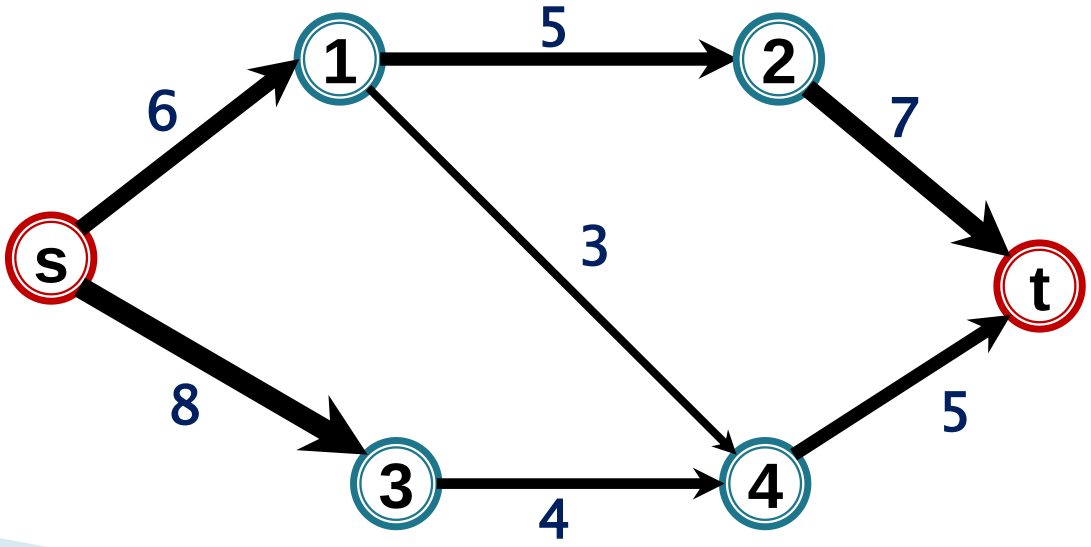
Aplicaţii la problema determinării unei tăieturi minime

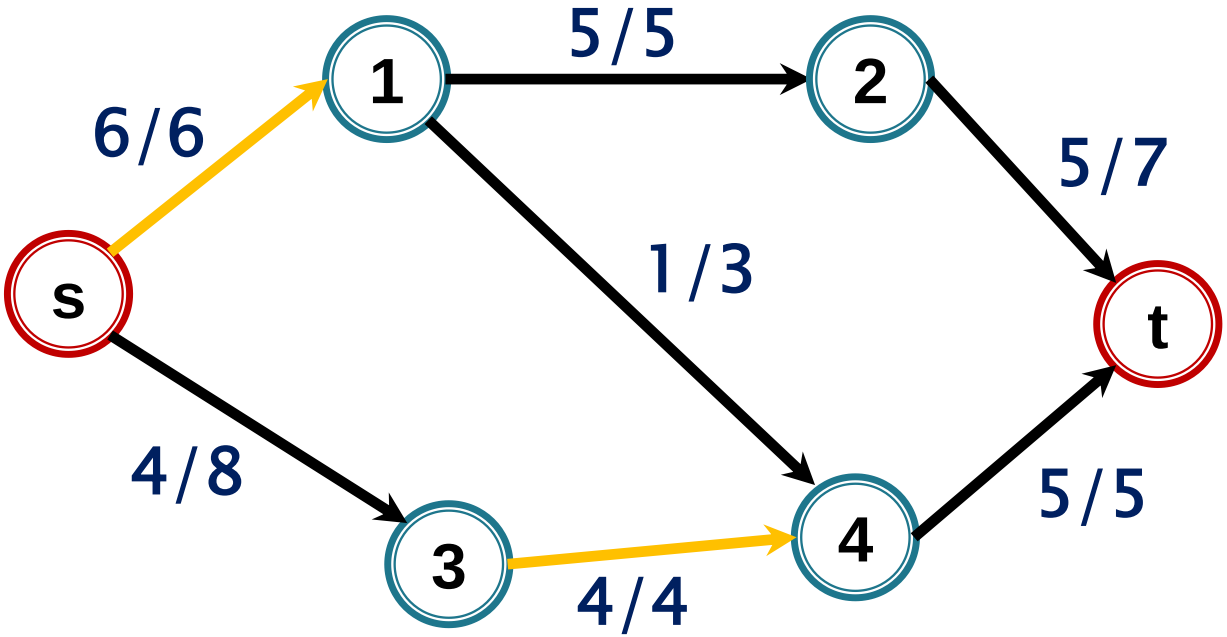
Tăietură minimă

- Determinarea unui flux maxim ⇒ determinarea unei tăieturi minime
- **Aplicații**
  - **Arce = poduri, capacitate = costul dărâmării podului.**

Ce poduri trebuie dărâmate a.î. teritoriul sursă să nu mai fie conectat cu destinația și costul distrugerilor să fie minim?



Tăietură minimă



Planificare activități proiecte

Probleme de planificare

- **Se cunosc pentru un proiect cu n activități, numerotate 1,…, n:**
  - profitul p_i – care poate fi și <0

Probleme de planificare

- **Se cunosc pentru un proiect cu n activități, numerotate 1,…, n:**
  - profitul p_i – care poate fi și <0
  - perechi (i, j) = activitatea i **depinde de** activitatea j (activitatea nu poate fi efectuată decât dacă se efectuează j)

Probleme de planificare

- **Se cunosc pentru un proiect cu n activități, numerotate 1,…, n:**
  - profitul p_i – care poate fi și <0
  - perechi (i, j) = activitatea i **depinde de** activitatea j (activitatea nu poate fi efectuată decât dacă se efectuează j)

Se cere: **să se selecteze o mulțime de activități realizabile A de profit maxim**

O mulțime de activități este realizabilă dacă

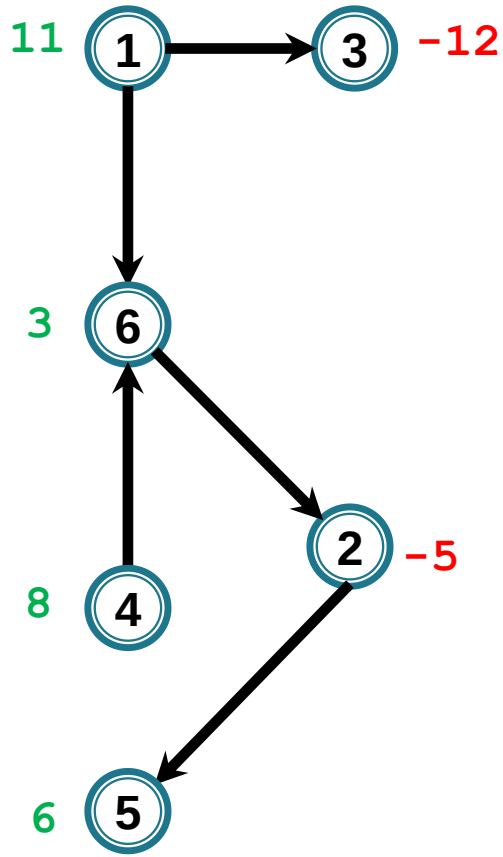
- **$i \in A$, i depinde de $j \Rightarrow j \in A$**

Probleme de planificare

- **Notaţii pentru o mulţime A de activităţi**
  - $castig(A) = \sum_{i \in A, p_i \geq 0} p_i$
  - $pierdere(A) = \sum_{i \in A, p_i < 0} (-p_i)$
  - $profit(A) = castig(A) - pierdere(A)$
  - $C_{tot} = castig(\{1, \ldots, n\})$

Probleme de planificare

- **Exemplu:**
  - n = 6 activități
  - 1 – profit 11
  - 2 – profit –5
  - 3 – profit –12
  - 4 – profit 8
  - 5 – profit 6
  - 6 – profit 3
  - Dependențe indicate de graful alăturat

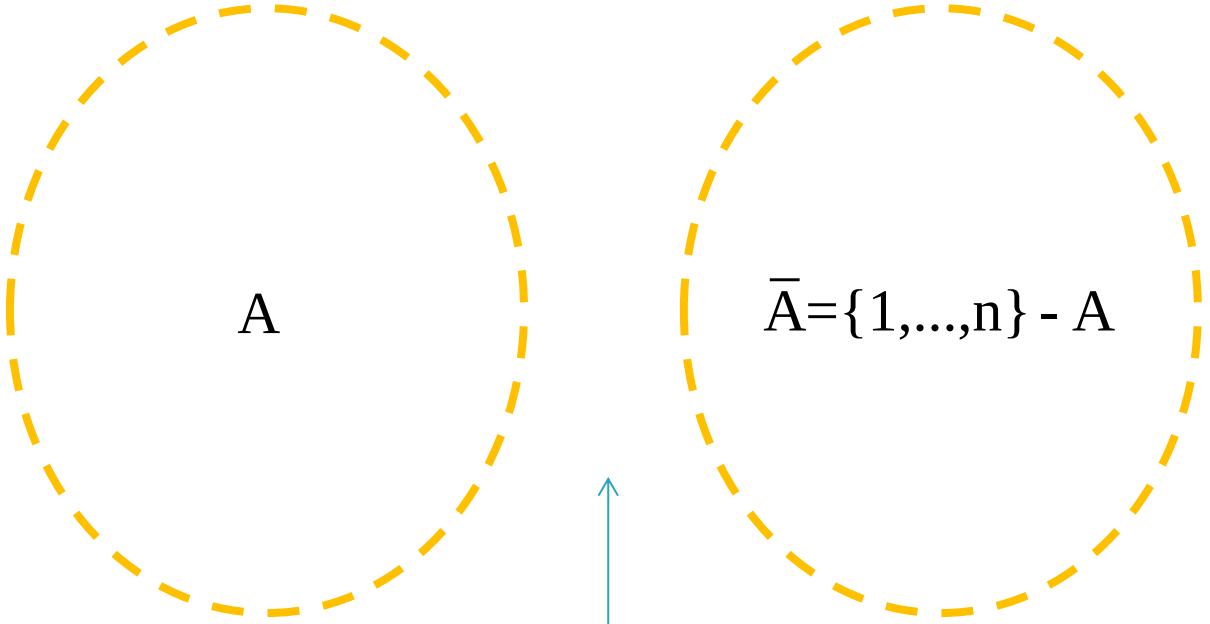


Soluție A = {2, 4, 5, 6}, profit(A) = 12

(castig(A) = 17, pierdere(A)=5)

Probleme de planificare

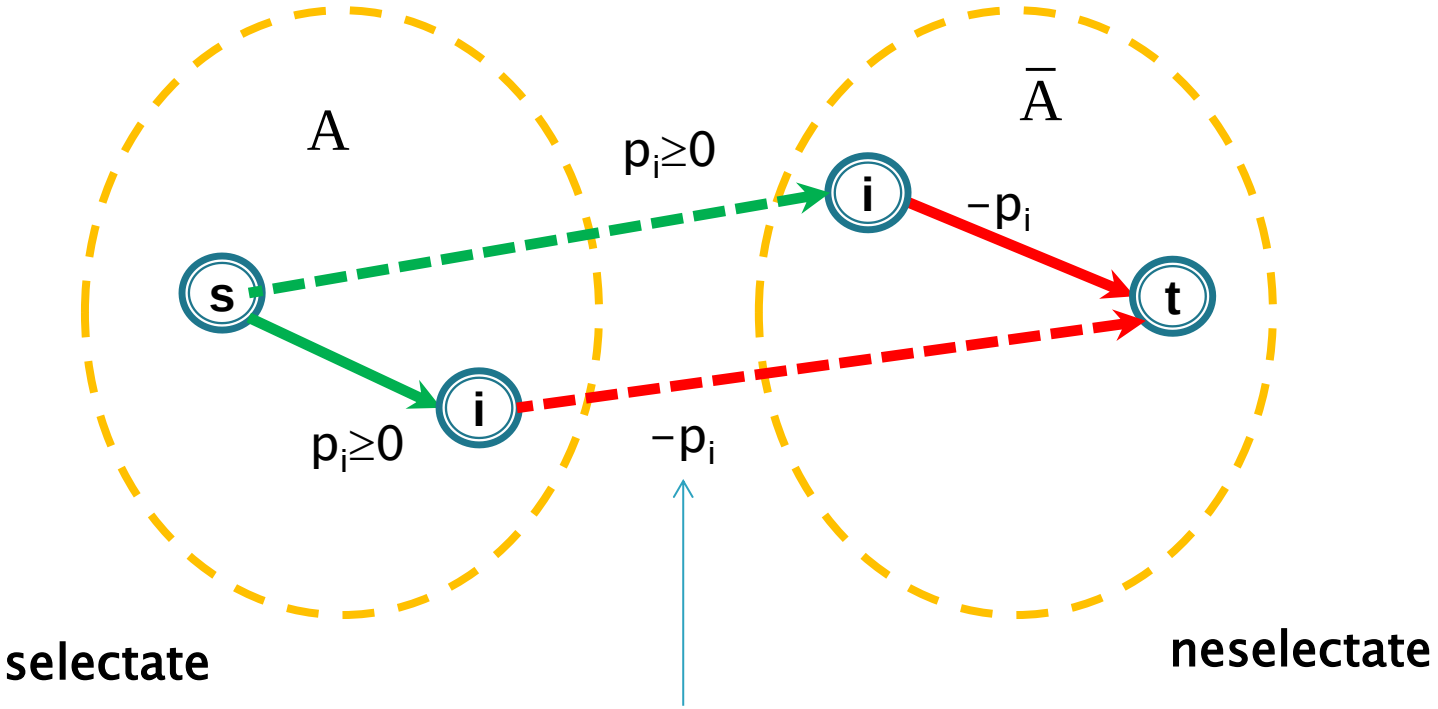
- **Trebuie să împărțim activitățile în două:**



pierderi în profit minime (față de C_{tot})

Probleme de planificare

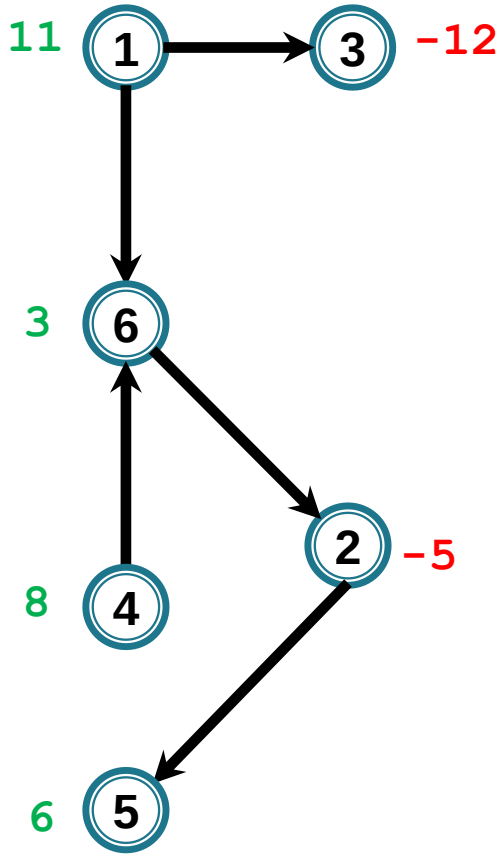
- Asociem probleme o o rețea și reducem determinarea lui A la determinarea unei tăieturi minime în rețea



pierderi în profit minime (față de C_{tot})
⇔ capacitatea tăieturii trebuie să fie minimă

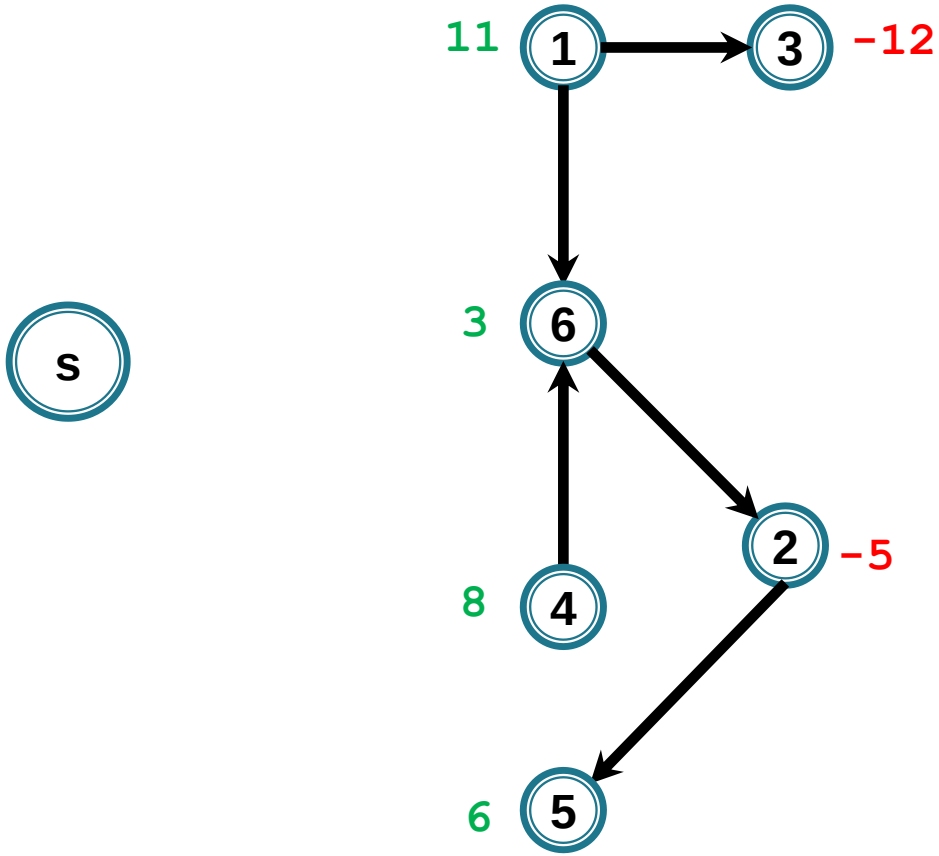
Probleme de planificare

- **Exemplu:**
  - n = 6 activități
  - 1 – profit 11
  - 2 – profit –5
  - 3 – profit –12
  - 4 – profit 8
  - 5 – profit 6
  - 6 – profit 3
  - Dependențe indicate de graful alăturat



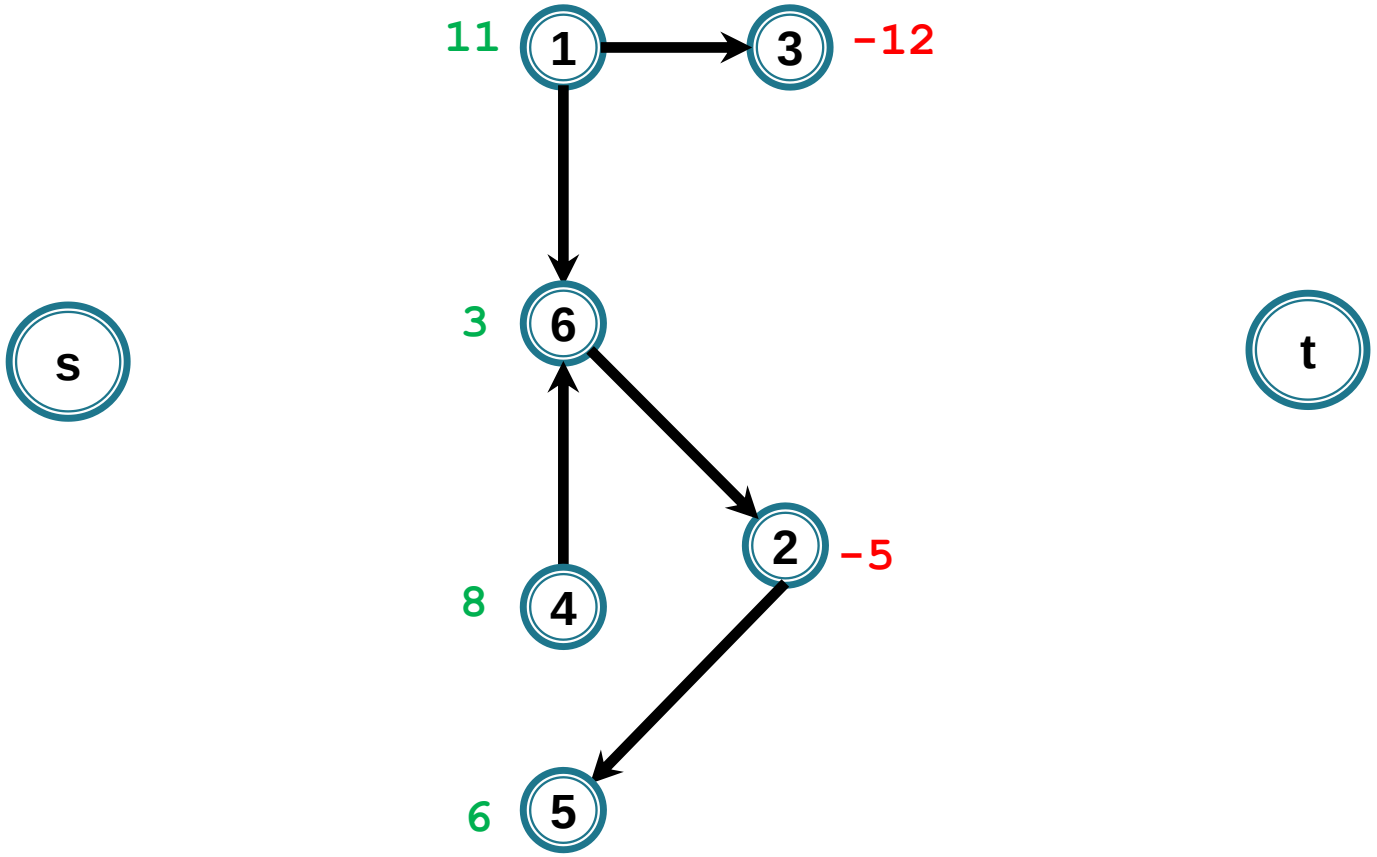
Probleme de planificare

- Asociem grafului o rețea de transport



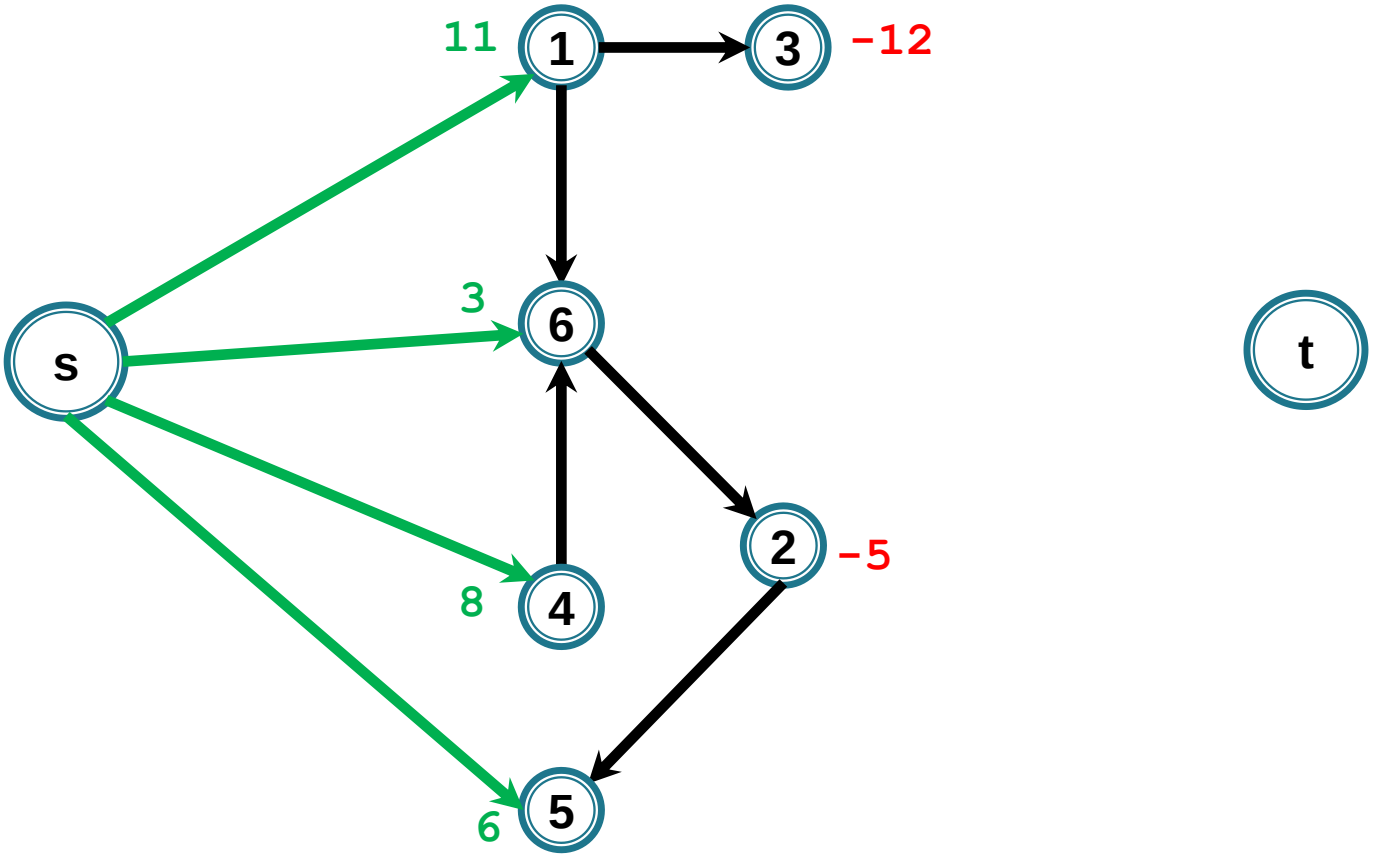
Probleme de planificare

- Adăugăm o sursă și o destinație



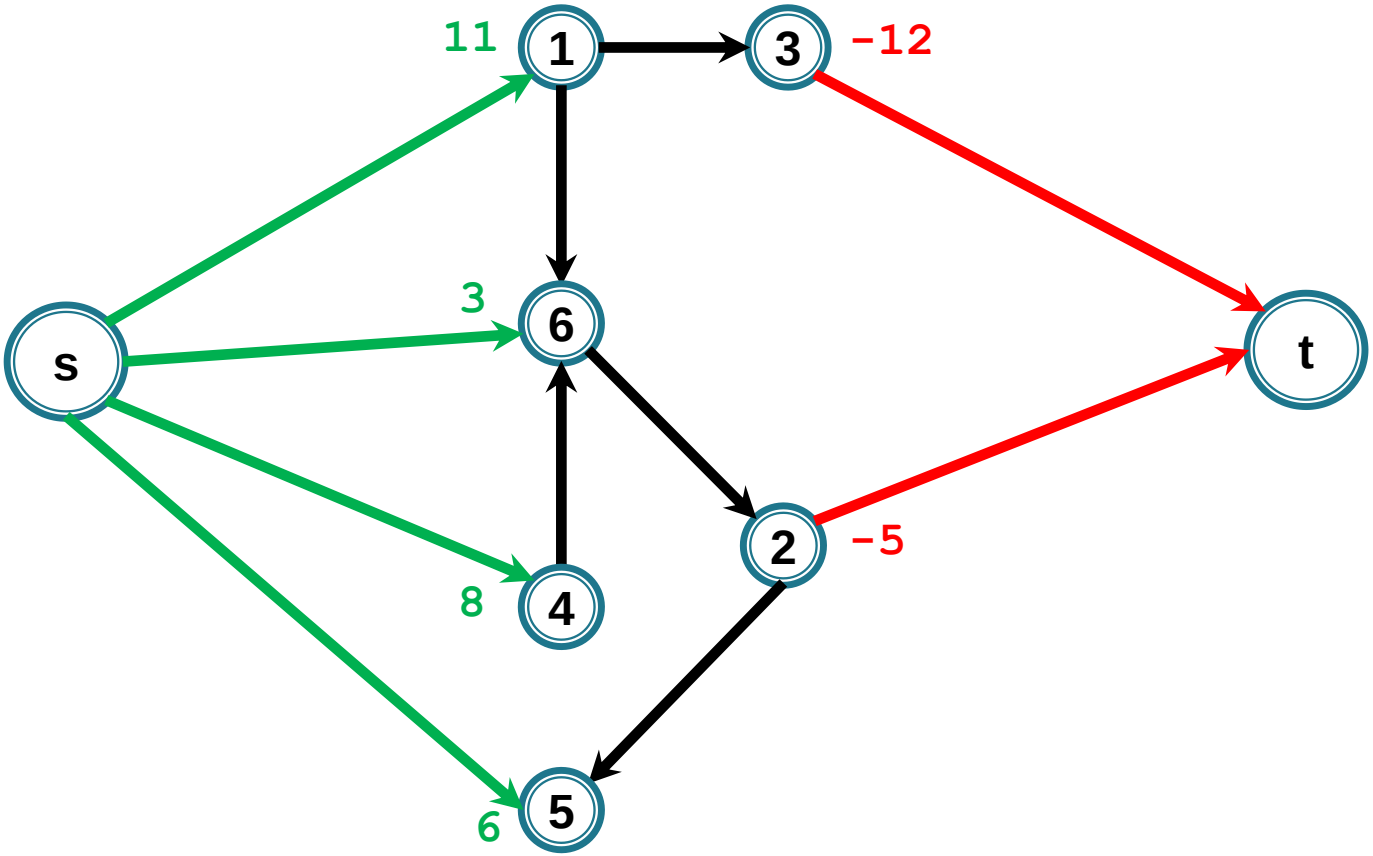
Probleme de planificare

- Unim s cu activități cu profit >=0



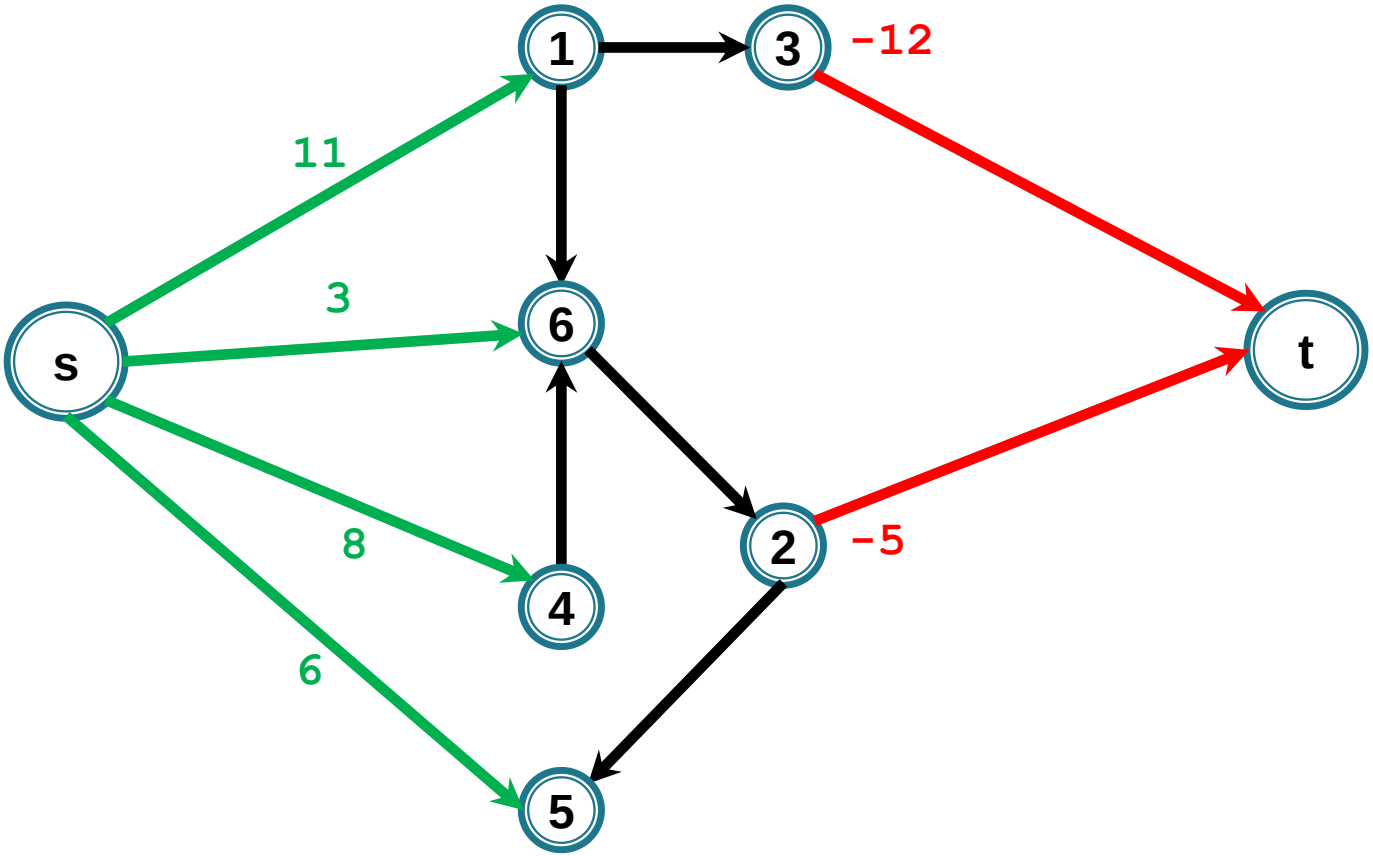
Probleme de planificare

- Unim activitățile cu profit <0 cu t



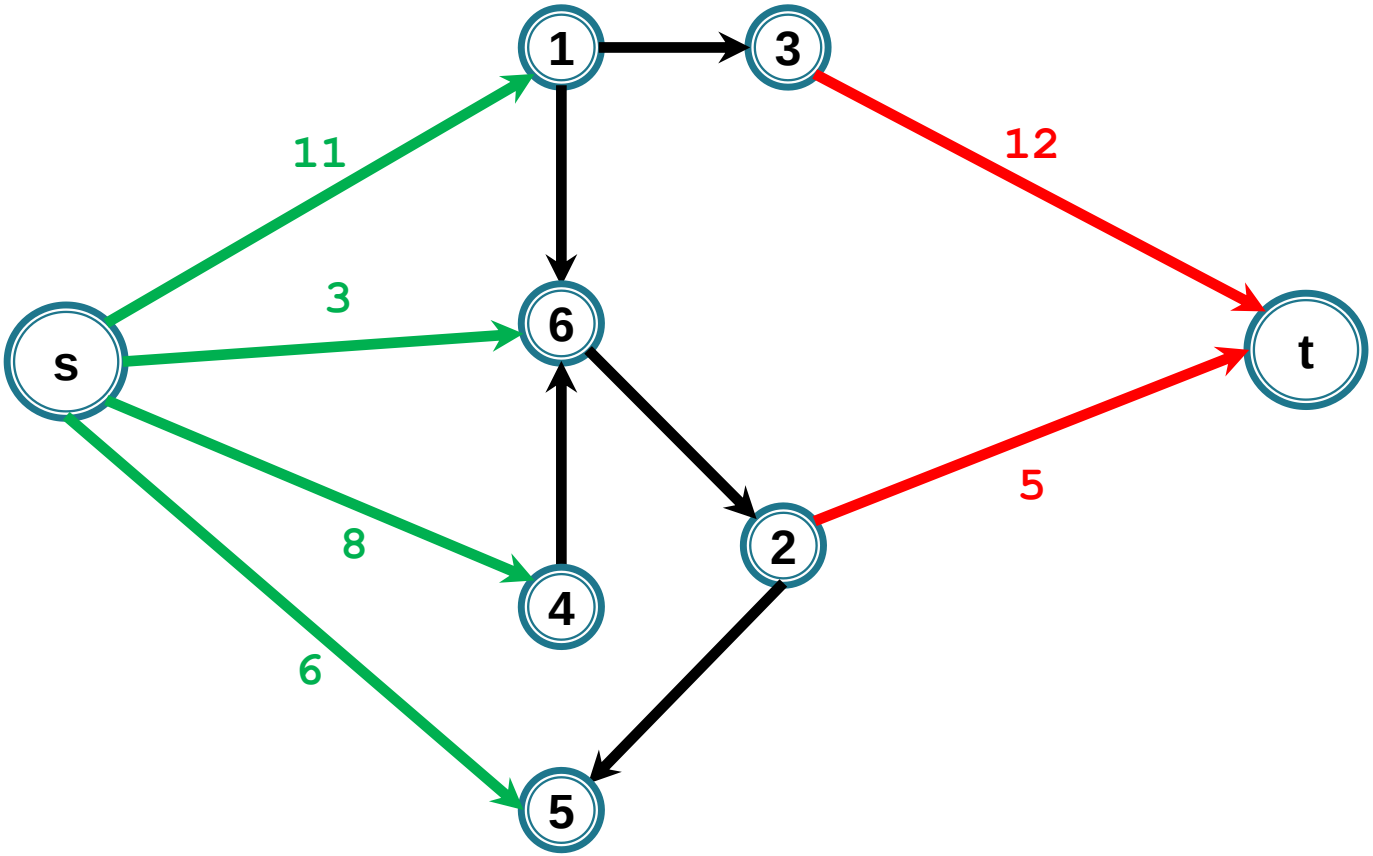
Probleme de planificare

- c(sx) = profitul lui x



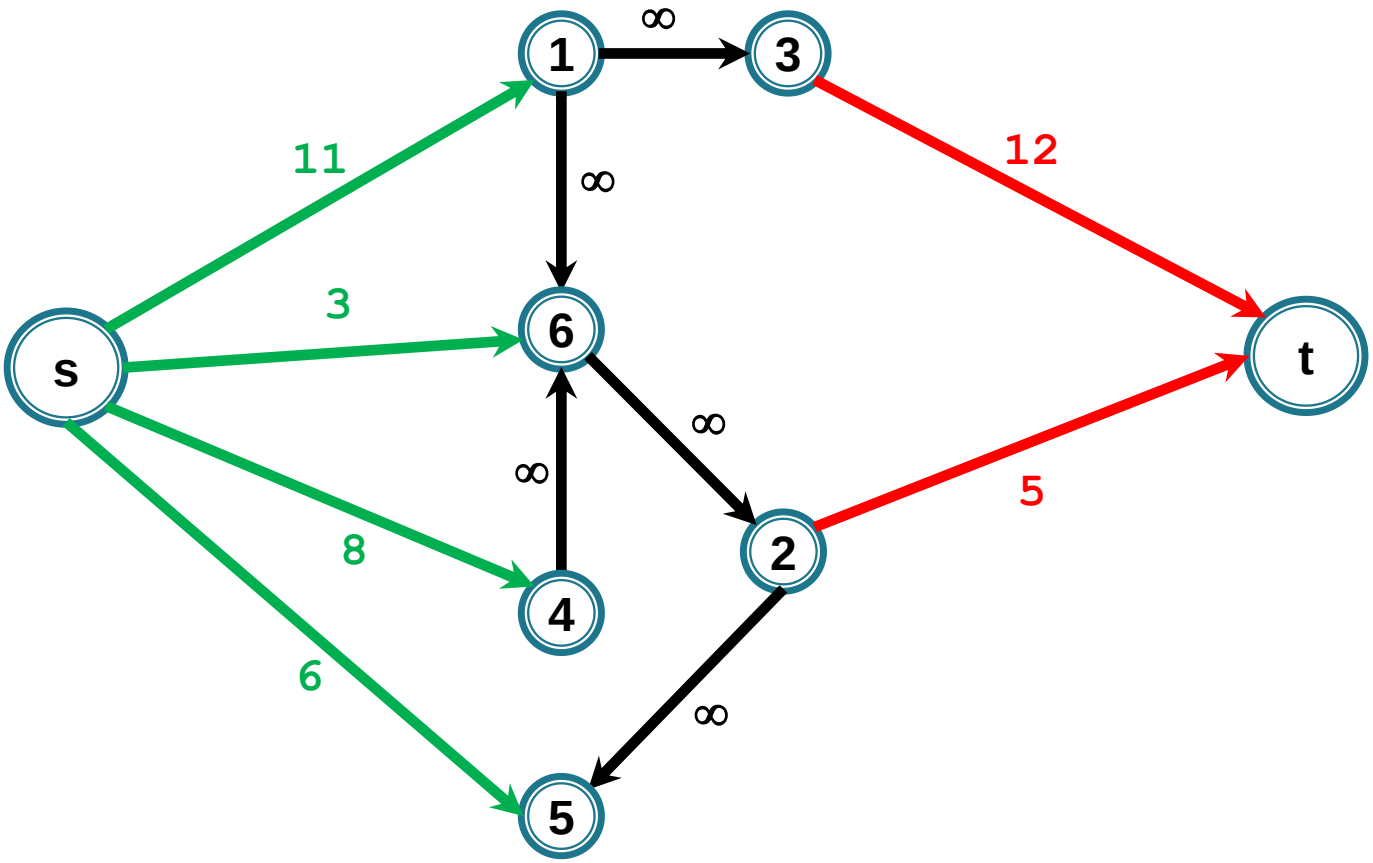
Probleme de planificare

- c(yt) = modulul profitului lui y

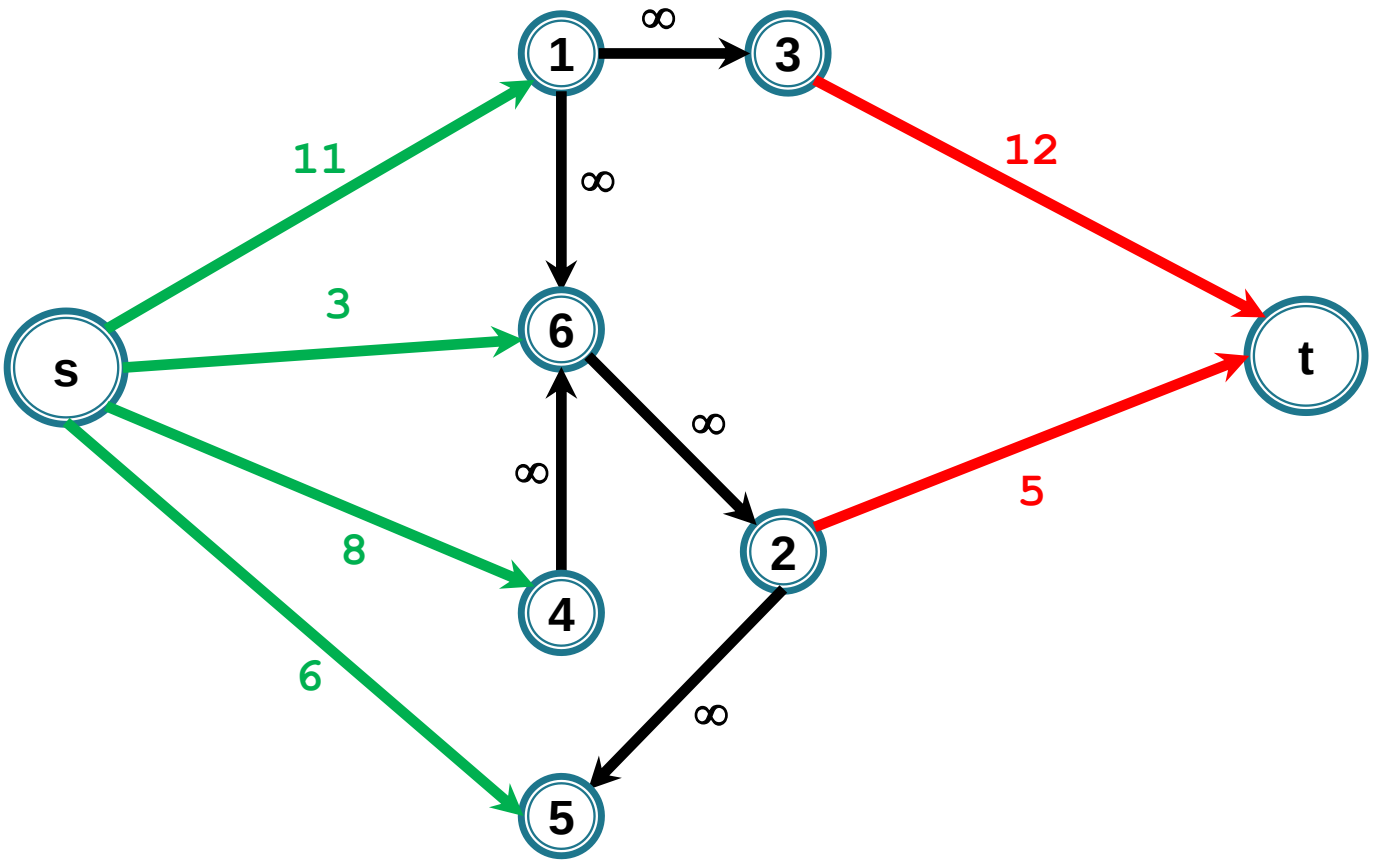


Probleme de planificare

- Restul capacităților = ∞ – pentru a ne asigura că A este realizabilă



Probleme de planificare



Probleme de planificare

- **Orice tăietură în rețea este de forma** $K_A = (A \cup \{s\}, \bar{A} \cup \{t\})$

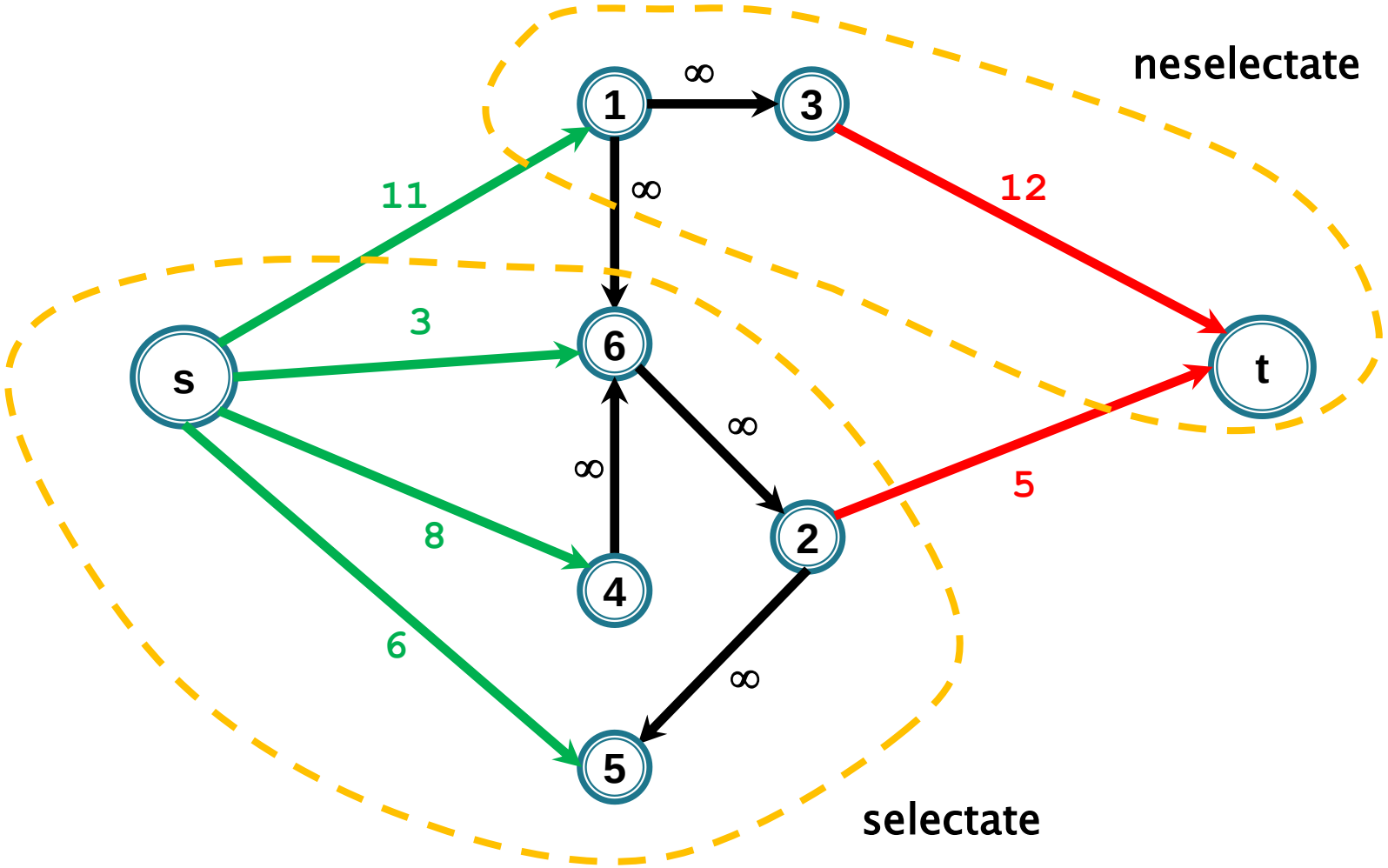
Probleme de planificare

- **Orice tăietură în rețea este de forma** $K_A = (A \cup \{s\}, \bar{A} \cup \{t\})$

- **Dacă** $c(K_A) < \infty$**, atunci A este o mulțime de activități realizabilă** (dacă $i \in A$ şi i depinde de j, atunci ij are capacitate ∞, deci nu aparţine tăieturii; rezultă că j este tot în A).

Probleme de planificare

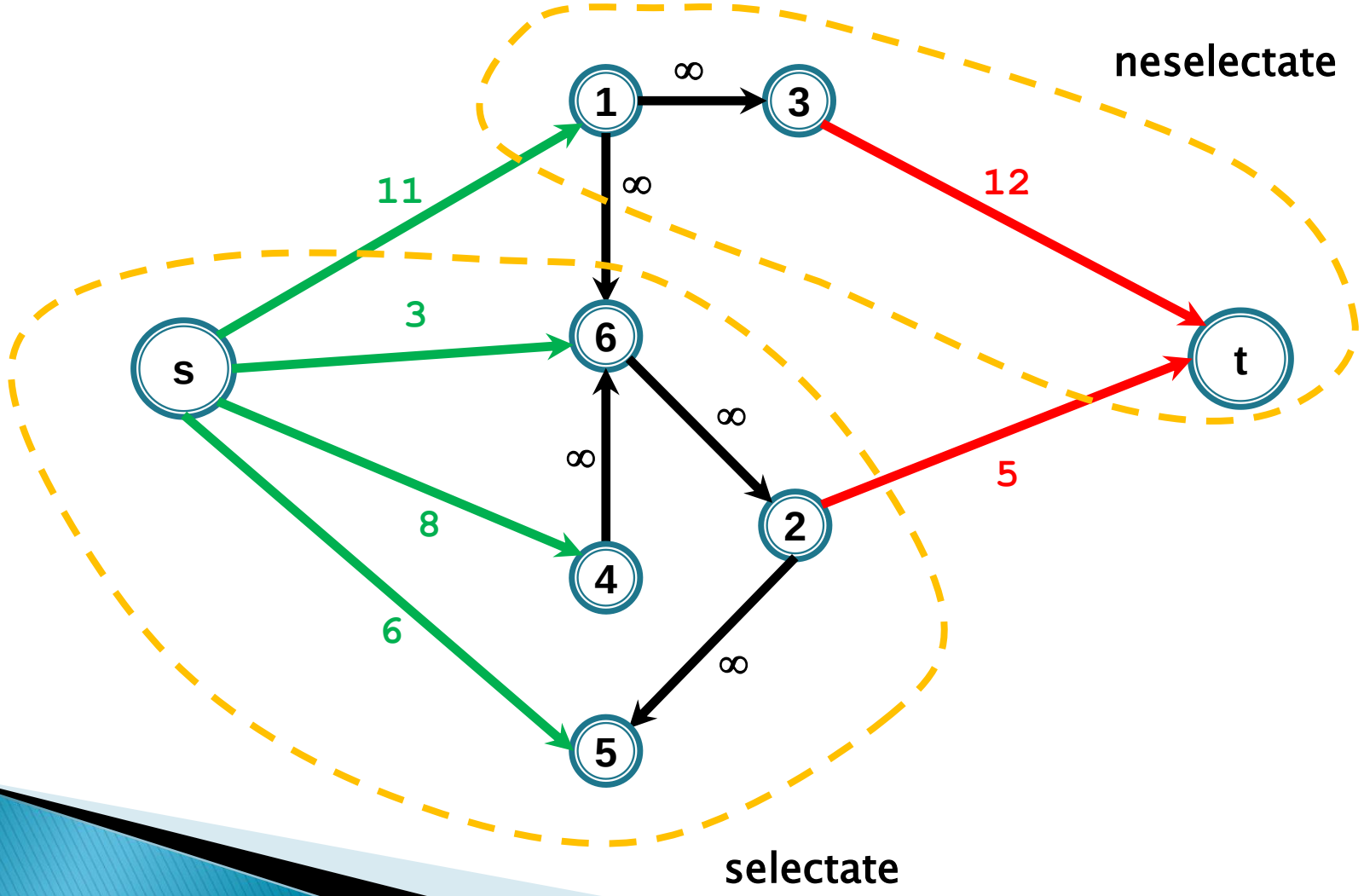
A – mulțime de activități realizabile ⇔ tăietura corespunzătoare $K_A = (A \cup \{s\}, \bar{A} \cup \{t\})$ este o **tăietură de capacitate finită**



Probleme de planificare

Propoziţie. Dacă K_A este o tăietură de capacitate finită avem

$$\texttt{profit(A)} = C_{tot} - \texttt{c}(K_A)$$



Probleme de planificare

Justificare:

Avem

$$\texttt{profit(A) = castig(A) - pierdere(A) =}$$

$$\texttt{= } C_{tot} \texttt{ - castig(}\bar{A}\texttt{) - pierdere(A)}$$

$$c(K_A) = \sum_{i \in A} c(it) + \sum_{i \in \bar{A}} c(si) =$$

$$= \sum_{i \in A, p_i < 0} (-p_i) + \sum_{i \in \bar{A}, p_i > 0} p_i =$$

$$= pierdere(A) + castig(\bar{A})$$

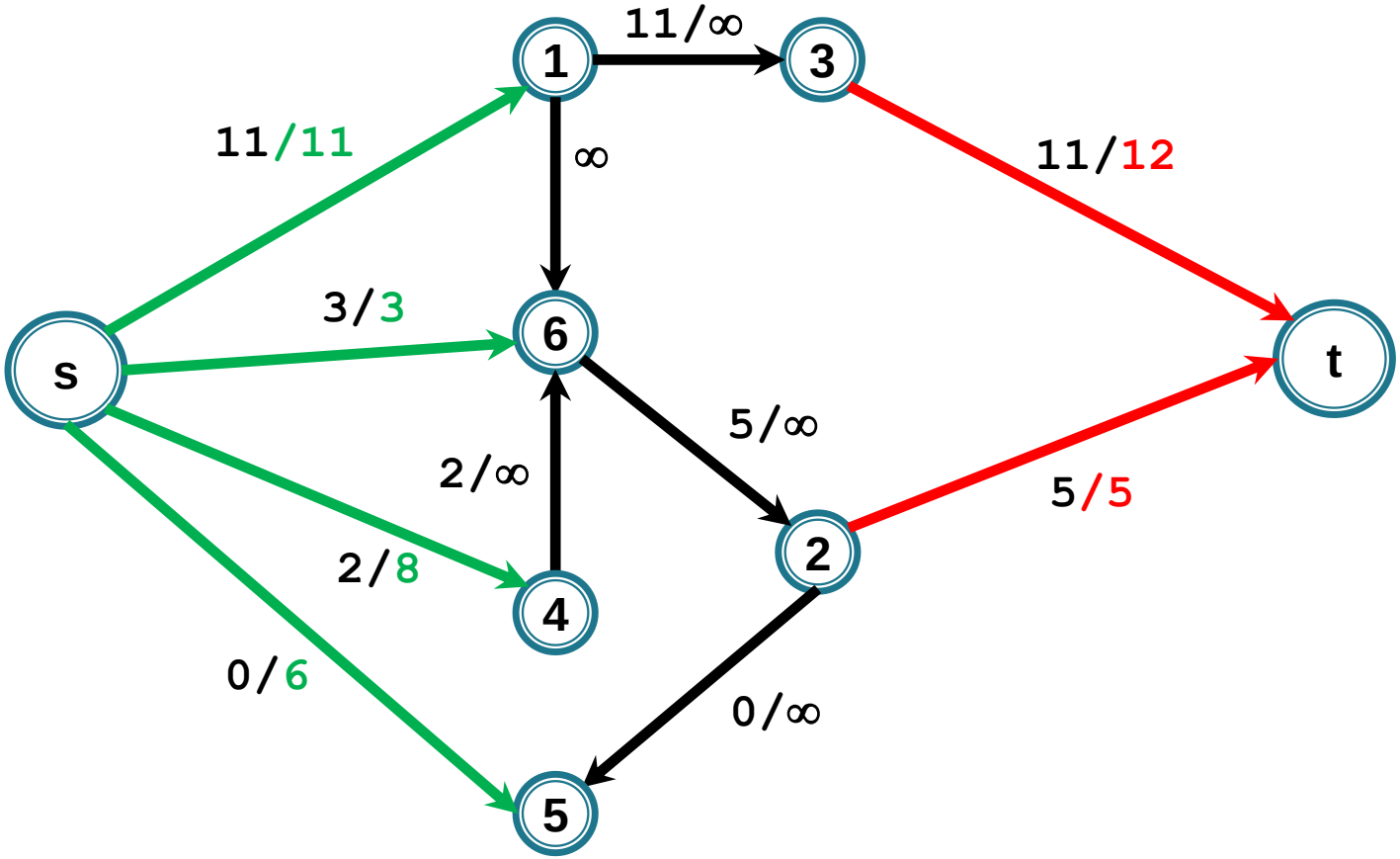
Probleme de planificare

- **Corolar.**

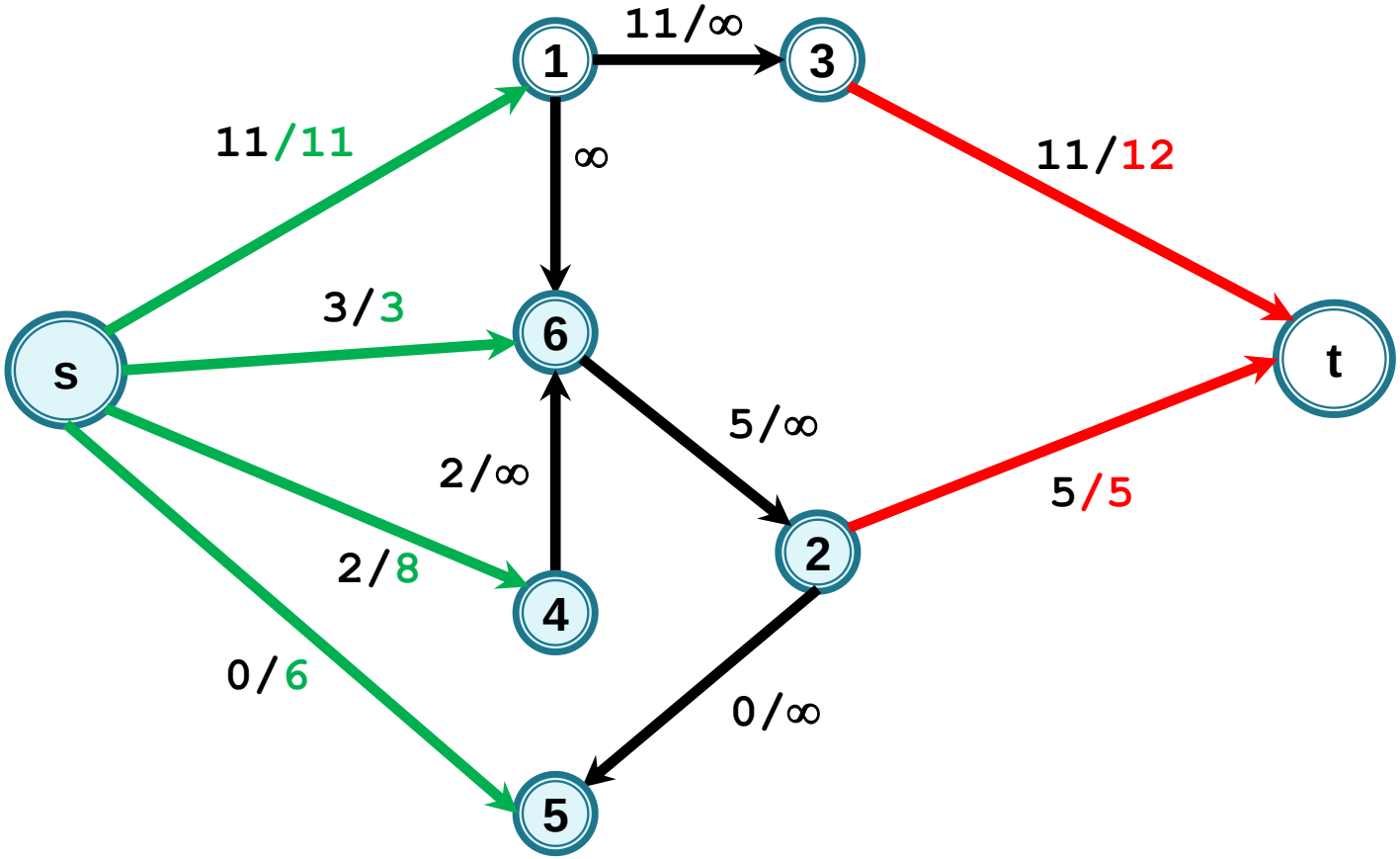
  Mulțimea de activități realizabile A este de profit maxim $\Leftrightarrow$ tăietura $K_A = (A \cup \{s\}, \bar{A} \cup \{t\})$ este de capacitate minimă în reţeaua asociată

- **A determina o mulţime de activităţi de profit maxim se reduce astfel la a determina o tăietură minimă în reţeaua asociată (determinând fluxul maxim)**

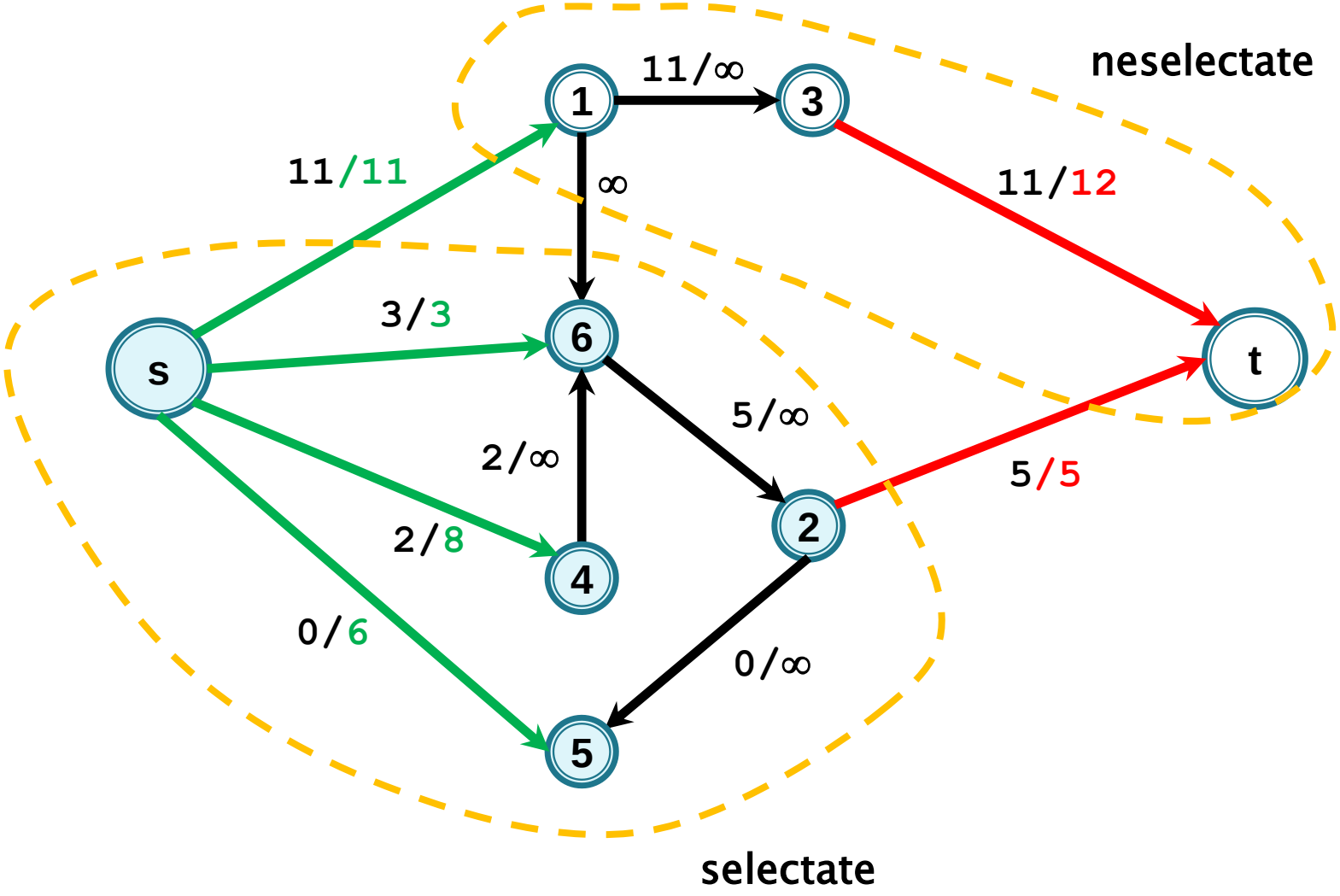
Probleme de planificare



Probleme de planificare



Probleme de planificare



Probleme de planificare

Algoritm de determinare a unei mulțimi de activități cu profit maxim

1. Construim N reţeaua de transport asociată
2. Determinăm K = (X,Y) tăietură minimă în N

Probleme de planificare

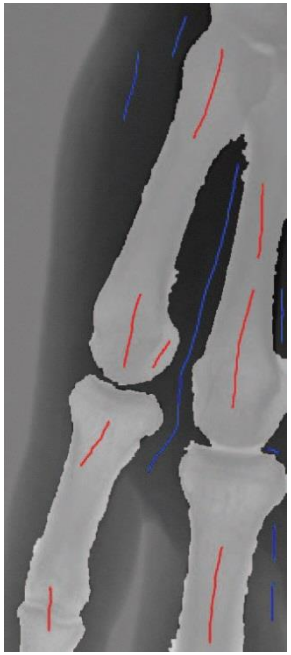
Algoritm de determinare a unei mulțimi de activități cu profit maxim

1. Construim N reţeaua de transport asociată
2. Determinăm K = (X,Y) tăietură minimă în N
3. A = X - {s}

Segmentarea imaginilor

Image segmentation

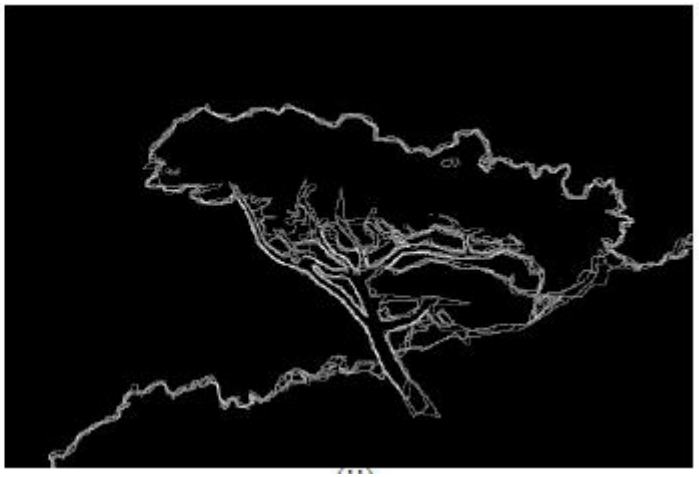
-- medicină



Spatially Varying Color Distributions for Interactive Multi-Label Segmentation (C. Nieuwenhuis, D. Cremers), In IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, volume 35, 2013

Segmentarea imaginilor

Delimitare regiuni foreground/background – decidem pentru fiecare pixel dacă aparține fundalului (este în background) sau prim planului (este în foreground)

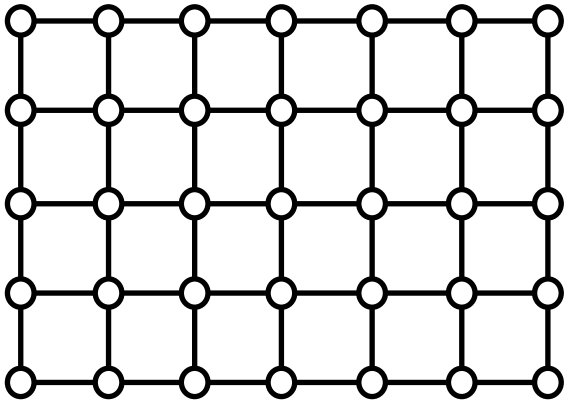


https://courses.engr.illinois.edu/cs473/sp2013/w/lec/19_add_notes.pdf

Segmentarea imaginilor

Delimitare regiuni foreground/background –

- **pixeli vecini** $\Rightarrow$ o imagine poate fi privită ca un graf grid de pixeli
  - vârfuri = pixeli
  - muchii = pixeli vecini



Segmentarea imaginilor

Delimitare regiuni foreground/background –

- **Date**
  - Pentru fiecare **pixel** i:

    f_i = probabilitatea ca i $\in$ foreground

    b_i = probabilitatea ca i $\in$ background

Segmentarea imaginilor

Delimitare regiuni foreground/background –

- **Date**
  - Pentru fiecare **pixel** i:

    f_i = probabilitatea ca i $\in$ foreground

    b_i = probabilitatea ca i $\in$ background
  - Pentru fiecare **pereche de pixeli vecini** (i, j):

    p_{ij} = **penalizarea de separare** = pentru plasarea lui i și j în regiuni diferite (unul în foreground și altul în background)

Segmentarea imaginilor

Delimitare regiuni foreground/background –

- **Se cere** o partiţionare a pixelilor în două mulţimi F şi B (corespunzătoare pixelilor din foreground/backgroud) care să maximizeze

$$q(F,B)=\sum_{i\in F} f_i+\sum_{i\in B} b_i-\sum_{\substack{ij\in E\\ |F\cap\{i,j\}|=1}} p_{ij}$$

Segmentarea imaginilor

Delimitare regiuni foreground/background –

- **Avem**

$$q(F,B) = \sum_i (f_i + b_i) - \sum_{i \in F} b_i - \sum_{j \in B} f_j - \sum_{\substack{ij \in E \\ |F \cap \{i,j\}|=1}} p_{ij}$$

Segmentarea imaginilor

Delimitare regiuni foreground/background –

- **Avem**

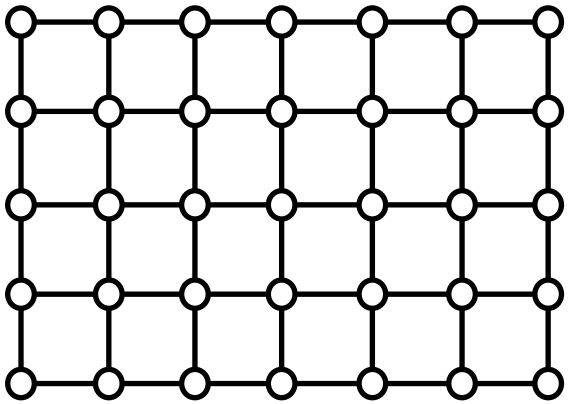
$$q(F,B) = \sum_i (f_i + b_i) - \sum_{i \in F} b_i - \sum_{j \in B} f_j - \sum_{\substack{ij \in E \\ |F \cap \{i,j\}|=1}} p_{ij}$$

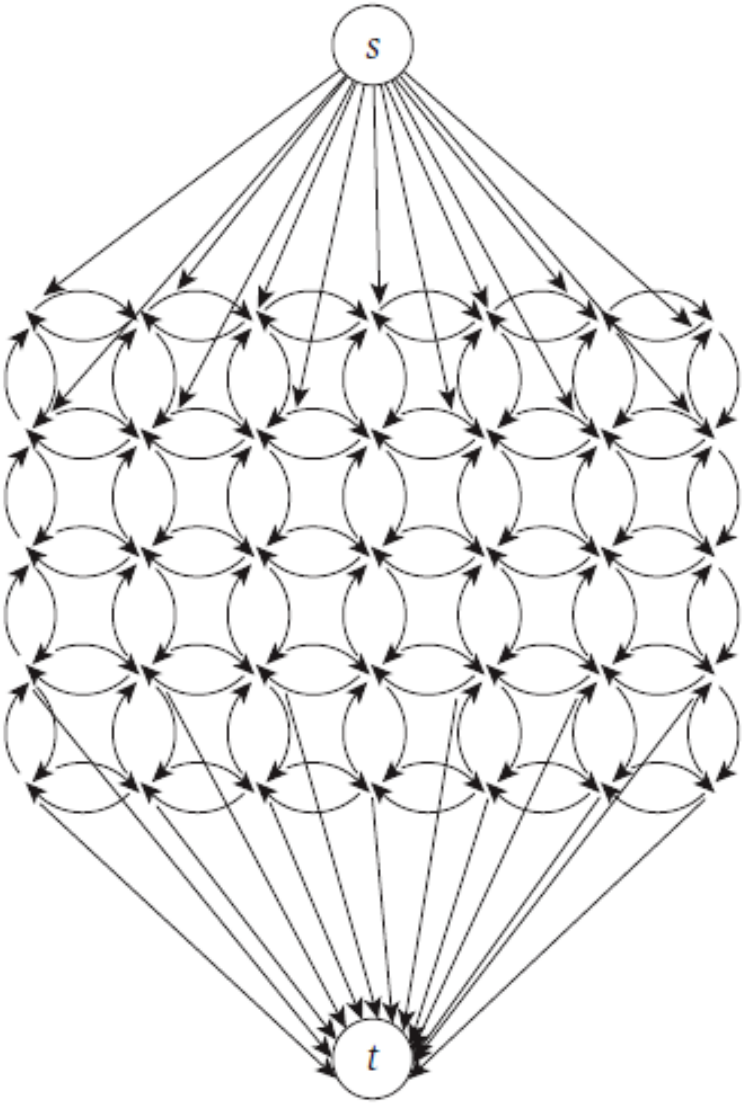
- **Problema se reduce la a minimiza**

$$r(F,B) = \sum_{i \in F} b_i + \sum_{j \in B} f_j + \sum_{\substack{ij \in E \\ |F \cap \{i,j\}|=1}} p_{ij}$$

Segmentarea imaginilor

Asociem problemei o reţea N

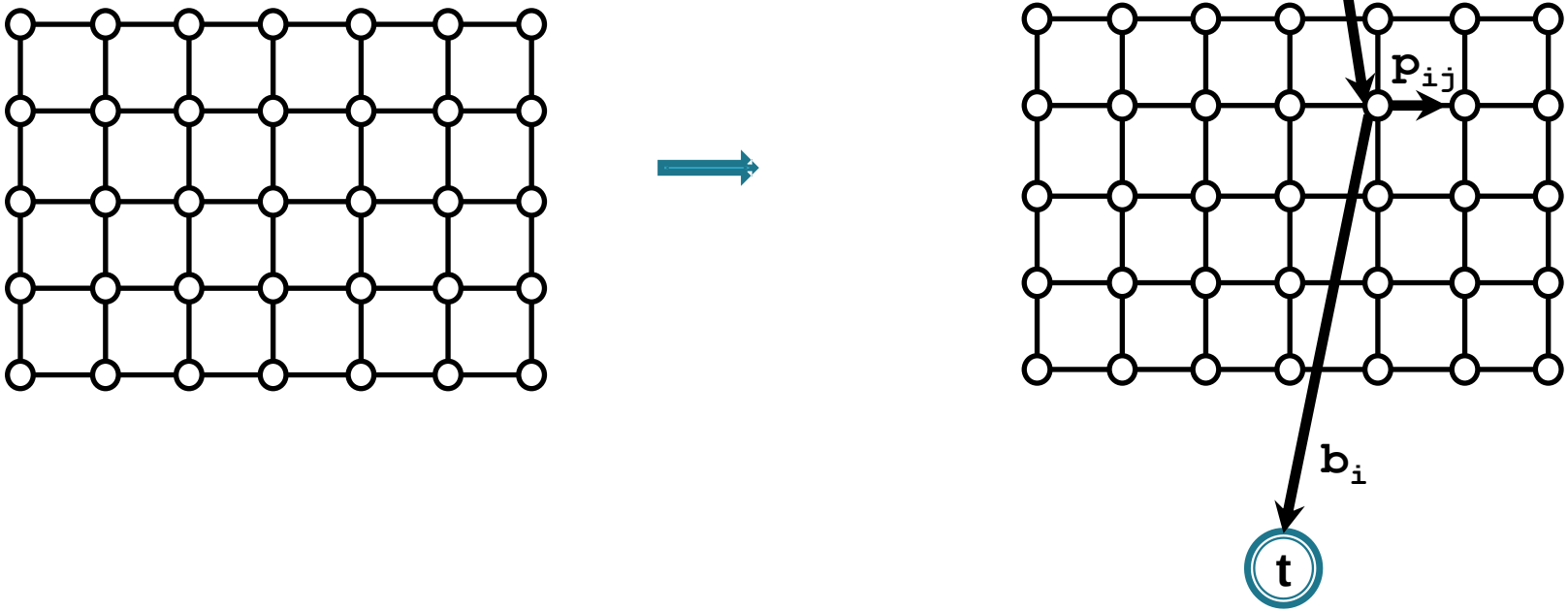




Jon Kleinberg, Éva Tardos, **Algorithm Design**, Addison-Wesley 2005

Segmentarea imaginilor

Asociem problemei o reţea N

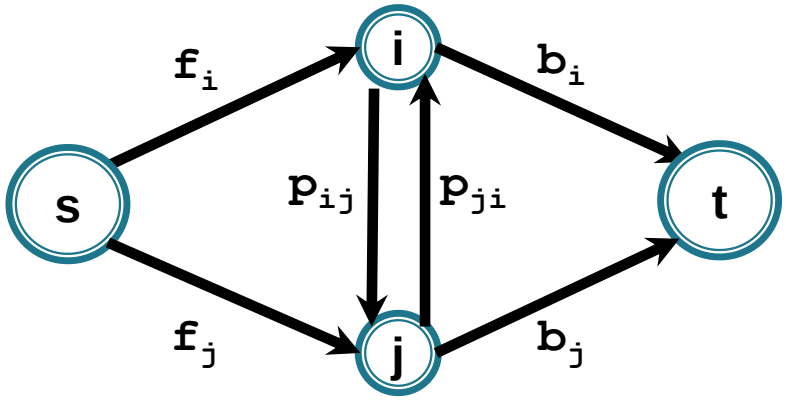


Segmentarea imaginilor

Delimitare regiuni foreground/background –

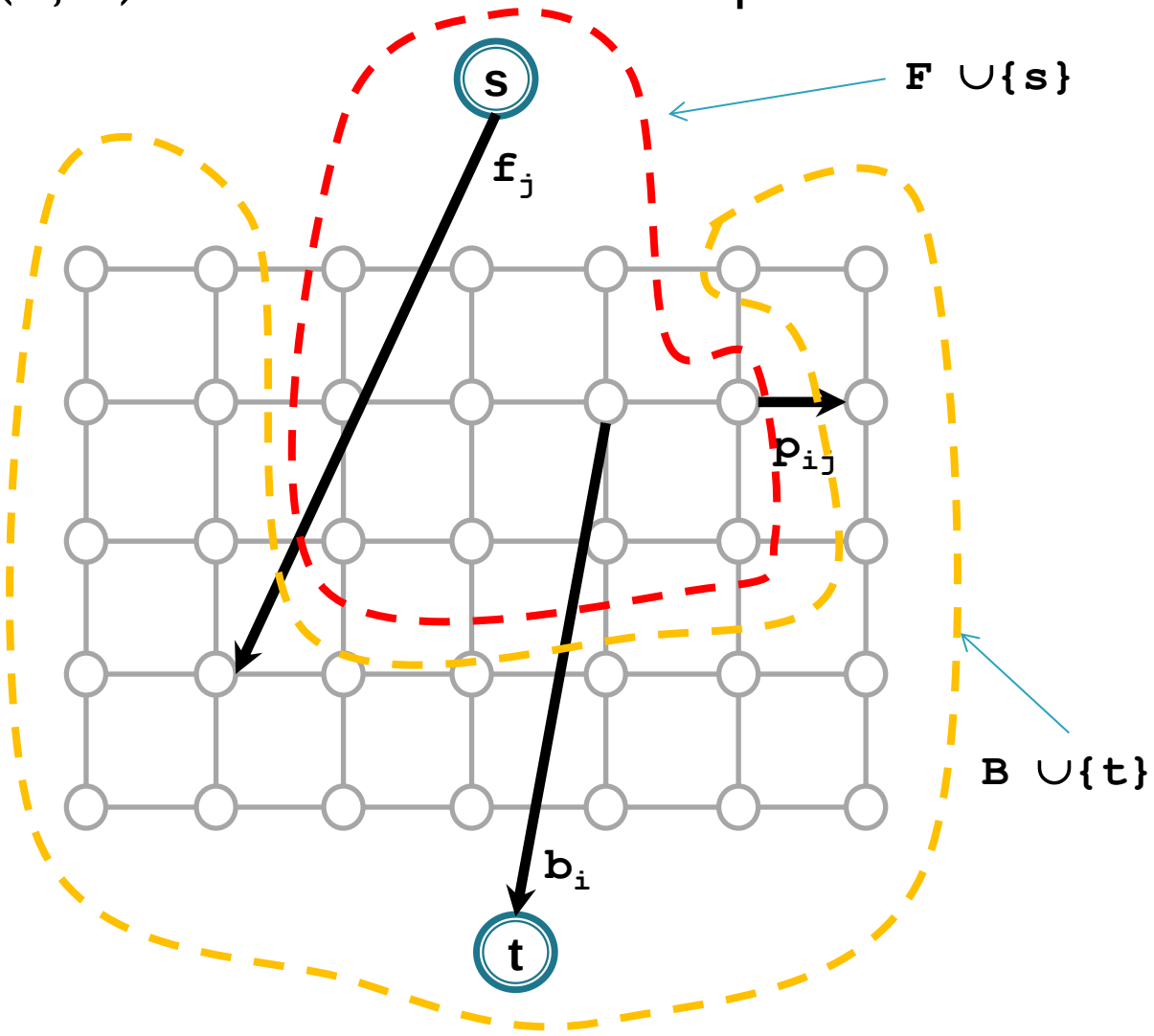
- Rețeaua N
  - noduri noi s, t
  - arce si, $c(si) = f_i$ pentru orice i
  - arce it, $c(it) = b_i$ pentru orice i
  - se înlocuiește muchie ij cu 2 arce

$$c(ij) = c(ji) = p_{ij}$$



Segmentarea imaginilor

Pentru K = (X, Y) tăietură în N avem capacitatea:



Segmentarea imaginilor

Pentru K = (X, Y) tăietură în N, F = X – {s}, B = Y – {t} avem

$$c(X, Y) = ?$$

Segmentarea imaginilor

Pentru K = (X, Y) tăietură în N, F = X – {s}, B = Y – {t} avem

$$c(X,Y) = \sum_{i \in F} c(it) + \sum_{j \in B} c(sj) + \sum_{\substack{ij \in E \\ |F \cap \{i,j\}|=1}} c(ij) =$$

Segmentarea imaginilor

Pentru K = (X, Y) tăietură în N, F = X – {s}, B = Y – {t} avem

$$c(X,Y) = \sum_{i \in F} c(it) + \sum_{j \in B} c(sj) + \sum_{\substack{ij \in E \\ |F \cap \{i,j\}|=1}} c(ij) =$$

$$= \sum_{i \in F} b_i + \sum_{j \in B} f_j + \sum_{\substack{ij \in E \\ |F \cap \{i,j\}|=1}} p_{ij} = r(F,B)$$

Segmentarea imaginilor

Concluzii

- Pentru K = (X, Y) tăietură în N cu F = X – {s}, B = Y – {t} avem

$$c(X,Y) = r(F,B)$$

Rezultă:

determinarea unei segmentări care maximizează măsura de performanţă q (adică a unei partiții (F,B) a mulțimii pixelilor cu r(F, B) minimă) ⇔

determinarea unei tăieturi (X, Y) de capacitate minimă:

F = X – {s}, B = Y – {t})