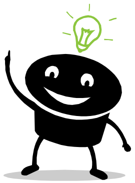
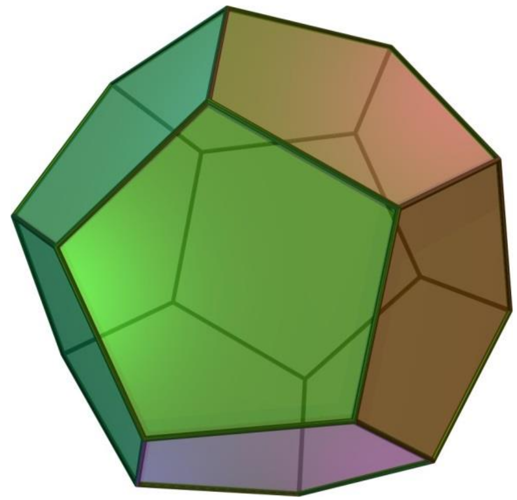
Grafuri planare

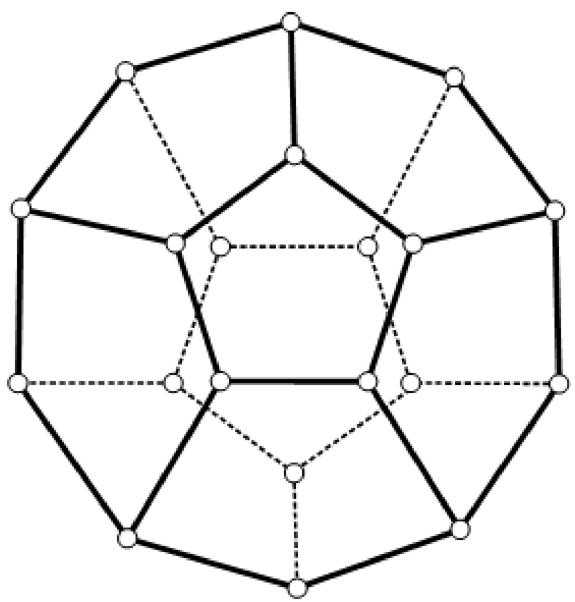
Graf planar

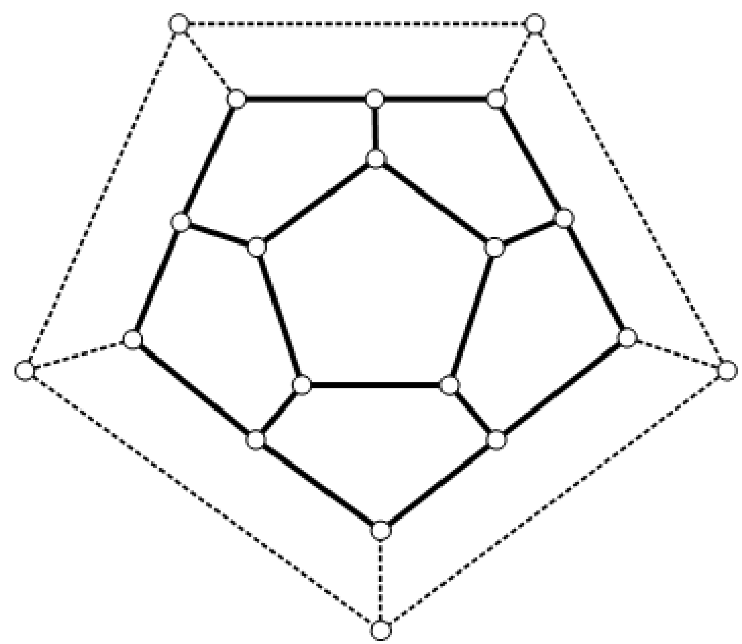


- Amintiri din primul curs

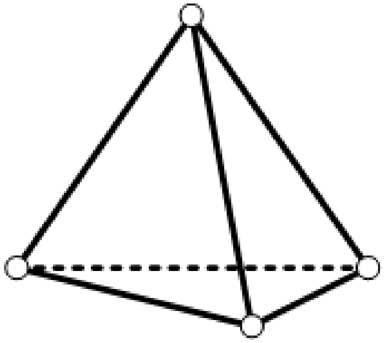
Dodecaedrul



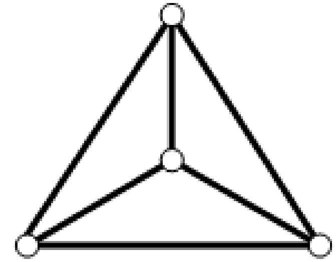


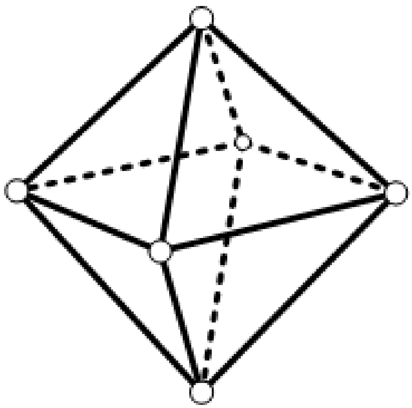


Corpuri platonice – grafuri planare

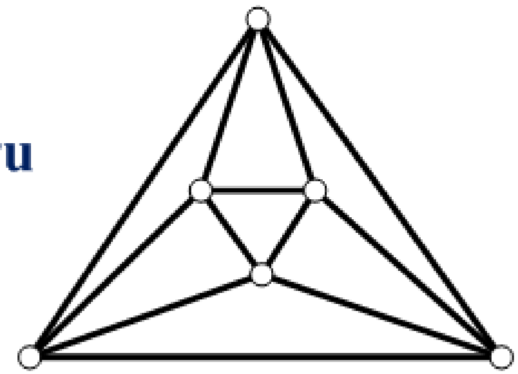


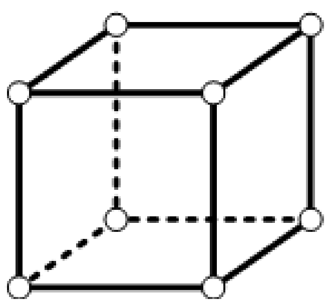
Tetraedru



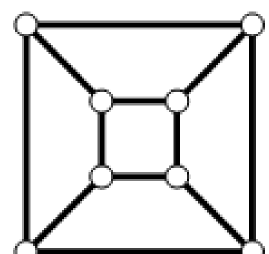


Octaedru

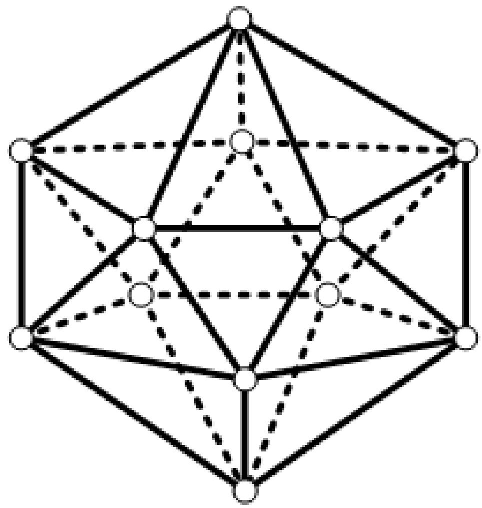




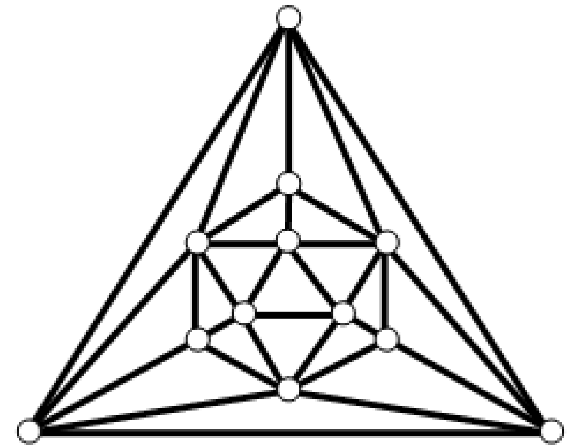
Cub

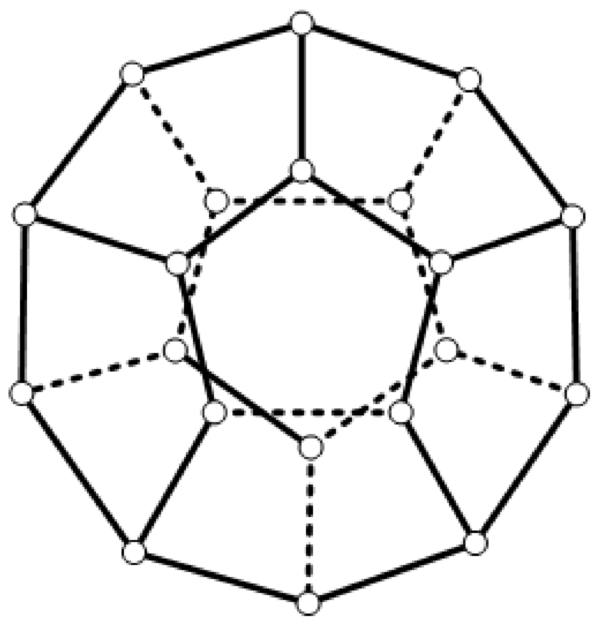


Corpuri platonice - grafuri planare

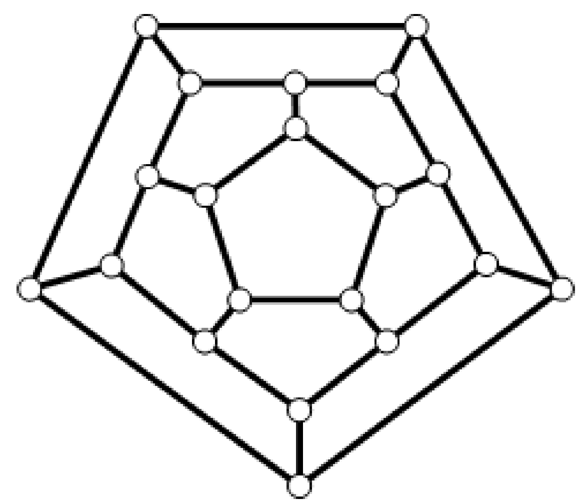


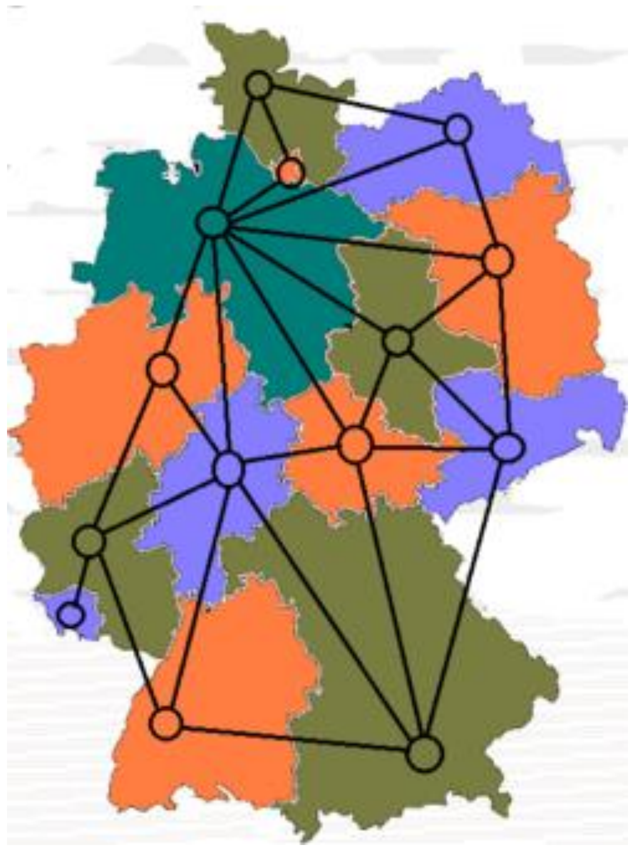
Icosaedru



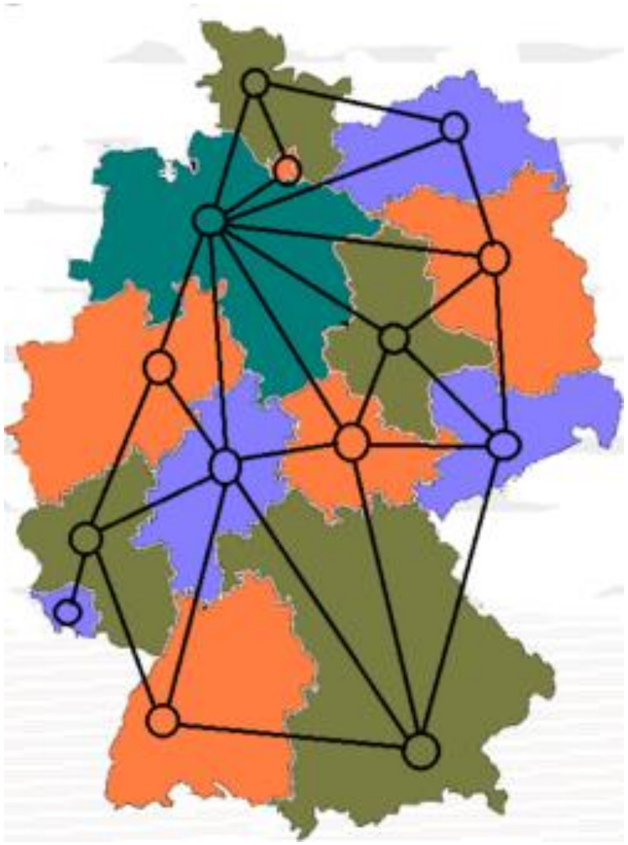


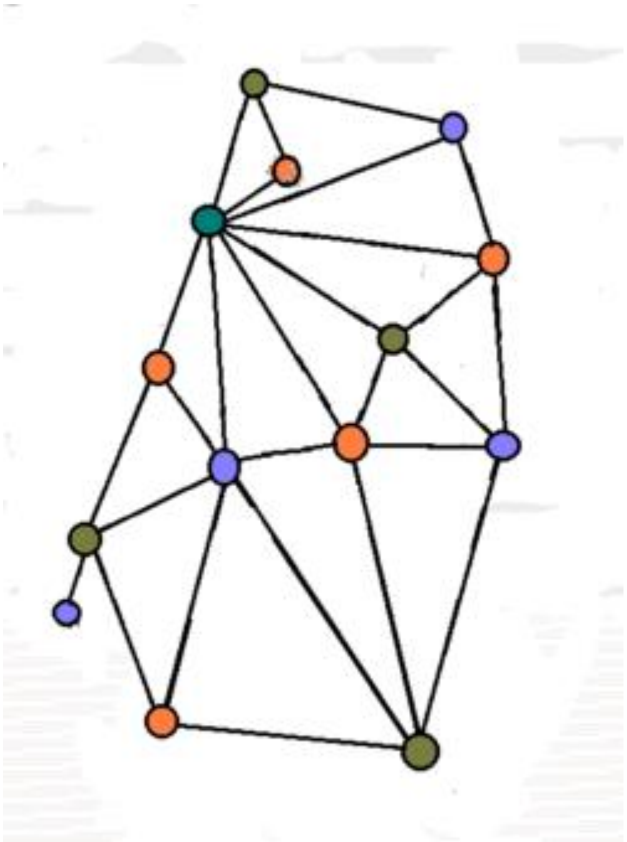
Dodecaedru





http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem



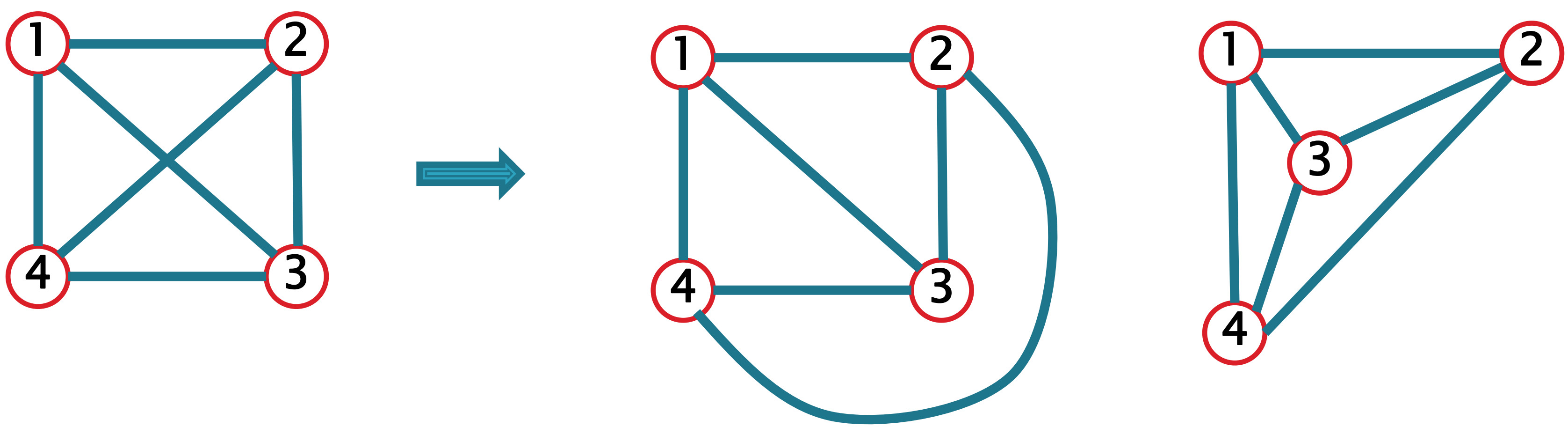


http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem

Graf planar

- G = (V, E) graf neorientat s.n. planar $\Leftrightarrow$ admite o reprezentare în plan a.î. **muchiilor** le corespund segmente de curbe continue care **nu se intersectează în interior** unele pe altele

- O astfel de reprezentare s.n hartă a lui G



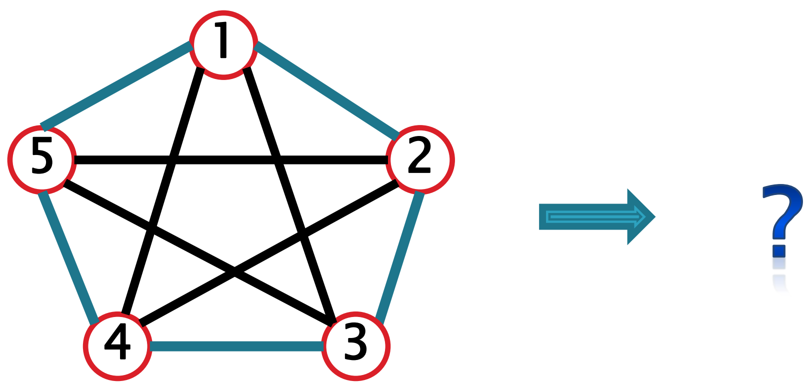
$G \sim K_4$

hărți

Graf planar

- G = (V, E) graf neorientat s.n. <u>**planar**</u> ⇔ admite o reprezentare în plan a.î. **muchiilor** le corespund segmente de curbe continue care **nu se intersectează în interior** unele pe altele

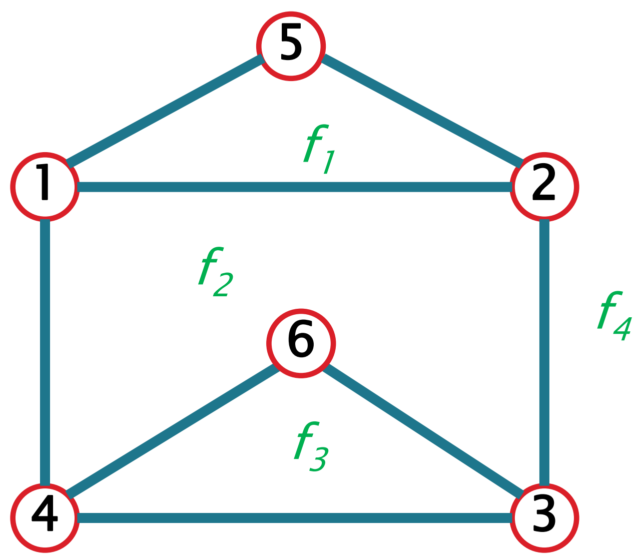
- O astfel de reprezentare s.n <u>**hartă**</u> a lui G



$G \sim K_5$

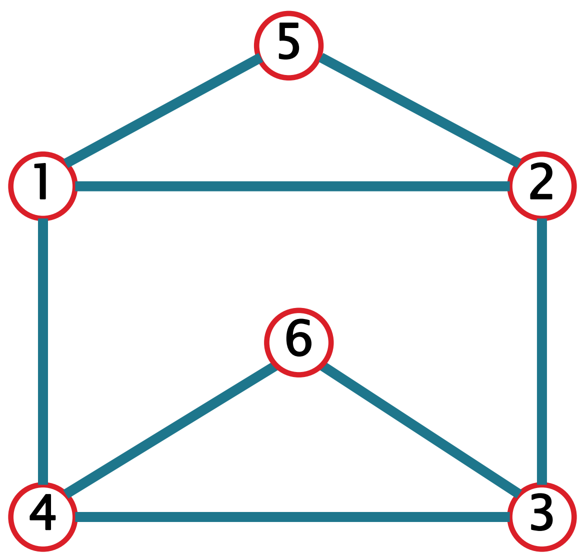
Graf planar

- Fie G = (V, E) graf planar, M o hartă a sa
- M induce o împărțire a planului într-o mulțime **F** de părți convexe numite **fețe**
- Una dintre acestea este **fața infinită (exterioară)**

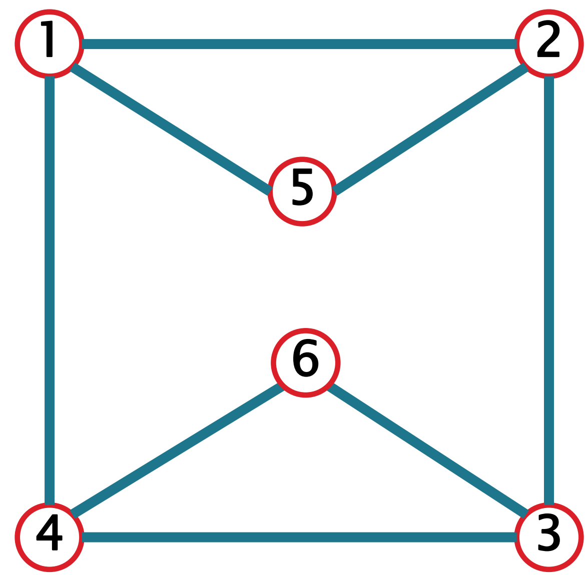


Graf planar

- M = (V, E, F) **hartă**
- Pentru o față f ∈ F definim
  - **d_M(f) = gradul feței f =** numărul muchiilor lanțului închis (**frontierei**) care delimitează f (*câte muchii sunt parcurse atunci când traversăm frontiera*)

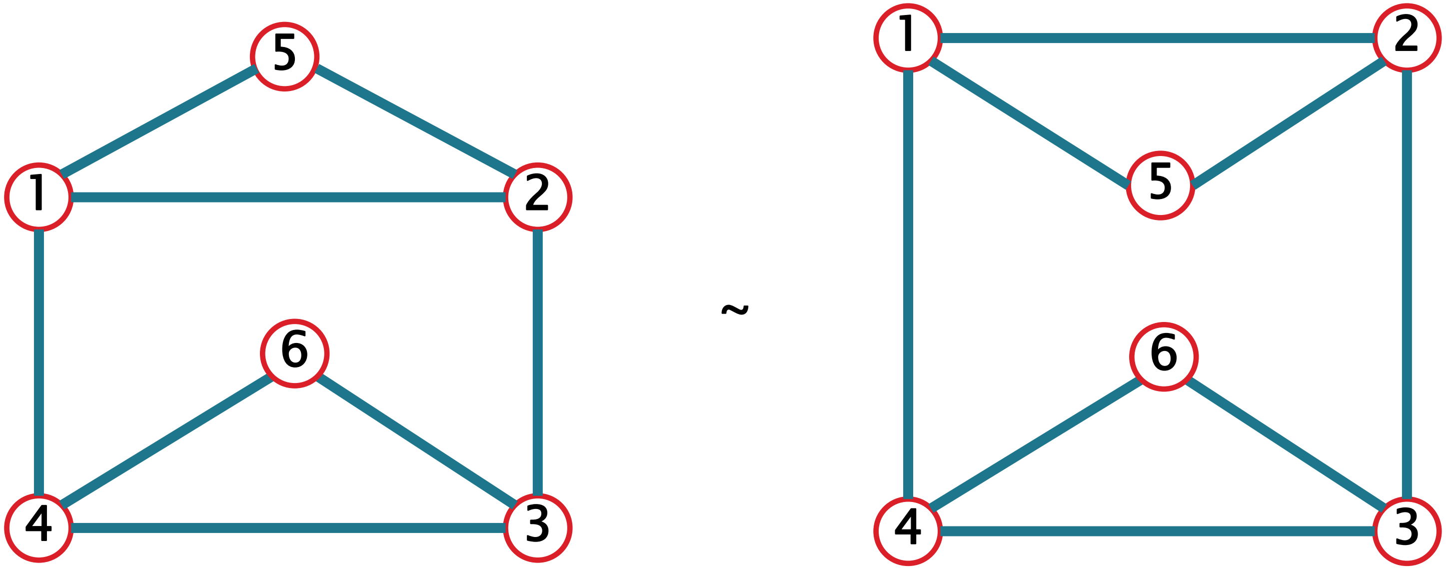


~



Graf planar

Observație: Hărți diferite ale aceluiași graf pot avea **secvența gradelor fețelor diferită**



Poate să difere și numărul de fețe (între 2 hărți ale aceluiași graf)?

Graf planar

- M = (V, E, F) hartă
    - **Avem**

$$\sum_{f \in F} d_M(f) = 2|E|$$

Graf planar

- **Teorema poliedrală a lui EULER**

  Fie G=(V, E) un graf planar **conex** și M = (V, E, F) o hartă a lui. Are loc relația

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

Graf planar

- **Teorema poliedrală a lui EULER**

  Fie G=(V, E) un graf planar **conex** și M = (V, E, F) o hartă a lui. Are loc relația

$$|\mathbf{V}| - |\mathbf{E}| + |\mathbf{F}| = 2$$

- **Consecință**

  Orice hartă M a lui G are 2 – |V| + |E| fețe

Graf planar

- **Proprietăți**

Fie $G=(V, E)$ un graf planar conex cu $n=|V|>2$ și $m=|E|$. Atunci:

a) $m \leq 3n - 6$

b) $\exists\, x \in V$ cu $d(x) \leq 5$.

Graf planar

- **Proprietăți**

Fie $G=(V, E)$ un graf planar conex cu $n=|V|>2$ și $m=|E|$. Atunci:

a) $\mathbf{m \leq 3n - 6}$

b) $\mathbf{\exists\, x \in V}$ **cu** $\mathbf{d(x) \leq 5}$.

- **Consecință**

K_5 nu este grafuri planar

Graf planar

- **Proprietăți (temă)**

Fie $G=(V, E)$ un graf planar conex **bipartit** cu $n=|V|>2$ și $m=|E|$. Atunci:

a) $\mathbf{m \leq 2n - 4}$

b) $\mathbf{\exists\, x \in V}$ **cu** $\mathbf{d(x) \leq 3}$**.**

- **Consecință**

$K_{3,3}$ nu este grafuri planar

Graf planar

- **Teorema celor 6 culori**

  Orice graf planar conex este 6 -colorabil.

- **Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori**

Graf planar

- **Teorema celor 6 culori**

  Orice graf planar conex este 6 -colorabil.

- **Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori**

```
colorare(G)
      daca |V(G)|≤ 6 atunci coloreaza varfurile cu
      culori distincte din {1,…,6}
```

Graf planar

- ## Teorema celor 6 culori

  Orice graf planar conex este 6 -colorabil.

- ## Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori

```
colorare(G)
        daca |V(G)|≤ 6 atunci coloreaza varfurile cu
        culori distincte din {1,…,6}
        altfel
                alege x cu d(x) ≤ 5
```

Graf planar

- **Teorema celor 6 culori**

  Orice graf planar conex este 6 -colorabil.

- **Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori**

```
colorare(G)
      daca |V(G)|≤ 6 atunci coloreaza varfurile cu
      culori distincte din {1,…,6}
      altfel
            alege x cu d(x) ≤ 5
            colorare(G-x)
```

Graf planar

- **Teorema celor 6 culori**

  Orice graf planar conex este 6 -colorabil.

- **Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori**

```
colorare(G)
        daca |V(G)|≤ 6 atunci coloreaza varfurile cu
        culori distincte din {1,…,6}
        altfel
                alege x cu d(x) ≤ 5
                colorare(G-x)
                colorează x cu o culoare din {1,…,6}
                diferită de culorile vecinilor
```

Graf planar

- **Teorema celor 6 culori**

  Orice graf planar conex este 6 -colorabil.

- **Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori**

```
colorare(G)
      daca |V(G)|≤ 6 atunci coloreaza varfurile cu
      culori distincte din {1,…,6}
      altfel
            alege x cu d(x) ≤ 5
            colorare(G-x)
            colorează x cu o culoare din {1,…,6}
            diferită de culorile vecinilor
```

  - **Sugestie implementare** – determinarea iterativă a ordinii în care sunt colorate vârfurile (similar parcurgere BF, sortare topologică)

Graf planar

- **Teorema celor 5 culori**

  Orice graf planar conex este 5 -colorabil.

- **Suplimentar – Temă (+ algoritm de 5-colorare)**