Alg C2
Pag 1

Algebră Cursul 2

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ ← problemă din cursul trecut. Momentan nerezolvat:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \text{ făcut}$$

$$\cos x \overset{?}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots = f(x)$$

$$\sin x \overset{?}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots = g(x)$$

$$f'(x) = -g(x)$$

$$g'(x) = f(x)$$

Consider $h(x) = \frac{f(x)}{\cos(x)}$ $\quad h'(x) = \frac{f'\cos x - f\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{-g(x)\cos x + f(x)\sin x}{(\cos x)^2}$

$$h''(x) = \frac{[-g'(x)\cdot\cos x + g(x)\cdot\sin x - g(x)\sin x + f(x)\cdot\cos x]\cdot(\cos x)^2 + (g(x)\cos x - f(x)\sin x)\cdot\underbrace{}_{2\cos x\sin x}}{\cos^4 x}$$

$$h''(x) = \frac{2\sin x}{(\cos x)^3}\cdot(-g(x)\cos x + f(x)\sin x)$$

$$h''(x) = h'(x)\cdot 2\,\mathrm{tg}\,x$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$$

$$\cos^{(n)} x = \begin{cases} \cos x, & n = 4k \\ -\sin x, & n = 4k+1 \\ -\cos x, & n = 4k+2 \\ \sin x, & n = 4k+3 \end{cases} \qquad \sin^{(n)} x = \begin{matrix} \sin x, & n = 4k \\ \cos x, & n = 4k+1 \\ -\sin x, & n = 4k+2 \\ -\cos x, & n = 4k+3 \end{matrix}$$

$f(x) = \cos x$: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$

$f(x) = \sin x$: $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} \dots$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

Alg C2
p. 2

Definiție

I $(R,+,\cdot)$ inel   NOTAȚIE: $U(R)=\{r\in R \mid \exists s\in R$ a.î. $r\cdot s = s\cdot r = 1\}$
↳ elem. inversabile ale inelului.

Ex: 1) $U(\mathbb{Z}[i]) = \{\pm 1, \pm i\}$

2) $U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]) = \{\pm(1+\sqrt{2})^m \mid m\in\mathbb{Z}\}$

unde $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$.

R este corp $\Leftrightarrow U(R)=R\setminus\{0\}$

II Dacă $(R,+,\cdot)$ inel. S se numește subinel dacă

$S\leq R$, $(S,+)$ grup $x\cdot y\in S\ \forall x,y\in S$
$1\in S$.

III $(R,+,\cdot)$ inel   ideal < stâng (a), drept (b), bilateral (c)

$I\subset R$, I se numește <u>ideal</u> dacă

1) $\forall x,y\in I \Rightarrow x-y\in I$

2) a) $\forall r\in R, \forall i\in R \Rightarrow r\cdot i\in I$

b) $\forall r\in R, \forall i\in R \Rightarrow i\cdot r\in I$

c) $\forall r\in R, \forall i\in R \Rightarrow \begin{cases} i\cdot r\in I \\ r\cdot i\in I\end{cases}$ și se notează $I\trianglelefteq R$

<u>Obs</u>: Dacă R este comutativ, noțiunile de ideal stâng, drept, bilateral coincid.

Ex: ~~$m\mathbb{Z}$~~ $m\mathbb{Z}\trianglelefteq\mathbb{Z}\quad\forall m\in\mathbb{N}^*$

$\forall I\trianglelefteq\mathbb{Z}\Rightarrow I=m\mathbb{Z}$ pt. un $m\in\mathbb{N}^*$.

Inelul de polinoame cu coeficienți într-un inel comutativ R $(R[X])$

$f=(f_0,f_1,f_2,\ldots,f(m),\ldots)\qquad f_j\in R\ \forall j\in\mathbb{N}\ \exists m_0$ a.î. $f_m=0\ \forall m\geq m_0$

$R[X]\ni g=(g_0,g_1,\ldots$

$R[X]\ni f+g=(f_0+g_0, f_1+g_1,\ldots,f_m+g_m,\ldots)$

$f\cdot g=(f_0 g_0, f_0 g_1+f_1 g_0,\ldots,\sum_{j=0}^{m} f_j g_{m-j}$

Asociem $(0,0,\ldots,0,\underset{m}{1},0,\ldots 0)\xrightarrow[\text{not.}]{} x^m$

<u>Obs</u>: $f=g\Leftrightarrow f_j=g_j\ \forall j\in\mathbb{N}$

$f\in R[X]$

$f(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_mX^m\quad a_j\in R\quad\forall j=\overline{0,m}$

ATENȚIE: Polinomul f nu este același lucru cu funcția polinomială asociată.

Ex: $R=\mathbb{Z}_6\quad f(X)=X^3-X$

$f(\bar{0})=\bar{0}\quad f(\bar{1})=\bar{0}\quad f(\bar{2})=\bar{0}\quad f(\bar{3})=0\quad f(\bar{4})=\bar{0}\quad f(\bar{5})=\bar{0}$

$f \in R[X]$

$\text{grad } f = \begin{cases} m, & \text{dacă } a_m \neq 0 \\ -\infty, & \text{dacă } f = 0 \end{cases}$

Ipoteză: nr rădăcini $\leq$ grad f nu este adevărat întotdeauna
$\neq f$

Def. $f \in R[X]$ $x_0 \in R$ s.m. rădăcină a polinomului f dacă $f(x_0) = 0$.

Proprietate: K corp.
$x, y \in K$, $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $y = 0$
Dem. Presupun că $x \neq 0 \xrightarrow{K \text{ corp}} \exists z \in K$ a.î. $x \cdot z = z \cdot x = 1$.
$x \cdot y = 0$.
$z \cdot (x \cdot y) = z \cdot 0 = 0$
$\|$ reguli de calcul inel
$(z \cdot x) y = 1 \cdot y = y$

Inelul de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ K
Teorema împărțirii cu rest:
$f, g \in K[X]$, $g \neq 0 \Rightarrow \exists q, r \in K[X]$ a.î. $f(X) = g(X) \cdot q(X) + r(X)$ și grad $r <$ grad g.
Demonstrație: Inducție după gradul lui f.
$f = 0$ aleg $q = r = 0$ grad $0 <$ grad $g \in N$
$0 = 0 \cdot g(x) + 0$

$f \neq 0$ Dacă grad $f <$ grad g aleg $q = 0$ $r = f$.
Presupun enunțul adevărat pentru grad $f = \{-\infty, 0, 1, \dots \text{grad } g - 1, \dots m\}$ unde $m \geq \text{grad } g - 1$. Vreau să demonstrez enunțul pentru $m+1$.
$f(X) = a_{m+1} X^{m+1} + \dots + a_1 X + a_0$ $a_{m+1} \neq 0$ $b_m \neq 0$
$g(X) = b_m X^m + \dots + b_1 X + b_0$, $m+1 \geq m$
Consider polinomul $h(X) = f(X) - \underbrace{g(X) \cdot X^{m+1-m} \cdot \frac{a_{m+1}}{b_m}}_{X^{m+1} \cdot a_{m+1}}$

Aplic ipoteza de inducție pentru h.
$h(X) = g(X) \cdot q_1(X) + r_1(X)$
$f(X) = \left[q_1(X) + X^{m+1-m} \cdot \frac{a_{m+1}}{b_m}\right] \cdot g(X) + r_1(X)$
$q(X) = q_1(X) + X$

Alg C2
pag 4

$\frac{x^{11}-1}{x-1} = x^{10} + x^{9} + \dots + x + 1 = (x^2+2)\cdot g(x) + ax + b$

$x = i\sqrt{2}$ $\quad (i\sqrt{2})^2 = -2$

$ai\sqrt{2} + b =$

$(i\sqrt{2})^{2k} = (-1)^k \cdot 2^k = (-2)^k$

$ai\sqrt{2} + b = ci\sqrt{2} + d \Rightarrow \begin{matrix} a=c \\ b=d \end{matrix}$

$ai\sqrt{2} + b = \frac{(i\sqrt{2})^{11} - 1}{i\sqrt{2}-1} = \frac{-i\sqrt{2}\cdot 2^5 - 1}{i\sqrt{2}-1} = \frac{(i\sqrt{2}\cdot 32 - 1)(-1 - i\sqrt{2})}{3} = \frac{1 - 64 + i\sqrt{2}(1+32)}{3} =$

$= -21 + 11 i\sqrt{2} = ai\sqrt{2} + b \Rightarrow a = 11 \quad b = -21$

Consecință: $g(x) = x - a \quad a \in K \quad f \in K[x]$

K corp comutativ $\quad f(x) = g(x)(x-a) + b \quad$ ~~$b \in K$~~ $b \in K$

Prop: $a \in K$ este rădăcină pentru $f \Leftrightarrow f(x) = g(x)\cdot(x-a) \quad g \in K[x]$

Teoremă: K corp comutativ, $f \in K[x]$, grad $f = n \geq 1$ $\Big\} \Rightarrow$ nr rădăcini ale lui f este $\leq$ grad $f = n$

Dem: Inducție după n.

$n=1$ $\quad f(x) = ax + b$. f are doar o rădăcină $x = -\frac{b}{a}$ (A)

Presupun enunțul adevărat pt n și demonstrez pt $n+1$

$f \in K[x]$ $\quad$ Cazul 1:

grad $f = n+1$ $\quad$ Dacă f nu are rădăcini $\Rightarrow$ nr răd $= 0 < n+1 =$ grad $f \to$ ok

Cazul 2: când $\exists a \in K$ rădăcină pentru f

Folosesc propoziția de mai sus $\Rightarrow f(x) = (x-a)\cdot g(x) \quad$ grad $g = n$

Fie b rădăcină pt $f \Rightarrow f(b) = 0 = (b-a)\cdot g(b) \xRightarrow{\text{obs}} b - a = 0$ sau $g(b) = 0$
$\qquad b = a$

$\Rightarrow \{$rădăcinile lui $f\} = \{a\} \cup \{$rădăcini $g\}$

Aplic ipoteza de inducție $\Rightarrow$ nr rădăcini $g \leq n \Rightarrow$ nr răd $f \leq n+1$.

Obs: K corp comutativ, $f, g \in K[x]$ $\Big\} \Rightarrow$ grad $f\cdot g =$ grad $f +$ grad g.

Exemplu de corp necomutativ:

$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$

$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad i\cdot j = k \quad j\cdot k = i \quad k\cdot i = j \quad j\cdot i = -k \quad k\cdot j = -i \quad i\cdot k = -j$

$a + bi + cj + dk = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$, $a,b,c,d, a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = a_1 \\ b = b_1 \\ c = c_1 \\ d = d_1 \end{matrix}$

$x^2 = -1$ se văd 3 rădăcini. Există o infinitate.