Geometrie vectorială

1. Def $V \neq \emptyset$, K - corp comutativ

$+ : V \times V \to V$ adunarea vectorilor

$(v_1, v_2) \to v_1 + v_2$ (op. internă)

$K \times V \to V$ înmulț. vectorilor cu scalari (op. externă)

$(\alpha, v) \to \alpha v$

$\underline{I}$ $(V, +)$ grup abelian
- ASOC
- COM
- ($\exists$) ELEM NEUTRU
- $\forall$ elem să admită un opus

$\underline{II}$ 1. $(\alpha_1 + \alpha_2) v = \alpha_1 v + \alpha_2 v$

2. $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$ $\quad \forall v_1, v_2, v \in V$

3. $(\alpha_1 \alpha_2) v = \alpha_1 (\alpha_2 v)$ $\quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha \in K$

4. $1 \cdot v = v$

$(V/K, +, \cdot)$ sp. vect. peste corpul com. K

$K = \mathbb{R} \to$ sp. vect. real

$K = \mathbb{C} \to$ sp. vect. complex

Exemple

1. a) K - corp comutativ

$(K/K, +, \cdot)$ - structură naturală de corp

orice corp comutativ poate fi organizat peste el însuși ca sp. vectorial

b) $H \subseteq K$ subcorp $\left\{ (\forall) h_1, h_2 \in H \to \begin{cases} h_1 - h_2 \in H \\ h_1 \cdot h_2^{-1} \in H \end{cases} \right.$ $\quad (K/H, +, \cdot)$ - sp. vect peste H

Orice subcorp poate fi utilizat pt a obține o structură naturală de spațiu vectorial a corpului peste subcorp

pert. a) $\mathbb{C}/\mathbb{C}$, $\mathbb{R}/\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$ $\Big\}$ sp. vect.

b) $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$

2. $K^n = \underbrace{K \times K \times \dots \times K}_{n \text{ ori}} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in K, \forall i = \overline{1,n}\}$

$+ : K^n \times K^n \to K^n$

$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \overset{def}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

$(\forall)\ (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in K^n$ „adunarea vectorilor"

$K \times K^n \to K^n$

$\alpha(x_1, \dots, x_n) \overset{def}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \quad \forall \alpha \in K$

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in K^n$, „înmult vect cu scalari"

caz particular. $K = \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^n/\mathbb{R}, +, \cdot)$ sp vect real

$K = \mathbb{C}$ $(\mathbb{C}^n/\mathbb{C}, +, \cdot)$ sp vect complex

3. $\mathcal{M}_{(m,n)}(K)$ – mult matricelor de tip (m,n) cu elem din K (corp com.)

$+ : \mathcal{M}_{(m,n)}(K) \times \mathcal{M}_{(m,n)}(K) \to \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, unde $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$

ad. matricelor

$B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$

$\cdot : K \times \mathcal{M}_{(m,n)}(K) \to \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$

$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ înmult. matricelor cu scalari

$(\mathcal{M}_{(m,n)}(K)/K, +, \cdot)$ sp. vect peste K.

4. $K[X]$ mult pol în nedet. X cu coef în corpul com K

$(K[X]/K, +, \cdot)$ – sp vect peste K

$\underbrace{}_{\text{ad polin}}$ înmult polin

b) $(K_n[X]/K, +, \cdot)$ sp vect peste K

c.p. $K = \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}[X]/\mathbb{R}, +, \cdot)$ sp vect real

$K = \mathbb{C}$ $(\mathbb{C}[X]/\mathbb{C}, +, \cdot)$ sp vect complex

Liniar independență / Liniar dependență / Sist de generatori. Baze

Def V/K – sp vect peste K

$S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$

S s.n. sistem de vectori liniar indep dacă

$(\forall)\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Obs S.n. s.v. liniar ind. dacă (∀) combinație liniară nulă se realizează numai cu scalari nuli

a) $v \neq 0_V \Rightarrow \{v\}$ s.v. lin. indep.
b) (∀) submult nevide a unui sist de vectori liniar ind este s.v. lin. ind.

Ex $\mathbb{R}^n$
$S = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots 0, \underset{(i)}{1}, 0 \dots 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$
$S \subset \mathbb{R}^n$ s.v. lin. ind.
Fie $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0_{\mathbb{R}^n}$
$\alpha_i \in \mathbb{R}, (\forall)\ i = \overline{1, n}$
$\Rightarrow (\alpha_1, 0, \dots, 0) + (0, \alpha_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, 0, \alpha_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$
$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$

Lin. dep.

Def V/K sp vect peste K
$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$
S s.n. s.v. liniar dep dacă nu este lin indep.

Obs S s.v. liniar dep. dacă (∃) comb liniare nule care se realizează cu scalari, nu toți nuli

$\boxed{P}$ (∀) sist de vect care conține vect 0_V este lin dep.

Ex $\mathbb{R}^3$ $S = \{(v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, -1, 2), v_3 = (1, 1, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$
lin. dep.
$v_1 + v_2 = v_3$
$v_1 + v_2 - v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ (lin. d.) rel. de dep. lin.

Sist de gen.

Def V/K - sp vect peste K
$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$
S s.n. sist de gen pt V dacă:
$\forall v \in V, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i} \alpha_i v_i$

Def S.n. sp vect care admite un sist de generatori finit s.n. finit generat (ex 1) $\mathbb{R}^n$ - sp vect finit gen
2) $\mathbb{R}[X]$ - sp vect infinit gen.
sp vect finit generat

$\boxed{\text{BAZA}}$ Def Fie V/K sp vect
$B \subset V$
bază dacă $\begin{cases} 1)\ B \text{ s.v. lin indep} \\ 2)\ B \text{ sist de gen pt } V \end{cases}$

Ex 1) $\mathbb{R}^n$

$B_0 = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$ – bază canonică

2) $\mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{R})$

$B_0 = \{E_{ij}\}_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ bază can. $E_{ij} = $

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{array}$$

3) a) $\mathbb{R}[X] / \mathbb{R}$

$B_0 = \{1, x, \dots, x^n, \dots\}$ bază can

b) $\mathbb{R}_n[X] / \mathbb{R}$ $B_0 = \{1, x, \dots, x^n\}$ bază can

4) $\mathbb{C} / \mathbb{R}$, $B_0 = \{1, i\}$ bază can, $i^2 = -1$

$B_1 = \{1-i, 1+i\}$ – bază arbitrară

P) Def [echiv] V/K sp vect finit gen.

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ bază $\Leftrightarrow$, $\forall v \in V$ $(\exists)! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$, a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

$[v]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ↳ coord vect v în rap cu baza B.

Dem $B \subset V$ bază $\Rightarrow$ 1) $B \subseteq V$ lin ind 2) B s. de gen pt V

$\Rightarrow (\forall) v \in V, (\exists) \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ a.î. $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

P.p. $(\exists)$ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in K$ a.î. $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0_V \xRightarrow{B \text{ s.v lin ind}} \alpha_i - \beta_i = 0$,

$(\forall) i = \overline{1,n} \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$ $(\forall) i = \overline{1,n}$ q.e.d

P) a) $\forall$ sp. vect admite mai multe baze

b) $(\forall)$ 2 baze ale aceluiași sp vect au același cardinal (Lema lui Zorn)

Def Card comun al tuturor bazelor unui sp vect constituie dim. sp. vect. respectiv.

V/K sp vect
$B \subset V$ card $B = n \Rightarrow \dim_K V = n$
bază

Exemple
1. $\mathbb{R}^n$
$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$

2. $\mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{R})$
$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(m,n)(\mathbb{R}) = m \cdot n$

3. $\mathbb{R}[X]/\mathbb{R}$
$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X] = +\infty$

$\mathbb{R}_n[X]/\mathbb{R}$
$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[X] = n$

4. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

Th. schimbului

Fie V/K sp vect finit generat
$G = \{g_1, g_2, \dots g_s\} \subset V$ sist de gen
$A = \{f_1, \dots, f_n\} \subset V$ s.v. lin. ind

Atunci 1) $n \leq s$ și $(\exists)\ A' \subset G$ a.î. $A \cup A' = B \subset V$ bază

$\boxed{P}$ V/K sp vect. finit generat, $\dim_K V = n$
$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$

UASE 1) S – s.v. lin. ind.
2) S – s. de gen pt V
3) S – bază