Determinanți

Fie R inel comutativ unitar, $n \geq 1$ și $A \in M_n(R)$, $A = (a_{ij})$.

<u>Def.</u> $\boxed{\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}$

<u>Exemple</u> $n=1$ $\det A = a_{11}$

$n=2$ $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Dc. B este o matrice <u>superior triunghiulară</u>, adică $b_{ij} = 0$ pt. $j<i$, at. $b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} \neq 0$ $\Rightarrow \sigma(i) \geq i$, $(\forall)$ $i=1,\dots,n$ $\Leftrightarrow$ σ = permut. identică.

În concluzie, $\det B = b_{11} \cdots b_{nn}$.

(Analog pt. matrice inf. triunghiulare, resp. diagonale.)

<u>Proprietăți ale determinanților</u>

a) $\det A = \det {}^tA$.

b) Dc. matricea A are o linie nulă, at. $\det A = 0$.

c) Dc. înmulțim o linie a matricei A cu $a \in R$, at. det. matricei obț. va fi $a \cdot \det A$.

d) Determinantul unei matrice care are două linii proporționale este nul.

e) Dc. permutăm două linii ale matricei A determinantul își schimbă semnul.

f) Dc. o linie a lui A este de forma $(b_1 + c_1, \dots, b_n + c_n)$, at. $\det A = \det B + \det C$, unde B și C se obțin din matricea

A înlocuind linia resp. cu $(b_1 \dots b_n)$, resp. $(c_1, \dots, c_n)$. ②

g) $\det A$ nu se schimbă dacă la o linie a matricei A adunăm altă linie înmulțită cu un elem. $a \in R$.

Obs. Proprietățile h) - g) au loc și pt. coloane.

Corolar

Dc. una dintre liniile (resp. coloanele) unei matrice A este comb. liniară de celelalte linii (resp. coloane), at. $\det A = 0$. În particular, dacă $R = K$ corp, at. $\det A \neq 0 \Rightarrow$ liniile lui A (resp. coloanele lui A) sunt liniar indep. /K, deci formează o bază în K^n.

Obs. $\varphi : R \to S$ morf. de inele, $A \in M_n(R)$, $A = (a_{ij})$ și $\varphi(A) \in M_n(S)$, $\varphi(A) = (\varphi(a_{ij}))$. At. $\det \varphi(A) = \varphi(\det A)$.

Aplicație (determinantul Vandermonde)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_i - a_j),$$

unde $a_i \in R$, $i = \overline{1, n}$.

Dezvoltări ale determinanților

R inel comut. unitar, $n \geq 1$, $A \in M_n(R)$ și $1 \leq m \leq n$. Un minor de ordin m (m-minor) al matricii A este determinantul unei submatrice a lui A de forma

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_m j_1} & \cdots & a_{i_m j_m} \end{pmatrix}.$$

Mai precis, m-minorul definit de liniile $1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n$ și coloanele $1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n$ este

$$M = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_m j_1} & \cdots & a_{i_m j_m} \end{vmatrix}.$$

Definim minorul complementar al lui M ca fiind $(n-m)$-minorul $\overline{M}$ obținut prin tăierea liniilor $1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n$ și coloanelor $1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n$ din matricea A.

Obs. M este la rândul său minorul complementar al lui $\overline{M}$.

Definim complementul algebric al lui M, notat M', ca fiind $(-1)^r \overline{M}$, unde $r = i_1 + \ldots + i_m + j_1 + \ldots + j_m$.

Obs. Complementul algebric al lui $\overline{M}$ este

$(-1)^r M$.

Complementul algebric al unui 1-minor a_{ij} se mai numește și <u>complementul algebric al elem. a_{ij}</u> și este $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot D_{ij}$, unde D_{ij} este determinantul matricei obț. din A prin tăierea liniei i și coloanei j.

<u>Teoremă (Laplace)</u>

$A\in M_n(\mathbb{R})$ și fixăm liniile $1\le k_1<\dots<k_m\le n$. Fie Γ mulțimea m-minorilor lui A cu elemente din liniile fixate. At.

$$\boxed{\det A=\sum_{M\in\Gamma} M\cdot M'}.$$

<u>Exemplu</u> Dezvoltăm determinantul de mai jos după primele două linii

$$\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&2\\1&2&3&4\\5&6&7&8\end{vmatrix}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3&4\\7&8\end{vmatrix}+(-1)^8\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&3\\6&7\end{vmatrix}+(-1)^8\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&4\\5&8\end{vmatrix}+(-1)^{10}\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\5&6\end{vmatrix}=-8.$$

<u>Obs.</u> Pt. m = 1 obținem

$$\boxed{\det A=a_{k1}A_{k1}+\dots+a_{kn}A_{kn}},$$

relație numită <u>dezv. determinantului după linia k.</u>

Avem chiar mai mult:

$$\boxed{a_{k1}A_{l1} + \dots + a_{kn}A_{ln} = \delta_{kl}\det A},$$

unde $1 \le k, l \le n$ iar δ_{kl} este simbolul lui Kronecker, $\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k \ne l. \end{cases}$

În particular, rezultă că

$$(*) \quad \boxed{A \cdot A^* = A^* \cdot A = (\det A) I_n},$$

unde A^* este adjuncta clasică a lui A, $A^* = (A_{ij})$.

<u>Dem. teoremei lui Laplace</u>

Fie M un m-minor și M' complementul său algebric. Scriem $M = M_1 + \dots + M_{m!}$ și $M' = M'_1 + \dots + M'_{(n-m)!}$ folosind definiția determinantului. Atunci $MM' = \sum_{i=1}^{m!} \sum_{j=1}^{(n-m)!} M_i M'_j$.

<u>Lema</u> Produsele $M_i M'_j$ sunt termeni în dezvoltarea lui $\det A$.

<u>Dem.</u> Să presup. că M este m-minorul format din primele m linii și m coloane ale matricei A. Atunci $M' = (-1)^{m(m+1)} \overline{M} = \overline{M}$.

Fie $\underline{(-1)^{\alpha} a_{1t_1} \dots a_{mt_m}}$ un termen din dezv. lui M, resp. $\underline{(-1)^{\beta} a_{m+1\, t_{m+1}} \dots a_{nt_n}}$ un termen din dezv. lui M', unde α este nr. de inversiuni ale permutării $\begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix}$, iar β este nr. de inversiuni ale permutării $\begin{pmatrix} m+1 & \dots & n \\ t_{m+1} & \dots & t_n \end{pmatrix}$.

Produsul celor doi termeni apare cu semnul $(-1)^{\alpha+\beta}$, iar pe de altă parte se obs.

că permutarea

$$\underline{\begin{pmatrix} 1 & \dots & m & m+1 & \dots & n \\ t_1 & \dots & t_m & t_{m+1} & \dots & t_n \end{pmatrix}}$$

are $\alpha+\beta$ inversiuni, deoarece $t_1, \dots, t_m \in \{1, \dots, m\}$ și $t_{m+1}, \dots, t_n \in \{m+1, \dots, n\}$.

În cazul general, în care m-minorul $\underline{M}$ este definit de liniile $1 \le k_1 < \dots < k_m \le n$ și coloanele $1 \le l_1 < \dots < l_m \le n$ procedăm astfel: prin $k_1 - 1$ permutări de linii vecine aducem linia k_1 pe prima linie, apoi prin $k_2 - 2$ permutări de linii vecine aducem linia k_2 pe a doua linie, etc. La fel și pe coloane și am adus astfel minorul $\underline{M}$ în colțul stânga-sus al matricei prin $\underline{k_1 + \dots + k_m - (1 + \dots + m)}$ permutări de linii vecine, respectiv $\underline{l_1 + \dots + l_m - (1 + \dots + m)}$ permutări de coloane vecine.

Ordinea liniilor și coloanelor ~~din~~ M și $\underline{M}'$ se păstrează, iar $\det A$ se înmulțește cu $(-1)^s$, $s = k_1 + \dots + k_m + l_1 + \dots + l_m$.

Cum $M' = (-1)^s \overline{M}$, suntem în cazul analizat anterior. //

Din această lemă rezultă imediat dem. teoremei lui Laplace: obs. că dc. $\underline{M}$ și N sunt doi m-minori distincți cu elemente din liniile fixate $k_1, \dots, k_m$, at. dezvoltările lui $\underline{M}\underline{M}'$ și NN' nu au termeni comuni, deoarece $\underline{M}$ și N au cel puțin o coloană diferită. Deci, conform lemei, în suma

$$\sum_{M\in\Gamma} M\cdot M'$$

se găsesc $C_n^m\, m!(n-m)! = n!$ termeni din dezvoltarea lui $\det A$, deci toți. //

<u>Teoremă</u> $A, B \in M_n(R)$. Atunci

$$\boxed{\det AB = \det A \cdot \det B}$$

<u>Dem.</u> Fie $C = \left(\begin{array}{c|c} A & O_n \\ \hline -I_n & B \end{array}\right) \in M_{2n}(R)$. Dezvoltăm $\det C$ cu regula lui Laplace după primele n linii și obț. $\det C = \det A \cdot \det B$.

Mai putem calcula $\det C$ în felul următor: facem O_n în locul lui B prin înmulțiri adecvate ale coloanelor $1, 2, \dots, n$. Asta înseamnă că pt. a anula coloana k a lui B adunăm la coloana $n+k$ a lui C coloanele $1, 2, \dots, n$ înmulțite cu $b_{1k}, \dots, b_{nk}$. Astfel obținem $\det C = \det\begin{pmatrix} A & AB \\ -I_n & O_n \end{pmatrix}$. Dezvoltăm din nou cu regula lui Laplace după ultimele n linii și obținem $\det C = (-1)^R \det(-I_n)\det(AB)$, unde $R = 1 + \dots + n + (n+1) + \dots + 2n = n(2n+1)$. Deci $\det C = (-1)^{2n^2+2n}\det(AB) = \det(AB)$. //

<u>Def.</u> $A \in M_n(R)$ s.n. <u>inversabilă</u> dc. există $B \in M_n(R)$ ai $AB = BA = I_n$. B s.n. <u>inversa</u> lui A și se not. A^{-1}.

<u>Prop.</u> $A \in M_n(R)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \in U(R)$.

În acest caz $A^{-1} = (\det A)^{-1} A^*$.

Cor. $A \in M_n(K)$, K corp comutativ

A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Teoremă (regula lui Cramer)

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ și $b \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Dc. A este inversabilă, at. sistemul de ecuații

$$\boxed{Ax = b}, \quad x \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

are soluție unică în $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Mai mult, $\boxed{x_i = (\det A)^{-1} \cdot d_i}$, unde $d_i = \det(c_1(A) \dots c_{i-1}(A)\ b\ c_{i+1}(A) \dots c_n(A))$, $1 \le i \le n$.

Dem. $Ax = b$, A invers. $\Rightarrow x = A^{-1}b$ sol. unică.

Pe de altă parte, $\det(c_1(A) \dots \underset{i}{b} \dots c_n(A)) =$

$\det(c_1(A) \dots \sum_{j=1}^{n} x_j c_j(A) \dots c_n(A)) = \sum_{j=1}^{n} x_j \det(c_1(A) \dots \underset{(i)}{c_j(A)} \dots c_n(A)) = x_i \det A$. //

Cor. $A \in M_n(K)$, K corp comutativ. Vectorii $c_1(A), \dots, c_n(A)$ sunt liniar indep. în $M_{n\times 1}(K)$ $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Dem. „$\Rightarrow$" $c_1(A), \dots, c_n(A)$ liniar indep. $\Rightarrow$ $c_1(A), \dots, c_n(A)$ bază, deci $e_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} c_j(A)$, $1 \le i \le n$, $b_{ij} \in K$; $B = (b_{ij})$

$1 = \det(e_1 \dots e_n) = \det(BA) = \det B \cdot \det A \Rightarrow \det A \neq 0$.

„$\Leftarrow$" Fie $x_1, \dots, x_n \in K$ a.î. $\sum_{i=1}^{n} x_i c_i(A) = 0$

$\Rightarrow x_i = (\det A)^{-1} \det(c_1(A) \dots 0 \dots c_n(A)) = 0$, $1 \le i \le n$. //

Rangul unei matrice

Fie K corp comutativ și $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(K)$. Fie $p,q\in\mathbb{N}$, $1\le p\le m$, $1\le q\le n$. Considerăm șirurile de numere $1\le i_1<\ldots<i_p\le m$ și $1\le j_1<\ldots<j_q\le n$. Acestor șiruri le asociem o submatrice a matricei A care este de tip $p\times q$ și anume $(a_{i_r j_s})_{\substack{1\le r\le p\\ 1\le s\le q}}$. Reamintim că determinantul unei submatrice $p\times p$ a lui A s.n. minor de ordinul p al lui A sau, pe scurt, p-minor.

Def. Fie $A\in M_{m\times n}(K)$. Spunem că A are rangul $r\geq 1$ și scriem $\operatorname{rang} A=r$, dacă există un minor de ordin r al lui A nenul și toți minorii de ordin $>r$ sunt nuli.

$\operatorname{rang} A=0 \iff A=0$.

Proprietăți ale rangului unei matrice:

1) $0\le \operatorname{rang} A\le \min(m,n)$.
2) $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} {}^tA$
3) Rangul nu se schimbă la transf. elem. asupra liniilor (coloanelor) matricei.
4) $\operatorname{rang} A=r \iff (\exists)$ un r-minor nenul și toți $(r+1)$-minorii sunt nuli.

Teoremă (Kronecker)

Fie $A\in M_{m\times n}(K)$. At. $\operatorname{rang} A=\dim_K\langle c_1(A),\ldots,c_n(A)\rangle = \dim_K\langle l_1(A),\ldots,l_m(A)\rangle$, adică rang A este numărul maxim de coloane (linii) ale lui A care sunt liniar indep. / K.

Dem. Fie $r = \operatorname{rang} A$. Asta înseamnă că există un r-minor nenul și cum rangul nu se schimbă dacă permutăm linii (coloane) ale matricei, putem presup. că minorul nenul este $d = \det(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq r}$. Notăm $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq r}$.

Vom dem. că $c_1(A), \ldots, c_r(A)$ sunt liniar indep. și sistem de generatori pt. subsp. $\langle c_1(A), \ldots, c_n(A) \rangle$ al lui $M_{n \times 1}(K)$.

Dc. $\alpha_1 c_1(A) + \ldots + \alpha_r c_r(A) = 0$, at. $\alpha_1 c_1(M) + \ldots + \alpha_r c_r(M) = 0$ și cum $\det M \neq 0$ rezultă $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$.

Arătăm acum că $c_j(A)$, $j \geq r+1$, este o comb. liniară de $c_1(A), \ldots, c_r(A)$. Bordăm matricea M cu elem. coresp. de pe coloana j, resp. linia i. Obținem că

$$\Delta_{ij} = \left| \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ \hline a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{array} \right| = 0,$$

deoarece pt. $1 \leq i \leq r$ matricea are două linii egale, iar pt. $r < i \leq m$ avem că Δ_{ij} este $(r+1)$-minor al lui A, deci nul.

Dezvoltăm Δ_{ij} după linia $r+1$ și obținem $0 = a_{i1}\delta_1 + \ldots + a_{ir}\delta_r + a_{ij} d$. Deoarece $d \neq 0$, rezultă $a_{ij} = (-d^{-1}\delta_1) a_{i1} + \ldots + (-d^{-1}\delta_r) a_{ir}$. Cum i a fost ales arbitrar, rezultă

$c_j(A) \in \langle c_1(A), \dots, c_r(A) \rangle$, $(\forall) j \geq r+1$.

Egalitatea cealaltă (pe linii) se obț. folosind faptul că $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} {}^tA$. //

<u>Cor.</u> $A \in M_{m \times n}(K)$

$\operatorname{rang} A = r \iff (\exists)$ un r-minor nenul și toți $(r+1)$-minorii care îl bordează sunt nuli.

<u>Obs. importantă</u>

Rangul unei matrice coincide cu rangul transf. liniare asociate.

$A \in M_{m \times n}(K)$; $f_A : K^m \to K^n$, $f_A(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_j$, $1 \leq i \leq m$

unde $e_1, \dots, e_m$ este baza can. în K^m, iar $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ este baza can. în K^n.

$\boxed{\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} f_A}$ $(= \dim \operatorname{Im} f_A)$.

<u>Prop.</u> $A \in M_{m \times n}(K)$, $B \in M_{n \times p}(K)$, at.

$\operatorname{rang}(AB) \leq \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B)$.

<u>Dem.</u> Fie $f_A : K^m \to K^n$, $f_B : K^n \to K^p$ aplic. liniare asociate matricelor A, B. Atunci $f_{AB} = f_B \circ f_A$. Trebuie arătat că $\dim_K \operatorname{Im}(f_B \circ f_A) \leq \min(\dim_K \operatorname{Im} f_A, \dim_K \operatorname{Im} f_B)$.

$\operatorname{Im}(f_B \circ f_A) \subseteq \operatorname{Im} f_B \Rightarrow \dim_K \operatorname{Im}(f_B \circ f_A) \leq$

$\leq \dim_K \operatorname{Im} f_B$.

Fie acum $\{v_1, \dots, v_r\}$ bază în $\operatorname{Im}(f_B \circ f_A)$

$\Rightarrow v_i = f_B \circ f_A(x_i), \quad 1 \leq i \leq r.$

Dar vectorii $\underline{f_A(x_1), \dots, f_A(x_r)}$ sunt din $\operatorname{Im} f_A$ şi liniar indep.

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_A(x_i) = 0 \Rightarrow f_B\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_A(x_i)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0.$$

În concluzie $\dim_K \operatorname{Im}(f_B \circ f_A) \leq \dim_K \operatorname{Im} f_A$

<u>Cor.</u> $A \in M_{m \times n}(K)$, $U \in M_m(K)$ inversabilă, $V \in M_n(K)$ inversabilă. At.

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} UA = \operatorname{rang} AV = \operatorname{rang}(UAV)$$

<u>Def.</u> $A, B \in M_{m \times n}(K)$ s.n. <u>echivalente</u> dc. $(\exists)\, U \in M_m(K)$ inversabilă $(\exists)\, V \in M_n(K)$ inversabilă a.î. $\boxed{B = UAV}$. <u>Notaţie</u>: $A \sim B$

<u>Cor.</u> $A \sim B \Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$.

Este adevărat şi reciproc!

<u>Prop.</u> $A \in M_{m \times n}(K)$, $\operatorname{rang} A = r$. Atunci $\boxed{A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

Mai mult, matricele U şi V se pot alege ca fiind produse de matrice elementare.