GEOMETRIE
CURS 2

V sp vectorial / corp (comutativ) $K (= \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C})$

Ex: $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}(m,n,K) \simeq \mathbb{R}^{m \cdot n}$, $P_n(x) := \{f \in K[x] / \text{gr} f \leq n\}$, $K[x]$
(polinoame)

* Sistem liniar independent $\{v_1 \dots v_k\}$ $\sum_{i=1}^{k} a_i v_i$ = comb liniară cu scalari $a_i \in K$
$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0 \Rightarrow a_i = 0, i = \overline{1,k}$

* Sistem de generatori $\{v_1, \dots, v_n\}$ e sistem de generatori dacă $\forall v \in V$, $\exists a_1, \dots, a_n$ a.î. $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

* Dați $\{v_1, \dots, v_n\} =: S$
$\mathcal{L}(S) := sp(S) = \{\sum_{1}^{n} a_i v_i / a_i \in K\}$ acoperire liniară
$sp(v) = \{av / a \in K\}$

* Bază $B \subset V$, sistem de generatori liniar independent
Ex: 1) în $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ $e_i = (0, 0, \dots, \underset{i}{1}, \dots 0)$
2) $P_n(X)$ $f_0 = 1, f_1 = X, f_2 = X^2, \dots, f_n = X^n$
3) $K[X]$ $\{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$
4) $\mathcal{M}(m,n,K)$ $E_{ij} = \begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ $(a_{ij}) = \sum a_{ij} \cdot E_{ij}$

Teorema 1: Orice spațiu vectorial admite bază.
Teorema 2: Orice spațiu vectorial finit generat admite bază.
Orice două baze au același cardinal

Obs: V e finit generat dacă are un sistem de generatori finit.

Fie $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ sist de gen pp că $v_i \in sp\{v_1, v_{i-1}, v_{i+1}, v_k\}$

Ex: în $\mathbb{R}^2$ $S = \{(1,0), (1,1), (0,1)\}$ $v_2 = v_1 + v_3$, $v_2 \in sp\{v_1, v_3\}$

Obs $\{v_1, \dots, v_k\}$ liniar independent (ordonat) $v_i \neq 0$
$\Leftrightarrow$ fiecare v_i independent de predecesori

Demonstrație T2: e implicată de:

<u>Lema schimbului</u> (Steinitz) Fie $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ sistem de generatori și $\{y_1, \dots, y_m\}$ sistem liniar independent

Atunci există $S' \subset S$ ai $\{y_1, \dots, y_m\} \cup S'$ e sistem de generatori

În particular $\# S \geq m$ (card unui sist de gen $\geq$ card unui sist l ind)
(cardinal)

Fie $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ baze. Cum $\mathcal{B}_1$ e sist de gen și $\mathcal{B}_2$ e liniar ind

$\# \mathcal{B}_1 \geq \# \mathcal{B}_2$

$\overset{inv}{\Longleftrightarrow} \Rightarrow \# \mathcal{B}_1 \leq \# \mathcal{B}_2 \quad \Big| \Rightarrow \# \mathcal{B}_1 = \# \mathcal{B}_2$

Dem: Lemei schimbului

Sist lin ind $y_1 = a_1 x_1 + \dots + a_k x_k \neq 0 \Rightarrow \exists$ măcar un scalar
x_i = sist gen nenul, fie el a_1

$\Rightarrow x_1 = +\frac{1}{a_1} y_1 - \frac{a_2}{a_1} x_2 - \dots - \frac{a_k}{a_1} x_k \Rightarrow \{y_1, x_2, \dots, x_k\}$ sist de gen.

$y_2 = a_1 y_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k$ (alți scalari decât înainte)

Dacă $a_2 \dots a_k = 0 \Rightarrow y_2 = a_1 y_1 \Rightarrow \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ dependent X

$\Rightarrow$ cel puțin un a_i, $i = \overline{2,k}$ e nenul, fie el a_2

$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{a_m} y_2 - \frac{a_1}{a_m} y_1 - \frac{a_3}{a_m} x_3 - \dots - \frac{a_k}{a_2} x_k \Rightarrow \{y_1, y_2, x_3, \dots x_m\}$ sist de gen

Definiție: Pt un spațiu vectorial finit generat, card comun al bazelor s.n. dimensiune.

$\dim V = m \ (V^m)$

Fie V^m, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m\}$ bază

$\forall v \in V$, $v = a_1 e_1 + \dots + a_m e_m$ cu $a_1, \dots, a_m$ unic determinate

Dacă, pp prin abs. $v = \sum_1^m a_i e_i = \sum_1^m b_i e_i \Rightarrow \sum_1^m (a_i - b_i) e_i = 0 \xRightarrow{\{e_i\} \text{ liniar ind}}$

$\Rightarrow a_i - b_i = 0$, $i = \overline{1,m}$

Scalarii $a_1, \dots, a_m$ sm coordonatele lui v în baza $\mathcal{B}$.

Ex: În $\mathbb{R}^3$ baza canonică $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

$\forall v \in (x, y, z) \Rightarrow v = x e_1 + y e_2 + z e_3$

<u>Schimbarea bazei</u> Fie $\mathcal{B} = \{e_i\}$, $\mathcal{B}' = \{e_i'\}$ $i = \overline{1,m}$

$v = \sum_1^m a_i e_i = \sum_1^m a_i' \cdot e_i'$

Legătura dintre (a_i) și (a'_i)?

$$e'_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e_j,\ i=\overline{1,m}$$

dim și $e_j = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} e'_k \Rightarrow e_j = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} e'_k = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} e_i =$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}\right)}_{x_i} e_i$$

$\{e_i\}$ liniar ind $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij} \Rightarrow A \cdot B = I_m$

Deci: Matricea (de trecere, tranzitie) de la o bază la alta e inversabilă. Dacă A face trecerea de la B la B', atunci A^{-1} face trecerea de la B' la B.

Ex: În $\mathbb{R}^3$ $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,0,1)$, $e_3 = (1,0,0)$

$a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = 0$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{a} = \\ a_1 + a_2 \quad = 0 \end{cases}$$ sist are doar sol banală $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

$e'_1 = (1,1,2)$ $e'_2 = (1,0,2)$, $e'_3 = (-1,0,1)$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

$$e'_i = \sum a_{ji} e_i$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} a_{11} + a_{21} + a_{31} \\ a_{11} \\ a_{11} + a_{21} \end{matrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

Fie $v = \sum_{i=1}^{m} a'_i e'_i = \sum_{i=1}^{m} a'_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji} a'_i \right) e_j$

$\overset{\|}{\sum_{j=1}^{m}} a_j e_j \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{ji} a'_i = a_j,\ j = \overline{1,m}}$ $A [v]'_{B'} = [v]_B$