Analiză
Seminar
Petre Ilieș

Elemente de Teoria mulțimilor și a funcțiilor

$X \neq \phi$

$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ (mulțimea părților lui X)

$A \subseteq X \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(X)$

DEF Fie X o mulț nevidă

a) $A, B \subseteq X$

$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$

b) $A \subseteq X$

$C_X A = X \setminus A = \{x \in X \mid x \in A\}$ - „complementara mulțimii A în raport cu X"

c) $(A_i)_{i \in I}$ familie inclusă în A

$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid x \in A_i \ \forall i \in I\}$

$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid \exists i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$

$\boxed{\text{Def}}$ Fie $f : X \to Y$ o funcție

a) Pentru o submulțime $A \subseteq X$ mulțime

$\{f(x) \mid x \in A\} \overset{not}{=} f(A) \subseteq Y$ se numește imaginea directă a ~~lui A~~ mulț. A prin fcția f

b) Pentru o submulțime $B \subseteq Y$ mulțimea $\{x \in X \mid f(x) \in B\} \overset{not}{=} f^{-1}(B) \subseteq X$ s.n. „preimaginea ~~funcți~~ mulțimii B prin fcția f"

Obs: $f: X \to Y$

a) $f(\emptyset) = \{f(x) \mid x \in \emptyset\} = \emptyset$

$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = \operatorname{im} f \subseteq Y$

b) $f^{-1}(\emptyset) = \{x \in X \mid f(x) \in \emptyset\} = \emptyset$

$f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\} = X$

<u>Ex 1</u> Fie $f: (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ $\quad$ C.i

Determinați:

a) $f((2, \infty)) = ?$

b) $f^{-1}((-\infty, 0]) = ?$

$f^{-1}((-\infty, 0)) = ?$

$f^{-1}((-\infty, 1)) = ?$

a) $f((2,+\infty)) = \{ f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in (2,+\infty) \} = \operatorname{Im} f\big|_{(2,+\infty)}$

$f : (2,+\infty) \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \searrow 2} f(x) = \sqrt{3}$

$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} > 0 \quad \forall\, x \in (2,+\infty) \Rightarrow f \nearrow \text{pe } (2,+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f (\sqrt{3}, \infty)$

b) $f((-\infty, 0]) = \{ x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \mid \cancel{f((-\infty,0])} \in \mathbb{R} \}$ $f(x) \in (-\infty, 0]$

$f(x) \in (-\infty, 0] \Leftrightarrow f(x) \le 0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2-1} \le 0 \\ \sqrt{x^2-1} \ge 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$\cancel{f^{-1}(-1)} = f^{-1}((-\infty, 0]) = \{-1, 1\}$

$f^{-1}((-\infty, 0)) = \{ x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \mid f(x) \in (-\infty, 0) \}$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2-1} < 0 \\ \sqrt{x^2-1} \ge 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow x \in \emptyset$

$f^{-1}((-\infty, 0)) = \emptyset$

$f^{-1}((-\infty, 1)) = \{ x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \mid f(x) \in (-\infty, 1) \}$

$\Leftrightarrow f(x) < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} < 1 \Leftrightarrow |x^2-1| < 1$

$0 \le x^2 - 1 < 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2-1\geq 0 & x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty) \\ x^2<2 & x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}) \end{cases} \Bigg/ \overset{\cap}{\Rightarrow} x\in(-\sqrt{2},-1] \cup[1,\sqrt{2})$$

$$f^{-1}((-\infty,1)) = (-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2})$$

ex 2.

Să se identifice $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(\frac{1}{n},1)$, $\bigcap_{n\geq 2}(\frac{1}{n},1)$

<u>Rezolvare</u>:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(\tfrac{1}{n},1) = (0,1)$$

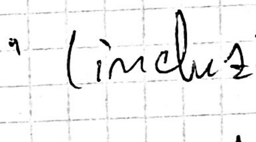
„$\subseteq$" (incluziune de la stânga la dreapta)

Fie $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(\frac{1}{n},1) \Leftrightarrow \exists\, n\in\mathbb{N}^*$ a.î. $x\in(\frac{1}{n},$

$$\begin{cases} \cancel{x<1} \\ \cancel{x>\frac{1}{n}}\ \frac{1}{n}<x<1 \\ 0<\frac{1}{n} \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1 \Rightarrow x\in(0,1)$$

„$\supseteq$" (incluziune de la dreapta la stânga)

Fie $x\in(0,1)$ (căutăm un n pt care $1>x>\frac{1}{n}$)



$$\frac{1}{n}<x \Leftrightarrow \cancel{x}\ n>\frac{1}{\cancel{x}}$$

Alegem $n_0=[\frac{1}{x}]+1\in\mathbb{N}^*$

$$\left.\begin{array}{l} n_0>\frac{1}{x} \Leftrightarrow x>\frac{1}{n_0} \\ x<1 \end{array}\right| \Rightarrow x\in(\tfrac{1}{n_0},1) \Rightarrow x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(\tfrac{1}{n},1)$$

Din dubla incluziune $\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(\frac{1}{n},1) = (0,1)$

$\bigcap_{n\geq 2}(\frac{1}{n},1) = \cancel{\emptyset}$ (Greșit, intuit prost)

Pp că $\bigcap_{n\geq 2}(\frac{1}{n},1)^{\neq\emptyset}$ este nevidă

$\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{n\geq 2}(\frac{1}{n},1) \Rightarrow x \in (\frac{1}{n},1) \; \forall n \geq 2$

$\frac{1}{n} < x < 1 \; \forall n \geq 2$

$\forall x,y \in \mathbb{R}, x>0, \exists n\in\mathbb{N}, n\neq 0$ a.î. $y \leq x \cdot n$

$\bigcap_{n\geq 2}(\frac{1}{n},1) = (\frac{1}{2},1)$

$(\frac{1}{2},1) \subseteq (\frac{1}{3},1) \subseteq (\frac{1}{4},1) \subseteq \dots \subseteq (\frac{1}{n},1) \subseteq (\frac{1}{n+1},1) \dots$

Definiție echivalentă pentru imaginea directă a unei mț dintr-o fcție.

Fie $f: X \to Y$ o funcție și $A \subseteq X$

$f(A) = \{ y \in Y \mid \exists x \in A \text{ a.î. } y = f(x)\}$

$\boxed{\text{Def}}$ a) O funcție $f: X \to Y$ este surj. dacă $\forall y \in Y \; \exists \in X$ a.î. $f(x) = y$

b) O funcție $f: X \to Y$ este inj. dacă $\forall x_1 \neq x_2 \in X$ avem $f(x_1) \neq f(x_2)$ V (dacă $f(x_1) = f(x_2)$ a.î. $x_1 = x_2$)

c) f bij dacă este surj şi inject.

Obs: $f: X \to Y$ este surj
$f(X) = Y = \mathrm{Im} f$