Geometrie vectorială

1. Def $V \neq \emptyset$, K - corp comutativ

$+ : V \times V \to V$ adunarea vectorilor

$(v_1, v_2) \to v_1 + v_2$ (op. internă)

$K \times V \to V$ înmulț. vectorilor cu scalari (op. externă)

$(\alpha, v) \to \alpha v$

I $(V, +)$ grup abelian
- ASOC
- COM
- (∃) ELEM NEUTRU
- ∀ elem să admită un opus

II
1. $(\alpha_1 + \alpha_2) v = \alpha_1 v + \alpha_2 v$
2. $\alpha (v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$
3. $(\alpha_1 \alpha_2) v = \alpha_1 (\alpha_2 v)$
4. $1 \cdot v = v$

$\forall v_1, v_2, v \in V$
$\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha \in K$

$(V/K, +, \cdot)$ sp. vect. peste corpul com. K

$K = \mathbb{R} \to$ sp. vect. real

$K = \mathbb{C} \to$ sp. vect. complex

Exemple

1. a) K - corp comutativ

$(K/K, +, \cdot)$ - structură naturală de corp

orice corp comutativ poate fi organizat peste el însuși ca sp. vectorial

b) $H \subseteq K$ subcorp $(K/H, +, \cdot)$ - sp. vect peste H

$(\forall) h_1, h_2 \in H \to \begin{cases} h_1 - h_2 \in H \\ h_1 \cdot h_2^{-1} \in H \end{cases}$

Orice subcorp poate fi utilizat pt a obține o structură naturală de spațiu vectorial a corpului peste subcorp

pct. a) $\mathbb{C}/\mathbb{C}$, $\mathbb{R}/\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$ > sp. vect.

b) $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$

2. $K^n = \underbrace{K \times K \times \ldots \times K}_{n \text{ ori}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in K, \forall i = \overline{1,n}\}$

$+ : K^n \times K^n \to K^n$

$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \overset{def}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

$(\forall)\ (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\in K^n$ „adunarea vectorilor"

$K\times K^n \to K^n$

$\alpha(x_1,\dots,x_n) \overset{def}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2,\dots,\alpha x_n)$ $\forall \alpha\in K$ $\forall (x_1,\dots,x_n)\in K^n$

„înmult vect cu scalari"

caz particular: $K=\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^n/\mathbb{R},+,\cdot)$ sp vect real

$K=\mathbb{C}$ $(\mathbb{C}^n/\mathbb{C},+,\cdot)$ sp vect complex

3. $\mathcal{M}_{(m,n)}(K)$ – mult matricelor de tip (m,n) cu elem din K (corp com.)

$+: \mathcal{M}_{(m,n)}(K)\times\mathcal{M}_{(m,n)}(K)\to\mathcal{M}_{(m,n)}(K)$

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$, unde $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$

ad. matricelor

$B=(b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$

$\cdot: K\times\mathcal{M}_{(m,n)}(K)\to\mathcal{M}_{(m,n)}K$

$\alpha A=(\alpha a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ înmult. matricelor cu scalari

$(\mathcal{M}_{(m,n)}(K)/K,+,\cdot)$ sp. vect peste K.

4. $K[X]$ mult pol în nedet. X cu coef în corpul com K

$(K[X]/K,+,\cdot)$ – sp vect peste K

adun polin; înmult polin

b) $(K_n[X]/K,+,\cdot)$ sp vect peste K

c.p. $K=\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}[X]/\mathbb{R},+,\cdot)$ sp vect real

$K=\mathbb{C}$ $(\mathbb{C}[X]/\mathbb{C},+,\cdot)$ sp vect complex

Liniar independență / Liniar dependență / Sist de generatori / Baze

Def V/K – sp vect peste K

$S=\{v_1,\dots,v_n\}\subset V$

S s.n. sistem de vectori liniar indep dacă

$(\forall)\ \alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_nv_n=0_V \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$

Obs S.n. s.v. liniar ind. dacă (∀) combinație liniară nulă se realizează numai cu scalari nuli

a) $v \neq 0_V \Rightarrow \{v\}$ s.v. lin. indep.
b) (∀) submulț. nevidă a unui sist. de vectori liniar ind. este s.v. lin. ind.

Ex $\mathbb{R}^n$
$S = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots 0, \underset{(i)}{1}, 0 \dots 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$
$S \subset \mathbb{R}^n$ s.v. lin. ind.
Fie $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0_{\mathbb{R}^n}$
$\alpha_i \in \mathbb{R}, (\forall)\ i = \overline{1,n}$
$\Rightarrow (\alpha_1, 0, \dots, 0) + (0, \alpha_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, 0, \alpha_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$
$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$

Lin. dep.

Def V/K sp. vect. peste K
$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$
S s.n. s.v. liniar dep. dacă nu este lin. indep.

Obs S s.v. liniar dep. dacă (∃) comb. liniare nule care se realizează cu scalari, nu toți nuli

P (∀) sist. de vect. care conține vect. 0_V este lin. dep.

Ex $\mathbb{R}^3$ $S = \{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, -1, 2), v_3 = (1, 1, 5)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
lin. dep.
$v_1 + v_2 = v_3$
$v_1 + v_2 - v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ (lin. d.) rel. de dep. lin.

Sist. de gen.

Def V/K – sp. vect. peste K
$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$
S s.n. sist. de gen. pt. V dacă:
$\forall v \in V, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

Def S.n. sp. vect. care admite un sist. de generatori finit s.n. finit generat (ex 1) $\mathbb{R}^n$ – sp. vect. finit gen.
2) $\mathbb{R}[X]$ – sp. vect. infinit gen.

BAZA **Def** Fie V/K sp. vect. finit generat
$B \subset V$ bază dacă $\begin{cases} 1) & B \text{ s.v. lin. indep.} \\ 2) & B \text{ sist. de gen. pt. } V \end{cases}$

Ex 1) $\mathbb{R}^n$

$B_0 = \{e_1 = \{1, 0, \dots, 0\}, e_2 = \{0, 1, \dots, 0\}, \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$ - bază canonică

2) $\mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{R})$

$B_0 = \{E_{ij}\}_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}$ bază can.

$E_{ij} = \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{array}$ (i), (j)

3) a) $\mathbb{R}[X] / \mathbb{R}$

$B_0 = \{1, x, \dots, x^n, \dots\}$

bază can.

b) $\mathbb{R}_n[X] / \mathbb{R}$ $B_0 = \{1, x, \dots, x^n\}$.

bază can

4) $\mathbb{C} / \mathbb{R}$, $B_0 = \{1, i\}$.

bază can, $i^2 = -1$

$B_1 = \{1-i, 1+i\}$ - bază arbitrară

(P) Def [echiv] V/K sp vect finit gen.

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$

bază $\Leftrightarrow$, $\forall v \in V$ $(\exists)! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$,

a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

$[v]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$\hookrightarrow$ coord vect v în rap cu baza B.

Dem $B \subset V$ bază $\Rightarrow$ 1) $B \subseteq V$ lin ind

2) B s. de gen pt V

$\Rightarrow (\forall) v \in V$, $(\exists) \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ a.î.

$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

Pp $(\exists) \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in K$ a.î. $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0_V \xRightarrow{B \text{ s.v lin ind}} \alpha_i - \beta_i = 0$,

$(\forall) i = \overline{1,n} \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$ $(\forall) i = \overline{1,n}$ q.e.d

(P) a) $\forall$ sp. vect admite mai multe baze

b) $(\forall)$ 2 baze ale aceluiași sp vect au același cardinal (Lema lui Zorn)

Def Card comun al tuturor bazelor unui sp vect constituie dim. sp. vect. respectiv.

V/K sp vect
$B \subset V$ bază, card $B = n \Rightarrow \dim_K V = n$

<u>Exemple</u> 1. $\mathbb{R}^n$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$

2. $\mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{R})$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(m,n)(\mathbb{R}) = m \cdot n$

3. $\mathbb{R}[X]/\mathbb{R}$ — $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X] = +\infty$

$\mathbb{R}_n[X]/\mathbb{R}$ — $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[X] = n$

4. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

<u>Th. schimbului</u>

Fie V/K sp vect finit generat, $G = \{g_1, g_2, \dots g_s\} \subset V$ sist de gen

$A = \{f_1, \dots f_n\} \subset V$ s.v. lin. ind

Atunci 1) $n \leq s$ și $(\exists)\ A' \subset G$ a.î. $A \cup A' = B \subset V$ bază

$\boxed{P}$ V/K sp vect finit generat, $\dim_K V = n$

$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$

UASE 1) S – s.v. lin. ind
2) S – s. de gen pt V
3) S – bază

GEOMETRIE

CURS 2

V sp vectorial / corp (comutativ) K (= $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$)

Ex: $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}(m,n,K) \simeq \mathbb{R}^{m \cdot n}$, $P_n(x) := \{ f \in K[x] / gr f \le n \}$, $K[x]$ (polinoame)

* Sistem liniar independent $\{v_1 \dots v_k\}$ $\sum_{i=1}^{k} a_i v_i$ = comb liniară cu scalari $a_i \in K$

$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0 \Rightarrow a_i = 0, i = \overline{1,k}$

* Sistem de generatori $\{v_1, \dots, v_n\}$ e sistem de generatori dacă $\forall v \in V$, $\exists a_1, \dots, a_n$ a.î. $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

* Dat $\{v_1, \dots, v_n\} =: S$

$L(S) := sp(S) = \{ \sum_{1}^{n} a_i v_i / a_i \in K \}$ acoperire liniară

$sp(v) = \{ av / a \in K \}$

* Bază $B \subset V$, sistem de generatori liniar independent

Ex: 1) în $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ $e_i = (0, 0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$

2) $P_n(X)$ $f_0 = 1, f_1 = X, f_2 = X^2, \dots, f_n = X^n$

3) $K[X]$ $\{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$

4) $\mathcal{M}(m,n,K)$ $E_{ij} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ $(a_{ij}) = \sum a_{ij} \cdot E_{ij}$

Teorema 1: Orice spațiu vectorial admite bază.

Teorema 2: Orice spațiu vectorial finit generat admite baze.

Orice două baze au același cardinal

Obs: V e finit generat dacă are un sistem de generatori finit.

Fie $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ sist de gen pp că $v_i \in sp\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k\}$

Ex: în $\mathbb{R}^2$ $S = \{(1,0), (1,1), (0,1)\}$ $v_2 = v_1 + v_3$, $v_2 \in sp\{v_1, v_3\}$

Obs $\{v_1, \dots, v_k\}$ liniar independent (ordonat) $v_i \neq 0$

$\Leftrightarrow$ fiecare v_i independent de predecesori

Demonstrație T2: e implicată de:

<u>Lema schimbului</u> (Steinitz) Fie $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ sistem de generatori și $\{y_1, \dots, y_m\}$ sistem liniar independent

Atunci există $S' \subset S$ ai $\{y_1, \dots, y_m\} \cup S'$ e sistem de generatori

În particular $\# S \geq m$ (card unui sist de gen $>$ card unui sist l ind)
(cardinal)

Fie $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ baze. Cum $\mathcal{B}_1$ e sist de gen și $\mathcal{B}_2$ e liniar ind

$\# \mathcal{B}_1 \geq \# \mathcal{B}_2$

$\overset{inv}{\Longleftrightarrow} \Rightarrow \# \mathcal{B}_1 \leq \# \mathcal{B}_2$ $\Big| \Rightarrow \# \mathcal{B}_1 = \# \mathcal{B}_2$

Dem: Lemei schimbului

Sist lin ind $y_1 = a_1 x_1 + \dots + a_k x_k \neq 0 \Rightarrow \exists$ măcar un scalar nenul, fie el a_1

$x_1 =$ sist gen

$\Rightarrow x_1 = +\frac{1}{a_1} y_1 - \frac{a_2}{a_1} x_2 - \dots - \frac{a_k}{a_1} x_k \Rightarrow \{y_1, x_2, \dots, x_k\}$ sist de gen.

$y_2 = a_1 y_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k$ (alți scalari decât înainte)

Dacă $a_2 \dots a_k = 0 \Rightarrow y_2 = a_1 y_1 \Rightarrow \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ dependent $\times$

$\Rightarrow$ cel puțin un a_i, $i = \overline{2,k}$ e nenul, fie el a_2

$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{a_m} y_2 - \frac{a_1}{a_m} y_1 - \frac{a_3}{a_m} x_3 - \dots - \frac{a_k}{a_2} x_k \Rightarrow \{y_1, y_2, x_3, \dots x_m\}$ sist de gen

Definiție: Pt un spațiu vectorial finit generat, card comun al bazelor s.n. dimensiune.

$\dim V = n (V^n)$

Fie V^n, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ bază

$\forall v \in V$, $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ cu $a_1, \dots, a_n$ unic determinate

Dacă, pp prin abs. $v = \sum_1^n a_i e_i = \sum_1^n b_i e_i \Rightarrow \sum_1^n (a_i - b_i) e_i = 0 \xRightarrow{\{e_i\} \text{ liniar ind}}$

$\Rightarrow a_i - b_i = 0$, $i = \overline{1,n}$

Scalarii $a_1, \dots, a_n$ sn coordonatele lui v în baza $\mathcal{B}$.

Ex: În $\mathbb{R}^3$ baza canonică $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

$\forall v \in (x,y,z) \Rightarrow v = x e_1 + y e_2 + z e_3$

<u>Schimbarea bazei</u> Fie $\mathcal{B} = \{e_i\}$, $\mathcal{B}' = \{e'_i\}$ $i = \overline{1,n}$

$v = \sum_1^n a_i e_i = \sum_1^n a'_i \cdot e'_i$

Legătura dintre (a_i) şi (a'_i)?

$$e'_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e_j, \ i = \overline{1,m}$$

dim şi $e_j = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} e'_k \Rightarrow e_j = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} e'_k = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} e_i =$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}\right)}_{x_i} e_i$$

$\{e_i\}$ liniar indep. $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij} \Rightarrow A \cdot B = I_m$

Deci: Matricea (de trecere, tranziţie) de la o bază la alta e inversabilă. Dacă A face trecerea de la B la B', atunci A^{-1} face trecerea de la B' la B.

Ex: În $\mathbb{R}^3$ $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,0,1)$, $e_3 = (1,0,0)$

$a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = 0$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{a} = \\ a_1 + a_2 \quad = 0 \end{cases}$$

sist are doar sol banală $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

$e'_1 = (1,1,2)$ $e'_2 = (1,0,2)$, $e'_3 = (-1,0,1)$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

$$e'_i = \sum a_{ji} e_i$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} a_{11} + a_{21} + a_{31} \\ a_{11} \\ a_{11} + a_{21} \end{matrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

Fie $v = \sum_{i=1}^{m} a'_i e'_i = \sum_{i=1}^{m} a'_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji} a'_i \right) e_j$

$$\overset{\|}{\sum_{j=1}^{m}} a_j e_j \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{ji} a'_i = a_j, \ j = \overline{1,m}} \quad A[v]'_{B'} = [v]_B$$

Geometrie 07.03.201?

-curs 3-

Subspații vectoriale

Fie V/K și $U \subseteq V$

Def. U este subspațiu vectorial pentru oricare $x, y \in U$,

$x + y \in U$

$a \cdot x \in U$, $\forall a \in K$

Obs. 1: U este subspațiu $\Leftrightarrow ax + by \in U$, $\forall a, b \in K; x, y \in U$

Obs. 2. În particular $(U, +)$ subgrup în $(V, +)$

0) $\{0\} \subseteq V$, $nV \subseteq V$

Exemplu: 1) $V = K^n$, $m < n$ $K^m \to K^n$

$(x_1, \dots x_m) \mapsto (x_1, \dots x_m, 0, \dots 0)$

2) $\{A \in \mathcal{M}(m, n, K) / \operatorname{tr} A = 0\} \subseteq \mathcal{M}(m, n, K)$

matricile de urmă nulă

3) $\{A \in \mathcal{M}(m, n, K) \mid A = A^t\} \subseteq \mathcal{M}(m, n, K)$

simetrice

4) $V = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\}$

$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue}\}$

e subspațiu din V.

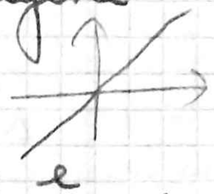
5) $\mathcal{P}_m(x) \subset K[x]$

Obs. $\dim U = p$ se numește p-plan

$\dim V = n$, $\dim U = n - 1 \Rightarrow$ hiperplan

Contraexemplu: sferele nu sunt subspații, reuniunile de drepte nu sunt subspații.

Obs. În $\mathbb{R}^n$ orice dreaptă prin origine e un subspațiu 1-dimensional



Obs. Dacă V_1, V_2 subspații $\Rightarrow V_1 \cap V_2$ e subspațiu, dar $V_1 \cup V_2$ nu e subspațiu. De fapt $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ e subspațiu Λ - lambda (mulț. arbitrară)

Exemplu important.   S de mână

Fie $A \in \mathcal{M}(m, n, K)$ matrice cu m linii și n coloane și $S(A) := \{X \in K^n \mid AX = 0\}$ (sistem omogen cu matricea A), $S(A) \subset K^n$ subspațiu

$$X_1, X_2 \in S(A) \Rightarrow AX_1 = 0,\ AX_2 = 0 \Rightarrow$$
$$A(X_1 + X_2) = 0$$
$$A(a \cdot X_1) = a(AX_1) = a \cdot 0 = 0.$$

$$\boxed{\dim S(A) = n - \text{rang}(A)}$$

$$AX = 0 \qquad \left|\begin{array}{l} a_{11}X_1 + \dots + a_{1n}X_n = 0 \\ a_{21}X_1 + \dots + a_{2n}X_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + \dots + a_{mn}X_n = 0 \end{array}\right|$$

Fie $r = \text{rang} A$.
$$\begin{cases} a_{11}X_1 + \dots + a_{1r}X_r = -a_{1r+1}\lambda_1 - \dots - a_{1n}\lambda_{n-1} \\ \vdots \\ a_{r1}X_1 + \dots + a_{11}X_r = -a_{rr+1}\lambda_1 - \dots - a_{mn}\lambda_{n-r} \end{cases}$$

Sol. generală $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots \frac{\Delta_r}{\Delta}, \lambda_1, \dots \lambda_{n-r}\right)$ depinde liniar de $\lambda_1, \dots \lambda_{n-r}$.

$$X = \sum X_1\lambda_1 + \dots + X_{n-r}\lambda_{n-r}$$

$$\Delta_k = (-1)\begin{vmatrix} \dots a_{1n+1}\lambda_1 + \dots + a_{1n}\lambda_{n-1} \\ \dots a_{nn+1}\lambda_1 + \dots + a_{nn}\lambda_{n-1} \end{vmatrix}$$

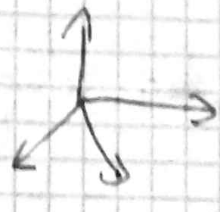
$$= \begin{vmatrix} \alpha \cdot a & x+y & b \\ \alpha \cdot c & x+y & d \\ \alpha \cdot m & x+y & n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & x & b \\ c & x & d \\ m & x & n \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} y \\ y \\ y \end{vmatrix}$$

Teoremă Fie $U \subset V$ submulțime. U e subspațiu vectorial (de dimensiune p) dacă există o bază în V a.î. coordonatele vectorilor din U satisfac un sistem liniar omogen

Dem „$\Rightarrow$" Fie $\{e_1, \dots e_p\}$ în U. În particular $\{e_1, \dots e_p\}$ e liniar independent în V $\Rightarrow$ îl pot completa la o bază $\{e_1, \dots e_p, e_{p+1}, \dots e_n\}$ în V, $\forall u \in U \Rightarrow u = a_1 e_1 + \dots + a_p e_p + 0 \cdot e_{p+1} + \dots + 0 \cdot e_n$.

U are în baza lui V coordonatele

$$[u] = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$



coord. lui sunt soluțiile unui sistem $\begin{cases} x_{p+1} = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$

Obs Odată fixată o bază în V, pot privi V ca pe K^n, $\forall v \in V$.

$$v = \sum x_i e_i \qquad v \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

$\Rightarrow$ orice subspațiu $U \subset V$ poate fi privit ca $K^p \subset K^n$

Teoria subspațiilor vectoriale se reduce la studiul sistemelor liniare.

Deci dacă U e subspațiu de dimensiune p în V fixând o bază $\{e'_1, \dots e_n\}$ în V subspațiul U e descris de ecuațiile:

$$\begin{cases} A \cdot X' = 0 \\ rg A = n-p \end{cases}$$

X reprez. coord vectorilor din U în baza dată.

$A \cdot X = 0$ se va putea scrie sub forma:

$x_i = \sum_{j=1}^{p} b_{ij} t_j$, $i \leq p$ (forma parametrică

$x_i = t_i$, $i = \overline{p+1, n}$

În particular, ecuația unui hiperplan ($\dim U = n-1$) este $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$.

Obs. Un subspațiu de dimensiune p e intersecția a n-p hiperplane

Fie S o submulțime $\subset V$

$\angle(S) := \{ \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in K, v_i \in S$

acoperirea liniară / span-ul lui S

$$\sum^{k} a_i v_i + \sum_{1}^{l} b_j v_j$$

$$= \sum_{1}^{k+l} a_i v_i \in \angle(S) \qquad b_1 = a_{k+1}$$

$$b_l = a_{k+l}$$

$\alpha \cdot \sum a_i v_i = \sum (\alpha a_i) \cdot v_i \in \angle(S) \Rightarrow$

$\angle(S)$ e subspațiu

Ex: $v \neq 0 \quad S = \{v\}$

$L(S) = \{a \cdot v \mid a \in K\}$

dreapta generată de v

P: $L(S) = \bigcap\limits_{U \supseteq S} U$, U subspațiu

(cel mai mic subspațiu care-l conține pe S)

Dublă incluziune

$\supset$ trivială

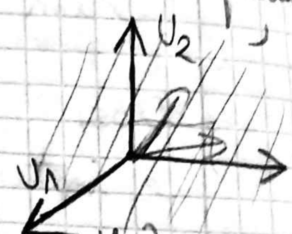
Corolar $L(U) = U$

Cor. $L(L(S)) = L(S)$.

Obs $\underline{U_1 \cup U_2 \text{ nu e subspațiu}}$

! Reuniunea a 2 subspații nu e subspațiu (lin ind.)

Def. $U_1 + U_2 := L(U_1 \cup U_2)$



Obs. $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$

Scrierea nu e unică!

Atunci când descompunerea $u_1 + u_2$ e unică suma se numește directă $U_1 \oplus U_2$

P: Suma e directă $\Leftrightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\}$

$u_1 + u_2 = u_1' + u_2' \Leftrightarrow$

$\underset{\substack{\uparrow \\ U_1}}{u_1 - u_1'} = \underset{\substack{\uparrow \\ U_2}}{u_2' - u_2}$.

Teorema Grossmann

$$\boxed{\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)}$$

Demonstratie

Fie $\{e_1, \dots e_p\}$ bază în $U_1 \cap U_2$ $(\dim U_1 \cap U_2 = p)$ $\Rightarrow \{e_1, \dots e_p\}$ liniar indep. în U_1, U_2

Completez la o bază $\{e_1, \dots e_p, f_{p+1}, \dots f_q\}$ a lui U_1 $(\dim U_1 = q)$

$\{e_1, \dots e_p, g_{p+1}, \dots g_s\}$ a lui U_2 $(\dim U_2 = s)$

Arăt că $\{e_1, \dots e_p, f_{p+1}, \dots f_q, g_{p+1}, \dots g_s\}$ bază în $U_1 + U_2$. Cum? lin ind + sist generatori

lin ind.

$$\underline{a_1 e_1 + \dots + a_p e_p + b_{q+1} f_{p+1} + \dots + b_q f_q} = \underbrace{-(c_{p+1} \cdot g_{p+1} + \dots + c_s g_s)}_{U_1 \cap U_2}$$

$\Rightarrow b_j = 0, \; c_j = 0 \Rightarrow a_1 e_1 + \dots + a_p e_p = 0$

$\Rightarrow a_i = 0 \Rightarrow$ lin ind

sist de generatori

$u \in U_1 + U_2 \Rightarrow u = u_1 + u_2 = \sum a_i e_i$

$= (\sum a_i e_i + \sum b_j f_j) + (\sum a_i' e_i + \sum c_j g_j)$

$\dim = \cancel{p} + s - p + q - \cancel{p} = s + q - p$

Curs 4 Geometrie **Aplicații liniare**

V/K, W/K

Def: $f: V \to W$ s.n. aplicație liniară

dacă $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(ax) = a f(x)$, $\forall a \in K$

Obs: 1) $f(0)=0$

2) f e morfism între $(V,+),(W,+)$

Obs: f e aplic. liniară $\Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(x_i)$

$\forall k \in \mathbb{N}, x_i \in V, a_i \in K$

Exemple:

1) $V \to W$, $f(x) = 0$

2) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x_1, \dots, x_n) = (a_1 x_1, \dots, a_n x_n)$

3) Fie $A \in M(n,m,K)$ $\quad f: K^m \to K^n$ prin

$f(X) = A \cdot X$

Obs: ex 2) e caz part pt 3), pt $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & a_3 & \\ 0 & & & \ddots \; a_n \end{pmatrix}$

4) $\mathcal{D}: \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ $\quad \mathcal{D}(f) = f'$

toate funcțiile ce se derivă de o inf. de ori iar derivatele sunt funcții continue

5) $f_\lambda: K[X] \to K$, $f_\lambda(P) \stackrel{\cdot}{=} P(\lambda)$

6) $M(n,K) \xrightarrow{f} M(n,K)$

$f(A) = {}^tA$

7) $M(n,K) \xrightarrow{Tr} K \qquad A \mapsto Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii})$

Trace

el. di pe diag principală

<u>Obs</u>: $V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \Rightarrow f_2 \circ f_1$ liniară

<u>Def</u>: $f: V \to W$ s.n <u>izomorfism</u> dacă e liniară, bijectivă

în acest caz $f^{-1}: W \to V$ e liniară

$L(V,W) := \{f: V \to W \text{ liniare}\}$

<u>Obs</u>: $L(V,W)$ e sp vectorial$/K$

$(f+g)(x) := f(x)+g(x) \quad \forall x \in V$

ad. fcții

ad. vectori

$(af)(x) := af(x)$

$End(V) := L(V,V)$

aplicații liniare de la V la V

$GL(V) := \{f: V \to V, \text{ izomorf.}\}$

grup cu „zero"

<u>Obs</u>: Dacă există $V \xrightarrow{f} W$ izom., spațiul V și W s.n <u>izomorfe</u>

<u>Obs</u>: Fie $E \neq \emptyset$, V/K sp. vect. și există o bij. $f: E \to V$

Def. o struct de sp. vect$/K$ pe E

$x, y \in E \quad x + y := f^{-1}(f(x) + f(y))$
$a \in K \quad a \cdot x := f^{-1}(a \cdot f(x))$ $\Rightarrow E$ sp. vect$/_K$

Fie $f : V \to W$ liniară

$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in V / f(x) = 0\} \subset V$

„Kernel" = „nucleu"

$x, y \in \mathrm{Ker}\, f \to f(x) = 0,\ f(y) = 0$
$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$

$f(a x) = a f(x) = 0$

$\Rightarrow$ Ker f e subspațiu vectorial în V

$\mathrm{im} f = \{y \in W / \exists x \in V,\ f(x) = y\} \subset W$ subspațiu

P: Fie $f \in L(V, W)$ Atunci

1) f e inj. $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$

2) f e surjectivă $\Leftrightarrow \mathrm{im} f = W$

Dem: 1) „$\Rightarrow$" f in $\Rightarrow \{f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Pres. că $f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = f(0) \Rightarrow x = 0$

„$\Leftarrow$" Dacă $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0 \to f(x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

Th: Fie $f \in L(V,W)$ Atunci

dimensiunea $\mathrm{Ker}\, f$ + dim. $\mathrm{Im}\, f$ = dim V

Dem Fie $\{e_1, \dots, e_k\}$ în $\mathrm{Ker}\, f$

Completăm la o bază $\{e_1, \dots, e_k, g_{k+1}, \dots, g_n\}$ în V

Arăt că $\{f(g_{k+1}), \dots, f(g_n)\}$ bază în $\mathrm{Im}\, f$

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i f(g_i) = 0$$

$$f\left(\sum_{k+1}^{n} a_i g_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{k+1}^{n} a_i g_i \in \mathrm{Ker}\, f$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n} a_i g_i = \sum_{j=1}^{k+1} b_j e_j \Rightarrow a_i = 0, b_j = 0$$

Prop: Fie $f \in L(V,W)$. Atunci

1) f transformă un sistem liniar independent într-un sist liniar independent $\Leftrightarrow$ injectivă $\forall S \subset V$, S lin. ind., $f(S) \subset W$ lin ind.

2) $\forall S \subset V$, S s. gen., $f(S) \subset W$ s. gen $\Leftrightarrow$ surjectivă.

3) f(bază) = bază $\Leftrightarrow$ f e izomorfism

Th $V \simeq K^n \Leftrightarrow \dim V = n$

în particular $V \simeq W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$

Dem: Fie $n = \dim V$ Fie $\{e_1, \dots, e_n\}$ bază $V \to x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$f: V \to K^n$, $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$

$x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$

$\Rightarrow x+y = \sum (x_i + y_i) e_i = f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(ax) = a f(x)$ izomorf.

$ax = \sum (a x_i) e_i$

Fie $f: V \to V'$ liniară

$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ bază în V

$\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_{n'}\}$ — " — V'

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n'} a_{ji} e'_j \quad , \quad i = \overline{1,n}$$

$$\underset{\in V}{x} = \sum_1^n x_i e_i \quad , \quad f(x) = f\left(\sum_1^n x_i e_i\right) = \sum_1^n x_i f(e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{j=1}^{n'} a_{ji} e'_j = \sum_{j=1}^{n'} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) e'_j$$

Dar $f(x) \in V'$, $f(x) = \sum_{j=1}^{n'} x'_j e'_j \implies$ „morala" $\boxed{x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i}$

$$V \ni x \xmapsto{\mathcal{B}} [x] = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

$$[f(x)]_{\mathcal{B}'} = A \cdot [x]_{\mathcal{B}} \quad , \quad A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Ce se întâmplă la schimbarea bazei?

Fie $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n\}$, $\overline{\mathcal{B}}' = \{\overline{e}'_1, \dots, \overline{e}'_{n'}\}$

$$\overline{e}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} e_j \qquad C = (c_{ij}) \text{ inversabilă}$$

$$\overline{e}'_k = \sum_{l=1}^{n'} \overline{c}_{lk} e'_l \qquad \overline{C} = (\overline{c}_{lk}) \text{ inversabilă}$$

$$f(\overline{e}_i) = \sum_{j=1}^{n'} \overline{a}_{ji} \overline{e}'_j = f\left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} f(e_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \sum_{j=1}^{n'} a_{jk} e'_j = \sum_{j=1}^{n'} \underline{\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} c_{ki}\right)} e'_j = \sum_{j=1}^{n'} \overline{a}_{ji} \sum_{l=1}^{n'} \overline{c}_{lj} e'_l$$

$$= \sum_{l=1}^{n'} \underline{\left(\sum_{j=1}^{n'} \overline{c}_{lj} \overline{a}_{ji}\right)} e'_l$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_{lj} \bar{a}_{ji}$$

$$\bar{C}^{-1} \cdot | \quad A \cdot C = \bar{C} \cdot \bar{A}$$

$$\boxed{\bar{A} = \bar{C}^{-1} A C}$$

<u>Corolar</u>: Se poate defini $rg(f) := rg A$ și $rg(f)$ nu depinde de bazele în care se calculează A

<u>Aplicație</u>: $f : V \to W$ cine e $\operatorname{Ker} f$?

Fixez baze $B, B' \leadsto A = [f]$

$V \ni x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow A[x] = 0 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ sist lin. omogen

$\operatorname{Ker} f$ e spațiul soluțiilor $S_A \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = n - rg(f)$ A,

$n = \dim V \Rightarrow rg(f) = \dim \operatorname{Im} f$

<u>Ex</u>: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3)$

$A := [f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A \neq 0 \Rightarrow rg(f) = 3$

$\Rightarrow f$ izomorf

$\bar{B} = \{e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3\} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det C \neq 0$

$[f]_{\bar{B}}^{B} = A \cdot C = A^2$

$f(\bar{e}_1) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = col_1(A) + col_2(A)$

$f(\bar{e}_2) = f(e_1) - f(e_2) = col_1(A) - col_2(A)$

$f(\bar{e}_3) = f(e_3) = col_3(A)$

Ex: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_3)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

pt im f

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= y_1 \\ x_1 + x_2 &= y_2 \\ x_1 + x_2 &= y_3 \\ x_1 + x_3 &= y_4 \end{aligned} \Rightarrow y_2 = y_3$$

$Ker f = \{(0,0,0)\}$ $\qquad$ $im f = \{(\alpha, \beta, \beta, \gamma)\}$

Prop

Fie $\{e_1, \dots, e_n\}$ bază în V și $v_1, \dots, v_n$

Atunci există o unică aplicație liniară $f: V \to W$ a.î.

$f(e_i) = v_i$

$\forall x \in V,\ x = \sum x_i e_i \Rightarrow f(x) = f(\sum x_i e_i) = \sum f x_i f(e_i) = \sum x_i v_i$

Geometrie C5

21.03.2018

Structura endomorfismelor

$f \in End(V)$ $f: V \to V$

$f(ax+by) = af(x) + bf(y)$

Problema: Existența (găsirea) unor baze „convenabile" pt. ~~ma~~ $\underset{\text{matrice}}{[f]}$ (să fie cât mai simplă)

Ex: $V = V_1 \oplus V_2$ ($V = V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2 = \{0\}$)

$f(V_1) \subseteq V_1$ $\quad f(V_2) \subseteq V_2$

Dacă ~~Aleg~~ $\mathcal{B} = \{\underbrace{e_1, \dots e_{n_1}}_{V_1}, \underbrace{e_{n_1+1}, \dots e_n}_{V_2}\} \Rightarrow [f] = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, $A_i = [f|_{V_i}]$

Def: $f(U) \subseteq U$, U subspațiu, atunci U s.n. subspațiu invariant

Idealul: să avem n subspații invariante de dim 1 în sumă directă

$\exists \{e_1, \dots e_n\}$ bază, cu $f(e_i) = \lambda_i e_i$

$\Rightarrow [f] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_i)$

Def: $v \in V \setminus \{0\}$ s.n. vector propriu (principal) asociat valorii proprii (principale) $\lambda \in K$ dacă $f(v) = \lambda \cdot v$

Obs: 1) $f(v) = \lambda v \Rightarrow \underset{\{a \cdot v \mid a \in K\}}{\langle v \rangle}$ e invariant

$f(av) = af(v) = a\lambda \cdot v = (a\lambda)v \in \langle v \rangle$

2) Dacă $V_\lambda : \{v \in V \setminus \{0\} \mid f(v) = \lambda v\} \cup \{0\}$ e subspațiu vectorial

$v_1, v_2 \in V_\lambda \Rightarrow f(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) =$ (K corp com.)

$= a_1 \lambda v_1 + a_2 \lambda v_2 = \lambda(a_1 v_1 + a_2 v_2) \in V_\lambda$

Fie λ o valoare proprie $\Rightarrow \exists v \neq 0$, $f(v) = \lambda v$ (1)

Fie $\mathcal{B} = \{e_1, \dots e_n\}$ bază arbitrară

$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$

$v = \sum v_j e_j$

$$f(v) = \lambda v \iff A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I_n)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

Din (1), (2) $\Rightarrow$ sistemul are sol nenulă $\Rightarrow \det(A-\lambda I_n) = 0$

(Determinant
$B = (b_{ij})$
$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$
)

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

$P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ pol. de grad n

Valorile proprii ale lui f sunt rădăcinile din K ale lui P_f (=polinomul caracteristic)

<u>Obs:</u> Dacă se folosește o altă bază B' în care matricea lui f este A', avem relația: $A' = C^{-1}AC$ pt. C inversabilă.

$$\det(A' - \lambda I_n) = \det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}C) = \det\left(C^{-1}(A - \lambda I_n)C\right) =$$
$$= \det C^{-1} \det(A - \lambda I_n) \det C \qquad \text{(produs com. de nr. în corpul } K)$$
$$= \det(A - \lambda I_n)$$

$\Rightarrow P_f$ e bine definit (nu depinde de baza în care îl calculăm)

Fie $m_\lambda :=$ multiplicitatea valorii proprii λ ca rădăcină (în K) a lui P_f.

Lui λ i se asociază subsp V_λ

<u>P1</u> $\dim V_\lambda \leq m_\lambda$

Dem: Presup prin red. la abs.:

Fie ~~m_λ~~ $n_\lambda = \dim V_\lambda > m_\lambda$

Fie $\{\underbrace{e_1, \ldots e_{n_\lambda}}_{V_\lambda}, e_{n_\lambda+1}, \ldots e_n\}$ bază în V

$f(e_i) = \lambda e_i,\ i \leq n_\lambda$

$$[f] = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \cdots \lambda & 0 \\ \hline * & * \end{array}\right) \leftarrow \text{linia } n_\lambda$$

$$P_f(X) = (X-\lambda)^{n_\lambda} \cdot Q(X) \Rightarrow m_\lambda \geq n_\lambda > m_\lambda \quad \text{contradicție}$$

P2 Vectorii proprii asociați unor valori proprii distincte sunt liniar indep.

(Fie $v_i \sim \lambda_i$, $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \{v_1, \dots v_k\}$ indep)

Dem

Fie $\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0 \quad | \cdot \lambda_k \neq 0$

$\sum_1^k a_i f(v_i) = f(\sum a_i v_i) = 0$

$\parallel$

$\sum_1^k a_i \lambda_i v_i \quad \Rightarrow \sum_1^k a_i \lambda_i v_i = 0$

$\sum \lambda_k a_i v_i = 0$

$\sum \lambda_i a_i v_i = 0 \quad \ominus$

$\sum_1^{k-1} a_i(\lambda_k - \lambda_i) v_i = 0 \Rightarrow \{v_i\}_{\overline{1,k-1}}$ lin. indep contradicție

~~Teorema~~

Obs: Dacă $\exists \{e_1, \dots, e_n\}$ a.î. $f(e_i) = \lambda_i$, spunem că f e diagonalizabil

T. Fie $f \in End(V/K)$, f e diagonalizabil (există o bază de vectori proprii $\Leftrightarrow P_f$ are toate rădăcinile în K și $m_\lambda = \dim V_\lambda$ $\forall$ val. proprie λ

Dem „$\Rightarrow$" Fie $\{e_i\}$, $f(e_i) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$ $\quad [f] = diag(\mu_i)$

$\lambda_1, \dots \lambda_r$ val distincte ale lui μ_i

$m_1 \quad m_r \quad m_1 + \dots + m_r = n$

$$[f] = A = \left(\begin{array}{c} \lambda_1 \cdots \lambda_1 \\ \hline \lambda_2 \cdots \lambda_2 \\ \hline \\ \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{lin } m_1 \\ \\ \text{lin } m_1 + m_2 \end{array}$$

$\det(A - X\cdot I_n) = (X-\lambda_1)^{m_1} \cdot (X-\lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (X-\lambda_r)^{m_r}$
$\quad ''$
$P_f(X)$

$\Rightarrow$ răd. lui $P_f(X)$ sunt $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ cu multiplicitățile $m_1, \ldots, m_r$

„$\Leftarrow$"

Aleg baze în V_{λ_i}

$\{e_1, \ldots e_{m_1}\}$ bază V_{λ_1}

$\{e_{m_1+1}, \ldots, e_{m_1+m_2}\}$ V_{λ_2}

$\vdots$

Arăt că $B_1 \cup B_2 \ldots$ e bază în V

$[f|V_{\lambda_1}] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix}$ $m_1 \times m_1$

$[f|V_{\lambda_2}] = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $m_2 \times m_2$

Cum $\#(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_r) = n$
cardinal

e suficient să arăt că e lin indep

$\underbrace{\sum_{1}^{m_1} a_i e_i}_{V_{\lambda_1}} + \underbrace{\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} a_i e_i}_{V_{\lambda_2}} + \ldots = 0$

$\xRightarrow{P2} \left\{\sum_{1}^{m_1} a_i e_i, \sum_{m_1+1}^{m_1+m_2} a_i e_i, \ldots\right\}$ ind

$\Rightarrow \sum_{1}^{m_1} a_i e_i = 0 \Rightarrow a_i = 0$

$\sum_{m_1+1}^{m_1+m_2} a_i e_i = 0 \to a_i = 0$

$\vdots$

Obs: Fie f diagonalizabil și $A = [f]_B$. Atunci $\exists$ o bază B' în care $[f]$ e diag. Fie C - matricea de trecere $B \to B'$ $\Rightarrow C^{-1}AC$ e diagonală

Def o rel de echivalență: $A \sim A' \Leftrightarrow \exists\, C$ diag $A' = C^{-1}AC$

$A^n = ?$

$A = C^{-1} A C = C^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} C$

$A^n = C^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^n \end{pmatrix} C$

Exerciții

1) $f(x,y,z) = (x+y+3z,\ x+5y+z,\ 3x+y+z)$

$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2+\lambda \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -\lambda-2 \end{vmatrix} =$

$= (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2+\lambda \\ 3 & -\lambda-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2+\lambda \\ 1 & -\lambda-2 \end{vmatrix} = (5-\lambda)[(1-\lambda)(-\lambda+2) - 6 - 3\lambda] - [(-\lambda+2) - 2 - \lambda] =$

$= (\lambda - 4)(2-\lambda)(2+\lambda) \Rightarrow f$ e diag

$[f] = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$

Găsirea vectorilor proprii

pt $\lambda = 4$

$(A - 4 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

(*) $\begin{cases} -3x + y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + y = -3\alpha \\ x + y = -\alpha \\ 3x + y = 3\alpha \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\alpha$

$y = -\frac{3}{2}\alpha$

$V_4 = \{ (\frac{1}{2}\alpha, -\frac{3}{2}\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$

$\cancel{e_1 = (1, -2, 1)}$

$e_1 = (1, -3, 2)$ $(\alpha = 2)$

2) $f(x,y,z) = (3x + 8z,\ 3x - y + 6z,\ -2x - 5z)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 8 \\ 3 & -1-\lambda & 6 \\ -2 & 0 & -5-\lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda = -1, \quad m_\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x + 2z = 0$

Soluţia : $(-2\alpha, \beta, \alpha)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\dim V_{-1} = 2 < m_{-1} = 3$

$\Downarrow$

f nu e diagonalizabil

O bază în V_{-1}: $e_1 = (0, 1, 0)$

$e_2 = (-2, 0, 1)$

Ex: Găsiţi cond necesară şi suficientă ca 2 endom diag să se diag. simultan

Forme biliniare și forme pătratice

· $g: V\times V \to K$ e biliniară dacă e liniară în raport cu fiecare ag

$$g(ax+by, z) = ag(x,z) + bg(y,z)$$
$$g(x, ay+bz) = ag(x,y) + bg(x,z)$$

Obs: simetrică: $g(x,y) = g(y,x)$

antisimetrică: $g(x,y) = -g(y,x)$

Ex: Pe $\mathbb{R}^n$ $g(x,y) = \sum x_i y_i$ sim

$\mathbb{R}^{2n}$ $g(x,y) = \sum_1^n (x_{2i-1}y_{2i} - x_{2i}y_{2i-1})$ antisim

Fie $B = \{e_1, \dots e_n\}$ bază

$$g_{ij} = g(e_i, e_j) \qquad G = (g_{ij})$$

$x = \sum x_i e_i$

$y = \sum x_j e_j$

$$g(x,y) = g\left(\sum x_i e_i, \sum x_j e_j\right) = \sum_{i,j} x_i y_j\, g(e_i, e_j) = \sum_{i,j} x_i y_j\, g_{ij} \quad (*)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$g(x,y) = {}^tX G Y = (x_1, \dots x_n)\, G \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La o schimbare de bază $B' = \{e'_k\}$, $e'_k = \sum a_{ek} e_e$

$$g\left(\sum x'_k e'_k, \sum y'_m e'_m\right) = \sum x'_k y_m\, g\left(\sum a_{lk} e_l, \sum a_{sm} e_s\right) = x'_k y'_m a_{lk} a_{sm} g_{ls}$$
$$= {}^tX' ({}^tAGA) Y'$$

$G' = {}^tA\,G\,A$ cu A nedegenerat (~~înainte~~ matricea de trecere între baze)

$\Rightarrow$ se pot defini:

rangul unei f. biliniare

$rg(g) := rg\ G$

g sim $\Leftrightarrow$ ${}^tX G Y \overset{t}{\Rightarrow} {}^tY\,{}^tG X \quad \forall X, Y \Rightarrow G = {}^tG$

antisim $\Leftrightarrow$ $G = -{}^tG$

Obs.: Dacă g e sim. (sau antisim)

$Ker(g) := \{x \in V \,/\, g(x,y) = 0 \quad \forall y \in V\}$

g (care e sim sau antisim) se numeste nedegenerată dacă $Ker\,g = \{0\}$

Obs: $g(X,Y) = 0 \ \forall Y \Rightarrow {}^tX G Y = 0 \quad \forall Y$

$\Updownarrow$

$X \in Ker\,g$ $\qquad$ ${}^tX\cancel{G} = 0 \Leftrightarrow {}^tG X = 0$

$Ker\,g \neq \{0\} \Leftrightarrow \det G = 0 \Leftrightarrow rg\, g < n$

g e degenerata

car $K \neq 2$

caracteristic de K

Forme pătratice

Fie $g : V \times V \to K$ simetrică

$q : V \to K$, $q(x) = g(x,x)$

$q(x) = \sum g_{ij} x_i x_j = {}^tX G X$

q e forma pătratică asociată lui g

Obs: $g(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ (identitatea de polarizare)

Obs: Matricea G e matricea formei pătratice

obs: rangul lui $q \overset{def}{=} rg\, g$

Există o bază în care $q(x) = \sum_{1}^{r} a_i x_i^2$, $r = rg\, q$

formă canonică

Dacă q e în forma canonică atunci $G = \begin{pmatrix} a_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & a_r & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots\ 0 \end{pmatrix}$

Teorema (Gauss): Pt. $\forall$ formă pătratică există un reper în care ea ia forma canonică

<u>Dem</u>: Fie $B = \{e_i\}$ $q(x) = \sum g_{ij} x_i x_j$ $(g_{ij} = g_{ji})$

Inducție după nr. m de coordonate care apar în scrierea lui q

$m = 1$ $\quad q = x_1^2$ ✓

$m-1 \mapsto m$

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} \cdot x_i x_j$$

Nu e posibil ca toți $g_{ii} = 0$ ~~să~~ s

În caz contrar, $\exists\, g_{ij} \neq 0$ $i \neq j$

Punem $\cancel{u_i = x_i + x_j}$ $\quad\left|\begin{array}{l} x_i = u_i + u_j \\ x_j = u_i - u_j \\ x_k = u_k \quad k \neq i,j \end{array}\right.$

$\cancel{u_j = x_i - x_j}$

$u_k = x_k \quad k \neq i,j$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 \cdots 1 \cdots 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

~~Fie $g_{11} \neq 0$~~

$\to$ ~~pot~~ presupun de la început că $\exists$ un $g_{ii} \neq 0$

Fie $g_{11} \neq 0$

Grupez termenii în x_1

$$q(x) = g_{11} x_1^2 + 2 g_{12} x_1 x_2 \ldots + 2 g_{1n} x_1 x_n + q'(x) = \left(\sqrt{g_{11}}\, x_1 + \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} x_2 + \ldots + \frac{g_{1n}}{\sqrt{g_{11}}} x_n\right)^2 -$$

$$- \frac{g_{12}^2}{g_{11}} x_2^2 - \ldots - \frac{g_{1n}^2}{g_{11}} x_n^2 + q'(x) =$$

$$= \left(\sqrt{g_{11}}\, x_1 + \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} x_2 + \ldots + \frac{g_{1n}}{\sqrt{g_{11}}} x_n\right)^2 + q''(x)$$

nu conține decât $x_2 \ldots x_n$

Fac schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{g_{11}}\, x_1 + \dfrac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} x_2 + \ldots + \dfrac{g_{1n}}{\sqrt{g_{11}}} x_n \\ u_i = x_i \quad i \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q(u) = u_1^2 + \underbrace{q'(u)}_{\substack{\text{cf. ip. de inducție} \\ \sum_2^n a_i u_i^2}}$$

Obs: $g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1x_2 + \ldots + 2g_{1n}x_1x_n = g_{11}\left(x_1^2 + 2\dfrac{g_{12}}{g_{11}}x_1x_2 + \ldots + 2\dfrac{g_{1n}}{g_{11}}x_1x_n\right) =$

$= g_{11}\left(x_1 + \dfrac{g_{12}}{g_{11}}x_2 + \ldots + \dfrac{g_{1n}}{g_{11}}x_n\right)^2 - \ldots$

Obs: Am dem. în particular că o matrice simetrică are toate val proprii reale și multiplicitățile liniar algebrice coincid cu multiplicitățile geometrice.

Ex: $q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3$ (pe $\mathbb{R}^3$)

1. $\begin{cases} x_1 = u_1 + u_2 \\ x_2 = u_1 - u_2 \\ x_3 = u_3 \end{cases}$

$q(u) = u_1^2 - u_2^2 + \cancel{u_1u_3} + u_2u_3 - \cancel{u_1u_3} + u_2u_3 = u_1^2 - u_2^2 + 2u_2u_3$

2. $u_1^2 - (u_2^2 \mp 2u_2u_3) = u_1^2 - (u_2 \mp u_3)^2 + u_3^2$ ($\mp$ posibil să fie greșit la calcul)

$v_1 = u_1$

$v_2 = u_2 \mp u_3 \quad \Rightarrow q(v) = v_1^2 - v_2^2 + v_3^2$

$v_3 = u_3$

Obs: Dacă $K = \mathbb{R}$ și $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$

Renumerotez coord a.î. $q(x) = \sum_1^p a_i x_i^2 + \sum_{p+1}^{n} a_i x_i^2$ cu $a_1, \ldots a_p > 0$ și $a_{p+1}, \ldots a_n < 0$

Sch. de coord.:

$$\begin{cases} x_i = \frac{1}{\sqrt{a_i}} u_i & i=\overline{1,p} \\ x_j = \frac{1}{\sqrt{-a_j}} u_j & j=\overline{p+1,r} \\ x_k = y_k & k=\overline{r+1,n} \end{cases}$$

$\Rightarrow q(u) = u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_r^2$

T. (Sylvester): Fie q o formă pătratică pe $\mathbb{R}$. Nr. de termeni >0 (respectiv <0) dintr-o formă canonică nu depinde de bază.

($\in$ același pt. toate formele canonice)

Obs: Nr de termeni negativ s.n. index

Dacă o formă pătratică reală are $r=n$ și index 0, ea se numește pozitiv definită.

Obs: G e poz. def. dacă toate valorile proprii sunt pozitive

Metoda lui Jacobi

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \ldots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \ldots & g_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \ldots & g_{nn} \end{pmatrix}$$ e poz def. dacă $g_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\vdots$

P Valorile proprii ale unei matrice ~~sunt reale~~

- simetrice sunt reale
- antisimetrice sunt pur imaginare

Dem: Fie λ val proprie pt. G ($\lambda \in \mathbb{C}$)

$\Downarrow$

$\exists v \neq 0$ a.î. $G \cdot v = \lambda v$

vector coloană într-o bază

$\overline{v_i} \cdot \big| \sum_{j=1}^{n} g_{ij} v_j = \lambda v_i, \quad i=\overline{1,n}$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, v_j \overline{v_i} = \lambda \sum v_i \overline{v_i}$$

$$G \text{ sim} \Rightarrow \sum_{i,j} g_{ij}\underbrace{(v_j\overline{v_i} + v_i\overline{v_j})}_{\in \mathbb{R}} = \lambda \underbrace{\sum |v_i|^2}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

$$G \text{ antisim } \sum_{i,j} g_{ij}(v_j\overline{v_i} - v_i\overline{v_j}) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \quad (z = -\overline{z})$$

Geom. C7
pag 1

Geometrie Curs 7

Forma canonică Jordan

Motivație: $f \in End(V) \rightsquigarrow$ valori proprii (și vectori proprii)
$\downarrow$ rădăcini ale ec. pol. $P_f(\lambda)=0$ $= \det(A-\lambda I_n)$, $A=[f]$ într-o bază dată.

Teoremă: $\exists$ o bază în care $[f]$ e diagonală $\Leftrightarrow$ toate valorile proprii sunt în K și mult. algebrice coincid cu ale geometrice.

Morala: În general, un endomorfism nu se diagonalizează.

Obs: Dată o matrice A, $\exists U$ nedegenerată a.î. $U^{-1}AU$ să fie diagonală (cu λ_i pe diagonală).

Lucrăm peste $\mathbb{C}$:

Bloc Jordan $J_p := \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(p, \mathbb{C})$

Matricea în forma J: $\begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & J_{p_2}(\lambda_2) & \\ 0 & & \ddots \\ & & & J_{p_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$ $\quad p_1+\dots+p_k=n$

Teorema: $f \in End(V/\mathbb{C})$ Atunci există o bază a lui V în care matricea lui f are forma Jordan. Altfel spus: dată o matrice $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ există $U \in \mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ inversabilă a.î. $U^{-1}AU$ să fie în forma Jordan.

În plus, forma Jordan e unică până la o permutare a blocurilor.

Demonstrație: 1. De unde apar blocurile Jordan?

Fie $f \in End(V)$. $f\circ\dots\circ f = 0$ (compus de p ori) $\simeq$ (Fie A cu $A^p=0$).
f endomorfism nilpotent.

Exercițiu: $P_f(X) = X^p$

Fie $v \in V\setminus\{0\}$ a.î. $f^p(v)=0 \Rightarrow \{v, f(v), f^2(v), \dots, f^{p-1}(v)\}$ e liniar independent.

$a_0 v + a_1 f(v) + \dots + a_{p-1} f^{p-1}(v) = 0$. Se aplică f.

Presupun $p=n \Rightarrow \{\underset{e_1}{v}, \underset{e_2}{f(v)}, \dots, \underset{e_n}{f^{n-1}(v)}\}$ e bază în V

$A=[f]$ în baza asta?

$f(e_i) = f(f^{i-1}(e_1)) = f^i(e_1) = e_{i+1}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J_n(0)$

Geom C7
pag2

În general vom avea $\{v, f(v), \dots f^{p_1-1}(v)\} \to J_{p_1}$
$w, f(w), \dots, f^{p_2-1}(w) \to J_{p_2}$
$\vdots$

Corespund unei descompuneri $V = V_1^{p_1} \oplus V_2^{p_2} \oplus \dots \oplus V_k^{p_k}$.

Vom avea m_1 blocuri de dim 1.
m_2 — " — 2
$\vdots$
m_k — " — k.

Relatie: $m_i = rg A^{i-1} - 2 rg A^i + rg A^{i+1}$

Exemplu: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A = X^4$
$rg A = 2$

$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $rg A^2 = 1$. $A^3 = O_4 \Rightarrow rg A^3 = rg A^k = 0 \ \forall k \geq 3$

$m_1 = rg A^0 - 2 rg A^1 + rg A^2 = 4 - 2 \cdot 2 + 1 = 1 \Rightarrow 1$ bloc de dim 1.
$m_2 = 0 \Rightarrow 0$ blocuri de dim 2.
$m_3 = 1 \Rightarrow 1$ bloc de dim 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J_A.$$

În general, $f \in End(V/\mathbb{C})$. ~~Fixez~~ Fixez o bază $[f] = A$.
$P_f(X) = \prod (X - \lambda_i)^{p_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $p_1 + \dots + p_k = n$.

Dacă există o singură valoare proprie λ, atunci $f - \lambda \cdot 1_V$ (cu matricea $A - \lambda I_n$) $\Rightarrow (A + \lambda I_n)^n = 0 \Rightarrow A - \lambda I_n$ e nilpotentă, cu forma J: $\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{p_k}(0) \end{pmatrix}$. Atunci f va avea forma J $\begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{p_k}(\lambda) \end{pmatrix}$

În cazul general (*): Fiecare λ_i produce un subspațiu invariant $V_{\lambda_i}^{p_i}$

Exemplu: $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

1. $P(X) = \det(A - X \cdot I_4) = (X-2)^3 (X-1)$
2. Valorile proprii $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 1$ $\dim V_{\lambda_1} = 3$ $\dim V_{\lambda_2} = 1$.
3. Pentru $\lambda_2 = 1 \Rightarrow$ un singur bloc J de dimensiune 1.
$\lambda_1 = 2 \Rightarrow$ pot avea blocuri de dimensiune 1, 2, 3.

Calculez $B = A - \lambda_i \cdot I_4$, $B^2, B^3 \dots$
$\Rightarrow$ rang $B = 2$ $rg B^2 = 1$ $rg B^3 = 1$

Geom C7
pag3.

$m_1 = 1 \Rightarrow$ un singur bloc de dim 1.

$m_2 = 1 \Rightarrow$ un bloc de dim 2.

$m_3 = 0 \Rightarrow$ nu am blocuri de dim 3.

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} \boxed{1} & & \\ & \boxed{2} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Aplicații:

1. $A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots J_k \end{pmatrix} \to A^p = \begin{pmatrix} J_1^p & & \\ & J_2^p & \\ & & \ddots J_k^p \end{pmatrix}$

$U^{-1}BU = J.$

$B^p = U J^p U^{-1}$

2. Fie $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ P_A - polinomul caracteristic

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ 3 & 4-X \end{vmatrix} = X^2 - 5X + (-2) = X^2 - \operatorname{tr} A X + \det A.$

$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 - 5A - 2I_2 = O_2$

$P_A = X^n - \operatorname{tr} A \cdot X^{n-1} + \left(\sum a_{ij} a_{ke}\right) X^{n-2} + \ldots + \det A.$

Teorema Hamilton-Cayley: $P_A(A) = 0.$

Corolar: $A^n \in \operatorname{sp}\{A^0, A^1, \ldots, A^{n-1}\}$

Obs: $\det(A - \lambda I) = \det(U^{-1}AU - \lambda I) \Rightarrow P_A = P_{U^{-1}AU} = P_{J_A}$

$\Rightarrow$ e suficient de dem. H-C pt. $A = J$ (matrice în forma J)

$P_J = \prod_{i=1}^{k} P_{J_i}$

$\det J = \det J_1 \cdot \det J_2 \ldots \det J$

$P_J = \det \begin{pmatrix} J_1 - \lambda I_{m_1} & \\ & \ddots J_2 - \lambda I_{m_2} \end{pmatrix} = \det(J_1 - \lambda I_{m_1}) \cdot \ldots \cdot \det(J_k - \lambda I_{m_k}) = P_{J_1} \cdots P_{J_k}.$

$P_J(J) = 0$ e suf. să arat că $P_{J_i}(J_i) = 0 \ \forall i$

E suf. să dem H-C pt. $J = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \ddots & \lambda \end{pmatrix}$ $\quad P_J = (X - \lambda)^p$

$P_J(J) = (J - \lambda I_p)^p = 0.$

Def Polinomul minimal μ_A al matricii A este polinomul monic de grad minim care are A printre rădăcini.

$\mu(A) = 0 \quad \forall f$ cu $f(A) = 0$, $\operatorname{gr} f > \operatorname{gr} \mu_A.$

Corolar: Polinomul minimal divide polinomul caracteristic.

polinomul monic de grad minim care are A printre rădăcini.

$\left(\mu_A(A)=0 \text{ și } (\forall) f \text{ cu } f(A)=0,\ gr f \geq gr \mu_A\right)$

<u>Corolar</u>: Polinomul minimal divide polinomul caracteristic.

20.04.2018

CURS 8

SPAȚII VECTORIALE EUCLIDIENE

$E/\mathbb{R}$ dim $E=n$

*<u>DEF</u>: Un produs scalar pe $E/\mathbb{R}$ e o formă biliniară simetrică și pozitiv definită.

$\langle , \rangle : E\times E \to \mathbb{R}$

$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ (simetria

$\langle x,x\rangle \geq 0$, $(\forall)\ x\in E$ cu egalitate $\Leftrightarrow x=0$

<u>Ex</u>: Pe $\mathbb{R}^n$ $\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

*<u>OBSV</u>: pozitiv definită $\Rightarrow$ nedegenerare

$\langle x,y\rangle = 0$; $(\forall)\ y \Rightarrow x=0$

Norma asociată produsului scalar este

$|x| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

INEGALITATE $\Rightarrow$ $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (1)

PROP: (INEGALITATEA CBS)

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\| \quad (2)$$

cu egalitate $\Leftrightarrow$ $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(2) $\Rightarrow$ (1) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle =$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$

DEM: CBS pot presupune $x \ne 0$, $y \ne 0$

$\boxed{\text{În } \mathbb{R}^n \quad x = (x_i), \; y = (y_i) \qquad \left(\sum x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)}$

$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \ge 0$, $(\forall)\lambda$

$\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \ge 0$, $(\forall)\lambda$

$\Delta = \langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \le 0$

$x \perp y$ dacă $\langle x, y\rangle = 0$

Definim $\sphericalangle(x, y)$ prin $\cos\theta = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$

OBSV: $\{v_1, \ldots, v_k\}$ mutual ortogonal

$\langle v_i, v_j\rangle = 0$ dacă $i \ne j$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ lin. indep.: $\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0$

$0 = \langle v_j, \sum a_i v_i\rangle = \sum a_i \langle v_j, v_i\rangle = a_j \|v_j\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_j = 0$

Baze ortogonale (ortonormate)

$\{e_1, \dots, e_n\}$ cu $\langle e_i, e_j\rangle = 0, (\forall) i \neq j$ ortog.

$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ orton.

Ex: Baza canonică din $\mathbb{R}^n$ e orton. ~~față~~ de $\sum x_i y_i$.

TEOREMĂ: (~~G~~ Gram - Schmidt) - procedeu de ortogonalizare

Fie $\{f_1, \dots, f_n\}$ bază arbitrară în $(E^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
Atunci există o bază ortonormată $\{e_1, \dots, e_n\}$ a.î. $sp\{e_1, \dots, e_i\} = sp\{f_1, \dots, f_i\}, (\forall) i$.

Dem: Construiesc întâi o bază $\{e'_i\}$ ortogonală.

Apoi $e_i = \frac{e'_i}{\|e'_i\|}$

$e'_1 = f_1$

Presupun $e'_1, \dots, e'_i$ construiți, definesc:

$e'_{i+1} = f_{i+1} + \sum_{j=1}^{i} a_j e'_j$

cu scalari a_j determinați de condițiile

$\langle e'_{i+1}, e'_j\rangle = 0 \qquad j \leq i$

$0 = \langle e'_{i+1}, e'_j\rangle = \langle f_{i+1}, e'_j\rangle + a_j \|e'_j\|^2$

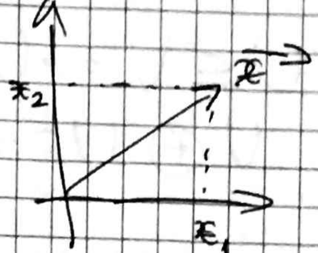
$$a_j = -\frac{\langle f_{i+1}, e'_j\rangle}{\|e'_j\|^2}, (\forall) j \leq i$$

$sp\{e'_1, \dots, e'_{i+1}\} = sp\{e'_1, \dots, e'_i, f_{i+1}, e'_1 \dots e'_i\}$

$= sp\{e'_1, \dots, e'_i, f_{i+1}\} = sp\{f_1, \dots, f_i, f_{i+1}\}$

Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ bază orton. în E.

Fie $x = \sum x_i e_i \Rightarrow x_i = \langle x, e_i \rangle$



Fie $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ orton.

$$e'_i = \sum a_{ji} e_j$$

$$\delta_{kl} = \langle e'_k, e'_l \rangle = \langle \sum_i a_{ik} e_i, \sum_j a_{jl} e_j \rangle =$$

$$= \sum_{i,j} a_{ik} a_{jl} \delta_{ij} = \sum_i a_{ik} a_{il}$$

$$\boxed{A \cdot {}^tA = I_n}$$

$O(n) := \{A \,/\, A^tA = I_n\}$ grupul ortogonal

Fie $x \neq 0$, $x^\perp := \{y \in E \,/\, \langle x, y \rangle = 0\} \subset E$
ortogonalul lui x subspațiu

Ex: $\mathcal{G}_n^1$ $\mathbb{R}^3$, $x = (1, -1, 0)$

$$x^\perp = \{y \,/\, y_1 \cdot 1 + y_2(-1) + y_3 \cdot 0 = 0\} =$$

$$= \{y \,/\, y_1 - y_2 = 0\}$$

Dacă ~~...~~ $U \subset E$ subspațiu

$U^\perp := \{x \in E \,/\, \langle x, u \rangle = 0,\ (\forall) u \in U\} \subset E$ subsp.

Se arată:

$\underline{I}$: $(U^{\perp})^{\perp} = U$

$U \subseteq V \Rightarrow U^{\perp} \supseteq V^{\perp}$

$U \oplus U^{\perp} = E$

~~*~~ <u>OBSV</u>: Dat U, fie $\{u_1, \dots, u_k\}$ bază orton. în U.

$\Rightarrow \{u_1, \dots, u_k\}$ e lin. indep. în $E \Rightarrow$

$\Rightarrow$ se completează la o bază în E

$\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$

Aplic G-S $\Rightarrow \{u_1, \dots, u_k, \underbrace{u_{k+1}, \dots, u_n}_{U^{\perp}}\}$ orton.

PRODUS VECTORIAL în $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Se notează $x \times y$ și e definit prin

$\langle x \times y, z \rangle = \det(x, y, z)$, $(\forall) z \in \mathbb{R}^3$

(definesc $\langle u, z \rangle = \dots$ $(\forall) z$

$$\det(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$ (componente în baza canonică)

$\Rightarrow x \times y = -y \times x$

$$z = e_1, e_2, e_3 \Rightarrow x \times y = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3$$

$\ast$ OBSV: $\langle x \times y, x \rangle = \langle x \times y, y \rangle = 0$

$$x \times y \perp x, \quad x \times y \perp y$$

$x \times y = 0 \Leftrightarrow x = \alpha y$

$\ast$ OBSV: $\langle x \times y, x \times y \rangle = \|x \times y\|^2 > 0$

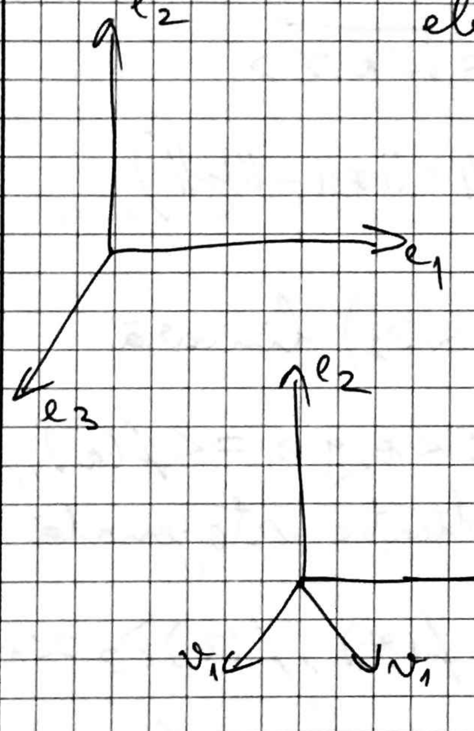
$\qquad\qquad \| $

$\det(x, y, x \times y) > 0 \quad \{x, y, x \times y\}$

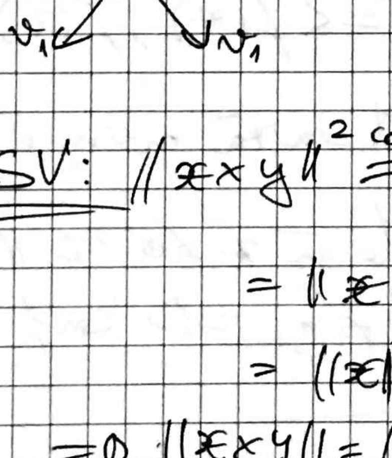
$\Rightarrow$ e la fel orientată cu baza canonică.

Paranteză despre orientare:

$V^n/\mathbb{R}$ $\quad$ B, B' ~~sunt~~ la fel orientate dacă matricea de trecere dintre ele are $\det > 0$



În $\mathbb{R}^n$, o bază se numește pozitiv orientată dacă se schimbă cu det. poz. din baza canonică

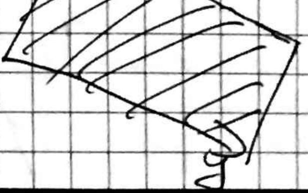


$\ast$ OBSV: $\|x \times y\|^2 \overset{\text{calcul}}{=} \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 =$

$= \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \cdot \cos^2\theta$

$= \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \cdot \sin^2\theta$

$\Rightarrow \|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin\theta$



*OBSV: $\langle x \times y, z \rangle$ s.n. produs mixt.

*OBSV: Prod. vectorial nu e asociativ.

$$(x \times y) \times z = \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x$$

*OBSV: $(x \times y) \times z + (z \times x) \times y + (y \times z) \times x =$

IDENTITATEA LUI JACOBI

Curs 9 | Geometrie

Transformări ortogonale

$(E/\mathbb{R}, <,>) \rightsquigarrow \|x\| = \sqrt{<x,x>}$ $\qquad <x,y> = \frac{1}{2}(\|x+y\| - \|x\| - \|y\|)$

Def: $f : (E_1, <,>_1) \longrightarrow (E_2, <,>_2)$ liniară cu propr. $<x,y>_1 = <f(x), f(y)>_2$

Aplic. ortogonală;

Obs: $\|f(x)\|^2 = <f(x), f(x)>_2 = <x,x>_1 = \|x\|_1^2 \Rightarrow f$ păstrează normele

În particular dacă $x \neq 0 \Rightarrow \|x\|_1 \neq 0 \Rightarrow \|f(x)\|_2 \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\} \Rightarrow f$ inject.

De acum încolo: $E_1 = E_2 = E <,>$

$f : E \to E, <f(x), f(y)> = <x,y>$; f inj $\Rightarrow f$ izomorfism;

Fie $h : E \to E$, ortog. $\Rightarrow f \circ h$, $h \circ f$ sunt ortogonale.

$<f\circ h(x), f \circ h(y)> = <f(h(x)), f(h(y))> \overset{f\, ortog}{=} <h(x), h(y)> \overset{h\, ortog}{=} <x,y>$

id. e aplic. ortonormată

f ortog $\Rightarrow f^{-1}$ e ortog $\Rightarrow \mathcal{O}(E, <,>) := \{f : E \to E \text{ ortog}\}$ grup.

Transf. ortogonale

Pb: Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ ortog; $f \in \mathcal{O}(E, <,>) \Rightarrow [f]_B$ e ortog

Dem: $f(e_i) = \sum a_{ki} e_k$; $A \to [f]_B$

$<f(e_i), f(e_j)> = <\sum a_{ki} e_k, \sum a_{lj} e_l>$

$\qquad \| $

$<e_i, e_j> = \sum\limits_{k,l} a_{ki} a_{lj} \delta$

$\qquad \|$

$\qquad \delta_{ij}$

$\sum\limits_k a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \Leftrightarrow A \cdot {}^tA = I_n$; $\quad A \in \mathcal{O}(n)$

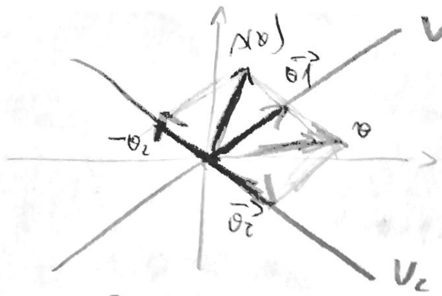
Ex: În gen: fie V sp. vect, $V = V_1 \oplus V_2$

Fie $s : V \to V$ prin $s|_{V_1} = 1_{V_1}$, $s|_{V_2} = -1_{V_2}$

$V \ni v = v_1 + v_2 \Rightarrow s(v) = s(v_1 + v_2) = s(v_1) + s(v_2) = v_1 - v_2$

Simetria a lui V de axă V_1 și V_2.

Obs:
$\mathcal{D}_1$
$\mathcal{L}$



$s(s(v)) = s(v_1 - v_2) = v_1 + v_2 = v$

$s^2 = 1_V$

$\boxed{\text{simetria rect} = \text{transf lin cu } s^2 = 1_V}$

Dacă $V = (E, <,>)$ vrem $V_1 \oplus V_2 = E$ și $V_1 \perp V_2$

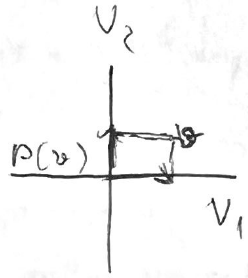
$(V_2 = V_1^{\perp}) \Rightarrow$ simetrie ortogonală

Obs: $\|s(v)\| = \|v_1 - v_2\|^2 = <v_1 - v_2, v_1 - v_2> = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 - 2\underbrace{<v_1, v_2>}_{0}$

$\|v\|^2 = <v_1 + v_2, v_1 + v_2> = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$

Obs: Proiecții $V = V_1 \oplus V_2$ $p: V \to V_1$, $p(v) = v_1$

$p(p(v)) = p(v)$ $p^2 = p$;



Dacă $V_1 \oplus V_2$ ortog $\Rightarrow$ proiecție ortog.

! Nu e transf. ortog $\Rightarrow$ $\operatorname{Ker} p = V_2$

$$p(v) = v_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{1}{2} 1_V + \frac{1}{2} s(v)$$

$$\boxed{2p = 1_V + s}$$

Dacă $\{\underbrace{e_1, \ldots, e_k}_{V_1}, \underbrace{e_{k+1}, \ldots, e_n}_{V_2}\}$ $[s] = \begin{pmatrix} I_k & \\ & -I_{n-k} \end{pmatrix}$ $[p] = \begin{pmatrix} I_k & \\ & 0 \end{pmatrix}$

Pb: Rădăcinile polin. caract. ale unei transf. ortogonale au modulul 1.

În particular, răd. reale, dacă există sunt 1 sau -1

Dem: Fie $\lambda = a + ib$ rădăc. a lui $P_f = \det(A - \lambda I_n)$

Fie $f(x + iy) := f(x) + i f(y)$

Dacă λ e răd. a lui P_f, $\exists\, x + iy \neq (0,0)$ a.î. $f(x + iy) = \lambda(x + iy)$

$f(x) + i f(y) = (a + ib)(x + iy) = ax + by + i(bx + ay)$

$f(x) = ax - by$

$f(y) = bx + ay$

$\|x\|^2 = \|f(x)\|^2 = <ax - by, ax - by> = a^2\|x\|^2 + b^2\|y\|^2 - 2ab<x, y>$

$\|y\|^2 = \|f(y)\|^2 = <bx + ay, bx + ay> = b^2\|x\|^2 + a^2\|y\|^2 + 2ab<x, y>$

$\oplus$

$\|x\|^2 + \|y\|^2 = (a^2 + b^2)(\|x\|^2 + \|y\|^2) \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$

~~Obs:~~ Corolar: O aplic ortog. invariază un subspațiu de dim 1 sau 2

Curs 9.2 Geometrie

<u>Obs</u>: Fie $f \in O(E, <,>)$, $U \subset E$ subsp.

Dacă $f(U) = U$, atunci $f(U^\perp) = U^\perp$

<u>Dem</u> $E = U \oplus U^\perp$ Fie $x \in U^\perp$, $f(x) \in U^\perp \Leftrightarrow <f(x), y> = 0 \ \forall y \in V$

$\overset{\parallel}{f(z)} = <x, z> = 0$

<u>Obs</u>: Dacă $f \in O(E, <,>)$ și $E = U \oplus U^\perp$ este o bază ortonorm $\{\underbrace{e_1, \dots, e_k}_{U}, \underbrace{e_{k+1}, \dots e_n}_{U^\perp}\}$

$$[f] = \begin{pmatrix} [f|_U] & 0 \\ 0 & [f|_{U^\perp}] \end{pmatrix}$$

<u>Clasificarea transformărilor ortogonale.</u>

i) <u>$\dim E = 1$</u> $\forall x \neq 0 \rightarrow f(x) = \lambda x \rightarrow \lambda$ e val proprie;

f ortog $\Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow f = \pm 1_E$

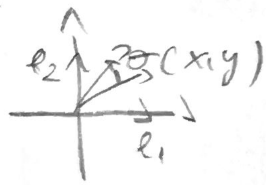
ii) <u>$\dim E = 2$</u> Fie $\{e_1, e_2\}$ bază ortog, pozitiv orientată

Fie $A = [f]_B \Rightarrow A^t A = I_2$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$

1) $\det A = 1 \Rightarrow a = \cos\theta, b = -\sin\theta,$
$c = \sin\theta, d = \cos\theta$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



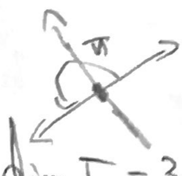
~~1) $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$~~

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & -y\sin\theta \\ x\sin\theta & +y\cos\theta \end{pmatrix}$$

rotație de $\sphericalangle\theta$ în sens trigon.

2) $\det A = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = I_2 \Rightarrow f^2 = 1_E \Rightarrow f$ e o simetrie ortogonală $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ există $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ ortog a.î. $f(\bar{e}_1) = \bar{e}_1$, $f(\bar{e}_2) = -\bar{e}_2 \Rightarrow [f]_{\bar{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & \sin \\ \sin\pi & -\cos \end{pmatrix}$



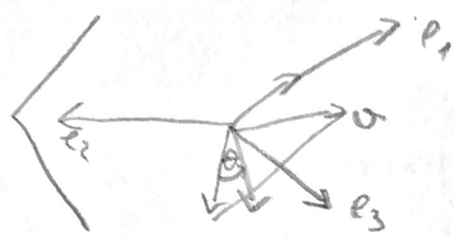
<u>$\dim E = 3$</u> $\quad$ gr $P_f = 3 \Rightarrow \exists$ rad reală $\Rightarrow \exists$ val proprii

a) $\det f = 1$

a1) f are val proprie $\lambda = 1 \Rightarrow \exists e_1$, $\|e_1\| = 1$ a.î. $f(e_1) = e_1$

Fie $U = e_1^\perp \Rightarrow <e_1> \oplus U = E$; $\dim U = 2$ $\Rightarrow f(U) = U \Rightarrow f|_U \in O(U, <,>)$

$\Rightarrow [f]$ într-o bază ~~ortog~~ ortonormată $\{e_1, e_2, e_3\}$ va fi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \in U$



$a_2)\ \lambda = -1 \quad \exists\, e_1$ cu $\|e_1\| = 1$ și $f(e_1) = -1$

sau $U = e_1^{\perp} \quad \det(f|_U) = -1$

$\exists$ o bază ortonormată $\{e_2, e_3\}$ $[f|U] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow [f] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

În baza $\{e_3, e_1, e_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

b) $\det f = -1$; $a_1)\ \lambda = 1$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad a_2)\ \lambda = 2$

Concluzie: $\forall\, f = O(E^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ există o bază orton. în care f are matricea de forma: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & +\cos\theta \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & +\cos\theta \end{pmatrix}$

În general forma ortog

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \boxed{A(\theta_1)} & \\ & & & & & & & \boxed{A(\theta_2)} & \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Geometrie 2.05.2018

Endomorfisme simetrice

C 10

$(E/\mathbb{R}, <,>)$ $f \in End(E)$ e simetric

dacă $<f(x),y> = <x, f(y)>$

Dacă $\{e_i\}$ e ortonormată

$$f(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$$

$$<f(e_i), e_j> = <e_i, f(e_j)>$$

$$<\sum a_{ki} e_k, e_j> = <e_i, \sum a_{kj} e_k>$$

$$\sum_k a_{ki} \delta_{kj} \qquad \sum a_{kj} \delta_{ik} \Rightarrow a_{ji} = a_{ij}$$

Deci:

Prop: f e endom. simetric $\Leftrightarrow$ matricea sa într-o bază ortogonată e simetrice

Obs: O asemenea matrice are numai val proprii reale

Prop: Vectorii proprii ai unor valori proprii distincte sunt ortogonali

Dem: $f(x) = \lambda x$, $f(y) = \mu y$ și $\lambda \neq \mu$

$\Rightarrow <x,y> = 0$

$$<x, f(y)> = <x, \mu y> = \mu <x,y>$$

$$<f(x), y> = <\lambda x, y> = \lambda <x,y>$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} <x,y> = 0 \Rightarrow <x,y> = 0$$

P Dacă $U \subset E$ a.î. $f(U) \subseteq U$ atunci și $f(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$

Teoremă:

Fie $f \in End(E)$ un endom. simetric. Atunci există o bază ortonormată de vectori proprii (în particular f se diagonalizează în acea bază)

Dem: Fie λ val proprie, fie e_1 vector propriu $f(e_1) = \lambda e_1$.

Presupun $\|e_1\| = 1$

$\Rightarrow E_1 := e_1^{\perp}$ e subspațiu invariant $\Rightarrow f|_{E_1} \in End(E_1)$ și e tot simetric

$\dim E_1 = \dim E - 1$

Se iterează ...

Fie $b(x,y) := \langle f(x), y \rangle$

formă biliniară

$b(x,y) = b(y,x)$

$\rightsquigarrow q(x) = b(x,x)$

Corolar: Orice formă pătratică reală se poate aduce la forma canonică prin transformări ortogonale

Ex: $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$

$$q(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

1) Met. Gauss:

$x_1 = y_1 + y_2$

$x_2 = y_1 - y_2$

$x_i = y_i \quad i = 3,4$

$$q(y) = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_2y_3 - 4y_2y_4 + 2y_3y_4$$

$$= 2y_1^2 - 2(y_2^2 - 2y_2y_3 + 2y_2y_4) + 2y_3y_4$$

$$= 2y_1^2 - 2(y_2 - y_3 + y_4)^2 + 2y_3^2 + 2y_4^2 - 4\,2y_3y_4$$

$z_2 = y_2 - y_3 + y_4$

$z_i = y_i \quad , i = 1,3,4$

$q(z) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 2z_3^2 + 2z_4^2 - 2z_3z_4$

$= 2z_1^2 - 2z_2^2 + 2(z_3^2 - z_3z_4) + 2z_4^2$

$= 2z_1^2 - 2z_2^2 + 2\underbrace{(z_3 - \frac{1}{2}z_4)}_{\overset{\shortparallel}{u_3}}{}^2 - \frac{1}{2}z_4^2 + 2z_4^2$

$u_3 = z_3 - \frac{1}{2}z_4$

$u_i = z_i \quad , i = 1,2,4$

$q(u) = 2u_1^2 - 2u_2^2 + 2u_3^2 + \frac{3}{4}u_4^2$

2) $[q] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = [f]$

Calc. $P_f(x) = \det([f] - x \cdot I_4) = (x-1)^3(x+3)$

Calc. vect proprii pt $\lambda = 1$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x - y - z + t = 0$

Sol generală $(a, b, c, a-b-c)$, $\underbrace{a,b,c}_{\dim 3} \in \mathbb{R}$ ← dim 3

Aleg o bază în acest subsp (coresp lui $\lambda = 1$)

$(1, 1, 0, 0)$
$(1, 0, 1, 0)$ nu e orton!
$(-1, 0, 0, 1)$

$\Rightarrow$ o ortonormez cu G-S (un alg.)

$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$

$e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$

$e_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Pt $\lambda = -3$

După ce normez obtin

$e_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Forma canonică: $q(v) = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 3v_4^2$

$\downarrow$

$\left((x-1)^3(x+3) \to 3 \text{ de } 1, \text{ un } -3\right)$

Spații afine

Fie $A \neq \emptyset$, V/K, $\varphi: A \times A \to V$

(A, V, φ) s.n. spațiu afin dacă

1) $\forall O \in A$, $\varphi_O: A \to V$, $\varphi_O(A) = \varphi(O, A)$ e bijecție

2) $\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$

<u>K^n</u> $A = K^n$, $V = K^n$

$\varphi: K^n \times K^n \to K^n$, $\varphi(x, y) = y - x$

2) $\varphi(x, y) + \cancel{\varphi} \, \varphi(y, z) = (y - x) + (z - y) = z - x = \varphi(x, z)$

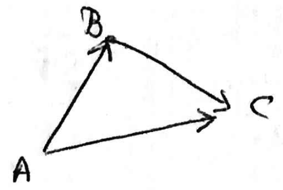
1) $O = (o_1, \dots o_n)$

$\varphi_O: K^n \to K^n$, $\varphi_O(x) = x - O = (x_1 - o_1, \dots, x_n - o_n)$

2) Generalizare:

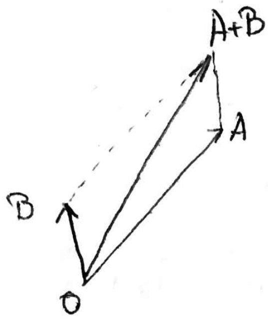
$\forall$ V e sp. afin peste el însuşi

Notate $\varphi(A,B) = \overrightarrow{AB}$



<u>Obs</u>: Cf. 1) pt fiecare $O \in \mathcal{A}$, $\exists!$ struct de sp. vect pe A, cu originea O, a.î. $\varphi: \mathcal{A} \to V$ e izomorfism

$$A + B = \varphi_O^{-1}\left(\varphi_O(A) + \varphi_O(B)\right)$$



<u>Ex. important</u>

$\mathcal{A} \in \mathcal{M}(m,n,K)$ $\quad B \in K^n$

$\mathcal{S}_{A,B} = \{X \in K^n / AX = B\}$

e spaţiu afin peste $\mathcal{S}_A = \{X \in K^n \mid AX = 0\}$

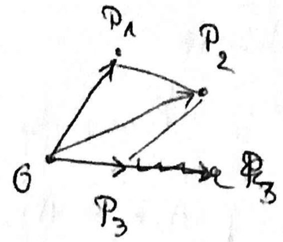
$\varphi(X,Y) = Y - X$

$\begin{matrix} AX = B \\ AY = B \end{matrix} \mapsto A(Y-X) = 0 \Rightarrow Y - X \in S_A \ (= \mathcal{S}_A)$

Combinaţie afină: $\sum_{i=1}^{k} a_i P_i = P \qquad \sum a_i = 1$

ponderi

Centrul de masă : $\dfrac{m_1\overrightarrow{OP_1}+m_2\overrightarrow{OP_2}+m_3\overrightarrow{OP_3}}{m_1+m_2+m_3}$



$$\underbrace{\frac{m_1}{\sum m_i}}_{a_1}\overrightarrow{OP_1}+\underbrace{\frac{m_2}{\sum m_i}}_{a_2}\overrightarrow{OP_2}+\underbrace{\frac{m_3}{\sum m_i}}_{a_3}\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{m_1}{\sum m_i}P_1+\frac{m_2}{\sum m_i}P_2+\frac{m_3}{\sum m_i}P_3$$

$$\sum_1^k a_iP_i=P \quad \sum a_i=1$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum a_i\overrightarrow{OP_i}=\overrightarrow{OP} \quad \forall O\in A$$

Obs. pt 2 pct., $A\neq B$ scriem $aA+(1-a)B$

Def $\{P_1,\dots P_k\}$ e afin indep(dep) dacă $(\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\dots,\overrightarrow{P_1P_k}\}$ e indep (dep)

Obs: In loc de P_1, pot considera oricare P_i

Def $\dim A := \dim V$

Def $\{O; e_1,\dots e_n\}$ e reper cartezian dacă O ~~ct~~ și $\{e_1,\dots e_n\}$ bază în V

Dat $P\in A \Rightarrow \overrightarrow{OP}=\sum_{i=1}^n x_ie_i$

Dar $e_i=\overrightarrow{OP_i}$ (în mod unic pt că P_0 e bij)

$$\overrightarrow{OP}=\sum_i^k x_i\overrightarrow{OP_i}=(1-\sum x_i)\overrightarrow{OO}+\sum x_i\overrightarrow{OP_i}$$

$$\Rightarrow P=(1-\sum x_i)O+x_1P_1+\dots+x_nP_n$$

$(1-\sum_1^n x_i, x_1,\dots x_n)$ coordonatele afine ale lui P în reperul afin $\{O,P_1,\dots P_n\}$

$\emptyset \neq S \subset \mathcal{A}$, $Af(S) = \{ \sum_{1}^{k} a_i P_i \mid \sum_{1}^{k} a_i = 1 , k \in \mathbb{N}, P_i \in S \}$

Ex: $S = \{A, B\}$, $Af(A, B) = \{ aA + (1-a)B \mid a \in \mathbb{R} \}$
e dreapta AB

Af - închiderea afină

Def: $S \subset \mathcal{A}$, S subsp. afin dacă $Af(S) = S$

$\mathrm{Car} K \neq 2$

T: $S \subseteq \mathcal{A}$ e subsp af $\Leftrightarrow$ $\forall A \neq B$, $aA + (1-a)B \in S$
$\forall a \in K$

$\Leftrightarrow \forall P_i$, $i = \overline{1,k}$, $\forall a_i \in K$ $\sum a_i = 1$, $\sum a_i P_i \in S$

<u>Obs</u> S_i subspații , $i = 1, 2, \ldots$ $\Rightarrow \cap S_i$ e subspațiu

<u>Obs</u> Dacă $S \subseteq \mathcal{A}$ subspațiu , atunci $\forall O \in S$, ~~$\varphi_O : S \to$~~
$V_S := \{ \overrightarrow{OP} \mid P \in S \}$ e subsp vect

și $(S, \varphi|_{S \times S} , V_S)$ sp. afin

În particular: $S_{A,B}$ e subsp. afin în K^n
$\shortparallel$
$S_{A,B}$

Geom C12
pag1.

Geometrie Curs 12
Geometrie euclidiană

$K=\mathbb{R}$ $\quad E/\mathbb{R}$ = spațiu vectorial

$(\mathcal{E}, E, \varphi) \quad (E/\mathbb{R}, \langle , \rangle)$

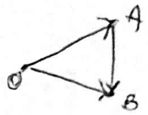
1) Putem lucra cu repere ortonormate $\mathcal{R}=\{O, e_1 \dots e_m\}$ $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$

=> schimbări de coordonate sunt de tipul $X' = AX+B$, $A \in \mathcal{O}(n)$.

2) $d : \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$, $d(A,B) := \|\vec{AB}\| = \sqrt{\langle \vec{AB}, \vec{AB}\rangle}$

CBS => img Δ pt d.

Dacă în $\mathcal{R}$ $A=(x_1 \dots x_m)$, $B=(y_1\dots y_m)$ $\quad \vec{OA} = \sum x_i e_i \quad \vec{OB} = \sum y_j e_j$



$d(A,B) = \|\vec{AB}\| = \|\vec{OB}-\vec{OA}\| = \|\sum(y_i - x_i)e_i\| = [\sum_i (y_i-x_i)^2]^{1/2}$

<u>Corolar</u>: $\vec{AB} \perp \vec{AC} \Leftrightarrow d(A,B)^2 + d(A,C)^2 = d(B,C)^2$

$\sum (b_i - a_i)(c_i - a_i) = 0 \qquad \sum (b_i-a_i)^2 + \sum(c_i-a_i)^2 = \sum (c_i - b_i)^2$

<u>Perpendicularitatea</u>:

$E_1 \perp E_2$ două subspații, dacă $E_1 \subseteq E_2^{\perp}$ sau $E_2 \subseteq E_1^{\perp}$ $\quad E_{1,2}$ subspații directoare

- $E_1 = E_2^{\perp}$ $(\dim E_1 + \dim E_2 = m,\ E_1 \oplus E_2 = E)$

$\mathcal{E}_1$ și $\mathcal{E}_2$ se numesc normale.

<u>Propoziție</u>: Dacă $\mathcal{E}_1$ și $\mathcal{E}_2$ sunt normale => $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{\circ\}$

<u>Dem</u>: Folosesc teorema dimensiunii $\dim(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 + 1 - \dim(E_1 \cap E_2)$ ($\dim(E_1\cap E_2) = 0$)

=> $\dim(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = m+1$ Abs pt. că $E_1 \subseteq E_2$ => $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \neq \emptyset$

<u>Teorema Pitagora</u> => Dacă H e hiperplan, $d \perp H$.

Dacă $d \cap H = \{A\}$. și dacă $d(P, H) = \min\{d(P,B) \mid B\in H\} = d(P,A)$

$P\in d,\ P\notin H$

<u>Ecuațiile subspațiilor</u>:

1) (d) $\quad \dfrac{x_1 - x_{10}}{l_1} = \dots = \dfrac{x_m - x_{m0}}{l_m}$ $\quad (l_1, \dots, l_m)$ determinați până la proporționalitate. $\quad \mathcal{R} = \{O, e_i \dots, e_m\}$ fixat.

$\left(\dfrac{l_1}{\sqrt{\sum l_i^2}}, \dots, \dfrac{l_m}{\sqrt{\sum l_i^2}}\right)$ => pot presupune că $\sum l_i^2 = 1$

$\cos(\vec{d}, e_i) = \dfrac{\langle \vec{d}, e_i\rangle}{\|\vec{d}\|\cdot\|e_i\|} = \dfrac{\langle \sum l_j e_j, e_i\rangle}{\sqrt{\sum l_j^2}} = l_i$

2) Fie H de ec. $a_1x_1 + \dots + a_m x_m + a_0 = 0$

Caut ecuația unei normale la H? Care e direcția?

Fie d o normală, de direcție $(l_1 \dots l_m)$ $\quad \dfrac{x_i - x_{i0}}{l_i} = t$.

Avem $(l_1 \dots, l_m) \perp \underbrace{(a_1x_1 + \dots + a_m x_m) = 0}_{\text{„}H\text{"}}$ ← ecuația omogenă atașată

$v\in H$ e de forma $\left(\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}, -\dfrac{a_1}{a_m}\alpha_1 - \dots - \dfrac{a_{m-1}}{a_m}\alpha_{m-1}\right)$

Condiția de $\perp$: $l_1\alpha_1 + \dots + l_{m-1}\alpha_{m-1} - l_m\left(\dfrac{a_1}{a_m}\alpha_1 + \dots + \dfrac{a_{m-1}}{a_m}\alpha_{m-1}\right) = 0$

$\forall (\alpha_1 \dots \alpha_{m-1})$

Geom C12
pag 2.

$$\begin{cases} l_1 - l_n \dfrac{a_1}{a_n} = 0 \\ \vdots \\ l_{n-1} - l_n \dfrac{a_{n-1}}{a_n} = 0 \end{cases} \qquad \frac{l_1}{a_1} = \frac{l_2}{a_2} = \dots = \frac{l_{n-1}}{a_n} = \frac{l_n}{a_n}$$

$(l_i) = (k a_i) \quad i = \overline{1,n}$

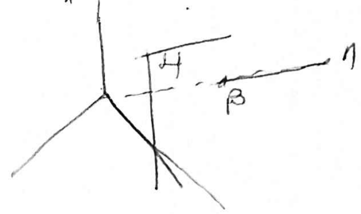
P. Parametrii directori ai normalei la H sunt proporționali cu coeficienții ec. lui H

Ex: $x+y+z-1=0 \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ e normală la plan prin $(1,1,1)$

Distanța de la un punct la un subspațiu.

1) $d(A,H) = ?$ $A \notin H$. $A(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ și (H) $\sum_1^n a_i x_i + a_0 = 0$

- Ecuația normalei prin A: $\frac{x_i - \alpha_i}{a_i} = t$ (d)
- $d \cap H$: $\sum (a_i t + \alpha_i) a_i + a_0 = 0$



$t = -a_0 - \frac{\sum a_i \alpha_i}{\sum a_i^2}$

Coordonatele lui B: $-a_i \frac{a_0 + \sum a_i \alpha_i}{\sum a_i^2} + \alpha_i$

$d(A,H) = |\overline{AB}| = \frac{\sum a_i (a_0 + \sum a_i \alpha_i)}{(\sum a_i^2)^2} = \frac{|\sum_1^n a_i x_i + a_0|}{\sum_1^n a_j^2}$.

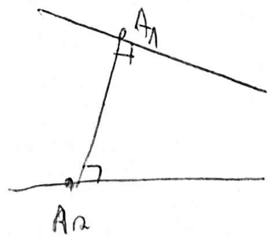
2) Dacă $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$ subspații de dim k, $A \notin \mathcal{E}$, $\dim(\mathcal{E}_1 + \{A\}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{E}_1$ e hiperplan în $\mathcal{E}_1 + \{A\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Există și se calculează ca mai sus $d(A, \mathcal{E}_1)$.

Exc: $d(d_1 d_2)$ în $\mathbb{R}^3$ și găsiți perpendiculara ~~pe~~ comună.

$\frac{x_1 - a_1}{l_1} = \frac{y_1 - b_1}{m_1} = \frac{z_1 - c_1}{n_1} = t$



$\frac{x_2 - a_2}{l_2} = \frac{y_2 - b_2}{m_2} = \frac{z_2 - c_2}{n_2} = s$

$d^2(A_1, A_2) = (l_1 t + a_1 - l_2 s - a_2)^2 + \dots$

$f(s,t) \quad \frac{\partial f}{\partial s} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0$

Geom. C12
pag 3.

Conice și cuadrice.

Mulțimi de soluții ale unor ecuații de gradul 2.

$\mathbb{R}^2$ $\quad ax^2+by^2+2cx+2dy+e+2fxy=0$

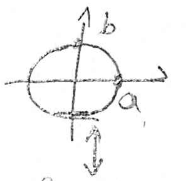
$\mathbb{R}^3$ $\quad ax^2+by^2+cz^2+2bxy+2cxz+2dyz+2ex+2fy+2gz+h=0$

În general: $\sum a_{ij}x_ix_j \qquad A=(a_{ij}) \quad a_{ij}=a_{ji}$

$$\sum a_{ij}x_ix_j+2\sum b_ix_i+c=0$$

$\bar{A}=\begin{pmatrix} a_{ij} & b_1 \\ & \vdots \\ & b_{m-1} \\ b_1 \cdots b_{m-1} & c \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad {}^t\bar{X}\bar{A}\bar{X}=0 \iff \boxed{{}^tXAX+2\,{}^tBX+c=0}$

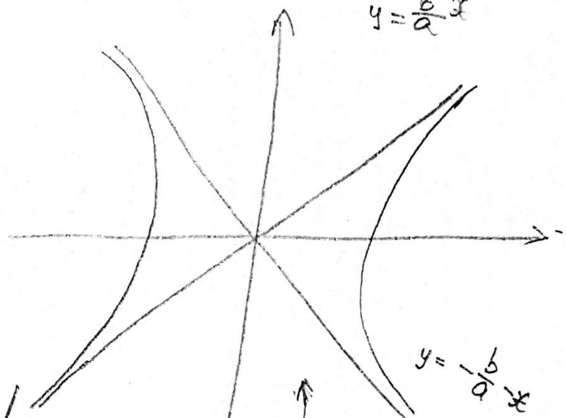
$\bar{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$



1) Conice în $\mathbb{R}^2$

Cazul 1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ elipsă

$a=b \Rightarrow$ cerc.



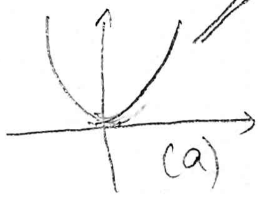
Cazul 2. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$

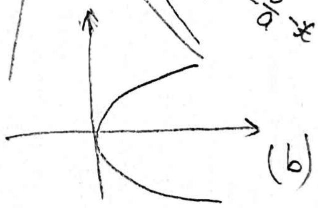
$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$

Cazul 3. $x^2-ky=0$ (a)

$y-kx=0$ (b)

parabolă.

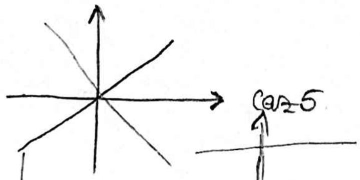




$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 0 \\ -k/2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -\frac{k}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Cazul 4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \Rightarrow (0,0)$



Cazul 5: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

Caz 6: $x^2=k>0 \quad y^2=k>0$

Dacă avem în general: ${}^tXAX+2\,{}^tBX+C=0 \qquad n=2$.

A simetrică $\Rightarrow$ are valori proprii reale.

Există o schimbare de coordonate (prin transf. ortogonală) a.î. izometrie

A ia forma diagonală $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\cancel{2\,{}^tBB}\,2b_1'x+2b_2'y+c=0$

$\lambda_1\left(x^2+2\frac{b_1'}{\lambda_1}x\right)+\lambda_2\left(y^2+2\frac{b_2'}{\lambda_2}y\right)+c=0$

$\lambda_1\left(x+\frac{b_1'}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y+\frac{b_2'}{\lambda_2}\right)^2+c-\frac{b_1'}{\lambda_1}-\frac{b_2'}{\lambda_2}=0$

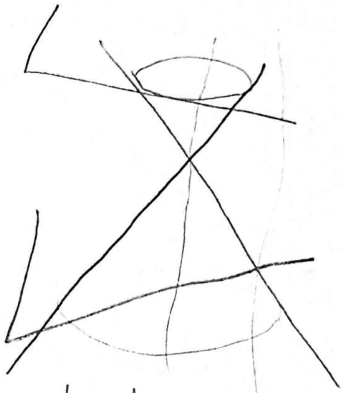
Dacă $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0 \Rightarrow$ elipsă sau hiperbolă.

$\lambda_1 = 0$: $\lambda_2 y'^2 + 2b_1' x' + c' = 0$

$$2b_1'\left(x' + \frac{c'}{2b_1'}\right) = 0$$

$x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x + y - 1 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \delta = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ hiperbola.



$2x - 3y - 2 = 0$ $\quad {}^tAX + 2BX + C = 0$

$4y - 3x + 1 = 0$

$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Prop: Locul geometric al punctului cu raportul distanțelor la un punct fix și la o dreaptă fixă constant e o conică nedegenerată. $(\text{rg}\,\bar{A} = 3)$

$(\underbrace{x-c)^2}_{d(A,d)^2} + y^2 = e^2\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]$