Analiză

Seminar
Petre Ilioș

Elemente de Teoria mulțimilor și a funcțiilor

$X \neq \emptyset$

$\mathcal{P}(X) = \{ A \mid A \subseteq X \}$ (mulțimea părților lui X)

$A \subseteq X \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(X)$

DEF Fie X o mț nevidă

a) $A, B \subseteq X$

$A \setminus B = \{ x \mid x \in A, x \notin B \}$

b) $A \subseteq X$

$C_X A = X \setminus A = \{ x \in X \mid x \notin A \}$ - „complementara mulțimii A în raport cu X"

c) $(A_i)_{i \in I}$ familie inclusă în A

$\bigcap_{i \in I} A_i = \{ x \in X \mid x \in A_i \ \forall i \in I \}$

$\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x \in X \mid \exists i \in I \text{ a.î. } x \in A_i \}$

Def Fie $f : X \to Y$ o funcție

a) Pentru o submulțime $A \subseteq X$ mulțime

$\{f(x) \mid x \in A\} \overset{not}{=} f(A) \subseteq Y$ se numește imaginea directă a ~~lui~~ A mț A prin fcția f

b) Pentru o submulțime $B \subseteq Y$ mulțimea

$\{x \in X \mid f(x) \in B\} \overset{not}{=} f^{-1}(B) \subseteq X$ s.n

„preimaginea ~~funcții~~ mulțimii B prin fcția f"

Obs: $f: X \to Y$

a) $f(\emptyset) = \{f(x) \mid x \in \emptyset\} = \emptyset$

$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = \operatorname{im} f \subseteq Y$

b) $f^{-1}(\emptyset) = \{x \in X \mid f(x) \in \emptyset\} = \emptyset$

$f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\} = X$

<u>Ex 1</u> Fie $f: (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ c.i

Determinați:

a) $f((2, \infty)) = ?$

b) $f^{-1}((-\infty, 0]) = ?$

$f^{-1}((-\infty, 0)) = ?$

$f^{-1}((-\infty, 1)) = ?$

a) $f((2,+\infty)) = \{ f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in (2,+\infty) \} = \operatorname{Im} f|_{(2,+\infty)}$

$f : (2,+\infty) \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \searrow 2} f(x) = \sqrt{3}$

$f'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}} > 0 \ \forall x \in (2,+\infty) \Rightarrow f \uparrow \text{pe } (2,+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f (\sqrt{3}, \infty)$

b) $f((-\infty, 0]) = \{ x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \mid \cancel{f((-\infty,0]) \in \mathbb{R}} \}$

$f(x) \in (-\infty, 0]$

$f(x) \in (-\infty, 0] \Leftrightarrow f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2-1} \leq 0 \\ \sqrt{x^2-1} \geq 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$\cancel{f(-1)} = f^{-1}((-\infty, 0]) = \{-1, 1\}$

$f^{-1}((-\infty, 0)) = \{ x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \mid f(x) \in (-\infty, 0) \}$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2-1} < 0 \\ \sqrt{x^2-1} \geq 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow x \in \emptyset$

$f^{-1}((-\infty, 0)) = \emptyset$

$f^{-1}((-\infty, 1)) = \{ x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \mid f(x) \in (-\infty, 1) \}$

$\Leftrightarrow f(x) < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} < 1 \Leftrightarrow \cancel{|x^2-1|} < 1$

$0 \leq x^2 - 1 < 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2-1\geq 0 & x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty) \\ x^2<2 & x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}) \end{cases} \Big/ \overset{\cap}{\Longrightarrow} x\in(-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2})$$

$$f^{-1}((-\infty,1)) = (-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2})$$

ex 2.

Să se identifice $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1}{n},1\right)$, $\bigcap_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n},1\right)$

<u>Rezolvare:</u>

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1}{n},1\right)=(0,1)$$

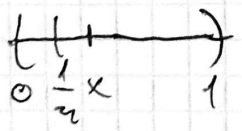
„$\subseteq$" (incluziune de la stânga la dreapta)

Fie $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1}{n},1\right) \Leftrightarrow \exists\, n\in\mathbb{N}^*$ a.î. $x\in\left(\frac{1}{n},1\right)$

$$\begin{cases} \cancel{x<1} \\ \cancel{x>\frac{1}{n}}\ \frac{1}{n}<x<1 \\ 0<\frac{1}{n} \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1 \Rightarrow x\in(0,1)$$

„$\supseteq$" (incluziune de la dreapta la stânga)

Fie $x\in(0,1)$ (căutăm un n pt care $0<x<\frac{1}{n}$)



$\frac{1}{n}<x \Leftrightarrow n>\frac{1}{x}$

Alegem $n_0=\left[\frac{1}{x}\right]+1\in\mathbb{N}^*$

$n_0>\frac{1}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{n_0} \\ x<1 \end{cases} \Rightarrow x\in\left(\frac{1}{n_0},1\right) \Rightarrow x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1}{n},1\right)$

Din dubla incluziune $\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(\frac{1}{n},1) = (0,1)$

$\bigcap_{n\geq 2}(\frac{1}{n},1) = \emptyset$ (Greșit, intuit prost)

Pp că $\bigcap_{n\geq 2}(\frac{1}{n},1) \neq \emptyset$ este nevidă

$\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{n\geq 2}(\frac{1}{n},1) \Rightarrow x \in (\frac{1}{n},1)\ \forall n \geq 2$

$\frac{1}{n} < x < 1\ \forall n \geq 2$

$\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ a.î. $y < x \cdot n$

$\bigcap_{n\geq 2}(\frac{1}{n},1) = (\frac{1}{2},1)$

$(\frac{1}{2},1) \subseteq (\frac{1}{3},1) \subseteq (\frac{1}{4},1) \subseteq \dots \subseteq (\frac{1}{n},1) \subseteq (\frac{1}{n+1},1) \dots$

Definiție echivalentă pentru imaginea directă a unei mș dintr-o fcție.

Fie $f: X \to Y$ o funcție și $A \subseteq X$

$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A$ a.î. $y = f(x)\}$

$\boxed{\text{Def}}$ a) O funcție $f: X \to Y$ este surj. dacă $\forall y \in Y\ \exists x \in X$ a.î. $f(x) = y$

b) O funcție $f: X \to Y$ este inj. dacă $\forall x_1 \neq x_2 \in X$ avem $f(x_1) \neq f(x_2)$ (dacă $f(x_1) = f(x_2)$ at $x_1 = x_2$)

c) f bij dacă este surj și inject.

Obs: $f: X \to Y$ este surj

$f(X) = Y = \operatorname{Im} f$

Seminar 2 Analiză

Mulțimi ordonate
Mulțimi și funcții

[redacted]

[1] Pe R^2 definim relația binară „$\leq$" def prin
$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x_1 = x_2 \ \forall \wedge y_1 \leq y_2) \vee (x_1 < x_2)$

a) Dem că „$\leq$" relație de ordine pe R^2

b) Arătați că $(R^2, \leq)$ este total ord.

a) - Reflexivă

$\forall (x_1, y_1) \in R^2 \quad (x_1, y_1) \leq (x_1, y_1) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (x_1 = x_1 \wedge y_1 \leq y_1) \vee (x_1 < x_1)$ (A)

- Antisimetrie

$(x_1, x_2) \leq (x_3, x_4) \Longleftrightarrow \underbrace{(x_1 = x_3 \wedge x_2 \leq x_4)}_{P_1} \vee \underbrace{(x_1 < x_3)}_{Q_1}$

$\underbrace{(x_3 = x_1 \wedge x_4 \leq x_2)}_{P_2} \vee \underbrace{(x_3 < x_1)}_{Q_2}$

I $v(Q_1) = 1 \Rightarrow v(Q_2) = 0 \Rightarrow v(P_2) = 1$

$v(Q_1) = v(P_2) = 1$ (Fals)

II $v(P_1) = 1 \Rightarrow v(Q_2) = 0 \Rightarrow v(P_2) = 1$

$v(P_1) = v(P_2) = 1 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \end{matrix}$ Antisimetrie

- <u>Tranzitivitate</u>

$(x_1, x_2) \leq (x_3, x_4)$

$(x_3, x_4) \leq (x_5, x_6)$

Rel este tranzitivă, reflexivă, antisimetrică $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Rel. este de ordine

b) $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$
sau
$(x_2, y_2) \leq (x_1, y_1)$

I $x_1 = x_2$
1) $y_1 \leq y_2$
2) $y_2 \leq y_1$

$(x_1 = x_2) \wedge (y_1 \leq y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$
$(x_2 = x_1) \wedge (y_2 \leq y_1) \Rightarrow$ vec 1 $\leq$ vec 2

II $x_1 < x_2 \Rightarrow$ vec 1 $\leq$ vec 2

III $x_2 < x_1 \Rightarrow$ vec 2 $\leq$ vec 1

Concluzie „$\leq$" pe R^2 este total ordonat

Ex2. Pe $\mathcal{P}(R)$ def relația binară „$\leq$" prin
$A \leq B \overset{def}{\Leftrightarrow} A \subseteq B$

a) Dem că „$\leq$" e relație de ordine pe $\mathcal{P}(R)$
b) Ar că $(\mathcal{P}(R), \leq)$ nu este tot ord.
nu este bine ord.
este complet ord.

- Reflexivitate
$A \leq A$ $\quad \forall A \in \mathcal{P}(R) \Leftrightarrow A \leq A \ \forall A \in \mathcal{P}(R)$
(A)

- Antisimetrie $\quad \forall \begin{matrix} A \leq B \\ B \leq A \end{matrix} \Big| \Rightarrow \begin{matrix} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{matrix} \Rightarrow A = B$.

- Tranzitivitate

$$\left.\begin{array}{l} A \leq B \\ B \leq C \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \subseteq C \end{array}\right| \Rightarrow A \subseteq C \Rightarrow A \leq C$$

Concluzie $(P(R), „\leq")$ este relatie de ordine

b) $A = \{3,4,5,6\}$ $\quad A, B \in P(X)$

$B = \{7,8,9\}$

$A \not\subseteq B \Rightarrow A \not\leq B$

$B \not\subseteq A \Rightarrow B \not\leq A$

$(P(R), \leq)$ nu e ordonata

$\{A, B\} \subseteq P(R)$

$\left.\begin{array}{l} A \not\leq B \\ B \not\leq A \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \min\{A, B\} \Rightarrow$ nu e bine ordonata

Fie $\{A_i \mid i \in I\} = \mathcal{A} \subseteq P(R)$ mărginită

Fie $M = \bigcup_{i \in I} A_i$ și $N = \bigcap_{i \in I} A_i$

Dem că $M = \sup \mathcal{A}$ și $N = \inf \mathcal{A}$

$M = \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow A_i \subseteq M \quad \forall i \in I$

$A_i \leq M \quad \forall i \in I \Rightarrow M$ majorant pentru $\mathcal{A}$

Fie M_1 majorant pt $\mathcal{A} \Rightarrow A_i \subseteq M_1 \ \forall i \in I$

$\Rightarrow A_i \subseteq M_1, \ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq M_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow M \subseteq M_1 \Rightarrow M \leq M_1 \Rightarrow M = \sup \mathcal{A}$

$N = \bigcap_{i \in I} A_i \Rightarrow N \subseteq A_i \ \forall i \in I \Rightarrow N \leq A_i \ \forall i \in I$

$\Rightarrow N$ - minorant pentru $\mathcal{A}$

Fie M_1 minorant pt $\mathcal{A} \Rightarrow M_1 \leq A_i \ \forall i \in I \Rightarrow$

$\Rightarrow M_1 \subseteq A_i \ \forall i \in I \Rightarrow M_1 \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i \Rightarrow$

$\Rightarrow M_1 \subseteq N \Rightarrow M_1 \leq N \Rightarrow N = \inf \mathcal{A}$

$\Rightarrow (\mathcal{P}(M), \subseteq)$ este complet ordonată

$f: X \to Y$

$A \subseteq X \Rightarrow f(A) = \{ y \in Y \mid \exists x \in A \text{ a.î. } y = f(x) \}$

$$\boxed{\begin{array}{l} y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in \text{ a.î. } y = f(x) \\ x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B \end{array}}$$

Ex 3. Fie $f: X \to Y$ o funcție. Să se dem. urm. afirmații:

a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \ \forall A_1, A_2 \subseteq X$

b) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2) \quad \forall A_1, A_2 \subseteq X$

c) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), B_1, B_2 \subseteq Y$

d) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \quad \forall B_1, B_2 \subseteq Y$

e) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \quad \forall A_1, A_2 \subseteq X \Leftrightarrow$
f este fcție injectivă

<u>Dem:</u> c) „$\subseteq$"

Fie $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee$
$x \in f^{-1}(B_2)$

$x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

„$\supseteq$"

Fie $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee$
$x \in f^{-1}(B_2)$

$\Rightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2 \Rightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2$
$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ (Am demonstrat dubla incluziune) $\Rightarrow$ egalitatea adev.

Seminar 3

Spații Topologice

Exercițiul 1: Pe $\mathbb{R}$ definim $\tau = \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

a) Dem că τ este topologie pe $\mathbb{R}$. Descrieți mulțimile deschise, mulțimile închise și ~~mulțimile~~ vecinătățile unui punct $x \in \mathbb{R}$

b) Ar. că $(\mathbb{R}, \tau)$ nu este separat

c) Fie $A = (-3, 3)$, determinați $\mathring{A}, \bar{A}, Fr A, A', \mathcal{J}_{\tau\theta}$

Rezolvare: a) 1) $\emptyset \in \tau$, $\mathbb{R} \in \tau$

2) $G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$

$G_1 \in \tau \Rightarrow G_1 = (-\infty, x) \vee G_1 = \emptyset \vee G_1 = \mathbb{R}$

$G_2 = (-\infty, y) \vee G_2 = \emptyset \vee G_2 = \mathbb{R}$

I $G_1 = \emptyset \vee G_2 = \emptyset \Rightarrow G_1 \cap G_2 = \emptyset \in \tau$

II $G_1 = \mathbb{R} \vee G_2 = \mathbb{R} \Rightarrow G_1 \cap G_2 = \begin{cases} G_1, & G_2 = \mathbb{R} \\ G_2, & G_1 = \mathbb{R} \end{cases} \in \tau$

III $G_1 = (-\infty, x)$, $G_2 = (-\infty, y)$ $\quad G_1 \cap G_2 = \begin{cases} (-\infty, x) & x \leq y \\ (-\infty, y) & y < x \\ \cancel{(-\infty, x)} & \cancel{x} \end{cases} \in \tau$

c) τ este la reuniuni oarecare

$G_i \in \tau, \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$

$G_i \in \tau, \quad G_i = (-\infty, x_i) \vee G_i = \emptyset \vee G_i = R$

I $\exists G_{i_0} \in \tau$, a.î. $G_{i_0} = R \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i = R \in \tau$

II $\forall i \in I, G_i \neq R$

1) $\forall i \in I \quad G_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i = \emptyset \in \tau$

2) $\forall i \in I, G_i = (-\infty, x_i)$

$$\bigcup_{i \in I} G_i = \bigcup_{i \in I} (-\infty, x_i) = \begin{cases} (-\infty, x), & x = \sup x_i \\ & x_i \text{ mărginit} \\ \mathbb{R}, & x_i \text{ nemărginit} \\ & \sup x_i = +\infty \end{cases}$$

$\in \tau$ în ambele cazuri

3) $\forall i \in I, \quad G_i = (-\infty, x_i) \vee G_i = \emptyset$

$G_i = \bigcup_{i \in J} (-\infty, x_i) \in \tau$ (cf. caz 2)

$J = \{ i \in I \mid G_i \neq \emptyset \} \Rightarrow (R, \tau)$ spațiu topologic

b)

Mt. deschise	Mt. închise
- $(-\infty, x), x \in R$	- $[x, \infty), x \in R$
- $\emptyset$	- $R \setminus \{\emptyset\} = R$
- R	- $\emptyset$

Vecinătățile unui pct.

$V \in \mathcal{V}(x) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, G \in \tau$ a.î.

$x \in G,\ G \subseteq V$

$\left.\begin{array}{l} x \in G \\ G\text{-deschisă} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} G = R \ \vee\ G = (-\infty, y) \text{ cu } x < y \\ \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \\ V = R \qquad (-\infty, y) \subseteq V \text{ cu } x < y \end{array}$

$\mathcal{V}(x) = \{R\} \cup \{V \mid \exists\, y > x \text{ a.î. } (-\infty, y) \subseteq V\}$

$(-\infty, 1) \in \mathcal{V}_\tau(0)$ (în topologia τ)

$(-1, 1) \notin \mathcal{V}(0)$ (în topologia τ)

Fie $V \in \mathcal{V}_\tau(a)\ \exists\, a > 0$ a.î. $\Rightarrow 0 \in (-\infty, a) \subseteq V$

$W \in \mathcal{V}_\tau(1) \Rightarrow \exists\, b > 1$ a.î. $\Rightarrow 1 \in (-\infty; b) \subseteq W$

$\left.\begin{array}{l} -1 \in (-\infty, a) \\ -1 \in (-\infty, b) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} -1 \in V \\ -1 \in W \end{array} \Rightarrow V \cap W \neq \emptyset \Rightarrow (R, \tau)$ nu este separat

c) $A = (-3, 3)$

$\mathring{A} = ?$ $\qquad \mathring{A} \subseteq A \rightarrow \mathring{A} \subseteq (-3, 3)$

$\emptyset \subseteq A$

$\emptyset$ singura mt deschisă $\subseteq A \Rightarrow \mathring{A} = \emptyset$

mt deschise
- $(-\infty, x)\ x \in R$
- $\emptyset$
- R

$\bar{A}$

$A \subseteq \bar{A}$

$(-3, 3) \subseteq F$, F închisă $\Rightarrow F = [x, +\infty)$ cu $x \leq -3 \vee F = R \Rightarrow$

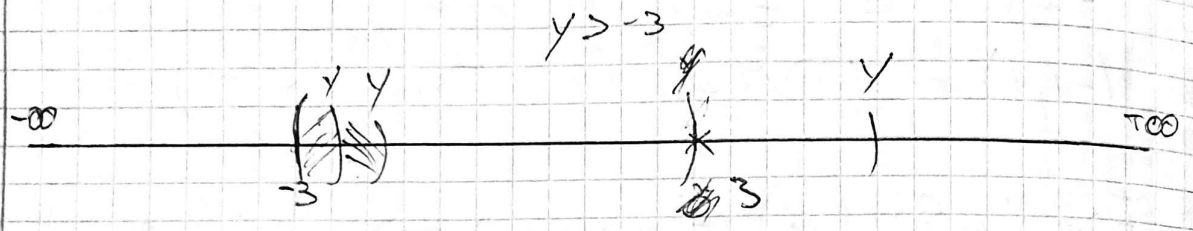
$$\Rightarrow \bar{A} = \bigcap_{x \leq -3} [x, -\infty) \cap R = [-3, \infty)$$

$\mathring{A} \neq A \Rightarrow A$ nu e deschisă

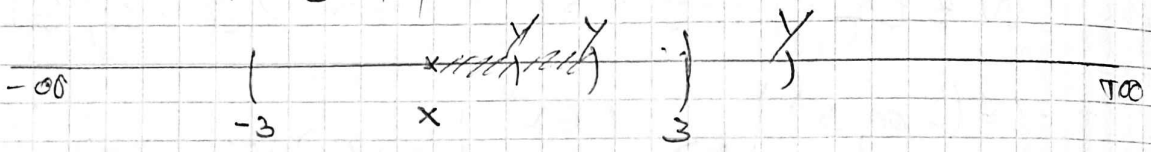
$\bar{A} \neq A \Rightarrow A$ nu e închisă

$$Fr\, A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = [-3, \infty) \setminus \emptyset = [-3, \infty)$$

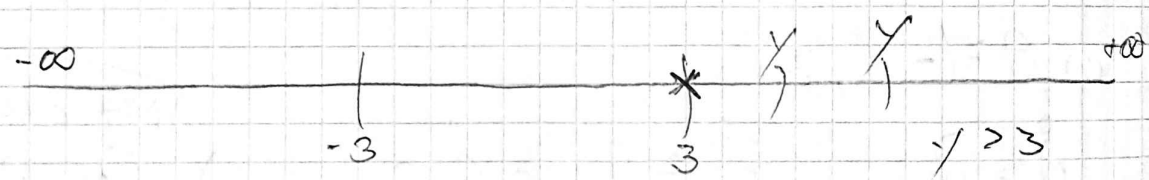
$$A' \subseteq \bar{A} \Rightarrow A' \subseteq [-3, \infty)$$



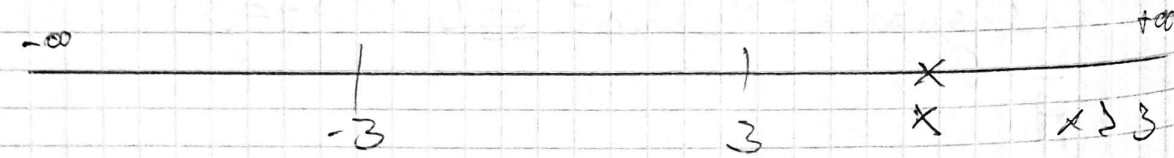
$$V \cap A \setminus \{-3\} \neq \emptyset \ \forall\, \mathcal{V}(-3) \Rightarrow -3 \in A'$$



$$V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \{\emptyset\} \ \forall\, \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in A'$$



$$V \cap (A \setminus \{3\}) \neq \{\emptyset\} \ \forall\, V \in \mathcal{V}(3) \Rightarrow 3 \in A'$$



$$V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \ \forall\, v \in \mathcal{V}(x),\ x > 3 \Rightarrow x \in A'$$

$$A' = [-3, +\infty)$$

$izoA \subseteq A \setminus A' \Rightarrow izoA \subseteq (-3,3) \setminus [-3,\infty) \Rightarrow$
$\Rightarrow izoA = \emptyset \Rightarrow$ nu $\exists$ pct. izolate

---

<u>Definiție 1</u> Fie (X, d) un spațiu metric și $a \in X$ și $r > 0$.

Mulțimea $\{x \in X \mid d(x, a) < r\} \overset{not}{=} B(a, r)$ „bila deschisă"
a → centrul cercului

se num. „bila deschisă de centru a și rază r"

Mț $\{x \in X \mid d(x, a) \leq r\} \overset{not}{=} B[a, r]$ se numește bila închisă de centru a și raza r

<u>Ex 2</u>: Descrieți bilele deschise și închise din $\mathbb{R}$ (Se referă la distanța standard)

<u>Rezolvare</u> Fie $a \in \mathbb{R}$ și $R > 0$

Seminar 4

Analiza topologică

<u>Ex 1:</u> $A = (0,2) \cap \mathbb{Q}$

Determinați $\mathring{A}$, $\bar{A}$

$\mathring{A} \subseteq A \Rightarrow \mathring{A} \subseteq (0,2) \cap \mathbb{Q}$

Dem. că $\mathring{A} = \emptyset$

Pp că $\mathring{A} \neq \emptyset$, $\Rightarrow \exists\, x \in \mathring{A} \Rightarrow A \in \mathcal{V}_{\tau_R}(x)$

$\Rightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $B(x,r) \subseteq A \Rightarrow \exists\, r > 0$

$\left.\begin{array}{l} \text{a.î. } (x-r, x+r) \subseteq A \\ A \subseteq \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow (x-r, x+r) \subseteq \mathbb{Q}$

Th: între $x-r$ și $x+r$ $\exists$ cel puțin un <u>nr</u> <u>rațional</u> $\times$ Pp făcut e F

$\Longrightarrow \mathring{A} = \emptyset$

$A \neq \mathring{A} \Rightarrow A \notin \tau_R$

$A \subseteq \bar{A} \Rightarrow (0,2) \cap \mathbb{Q} \subseteq \bar{A}$

$A \subseteq [0,2]$

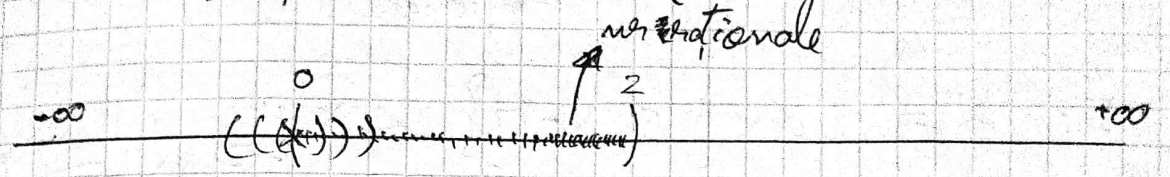
$[0,2]$ mulțime închisă $\Rightarrow \bar{A} \subseteq [0,2]$

$(0,2) \cap \mathbb{Q} \subseteq \bar{A} \subseteq [0,2]$

Este 0 în $\bar{A}$?

Este 2 în $\bar{A}$?

$x \in \bar{A}$? ; $x \in (0,2) \setminus \mathbb{Q}$



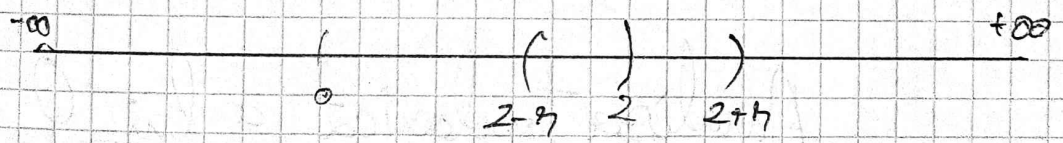
alegem $b = \min\{2, r\}$ $\quad b > 0$

între 0 și b $\exists$ mereu cel puțin un nr rațional a

$$\left.\begin{array}{l} a \in \mathbb{Q} \\ a \in (0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow a \in A$$

$$a \in (0, r) \Rightarrow a \in (-r, r) = B(0, r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \cap B(0, r) \neq \emptyset \ \forall r > 0 \Rightarrow 0 \in \bar{A} \quad (1)$$



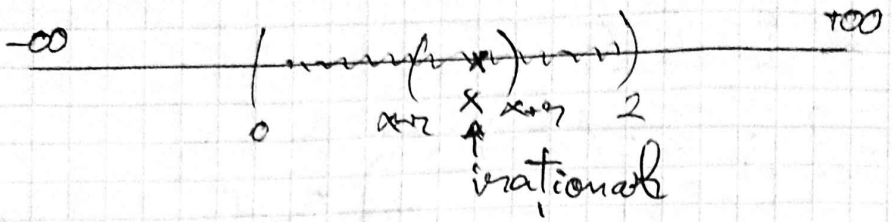
Fie $c = \max\{0, 2-r\} < 2$

Între c și 2 se află cel puțin un nr rațional d

$$\left.\begin{array}{l} d \in \mathbb{Q} \\ d \in (0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow d \in A$$

$$d \in (2-r, 2) \Rightarrow d \in (2-r, 2+r) \Rightarrow d \in B(2, r)$$

$$\Rightarrow A \cap B(2, r) \neq \emptyset, \ \forall r > 0 \Rightarrow 2 \in \bar{A} \quad (2)$$



Fie $\alpha = \max\{0, x-r\} < x$
$\beta = \min\{x+r, 2\} > x$ $\Rightarrow \alpha < \beta$

Între α şi β se află cel puţin un nr raţional p

$p \in \mathbb{Q}$
$p \in (0,2)$ $\Rightarrow p \in A$
$p \in (x-r, x+r) = B(x,r)$ $\Rightarrow A \cap B(x,r) \neq \emptyset$ $\forall r>0$
$\Rightarrow x \in \bar{A}$ (3)

Din (1),(2),(3) $\Rightarrow \bar{A} = [0,2]$
$A \neq \bar{A} \Rightarrow A$ nu este mţ închisă

Analiza topologică a lui $\mathbb{Q}$

1) $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ $(\mathbb{Q} \notin \tau_{\mathbb{R}})$

2) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ / mulţimea $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$

3) $Fr\, \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

4) $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

5) $Izo\, \mathbb{Q} = \emptyset$ $(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R} = \emptyset)$

Analiza topologică a lui ~~Q\R~~ R\Q

1) $\overset{\circ}{\overline{R\setminus Q}} = \emptyset$ (R\Q nu e mt deschisă)

2) $\overline{R\setminus Q} = R$ (R\Q nu este mt închisă)

3) $Fr(R\setminus Q) = R$

4) $(R\setminus Q)' = R$

5) $Izo(R\setminus Q) = \emptyset$ $(R\setminus Q \setminus R = \emptyset)$

Șiruri cu reale

Limite remarcabile

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & , a>1 \\ 1 & , a=1 \\ 0 & , a\in(-1,1) \\ \nexists & , a\leq -1 \end{cases}$$

2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \in (2,3)$ nr lui Euler

3) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = c\in(0,1)$
constanta lui Euler

4) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) = +\infty$

5) $P, Q \in \mathbb{R}[X]$

$$P = a_k X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \dots + a_0$$

$$Q = b_p X^p + b_{p-1} X^{p-1} + \dots + b_0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_p} & k = p \\ 0, & k < p \\ (+\infty)\cdot(\operatorname{sign}\left(\frac{a_k}{b_p}\right) & k > p \end{cases}$$

Ex2: a) Calc $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = ?$, $\alpha > 0$, $a > 1$

b) ~~Cal~~ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = ?$

c) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din $\mathbb{R}$ a.î. şirul $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit dem că $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n^2} = 0$

a) "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$a_n = \frac{n^\alpha}{a^n} \quad a_n > 0 \ \forall n > 1 \ (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a} \cdot \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha}_{1}$$

$$= \frac{1}{a} < 1$$

① $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

② $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = b_n$

$x_n = \frac{n!}{n^n} > 0 \quad \forall n \geq 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} =$

$\boxed{\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l}$ Crit rad.

$= \lim \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^n = \lim \left[\underbrace{\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}}_{e}\right]^{\frac{-n}{n+1}}$

$= e^{\lim \frac{-n}{n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} = l$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l = \frac{1}{e} \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{e}$

c) $\exists$ m și M nr reale a.î.

$m \leq x_{n+1} - x_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$m \leq x_1 - x_0 \leq M$

$m \leq x_2 - x_1 \leq M$

$\vdots$

$m \leq x_n - x_{n-1} \leq M$

$(+)$

$n \cdot m \leq x_n - x_0 \leq M \cdot n \quad | + x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$n \cdot m + x_0 \leq x_n \leq M \cdot n + x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad | : n^2$

$$\frac{n\cdot m+x_0}{n^2} \le \frac{x_n}{n^2} \le \frac{n\cdot M+x_0}{n^2} \quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2} = 0$$

Seminar 5

Șiruri de numere reale

$\boxed{1}$ Fie $x_n = \frac{n}{2n-1}\cdot(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} + \cos\frac{n\pi}{2}$

Calculați $\overline{\lim}\, x_n$ și $\underline{\lim}\, x_n$

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \begin{cases} -1, & \frac{n(n+1)}{2} = 2k+1 \\ 1, & \frac{n(n+1)}{2} = 2k \end{cases} = \begin{cases} -1, & n(n+1)=4k+2 \\ 1, & n(n+1)=4k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} n\in\{4k+1, 4k+2\} \\ n\in\{4k, 4k+3\} \end{matrix} = \begin{cases} -1, & n\in\{4k+1, 4k+2\} \\ 1, & n\in\{4k, 4k+3\} \end{cases}$$

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ 1, & n = 4k \\ -1, & n = 4k+2 \end{cases}$$

Alegem subșirurile $(x_{4k}, \cancel{k\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{4k+2})_{k\in\mathbb{N}}$

$(x_{4k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{4k+3})_{k\in\mathbb{N}}$

am ales doar $4k+1$ deoarece acesta este subșir la $2k+1$ este $2k+1$ cuprinde pe $4k+1$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{4k}{8k-1}\cdot 1 + 1\right) = \frac{1}{2}+1 = \underline{\frac{3}{2}}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+2} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{4k+2}{8k+3}\cdot(-1) + (-1)\right)$$

$$= -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{4k+1}{8k+1}\cdot(-1) + 0 = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+3} = \lim_{k\to\infty}\frac{4k+3}{8k+5}\cdot 1 + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left\{\pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\}$$

$\overline{\lim}\, x_n = \frac{3}{2}$ (lim superioară)

$\underline{\lim}\, x_n = -\frac{3}{2}$ (lim inferioară)

$\overline{\lim}\, x_n \neq \underline{\lim}\, x_n \Rightarrow \nexists \lim x_n$

$\underline{\lim}\, x_n$ și $\overline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow x_n$ mărginit

Exerciții: Studiați natura urm. serii

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{1} \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n-1)}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{a \cdot n+1}\right)^n, \ a > 1$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$

e) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$

a) $x_n = \frac{1}{n(n+2)} \quad n \in \mathbb{N}^*$

$x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)}$

$s_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$

$s_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cancel{\ldots} + \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} - \ldots - \frac{1}{n+2}\right)$

$s_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{3}{4} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ~~s_n~~ s_n conv.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ convergent

și are suma $\frac{3}{4}$

b) $x_n = \frac{2\cdot 5 \cdot \ldots (3n-1)}{1\cdot 5 \cdot \ldots (4n-3)}$ $\quad x_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$s_n = \frac{2}{1} + \frac{2\cdot 5}{1\cdot 5} + \frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9} + \ldots + \frac{2\cdot 5 \ldots (3n-1)}{1\cdot 5 \ldots (4n-3)} = ?$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\cancel{2\cdot 5 \ldots (3n-1)} \cdot (3(n+1)-1)}{\cancel{1\cdot 5 \ldots (4n-3)} \cdot (4(n+1)-3)} \cdot \frac{\cancel{1\cdot 5 \ldots (3n-1)}}{\cancel{2\cdot 5 \ldots (3n-1)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3n+2}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ e convergent

c) $x_n = \left(\frac{n}{a\cdot n+1}\right)^n$, $a>0$, $x_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$;

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{an+1} = \frac{1}{a}, \ a>0$$

CI $a \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \overset{\text{Cit Rad}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ divergentă

CII $a \in (1,+\infty) \Rightarrow \frac{1}{a} < 1 \overset{\text{Cit Rad}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ convergentă

CIII $a=1$

$$x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-n+1}}{e}\right)^{\frac{-1}{n+1}\cdot n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-n}{n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0 \xRightarrow[\text{Th I}]{\text{Cordar}} \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ este}$$

divergent.

Concluzie pt $a \in (0,1]$ divergentă
$a \in (1,+\infty)$ convergentă

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2n}$ $\quad x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}\cdot(2n+1)}{\cancel{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2n}\cdot(2n+2)} \cdot \frac{\cancel{2\cdot 4 \cdots 2n}}{\cancel{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1 \text{ Nu merge crit raP}$$

$$\left\{ \frac{2n+2}{2n+1} - 1 = \frac{2n+2-2n-1}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \right.$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} < 1 \xrightarrow[\text{Crit lui Raabe}]{} \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ este } \underline{\text{divergent}}$$

e) $x_n = \frac{1}{n\cdot \ln n}$ $\quad n \geq 2$, $x_n > 0 \ \forall n \geq 2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{(n+1)\ln(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \underbrace{\frac{\ln n}{\ln(n+1)}}_{\to 1} = 1$$ indicatie fol. crit lui Lebesgue

Seminar 6

Serii de nr reale

Ex: 1) Studiați natura urm. serii de nr reale.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\, a^n}{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)}$, $a>0$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{2n^3+1}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \cdot \sin\frac{1}{n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Rezolvare:

$$x_n = \frac{n!\, a^n}{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1!\, a^1}{a+1} + \frac{2!\, a^2}{(a+1)(2a+1)} + \dots + \frac{n!\, a^n}{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)} = ??$$

Crit raportului

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, a^{n+1}}{\cancel{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)}((n+1)a+1)} \cdot \frac{\cancel{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)}}{\cancel{n!}\, \cancel{a^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot a}{(n+1)\cdot a+1} = \underline{1}$$

Crit lui Raabe

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)a+1}{(n+1)a} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)a}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)a} = \frac{1}{a}$$

Caz I $0<a<1$ $\Rightarrow \frac{1}{a}>1$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ ~~diver.~~ convergentă

Caz II $a>1$ $\Rightarrow \frac{1}{a}<1$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ divergentă

Caz III $a=1$

$\Rightarrow \frac{1}{a}=1$

$$x_n = \frac{n!}{\underbrace{(1+1)}_{2}\underbrace{(2+1)}_{3}\underbrace{(3+1)}_{4}\cdots(n+1)} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1} = \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}}$$ — serie divergentă

serie remarcabilă ($\sum \frac{1}{n^\alpha}$) Curs 9

$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ → divergentă $a \geq 1$

→ convergentă $0<a<1$.

$a+1) = ??$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{2n^3+1}$

$x_n = \frac{\ln n}{2n^3+1} \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\boxed{\ln(1+x) \leq x \ \forall x \geq 0}$

$x_n = \frac{\ln n}{2n^3+1} \leq \frac{n-1}{2n^3} \leq \frac{n}{2n^3} = \frac{1}{2n^2} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Fie $y_n = \frac{1}{2n^2} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$x_n < y_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ne folosim de y_n

$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ — serie remarcabilă ($\sum \frac{1}{n^\alpha}$) e convergentă

$y_n > x_n$ | Crit comp
y_n convergentă | $\Rightarrow$ x_n serie convergentă

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \cdot \sin\frac{1}{n}, \alpha \in \mathbb{R}$

$x_n = \frac{1}{n^\alpha} \cdot \sin\frac{1}{n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \underbrace{n\sin\frac{1}{n}}_{\frac{x_n}{y_n}} = 1$

$x_n = \frac{1}{n^\alpha} \sin\frac{1}{n} = n\sin\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^{\alpha+1}}$

$n\sin\frac{1}{n} = \frac{x_n}{\frac{1}{n^{\alpha+1}}}$

fie $y_n = \frac{1}{n^{\alpha+1}} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1 \in (0, +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ și $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ au aceeași natură

$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$
- convergentă dacă $\alpha+1>1 \Leftrightarrow \alpha>0$
- divergentă dacă $\alpha \leq 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$
- convergentă pt $\alpha > 0$
- divergentă pt $\alpha \leq 0$

Ex: 2) Fie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ o serie convergentă cu termeni pozitivi. Dem că $\underline{\lim}\ n \cdot x_n = 0$

Demonstrăm prin ~~reducer~~ reducere la absurd

Pp că $\underline{\lim}\ x_n \cdot n \neq 0$ $\Rightarrow \underline{\lim}\ x_n \cdot n > 0 \Rightarrow$

$n \cdot x_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}$ a.î. $\underline{\lim}\ x_n \cdot n > y > 0$ (am strecurat un nr real între lim și 0)

$\sup A > y \Rightarrow y$ nu e majorant al lui A

$\underline{\lim}\, n x_n > y \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geq n} k x_k \right) > y \Rightarrow \exists n_0$ a.î.

$\inf_{k \geq n_0} k x_k > y \Rightarrow y < k x_k \quad \forall k \geq n_0 \Rightarrow$

$\inf A > y \rightarrow y$ e minorant al lui A.

cel mai mare minorant

$\Rightarrow x_k > \frac{y}{k},\ \forall k \geq n_0$

$\Rightarrow x_n > \frac{y}{n},\ \forall n \geq n_0$

Fie $y_n = \frac{y}{n},\ n \in \mathbb{N}^*,\ y > 0$

$y_n > 0$

$x_n > y_n \quad \forall n \geq n_0$

Seria cu termenii mai mari (adică x_n) este convergentă (din ipoteză) $\xrightarrow[\text{comp. neg.}]{\text{Criteriul}} \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ - convergentă

$\Rightarrow y \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ convergentă $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ convergentă (F)

$\Rightarrow$ Pp e falsă $\Rightarrow \underline{\lim}\ x_n = 0$

3) Studiați natura seriei $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+a^n}$, $a>0$

$x_n = \frac{1}{n+a^n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Se disting unm cazuri:

Caz I $\quad a \in (0,1)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)+a^{n+1}} \cdot (n+a^n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+a^n}{(n+1)+a^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(1+\frac{a^n}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{a^{n+1}}{n}\right)} = 1$$

$0<a<1 \Rightarrow 0<a^n<1 \quad |+n$

$\Leftrightarrow n < a^n+n < 1+n \quad :|(\ )^{-1}$

$\frac{1}{n} > \frac{1}{a^n+n} > \frac{1}{1+n}$

$\underbrace{\frac{1}{n+1} < x_n}, < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ - divergentă serie armonică $\alpha=1 \Rightarrow$ divergentă

Crit com. inegal. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ divergentă

Caz II $\quad a=1$

$x_n = \frac{1}{n+1}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ - divergentă

Caz III

$a > 1$

$n + a^n > a^n > 0 \mid (\ )^{-1}$

$\frac{1}{n+a^n} < \frac{1}{a^n} < 0 \quad \forall n \geq 1$

$x_n < \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad \forall n \geq 1$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n \rightarrow$ serie convergentă (serie putere) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este convergentă

$0 < \frac{1}{a} < 1$

11.01.2018

Funcții continue. Funcții uniform continue

① Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

a) Determinați parametrul real a, știind că f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru valoarea parametrului a găsită la a), studiați uniform-continuitatea funcției.

a) f este continuă pe $\mathbb{R}^*$

Din ipoteză $\Rightarrow f$ este continuă în 0. $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{x}_{0} \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{[-1,1]} = 0.$$

$$f(0) = a$$

$\Rightarrow a = 0.$

b) $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \left(x \sin\frac{1}{x}\right)' = \sin\frac{1}{x} + x \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$= \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*$

$a = 1$

$d = -1$

$\mathbb{R} = (-\infty, -1] \cup [-1, 1] \cup [1, +\infty)$

$f|_{[-1,1]}$ continuă pe $[-1,1]$

$[-1,1]$ mulțime compactă $\Rightarrow f|_{[-1,1]}$ uniform continuă

$f|_{[1,+\infty)}$

$f'(x) = \underset{[-1,1]}{\sin\frac{1}{x}} - \underset{(0,1]}{\frac{1}{x}} \underset{[-1,1]}{\cos\frac{1}{x}}$, $\forall x \in [1,+\infty) \Rightarrow -2 \le f'(x) \le 2, \forall x \in [1,+\infty)$

$\Rightarrow f|_{[1,+\infty)}$ este funcție Lipschitz. $\Rightarrow f|_{[-1,+\infty)}$ uniform continuă

$f'(x) = \underset{[-1,1]}{\sin\frac{1}{x}} - \underset{[-1,0)}{\frac{1}{x}} \underset{[-1,1]}{\cos\frac{1}{x}}$, $\forall x \in (-\infty,-1]$ $\in [-2,2] \Rightarrow$

$\Rightarrow f|_{(-\infty,-1]} \le 2$, $\forall x \in (-\infty,-1] \Rightarrow f|_{(-\infty,-1]}$ funcție Lipschitz $\Rightarrow$

$\Rightarrow f|_{(-\infty,-1)}$ uniform continuă

Deci funcția este uniform continuă pe $\mathbb{R}$.

② Fie $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, f o funcție continuă a.î. $f(x)=f(2x)$, $\forall x\in[0,+\infty)$. Dem. că f este funcție constantă.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=f(2x),\ \forall x\in[0,+\infty) \\ f(\frac{x}{2})=f(x),\ \forall x\in[0,+\infty) \\ f(\frac{x}{4})=f(\frac{x}{2}),\ \forall x\in[0,+\infty) \\ f(\frac{x}{8})=f(\frac{x}{4}),\ \forall x\in[0,+\infty) \\ \text{- - - - - - - - -} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=f(\frac{x}{2})=f(\frac{x}{4})=\dots=f(\frac{x}{2^n})$$

$\forall x\in[0,+\infty)$
$\forall n\in\mathbb{N}$

Notăm $x_n=\frac{x}{2^n}\in[0,+\infty)$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{2^n}=0 \\ f \text{ continuă în } 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x)=0.$$

$\Rightarrow f(x)=f(0)$, $\forall x\in[0,+\infty) \Rightarrow f$ este funcție constantă.

③ Studiați uniform continuitatea funcției $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}+\sqrt{x+1}$.

f continuă pe $(-1,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}},\ \forall x\in(-1,+\infty)$$

$a=1 \Rightarrow (-1,+\infty)=[-1,1]\cup[1,+\infty)$

$f|_{[-1,1]}$ funcție continuă pe $[-1,1]$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\left(\frac{x}{x+1}+\sqrt{x+1}\right)=-\infty \Rightarrow f|_{(-1,1]} \text{ nu este uniform continuă pe } (-1,1]$$

Deci f nu este uniform continuă pe $(1, +\infty)$

8) Demonstrați că nu există funcții continue $f:[0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ a.î. $f(f(x)) = \cos x$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Demonstrăm afirmația prin red. la abs.

Pp. red. abs. că există o funcție $f:[0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ continuă a.î. $f(f(x)) = \cos x$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Studiem injectivitatea funcției f.

$f(x) = f(y)$ |∘

1) f strict crescătoare

$x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow f(f(x)) < f(f(y)) \Rightarrow \cos x < \cos y$, $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow x > y$ fals!

2) f strict descrescătoare

$x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow f(f(x)) < f(f(y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x < \cos y \Rightarrow x > y$ fals!

$x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Am ajuns la o contradicție din 1) și 2) deci presupunerea este falsă.

(5) Studiați uniform continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$

f continuă pe $\mathbb{R}$

$c = 0 \Rightarrow I_1 = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$

$f|_{[0,+\infty)}$??

$x_n = \ln n \in [0, +\infty) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$y_n = \ln(n+1) \in [0, +\infty), \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \to \infty} |x_n - y_n| = \lim_{n \to \infty} |\ln n - \ln(n+1)| = \lim_{n \to \infty} \ln \frac{n+1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} |f(x_n) - f(y_n)| = \lim_{n \to \infty} |n - (n+1)| = 1 \neq 0.$$

Deci $f|_{[0,+\infty)}$ <u>nu</u> este uniform continuă pe $[0, +\infty)$