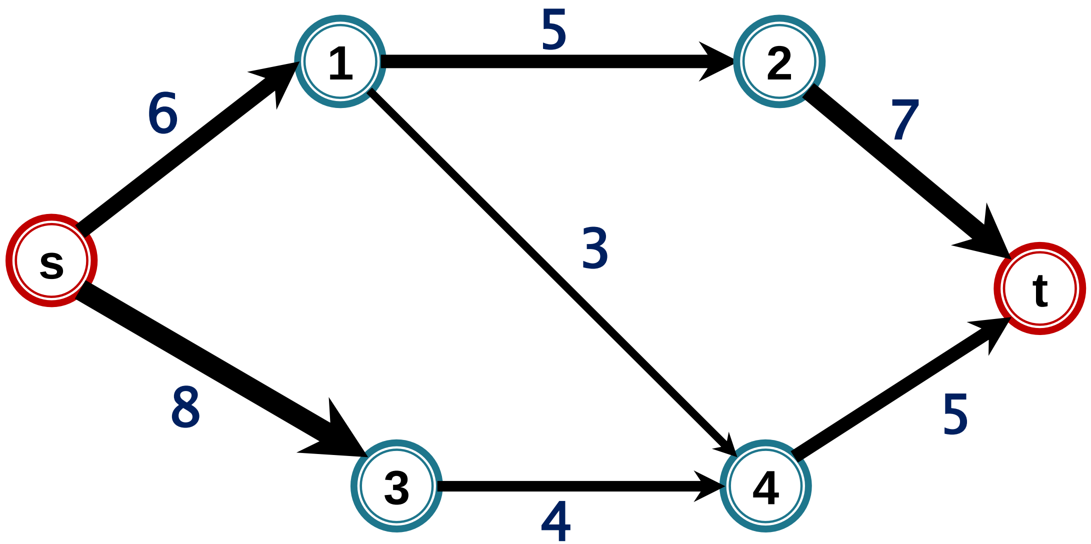
Fluxuri maxime
în rețele de transport

- Avem o reţea în care
  - arcele au limitări de capacitate
  - nodurile = joncţiune

Care este cantitatea maximă care poate fi transmisă prin reţea de la surse la destinaţii?

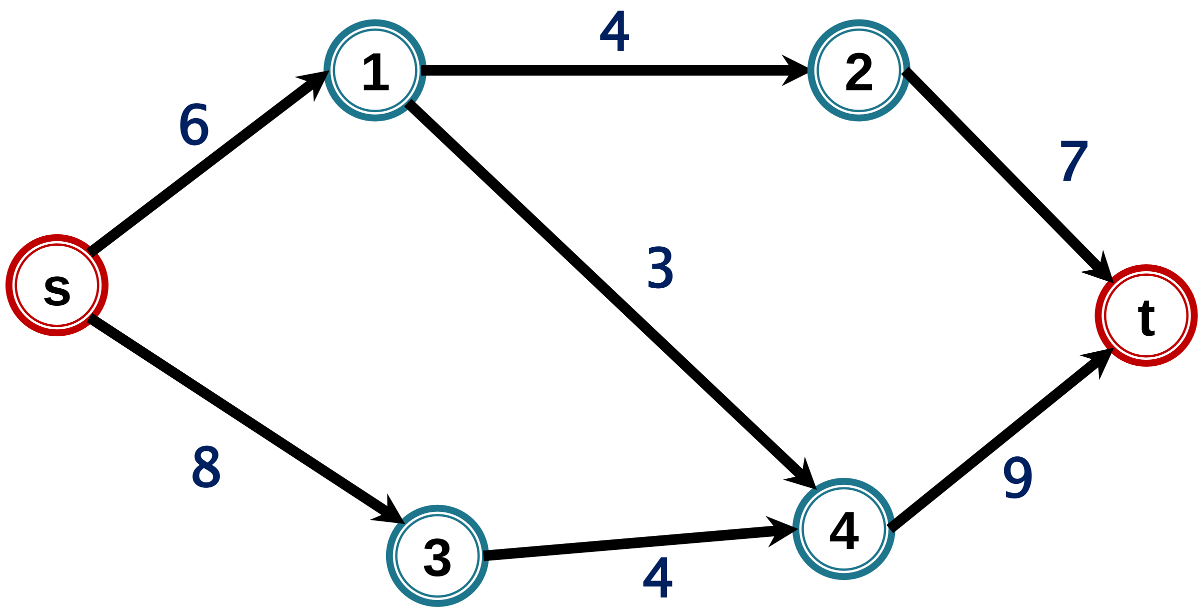
(în unitatea de timp)



Fluxuri în rețele de transport

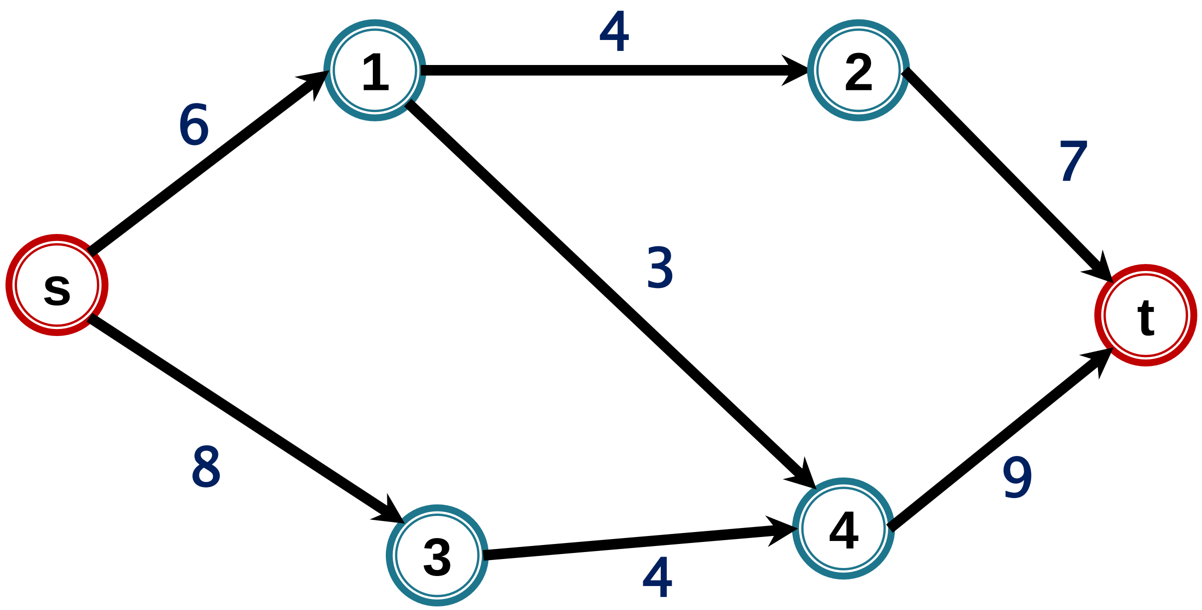
- Rețea de comunicare
  - Transferul de informații – limitat de lățimea de bandă
- Rețele de transport / evacuare în caz de urgențe
  - Limitare – număr de mașini/persoane în unitatea de timp
- Rețele de conducte
- …

Fluxuri în rețele de transport

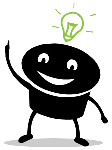


Încercăm să trimitem marfă (flux) de la vârful sursă s la destinaţia t

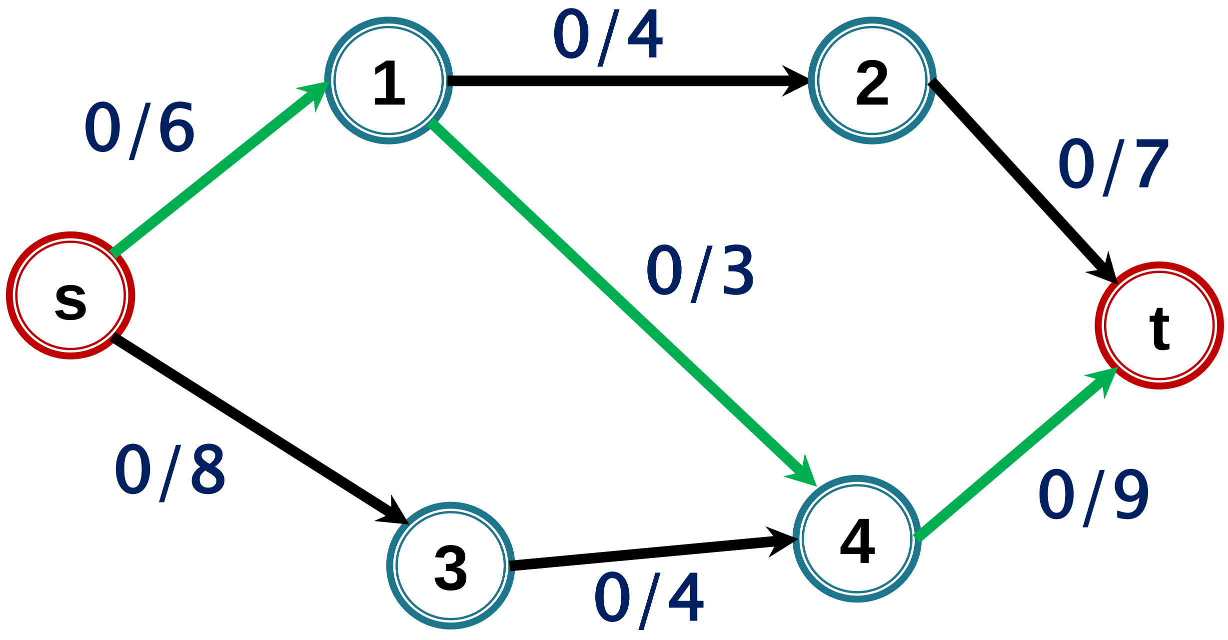
Fluxuri în rețele de transport

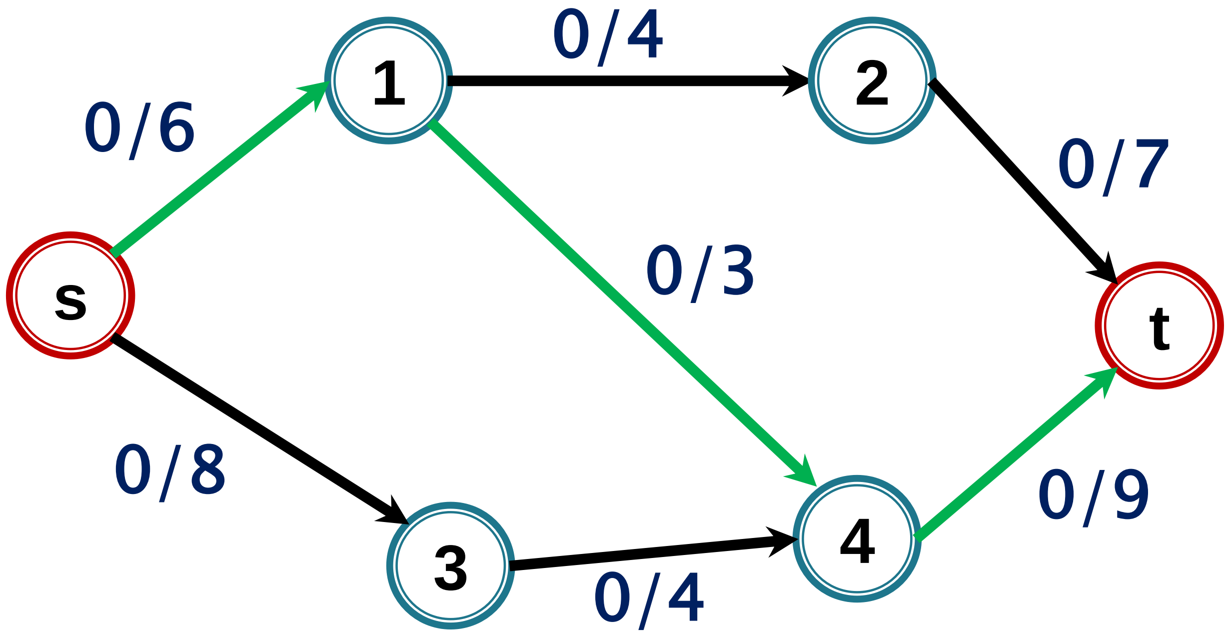


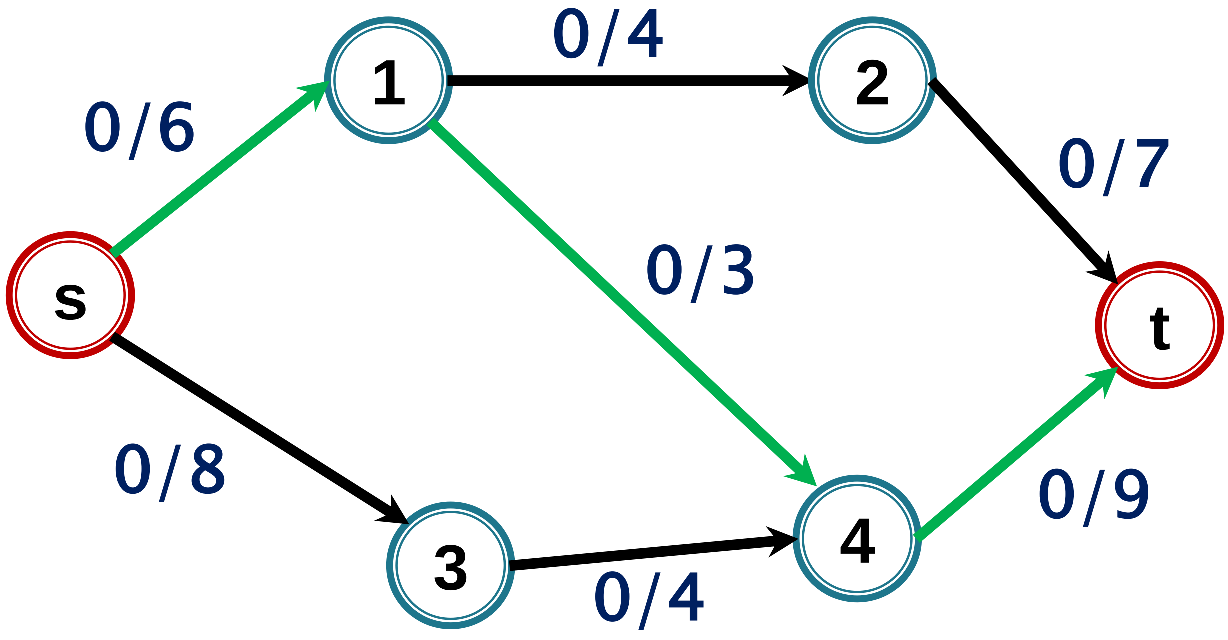
Încercăm să trimitem marfă (flux) de la vârful sursă s la destinaţia t



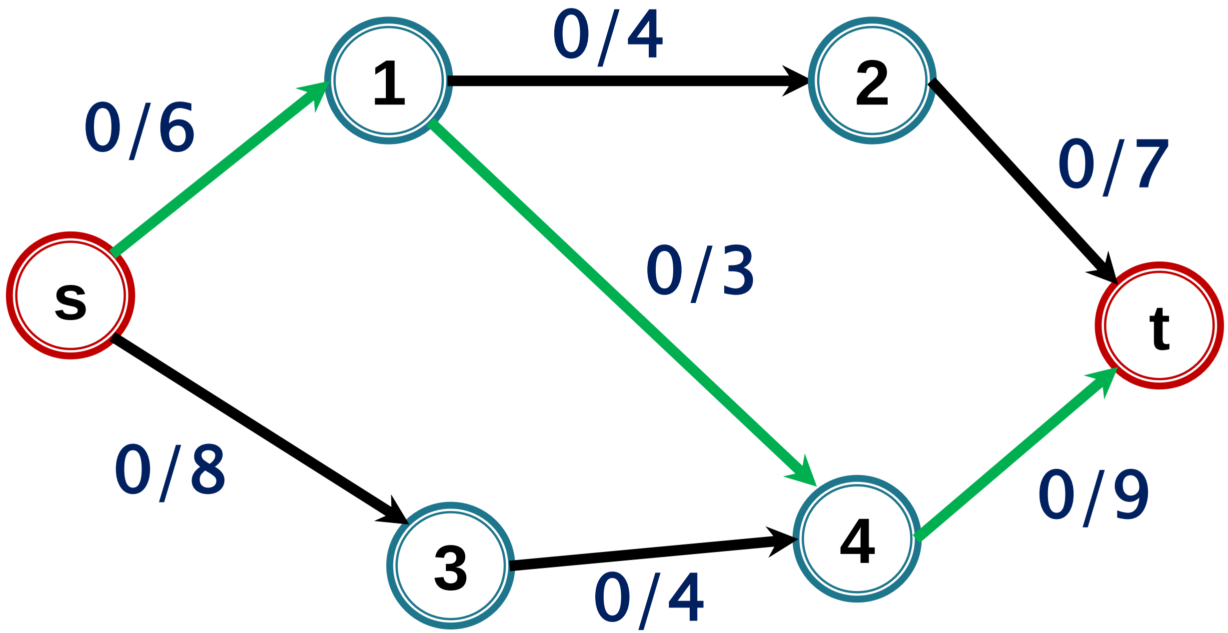
Determinăm drumuri de la s la t pe care mai putem trimite marfă

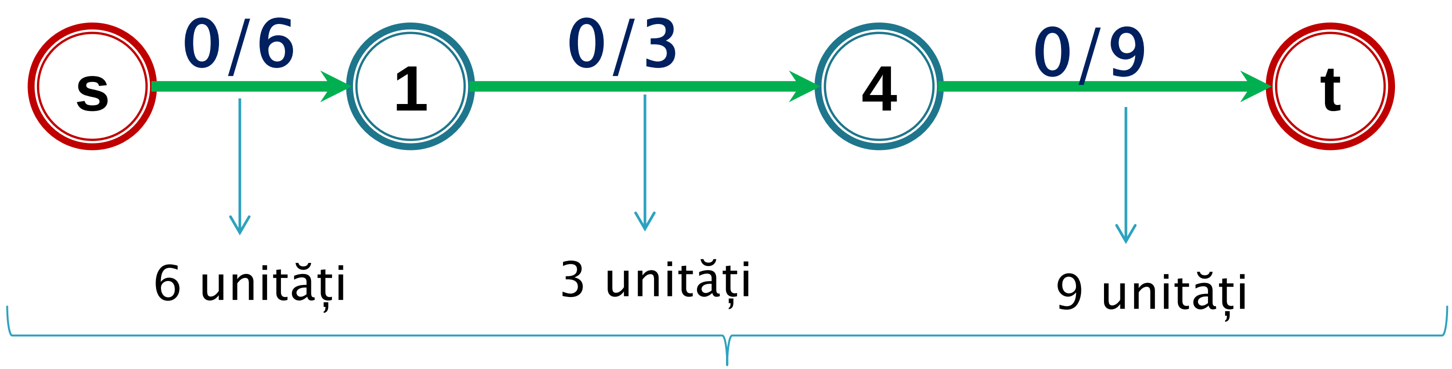

0/4
1
2
0/6
0/7
0/3
s
t
0/8
0/9
4
3
0/4


0/4
1
2
0/6
0/7
0/3
s
t
0/8
0/9
4
3
0/4

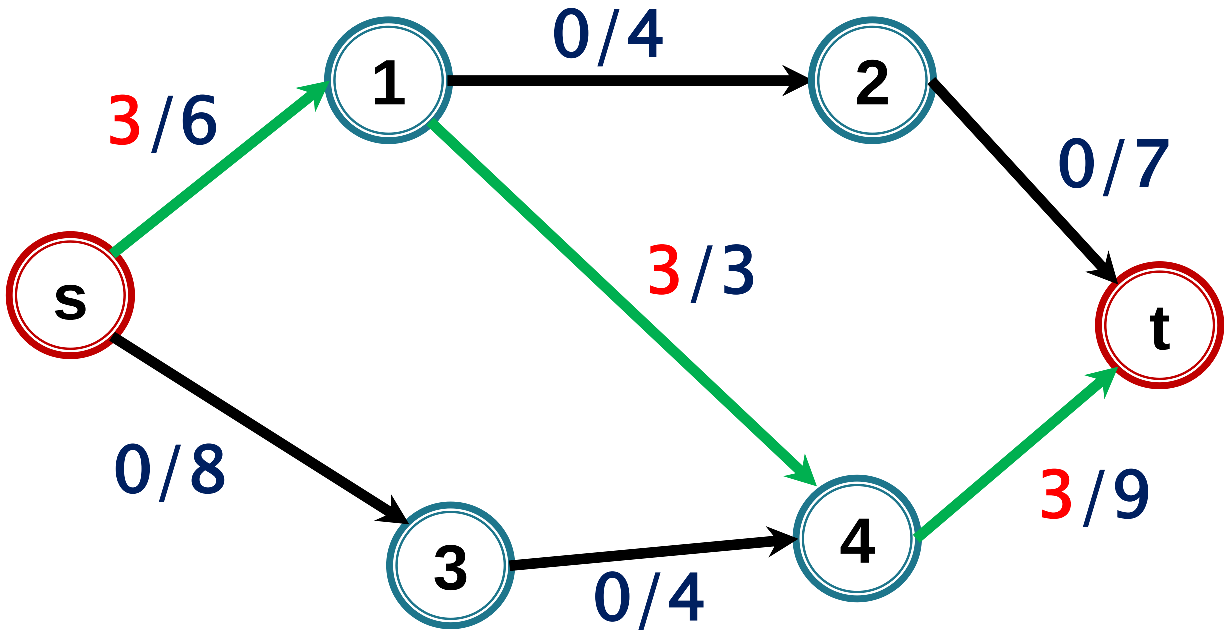

0/4
0/6
1
2
0/7
0/3
s
t
0/8
0/9
3
4
0/4

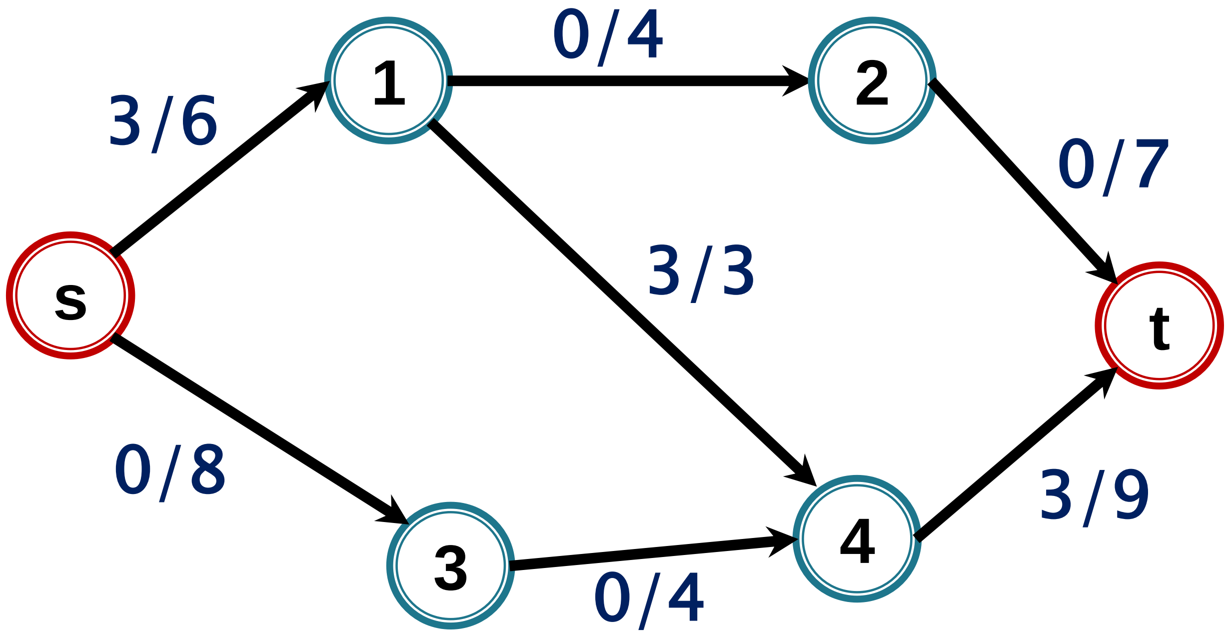

0/6
0/3
0/9
s
1
4
t



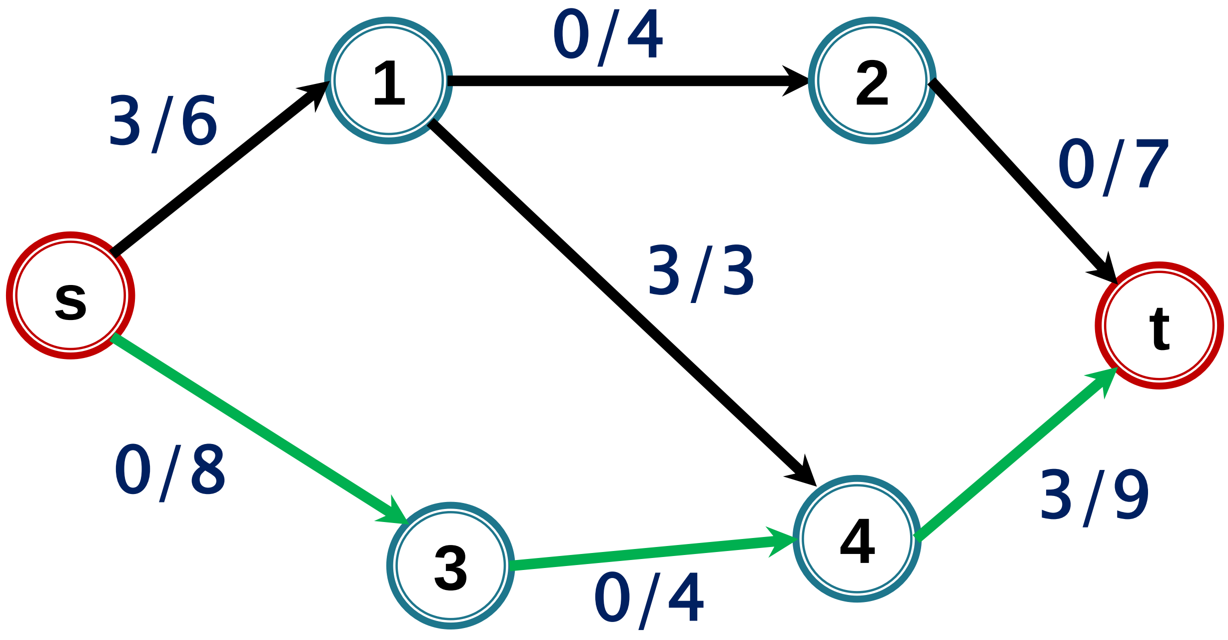


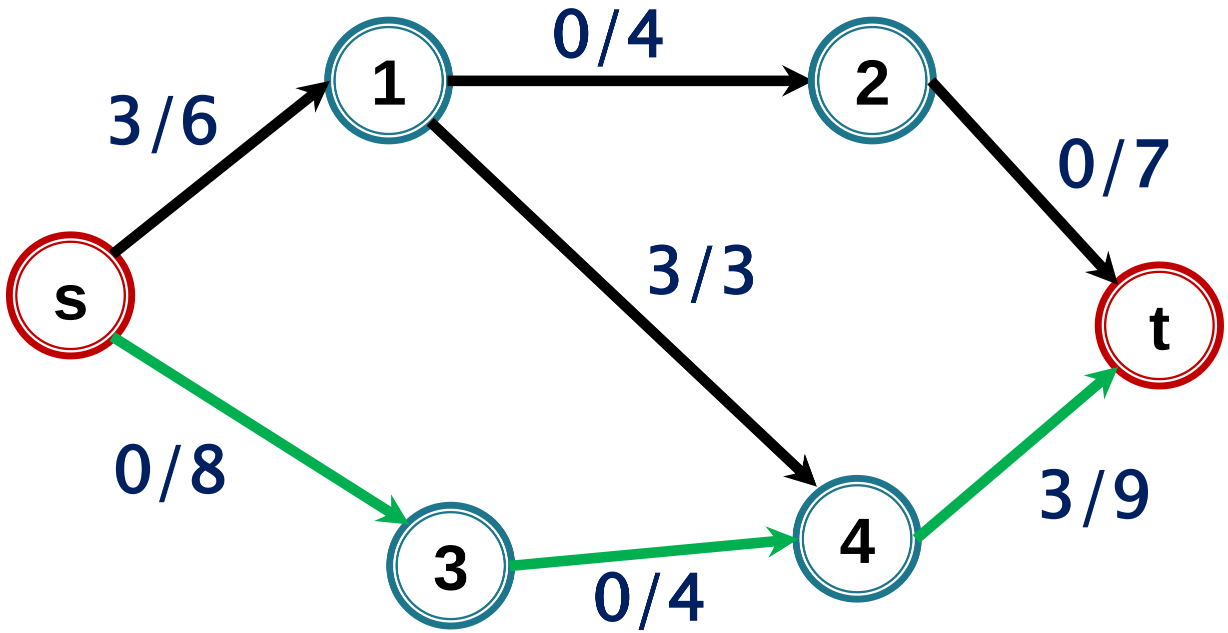
3 unităţi de-a lungul întregului drum


3/6
0/4
1
2
0/7
3/3
s
t
0/8
3/9
4
3
0/4



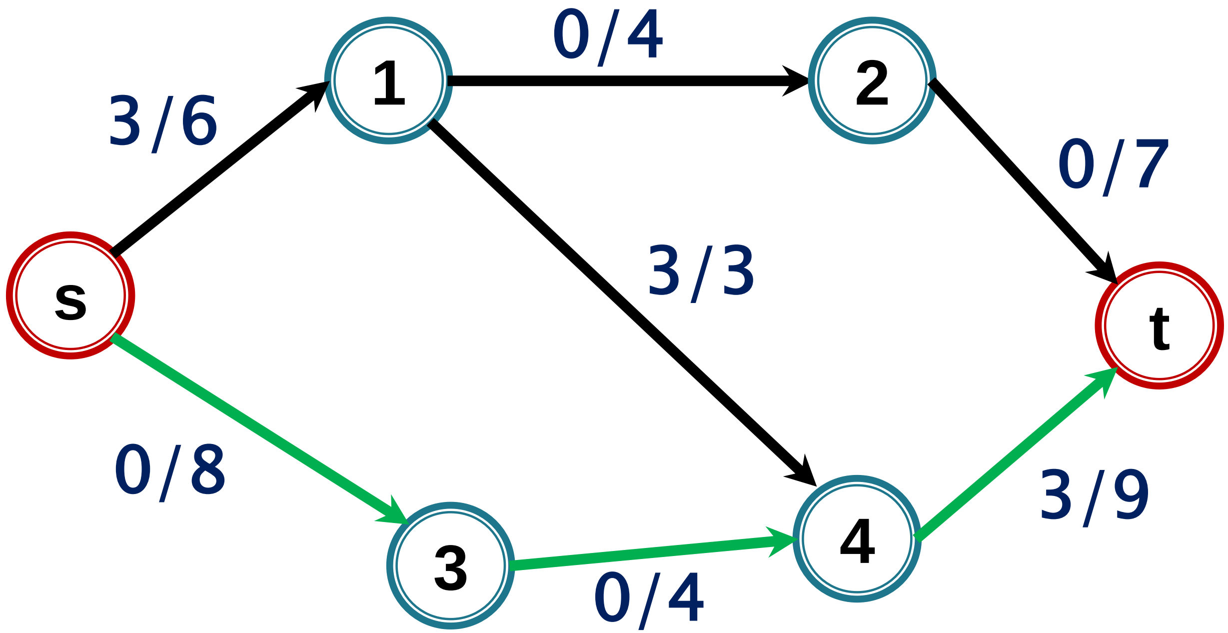
Căutăm alt drum de la s la t pe care mai putem trimite flux

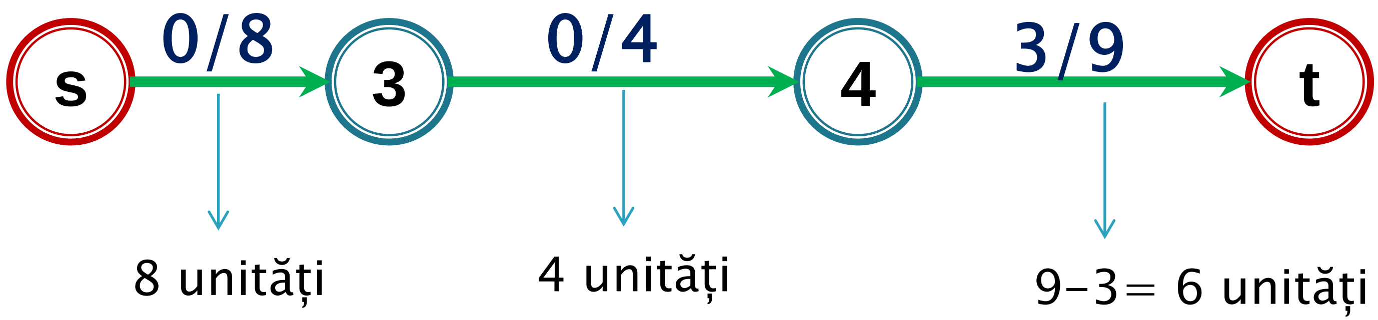

0/4
1
2
3/6
0/7
3/3
s
t
0/8
3/9
4
3
0/4

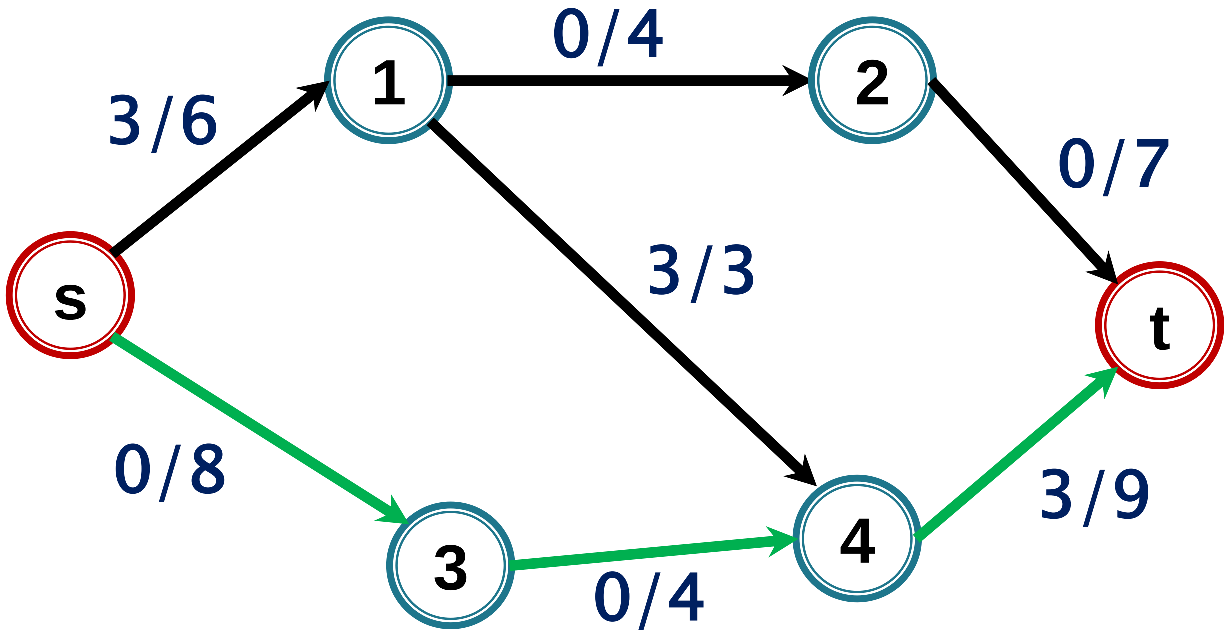


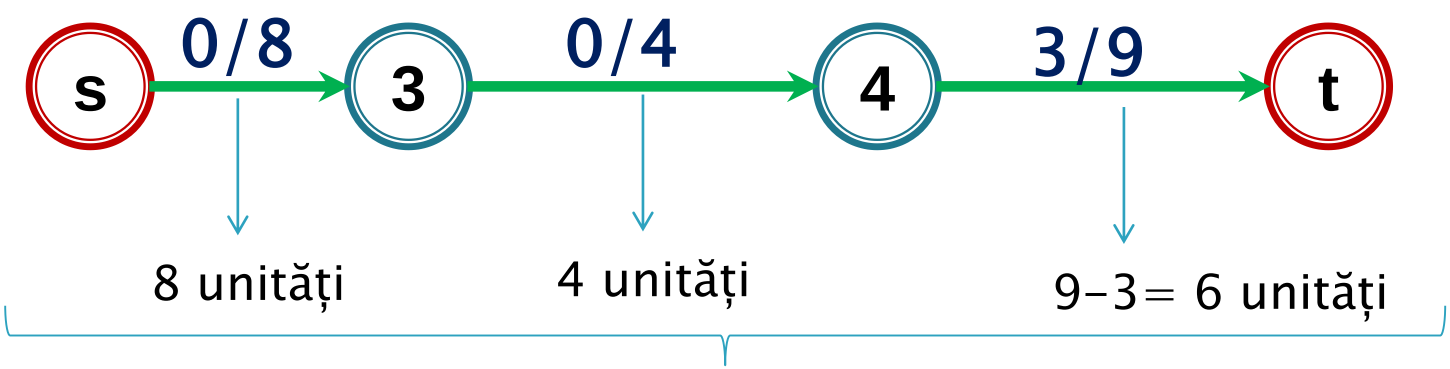
s
1
2
3
4
t
3/6
0/4
0/7
3/3
0/8
0/4
3/9

s
3
4
t
0/8
0/4
3/9
8 unități
4 unități

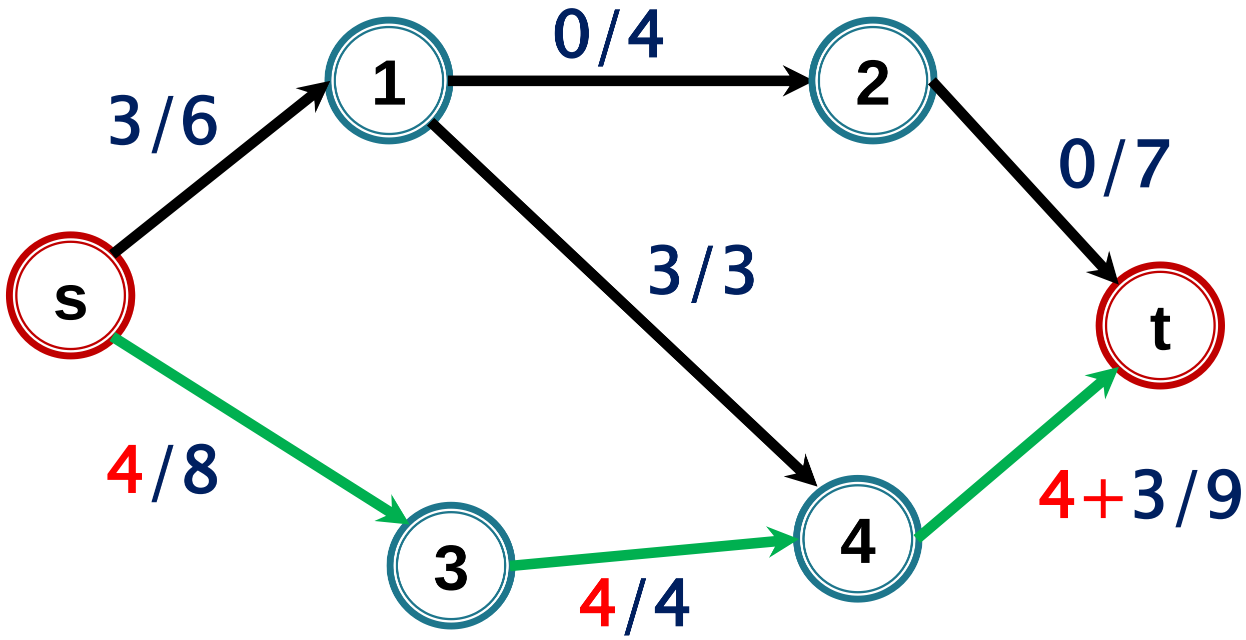

1
2
s
t
3
4
3/6
0/4
0/7
3/3
0/8
3/9
0/4


s
3
4
t
0/8
0/4
3/9
8 unități
4 unități
9−3= 6 unități

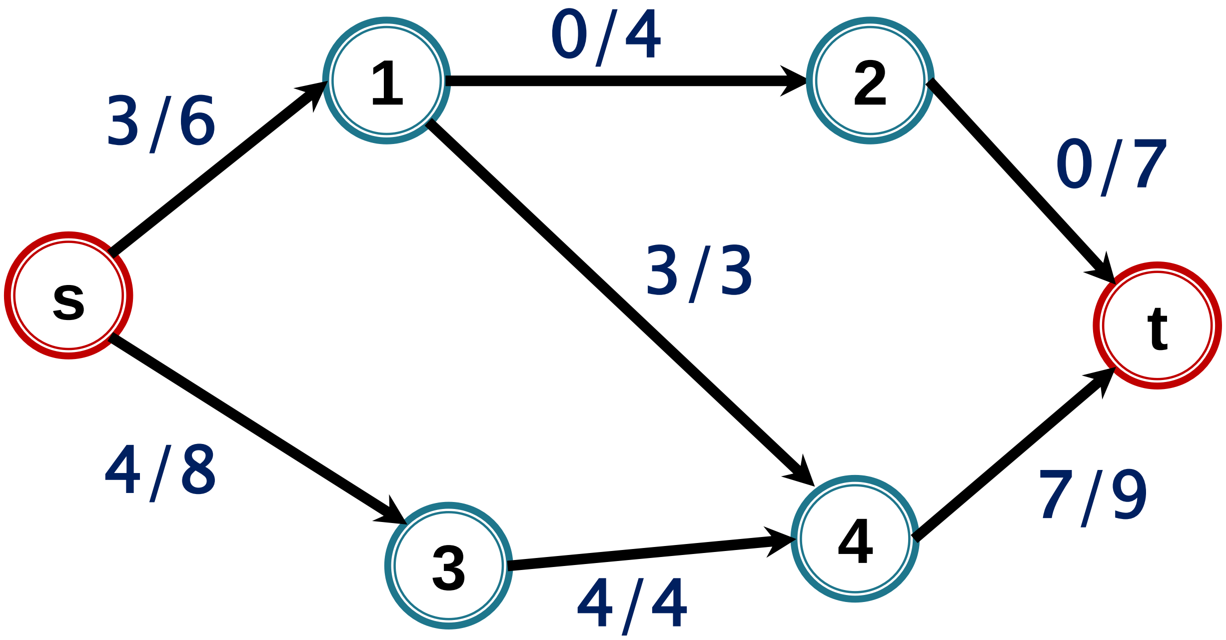


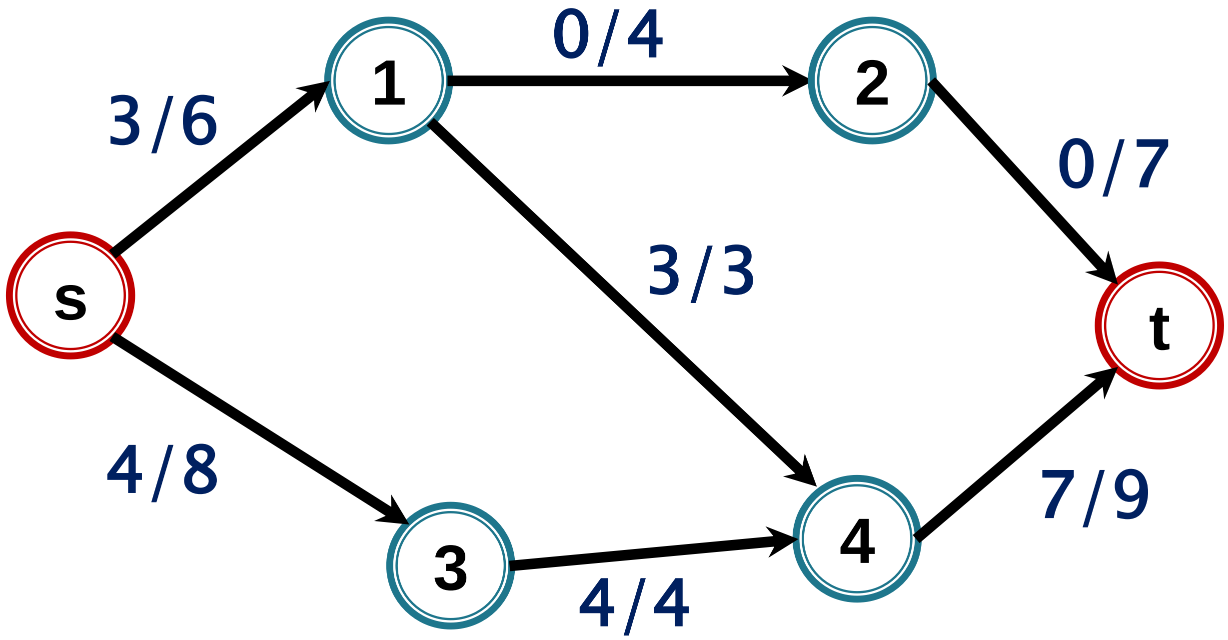


4 unităţi de-a lungul întregului drum

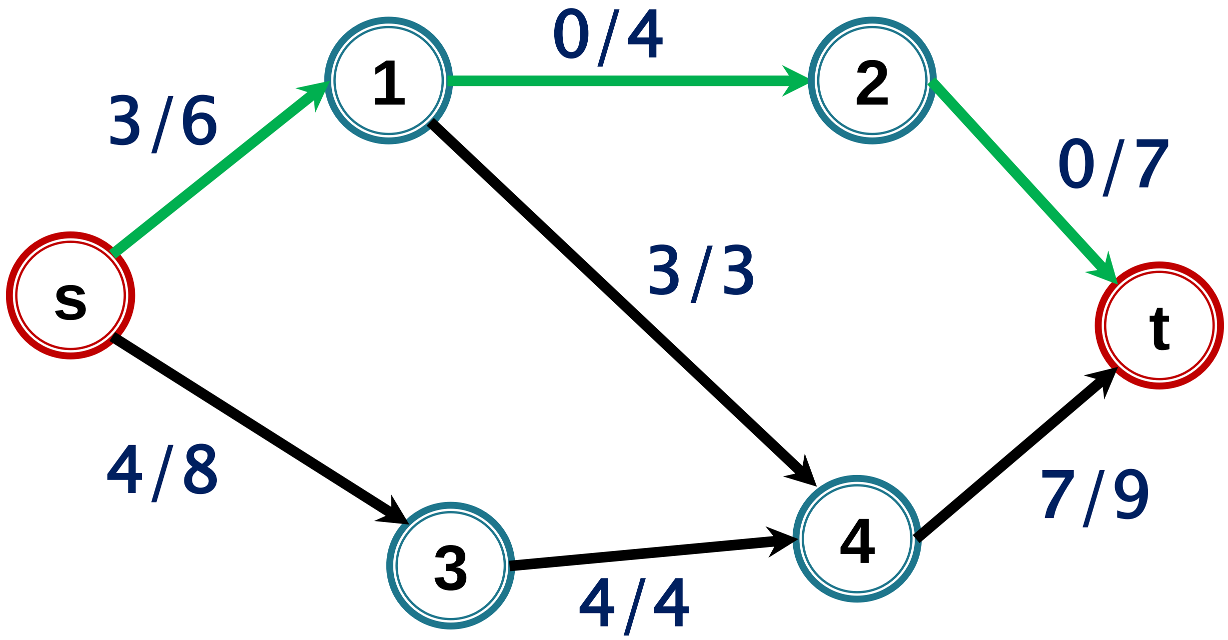


0/4
1
2
3/6
0/7
3/3
s
t
4/8
4+3/9
3
4
4/4

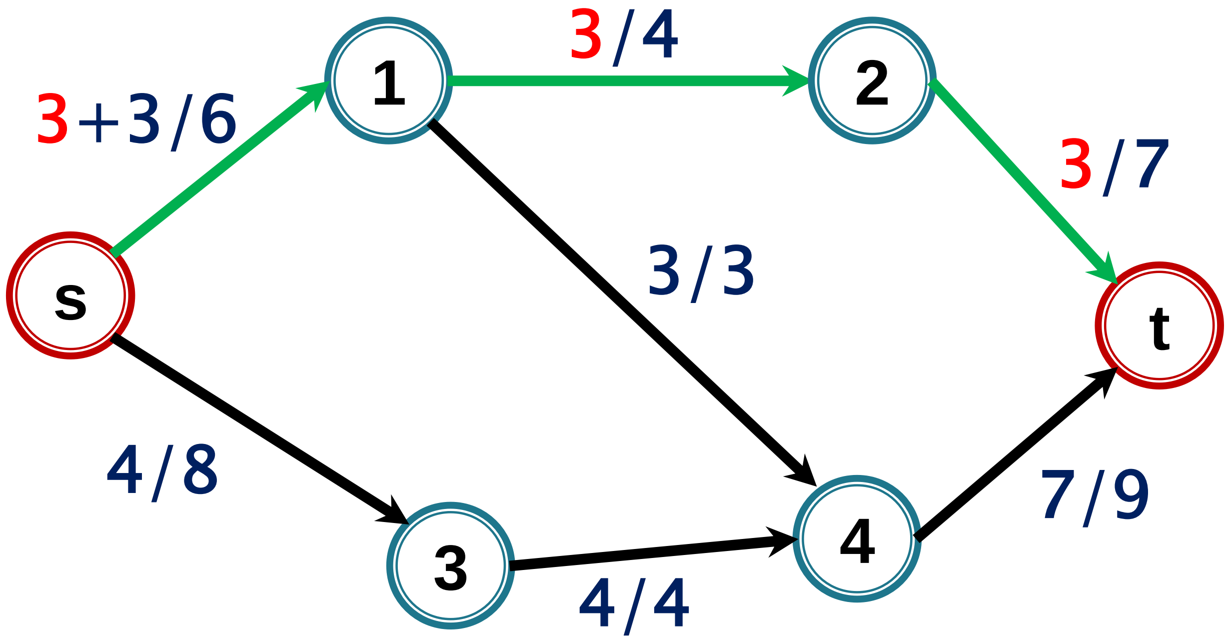

0/4
3/6
1
2
0/7
3/3
s
t
4/8
7/9
3
4
4/4



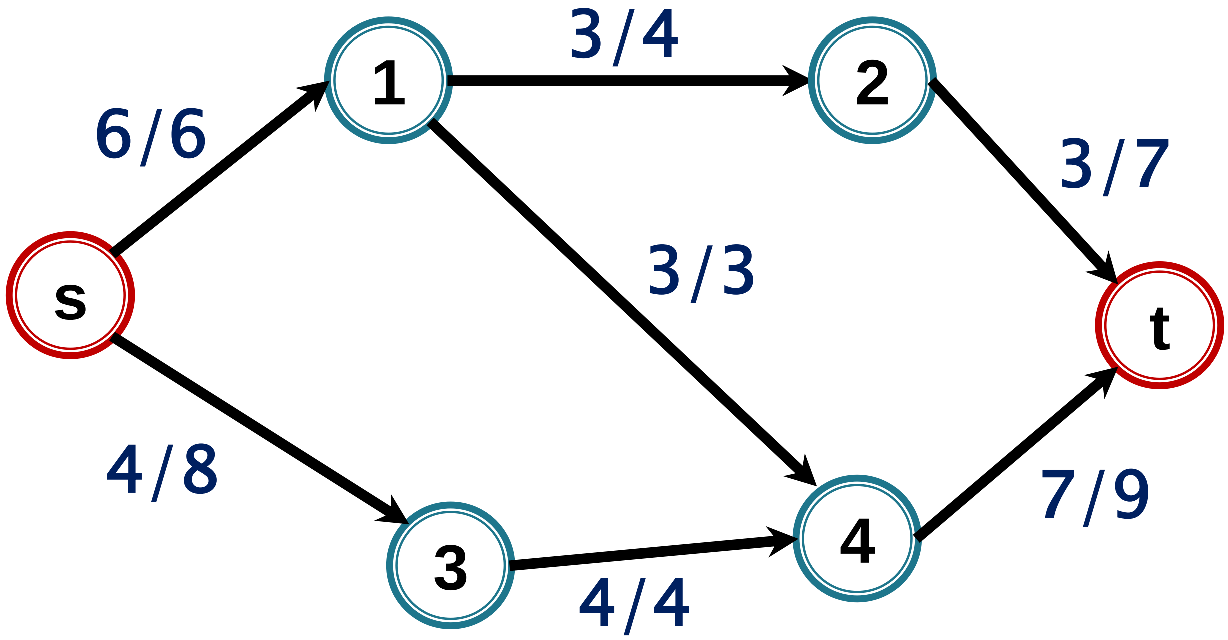
Căutăm alt drum de la s la t pe care mai putem trimite flux



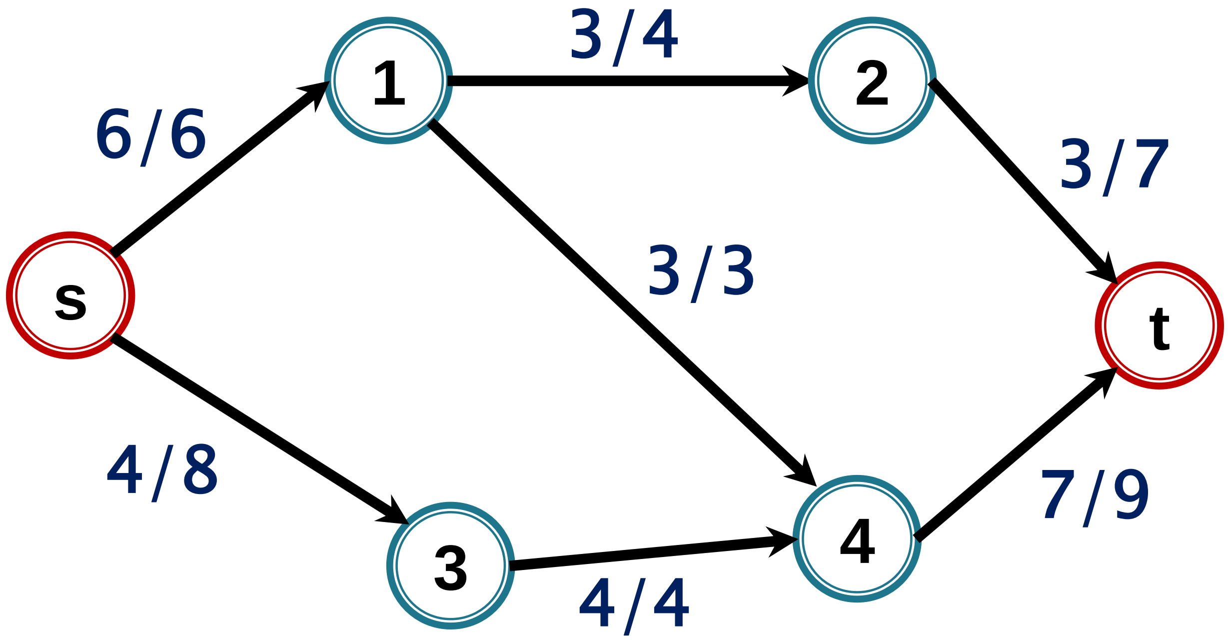
s
1
2
3
4
t
3/6
0/4
0/7
3/3
4/8
4/4
7/9



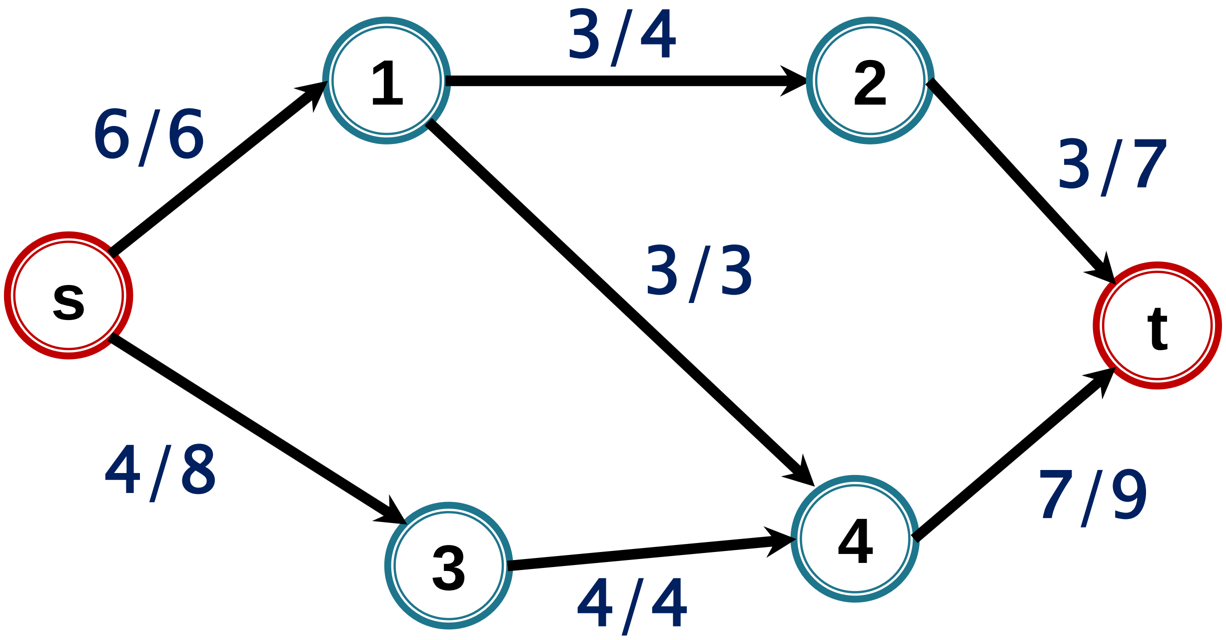
s
1
2
3
4
t
3+3/6
3/4
3/7
3/3
4/8
4/4
7/9



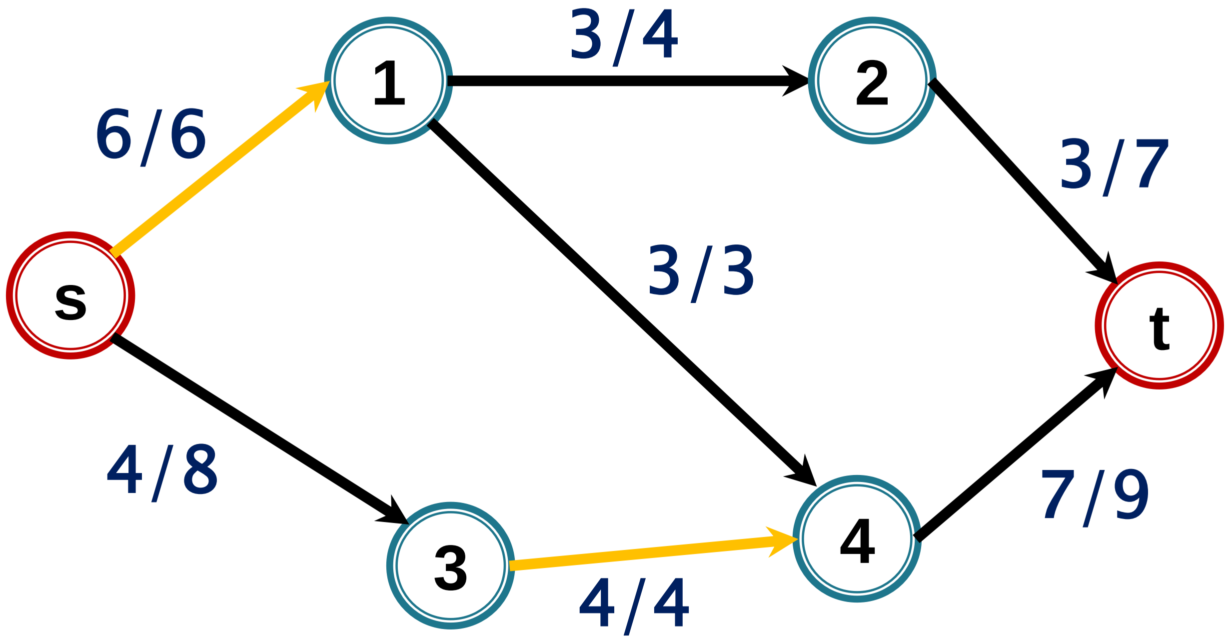
3/4
6/6
3/7
3/3
s
1
2
t
3
4
4/8
7/9
4/4



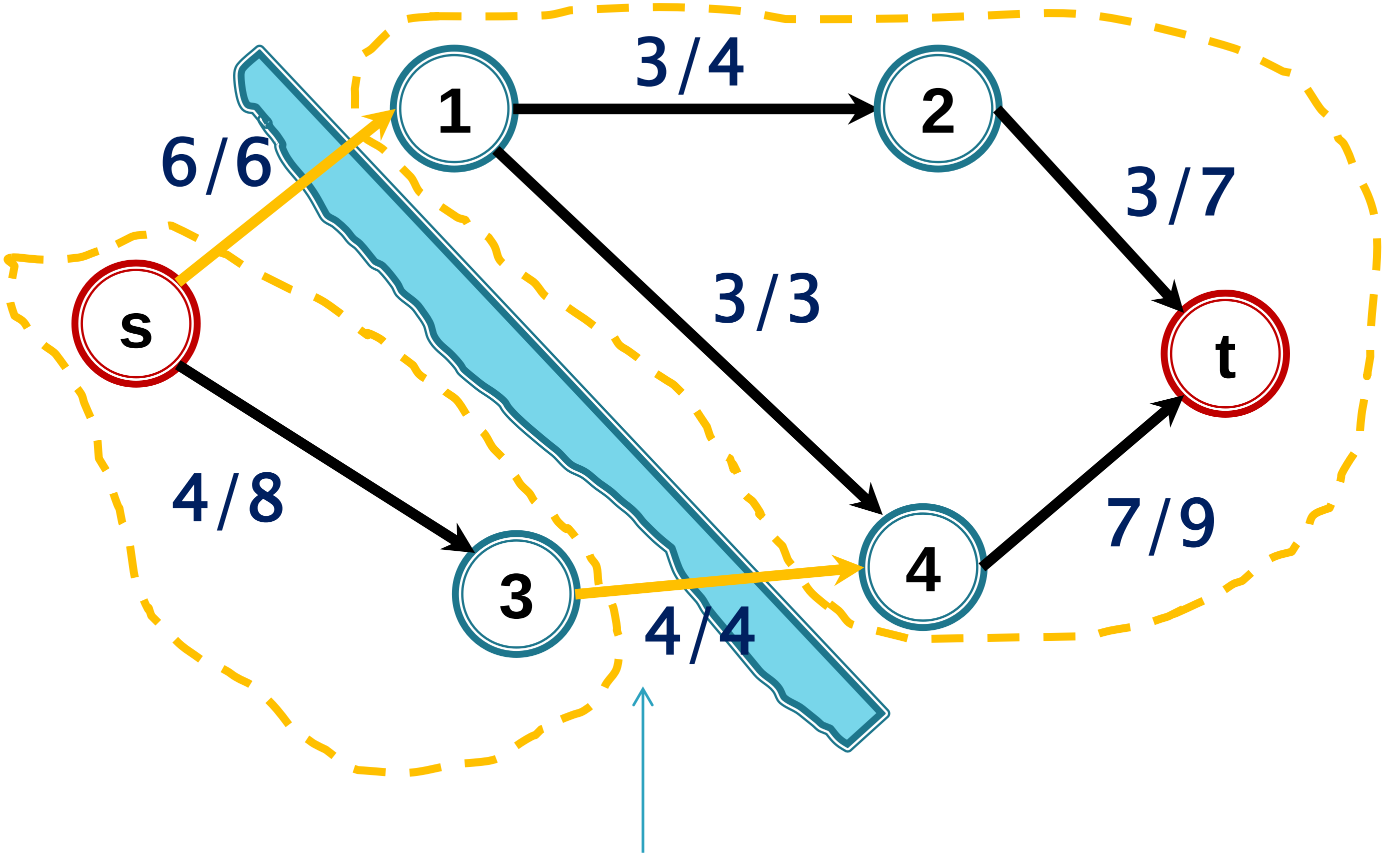
Nu mai există drumuri de la s la t pe care mai putem trimite flux



Este maxim fluxul?

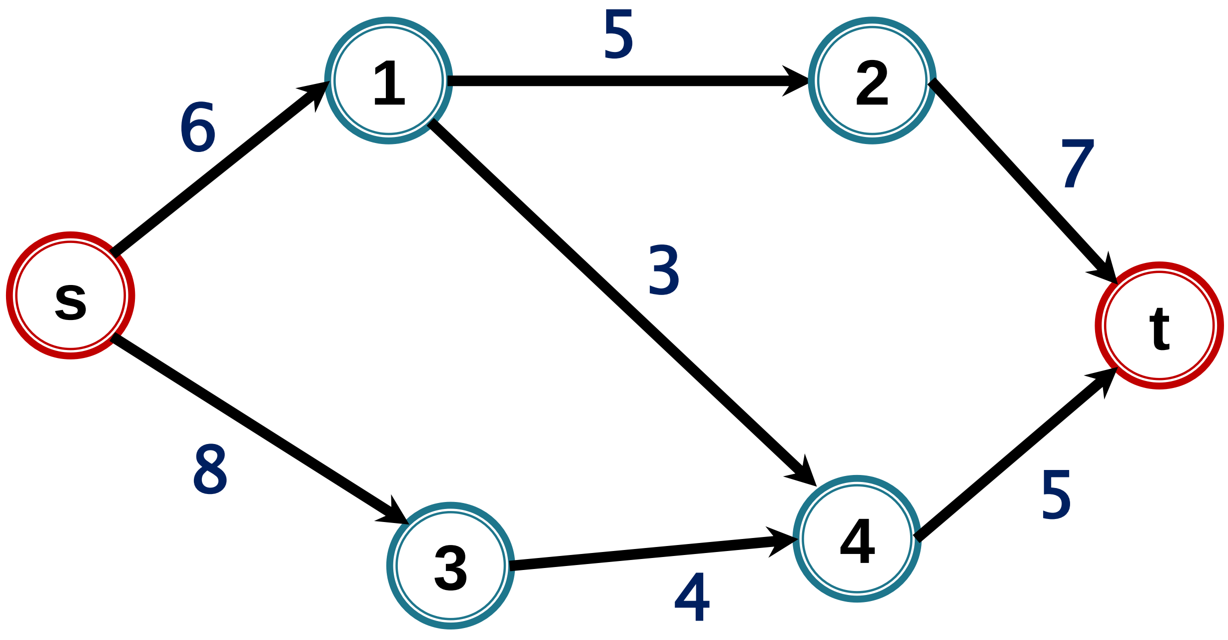


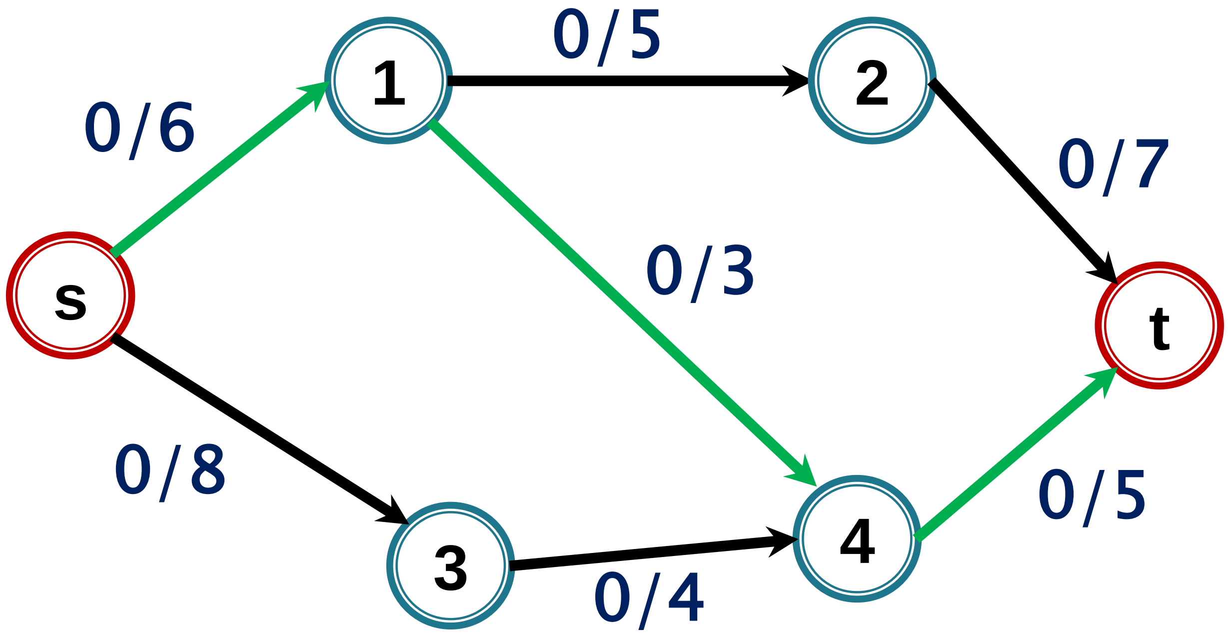
s
1
2
3
4
t
6/6
3/4
3/7
3/3
4/8
4/4
7/9

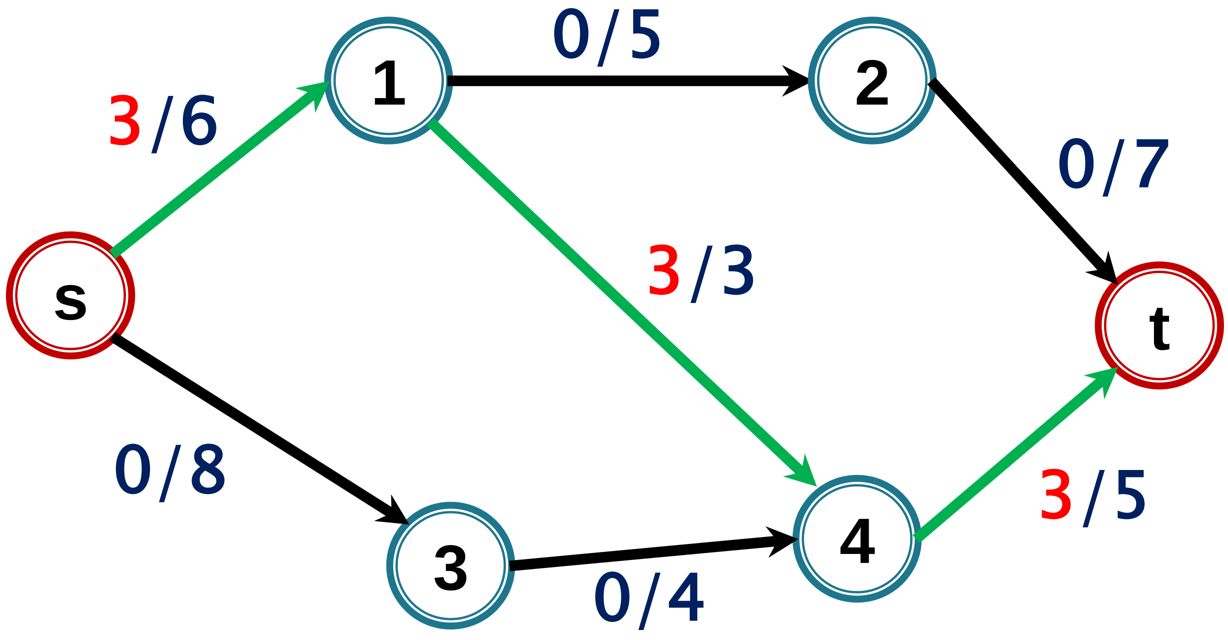


- singurele arce ("poduri ") care trec din regiunea lui s în cea a lui t nu mai pot fi folosite pentru a trimite flux (au fluxul = capacitatea) $\Rightarrow$ fluxul este maxim
- s-t tăietură

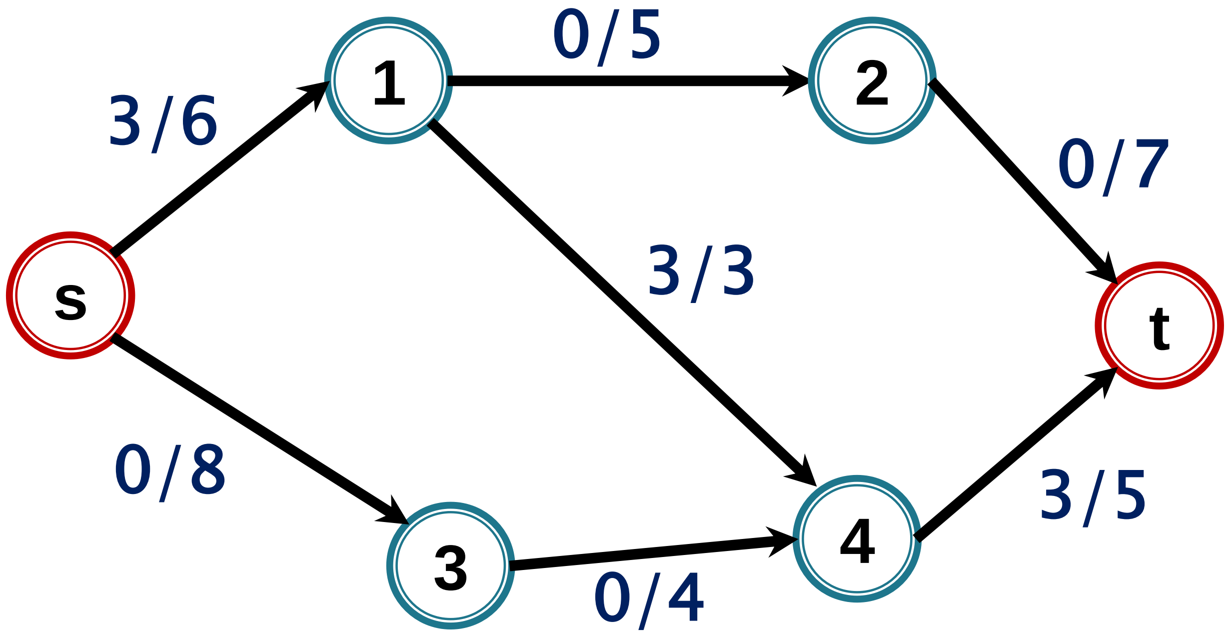
Alt exemplu

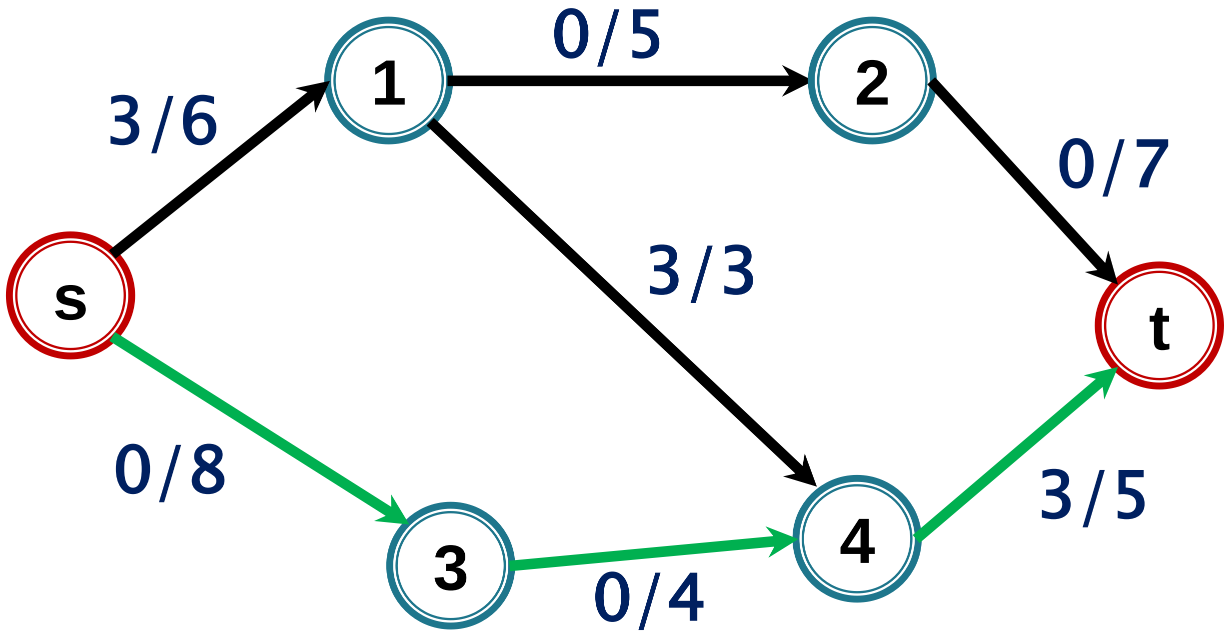

s
1
2
3
4
t
6
5
7
3
8
4
5


0/5
0/6
1
2
0/7
0/3
s
t
0/8
0/5
4
3
0/4

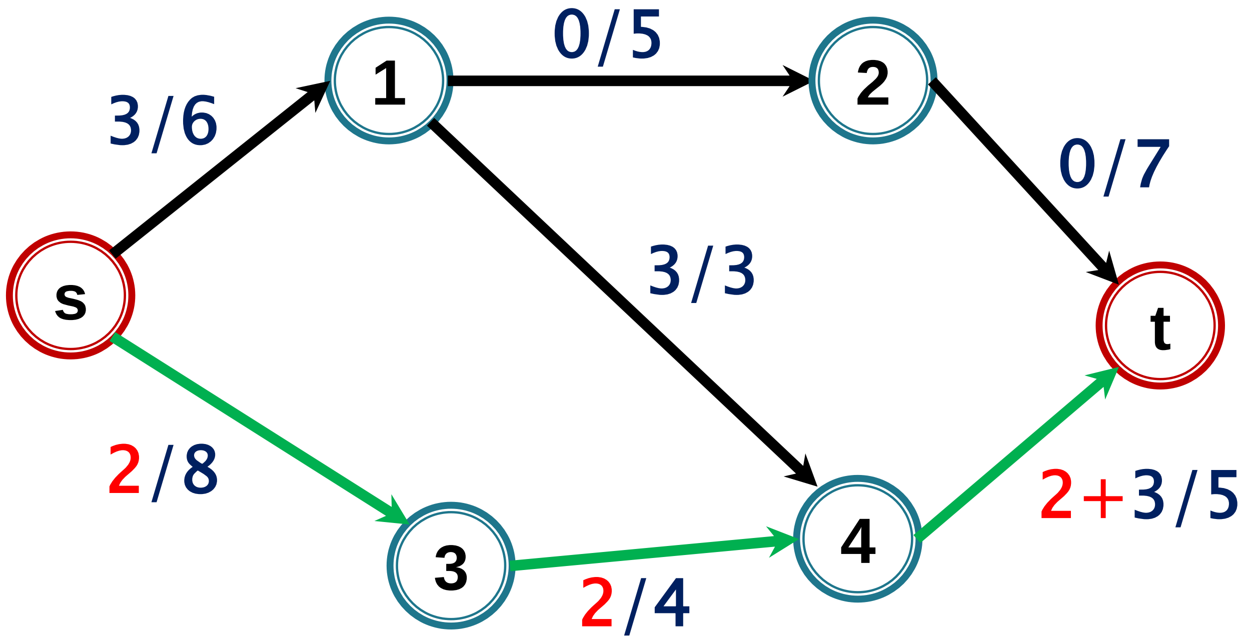


3/6
0/5
0/7
3/3
0/8
3/5
0/4
s
1
2
3
4
t

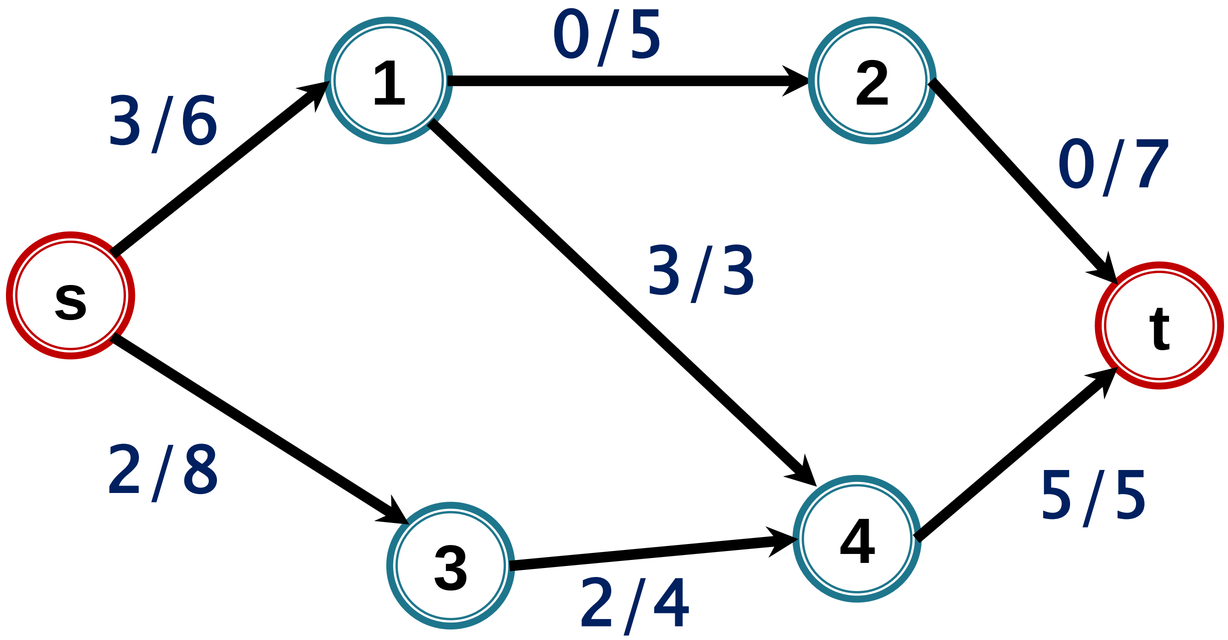

0/5
3/6
1
2
0/7
3/3
s
t
0/8
3/5
4
3
0/4



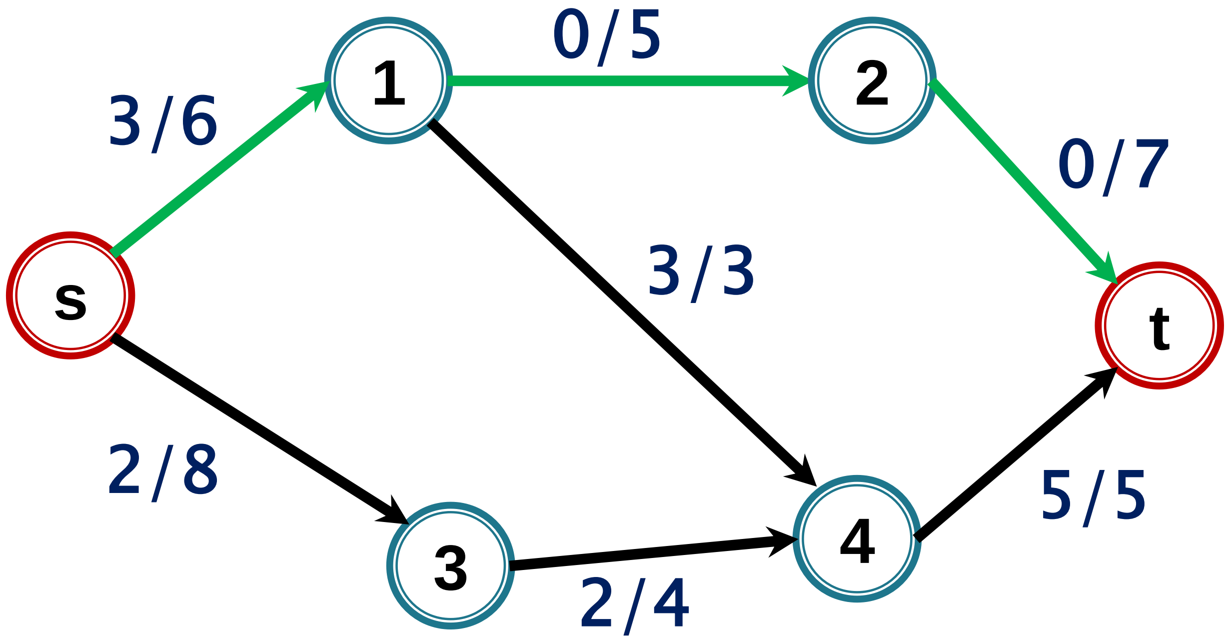
0/5
3/6
1
2
0/7
3/3
s
t
0/8
4
3/5
3
0/4

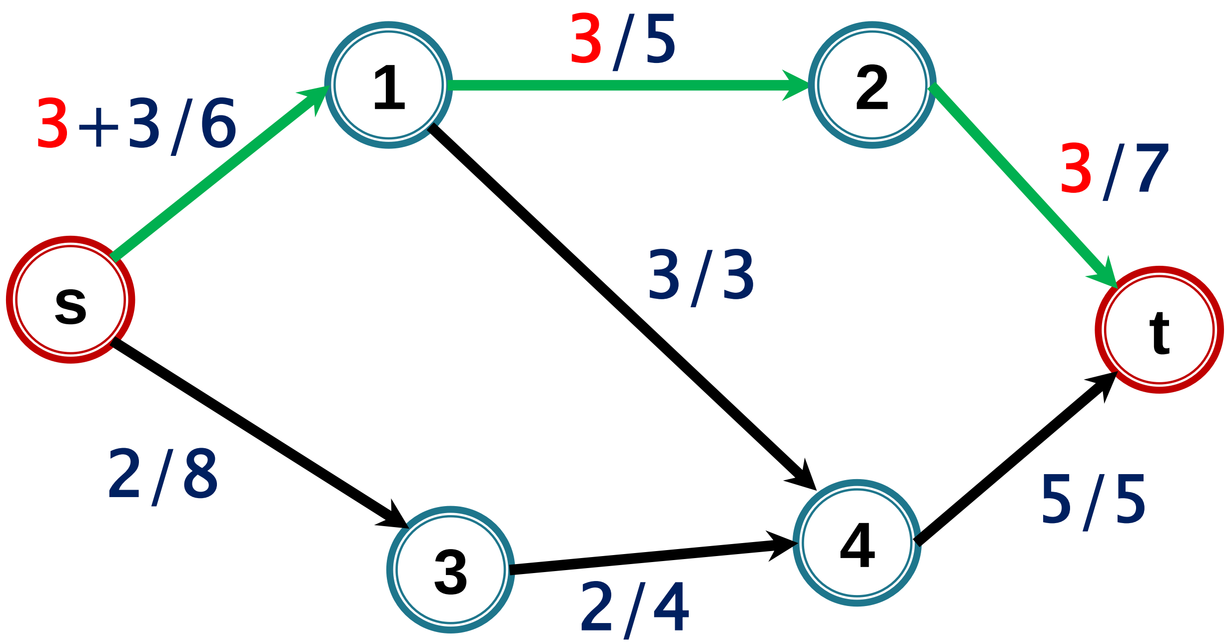


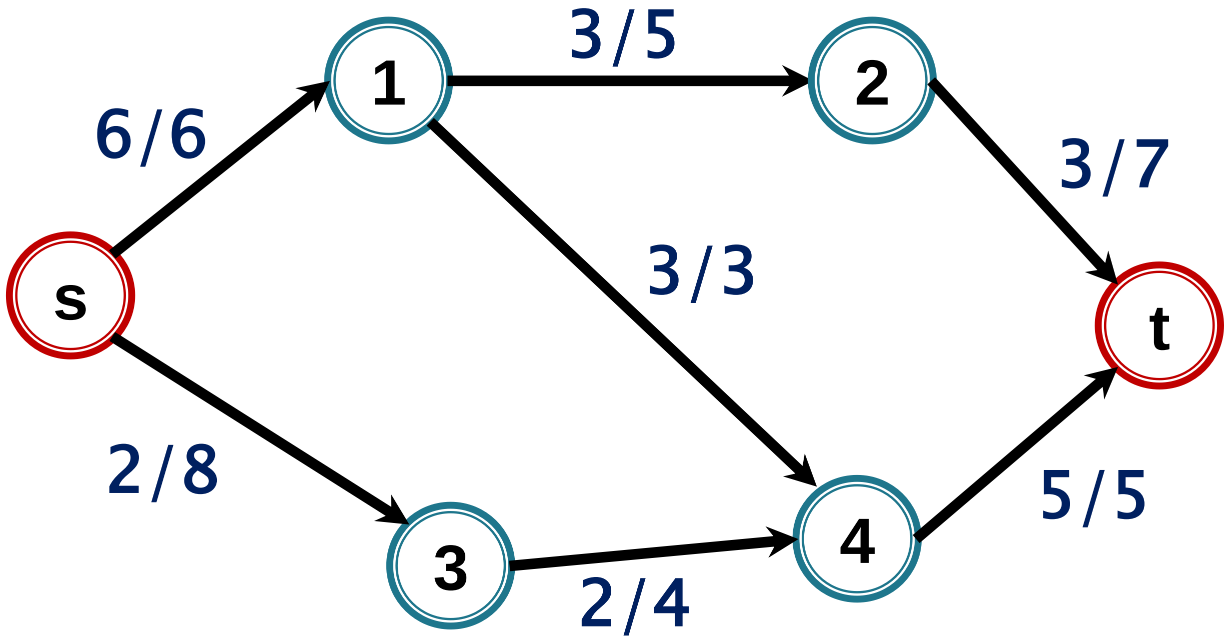
0/5
1
2
3/6
0/7
3/3
s
t
2/8
2+3/5
4
3
2/4

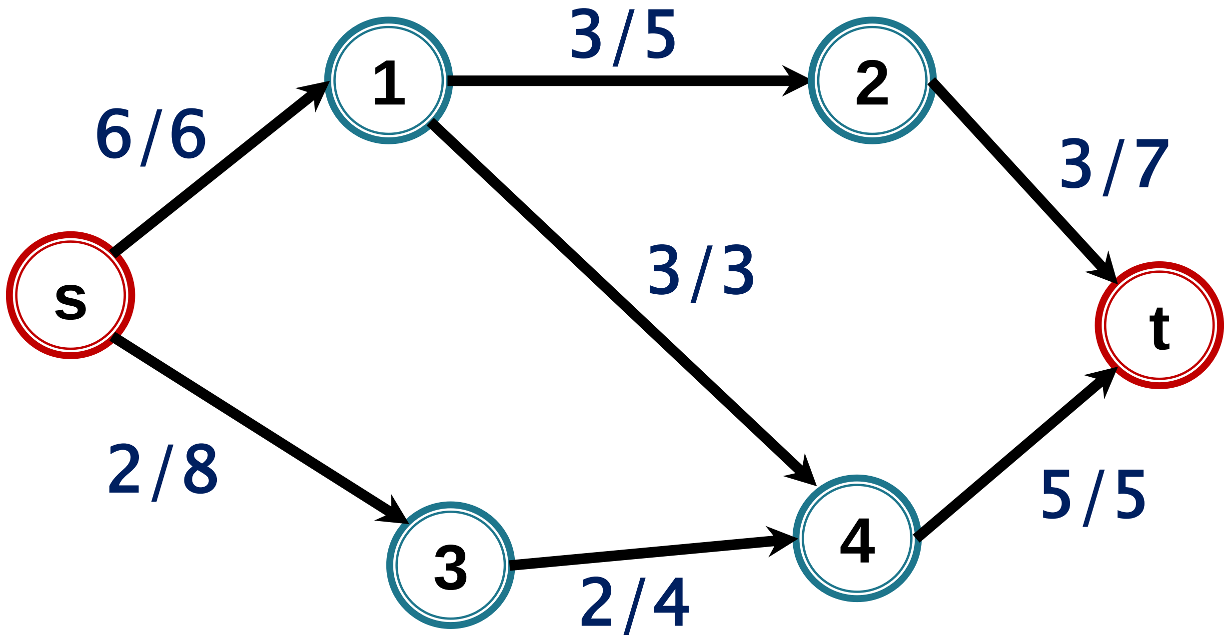


0/5
3/6
1
2
0/7
3/3
s
t
2/8
4
5/5
3
2/4


3/6
0/5
0/7
3/3
2/8
5/5
2/4
s
1
2
3
4
t

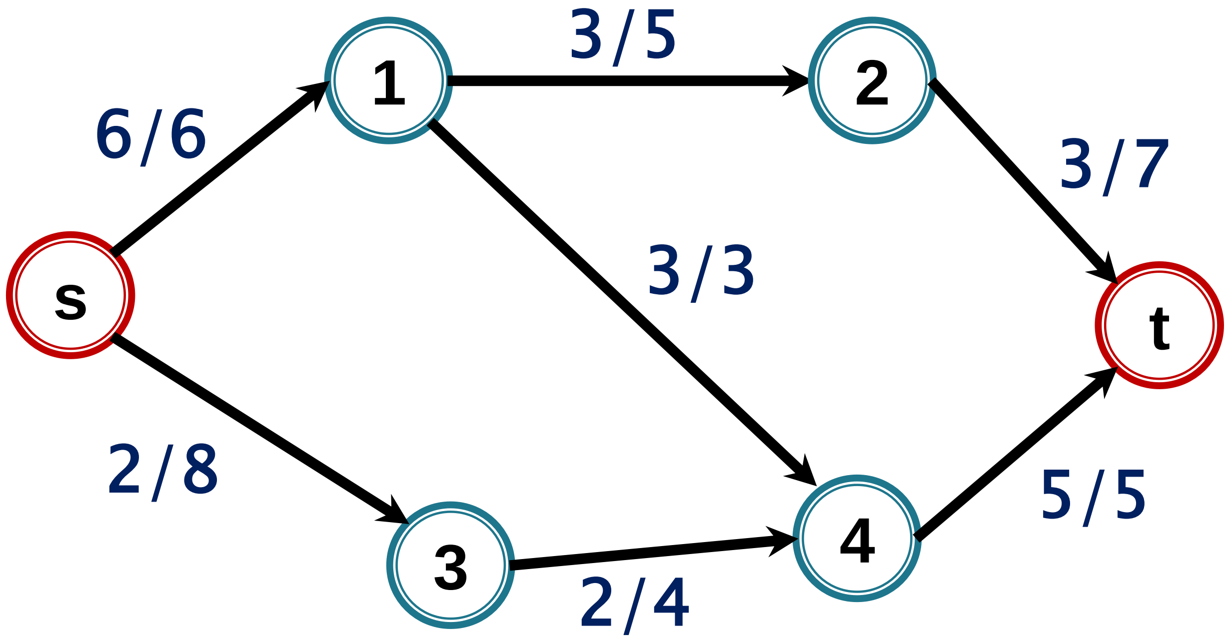

3/5
3+3/6
1
2
3/7
3/3
s
t
2/8
4
5/5
3
2/4


s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5

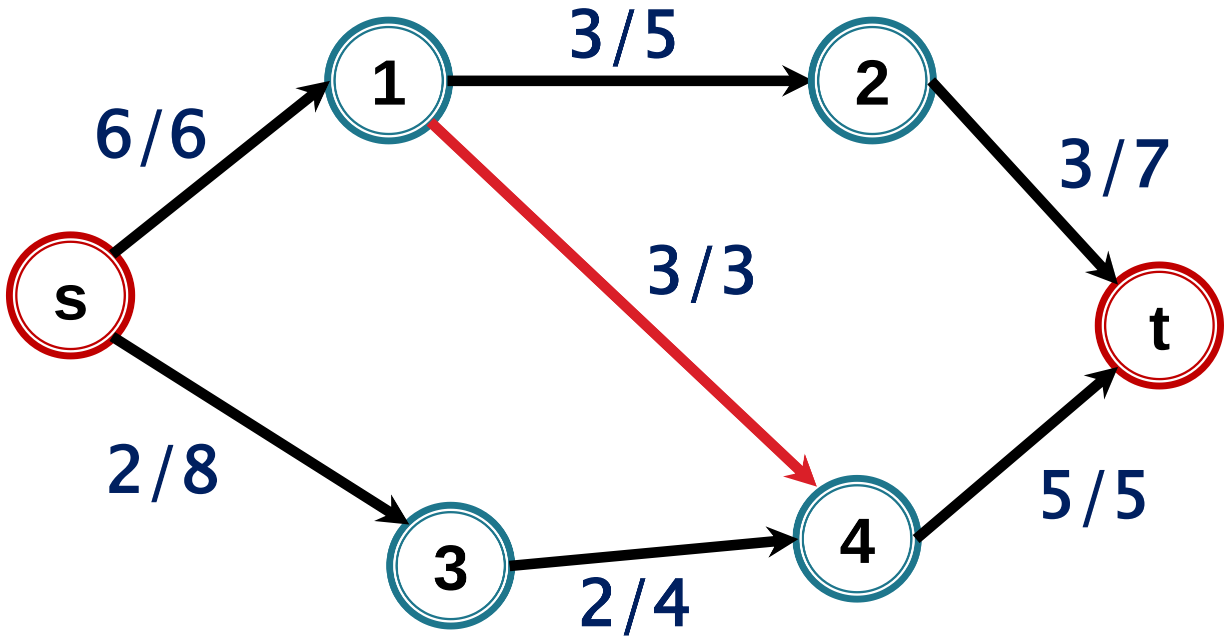


Nu mai există drumuri de la s la t pe care putem crește fluxul

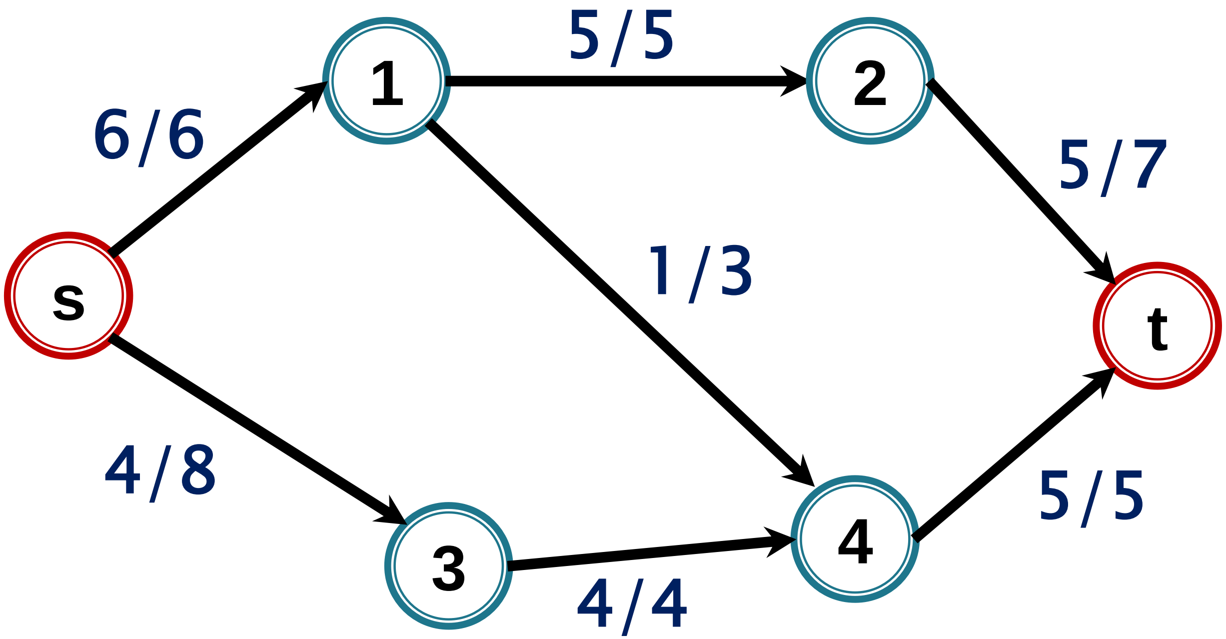
Este maxim fluxul?



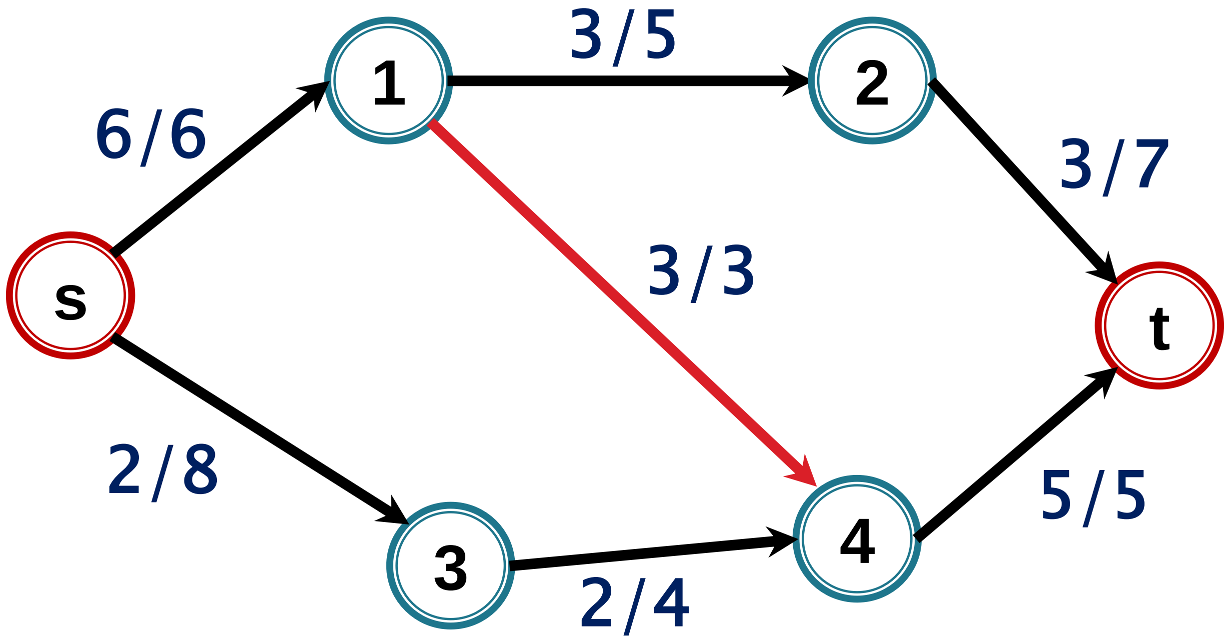
Nu este cantitatea maximă pe care o putem trimite, am trimis greşit pe arcul (1,4) (pe drumul [s, 1, 4, t])

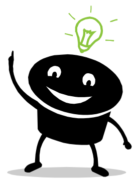


fluxul obținut

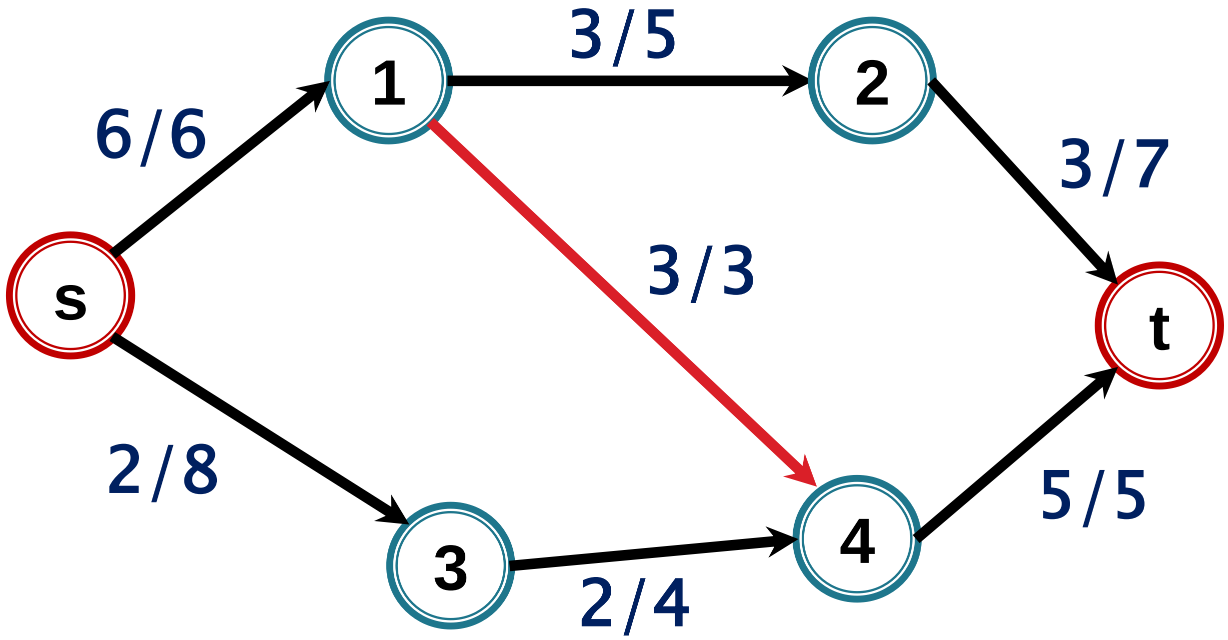


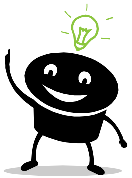
un flux "*mai mare*"



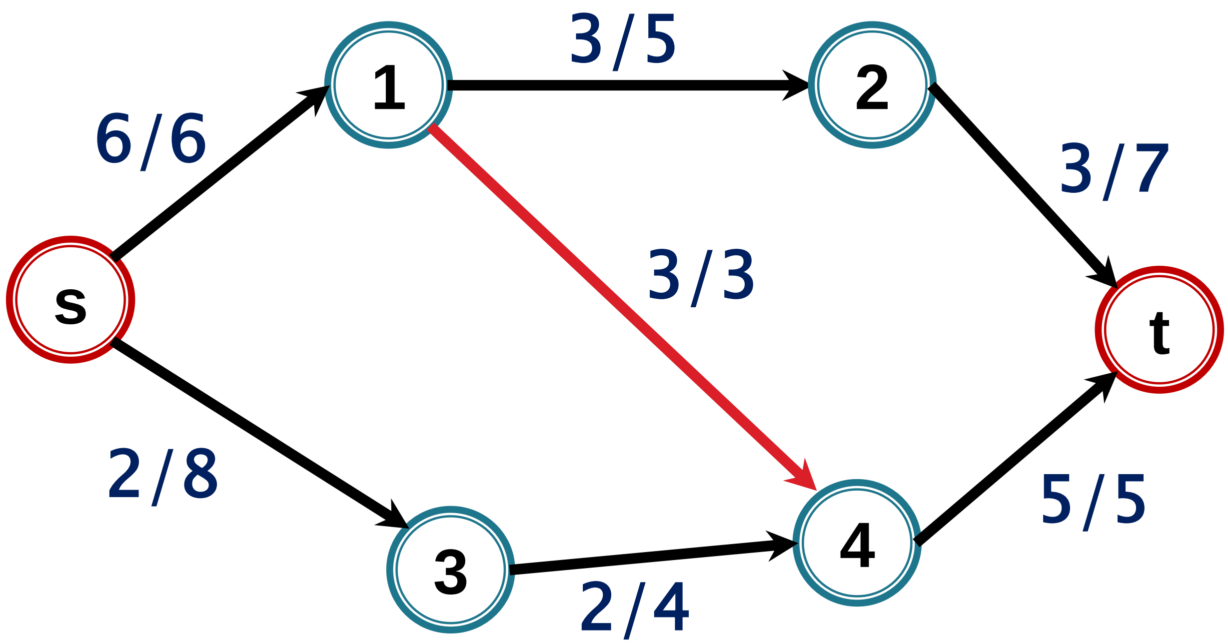


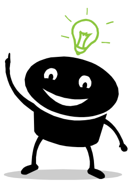
Trebuie să putem corecta (să trimitem flux înapoi pe un arc, pentru a fi direcţionat prin alte arce către destinaţie)





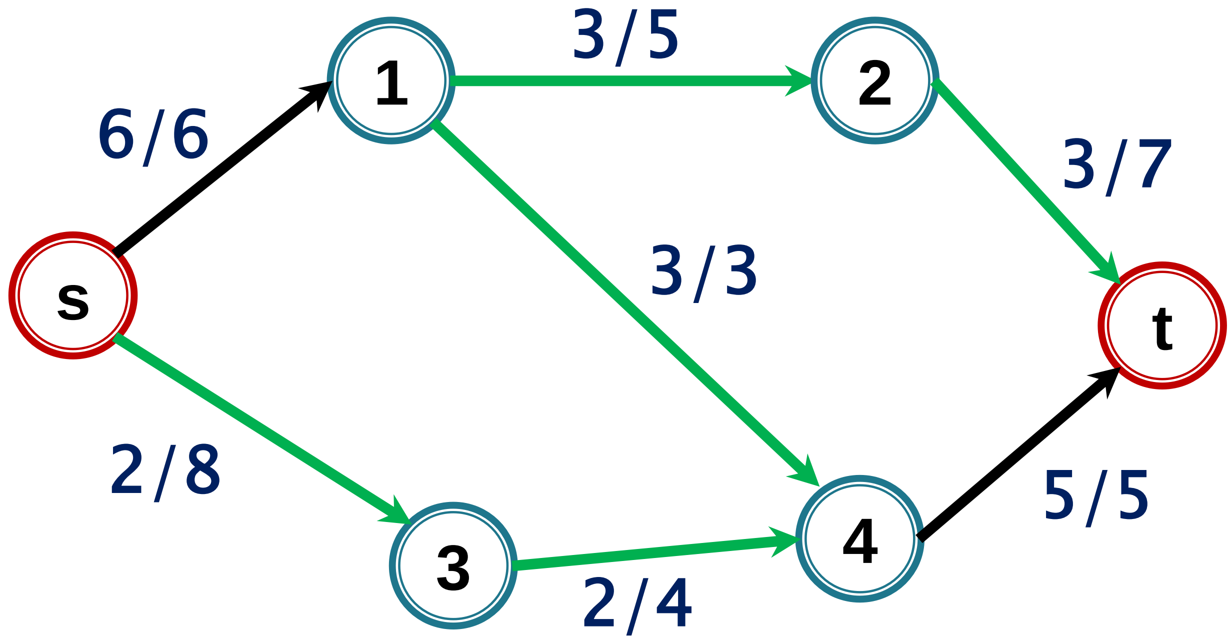
- Trimitem unităţi de flux înapoi pe arcul (1,4)



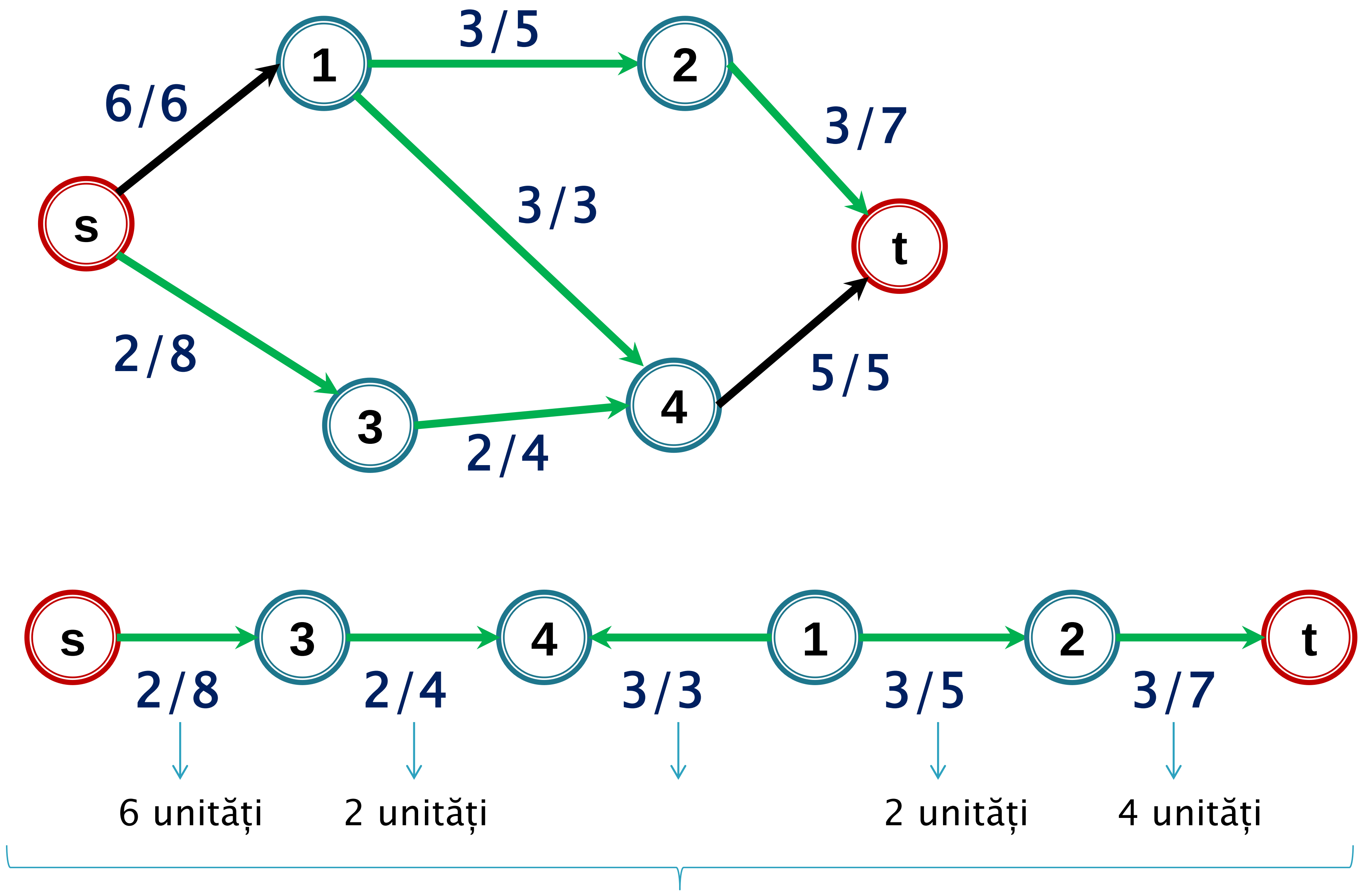


- Trimitem unităţi de flux înapoi pe arcul (1,4)
- Corecția trebuie făcută pe un lanț de la s la t, nu doar pe un arc, altfel fluxul (marfa) va rămâne într-un vârf intermediar

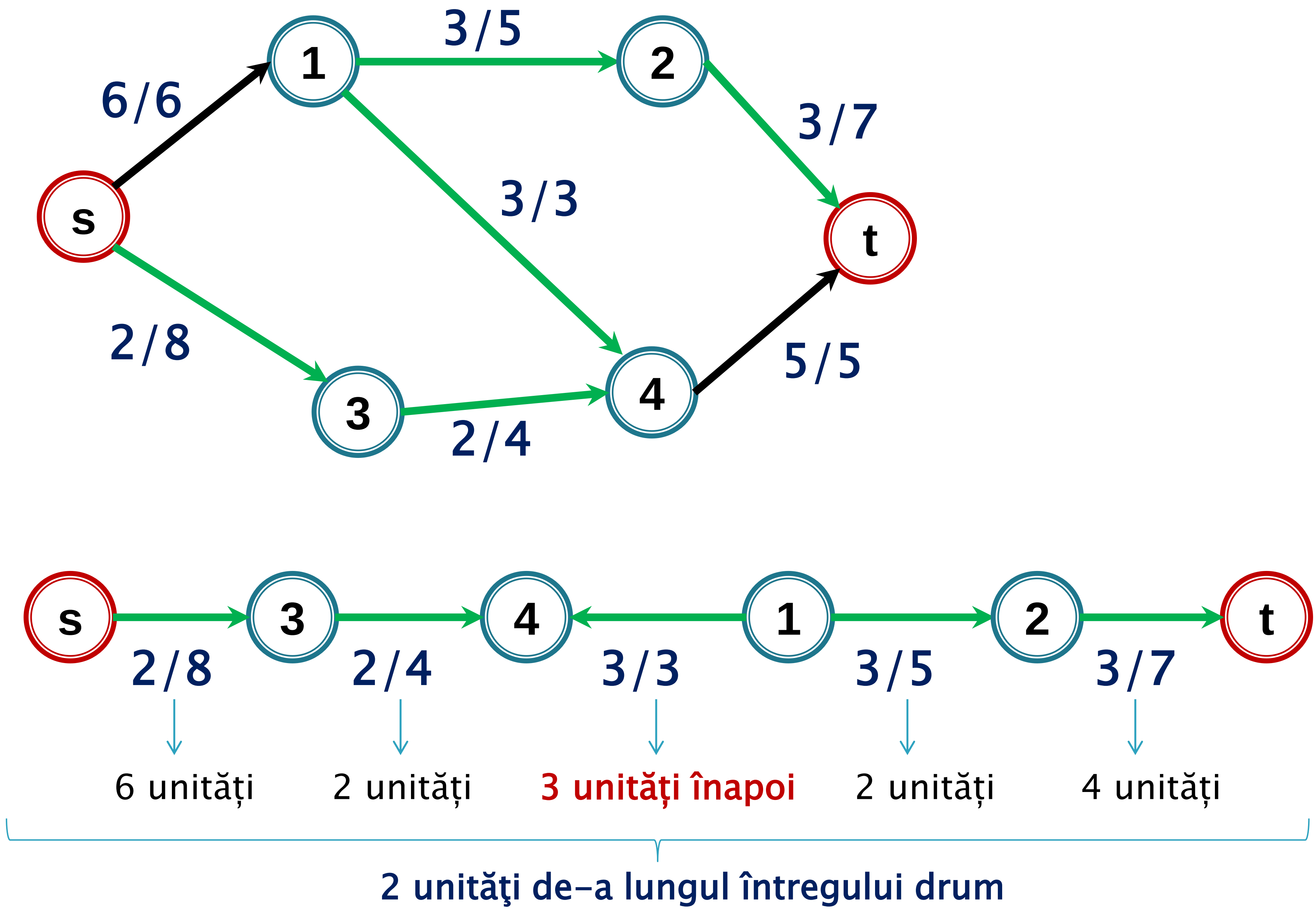
Determinăm un LANȚ (nu drum) de la s la t pe care putem modifica fluxul

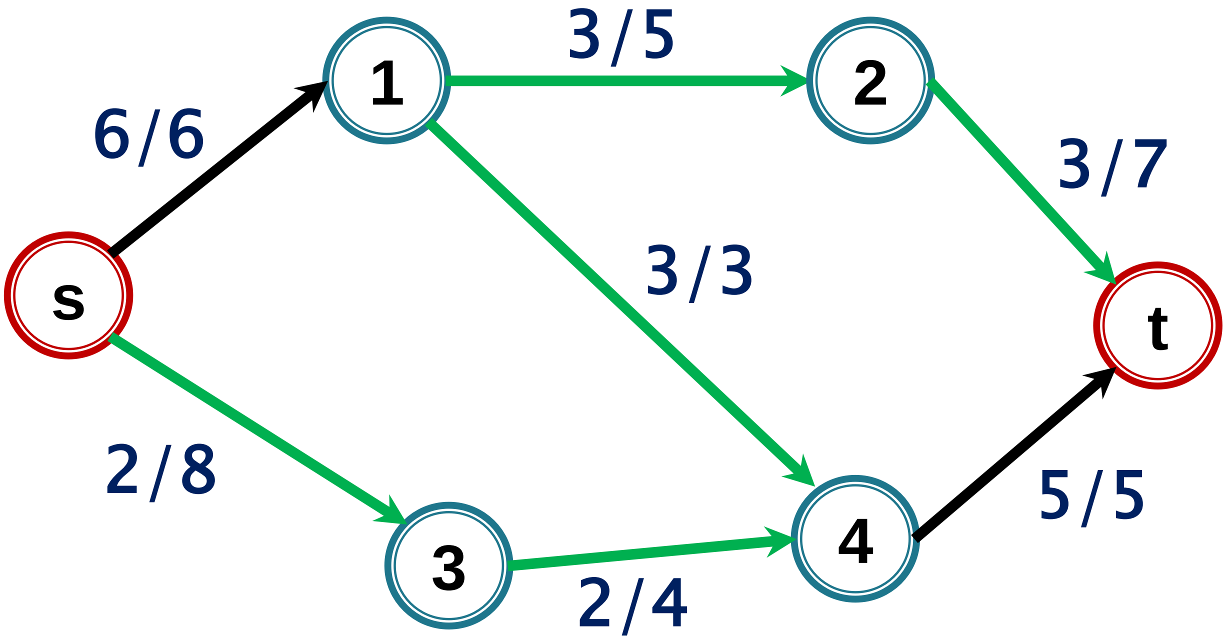


Cu cât putem modifica fluxul pe acest lanț?

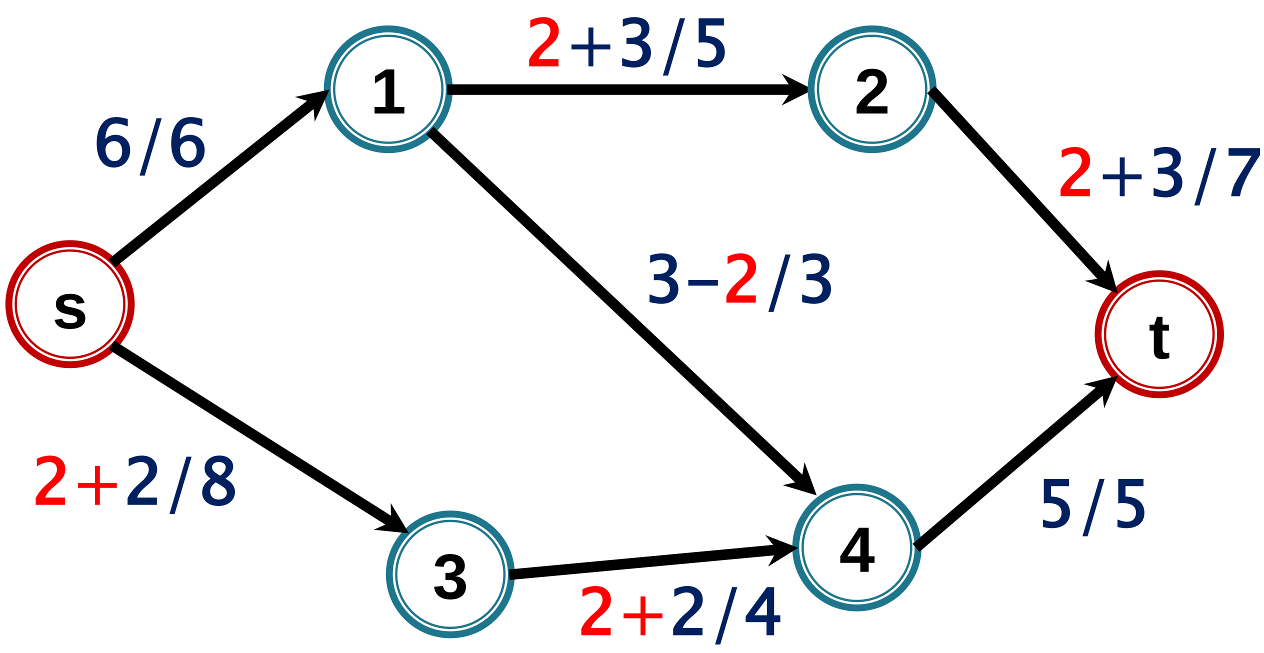


s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5
s
3
4
1
2
t
2/8
2/4
3/3
3/5
3/7
6 unități
2 unități
2 unități
4 unități

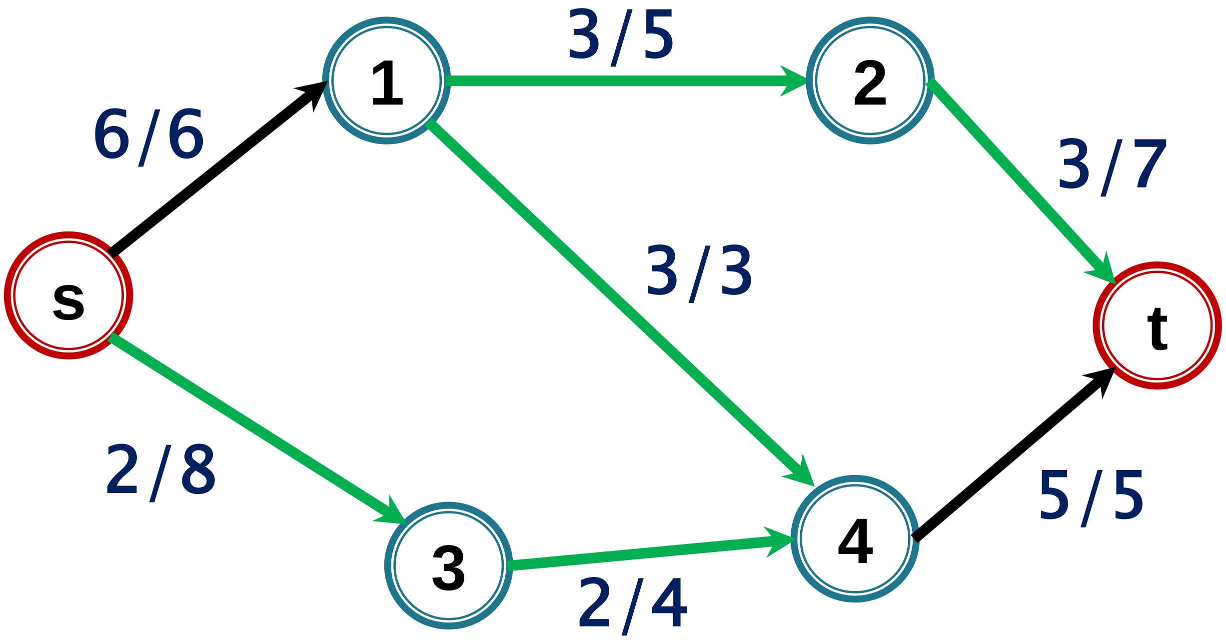

s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5
s
3
4
1
2
t
2/8
2/4
3/3
3/5
3/7
6 unităţi
2 unităţi
3 unităţi înapoi
2 unităţi
4 unităţi
2 unităţi de-a lungul întregului drum

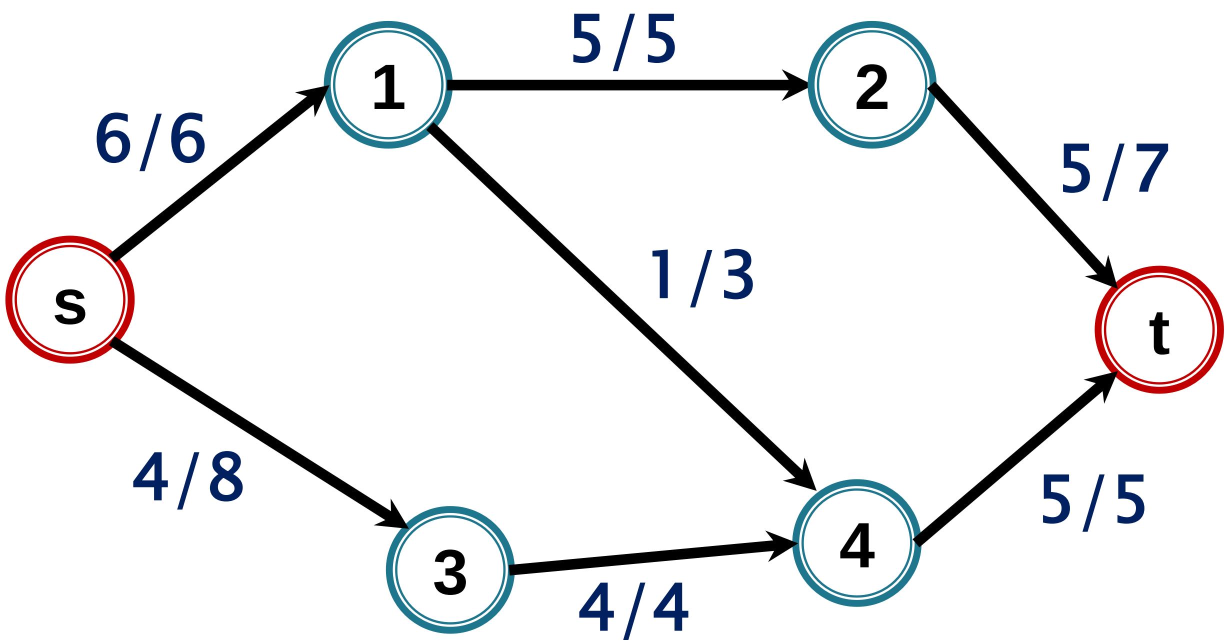


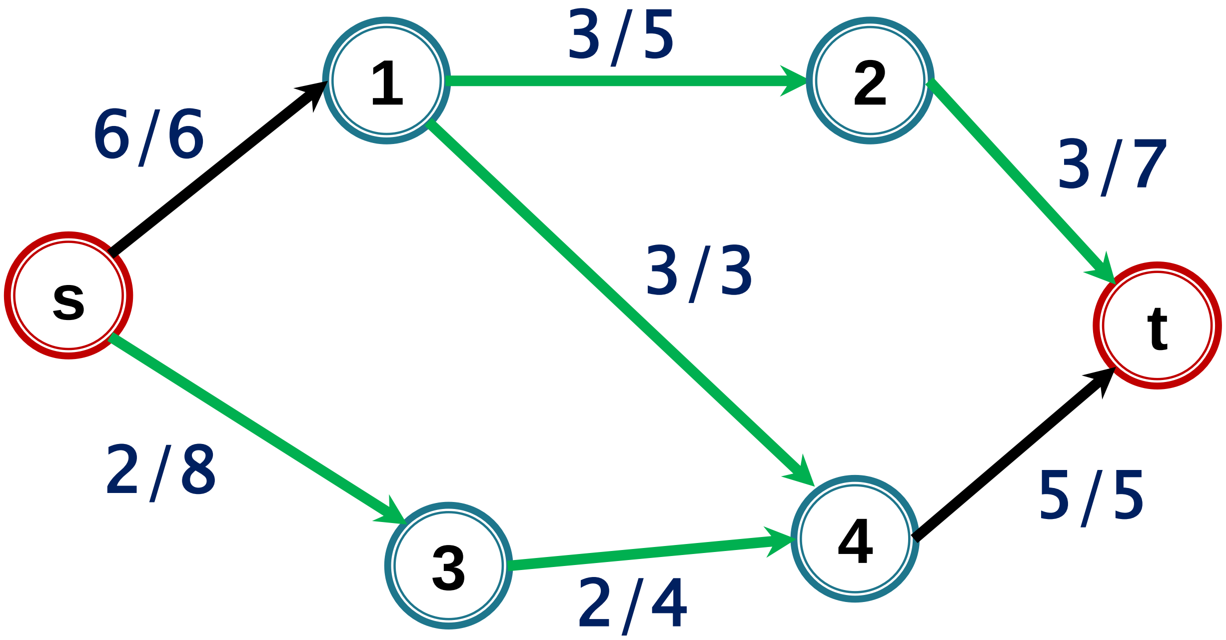
s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
5/5
2/4



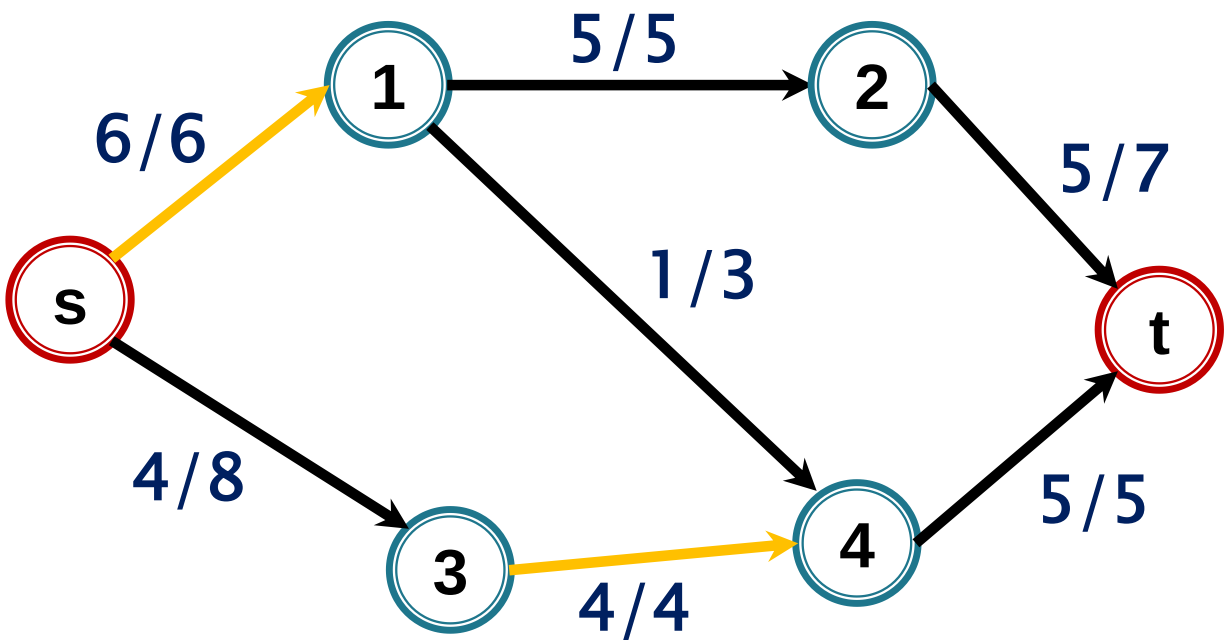
s
1
2
3
4
t
6/6
2+3/5
2+3/7
3−2/3
2+2/8
5/5
2+2/4


3/5
6/6
3/7
3/3
s
1
2
t
2/8
5/5
3
4
2/4


5/5
6/6
5/7
1/3
s
1
2
t
4/8
5/5
3
4
4/4



s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5



s
1
2
3
4
t
6/6
5/5
5/7
1/3
4/8
4/4
5/5

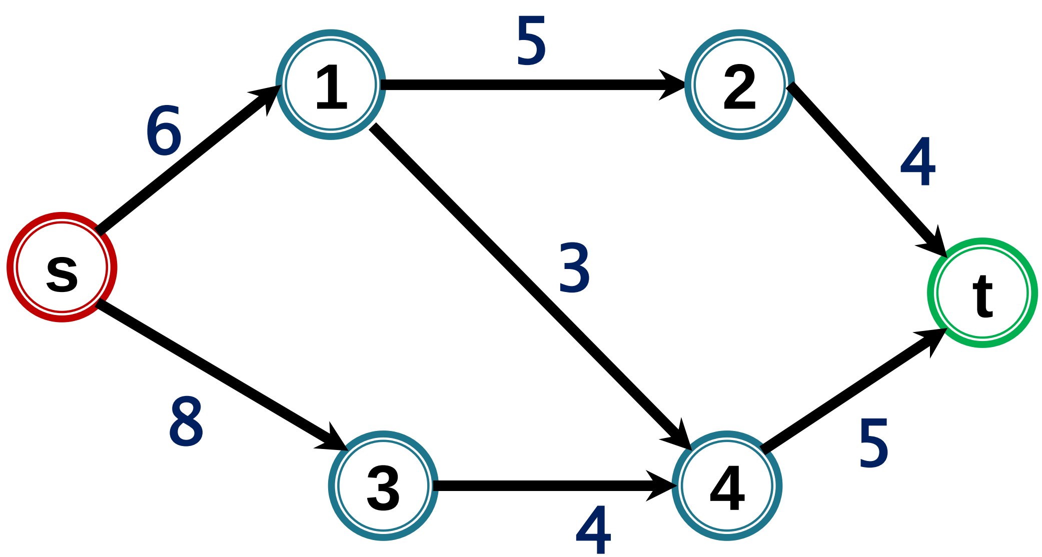
Definiţii

Fluxuri în rețele de transport

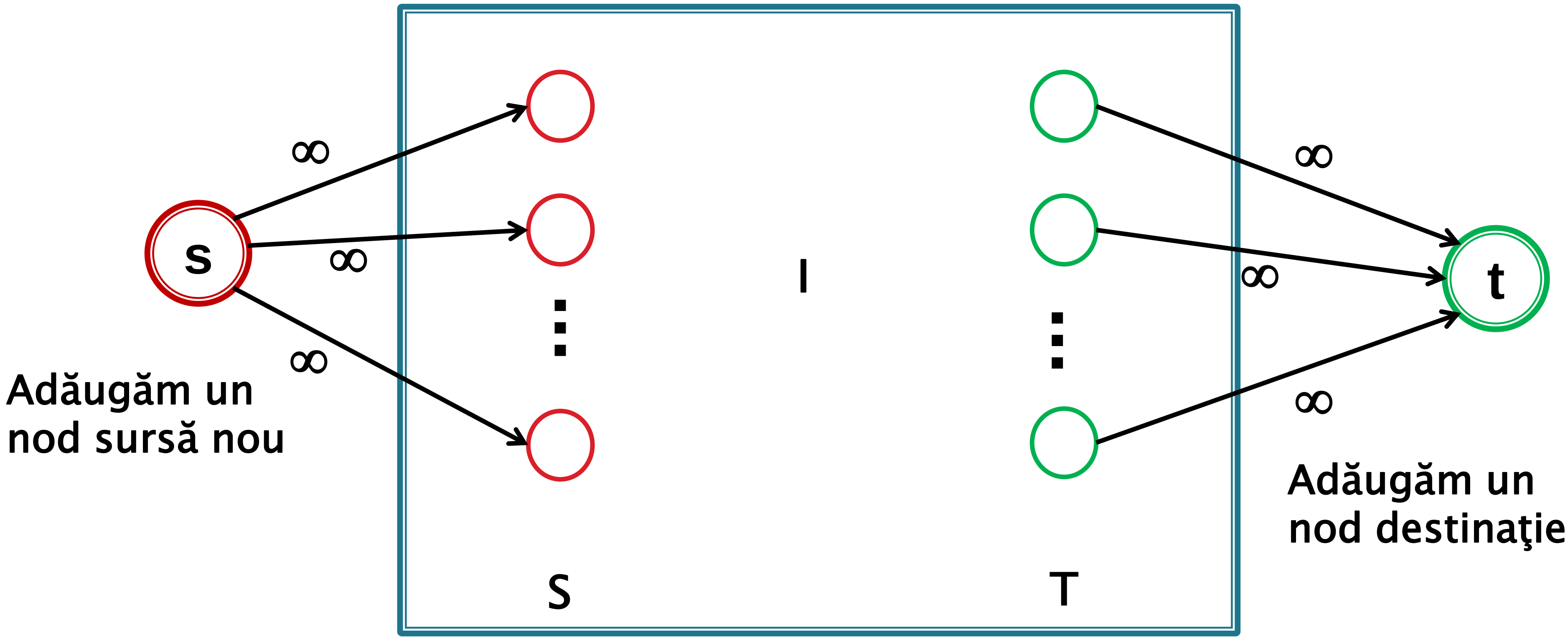
- **Reţea de transport** $N = (G, S, T, I, c)$ unde
  - $G = (V, E)$ – graf orientat cu
    - $V = \mathbf{S} \cup \mathbf{I} \cup \mathbf{T}$
      - S, I , T disjuncte, nevide
      - S – **mulţimea surselor (intrărilor)**
      - T – **mulţimea destinaţiilor (ieşiri)**
      - I – **mulţimea vârfurilor intermediare**
  - $c : E \to \mathbb{N}$ funcţia **capacitate** (cantitatea maximă care poate fi transportată prin fiecare arc)

Ipoteze pentru rețeaua N

- $S = \{s\}$ – o singură sursă
- $T = \{t\}$ – o singură destinație
- $d^-(s) = 0$ – în sursă nu intră arce
- $d^+(t) = 0$ – din destinație nu ies arce



- **Ipotezele nu sunt restrictive,** orice reţea poate fi transformată într-o reţea echivalentă de acest tip (din punct de vedere al valorii fluxului)



Reţeaua N

Ipoteze pentru rețeaua N

- $S = \{s\}$ – o singură sursă
- $T = \{t\}$ – o singură destinație
- $d^{-}(s) = 0$ – în sursă nu intră arce
- $d^{+}(t) = 0$ – din destinație nu ies arce
- orice vârf este accesibil din s

- Un **flux** într-o reţea de transport $N = (G, S, T, I, c)$ este o funcţie $f: E \rightarrow \mathbb{N}$ cu proprietăţile

    1) $0 \le f(e) \le c(e),\ \forall\ e \in E(G)$ *condiţia de **mărginire***

- Un **flux** într-o reţea de transport N = (G, S, T, I, c) este o funcţie $f: E \to \mathbb{N}$ cu proprietăţile

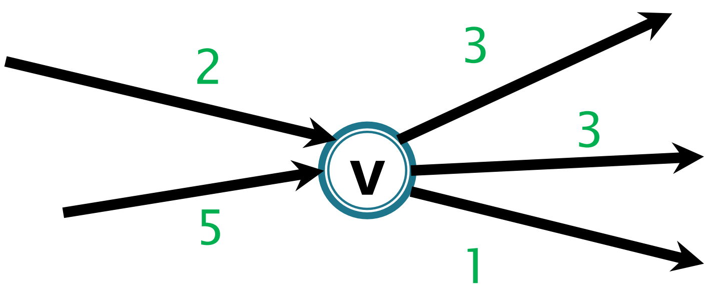
  1) $0 \le f(e) \le c(e),\ \forall\ e \in E(G)$ *condiţia de* ***mărginire***

  2) Pentru orice vârf **intermediar** $v \in I$

$$\sum_{uv \in E} f(uv) = \sum_{vu \in E} f(vu)$$

condiţia de ***conservare a fluxului***

(fluxul total care intră în v = fluxul total care iese din v)

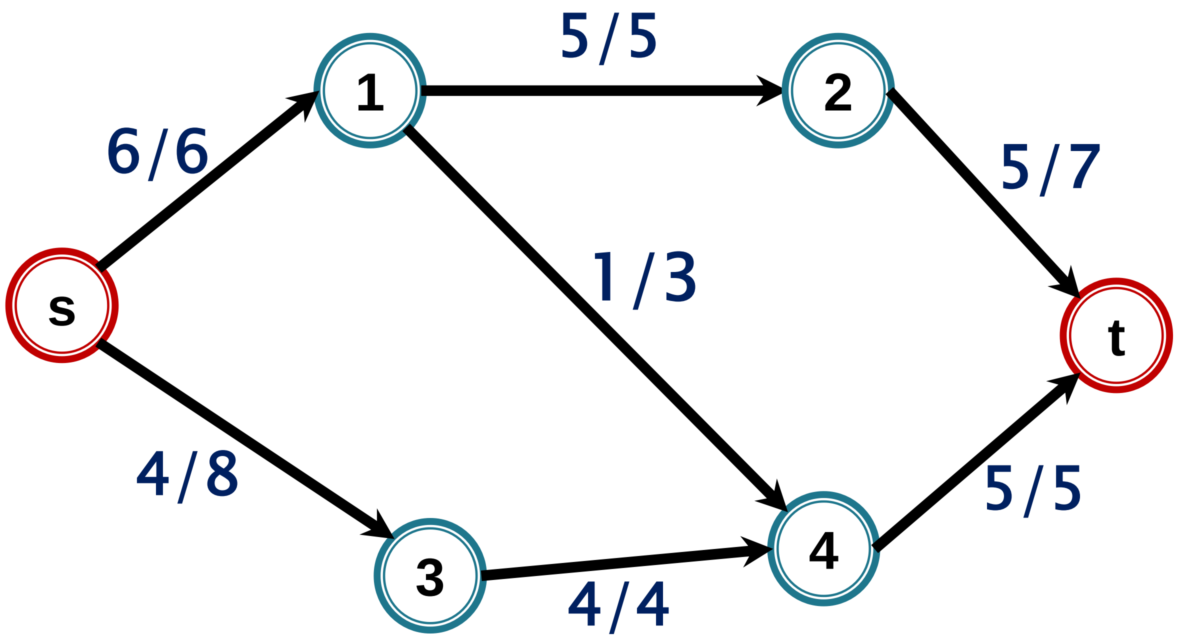


- **Notaţii**
  - $\overline{X}$
  - $f^-(v), f^+(v)$
  - $f(X,Y),\ \ \mathbf{X}, \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{V}$
  - $f^+(X),\ \ \mathbf{X} \subseteq \mathbf{V}$

În general, pentru orice funcție $g : E \to \mathbb{N}$ **vom folosi notaţii similare**

- **Valoarea fluxului** *f* se defineşte ca fiind

$$val(f) = f^{+}(s) = \sum_{su \in E} f(su)$$



val(f) = ?

- **Valoarea fluxului** *f* se defineşte ca fiind

$$val(f) = f^{+}(s)$$

- Vom demonstra ulterior că are loc relaţia

$$val(f) = f^{+}(s) = f^{-}(t)$$

Problema fluxului maxim

- Fie N o reţea.

Un flux f* se numeşte **flux maxim în N** dacă

$$val(f^*) = \max\{val(f) \mid f \text{ este flux în N}\}$$

Problema fluxului maxim

- Fie N o reţea.

  Un flux f* se numeşte **flux maxim în N** dacă

$$val(f^*) = \max\{val(f) \mid f \textbf{ este flux în N}\}$$

- **Observaţie**: Orice reţea admite cel puţin un flux, spre exemplu fluxul vid:

  $f(e) = 0, \forall e \in E$

Problema fluxului maxim

- Fie N o reţea.

  Să se determine f* un **flux maxim în N**

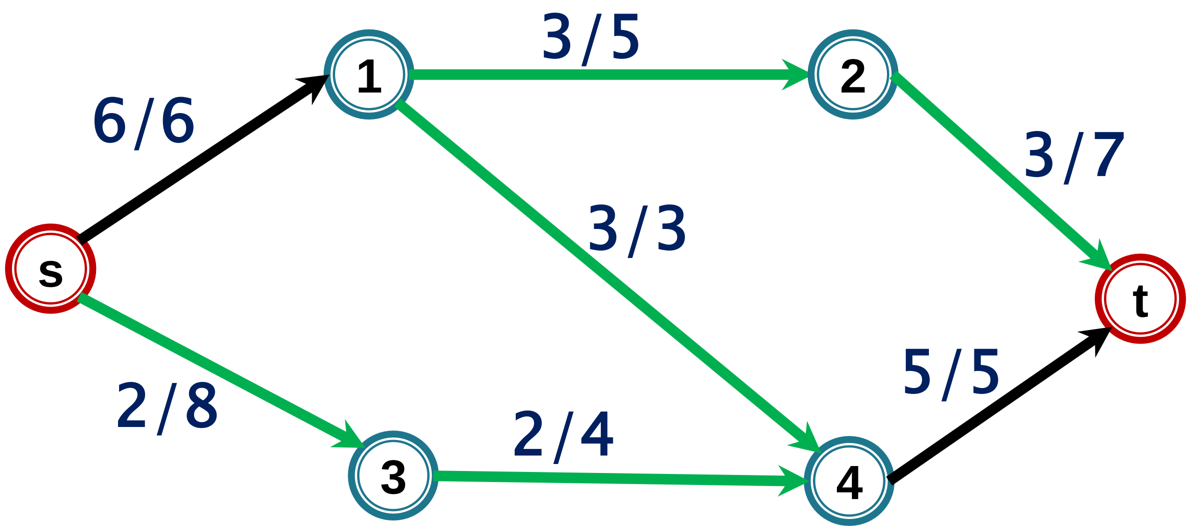
Algoritmul FORD-FULKERSON

de determinare a unui flux maxim

+ a unei tăieturi minime

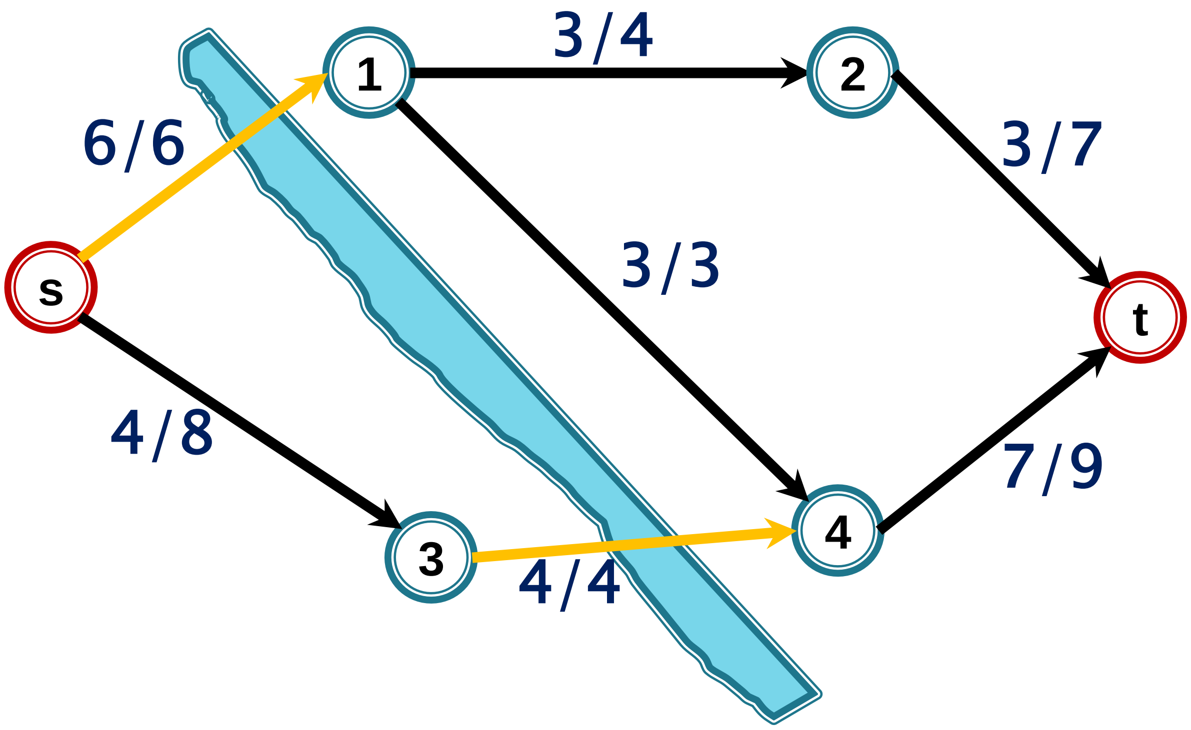
Algoritmul Ford-Fulkerson

Amintim din exemplele anterioare:



arc în sens invers,
putem trimite înapoi 3 unități de flux

arc în sens direct,
mai putem trimite 5−3=2 unități



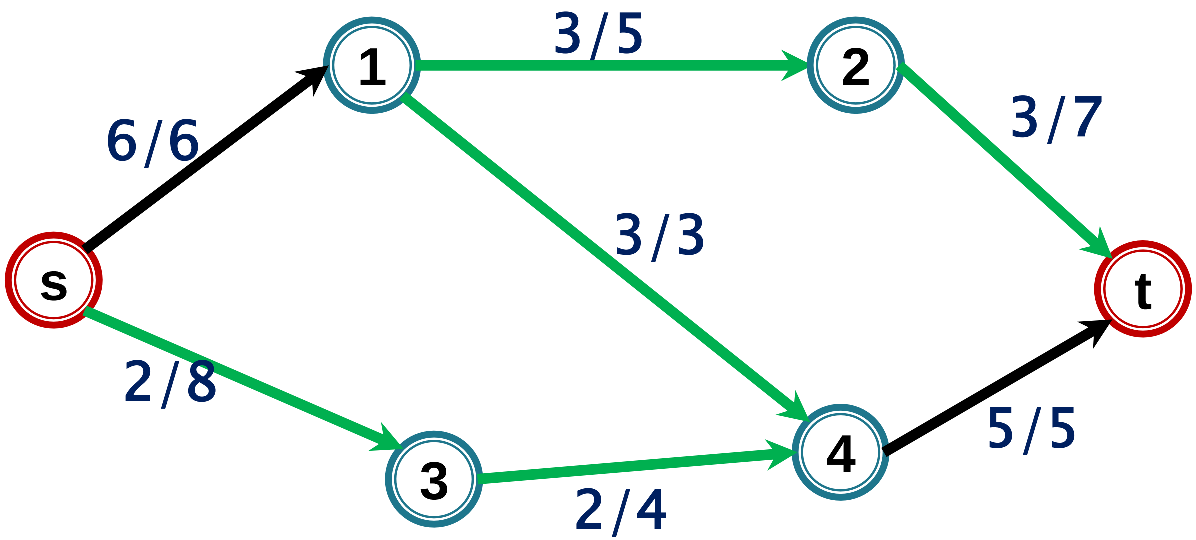
Fluxul este maxim – în mulțimea de arce evidențiată toate arcele au flux=capacitate și nu putem construi drumuri de la s la t care nu conțin arce din această mulțime (s-t tăietură)

Algoritmul Ford-Fulkerson

Definim noțiunile necesare descrierii și studiului algoritmului:

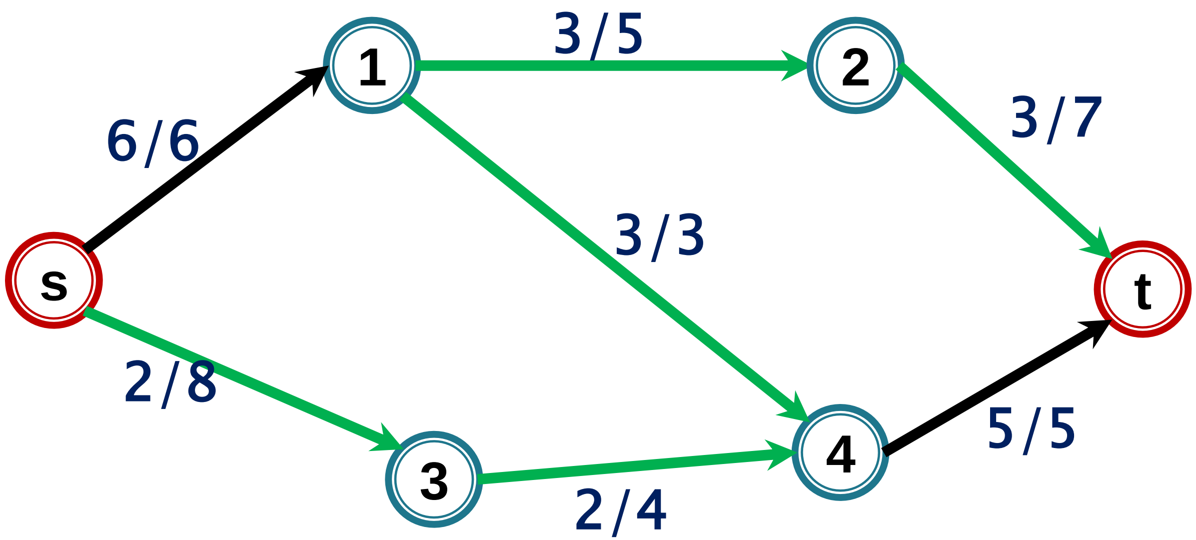
- **s-t lanț f-nesaturat**
  - arc direct
  - arc invers
  - capacitate reziduală arc, lanţ
- Operația de **revizuire a fluxului** de-a lungul unui s-t lanț *f-nesaturat*
- **Tăietură în rețea**
  - capacitatea unei tăieturi

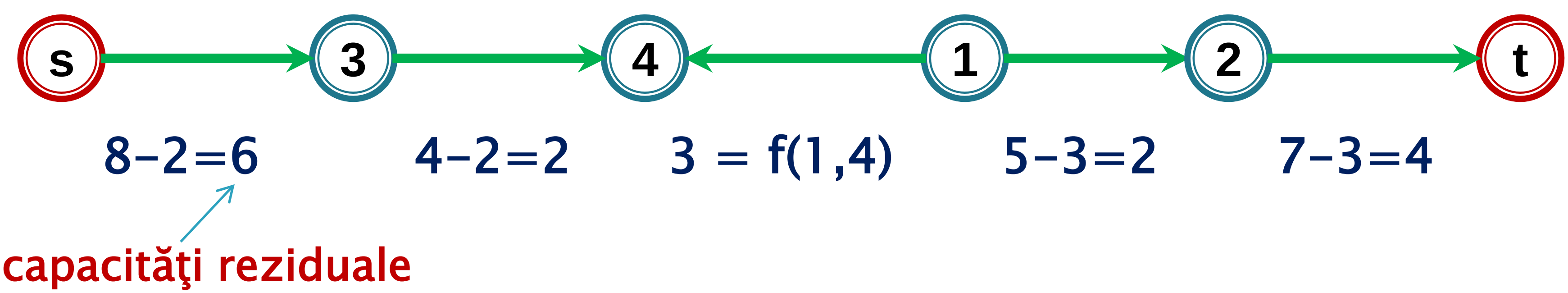
- Fie N reţea, f flux în N, P un s-t lanţ
- Asociem fiecărui arc *e* din P o pondere, numită **capacitate reziduală** în P



capacităţi reziduale?

- Fie N reţea, f flux în N, P un s-t lanţ
- Asociem fiecărui arc *e* din P o pondere, numită **capacitate reziduală** în P





- **Capacitatea reziduală** a lanţului P

i(P) = ?

= cu cât putem revizui maxim fluxul de-a lungul lui P

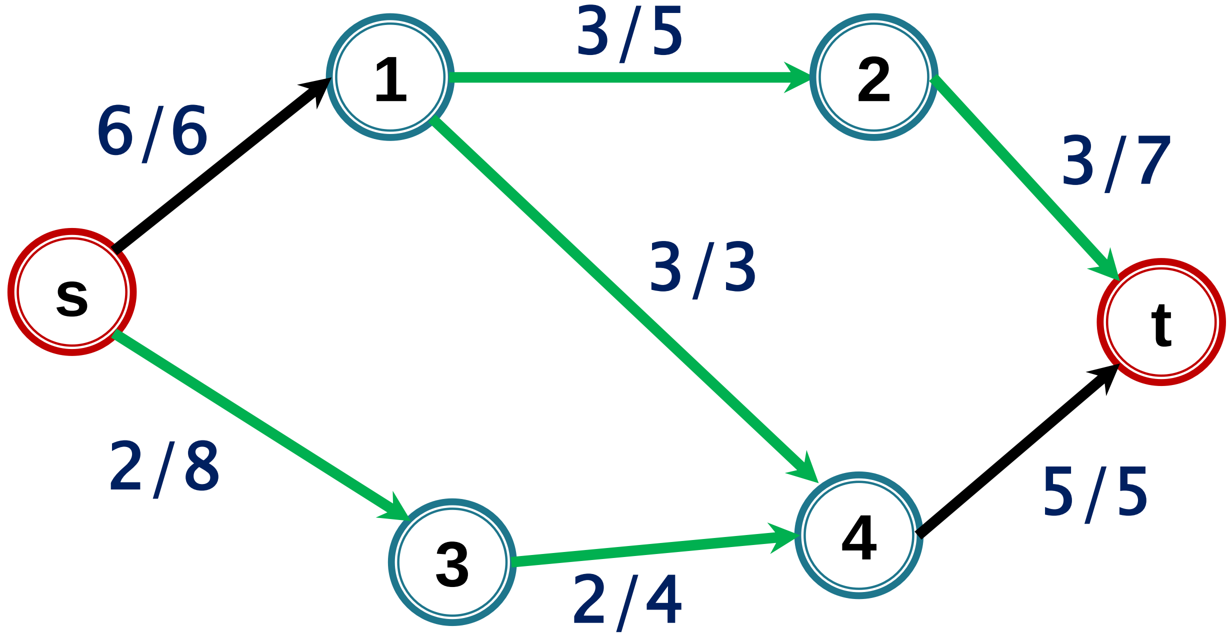
- **Capacitatea reziduală** a lanţului P

$$i(P) = \min\{6, 2, 3, 2, 4\} = 2$$

Fluxuri în rețele de transport

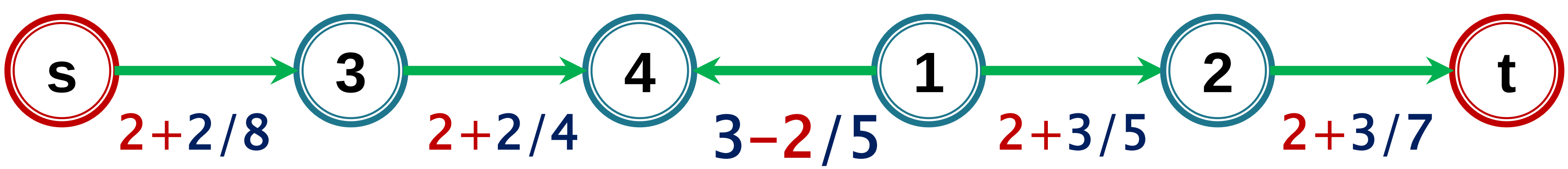
- Fie N- rețea, f flux în N, P un s-t lanţ **f-nesaturat**.
- **Fluxul revizuit de-a lungul lanţului P** se defineşte ca fiind $f_P : E \to \mathbb{N}$,

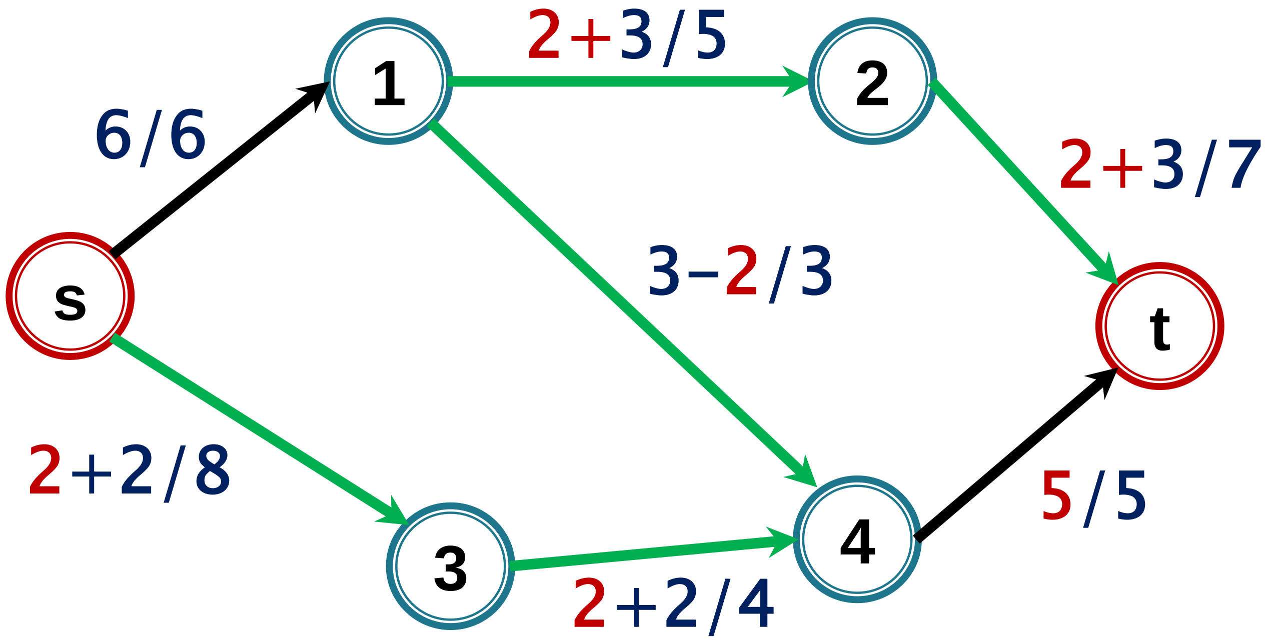
$$f_P(e) = \begin{cases} f(e) + i(P), & \text{dacă } e \text{ este arc direct în } P \\ f(e) - i(P), & \text{dacă } e \text{ este arc invers în } P \\ f(e), & \text{altfel} \end{cases}$$



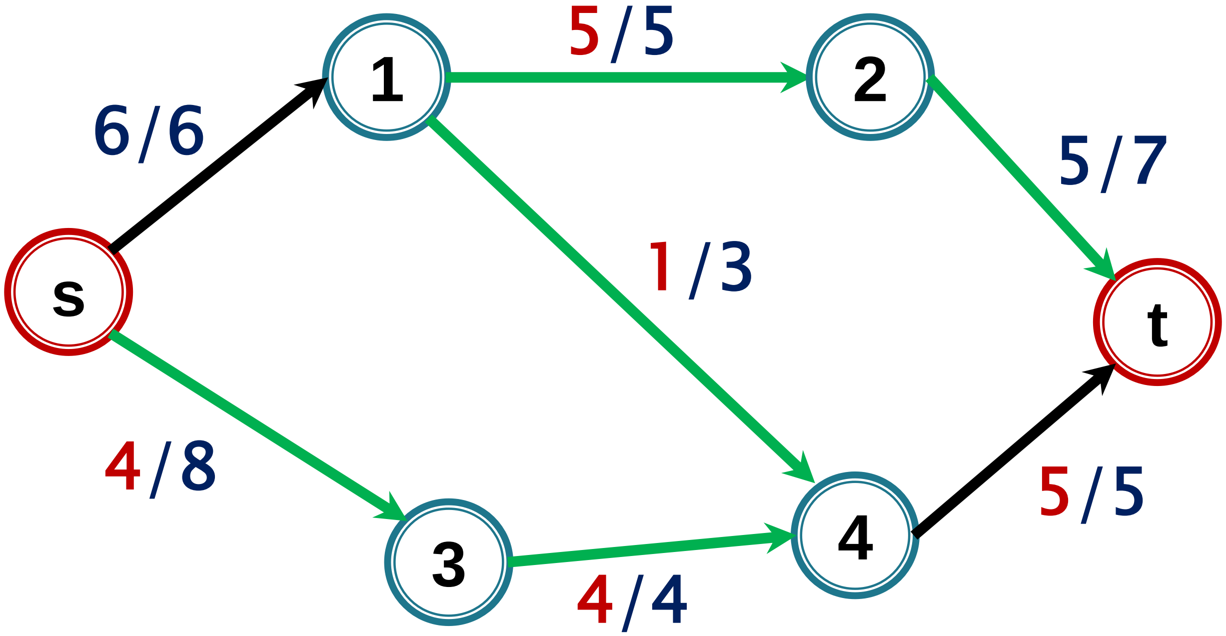
Considerăm s-t lanţul P evidenţiat şi revizuim fluxul

i(P) = 2



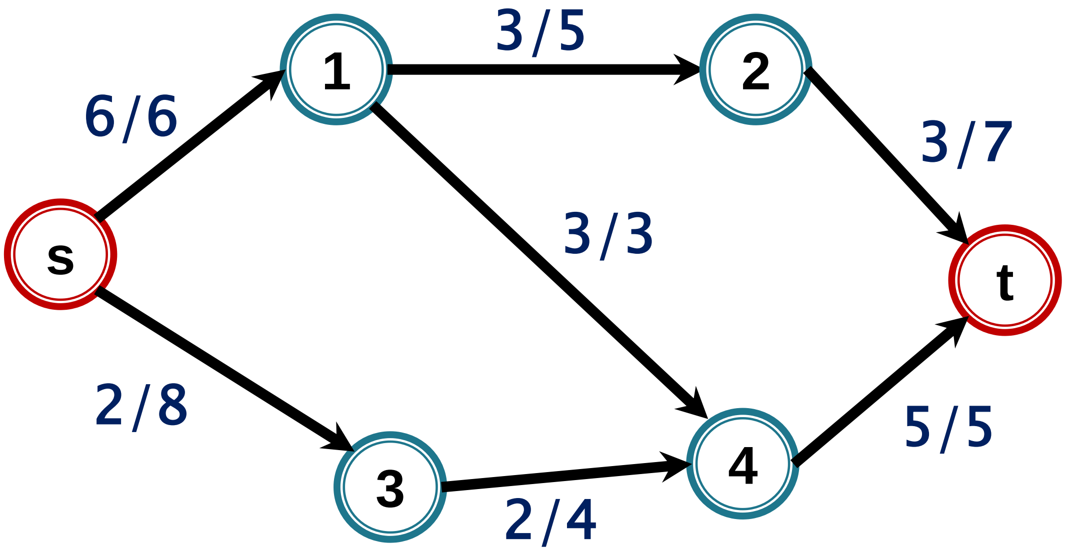


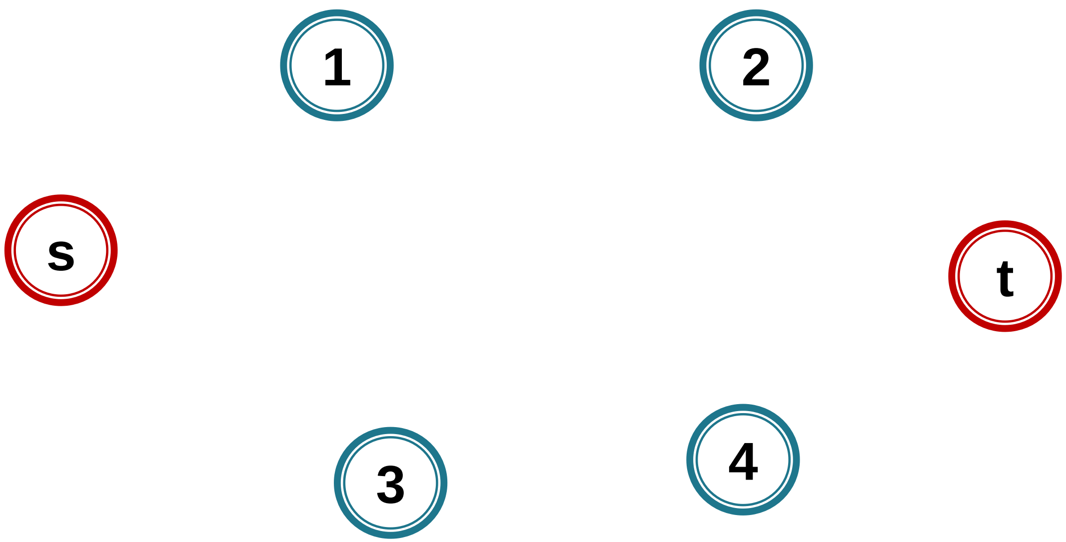
s
1
2
3
4
t
6/6
2+3/5
2+3/7
3−2/3
2+2/8
2+2/4
5/5



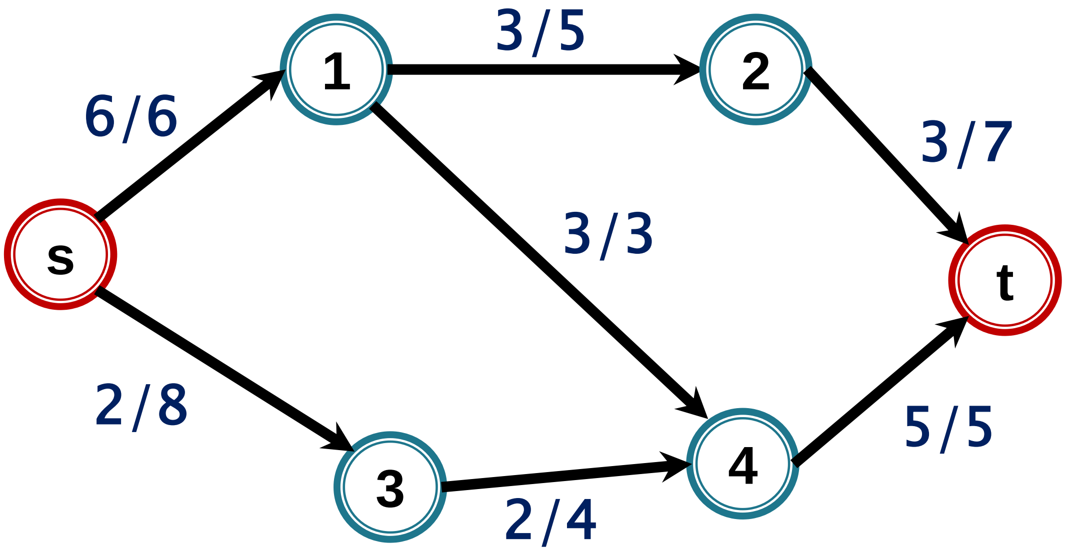
Fluxul după revizuirea de-a lungul lanţului P

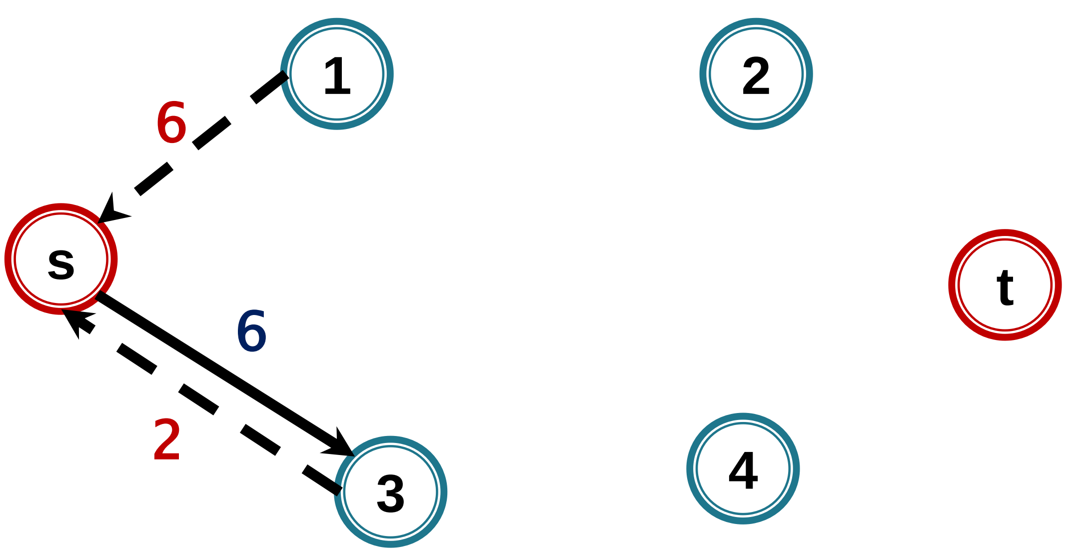
Graf rezidual



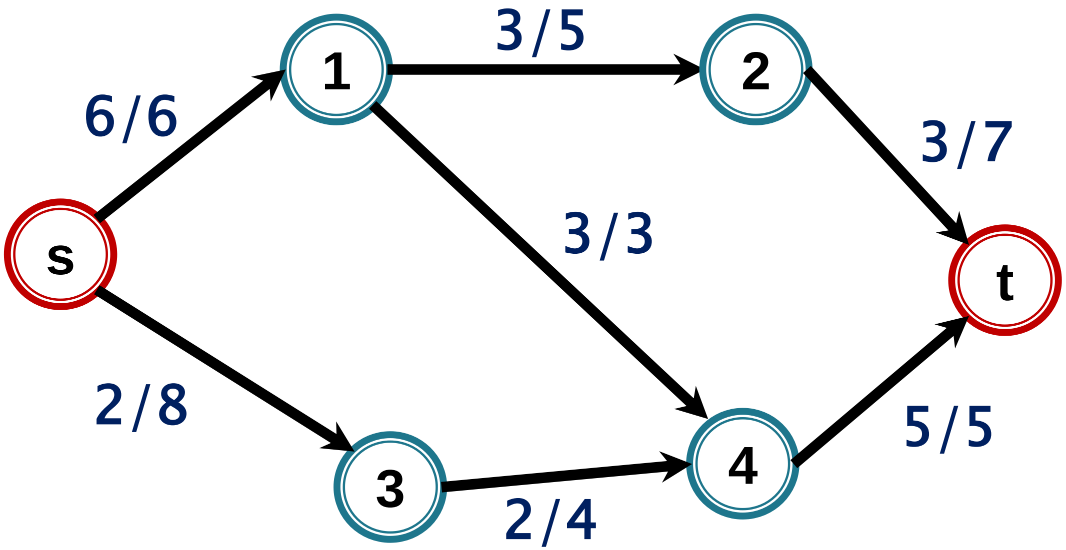


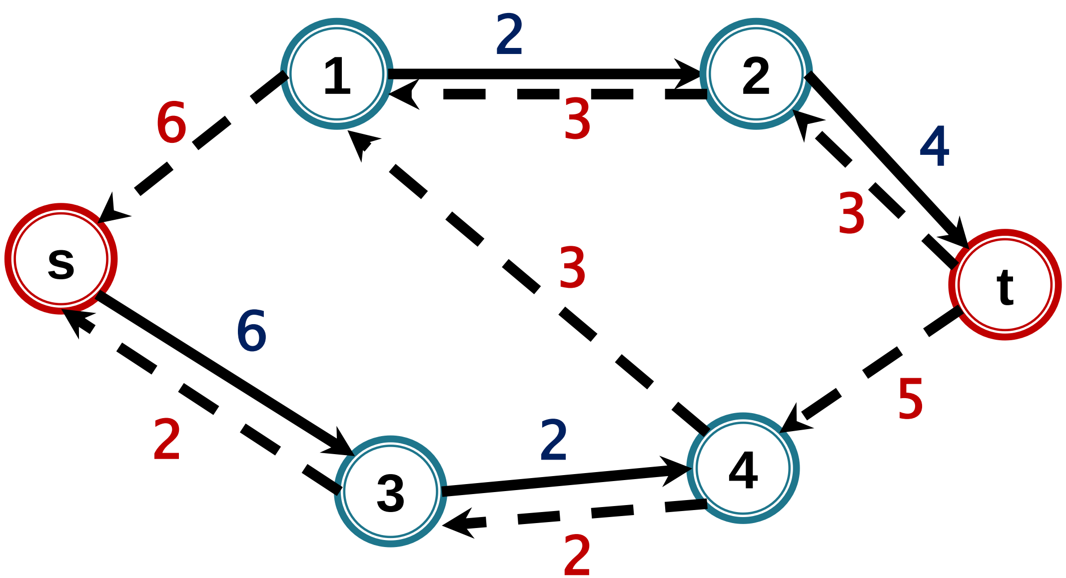
Graf rezidual



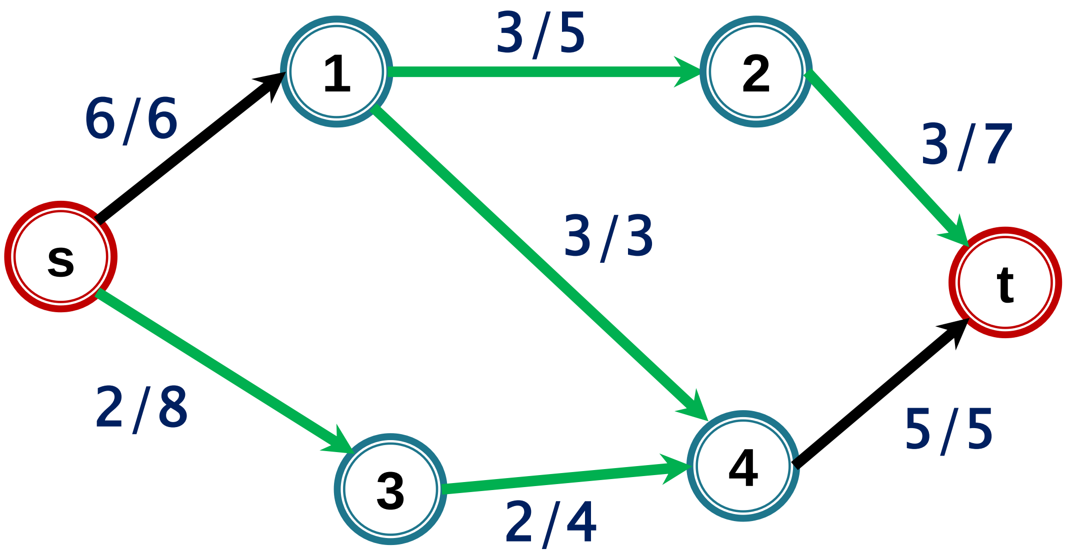


Graf rezidual

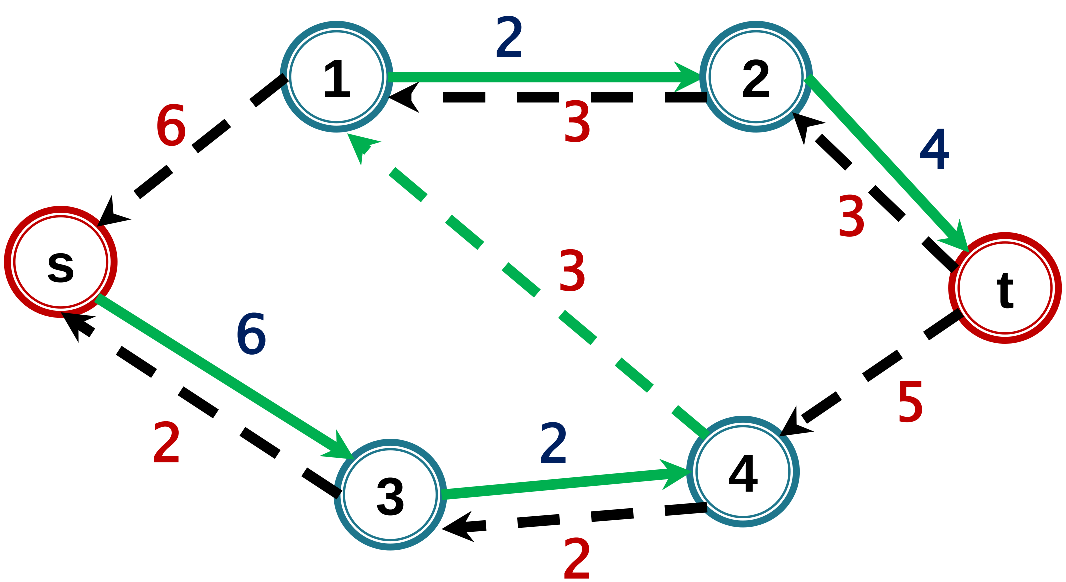




Graf rezidual

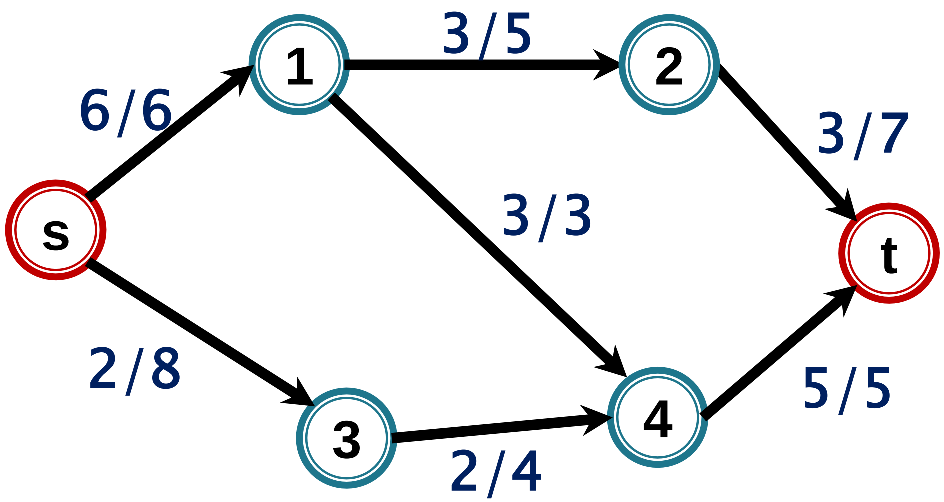


s−t lanț f−nesaturat

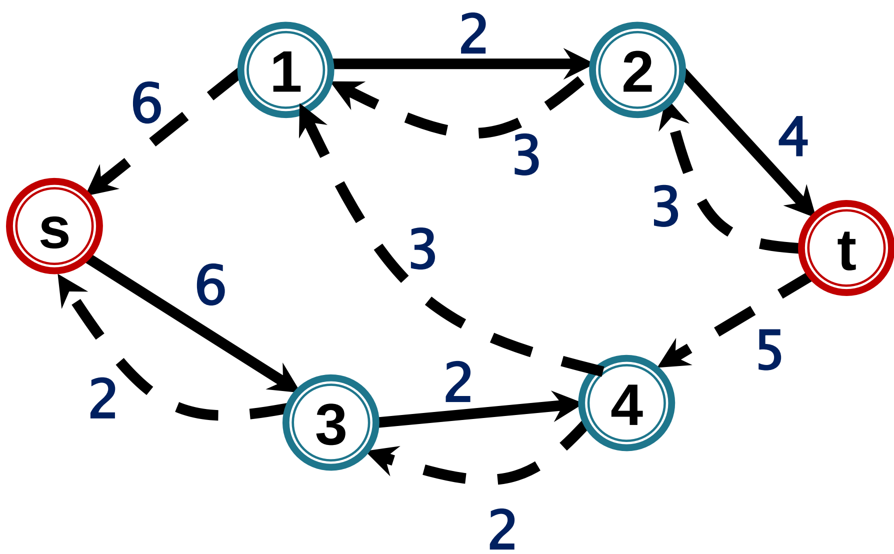


s−t drum în graful rezidual

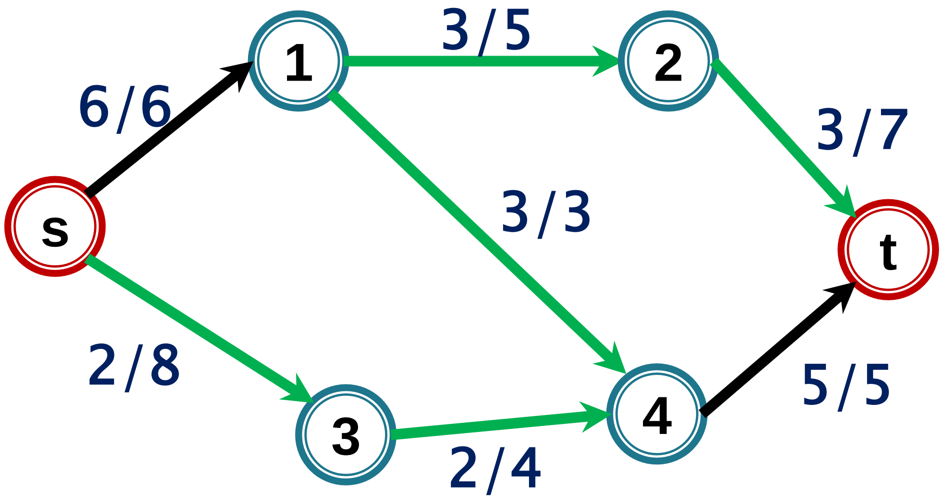
Rețeaua de transport



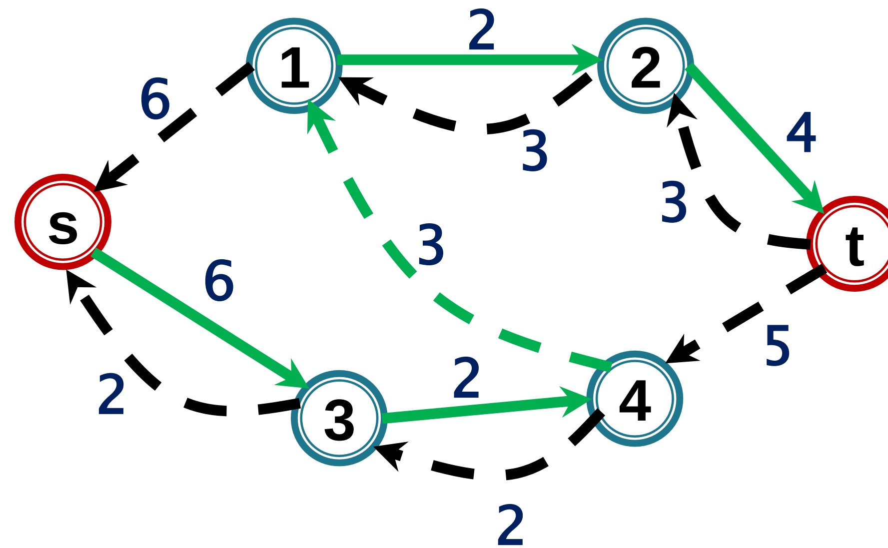
Graful rezidual

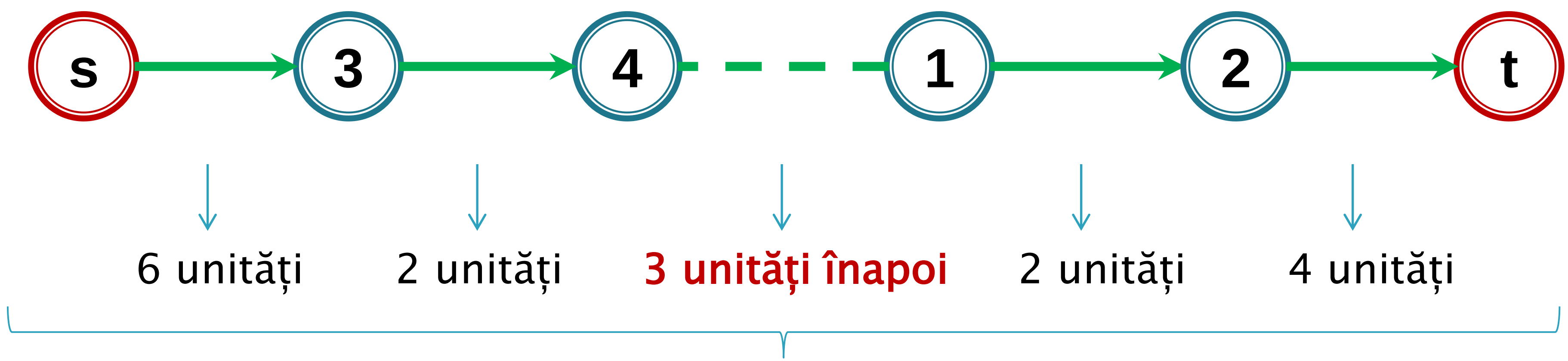


Rețeaua de transport



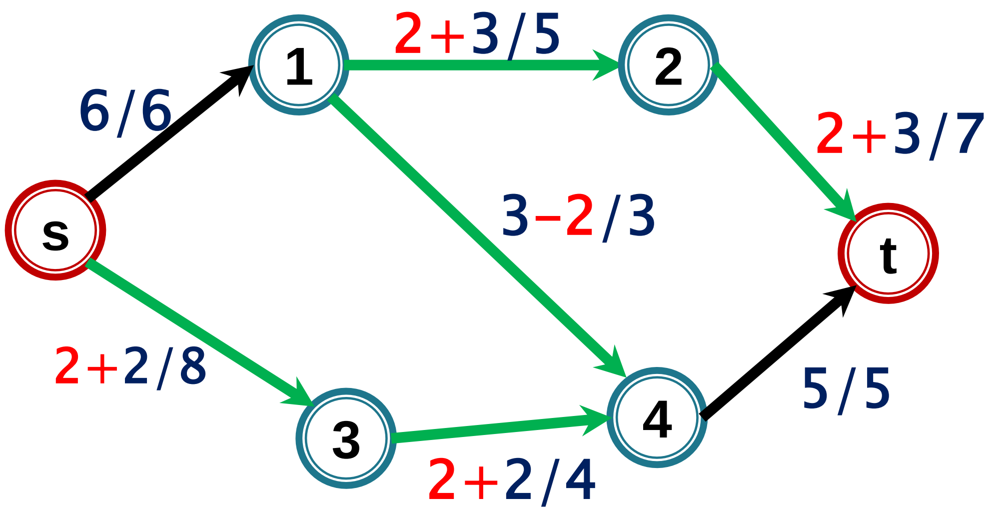
Graful rezidual



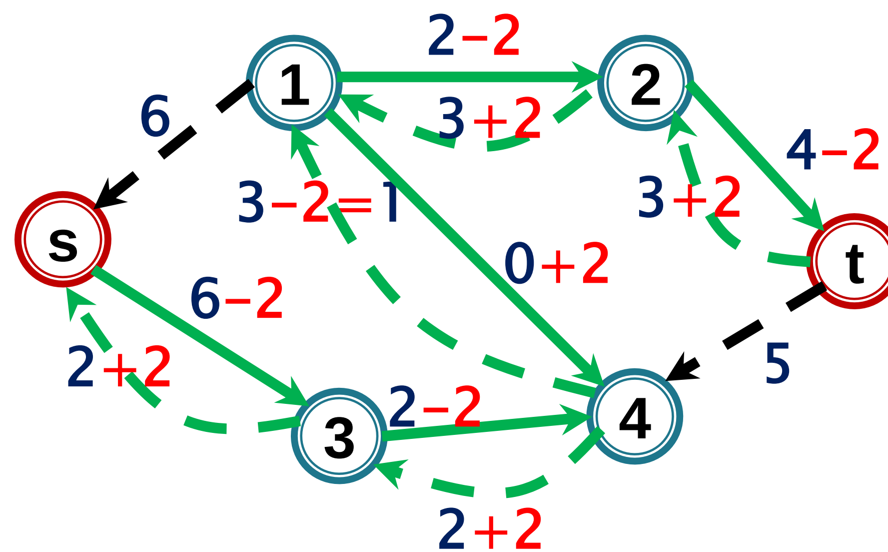


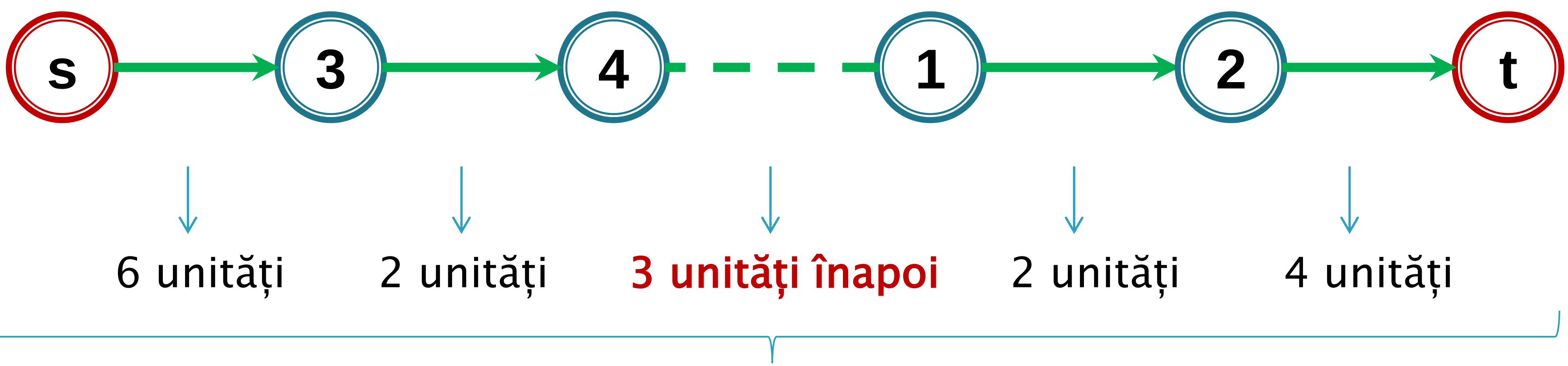
2 unităţi de-a lungul întregului drum

Rețeaua de transport



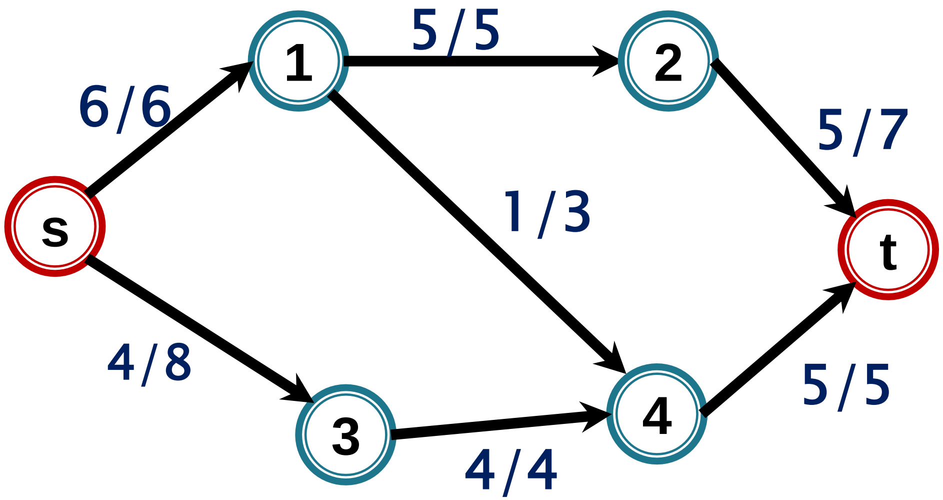
Graful rezidual



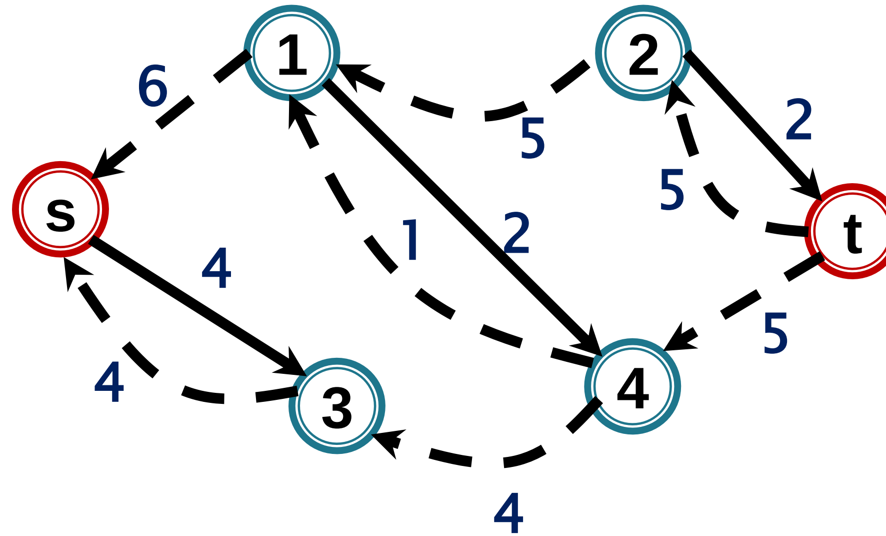


2 unităţi de-a lungul întregului drum

Rețeaua de transport

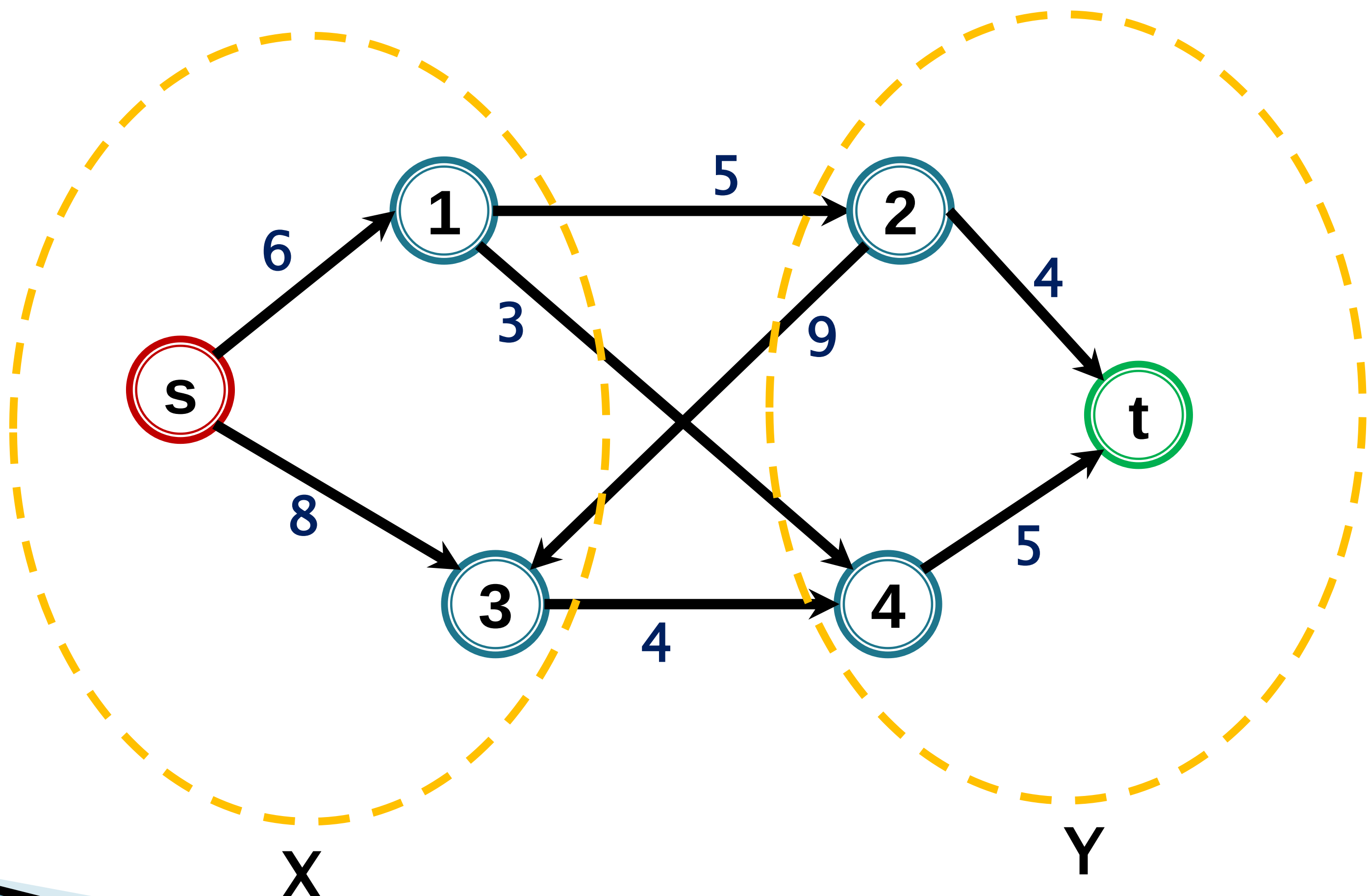


Graful rezidual



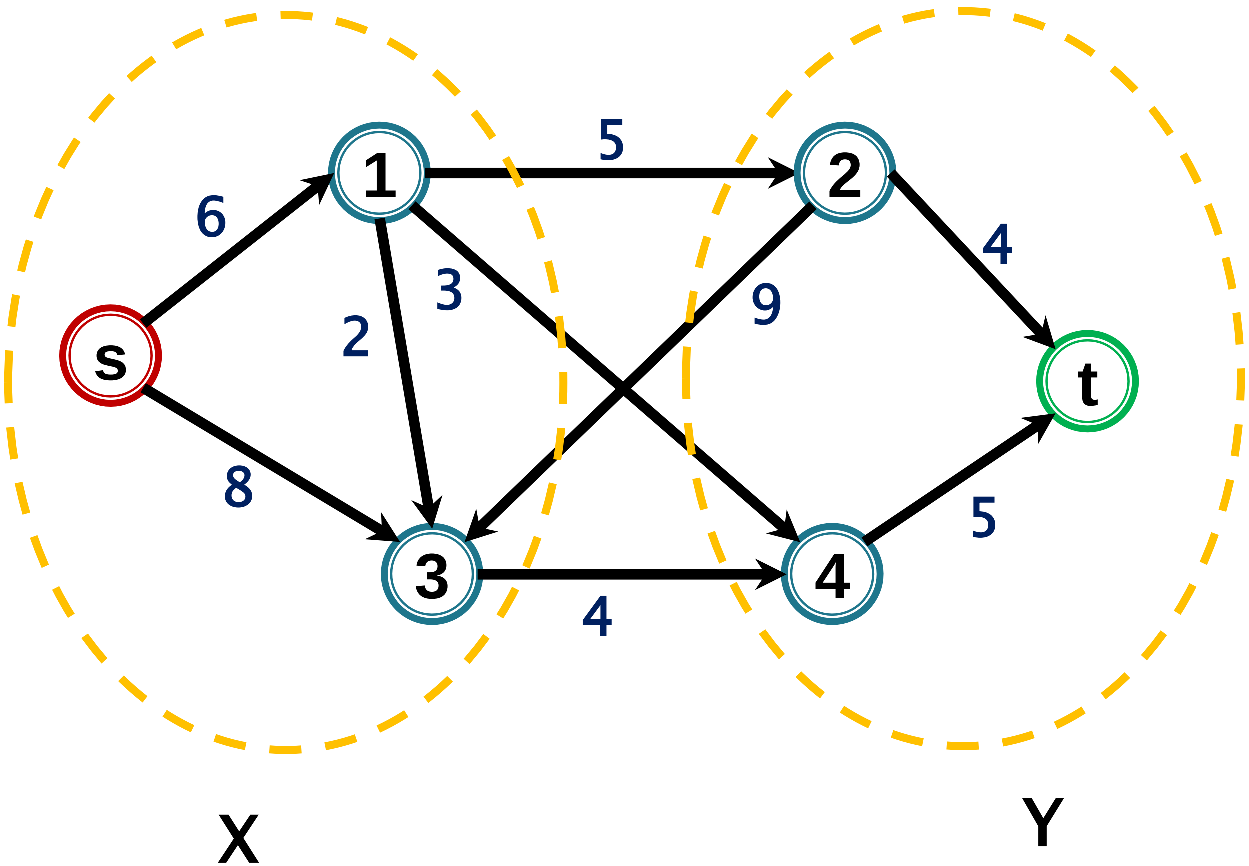
Fie N = (G, {s}, {t}, l, c) o reţea

- O **tăietură** K= (X, Y) în reţea



Fie K= (X, Y) o tăietură

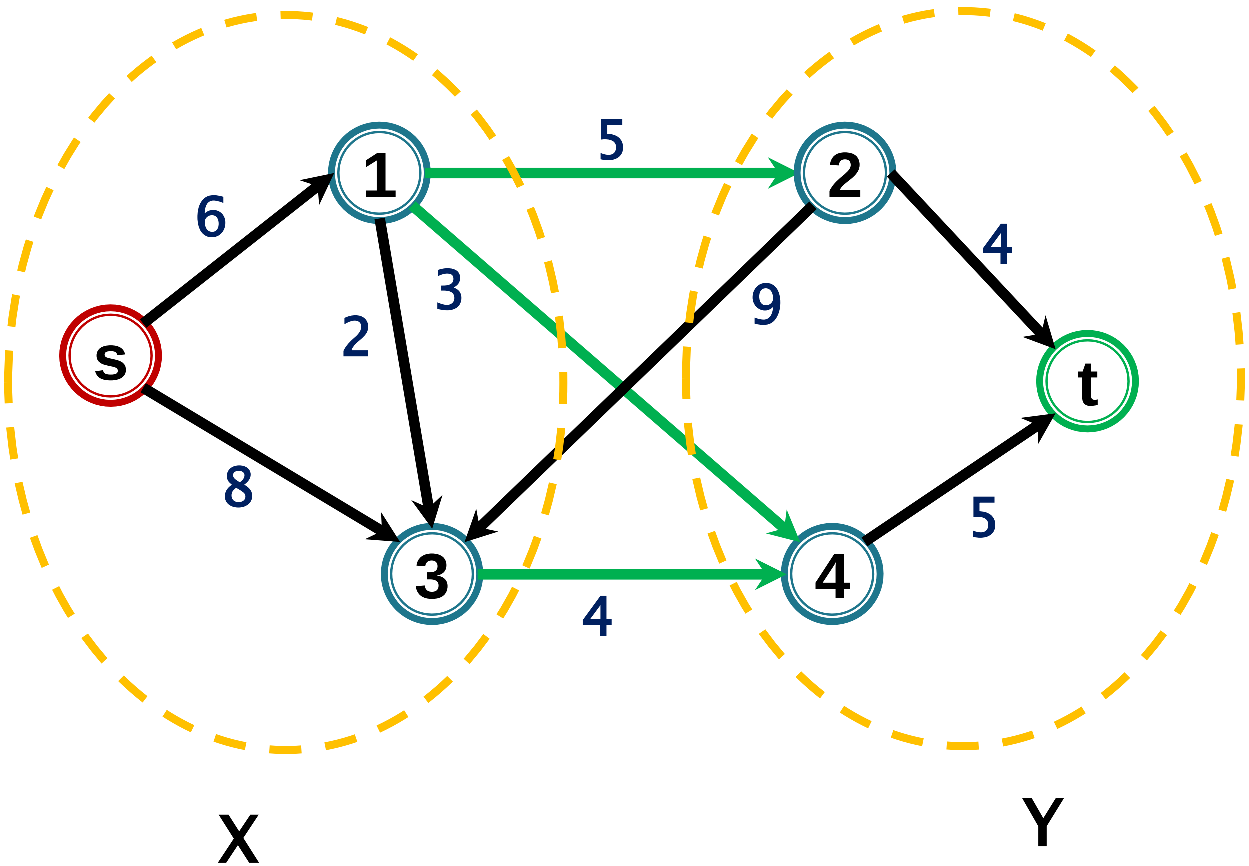
- **Capacitatea tăieturii** K = (X, Y)



$$c(K) = c(X, Y) = ?$$

Fie K= (X, Y) o tăietură

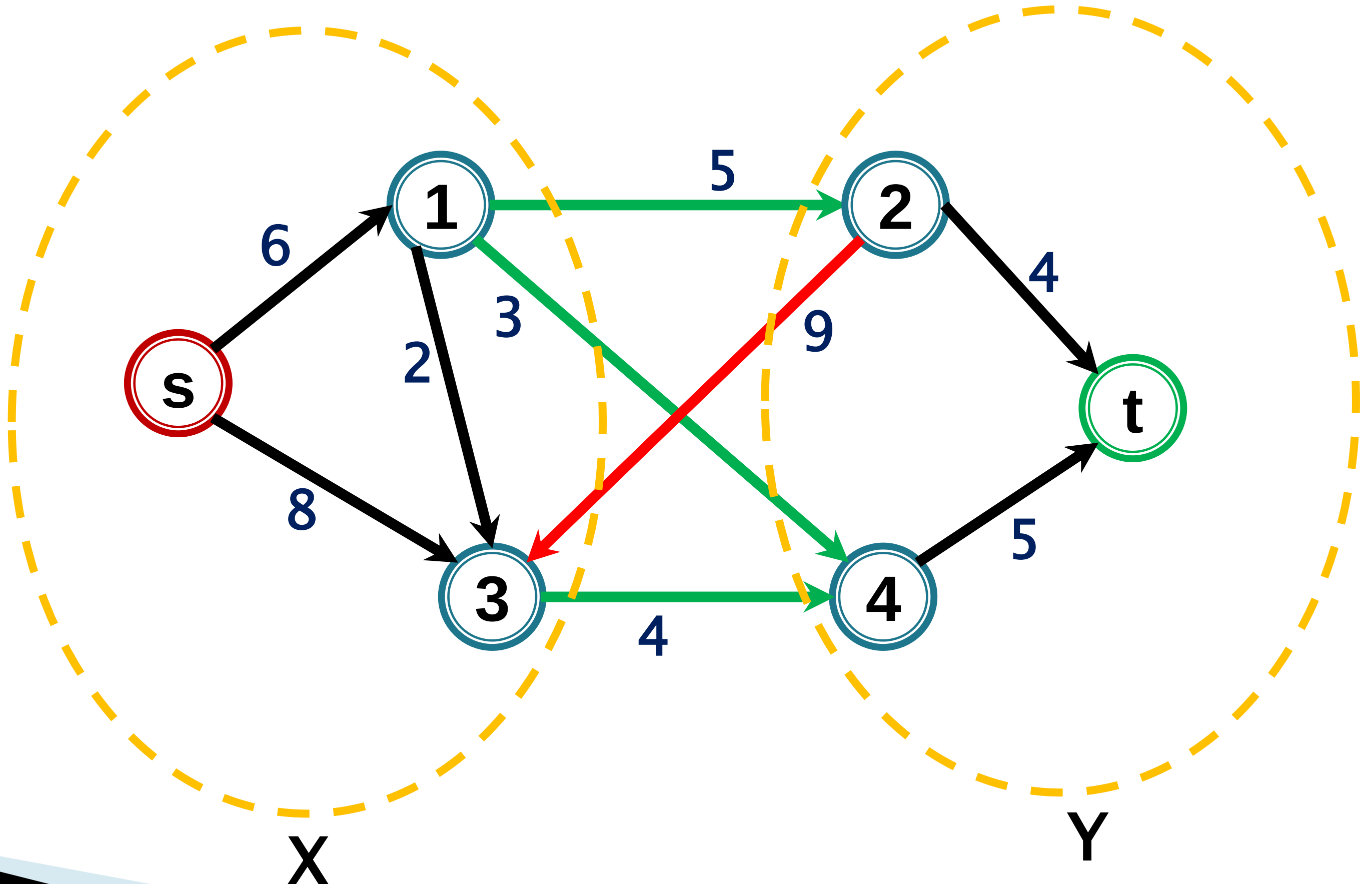
- **Capacitatea tăieturii** K = (X, Y)



$$c(K) = c(X, Y) = 5 + 3 + 4 = 12$$

Fie K= (X, Y) o tăietură

- xy ∈ E cu x∈X, y∈Y = **arc direct** al lui K
- yx ∈ E cu x∈X, y∈Y = **arc invers** al lui K



Tăietură minimă

- Fie N o reţea.

  O tăietură $\widetilde{K}$ se numeşte **tăietură minimă în N** dacă

$$c(\tilde{K}) = \min\{c(K) \mid K \text{ este tăietură în N}\}$$

Tăietură minimă

- Vom demonstra

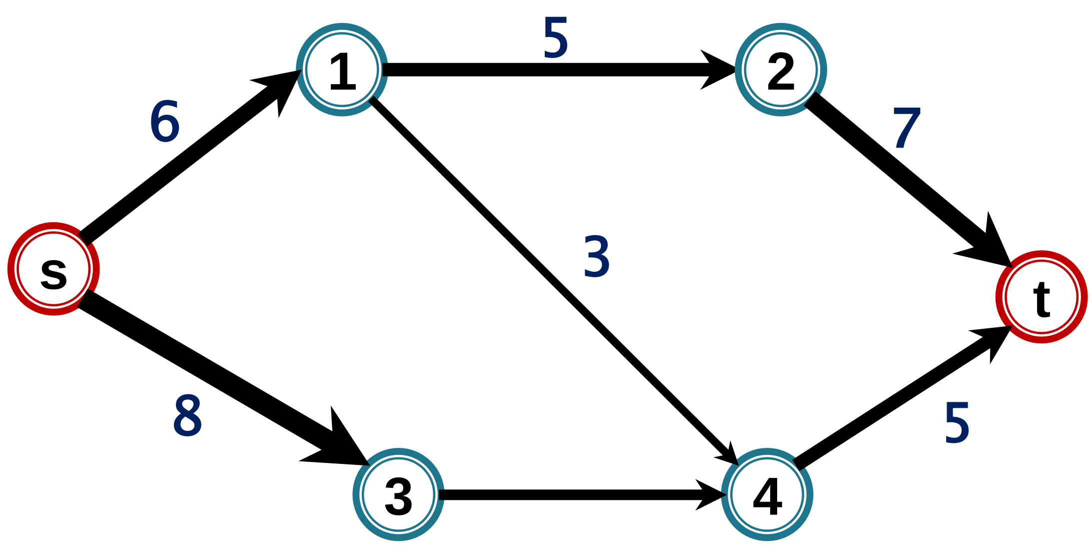
$$val(f) \leq c(K)$$

- Dacă avem egalitate $\Rightarrow$ f flux maxim, K tăietură minimă

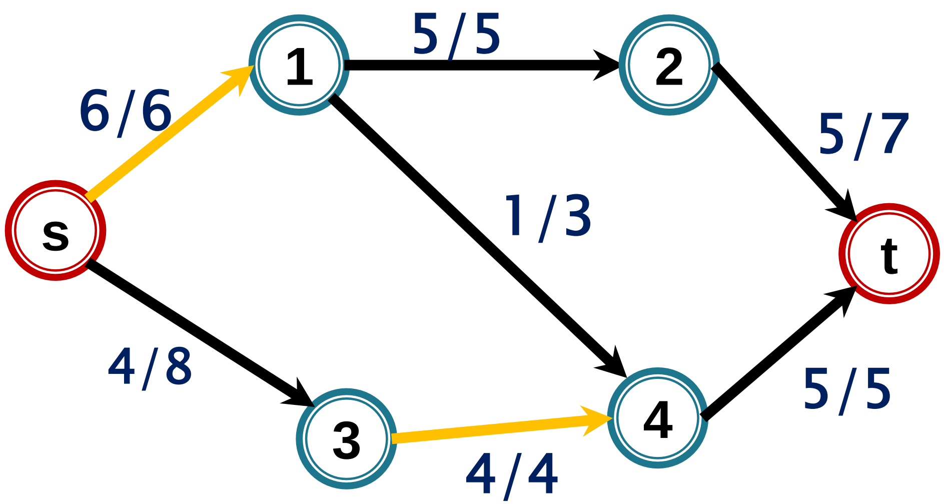
Tăietură minimă

- Determinarea unui flux maxim ⇒ determinarea unei tăieturi minime
- **Aplicații**
  - Arce = poduri, capacitate = costul dărâmării podului.

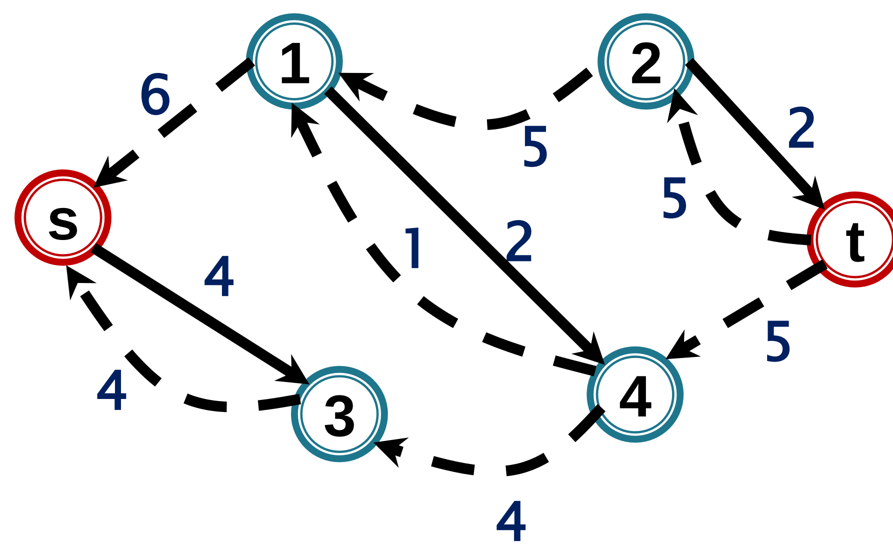
Ce poduri trebuie dărâmate a.î. teritoriul sursă să nu mai fie conectat cu destinația și costul distrugerilor să fie minim?



Rețeaua de transport



Graful rezidual



s–t tăietură saturată ⇔ nu mai există s–t drum în graful rezidual

⇔ s–t flux maxim

Tăietură minimă

- Determinarea unui flux maxim $\Rightarrow$ determinarea unei tăieturi minime
- **Aplicații**
  - **Fiabilitatea rețelelor**
  - **Probleme de proiectare, planificare**
  - **Segmentarea imaginilor**

Algoritmul FORD-FULKERSON

Pseudocod

Algoritm generic de determinare a unui flux maxim – **algoritmul** FORD – FULKERSON

- Fie f un flux în N (de exemplu $f \equiv 0$ fluxul vid:
  $f(e) = 0, \forall\ e \in E$))
- Cât timp **există un s-t lanţ f-nesaturat P în G**
  - determină un astfel de lanţ P
  - revizuieşte fluxul f de-a lungul lanţului P
- returnează f

Algoritm generic de determinare a unui flux maxim – **algoritmul** FORD – FULKERSON

- Pentru a determina și o s-t tăietură minimă, la finalul algoritmului considerăm

  X = mulțimea vârfurilor accesibile din s prin lanțuri f-nesaturate și

  K = (X, V-X)

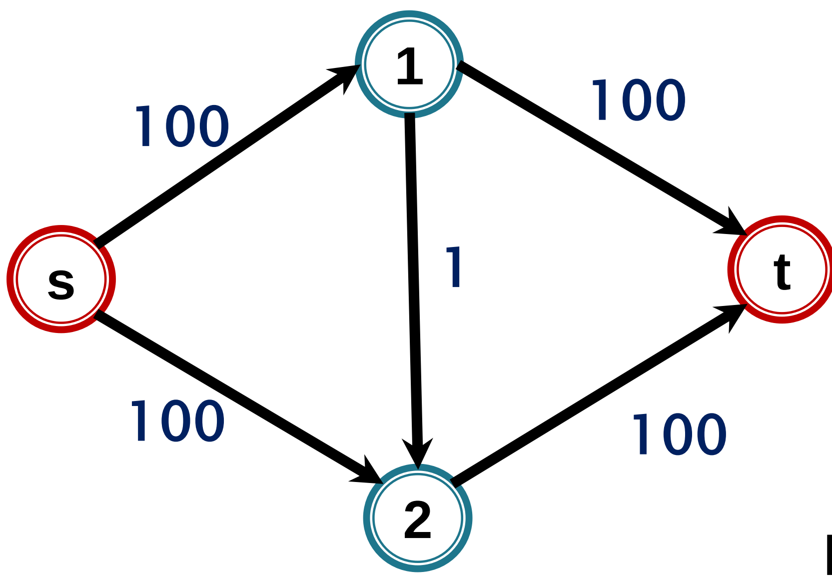
Algoritmul FORD-FULKERSON

Complexitate

Algoritmul Ford-Fulkerson

- Algoritmul se termină?
- De ce este necesară ipoteza că fluxul are valori întregi?
- Care este numărul maxim de etape?
  - Cum determinăm un lanţ f-nesaturat?
  - Criteriul după care construim lanţul f-nesaturat influenţează numărul de etape (iteraţii cât timp)?

Criteriul după care construim lanţul f-nesaturat influenţează numărul de etape



Pasul 1: [s, 1, 2, t] – i(P)=1
Pasul 2: [s, 2, 1, t] – i(P)=1
Pasul 3: [s, 1, 2, t] – i(P)=1
Pasul 4: [s, 2, 1, t] – i(P)=1
...

Algoritm FORD - FULKERSON

Complexitate

- O(mL), unde

$$L = \text{capacitatea minimă a unei tăieturi} \leq \sum_{su \in E} c(su)$$

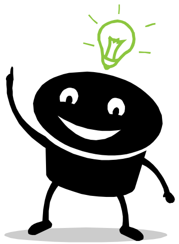
- O(nmC) unde

$$C = \max\{c(e) \mid e \in E(G)\}$$

Algoritmul Ford-Fulkerson

- Cum determinăm un lanţ f-nesaturat?

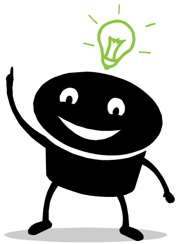
Algoritmul Ford-Fulkerson



Spre exemplu prin parcurgerea grafului pornind din vârful s şi considerând doar arce cu capacitatea reziduală pozitivă (în raport cu lanţurile construite prin parcurgere, memorate cu vectorul tata)

= **s-t drum în graful reziudal**

Algoritmul Ford-Fulkerson



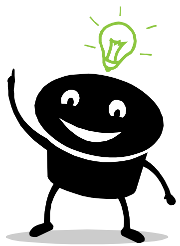
Spre exemplu prin parcurgerea grafului pornind din vârful s şi considerând doar arce cu capacitatea reziduală pozitivă (în raport cu lanţurile construite prin parcurgere, memorate cu vectorul tata)

- **Parcurgerea BF** $\Rightarrow$

  determinăm s-t lanțuri f-nesaturate de lungime minimă

$\Rightarrow$ **Algoritmul EDMONDS-KARP** = Ford-Fulkerson în care lanțul P ales la un pas are lungime minimă

Algoritmul Ford-Fulkerson



Spre exemplu prin parcurgerea grafului pornind din vârful s şi considerând doar arce cu capacitatea reziduală pozitivă (în raport cu lanţurile construite prin parcurgere, memorate cu vectorul tata)

- **Alte criterii de construcţie lanţ $\Rightarrow$ alţi algoritmi**

Algoritmul FORD-FULKERSON

Corectitudine

Algoritmul Ford-Fulkerson

- **Fluxul determinat de algoritm are valoare maximă, sau putem determina un flux de valoare mai mare prin alte metode?**

  - **Trebuie să arătăm că**

    $\nexists$ s-t lanţ f-nesaturat $\Rightarrow$ f flux maxim

Algoritmul Ford-Fulkerson

- Vom demonstra că
  - $val(f) \leq c(K)$ pentru orice f flux, K tăietură
  - $\nexists$ s-t lanţ f-nesaturat $\Rightarrow$ $\exists$ K cu $val(f) = c(K)$ $\Rightarrow$

    $\Rightarrow$ f flux maxim

Implementarea algoritmului FORD-FULKERSON

Varianta cu drumuri minime

$\Rightarrow$ Algoritmul Edmonds-Karp