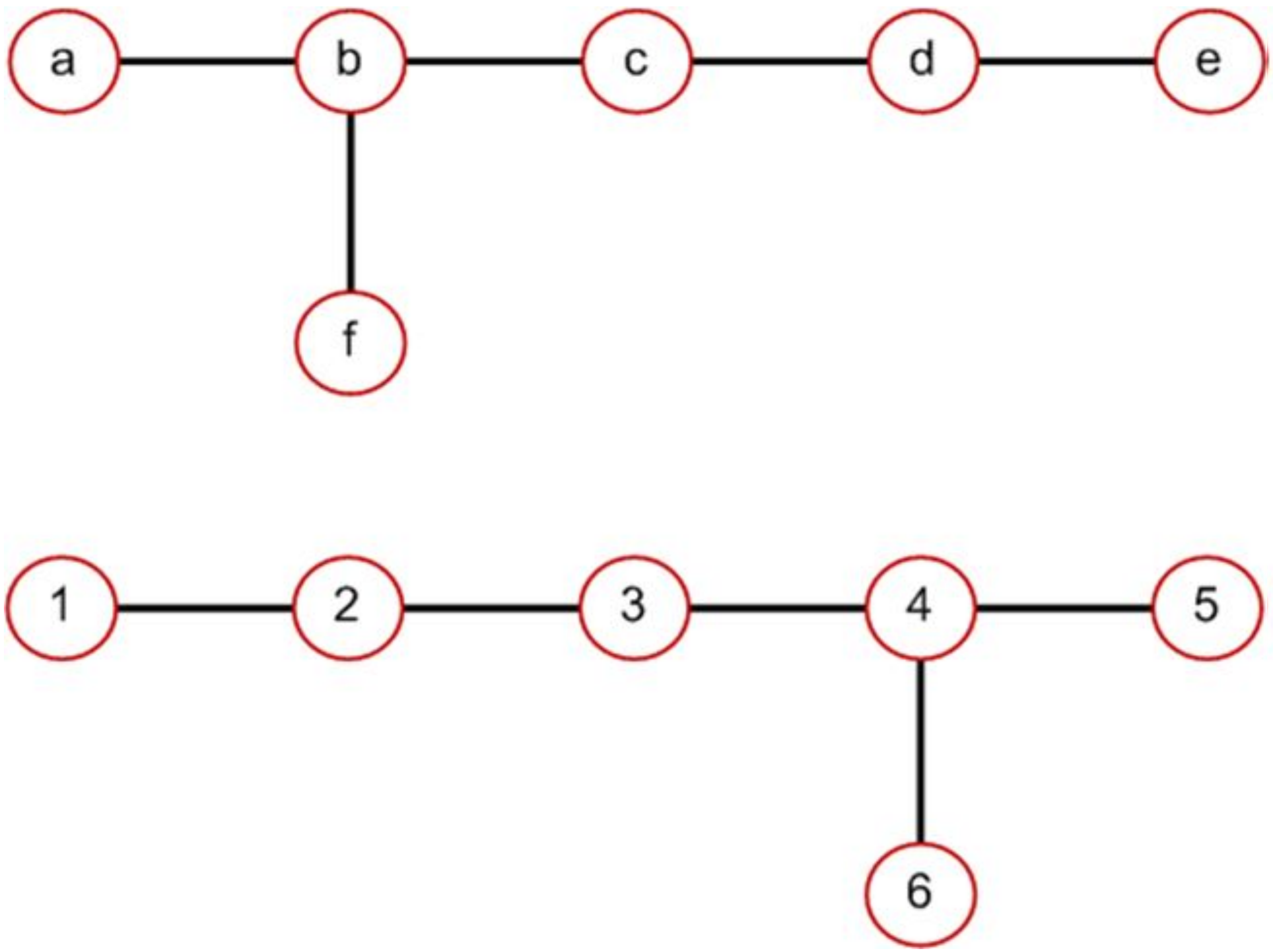
Egalitate, Izomorfism

Egalitate

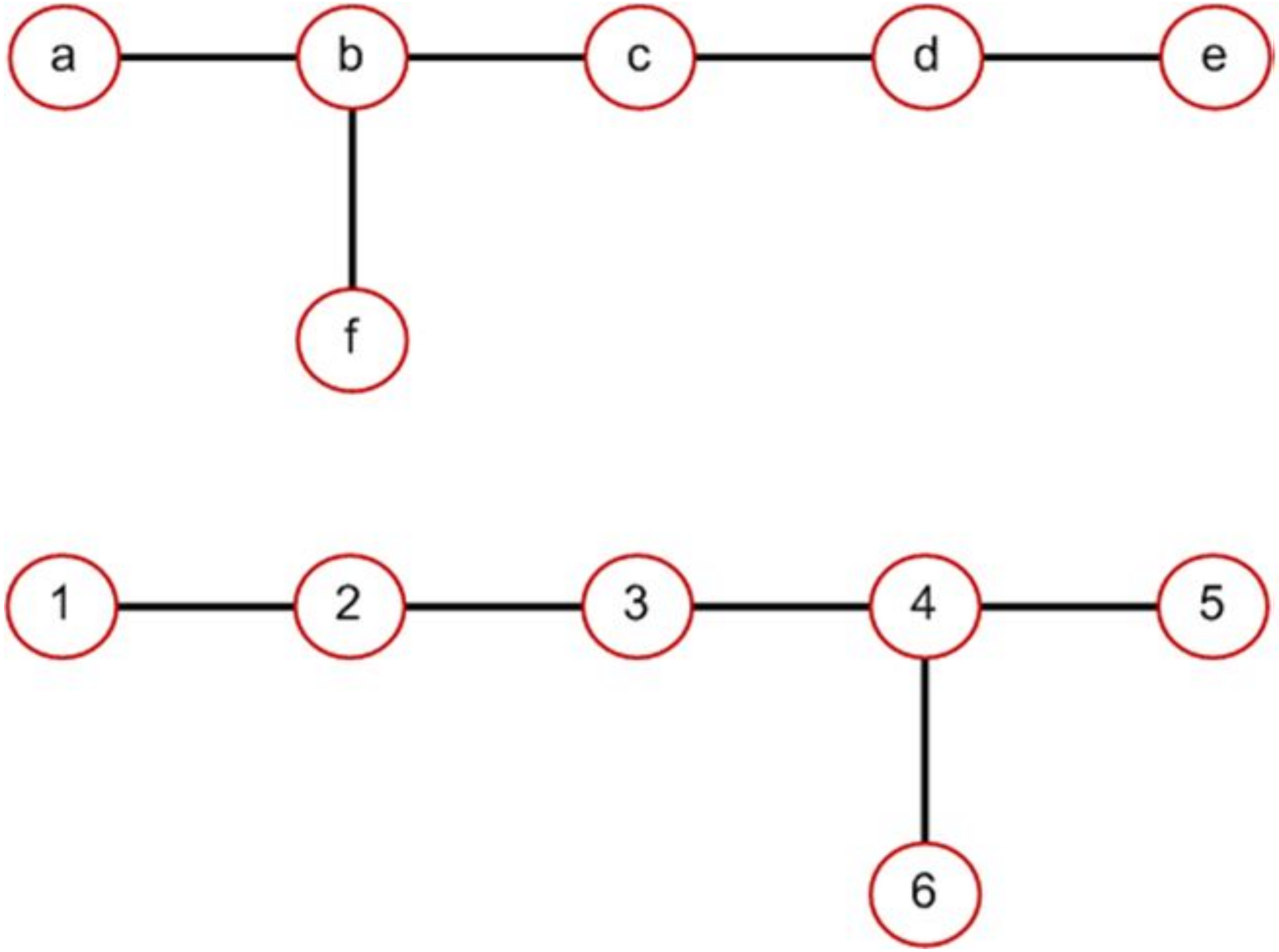




Egalitate?



Izomorfe!



Izomorfism

Fie G_1, G_2 două grafuri

- $G_1 = (V_1, E_1)$,
- $G_2 = (V_2, E_2)$

Grafurile G_1 și G_2 sunt **izomorfe** ($\mathbf{G_1 \sim G_2}$) $\Leftrightarrow$

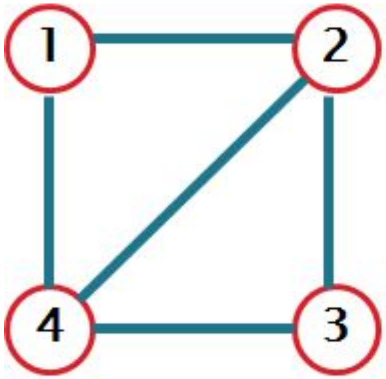
există $f : V_1 \rightarrow V_2$ bijectivă cu

$$\mathbf{uv \in E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2}$$

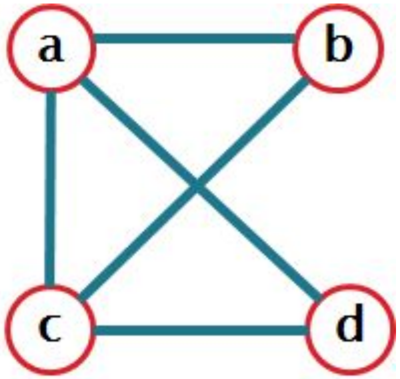
pentru orice $u,v \in V_1$

(f conservă adiacența și neadiacența)

Izomorfism



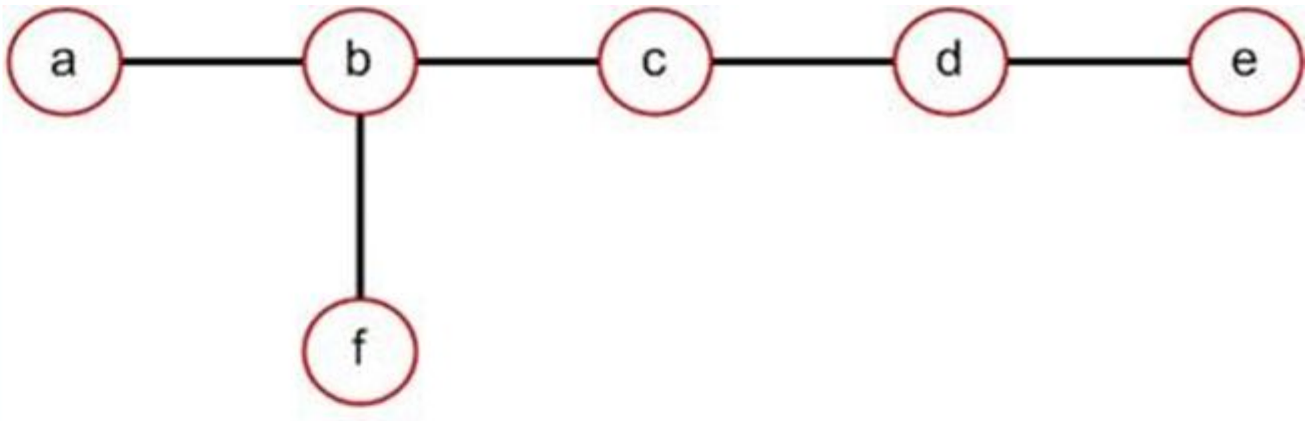
$\sim$

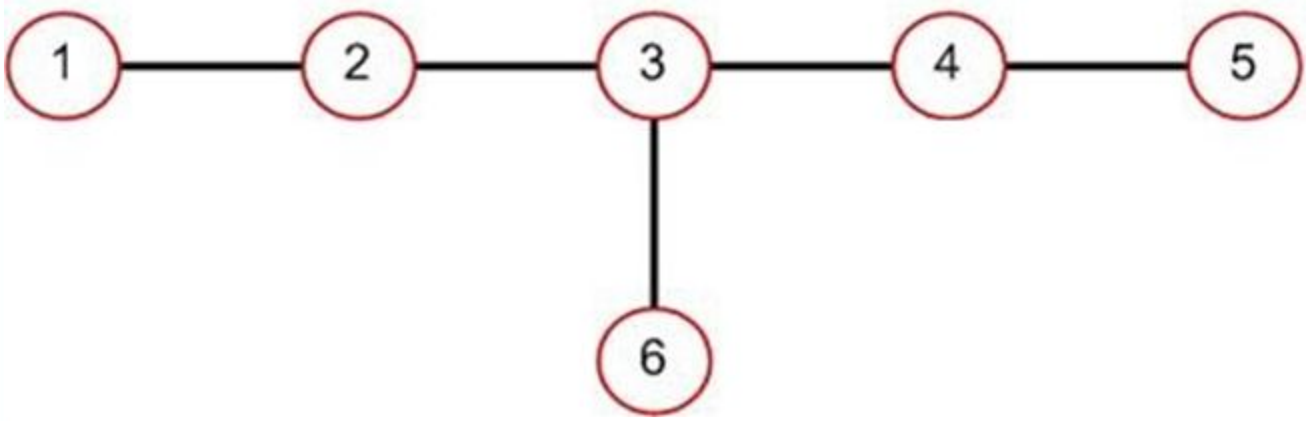


$$G_1 \sim G_2 \Rightarrow s(G_1) = s(G_2)$$

$$s(G_1) = s(G_2) \Rightarrow G_1 \sim G_2 \ ?$$

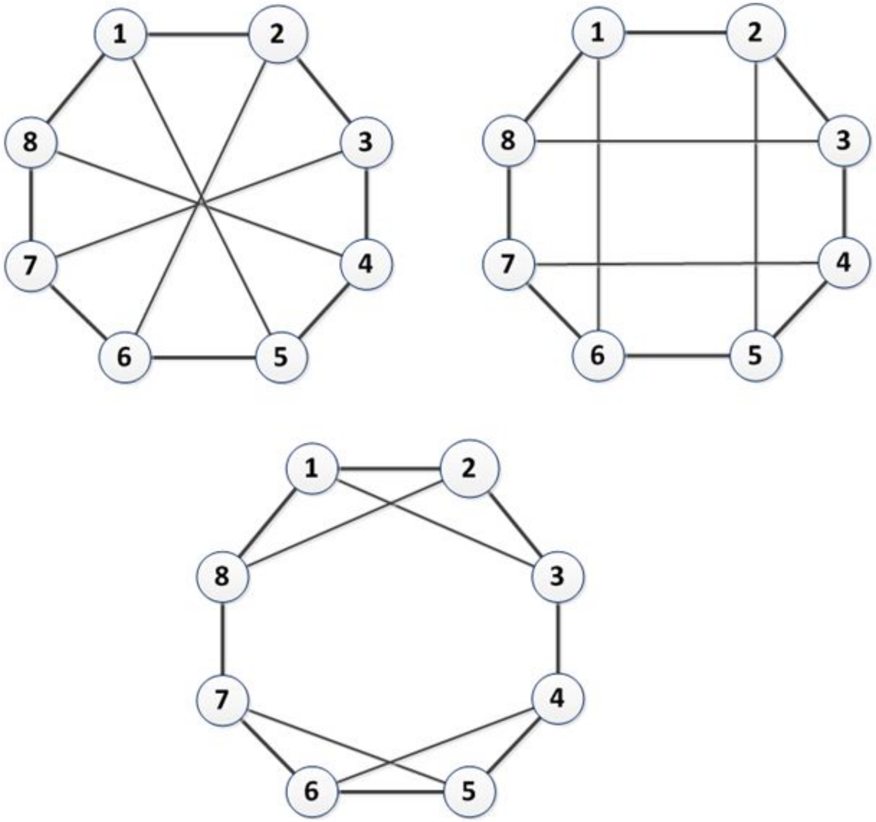
Izomorfism





Izomorfism

Care dintre aceste grafuri sunt izomorfe?

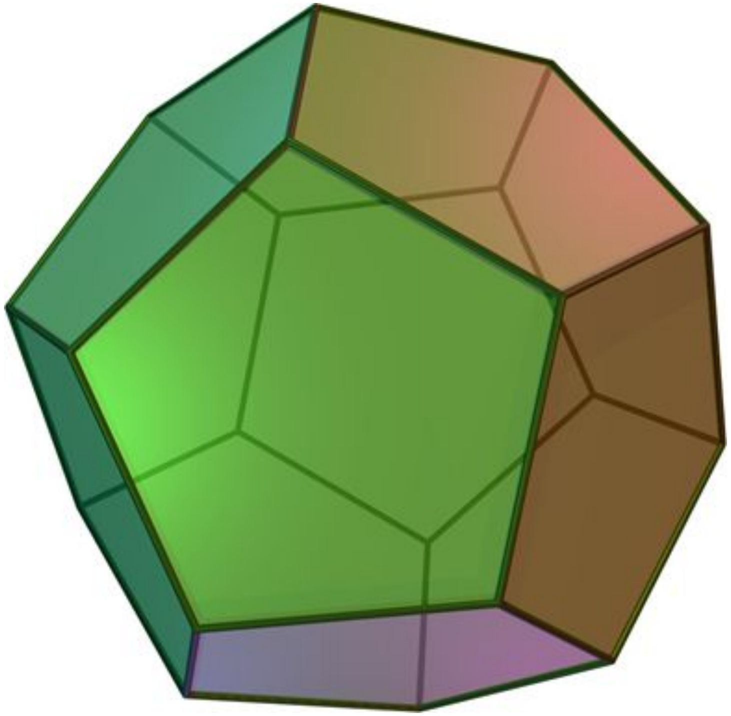


Istoric, Aplicații

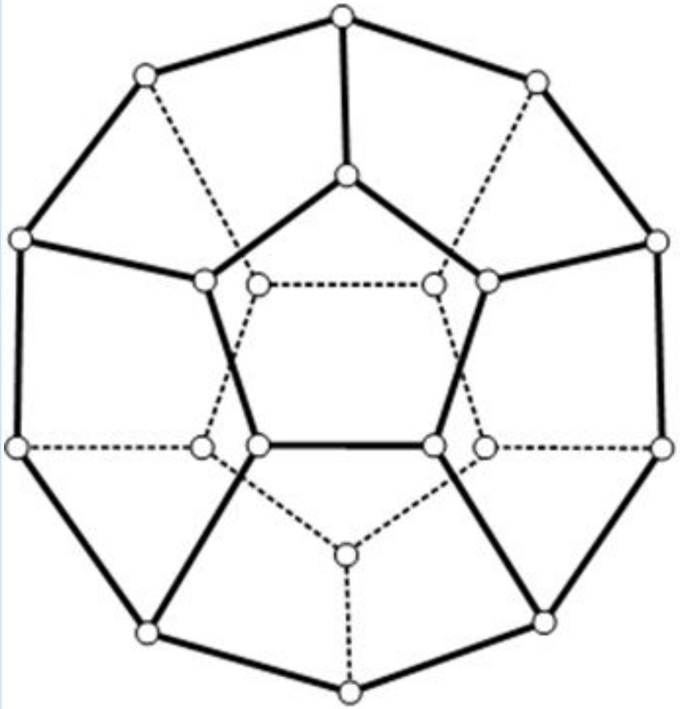
Jocul Icosian

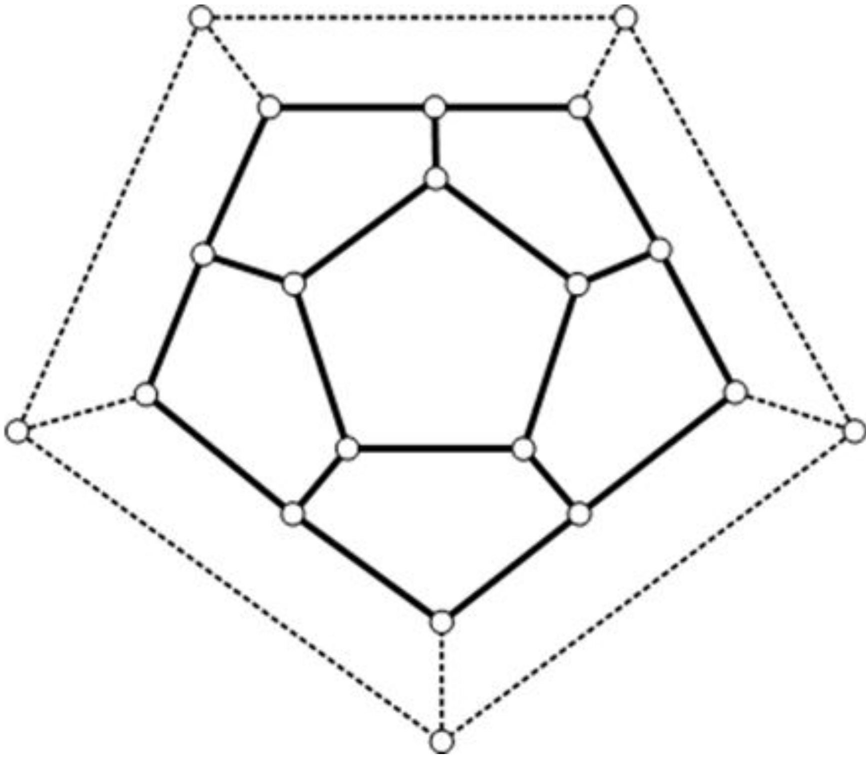
◦1856 – **Hamilton –** *“voiaj în jurul lumii”* :

Există un traseu închis pe muchiile dodecaedrului care să treacă prin fiecare vârf o singură dată?

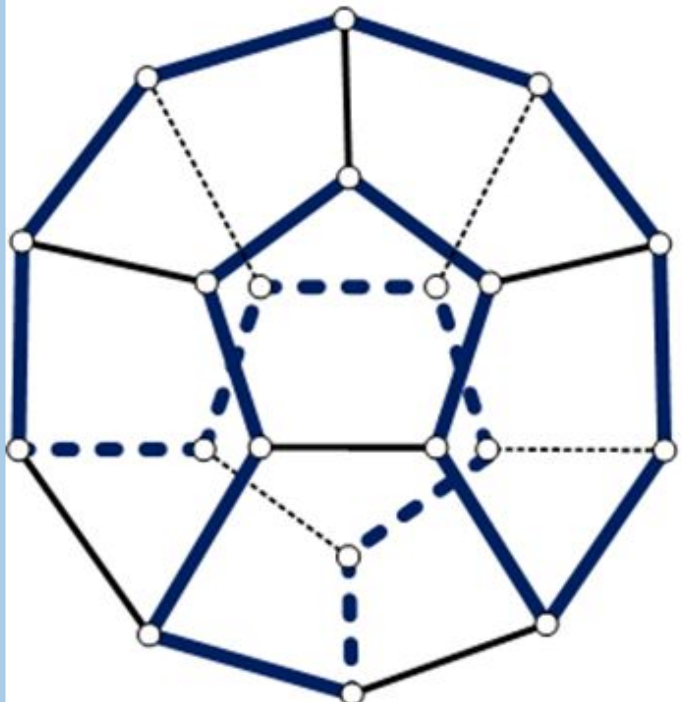


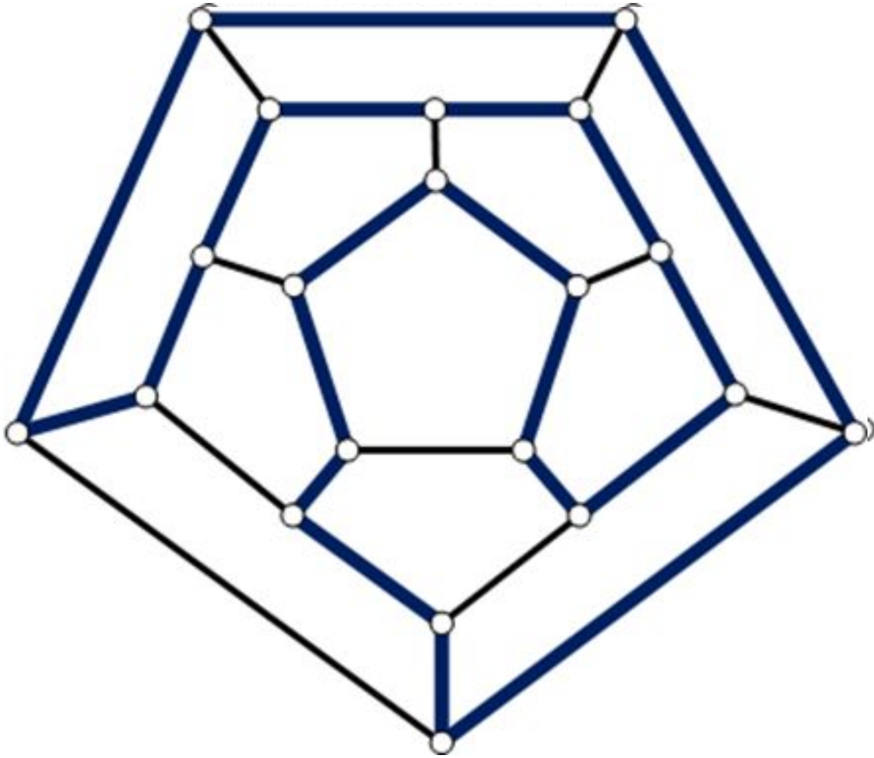
Jocul Icosian





Jocul Icosian





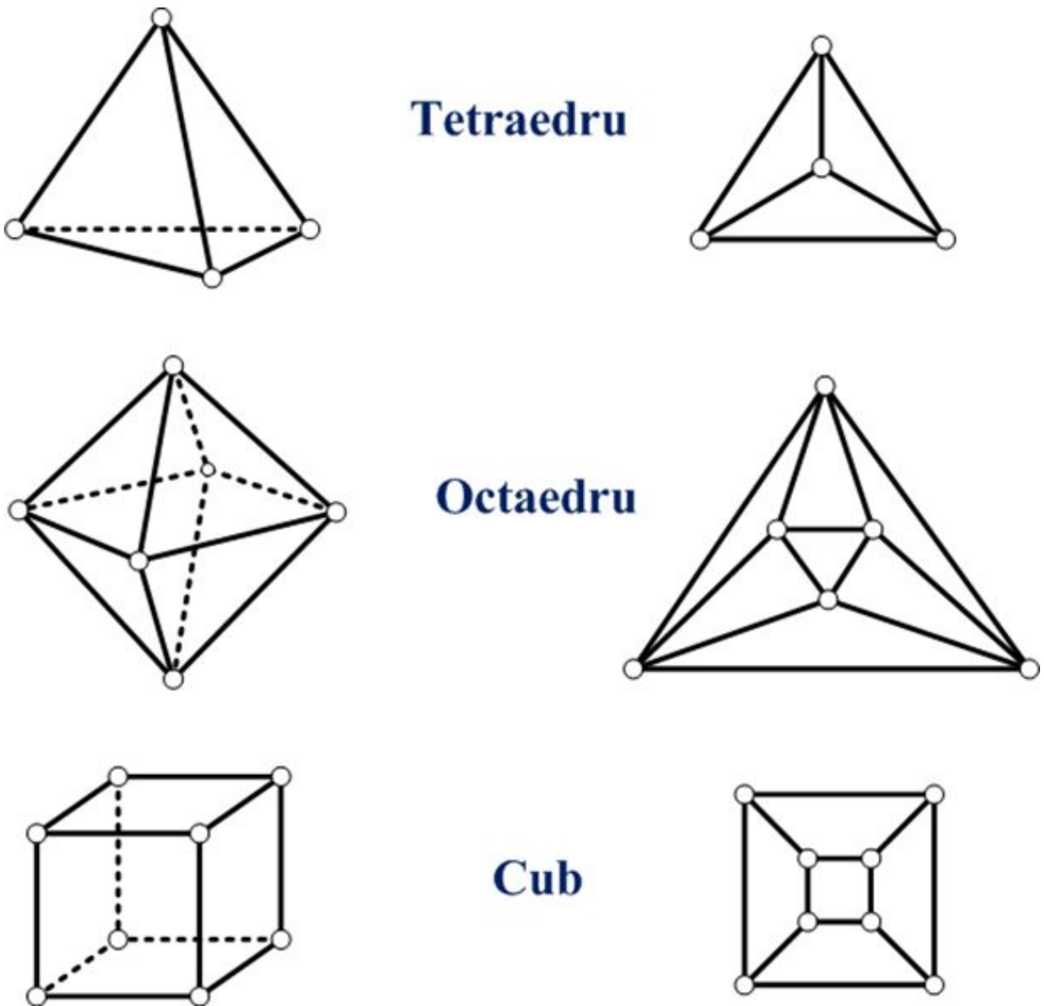
Jocul Icosian

- **Ciclu hamiltonian -** trece o singură dată prin toate vârfurile
- **Graf hamiltonian**

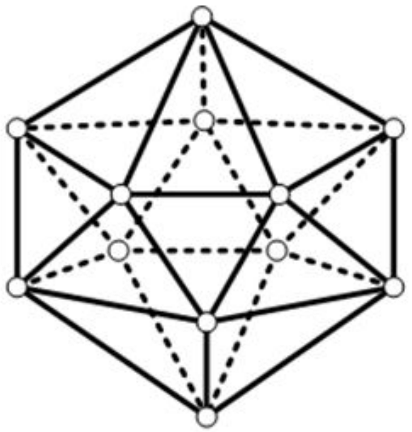
Jocul Icosian

- **Poliedru – corp** mărginit de suprafeţe plane
- **Poliedru convex** – segmentul care uneşte două puncte oarecare din el conţine numai puncte din interior
- **Poliedru regulat convex** – feţele sunt poligoane regulate **congruente**
- **Graf planar** – se poate reprezenta în plan fără ca muchiile să se intersecteze in interior

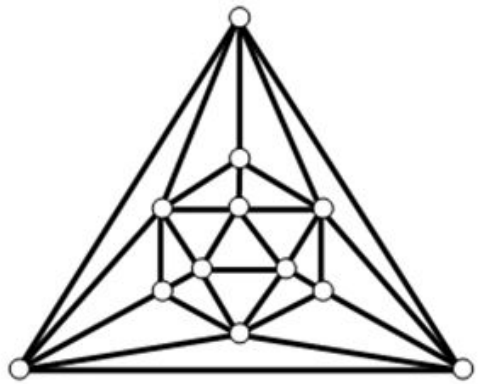
Corpuri platonice

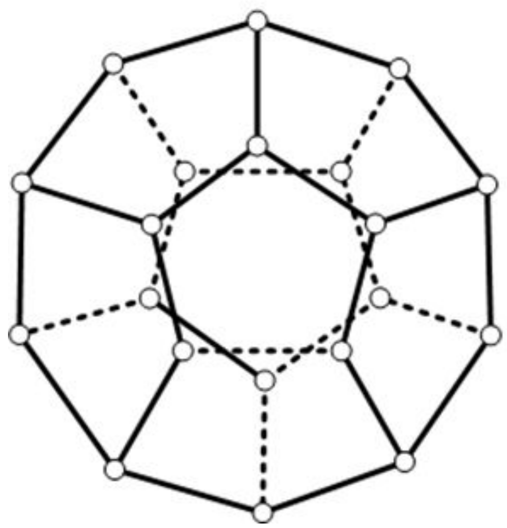


Corpuri platonice

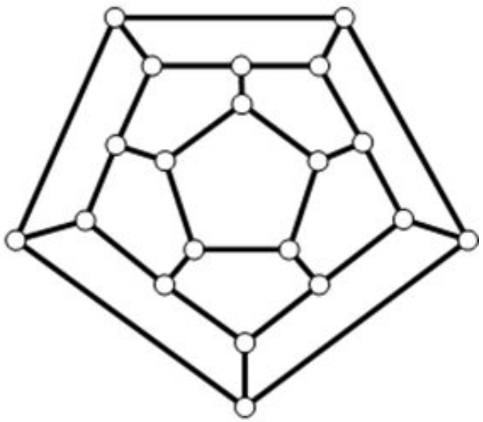


Icosaedru





Dodecaedru

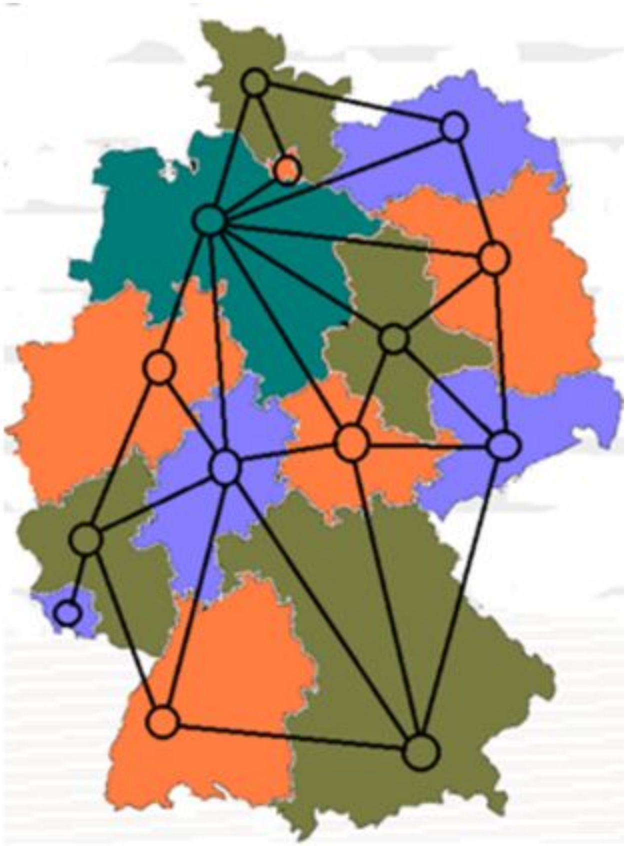


Problema celor 4 culori

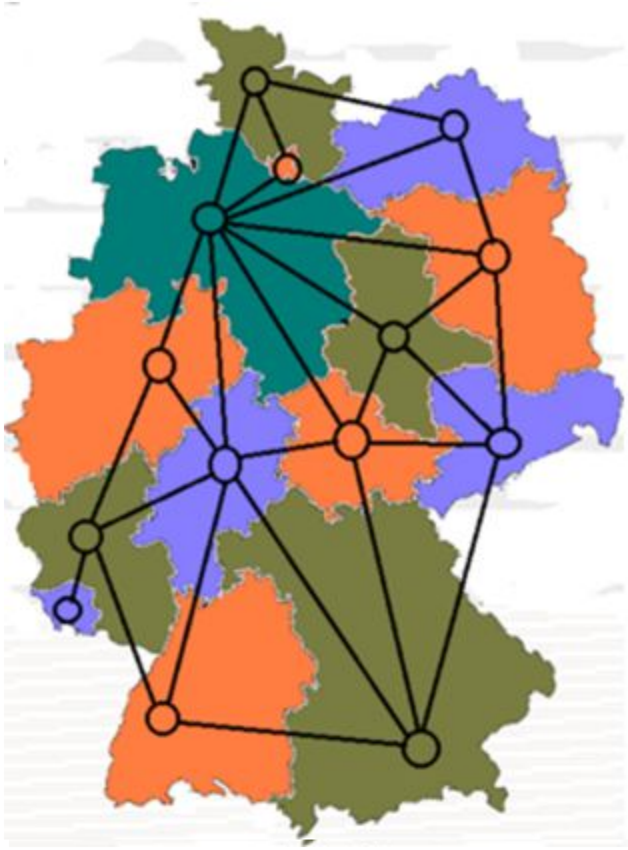
Se poate colora o hartă cu patru culori astfel încât orice două țări, care au frontieră comună și care **nu se reduce la un punct**, să aibă culori diferite?

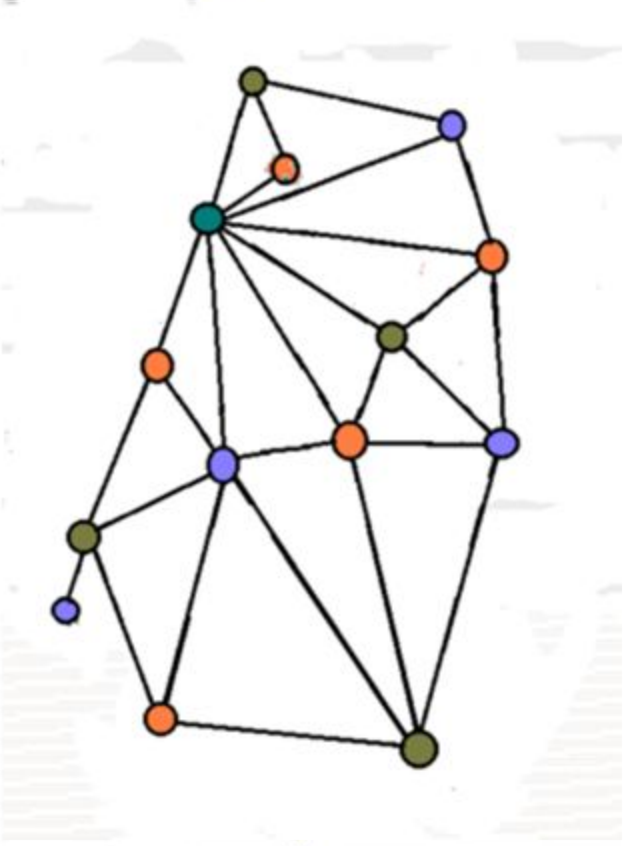
- DeMorgan 1852

Problema celor 4 culori



Problema celor 4 culori

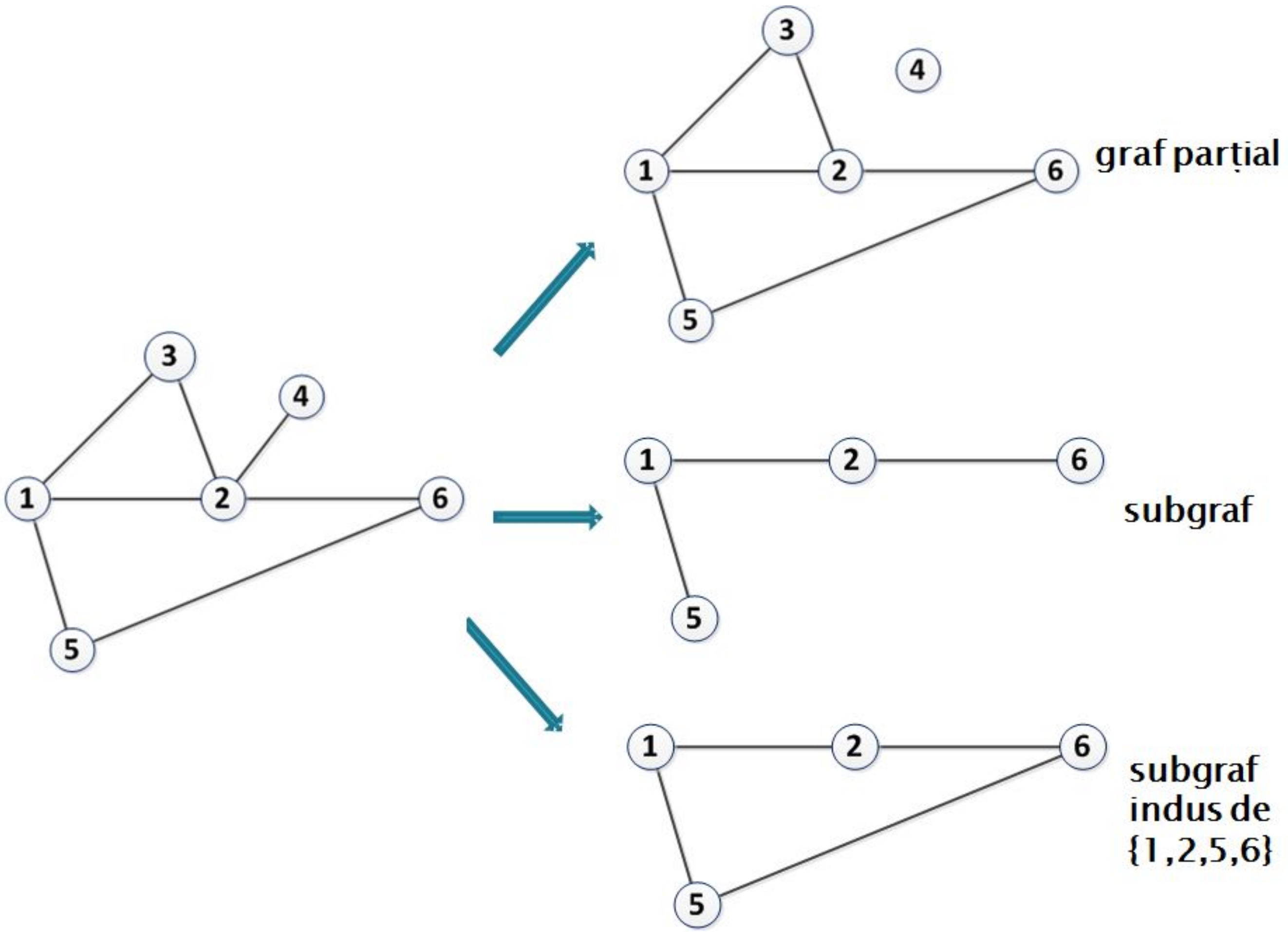




Problema celor 4 culori

Problema celor 4 culori - Appel și Haken răspuns afirmativ în 1976 cu ajutorul calculatorului

Graf parțial, subgraf, conexitate



Graf parțial, subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \le G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \prec G}$) dacă

  $V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf indus de V_1 în** G (vom nota $\mathbf{G_1=G[V_1]}$) dacă

  $V_1 \subseteq V,$

  $E_1 = \{e \mid e \in E(G)$, e are ambele extremități în $V_1 \}$

(toate arcele/muchiile cu extremități în V_1)

Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț
- O **componentă conexă** a lui G este un subgraf indus conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)
- Pentru cazul orientat – **tare-conexitate**

Conexitate