Algebră #13

4 probleme

2 standard, 1 medie, 1 grea

> Mulțimi. Funcții. Cardinalul unei mulțimi

> Inducție

Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ să se arate că $\exists$ $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, $a_j \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Verificarea $n = 3$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 1$$

$a_1 = 2 < 3 < 6$ ($a_2 = 3$, $a_3 = 6$)

~~2, 4, 4~~

2) Pasul de inducție

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1, \quad a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}} + \frac{1}{2a_n} + \frac{1}{3a_n} + \frac{1}{6a_n} = 1$$

$a_{n-1} < 2a_n < 3a_n < 6a_n$

//

Scanned by CamScanner

$P(n) \Rightarrow P(n+2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Verificare pt $n=4$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$$

$P(3)$ adevărată
$P(4)$ adevărat
$P(n) \Rightarrow P(n+2)$ adevărat

> Structuri — Monoid, Grup

$f: G \times G \to G$
- op. asociativă
- element neutru
- inversul unui element (calcul)

$M = \{10k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$

$(M, \cdot)$ înmulțire obișnuită — monoid

2

$(\mathbb{R}, *)$ $\quad x * y = xy + x + y = xy + x + y + 1 - 1 =$

$= x(y+1) + y + 1 - 1 = (x+1)(y+1) - 1$

$e = 0$

$(x+1)(y+1) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y+1} - 1$

$y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, *)$ monoid

Grupuri

1) $(\mathbb{Z}_n, +)$ $n \in \mathbb{N}^*$

2) $(U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$ $\quad U(\mathbb{Z}_n) = \{ \bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}, (a, n) = 1 \}$

$|U| = \varphi_n$ - funcția lui Euler

3) $(S_n, \circ)$

4) $(G_1, \cdot), (G_2, *)$

$((G_1 \times G_2), \perp)$ $\quad (a_1, b_1) \perp (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 * b_2)$

grup

$(U(\mathbb{Z}_{37}), \cdot)$

$\overline{11} x = \bar{1} \quad | \cdot (-4) \Leftrightarrow -\overline{44} x = -4 \Leftrightarrow$

$\overline{33} x = \overline{3} \Leftrightarrow \ldots$

-44
37
-7
$+37$

Cu algoritmul lui Euclid

$\overline{111}^{-1}$ în $(U(\mathbb{Z}_{2017}), +)$

$$\begin{array}{r|l} 2017 & 111 \\ \hline -111 & 18 \\ 907 & \\ -888 & \\ \hline 19 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 111 & 19 \\ \hline -95 & 5 \\ \hline 16 & \end{array}$$

$2017 = 111 \cdot 18 + 19$

$111 = 5 \cdot 19 + 16$

$19 = 1 \cdot 16 + 3$

$16 = 5 \cdot 3 + 1$

$3 = 3 \cdot 1 + 0$

Se iau câturile cu excepția ultimului

$$18 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}} = 18 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{5}{6}} = 18 + \frac{6}{35} = \frac{636}{35}$$

$$\frac{2017}{111} - \frac{636}{35} = \frac{(-1)^{\text{nr de operații din algoritm}}}{111 \cdot 35} = \frac{-1}{111 \cdot 35} \quad (2)$$

(2) $2017 \cdot 35 - 636 \cdot 111 = -1 \ \Big| \Rightarrow \overline{-636} \cdot \overline{111} = \overline{-1}$ (1)

Trecem în $\mathbb{Z}_{2017}$

$\Rightarrow \overline{111} \cdot \overline{636} = \overline{1}$ (1) $\quad \overline{111}^{-1} = \overline{636}$

Teoreme – Teorema lui Euler

$(a,n)=1,\ n\in\mathbb{N}^*,\ a\in\mathbb{Z} \Rightarrow n \mid \left(a^{\varphi(n)}-1\right)$

– Mica Teoremă a lui Fermat

p prim, $a\in\mathbb{Z}$, $p\nmid a$, $p \mid a^{p-1}-1$

– Th lui Wilson

p prim $\Rightarrow p \mid \left((p-1)!+1\right)$

$36! = 36\cdot 35\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 \cdot 2\ (-1)(-2)\ 18\cdot(2\cdot 1) =$

// fără centru, orbita, clase conjugate

Subgrup normal. Grup factor

– Th lui Lagrange $g^{|G|}=e$

dacă $(G,\cdot)$ grup, $H\leq G \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |H| \mid |G|$

Ordinul unui element (marcată)

Ex: $2^{16}+1$ - nr prim

1) $g^{\operatorname{ord} g} = 1$

2) $g^{m} = e$, $m \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $\operatorname{ord} g \mid m$

3) $\operatorname{ord}(g) \mid |G|$

4) $\operatorname{ord} g^{k} = \dfrac{\operatorname{ord} g}{(5, \operatorname{ord} g)}$

5) $\operatorname{ord}(g_1, g_2) = \operatorname{cmmmc}(\operatorname{ord} g_1, \operatorname{ord} g_2)$

Găsiți toate nr prime pt care p, q prime

$$\underline{pq \mid p^{q}(5^{p} - 2^{p})(5^{q} - 2^{q})}$$

ex $p = 3$

Idee $p \mid (5^{p} - 2^{p})$ $q = 13$

$q \mid (5^{q} - 2^{q})$

6

Teorema fundamentală de ~~izom~~ morfism de grupuri $(G_1, \cdot)$, $(G_2, *)$

Exemplu de subgrup normal netrivial în S_n

$G_1 = (S_n, \circ)$, $G_2 = (\{\pm 1\}, \cdot)$

$sgn: S_n \to \{\pm 1\}$
$sgn(1,2) = -1$ $\Rightarrow$ surjectivă

funcția are sens

$A_n = \{\sigma \in S_n \mid sgn(\sigma) = 1\} = \ker f$

$$|A_n| = \frac{|S_n|}{|\{\pm 1\}|} = \frac{n!}{2}$$

Problemă grea

$G \leq (S_p, \circ)$
o transpoziție (sup) un ciclu de lungime p $\Rightarrow$ $G = S_p$

$(1, 2, \ldots, p) \in G$
$(1, a) \in G$, $\Rightarrow$ ~~$\sigma^a \in G$~~ $\Rightarrow \sigma^{+a-1} \in G$

Exercițiu

p prim, $m \in \mathbb{N}$, $(p, m) = 1 \Rightarrow \sigma^m =$ ciclu de lungime p

Inversul lui

Să arătăm că orice ciclu e produs de transpoziții