Geometrie 2.05.2018

Endomorfisme simetrice

C 10

$(E/\mathbb{R}, <,>)$ $f \in End(E)$ e simetric

dacă $<f(x), y> = <x, f(y)>$

Dacă $\{e_i\}$ e ortonormată

$$f(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$$

$$<f(e_i), e_j> = <e_i, f(e_j)>$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$<\sum a_{ki} e_k, e_j> = <e_i, \sum a_{kj} e_k>$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$\sum_k a_{ki} \delta_{kj} \qquad \sum a_{kj} \delta_{ik} \Rightarrow a_{ji} = a_{ij}$$

Deci:

Prop: f e endom. simetric $\Leftrightarrow$ matricea sa într-o bază ortogonată e simetrice

Obs: O asemenea matrice are numai val proprii reale

Prop: Vectorii proprii ai unor valori proprii distincte sunt ortogonali

Dem: $f(x) = \lambda x$, $f(y) = \mu y$ și $\lambda \neq \mu$

$\Rightarrow <x, y> = 0$

$$<x, f(y)> = <x, \mu y> = \mu <x, y>$$

$$\|$$

$$<f(x), y> = <\lambda x, y> = \lambda <x, y>$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} <x, y> = 0 \Rightarrow <x, y> = 0$$

P Dacă $U \subset E$ a.î. $f(U) \subseteq U$ atunci și $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$

Teoremă:

Fie $f \in End(E)$ un endom. simetric. Atunci există o bază ortonormată de vectori proprii (în particular f se diagonalizează în acea bază)

Dem: Fie λ val proprie, fie e_1 vector propriu $f(e_1) = \lambda e_1$.

Presupun $\|e_1\| = 1$

$\Rightarrow E_1 := e_1^{\perp}$ e subspațiu invariant $\Rightarrow f|_{E_1} \in End(E_1)$ și e tot simetric

$\dim E_1 = \dim E - 1$

Se iterează ...

Fie $b(x,y) := \langle f(x), y \rangle$

$\uparrow$ formă biliniară

$b(x,y) = b(y,x)$

$\rightsquigarrow q(x) = b(x,x)$

Corolar: Orice formă pătratică reală se poate aduce la forma canonică prin transformări ortogonale

Ex: $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$

$$q(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

1) Met. Gauss:

$x_1 = y_1 + y_2$

$x_2 = y_1 - y_2$

$x_i = y_i \quad i = 3,4$

$$q(y) = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_2y_3 - 4y_2y_4 + 2y_3y_4$$
$$= 2y_1^2 - 2(y_2^2 - 2y_2y_3 + 2y_2y_4) + 2y_3y_4$$
$$= 2y_1^2 - 2(y_2 \cancel{+} - y_3 + y_4)^2 + 2y_3^2 + 2y_4^2 - \cancel{4}\, 2y_3y_4$$

$z_2 = y_2 - y_3 + y_4$

$z_i = y_i \ , i = 1,3,4$

$q(z) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 2z_3^2 + 2z_4^2 - 2z_3z_4$

$= 2z_1^2 - 2z_2^2 + 2(z_3^2 - z_3z_4) + 2z_4^2$

$= 2z_1^2 - 2z_2^2 + 2\underbrace{(z_3 - \frac{1}{2}z_4)}_{u_3}^2 - \frac{1}{2}z_4^2 + 2z_4^2$

$u_3 = z_3 - \frac{1}{2}z_4$

$u_i = z_i \ , \ i = 1,2,4$

$q(u) = 2u_1^2 - 2u_2^2 + 2u_3^2 + \frac{3}{4}u_4^2$

2) $[q] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = [f]$

Calc. $P_f(x) = \det([f] - x \cdot I_4) = (x-1)^3(x+3)$

Calc. vect proprii pt $\lambda = 1$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x - y - z + t = 0$

Sol generală $(a, b, c, a-b-c)$, $\underbrace{a,b,c}_{\text{dim } 3} \in \mathbb{R}$ ← dim 3

Aleg o bază în acest subsp (coresp lui $\lambda = 1$)

$(1, 1, 0, 0)$
$(1, 0, 1, 0)$ nu e orton!
$(-1, 0, 0, 1)$

$\Rightarrow$ o ortonormez cu G-S (un alg.)

$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$

$e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$

$e_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Pt $\lambda = -3$

După ce normez obtin

$e_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Forma canonică: $q(v) = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 3v_4^2$

$\downarrow$

$\left((x-1)^3(x+3) \to 3 \text{ de } 1, \text{ un } -3\right)$

Spații afine

Fie $A \neq \emptyset$, V/K, $\varphi: A \times A \to V$

(A, V, φ) s.n. spațiu afin dacă

1) $\forall O \in A$, $\varphi_O: A \to V$, $\varphi_O(A) = \varphi(O, A)$ e bijecție

2) $\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$

$\underline{K^n}$ $A = K^n$, $V = K^n$

$\varphi: K^n \times K^n \to K^n$, $\varphi(x, y) = y - x$

2) $\varphi(x, y) + \varphi(y, z) = (y - x) + (z - y) = z - x = \varphi(x, z)$

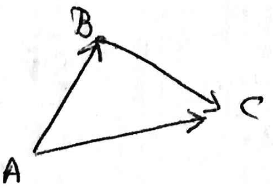
1) $O = (o_1, \dots o_n)$

$\varphi_O: K^n \to K^n$, $\varphi_O(x) = x - O = (x_1 - o_1, \dots, x_n - o_n)$

2) Generalizare:

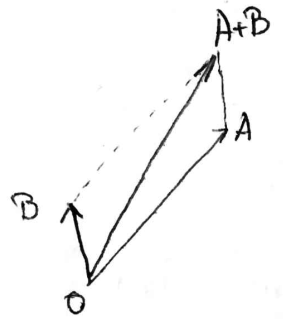
* V e sp. afin peste el însuși

Notație $\varphi(A,B) = \overrightarrow{AB}$



Obs: Cf. 1) pt fiecare $O \in \mathcal{A}$, $\exists!$ struct de sp. vect pe $\mathcal{A}$, cu originea O, a.î. $\varphi: \mathcal{A} \to V$ e izomorfism

$$A + B = \varphi_O^{-1}\left(\varphi_O(A) + \varphi_O(B)\right)$$



Ex. important

$A \in \mathcal{M}(m,n,K)$ $\quad B \in K^n$

$\mathcal{S}_{A,B} = \{X \in K^n \mid AX = B\}$

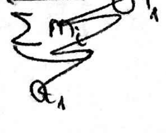
e spațiu afin peste $\mathcal{S}_A = \{X \in K^n \mid AX = 0\}$

$\varphi(X,Y) = Y - X$

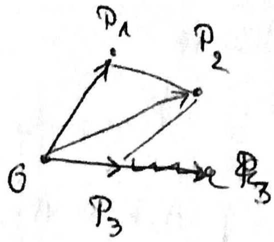
$$\begin{aligned} AX &= B \\ AY &= B \end{aligned} \;\mapsto\; A(Y-X) = 0 \Rightarrow Y - X \in S_A \;(=\mathcal{S}_A)$$

Combinație afină: $\sum_{i=1}^{k} a_i P_i = P \qquad \sum a_i = 1$

$\uparrow$ ponderi



Centrul de masă : $\dfrac{m_1 \overrightarrow{OP_1} + m_2 \overrightarrow{OP_2} + m_3 \overrightarrow{OP_3}}{m_1+m_2+m_3}$



$$\underbrace{\frac{m_1}{\sum m_i}}_{a_1} \overrightarrow{OP_1} + \underbrace{\frac{m_2}{\sum m_i}}_{a_2} \overrightarrow{OP_2} + \underbrace{\frac{m_3}{\sum m_i}}_{a_3} \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{m_1}{\sum m_i} P_1 + \frac{m_2}{\sum m_i} P_2 + \frac{m_3}{\sum m_i} P_3$$

$$\sum_1^k a_i P_i = P \quad \sum a_i = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum a_i \overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OP} \quad \forall O \in A$$

Obs ~~Co~~. pt 2 pct., $A \neq B$ scriem $aA + (1-a)B$

Def $\{P_1, \dots P_k\}$ e afin indep (dep) dacă $\{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \dots, \overrightarrow{P_1P_k}\}$ e indep (dep)

Obs: În loc de P_1, pot considera oricare P_i

Def $\dim A := \dim V$

Def $\{O; e_1, \dots e_n\}$ e reper cartezian dacă O ~~ct~~ și $\{e_1, \dots e_n\}$ bază în V

Dat $P \in A \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Dar $e_i = \overrightarrow{OP_i}$ (în mod unic pt că P_0 e bij)

$$\overrightarrow{OP} = \sum_i^k x_i \overrightarrow{OP_i} = (1 - \sum x_i) \overrightarrow{OO} + \sum x_i \overrightarrow{OP_i}$$

$$\Rightarrow P = (1 - \sum x_i) O + x_1 P_1 + \dots + x_n P_n$$

$(1 - \sum_1^n x_i, x_1, \dots x_n)$ coordonatele afine ale lui P în reperul afin $\{O, P_1, \dots P_n\}$

$\emptyset \neq S \subset \mathcal{A}$, $Af(S) = \{ \sum_{1}^{k} a_i P_i \mid \sum_{i=1}^{k} a_i = 1, k \in \mathbb{N}, P_i \in S \}$

Ex: $S = \{A, B\}$, $Af(A,B) = \{aA + (1-a)B \mid a \in \mathbb{R}\}$
e dreapta AB

Af - închiderea afină

Def: $S \subset A$, S subsp. afin dacă $Af(S) = S$

$\operatorname{Car} K \neq 2$

T: $S \subseteq A$ e subsp af $\Leftrightarrow$ $\forall A \neq B$, $aA + (1-a)B \in S$ $\forall a \in K$

$\Leftrightarrow \forall P_i$, $i = \overline{1,k}$, $\forall a_i \in K$ $\sum a_i = 1$, $\sum a_i P_i \in S$

Obs S_i subspații, $i = 1, 2, \dots$ $\Rightarrow \bigcap S_i$ e subspațiu

Obs Dacă $S \subseteq A$ subspațiu, atunci $\forall O \in S$, ~~$\varphi_O : S \to$~~
$V_S := \{ \overrightarrow{OP} \mid P \in S \}$ e subsp vect

și $(S, \varphi|_{S \times S}, V_S)$ sp. afin

În particular: $\mathcal{S}_{A,B}$ e subsp. afin în K^n
$\overset{\shortparallel}{S_{A,B}}$