Sisteme de ec. liniare

<u>K corp comutativ</u>. Sistemul de m ecuații cu n necunoscute

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\ \text{---------}\\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}$$

unde $a_{ij}\in K$, $b_i\in K$, s.n. <u>sistem de ec. liniare</u> peste corpul K. Dc. notăm $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(K)$, $x={}^t(x_1,\dots,x_n)$, $b={}^t(b_1,\dots,b_m)$, at. sistemul (S) se scrie sub <u>forma matriceală</u> $\boxed{Ax=b}$. Să mai obs. că putem scrie sistemul (S) și sub forma $\sum_{i=1}^{n}c_i(A)x_i=b$.

<u>Def.</u> A s.n. <u>matricea sistemului</u> (S), $b_1,\dots,b_m$ s.n. <u>termenii liberi</u> iar matricea $A^e=(A|b)\in M_{m\times(n+1)}(K)$ s.n. <u>matricea extinsă</u> a sistemului (S).

(S) s.n. <u>sistem omogen</u> dc. $b_1=\dots=b_m=0$.

(S) s.n. <u>sistem compatibil</u> dc. are cel puțin o soluție, adică există $\alpha\in M_{n\times1}(K)$ a.î. $A\alpha=b$, iar în caz contrar s.n. <u>incompatibil</u>.

<u>Teoremă</u> (Kronecker – Capelli)

(S) este sistem compatibil $\Leftrightarrow$ rang A = rang A^e.

<u>Dem.</u> „$\Rightarrow$" Fie $\alpha\in M_{n\times1}(K)$ soluție a sistemului $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i c_i(A)=b \Rightarrow b\in\langle c_1(A),\dots,$

$c_n(A)\rangle \Rightarrow \langle c_1(A),\dots,c_n(A)\rangle = \langle c_1(A),\dots,$

$c_n(A), b\rangle \Rightarrow \text{rang}\, A = \text{rang}\, A^e$.

"$\Leftarrow$" Evident $\langle c_1(A),\dots,c_n(A)\rangle \subseteq \langle c_1(A),\dots,$ $c_n(A), b\rangle$ şi deoarece $\text{rang}\, A = \text{rang}\, A^e$ ac. două subsp. au aceeaşi dimens., deci sunt egale $\Rightarrow b \in \langle c_1(A),\dots, c_n(A)\rangle$ $\Rightarrow (\exists)\ \alpha_1,\dots,\alpha_n \in K$ a.î. $b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i(A)$ $\Rightarrow$ (S) este compatibil. //

<u>Sisteme liniare omogene</u>

Fie $K^n = M_{n\times 1}(K)$, $K^m = M_{m\times 1}(K)$ şi $f_A: K^n \to K^m$, $f_A(x) = Ax$, unde $A \in M_{m\times n}(K)$. Evident, f_A este o aplicaţie liniară.

Scriem sistemul (S) sub forma $f_A(x) = b$ şi obs. că $\text{Im}\, f_A = \langle c_1(A),\dots,c_n(A)\rangle$, deoarece $f_A(x) = Ax = c_1(A)x_1 + \dots + c_n(A)x_n$.

<u>Prop.</u> Dc. (S) este omogen, at. mulţimea sol. lui (S) este un subsp. vect. al lui K^n de dim. $n - \text{rang}\, A$.

<u>Cor.</u> Dc. (S) este omogen, at. (S) are doar sol. nulă $\Leftrightarrow \text{rang}\, A = n$.

<u>Prop.</u> (S) sistem <u>compatibil</u> şi $x^0 \in K^n$ o sol. a sa. At. $x^0 + \text{Ker}\, f_A = \{x^0 + \alpha \mid \alpha \in \text{Ker}\, f_A\}$ este mulţ. sol. lui (S).

<u>Cor.</u> (S) sistem compatibil.
(S) are sol. unică $\Leftrightarrow \text{rang}\, A = n$.

Rezolvarea sistemelor de ec. compatibile prin metoda eliminării a lui Gauss

Începem prin a obs. că următoarele transf. nu afectează mulțimea soluțiilor unui sistem:

a) Adunarea la o ecuație a altei ecuații înmulțită cu un elem. din corpul K.

b) Permutarea a două ecuații.

c) Înmulțirea unei ecuații cu un elem. din $K-\{0\}$.

Dc. $A^e=(A|b)$, at. transf. a), b), c) produc asupra matricei extinse următoarele transf. numite <u>transformări elementare pe linii</u>:

I. Adunarea la o linie a unei alte linii înmulțită cu un elem. din K.

II. Permutarea a două linii.

III. Înmulțirea unei linii cu un elem. din $K-\{0\}$.

Să obs. că fiecare dintre cele 3 transf. are și o transf. inversă.

<u>Def.</u> $A, B \in M_{m\times n}(K)$ s.n. <u>echivalente pe linii</u> dc. A se obține din B printr-o succesiune (finită) de transf. elementare pe linii.

<u>Obs.</u> Relația de echivalență pe linii este o relație de echivalență pe $M_{m\times n}(K)$.

<u>Clasele de echivalență</u>?

La fiecare dintre cele 3 transf. elementare pe linii corespunde o matrice care în-

înmulțită cu matricea A are ca efect transf. elementară respectivă. Mai precis, avem 3 tipuri de <u>matrice elementare</u>:

(I.) $T_{ij}(a)$ = matricea obț. din matricea unitate prin adunarea la linia i a liniei j înmulțită cu $a \in K$; $i \neq j$.

$T_{ij}(a) = I_n + aE_{ij} \in M_n(K)$, $i \neq j$.

$$\left.\begin{array}{l} T_{ij}(a)\cdot T_{ij}(b) = T_{ij}(a+b) \\ T_{ij}(0) = I_n \end{array}\right| \Rightarrow T_{ij}(a)^{-1} = T_{ij}(-a).$$

$\det T_{ij}(a) = 1$.

(II.) P_{ij} = matricea obț. din matricea unitate prin permutarea liniilor i și j, $i \neq j$.

$\det P_{ij} = -1$, $P_{ij}^2 = I_n$, $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.

(III.) $D_i(u)$ = matricea obț. din matricea unitate prin înmulțirea liniei i cu elem. $u \in K-\{0\}$.

$\det D_i(u) = u$, $D_i(u)D_i(v) = D_i(uv)$, $D_i(1) = I_n$,

$$D_i(u)^{-1} = D_i(u^{-1}).$$

<u>Obs.</u> Aceste matrice se def. și peste un inel comutativ oarecare, cu precizarea că la III se alege u elem. inversabil, având aceleași proprietăți.

<u>Def.</u> S.n. <u>matrice eșalon</u> (pe linii) o matrice de forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Deci o matrice eșalon (pe linii) este o matrice care se prezintă astfel:
- primul element nenul de pe fiecare linie, numit <u>pivot</u>, este egal cu 1;
- pivotul de pe linia $i+1$ este la dreapta pivotului de pe linia i;
- pivotul este singurul elem. nenul de pe coloana sa;
- eventualele linii nule apar la sfârșit.

<u>Teoremă</u> Orice matrice $A \in M_{m \times n}(K)$ este echivalentă pe linii cu o matrice eșalon numită <u>forma eșalon</u> a lui A.

<u>Corolar</u> $A \in M_{m \times n}(K)$

$\operatorname{rang} A =$ rangul formei eșalon a lui A

$=$ nr. de pivoți din forma eșalon.

<u>Corolar</u> $A \in M_{m \times n}(K)$

$(\exists)\ E_1, \dots, E_r \in M_m(K)$ matrice elementare a.î. $E_1 \dots E_r A$ să fie matrice eșalon.

<u>Teoremă</u> Orice sistem de ec. liniare este echivalent cu un sistem având matricea extinsă matrice eșalon.

<u>Obs.</u> Dc. A^e are forma eșalon, at. notăm cu $j_1, \dots, j_k$ coloanele ce au pivoți. (Dc. apare un pivot pe ultima col., avem o ec. $0=1$, deci sistemul este incompat.). Nec. $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ s.n. <u>nec. principale</u>, iar celelalte $x_{e_1}, \dots, x_{e_r}$ <u>nec. secundare</u>.

Trecem nec. secundare în partea dreaptă și sistemul devine

$$\boxed{x_{j_i} = b_i - \sum_{t=1}^{r} a_{i\ell_t} x_{\ell_t}, \quad i=1,\dots,k.}$$

Teoremă

Un sistem de ec. $Ax=b$ care are matricea extinsă A^e în forma eșalon este compatibil dc. și numai dc. A^e nu are pivoți pe ultima coloană.
Dc. este compatibil, at. este compatibil determinat dc. și numai dc. nu avem nec. secundare, adică matricea sistemului are câte un pivot pe fiecare coloană.

Exemple

1) Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_4 = 6 \\ x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

2) Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{cases}$$