23. februarie 2017

Geometrie

1. Spații vectoriale
2. Spații vectoriale euclidiene
3. Spații afine

Curs 1

1. Spații vectoriale

Def: $V \neq \emptyset$; K - corp comutativ

„+": $V \times V \to V$ adunarea vectorilor

$(v_1, v_2) \to v_1 + v_2$ (op. internă)

„·": $K \times V \to V$ înmulțirea vectorilor cu scalar (op. externă)

$$\begin{cases} \text{I. } (V, +) \text{ grup abelian} \\ \text{II. a) } \alpha(v_1+v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2 \\ \quad \text{b) } (\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v \\ \quad \text{c) } (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \\ \quad \text{d) } 1 \cdot v = v \end{cases} \qquad \forall\, \alpha, \beta \in K,\ v_1, v_2, v \in V$$

$(V/K, +, \cdot)$ spațiu vectorial peste corpul comutativ K

$v \in V$ vectori $\qquad$ $\kappa \in K$ scalari

$K = \mathbb{R} \to$ spațiu vectorial real

$K = \mathbb{C} \to$ spațiu vectorial complex

EXEMPLE: 1) $\forall$ corp com. $K \to$ sp. vectorial peste K

$(K/K, +, \cdot)$

$H \subseteq K$ subcorp $\Rightarrow (K/H, +, \cdot)$ sp. vect. peste H

$\mathbb{C}/\mathbb{R}$, $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$

2. $K^n = \underbrace{K \times K \times \dots \times K}_{n \text{ ori}}$

$+ : K^n \times K^n \to K^n$ (adunare vect)

$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \to (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$\cdot : \underbrace{K}_{\alpha} \times K^n \to K^n$ (înm. cu scalar)

$\alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) \to (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

$(K^n/K, +, \cdot)$ spațiu vectorial peste K

$K = \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n/\mathbb{C}$ sp. vectorial complex

$K = \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ – sp. vect. real

$n = 2$

$\boxed{n = 3}$

3. $\mathcal{M}_{(m,n)}(K) \to$ mulț. matricilor de tipul (m,n) cu elem. din K

$+ : \mathcal{M}_{(m,n)}(K) \times \mathcal{M}_{(m,n)}(K) \to \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ $\quad i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ $\quad$ adunare matrice

$\cdot : \cancel{\mathcal{M}_{(m,n)}(K)}\ K \times \mathcal{M}_{(m,n)}(K) \to \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$ $\quad$ înmulțire cu scalar

$\underset{\alpha}{K} \ni$: $\alpha A = (\alpha a_{ij})$ $\quad i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$

$(\mathcal{M}_{(m,n)}(K)/K, +, \cdot)$ sp. vect. peste K

4. $K[X]$ - mulț. pol. în nedet. X
cu coef în K

$(K[X]/K, +, \cdot)$ sp vectorial peste K

$K_n[X] = \{ p \in K[X] /$ grad $P \leq n \}$ pol. de grad cel mult n
$(K_n[X]/K, +, \cdot)$ sp. vectorial peste K

Liniar independență. Liniar dependență. Sisteme de generatori

<u>Def</u>: Fie V/K sp. vectorial peste K
$S = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$

- S s.n. <u>spațiu vectorial liniar indep.</u> dacă:

$\forall \ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$

$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m}_{\text{comb. liniară a vect.}} = 0_V \quad \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0_V$

$v_1, \ldots, v_2$ cu scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$

- S s.n. spațiu vectorial liniar indep. dacă $\forall$ comb. liniară nulă se realizează <u>numai</u> cu scalari nuli

<u>Obs</u>: 1. Dacă $v \neq 0_V \Rightarrow \{v\}$ s.n. liniar independent
2. $\forall$ subsistem nevid al unui s.v. lin. ind. este s.v. lin. ind.

<u>Def</u>: Fie V/K sp. vectorial:

$S = \{v_1, \ldots, v_n\}$

S - s.v. lin. dep. dacă nu este lin. indep
S - s.v. lin. dep. dacă $(\exists)$ comb. lin. nulă care se realiz. cu ...

Sist. de generatori

Def: Fie V/K sp. vect. peste K

$S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$

S - s.n. sistem de generatori pt. V dacă :

- $(\forall)\ v \in V$, $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_m =$
$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot v_k$

Un sp. vect. care admite un sist. de generatori finit

$\mathbb{R}^n/\mathbb{R} \to$ sp. vect. finit generat

$\mathbb{R}[X]$ - nu e finit generat

Baze. Coordonate.
Scheme de reper (coord)

Def: Fie V/K sp. vectorial

$\mathcal{B} \subset V$ s.n. **bază** dacă $\begin{cases} 1. \text{ s.v. lin. ind.} \\ 2. \text{ sist. de generatori} \end{cases}$
s.v.

O bază ord. s.n. reper (vectorial)

Exemple :

1. $(\mathbb{R}^n/\mathbb{R}, +, \cdot)$ sp. vectorial

$\mathcal{B}_0 = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots\ e_i = (0, 0, \dots, \underset{(i)}{1}, \dots 0)$

$e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$

$\mathcal{B}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$

baza canonică a sp. vect. $\mathbb{R}^n$

2. $\left(\mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{R})/\mathbb{R}, +, \cdot\right)$ sp. vect.

$B_0 = \{ E_{ij} \}$ $\begin{matrix} i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n} \end{matrix}$ unde $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \boxed{1} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

baza canonică a sp. vect $\mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{R})/\mathbb{R}$

3. $\left(\mathbb{R}[X]/\mathbb{R}, +, \cdot\right)$ sp. vect.

$B_0 = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$

$\left(\mathbb{R}_n[X]/\mathbb{R}, +, \cdot\right)$ sp. vect.

$B_0 = \{1, X, \dots, X^n\}$

bază canonică

4. $\left(\mathbb{C}/\mathbb{R}, +, \cdot\right)$

$B_0 = \{1, i\}$

bază canonică

$B_1 = \{1-i, 1+i\}$

bază oarecare

Def (echivalentă): Fie V/K sp. vect. finit generat

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V$

Atunci: $\forall\, v \in V$, $\exists!\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_m$

! —— $[v]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \rightarrow$ coord. vect. v în raport cu baza B ord (în reperul B)

Obs: $\underset{\text{bază}}{B \subset V} \Rightarrow \begin{cases} ① \ B \text{ s.v. lin. ind.} \\ ② \ B \text{ sist. de gen.} \end{cases}$

② $\Rightarrow \forall \ v \in V \ \exists \ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K$ a.î.

$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$

Scrierea lui v este unică (rezultă din ①)

Pp. $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$, $\beta_i \in K$

$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0 \xRightarrow{①} \alpha_i - \beta_i = 0 \ \forall \ i = \overline{1,m} \Rightarrow$

$\alpha_i = \beta_i \ \forall \ i = \overline{1,m} = 0$!

Th. schimbului:

Fie V/K sp. vectorial finit generat

$A = \{f_1, \dots, f_r\}$ s.v. lin. ind.

$G = \{g_1, \dots, g_s\}$ sist. de gen.

Atunci: $r \leq s$ $\exists \ A' \subset G$ a.î. $A \cup A' = \underset{\text{baze}}{B \subset V}$

Teoremă:

1. $(\forall)$ sp. vect. are mai multe baze
2. $(\forall)$ 2 baze ale aceluiași sp. vect. au același nr. de elem.

Nr. comun de elem al tuturor bazelor unui sp. vect. reprez. dimensiunea sp. vect. respectiv;

Fie $\underset{\text{baza}}{B_1, B_2 \subset V}$ $\qquad \dim_K V = \text{card } B$, $\underset{\text{baza}}{B \subset V}$

card B_1 = card B_2

Dimensiunea unui sp. vectorial

Exemple:

1. $\mathbb{R}^n / \mathbb{R}$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$

2. $\mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{R}) / \mathbb{R}$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{R}) = m \cdot n$

3. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X] = +\infty$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[X] = n+1$

4. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$

PROPRIETĂȚI:

P_1. Fie V/K sp. vect. finit generat, n-dim. Atunci:

1) $\forall$ s.v. lin. ind. are cel mult n vect.

2) $\forall$ sist. de gen. are cel puțin "n" vectori

P_2. Fie V/K sp. vect. finit gen. $\dim_K V = n$ UASE

1) S sv. lin indep.

2) S sist de generatori pt. V

3) S bază pt. sp. vect. V

Schimbarea de reper

V/K - sp. vect. finit gen.; $\dim_K V = n$

Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\}$

$B' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ 2 repere pe V/K

Fie $x \in V$ arbitrar : $[x]_B = (x_1, \dots, x_n)$
$[x]_{B'} = (x_1', \dots, x_n')$

Avem $e_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \quad \forall i = \overline{1,n}$

$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ → matrice de trecere de la B la B' (matr. sch. de reper)

$B \xrightarrow{A} B'$

$\longleftarrow$

Fie A' - m. de trecere de la B' la B $\Rightarrow e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}' \cdot e_j'$

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}' \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot e_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot a_{ji}'\right) e_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{ki} e_k$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot a_{ji}' = \delta_{ki} \quad (*)$$

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } k = i \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$(*) \Rightarrow A' = A^{-1}$

În concluzie, matricea sch. de reper este nedegenerată:

și $B \xrightarrow{A} B' \Rightarrow B' \xrightarrow{A^{-1}} B$

02. Martie 2017

Seminar 1

Def: $(K,+,\cdot)$ e corp comutativ dacă $(K,+)$ e grup comutativ și $(K^*,\cdot)$ e grup comutativ

ex. $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ p prim

$\Big(\forall x \in \mathbb{Z}_p,\ \hat{x} \neq \hat{0},\ \exists\ \hat{y}$ a. î. $\widehat{xy} = \hat{1}$

$(x,p) = 1 \xRightarrow[\text{lui Euclid}]{\text{Alg.}} \exists\ y, w \in \mathbb{Z}$ a. î.

$xy + pw = 1 \Rightarrow \widehat{xy} + \cancel{\widehat{pw}} = 1\Big)$

Def: $V \neq \emptyset$

$(V,+)$ grup abelian

$(K,+,\cdot)$ corp comutativ

V s. n. K - sp. vect. (sp. vect. peste K) dacă $\exists$:

$\cdot : K \times V \to V$ cu prop:

1. $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$, $\forall\ \alpha \in K$, $v, w \in V$
2. $(\alpha+\beta)\cdot v = \alpha\cdot v + \beta\cdot v$, $\forall\ \alpha,\beta \in K$, $v \in V$
3. $1_K \cdot v = v$, $\forall\ v \in V$
4. $\alpha\cdot(\beta\cdot v) = (\alpha\beta)\cdot v$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $v \in V$

$$\boxed{0_K \cdot v = 0_V}$$

(2) $(0_K + 0_K)\cdot v = 0_K \cdot v + 0_K \cdot v$

$\cancel{0_K \cdot v} = \cancel{0_K \cdot v} + 0_K \cdot v$

$0_V = 0_K \cdot v$

$\boxed{(-1_K)\cdot v = -v}$

~~dem~~ Am arătat că $0_K \cdot v = 0_V$

deci

din (2) $\Rightarrow \underbrace{(1_K + (-1_K))}\cdot v = 1_K \cdot v + (-1_K)\cdot v$

$0_K \cdot v = 1_K \cdot v + (-1_K)\cdot v$

deci $0_V = 1_K \cdot v + (-1_K)\cdot v$

din (3) $\Rightarrow$ $0_V = v + (-1_K)\cdot v$

$-v = (-1_K)\cdot v$

Exemple. ① $(\mathbb{R}, +)$ este spațiu vect. peste $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a \cdot b = ab$

Arătăm ①, ②, ③, ④

$(\mathbb{R}^n, +)$ este s.v. peste $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

1) $(\mathbb{R}^n, +)$ e grup abelian

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

2) $\cdot \; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$t \cdot (x_1, \dots, x_n) = (tx_1, \dots, tx_n)$

② K^n este s.v. peste K $\quad ((K,+,\cdot)$ e un corp$)$

$K^n = \{(k_1, \dots, k_n) \mid k_i \in K\}$

$(k_1, \dots, k_n) + (g_1, \dots, g_n) = (k_1 + g_1, \dots, k_n + g_n)$

1) $(K^n, +)$ e gr. abelian

2) $\cdot : K \times K^n \to K^n$

verif ①, ②, ③, ④

Obs: $(V,+)$ este spațiu vectorial peste $(K,+,\cdot)$ și $(L,+,\cdot)$ este un subcorp al lui $(K,+,\cdot)$ atunci $(V,+)$ este s.v. peste $(L,+,\cdot)$

③ $M_n(\mathbb{R})$ este spațiu vect. peste $\mathbb{R}$

1) $(M_n(\mathbb{R}), +)$ e grup abelian

2) $\cdot : \mathbb{R} \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$

$$t \cdot \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cdot & \cdots & t\cdot \\ t\cdot & \cdots & t\cdot \end{pmatrix}$$

④ $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ integr. / cont. / deriv $\}$

este V sp. vect. peste $\mathbb{R}$?

1) $(V,+)$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

2) $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

$(t \cdot f)(x) = t \cdot f(x)$

⑤ $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 0 \}$

Este V sp. $/\mathbb{R}$?

$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 \Rightarrow (V,+)$ gr. abelian

• $\mathbb{R} \times V \to V$

$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$

$(\alpha f)(0) = \alpha \cdot 0 = 0$

Verif. 1, 2, 3, 4

⑥ $V = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv. și $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$(V,+)$ gr. abelian

$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

$\alpha \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha \cdot a_n)$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \Rightarrow (\alpha \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$

Se verif 1, 2, 3, 4

Pr 1: Este $(\mathbb{R},+)$ spațiu vectorial peste $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$?

$\cdot : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Pr 2: Este adevărat că $\forall$ ar fi $(V,+)$ grup ab., există $(K,+,\cdot)$ a.î. $(V,+)$ este s.v. peste K?

Exc: 1: $\mathbb{R}_{>0} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$

$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ e grup abelian

Este $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ sp. vect. peste $(\mathbb{R}, +, \cdot)$?

Dem: Ne trebuie $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ care verifică ①, ②, ③, ④

$t * x = x^t$

① $\alpha * (v \cdot w) = \alpha * v \cdot \alpha * w$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathbb{R}_{>0}$

$\alpha * (v \cdot w) = (v \cdot w)^\alpha = v^\alpha \cdot w^\alpha = \alpha * v \cdot \alpha * w$

② $1 * v = v$

$v^1 = v$

③ $(\alpha + \beta) * v = \alpha * v \cdot \beta * v$

$(\alpha + \beta) * v = v^{\alpha + \beta} = v^\alpha \cdot v^\beta = (\alpha * v) \cdot (\beta * v)$

④ $\alpha * (\beta * v) = (\alpha \beta) * v = v^{\alpha \beta}$

Def: $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ s.n. sistem liniar independent dacă $\forall$ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ cu $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k = 0_V \Rightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$

ex: $(\mathbb{R}^n, +)$ este s.v$/\mathbb{R}$

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$

$\vdots$

$e_n = (0, \dots, n)$

Arătăm că $\{e_1, \dots, e_m\}$ s. l. i.

Fie $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ a.î. $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n \cdot e_n =$
$= (0, 0, \dots, 0)$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_m \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

Obs 1: $S' \subseteq S$ și S este un s. l. i. în $(V, +)/K$
Atunci S' este s. l. i.

$S = \{v_1, \dots, v_K\} = \{v_1, \dots, v_x, v_{x+1}, \dots, v_K\}$
$S' = \{v_1, \dots, v_x\}$, $x < K$

Fie $\lambda_1, \dots, \lambda_x \in K$ a.î. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_x \cdot v_x = 0_V$

$\overset{\{v_1,\dots,v_K\}\ SLI}{\Longrightarrow}$ $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_x = 0 \Rightarrow$

$\{v_1, \dots, v_x\}$ e SLI

Def: $S \subseteq V$ s.n. sist. de gen. dacă $\forall v \in V, \exists v_1, \dots, v_k \in S$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ a. î. $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k$

Obs: V e s.g. pt. V

Exc: $(\mathbb{R}^n, +)$ $\quad \mathbb{R}$ s.v.

$\{e_1, \dots, e_n\}$ este sist. de gen pt. $(\mathbb{R}^n, +)$

Fie $v \in \mathbb{R}^n$

$$v = (v_1, \dots, v_n), \quad v_i \in \mathbb{R}$$

Vreau să arăt că $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ a.î.

$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$

Aleg $\lambda_1 = v_1, \lambda_2 = v_2, \dots, \lambda_n = v_n$

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v$$

$\Rightarrow \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ e s.g.

<u>Obs</u>: Fie S s.g. pt. V/K

$S' \supseteq S$. Atunci S' este s.g.

<u>Obs</u>: • S - s.l.i.: $|S| \leq \dim_K V$

• S s.g. : $|S| \geq \dim_K V$

<u>Exc</u>: $(\mathbb{R}^3, +)$

$v_1 = (1, 2, 3)$

$v_2 = (7, 9, 12)$

$v_3 = (0, 0, 1)$

Verif dacă $\{v_1, v_2, v_3\}$ e sli.

Fie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ a.î.

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$
$$\lambda_1 + 7\lambda_2 = 0$$
$$2\lambda_1 + 9\lambda_2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 12 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A \neq 0$$

Criteriu $S = \{v_1, \dots, v_k\}$

Vrem să verif. dacă S este s.l.i. :

① Verif. dacă $k \leq \dim_K V$

dacă $k > \dim_K V \Rightarrow S$ nu e sli.

② dacă $k \leq \dim_K V$

$$rg \left(v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, v_k \right)$$

dacă $rg(v_1 | v_2 | \dots | v_k)$ este maxim $\Rightarrow S$ e sli

Curs 2

Spații vectoriale - schimbări de reper

Fie V/K sp. vect. peste K finit generat, $\dim_K V = n < \infty$

$B = \{e_1, \dots, e_n\}$

$B' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ } 2 repere vect. pe V/K

Fie $x \in V$ arbitrar $\quad [x]_B = (x_1, \dots, x_n)$

$[x]_{B'} = (x_1', \dots, x_n')$

$$e_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot e_j \,, \quad \forall\, i = \overline{1,n}$$

$A = (a_{ij})\quad i,j = \overline{1,n}$ $\longrightarrow$ matricea de trecere de la rep B la B'

$$B \xrightarrow{A} B' \qquad \det A \neq 0$$

$$\xleftarrow[A' = A^{-1}]{}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i' \cdot e_i' = \sum_{i=1}^{n} x_i' \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot e_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i' \right)$$

$$\| \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j \implies \boxed{x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot x_i' \,, \forall\, j = \overline{1,n}}$$

(*) form. sch. de coord.

Scriere matriceală

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

(*) $\quad X = AX'$

Proprietate: Dacă $B \xrightarrow{A} B' \xrightarrow{A'} B''$

Atunci $B \xrightarrow{A \cdot A'} B''$ $\qquad B'' = \{e_1'', \dots, e_n''\}$).

Dem: $X = AX'$ $\quad B \xrightarrow{A} B'$

$$X'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ \vdots \\ x_n'' \end{pmatrix}$$

$B' \xrightarrow{A'} B''$

$X' = A' \cdot X''$

Avem $X = (A \cdot A') \cdot X'' \Rightarrow B \xrightarrow{A \cdot A'} B''$

$B \leftarrow B''$

$(A \cdot A')^{-1} = A'^{-1} \cdot A^{-1}$

Obs: 1) $(K^n / K, +, \cdot)$ sp. vect peste K

$B_0 = \{e_1, \dots, e_n\} \subset K^n$

reperul canonic

$B = \{f_1, \dots, f_n\}$

Atunci: $B_0 \xrightarrow{A} B$, unde $A = \begin{pmatrix} \boxed{f_1} & \boxed{f_2} & \dots & \boxed{f_n} \end{pmatrix}$

coord vect. baza B

în rep. canonic B_0

2) ~~Dacă B_0~~ $\quad B_0 \xrightarrow{A_{01}} B \underset{A^{-1}}{\overset{A}{\rightleftarrows}} B'$, $\quad B_0 \xrightarrow{A_{02}} B'$

Avem: $A_{01} \cdot A = A_{02} \mid A_{01}^{-1} \Rightarrow A = A_{01}^{-1} A_{02}$

$A^{-1} = A_{02}^{-1} \cdot A_{01}$

Subspații vectoriale

Fie V/K s.p. vect. peste corpul com. K

Def: $\underset{\neq \emptyset}{U} \subseteq V$. U s.n. subsp. vect. al lui V dacă:

$$\begin{cases} (1) \ \forall u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U \\ (2) \ \forall \alpha \in K, \forall u \in U \Rightarrow \alpha u \in U \end{cases}$$

Obs: $\forall$ subsp. vect. este la rândul lui sp. vect. mai mic în sensul rel. de $\subset$.

Exemple:

1) $\{0_V\}$, $V \subseteq V$

2 subsp. triviale a lui V

2) $K^m \subseteq K^n$, $m \leq n$

$(x_1, \ldots, x_m, \underset{m+1}{0}, \ldots \underset{n}{0})$ caz part $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$

$\mathbb{C}^m \subseteq \mathbb{C}^n$

3) $\underset{n+1}{K_n[X]} \subset \underset{+\infty}{K[X]}$ C.P. $\mathbb{R}_n[X] \subseteq \mathbb{R}[X]$

4) $(\mathcal{M}_n(K)/_K, +, \cdot)$ sp. vect.

$\mathcal{M}_n^s(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid A^t = A\} \subset \mathcal{M}_n(K)$

mț. matricelor sim.

$\mathcal{M}_n^a(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid A^t = -A\} \subset \mathcal{M}_n(K)$

mț. mat. antisim.

$\mathcal{M}_n^d(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid A = \lambda I_n\} \subset \mathcal{M}_n(K)$

mț. mat diagonale $\lambda \in K$

$\mathcal{M}_n^{tr}(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid Tr\, A = 0\} \subseteq \mathcal{M}_n(K)$

5) Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$

$S(A) = \{ X \in K^n \mid AX = 0 \}$

mț. sol unui sist lin. și omogen

$S(A) \subset K^n$ subsp. vect.

Prop. (def. echiv) Fie V/K sp. vectorial

$U \subset V \iff [(\forall)\, u_1, u_2 \in U,\ \alpha_1, \alpha_2 \in K \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U]$

DEM: "$\Rightarrow$"

Fie $u_1, u_2 \in U \Rightarrow \alpha_1 u_1 \in U,\ \alpha_2 u_2 \in U \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in U$

"$\Leftarrow$" Luăm $\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$ (1)

$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 = \alpha \in K \\ \alpha_2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha u_1 \in U$ (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow U \subset V$ subsp. vect.

OPERAȚII CU SUBSPAȚII VECTORIALE

1. $\cap$ sspții vect = ssp. vect.

$\boxed{P}$. Intersecția subsp. vect ale unei fam de sspații vect ale lui V $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, este un subsp. vect a lui V

DEM: $\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha \subset V$ Fie $x, y \in \bigcap_{\alpha \in I} U \Rightarrow x, y \in U_\alpha,\ \forall \alpha \in I$

$k_1, k_2 \in K$

$\overset{\boxed{P}}{\Rightarrow} k_1 x + k_2 y \in U_\alpha,\ \forall \alpha \in I$

$\Rightarrow k_1 x + k_2 y \in \bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha \subset V$

Def: Fie $M \subset V$ (submulț.)

$$[M] = \bigcap_{\substack{V' \subset V \\ M \subset V'}} V'$$

$Sp\, M$ → subsp. vect. generat de mulț. M (închiderea liniară a mulț. M)

$Sp\, M$ – „cel mai mic" subsp. vect, în sensul rel. de incluziune, care conține submulț. M)

$\boxed{P}$ Fie $M \subset V$

$$Sp\, M = \left\{ \sum_{i<\infty} \alpha_i x_i \mid x_i \in M \mid \alpha_i \in K \right\}$$

Considerăm $Sp\,(V_1 \cup V_2) \overset{not}{=\!=} \underbrace{V_1 + V_2}_{\text{suma subsp. vect. } V_1, V_2}$

unde $V_1, V_2 \subset V$ sp. vect.

$\boxed{P}$ $V_1 + V_2 = \{ v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2 \}$

Dem. „$\supset$" evidentă

„$\subset$" Fie $v \in V_1 + V_2 \overset{P}{\Longrightarrow} v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i$,

$x_i \in V_1 \cup V_2,\ \forall\, i = \overline{1,r}$

Renumerotăm și pp că: $x_1, \dots, x_s \in V_1$ și $x_{s+1}, \dots x_r \in V_2$

convenim ca elem. $V_1 \cap V_2$ să le numărăm doar în V_1

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i}_{\in V_1} + \underbrace{\sum_{i=s+1}^{r} \alpha_i x_i}_{\in V_2}$$

Deci „$\subset$", „$\supset$" $\Rightarrow$ „$=$" q.e.d.

Def: Suma de ssp vect. $V_1 + V_2$ s.n. suma directă și se not $V_1 \oplus V_2$ dacă $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$

Fie $v \in V_1 \oplus V_2 \Rightarrow \exists!\ v_1 \in V_1$ și $v_2 \in V_2$ a.î.

$$v = \underset{\in V_1}{v_1} + \underset{\in V_2}{v_2} = \underset{\in V_1}{v_1'} + \underset{\in V_2}{v_2'} \Rightarrow \underbrace{v_1 - v_1'}_{\in V_1} = \underbrace{v_2' - v_2}_{\in V_2} \in V_1 \cap V_2$$

Dar $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$

$$\Rightarrow \begin{matrix} v_1 = v_1' \\ v_2 = v_2' \end{matrix}$$

TEOREMA DIMENSIUNII / GRASSMANN

Fie $\underbrace{V_1, V_2}_{\text{2 ssp vect.}} \subset V$, V/K sp. vect. finit generat.

Atunci $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

DEM: Fie $\underbrace{\{f_1, \dots, f_s\}}_{\text{bază}} \subset V_1 \cap V_2$ $\quad \dim V_1 \cap V_2 = s$

Completez th. sch. $B_1 = \{f_1, \dots, f_s, e_{s+1}, \dots, e_n\} \subset V_1$ bază

$\dim V_1 = n$

$B_2 = \{f_1, \dots, f_s, g_{s+1}, \dots, g_m\} \subset V_2$

$\dim V_2 = m$

Considerăm $B = \{f_1, \dots, f_s, e_{s+1}, \dots, e_n, g_{s+1}, \dots, g_m\} \subset V_1 + V_2$

Dem. că $B \subset V_1 + V_2$ bază

1) B sist. de gen pt. V_1+V_2

2) B s.v. lin indep.

1) Fie $v \in V_1+V_2 \Rightarrow \exists\, v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2$ a.î. $v = v_1+v_2$

$$v_1 = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{n-s} \beta_j e_{s+j}$$

$$v_2 = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i' f_i + \sum_{k=1}^{m-s} \beta_j' g_{s+k}$$

$$v = \sum_{i=1}^{s} f_i(\alpha_i+\alpha_i') + \sum_{j=1}^{n-s} \beta_j \cdot e_{s+j} + \sum_{k=1}^{m-s} \beta_j' g_{s+k}$$

$\Rightarrow B$ sist. de gen. pt V_1+V_2

2) Fie $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^{n-s} \beta_i \cdot e_{s+i} + \sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i \cdot g_{s+i} = 0$ (*)

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{s} \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^{n-s} \beta_i \cdot e_{s+i}}_{\in V_1} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i g_{s+i}}_{\in V_2} \in V_1 \cap V_2$$

$$\Rightarrow -\sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i g_{s+i} = \sum_{i=1}^{s} \delta_i f \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \delta_i f_i + \sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i g_{s+i} = 0$$

$$\Rightarrow \delta_1 = \ldots = \delta_s = \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{m-s} = 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow}$$

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = \beta_1 = \ldots = \beta_{n-s} = 0$$

Deci 2) B s.v. lin indep.

Asadar $\underset{\text{bază}}{B \subset V_1+V_2} \Longrightarrow \dim V_1+V_2 = n+m-s = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2$ q.e.d.

Exemplu: $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$V_1 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid Tr\, A = 0\}$

$V_2 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A = \lambda I_n, \lambda \in \mathbb{R}\}$

① $M_n(\mathbb{R}) = V_1+V_2$ ③ $\dim M_n(\mathbb{R}) = \dim V_1 +$

② $V_1 \cap V_2$ ...

Avem $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = V_1 \oplus V_2$

09. Martie 2017

Curs 3

! Teorema Grassmann:

Fie $V_1, V_2 \leq V$ ssp vect. Atunci $\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

$$V_1 + V_2 = sp\{V_1 \cup V_2\} = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1 \text{ și } v_2 \in V_2\}$$

Exemple. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})_{/\mathbb{R}}, +, \cdot)$ sp vect. real

$V_1 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid Tr\, A = 0\}$

$V_2 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = \lambda I_n, \lambda \in \mathbb{R}\}$

$V_1, V_2 \subset M_n(\mathbb{R})$ ssp. vect.

Dem că: 1) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = V_1 + V_2$
2) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$
3) $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim V_1 + \dim V_2$

$\Rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2$

1) „$\supset$" evidentă

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset V_1 + V_2$

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (\exists) \underset{\in V_1}{A_1}, \underset{\in V_2}{A_2}$ a.î. $A = A_1 + A_2$.

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ și $A_1 = \left(a_{ij} - \frac{Tr A}{n}\delta_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$

$$Tr\, A_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(a_{ii} - \frac{Tr\, A}{n}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} - \cancel{n} \cdot \frac{Tr A}{\cancel{n}} = 0$$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ simb lui Kronecker

$\Rightarrow A_1 \in V_1$

$$A_2 = \Big(\underbrace{\frac{Tr\,A}{n}}_{\lambda\in\mathbb{R}}\,\delta_{ij}\Big)_{i,j=\overline{1,n}} \Rightarrow A_2 = \lambda I_n \Rightarrow A_2 \in V_2$$

$$A = A_1 + A_2$$

Deci $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = V_1 + V_2$

2) Fie $A \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \begin{cases} A\in V_1 \\ \text{și} \\ A \in V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Tr A = 0 \\ A = \lambda I_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda n = 0 \\ n \neq 0 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow A = O_n$

Deci $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

3) Aplic th. dim. (Grassmann)

$$\Rightarrow \dim \underbrace{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}_{n^2} = \dim V_1 \oplus V_2 = \underbrace{\dim V_1}_{\substack{\text{se } \cancel{\text{deduce}} \text{ deci} \\ \Rightarrow n^2 - n}} + \underbrace{\dim V^2}_{n}$$

Aplicații liniare

Def 1: Fie V și W - 2 sp. vectoriale peste K.
O aplicație $f: V \to W$ s.n <u>aplicație liniară</u> dacă:

$\begin{cases} 1) & f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2), \ \forall v_1, v_2 \in V \text{ (morfism de sp. vect.)} \\ 2) & f(\alpha v) = \alpha \cdot f(v), \ \forall \alpha \in K, \forall v \in V \end{cases}$

Def. echivalentă: O apl. ~~fct~~ $f: V \to W$ s.n <u>aplicație liniară</u> dacă $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in K$

Def 2: O aplicație liniară $f: V \to V$ s.n. <u>endomorfism</u> al sp. vect. V/K.

Def 3: Un morf. de sp. vect $f: V \to W$ + bijecție $\Rightarrow$ <u>izomorfism</u> de sp. vect.

Def 4: Un endomorfism al sp. vect V $f: V \to V$ + bijectiv

$\Rightarrow$ <u>automorfism</u> al sp. vect V.

Exemple:

1) $Tr: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B), \ \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A), \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ și } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$$

2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+y, x-y, y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$

(fol. def echiv) ~~⇒~~

f apl. lin $\Longleftrightarrow \forall \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\forall \underset{(x_1,y_1)}{v_1}$ și $\underset{(x_2,y_2)}{v_2} \in \mathbb{R}^2$. $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$

$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = f(\alpha_1(x_1,y_1) + \alpha_2(x_2,y_2)) = f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$
$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2,$
$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = (\alpha_1(y_1 + x_1) + \alpha_2(x_2 + y_2), \alpha_1(x_1 - y_1) +$
$+ \alpha_2(x_2 - y_2), \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1(x_1 + y_1, x_1 - y_1, y_1) +$
$+ \alpha_2(x_2 + y_2, x_2 - y_2, y_2) = \alpha_1 f(x_1, y_1) + \alpha_2 f(x_2, y_2) =$
$= \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$

3) Fie V/K sp. vect., $\lambda \in K^*$

$f: V \to V$

$f(v) = \lambda v$ $\to$ s.n. omotetia de raport λ (transf. geom.)

f - apl. lin.

Fie V/K sp. vect. și $\underset{2 \text{ ssp vect}}{V_1, V_2}$ a.î. $V = V_1 \oplus V_2$

$\forall v \in V$, $\exists!$ $v_1 \in V_1$ și $v_2 \in V_2$ a.î. $v = v_1 + v_2$

Def. 5: $f_1 : V \to V_1$ și $f_2 : V \to V_2$

$f_1(v) = v_1$ | $f_2(v) = v_2$

proiecția pe V_1, $\parallel V_2$ | proiecția pe V_2, $\parallel V_1$

PROPRIETĂȚI:
~~Propoziție~~: Fie V, W 2 sp. vect. peste K

$f : V \to W$ apl. lin.

$S \overset{not}{=} \{v_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset V$

1) Dacă $\left.\begin{array}{l} f \text{ injectivă} \\ S - \text{s.v. lin indep} \end{array}\right\} \Rightarrow f(S) \subset W$ s.v. lin. indep.

2) Dacă $\left.\begin{array}{l} f \text{ surjectivă} \\ S - \text{sist. de generatori din } V \end{array}\right\} \Rightarrow f(S) \subset W$ sist. de generatori

3) Dacă $\left.\begin{array}{l} f \text{ bijectivă} \\ S \subset V \text{ bază} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{bază}}{\underline{f(S)}} \subset W$

1) Matricea asoc. unei apl. liniare
2) Sch. matricei asoc. unei apl. liniare la sch. de reper

$f : V_1 \to V_2$ apl. lin.

$B_1 = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V_1$

$B_2 = \{f_1, \dots, f_m\} \subset V_2$

repere vectoriale

$(\forall)\ i = \overline{1,n}$ $\quad f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j$

$A = (a_{ji})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}} \to$ m. asoc. apl. lin f la fixarea rep. B_1 pe V_1, resp. B_2 pe V_2

Sch. reperelor

$\left.\begin{array}{l} B_1' = \{e_1', \dots, e_n'\} \subset V_1 \\ B_2' = \{f_1', \dots, f_m'\} \subset V_2 \end{array}\right\} >$ 2 rep. vect.

$\forall\, i=\overline{1,n}$, $f(e_i') = \sum_{i=1} a_{ji}' + f_j'$

$A' = (a_{ji}')_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}$ → m. asoc. apl. lin. f la fixarea rep. $B_1' \subset V_1$, resp. $B_2' \subset V_2$

$A' = f(A, \substack{C\\D})$

$B_1 \xrightarrow{C} B_1'$, C – m. de trecere de la B_1 la B_1' →
$\forall\, i=\overline{1,n}$, $e_i' = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k$

$B_2 \xrightarrow{D} B_2'$ – D – m de trecere de la B_2 la B_2' →
$\forall_{i=\overline{1,m}}$, $f_i' = \sum_{\ell=1}^{m} d_{\ell i} f_\ell$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ $DY' = ACX' \mid \cdot D^{-1}$ la stg

$Y = AX$
$X = CX'$ ⇒ $Y' = (D^{-1}AC)X'$
$Y = DY'$ Dar $Y' = A'X'$ $\Big\}$ ⇒ $A' = D^{-1}AC$ ⇒

$AC = DA'$

Caz particular: $f: V \to V$ endomorf.

$B \subset V$ $B' \subset V$
bază $B \xrightarrow{C} B'$
A A'

$A' = f(A)$

În acest caz $D = C$ ⇒ $A' = C^{-1}AC$

Exemplu:
Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+y+z, -x+y+z, x-y+z)$
endom.

Scrieți m. asoc. endomorfismului f în raport cu baza urm.:

$\mathcal{B} = \{ f_1 = (1,1,1),\ f_2 = (1,1,0),\ f_3 = (1,0,0) \} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$ m. asoc. endom. în raport cu baza canonică $\mathcal{B}_0 = \{ e_1, e_2, e_3 \} \subset \mathbb{R}^3$

$\mathcal{B}_0 \xrightarrow{C} \mathcal{B}$, C – m. de trecere de la baza can. $\mathcal{B}_0$ la baza arb. $\mathcal{B}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A' = C^{-1} A C$$

A' – m. asoc. endom. f în raport cu baza $\mathcal{B}$.

NUCLEUL UNEI APLICAȚII LINIARE. IMAGINEA UNEI APLICAȚII LINIARE.

Fie $f : V \to W$ apl. liniară

$\operatorname{Ker} f = \{ v \in V \mid f(v) = 0_W \} \subset V$ subsp. vect.

$\operatorname{Im} f = \{ w \in W \mid \exists\, v \in V \text{ a.î. } f(v) = w \} \subset W$ subsp. vect.

<u>Proprietăți</u>: Fie $f : V \to W$ apl. lin.

Avem 1) f inj $\iff \operatorname{Ker} f = \{0_V\}$

2) f surj $\iff \operatorname{Im} f = W$

3) f bij $\iff \begin{cases} \operatorname{Ker} f = \{0_V\} \\ \operatorname{Im} f = W \end{cases}$

<u>Dem</u>: 2, 3 evident

1) „$\Rightarrow$" f inj

$f(0_V) = 0_W \Rightarrow 0_V \in \operatorname{Ker} f$

$v \neq 0 \xRightarrow{f \text{ inj}} f(v) \neq f(0) = 0 \Rightarrow v \in \operatorname{Ker} f$

Deci $\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$

„$\Leftarrow$" $\quad Ker f = \{0_V\}$

Fie $v_1, v_2 \in V$ a.î. $f(v_1) = f(v_2)$

$$f(v_1 - v_2) \overset{f}{\underset{lin}{=}} f(v_1) - f(v_2) = 0 \Longrightarrow v_1 - v_2 \in Ker f$$

$Ker f = \{0_V\}$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0_V \Longrightarrow v_1 = v_2$$

Deci: f inj

~ Teorema rangului (rang-defect) ~

Fie $f : V \to W$ apl. lin (V, W, sp. vect. fin. generate)

Atunci $\underbrace{\dim_K Ker f}_{=def(f)} + \underbrace{\dim_K Im f}_{=rang(f)} = \dim_K V \Longleftrightarrow def(f) + rang(f) = \dim V$.

Dem: Fie $\underbrace{\{e_1, \dots, e_r\}}_{bază} \subset Ker f \subset V$ $\quad \dim Ker f = r$, $\dim V = n$

$\underset{(th.\ sch.)}{\overset{se\ completează}{\Longrightarrow}}$ $\underset{bază}{B} = \{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n\} \subset V$

$B \subset V \Rightarrow \forall v \in V, \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ a.î.

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \underset{apl.\ lin}{\overset{f}{=}} \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_n f(e_n)$$

Dar $e_1, \dots, e_r \in Ker f \Rightarrow f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_r) = 0$

$$\Rightarrow \underset{\in Im f}{f(v)} = \alpha_{r+1} f(e_{r+1}) + \dots + \alpha_n f(e_n), \forall v \in V$$

$$\Rightarrow \underset{sist.\ de\ gen.}{G = \{f(e_{r+1}), \dots, f(e_n)\}} \subset Im f$$

Dem. că G - s.v. lin. indep.

Fie $\beta_{r+1} f(e_{r+1}) + \dots + \beta_n f(e_n) = 0 \xRightarrow[\text{apl. lin}]{f} f(\beta_{r+1} e_{r+1} + \dots + \beta_n \cdot e_{n+1}) = 0 \Rightarrow \beta_{r+1} \cdot e_{r+1} + \dots + \beta_n \cdot e_{n+1} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow$

$\exists!\ \gamma_1, \dots, \gamma_r \in K$ a.î. $\beta_{r+1} \cdot e_{r+1} + \dots + \beta_n e_n =$

$= \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_r e_r \Rightarrow \beta_{r+1} e_{r+1} + \dots + \beta_n \cdot e_n - \gamma_1 e_1 - \dots - \gamma_r \cdot e_r = 0$ Dar $B : \{e_1, \dots, e_n\} \underset{\text{bază}}{\subset} V$

$\Rightarrow \beta_{r+1} = \beta_{r+2} = \dots = \beta_n = \gamma_1 = \dots = \gamma_r = 0$

$\Rightarrow$ Deci G - s.v. lin. indep. din $\operatorname{Im} f$

Așadar $G \underset{\text{bază}}{\subset} \operatorname{Im} f$ $\qquad \dim \operatorname{Im} f = n - r$

$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = r + n - r = n = \dim V$

$\Rightarrow \operatorname{def}(f) + \operatorname{rang}(f) = \dim V$ $\quad$ q.e.d.

Seminar 2

Criteriu ca S să fie S.G.

$k \geq n$

$$rg\left(\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{pmatrix}\right) = n \Rightarrow S \text{ este S.G.}$$

ex 1. $(\mathbb{R}^3, +)$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Este $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ S.G. pt. $\mathbb{R}^3$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 10 & 16 \end{pmatrix}$$

$C_1 + C_2$ $\quad \rightarrow 2C_2 + C_3$

$rg\, A =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

coloana 3 și 4 sunt comb. liniare între c_1 și $c_2 \Rightarrow$ $rg\, A \neq 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow rg\, A = 2$$

Temă: Program C++ care să verif dacă S este SLI / SG.

ex2: $\mathbb{R}^{17}$

$v_1 = (1, \dots, 1)$

$v_2 = (1, 2, 2^2, \dots, 2^{16})$

$v_3 = (1, 3, 3^2, \dots, 3^{16})$

$\vdots$

$v_{17} = (1, 17, \dots, 17^{16})$

$v_{18} = (1, 0, \dots, 0)$

a) $\{v_1, v_2, \dots, v_{17}\}$ este SLI / bază / SG

b) $\{v_1, \dots, v_{16}\}$ este — " —

c) $\{v_1, \dots, v_{18}\}$ este — " —

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 17 \\ \vdots & & & \\ 1 & 2^{16} & \dots & 17^{16} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{17 \times 17}(\mathbb{R})$

$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \dots, \alpha_{17} = 17$

$\det A = \prod_{1 \le i \le j \le 17} (\alpha_j - \alpha_i) \neq 0$

$\{v_1, \dots, v_{17}\}$ bază $\quad$ rang $A = 17$

b) S este sli, dar nu sg

c) S nu este sli, dar este sg.

ex3: $V = \{ A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A = A^t \}$

$(V, +)$ este s.v $/\mathbb{R}$

dacă $\begin{matrix} A = A^t \\ B = B^t \end{matrix} \Rightarrow (A+B)^t = A^t + B^t = A + B$

$V_2 = \{ A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A = -A^t \}$

$(a_{ii}) = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$

$a_{ij} = \cancel{\ } - a_{ji}$

a) V_1

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ x_4 & x_2 & x_6 \\ x_5 & x_6 & x_3 \end{pmatrix}, \; x_1, \dots, x_6 \in \mathbb{R}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $\{E_1, \dots, E_6\}$ SG

Fie $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ x_4 & x_2 & x_6 \\ x_5 & x_6 & x_3 \end{pmatrix} \in V_1$

$= x_1 \cdot E_1 + x_2 \cdot E_2 + \dots + x_6 \cdot E_6$

$\{E_1, \dots, E_6\}$ e SLI

Pres. că $\exists\, x_1, \dots, x_6 \in \mathbb{R}$ a.î. $x_1 E_1 + \dots + x_6 E_6 = O_3$

$= A \iff x_1, \dots, x_6 = 0 \Rightarrow$ SLI $\Rightarrow$ bază

b) V_2

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ -x_2 & -x_3 & 0 \end{pmatrix} \in V_2$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Temă: $V_1 = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t \}$
$V_2 = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = -A^t \}$

ex 4: $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$

$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Aflați coord lui v în B_1, resp. în B_2

Coord lui v în B_1 sunt c_1, c_2 cu prop că:

$$v = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{B_1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$v = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{[B_1]} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = [B_1] \cdot v_{B_1} \Rightarrow v_{B_1} = [B_1]^{-1} v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$v = [B_2] \cdot v_{B_2} \Rightarrow v_{B_2} = [B_2]^{-1} \cdot v = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Matricea de trecere de la B_1 la B_2,

$M_{B_1}^{B_2}$ $\left(M_{B_1 \to B_2} \right)$ este acea matrice

$$v_{B_2} = \left(M_{B_1}^{B_2} \right)^{-1} \cdot v_{B_1}$$

$[B_1] \cdot v_{B_1} = [B_2] \cdot v_{B_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow v_{B_2} = [B_2]^{-1} \cdot [B_1] \cdot v_{B_1}$

$$\boxed{v_{B_2} = \left(\underbrace{[B_1]^{-1} \cdot [B_2]}_{M_{B_1}^{B_2}} \right)^{-1} \cdot v_{B_1}}$$

Întrebare: dacă $B_1 = B_{can} = \{e_1, e_2\}$

$M_{B_1}^{B_2} = [B_2]$

$M_{B_1}^{B_2} \cdot M_{B_2}^{B_3} = M_{B_1}^{B_3}$

Temă: $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$

$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 100 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$M_{B_1}^{B_2} = ?$

Subspațiu vect.

$W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$

V e K s.v.

$W \leq V$ dacă $\forall\, w_1, w_2 \in W$, $w_1 + w_2 \in W$

$\forall\, \alpha \in K$, $w \in W$, $\alpha w \in W$

$0_V \in W$

exemple: $\mathbb{Q}$ este un $\mathbb{Q}$ - subspațiu vect al lui $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^m$, $m \geq n$

$V = \{ (x_1, \dots, x_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-n}) \mid x_i \in \mathbb{R} \}$

$\cap$

$\mathbb{R}^m$

$V_1, V_2 \leq V$

$V_1 + V_2 = \{ v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \}$

$V_1 \cap V_2 = \{0\} \Rightarrow V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$

ex5: a) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2$

$V_1 = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t \}$

$V_2 = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = -A^t \}$

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$A = \underbrace{\qquad}_{\text{sim.}} + \underbrace{\qquad}_{\text{antisim.}}$

$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2} \cdot (A - A^t)$

$\left(\frac{1}{2}(A + A^t)\right)^t = \frac{1}{2}\left(A^t + (A^t)^t\right) = \frac{1}{2}(A + A^t)$ $\Rightarrow$ simetrică

Curs 4

Th. rangului (rang-defect)

Fie $f: V \to W$ apl. liniară

$\{V, W$ - sp. vect. finit generate $\}$

Atunci: $\underbrace{\dim_K \mathrm{Ker} f}_{\mathrm{def}(f)} + \underbrace{\dim_K \mathrm{Im} f}_{\mathrm{rg}(f)} = \dim_K V$

$\mathrm{def}(f) + \mathrm{rg}(f) = \dim_K V$

$\mathrm{Ker}\, f = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} \subset V$

nucleul lui f — subsp. vect.

$\mathrm{Im} f = \{w \in W \mid \exists\ v \in V$ a.î. $f(v) = w\} \subset W$

imag. apl. lin f — subsp. vect.

Exemplu:

Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+y, x, -y)$

$\mathrm{Ker} f = ?$ $\mathrm{Im} f$

f inj, surj, bij.

Verif. th. rang - defect.

$\mathrm{Ker}\, f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$f(x,y) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x=0 \\ -y=0 \end{cases}$

sist. lin. omogen

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$

$\Rightarrow x = y = 0$ sol. unică

$\mathrm{Ker}\, f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$

$\Updownarrow$ subgrup nul

f inj.

$$\operatorname{Im} f = \{ \underset{\substack{\parallel \\ (x', y', z')}}{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \underset{\substack{\parallel \\ (x,y)}}{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ a.î. } f(v) = w \}$$

$$f(x,y) = (x', y', z') \iff \begin{cases} x + y = x' \\ x = y' \\ -y = z' \end{cases} \Rightarrow y = -z'$$

$$y' - z' = x' \iff \boxed{x' - y' + z' = 0}$$

$$\operatorname{Im} f = \{ (x', y, z') \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{\boxed{x' - y' + z' = 0}}_{\text{subsp. vect.}} \} \subset \mathbb{R}^3$$

$\downarrow$
subsp. vect. propriu

$\Rightarrow f$ nu este surj.

Deci f nu este bij.

$\dim \operatorname{Im} f = ?$

$\operatorname{Im} f \ni v = (x', y', z') = (x', y', -x' + y') =$

$x' - y' + z' = 0 \Rightarrow z' = -x' + y'$

$$= (x', 0, -x') + (0, y', y') = x' \underbrace{(1, 0, -1)}_{v_1} + y \underbrace{(0, 1, 1)}_{v_2}$$

$\Rightarrow S = \{v_1, v_2\} \subset \operatorname{Im} f$

$$\left.\begin{matrix} S\ G \\ + \\ S\ Li \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underset{\text{bază}}{S} \subset \operatorname{Im} f$$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$ ($\operatorname{Im} f$ este un plan vect.)

Verif. th. rangului

$0 + 2 = 2$ ✓

Vectori și valori proprii

Diagonalizarea endomorfismelor

Fie V/K - sp vect peste corpul com. K

$f : V \to V$ endomorfism al sp vect. V

Def: a) Un scalar $\lambda \in K$ s.n. <u>valoare proprie</u> corespunzătoare endomorfismului f dacă există cel puțin un $v \in V^*$ a.î.

$$\boxed{f(v) = \lambda v} \quad (*)$$

(V^* $\downarrow$ fără 0_V)

b) Un vector $v \in V^*$ care îndepl. rel $(*)$ se numește <u>vector propriu</u> coresp. valorii proprii λ.

Mulțimea tuturor val. proprii ale unui endomorfism s.n. <u>SPECTRUL</u> endomorfismului.

Fie $f \in End(V)$

λ_0 - val. proprie a lui f

$V_{\lambda_0} = Ker(f - \lambda \mathbb{1}_V)$

$\uparrow$ identitatea $\mathbb{1}_V(v) = v, \forall v \in V$

$\hookrightarrow$ subspațiul propriu coresp. val. proprii λ_0

Dem. că: $\boxed{V_{\lambda_0} \subset V \text{ ssp vect.}}$

Fie $\alpha_1, \alpha_2 \in K$

$v_1, v_2 \in V_{\lambda_0}$ $\qquad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V_{\lambda_0} = Ker(f - \lambda_0 \mathbb{1}_V)$

$\Leftrightarrow (f - \lambda_0 \mathbb{1}_V)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) - \lambda_0 \mathbb{1}_V(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1(f(v_1)) + \alpha_2 f(v_2) - \lambda_0(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda_0 v_1 + \alpha_2 \lambda_0 v_2 - \lambda_0 \alpha_1 v_1 - \lambda_0 \alpha_2 v_2 = 0$ (A)

Deci $V\lambda_0 \subset V$ ssp vect. numit subsp. propriu coresp val proprii λ_0

$$V\lambda_0 = \{ v \in V \mid f(v) = \lambda_0 v \}$$

<u>OBS</u>: 1) Vectorul nul 0_V nu este vector propriu

2) $0_V \in V\lambda_0$ datorită sau pt. a susține str. de subspațiu vectorial

Fie $f: V \to V$ endomorfism al sp. vect. V, $\dim V = n < \infty$

$\underset{\text{bază}}{B} \subset V$

A – mț. asoc endomorfismului f în raport cu baza B

<u>Def</u>: a) $A_f - \lambda I_n \to$ s.n. <u>matricea caracteristică</u> asociată lui f (sau matricea lui A_f)

b) $P(\lambda) = \det(A_f - \lambda I_n) \to$ s.n. <u>polinomul caracteristic</u> coresp. pol. de gr n

<u>OBS</u>: Învățat la sch. de baze

c) $P(\lambda) = 0 \iff \det(A_f - \lambda I_n) = 0 \to$ s.n. <u>ecuația caracteristică</u> coresp. endom. $f(A_f)$

<u>Th</u>: λ_0 - val. proprie ~~caract.~~ coresp. endm. $f \iff$ este rădăcină în K, pt. ec. caract. $\boxed{\det(A_f - \lambda I_n) = 0}$ (*)

<u>Dem</u> (schiță):

Fie λ_0 val proprie pt. f

și v - vect coresp. val. proprii λ_0

$f(v) = \lambda_0 \cdot v$, $v = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot e_i$

$$S: \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \lambda_0 \delta_{ij}) v_j = 0, \quad \forall i = \overline{1, n}$$

$\underset{\text{lin. omogen}}{S \text{ LO}}$ deci λ_0 - răd. pt. ec caract (*)

$\det(A_f - \lambda_0 I_n) \to \det$ mat sist S

S are și sol nenule $\Leftrightarrow \det(A_f - \lambda_0 I_n) = 0$

$\boxed{P}$. 1) Unei val. proprii λ îi pot coresp. mai mulți vect proprii

2) Unui vector propriu îi coresp. o singură val. proprie

Diagonalizarea endomorfismelor

Def: Un endomorf $f: V \to V$ s.n. diagonalizabil dacă $\exists$ $B \subset V$ a.î. matricea asoc. lui f în rap. cu B este diagonală.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$D = (d_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$$

$$d_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

simb lui Kronecker

Teoremă: Un endomorf $f: V \to V$ este diagonalizabil $\Leftrightarrow$ $\exists$ $B \subset V$ formată numai din vectori proprii coresp. val. proprii ale endom. f.

Not: $m_a(\lambda) \to$ multiplicitatea algebrică a val. prop. λ, din ec. caract

$$m_g(\lambda) \overset{def}{=} \dim V_\lambda$$

$\uparrow$ multiplicitatea geom. a val. prop. λ

Teoremă: Un endomorf $f: V \to V$ este diagonalizabil $\Leftrightarrow$

1) ecuația caract. are toate răd în K

2) $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$, $\forall i$ (multiplicitatea alg. coincide cu mult. geometrică pt. fiecare val. proprie coresp. endomorf f)

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & \lambda_j & \\ & & & & & & \ddots \ \lambda_j \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 \to m_1 \\ \lambda_2 \to m_2 \\ \vdots \\ \lambda_j \to m_j \end{array}$$

$$m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) = m_i, \quad \forall i = \overline{1,j}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{baza inițială} & & \text{baza form. din vect. proprii} \\ B & \xrightarrow{C} & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_f & & D \end{array}$$

$$\boxed{D = C^{-1} \cdot A_f C} \implies A_f = C D C^{-1}$$

$$A_f^{\,n} = \underbrace{A_f \cdot \ldots \cdot A_f}_{n \text{ ori}} = C D C^{-1} C D C^{-1} \ldots$$

$$= C D^n C^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

Algoritmul de diagonalizare a endomorfismelor

1) Rezolv. ec. caract în K: $\det(A_f - \lambda I_n) = 0$

   Răd. ec. caract (în K) sunt val proprii ale endomorf f.

   $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$

   $m_a(\lambda_i) = m_i \ \forall i = \overline{1,j}$

2) $V_{\lambda_i} = \{ v \in V \mid f(v) = \lambda_i v \} \subset V$

   $i = \overline{1,j}$ subsp. propriu coresp. val. proprii λ_i

   Rezolv. sist lin. omogene $(A_f - \lambda I_n) \cdot v = 0$

3) Stabilim dacă endomorf f este diag.

Verific dacă 1) $m_1 + \dots + m_j = n = \dim V$

2) $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$, $\forall i = \overline{1, j}$

Dacă sunt verif cond. 1) și 2) $\Rightarrow$ endom. f este diagonalizabil $\Rightarrow$ 4

În caz contrar $\Rightarrow$ STOP f nu e diagon.

4) $$D = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1} & & & & 0 \\ & \underbrace{\lambda_2 \dots \lambda_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \underbrace{\lambda_j \dots \lambda_j} \end{pmatrix} \rightarrow \text{m. diag.}$$

$B = B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} \dots \cup B_{\lambda_j}$,

$B_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$
bază

5) $$\begin{array}{ccc} B_0 & \xrightarrow{C} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_f & & D \end{array}$$

C – m. de trecere de la baza inițială la baza finală (form. din vectori proprii)

6) Verificare: $D = C^{-1} A_f C$

Exemplu:

1) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

f endom. care are în baza can. $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ matricea asociată $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Det. val. proprii și subsp. proprii coresp.

Verif. dacă A_f este diagonalizabilă și în caz afirmativ scrieți f. diag și baza în care se realizează

2) Același enunț.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Curs 5 23. Martie 2017

Diagonalizarea endomorf.

FORMA CANONICĂ JORDAN

Alg. de Jordanizare

Fie $V/K \to$ sp. vect. peste corpul com. K

$\dim V = n < \infty$

$f : V \to V$ endomorf al lui V

λ - val. proprie coresp. endomorf. f.

$\{\lambda \in K \ , \ \det(A - \lambda I_n) = 0\}$

Def: S.n. <u>celula Jordan</u> de ordinul m, coresp. val. proprii λ o matrice pătratică

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(K)$$

Def: S.n. <u>bloc Jordan</u> coresp. val. proprii λ o matrice pătratică care are pe diagonala principală celule Jordan de ord. diferite (coresp v.p. λ) și în rest 0.

$$BJ(\lambda) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}}_{J_2(\lambda)} & & \cdots & 0 \\ & \underbrace{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{matrix}}_{J_3(\lambda)} & & \\ 0 & \cdots & \underbrace{\begin{matrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \vdots & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{matrix}}_{J_4(\lambda)} \end{pmatrix}$$

Def: S. n. matrice Jordan (forma Jordan) o matrice pătratică care are pe diag. principală blocuri Jordan coresp. val. proprii diferite și în rest 0.

Def: S. n. bază Jordan o bază a sp. vect V a.i. matricea asoc. endom. f în raport cu baza resp. să fie o matrice Jordan.

Algoritmul de Jordanizare:

Etapa 1: Det. val. proprii distincte coresp. endomorf. fct. f

Etapa 2: Pt. fiecare val. proprie det. BJ coresp.

P1. Se calc. m. caract. $A_f = A - \lambda I_n$

P2. Se calc. $rg\, A_f$, $rg\, A_f^2$ ... și se det. cel mai mic nr. natural $p \in \mathbb{N}^*$ pt. care șirul rg devine staționar.

P3. $n_i = n - rg\, A_f^i$, $\forall\, i = \overline{1, p}$

$$\begin{cases} a_1 = n_1 \\ a_i = n_i - n_{i-1}, \ \forall\, i = \overline{2, p} \end{cases}$$

a_1 → nr. de celule J pe care le conține $BJ(\lambda)$

$$\begin{cases} b_i = a_i - a_{i+1}, & \forall\, i = \overline{1, p-1} \\ b_p = a_p \end{cases}$$

$b_i \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ o cel. de ord i $J_i(\lambda)$ în comp. $BJ(\lambda)$

P4. $BJ(\lambda)$

Etapa 3: Se construiesc $BJ(\lambda)$ coresp. val. proprii dist. pe diag. principală și se obț. forma Jordan

A_J → forma canonică Jordan

Exemplu: Aduceți la f can. Jordan endom.

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$f(x) = (2x_1 + x_2, 2x_2, x_4, -x_3 + 2x_4), \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Et1: $\det(A - \lambda I_4) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)^2(\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = \lambda_4 = 1$

$\lambda_1 = 2$ $\quad A_f = A - \lambda_1 I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det A_f = 0 \Rightarrow rg\, A_f < 4$

$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\, A_f = 3$

$$A_f^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, A_f^2 = 2$$

$$A_f^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, A_f^3 = 2$$

$p = 2$ $\begin{cases} n_1 = n - rg\, Af_2 = 4 - 3 = 1 \\ n_2 = n - rg\, Af^2 = 4 - 2 = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = n_2 - n_1 = 1 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $BJ(\lambda = 2)$ are o singură cel.

$\begin{cases} b_1 = a_1 - a_2 = 0 \\ b_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \exists$ o cel. de ord 2 în cap. lui $BJ(\lambda=2)$

$$BJ(\lambda = 2) = J_2(\lambda = 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_3 = 1}$ $\quad Af = A - \lambda_2 \cdot I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det Af = 0 \Rightarrow rg\, Af \leq 3$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg\, Af = 3$$

$$Af^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rg\, Af^2 = 2$$

$$Af^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow rg\, Af^3 = 2$$

$p = 2$ $\quad n_2 = n - rg\, Af$

$B_J(\lambda = 2) = J_2(\lambda = 2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

~~$\lambda_3 = 1 \quad A_f = A - \lambda_3 I_4$~~

Etapa 3 $\quad A_J = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$ forma canonică Jordan

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2, 2x_2, x_3 + x_4, x_4)$

Forme biliniare. Forme pătratice

Fie V/K sp. vect peste corpul K

$\dim_K V = n < \infty$

Def: O apl. ~~lin~~ $g : V \times V \to K$ s.n. forma biliniară pe V dacă îndepl. cond. următoare

1) $g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha g(x_1, y) + \alpha_2 g(x_2, y)$, $\forall$ $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, $x_1, x_2, y \in V$ $\to$ (lin în I arg)

2) $g(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 g(x, y_1) + \beta_2 (x, y_2)$, $\forall \beta_1, \beta_2 \in K$, $x, y_1, y_2 \in V$ $\to$ (lin în al II lea arg)

Dacă în plus 3) $g(x, y) = g(y, x)$, $\forall$ $x, y \in V$ atunci g s.n. formă bilin. simetrică.

Obs. Pt. o formă bilin dim $\to$ (V1) $\underline{1}, \underline{3}$; $\to$ (V2) $\underline{2}, \underline{3}$

$B \subset V$, $g : V \times V \to K$ f bs.
$\overset{\shortparallel}{\{e_1, \dots, e_n\}}$

$g(e_i, e_j) \overset{not}{=} g_{ij}$, $\forall i, j = \overline{1, n}$

$G = (g_{ij}) \to$ m asoc fbs g în raport cu baza B

Fie $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$

$$g(x,y) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \overbrace{g(e_i, e_j)}^{g_{ij}} = \sum_{j,i=1}^{n} g_{ij} x_i y_j , \forall x, y \in V$$

~~$g(x,y) =$~~ $g(x,y) = x^t G \cdot y$

<u>Obs</u>: Dacă g - fbs atunci $g_{ij} = g_{ji}$, $\forall i,j = \overline{1,n}$
i.e. G m. ~~sim~~ simetrică ($G = {}^tG$)

<u>Schimbăm reperul</u>

$B' = \{e_1', \dots, e_n'\} \subset V$
$B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ $\Big\rangle$ 2 repere vectoriale

$g : V \times V \to K$ fbs

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{A} & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} & & G' = (g'_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \end{array}$$

A - matricea de trecere de la B la B'

$$G' = f(G, A)$$

$$g'_{ij} = g(e_i', e_j') = g\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} a_{lj} e_l\right) =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki} a_{lj} g(e_k, e_l) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki} a_{lj} g_{kl} , \forall i,j = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow G' = A^t \cdot G \cdot A$$

$$rg\, G = rg\, G'$$

rang G $\longrightarrow$ s.n. rangul fbs g
(invariant)

$\underbrace{Ker\ g}_{\text{nucleul fbs}} = \{x \in V \mid g(x,y) = 0, \forall y \in V\}$

Def: o fbs este nedeg. dacă $Ker\ g = \{0_V\}$

$\boxed{P.}$ O cond. necesară și suf ca o fbs să fie nedegenerată este ca matricea asoc. în rap. cu o bază, să fie nedeg. ($\det G \neq 0$)

Def: O aplicație $h: V \to K$ s.n. forma pătratică pe V dacă $\exists$ $g: V \times V \to K$ fb sim. a.î.

$\boxed{g(x,x) = h(x), \forall\ x \in V}$ $\rightarrow$ forma polară

$\underset{\text{bază}}{B} \subset V$, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$

$h(x) = \sum_{ij=1}^{n} g_{ij} x_i x_j$

$\forall$ $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$;

Formula de polaritate:

$g(x,y) = \frac{1}{2}\left(h(x+y) - h(x) - h(y)\right)$, $\forall x,y \in V$

Exemplu:

1) $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$g(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$

$g(x,y) = X^t \cdot G Y$, $\forall$ $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ g - fbs

$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ m. asoc. fbs g. în rap. cu baza canonică

$G = G^t$ (m. sim.)

$B_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$

$h(x) = g(x, x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

2) $h : \underset{(x_1, x_2, x_3)}{\mathbb{R}^3} \to \mathbb{R}$

$h(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_3$

↳ forma pătratică reală $\forall (x_1, x_2, x_3) = x \in \mathbb{R}^3$

F. pol $g(x, y) = \frac{1}{2}\left(h(x+y) - h(x) - h(y)\right)$ se calculează

$(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$

Sau

Dedublare

$x_1^2 = x_1y_1$

$x_2^2 = x_2y_2$

...

$g(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - 2x_3y_3 - x_1y_1 - x_2y_1 - 2(x_1y_3) -$

$- 2(x_3y_1) + x_2y_3 + x_3y_2$

Seminar 3

$\mathbb{R}^n$ spațiu vectorial

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$W_A = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0 \right\}$

↳ sol sist.

Prop. W_A este subsp.

$W \subseteq V$ ↳ spațiu vect

↳ subsp. dacă $\forall\, v, w \in W$, $v + w \in W$; $\forall\, \alpha \in K$, $v \in W$, $\alpha v \in W$ $\Rightarrow$ $\forall\, \alpha, \beta \in K$ $\forall\, v, w \in W$ $\alpha v + \beta w \in W$.

Dem: a) $X, Y \in W_A \Rightarrow X + Y \in W_A$

$X \in W_A \Rightarrow AX = 0$

$Y \in W_A \Rightarrow AY = 0$

$\Rightarrow A(X+Y) = AX + AY = 0$

b) $\alpha \in \mathbb{R}$, $X \in W_A \Rightarrow \alpha X \in W_A$

$\Downarrow$

$AX = 0 \Rightarrow A(\alpha X) = \alpha AX = 0$

ex: $\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + (-y) + z = 0 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{rg} A = ?$

$\dim_{\mathbb{R}}(W_A) = ?$

Soluție: Notez $\alpha = z$

$$\begin{cases} x + 2y = \alpha \\ 2x - y = -\alpha \end{cases} \Rightarrow x = \alpha - 2y$$

$$\Rightarrow y = x + \alpha = \alpha + 2\alpha - 4y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{3\alpha}{5}$$

$$x = \alpha - \frac{6\alpha}{5} = -\frac{\alpha}{5}$$

$$\Rightarrow W_A = \left\{ \left(-\frac{\alpha}{5}, \frac{3\alpha}{5}, \alpha\right) \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$v = (-1, 3, 5)$

$\{(-1, 3, 5)\} \to$ bază în W_A?

sist. lin.

$\beta(-1, 3, 5) = 0$

$\Rightarrow -\beta = 0$

$\beta = 0$

sist. de gen. $\frac{\alpha}{5}(-1, 3, 5)$

ex 2: A': $x + 2y - 2z = 0$

$\dim_{\mathbb{R}} W_{A'}$

$$\left.\begin{array}{l} \beta = y \\ \gamma = z \end{array}\right\} \Rightarrow x = -2\beta + 2\gamma$$

$$W_{A'} = \{(-2\beta + 2\gamma, \beta, \gamma) \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$
$$\{(-2\beta, \beta, 0) + (+2\gamma, 0, \gamma) \mid \ldots\}$$
$$\{\beta(-2, 1, 0) + \gamma(2, 0, 1) \mid \ldots\}$$

$\dim_{\mathbb{R}} W_{A'} = 2$

$\dim_{\mathbb{R}} W_A = n - \operatorname{rg} A$

$W_A + W_{A'} = ? = \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ x + 2y + (-z) = 0 \\ 2x + (-y) + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

$W_A \cap W_{A'} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = 2 + 1 - 0 = 3$

ex3: Ipi $V \subseteq W$

$\dim V = \dim W = n$

C: $V = W$

Iau o bază în V: $v_1, \dots, v_n$

$\Rightarrow$ sist lin indep în V

$\Rightarrow$ sist lin indep în W

Completez la o bază în W

$v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+k}$

$\dim W = n \Rightarrow k = 0$

$\Rightarrow \underbrace{v_1, \dots, v_n}_{\in V}$ e bază în W

$w \in W \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n$

a.î. $w = \sum \underbrace{\alpha_i v_i}_{\in V} \in V$

$\Rightarrow W \subseteq V$

Aplicații liniare

V, W sp. vect

$f : V \to W$

a.î. $\forall\, v_1, v_2 \in V \quad f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

$\forall\, \alpha \in K \;\forall\, v \in V \quad f(\alpha v) = \alpha f(v)$

$\iff \forall\, \alpha, \beta \in K \;\forall\, v_1, v_2 \in V \quad f(\alpha v_1 + \beta v_2) =$

$= \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$

$Ker(f) = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$ este subsp. în V

$Im(f) = \{ w \in W \mid \exists\, v \in V,\ f(v) = w \}$ - subsp. în W

~~Dem~~:

ex: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ~~$f(x,y,z) = ($~~

$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + 4x_3,\ x_1 + x_2 + 2x_3,\ -x_1 - x_2 - 2x_3)$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X}$$

$Ker f$, $Im f$, $\dim Ker f$, $\dim Im f$

$Ker f = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 0 \}$

$x_3 = \alpha$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -4\alpha \\ x_1 + x_2 = -2\alpha \end{cases}$$

$3x_1 = -6\alpha \Rightarrow x_1 = -2\alpha$

$x_2 = -2\alpha + 2\alpha = 0$

$Ker f = \{ \alpha(-2, 0, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$

$\dim Ker f = 3 - rg\, A = 1$

$\operatorname{Im} f = \{ w \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, (x_1, x_2, x_3) \text{ cu } AX = w \}$

$= \{ (2x_1 - x_2 + 4x_3,\ x_1 + x_2 + 2x_3,\ -x_1 - x_2 - 2x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$

$= \{ x_1(2,1,-1) + x_2(-1,1,-1) + \underbrace{x_3(4,2,-2)}_{=2x_3(2,1,-1)} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$

$= \{ (x_1 + 2x_3)(2,1,-1) + x_2(-1,1,-1) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$

$\dim \operatorname{Im} f = 2$

$\dim \operatorname{Im} f = rg\, A$

$$\boxed{\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f}$$

Valori și vectori proprii

Def: $f: V \to V$ endomorfism

$\alpha \in K$ s.n. val proprie pt f dacă $\exists\, v \neq 0_V$ cu $f(v) = \alpha v$

$v \in V$ s.n. vector propriu pt f dacă $v \neq 0_V$ și $f(v) = \alpha v$

$V_\alpha = \{ v \in V \mid f(v) = \alpha v \}$ = vectorii proprii pt. f și α $(+0_V)$

↳ subsp. coresp lui f și α

Pe matrice:

$\exists\, (x_1, \dots, x_n) \neq 0$ a.î. $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \exists\, (x_1, \dots, x_n) \neq 0$

a.î. $(A - \alpha I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \iff \det(A - \alpha I_n) = 0$

Problemă:

$V = \{ f \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad } f \le n \}$

$\dim V = n+1$

$\varphi : V \to \mathbb{R}$ liniară

$\varphi(f) = f(0) = f_0$

↑ term liber al lui f

$\operatorname{Ker} \varphi$, $\operatorname{Im} \varphi$

$\operatorname{Ker} \varphi = \{ f \mid f$ are term. liber $0 \}$

$\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}$ / orice nr real poate fi $f(0)$ i.e. $\varphi(f)$

$\varphi'(f) = f(1)$ $\quad \varphi'(f+g) = (f+g)(1) = f(1) + g(1) = \varphi'(f) + \varphi'(g)$

$\varphi'(\alpha f) = (\alpha f)(1) = \alpha \cdot f(1) = \alpha \cdot \varphi'(f)$

Curs 6 30. Martie 2017

Forme biliniare. Forme pătratice
Reducerea la o formă canonică

Def: Fie V/K - sp. vect peste corpul K com.

O apl. $h: V \to K$ s.n. formă pătratică pe V dacă $\exists$ $g: V \times V \to K$ formă biliniară simetrică a.î.

$h(x) = \underbrace{g(x,x)}_{\text{forma polară a lui } h}$, $\forall x \in V$

Formula de polaritate

$$\circledast \quad \boxed{g(x,y) = \frac{1}{2}\left(h(x+y) - h(x) - h(y)\right), \forall x,y \in V}$$

Obs: Formula $\circledast$ ne arată o rel. biunivocă între f b s și f pătratice

Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ reper vect.

$h: V \to K$ formă pătratică pe V

$h(x) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j$, $\forall$ $x \in V$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\qquad g_{ij} = g(e_i, e_j)$ $\forall i,j = \overline{1,n}$

? $(\exists)$ $B' \subset V$ („bază $\{e_1', \dots, e_n'\}$") a.î. $h(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$, $\forall$ $x = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i'$ $\quad$ (**)

Formula (**) s.n. forma canonică a f p. h, iar baza în care se realiz. forma canonică s.n. baza canonică.

Th. GAUSS: Orice formă pătratică $h: V \to K$ poate fi redusă printr-o sch. de reper la o formă canonică.

Dem: Inducție mat. după $n \to$ Metoda Gauss

Metoda Gauss constă în grupări convenabile de termeni cu scopul de a forma pătrate.

<u>Obs</u>: Avantajul major al m. Gauss este aria de aplicabilitate universală (i.e. se poate aplica pt. $\forall$ formă pătratică).

Exemplu: $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, f pătratică reală

$$\underset{\mathbb{R}^3}{h(x)} = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_3^2, \ \forall\, x = (x_1, x_2, x_3)$$

$X = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$, $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ baza can.

$$h(x) = (x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3) + 5x_2^2 - 4x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3 + 5x_2^2 - 4x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_2x_3$$
$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4(x_2^2 - x_2x_3) - 8x_3^2$$
$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4\left(x_2 + \frac{1}{2}x_3^2\right) - x_3^2 - 8x_3^2 =$$
$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4\left(x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - 9x_3^2$$

Sch. de coord. (reper):

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

$h(x) = y_1^2 + 4y_2^2 - 9y_3^2$, $\forall\, x = \sum_{i=1}^{3} y_i e_i'$

$(***)$

$B' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ baza can. în care se realiz. f. can $(***)$

Forma normală $\to$ este o formă can. pt. f p. reală în care coef care apar sunt ± 1

Sch. de coord: $\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = 2y_2 \\ z_3 = 3y_3 \end{cases}$ $\quad h(x) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

<u>Teoremă</u>: Orice formă pătratică reală poate fi adusă, printr-o sch. de reper la o formă can. specială și anume forma normală:

$$h: V \to \mathbb{R}, \ h(x) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$$

r — rang h
$\hookrightarrow$ rangul formei pătratice h ($\to$ INVARIANT GEOM.)

<u>Dem</u>: Cf th. Gauss

$$h(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots \lambda_r x_r^2, \quad r = rg\, h, \quad \forall x \in V$$

Considerăm $\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$, $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_r < 0$

Sch. de coord.:
$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{\lambda_1}\; x_1 \\ y_2 = \sqrt{\lambda_2}\; x_2 \\ \vdots \\ y_p = \sqrt{\lambda_p}\; x_p \\ y_{p+1} = \sqrt{-\lambda_{p+1}} \cdot x_{p+1} \\ \vdots \\ y_r = \sqrt{-\lambda_r} \cdot x_r \end{cases}$$

$$y_s = x_s, \forall\; s = \overline{r+1, n}$$

Obținem: $h(x) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$

<u>Teorema de inerție a lui Sylvester</u>: Nr. term. pozitivi dintr-o formă canonica a unei forme pătratice reale nu depinde de reperul considerat.

<u>DEM</u>: $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ $\quad h(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_p x_p^2 - \lambda_{p+1} x_{p+1}^2 - \dots - \lambda_r \cdot x_r^2$

$B' = \{e_1', \dots, e_n'\}$

$$h(x) = \lambda_1^* y_1^2 + \dots + \lambda_q^* y_q^2 - \dots - \lambda_r y_r^2$$

Pp. $q < p$

$V' = sp\{e_1, \dots, e_p, e_{r+1}, \dots, e_n\}$

$V'' = sp\{e_{q+1}', \dots, e_r'\}$

$\forall x \in V' \Rightarrow h(x) \geq 0$

$x \in V'' \Rightarrow h(x) < 0$

$\dim(V' + V'') = p + n - r + r - q = n + p - q > n$

$\Rightarrow V' \cap V'' \neq \{0_V\}$

Deci $\exists\ x_0 \in V' \cap V''$, $x_0 \neq 0_V$ $\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in V' \Rightarrow h(x_0) \geq 0 \\ x_0 \in V'' \Rightarrow h(x_0) < 0 \end{cases}$ ⨳

pp. falsă. deci $q = p$

În consecință și nr. term negativi care apar într-o formă canonică a unei forme pătratice reale este același indiferent de reperul considerat.

$$S = p - q$$

p → nr. term. poz

q → nr. term. neg.

S → signatura formei pătratice reale (INVARIANT GEOM.)

Metoda Jacobi:

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \det A = \Delta_n$$

Δ_i, $i = \overline{1,n}$ → minori diag. principali

Th. Jacobi: Fie $h: V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică reală

Dacă toți minorii diag. principali ai lui G sunt nenuli atunci:

$\exists$ $B \subset V$ a.î. h are următoarea f. canonică:

$$h(x) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2, \quad \forall\ x \in V$$

$$G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$$

Exemplu: $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, f. pătratică reală

$$\underset{\mathbb{R}^3}{h(x)} = x_1^2 + \underbrace{2x_1x_2}_{x_1x_2 + x_2x_1} - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_3^2, \quad \forall\ x = (x_1\ x_2\ x_3)$$

$$x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i,$$

$B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$
baza canonică

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \text{m. asoc. f. pătratice } h$$

$\Delta_1 = 1$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4$

$\Delta_3 = -20 - 20 + 4 = -36$

$h(x) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2$

$h(x) = y_1^2 + \frac{1}{4} y_2^2 + \frac{1}{9} y_3^2$

$\text{rg } h = 3$

$s = p - q = 2 - 1 = 1$

Sch. de coord. $z_1 = y_1$

$z_2 = \frac{1}{2} y_2$

$z_3 = \frac{1}{3} y_3$

$h(x) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2, \quad x = \sum_{i=1}^{3} z_i e_i'$

$B' = \{e_1', e_2', e_3'\}$

<u>Def</u>: O formă pătratică $h: V \to \mathbb{R}$ s.n. pozitiv definită dacă $h(x) > 0, \forall x \in V, x \neq 0_V$

$\downarrow$ forma polară

SPAȚII VECTORIALE EUCLIDIENE

Fie $V/\mathbb{R} \to$ sp. vect. real

<u>Def</u>: O formă bil. sim. și pozitivă def. pe V s.n produs scalar pe V.

$g: V \times V \to \mathbb{R}, \; g(x,y) \overset{not}{=} \langle x, y \rangle$

<u>Def</u>: Un spațiu vectorial real dotat cu un produs scalar (Not. $(E/\mathbb{R}, \langle , \rangle)$) s.n. spațiul vectorial euclidian.

<u>Obs</u>: $\forall\ (E/\mathbb{R}, \langle , \rangle)$ sp. vect. eucl. $\to$ sp. normat

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle},\ \forall x \in E$

$d : E \times E \to \mathbb{R}_+$

$d(x,y) = \|y - x\|,\ \forall\ x,y \in E$

• Inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwartz.

În orice sp. vect. euclidian (real) are loc urm. ineg:

$|\langle x,y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|,\ \forall\ x,y \in E$

"=" $\iff$ $\{x,y\}$ s.v. lin. dep.

<u>Dem</u>: $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$: $\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geq 0$

$\iff \langle x,x\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle + 2\langle x, \lambda y\rangle \geq 0$

$\iff \|x\|^2 + 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0, \forall \lambda$

$\Delta_\lambda \le 0 \iff \langle x,y\rangle^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \le 0 \iff$

$\iff \langle x,y\rangle^2 \le \|x\|^2 \|y\|^2 \iff |\langle x,y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$

$\forall\ x,y \in E$

Egalitatea:

"$\Leftarrow$" $\{x,y\}$ lin. dep. $\Rightarrow \exists\ \alpha$ a.î. $y = \alpha x$

$|\langle x, \alpha x\rangle| = |\alpha| \cdot \|x\|^2$

$\|x\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|^2$

$\Longrightarrow |\langle x,y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$.

"$\Rightarrow$" egalitatea

$|\langle x,y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$

$\Delta = 0 \Longrightarrow \exists\ \lambda_0 \in \mathbb{R}$ a.î. $\langle x + \lambda_0 y, x + \lambda_0 y\rangle = 0$

$\Longrightarrow x + \lambda_0 y = 0 \Longrightarrow \{x,y\}$ lin. dep.

Fie $x, y \in E$

$\theta \overset{not}{=} \measuredangle(x, y)$

$\cos\theta = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$, $\theta \in [0, \pi]$

<u>Def</u> a) $\underset{bază}{B} = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$

B se numește bază ortogonală dacă $\langle e_i, e_j\rangle = 0, \forall i \neq j$

b) $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$

B se numește bază ortonormată dacă, în plus față de a), avem $\|e_i\| = 1$, $\forall\, i = \overline{1,n}$

(B bază ortonormată $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, $\forall\, i, j = \overline{1,n}$

$x \perp y$ ortogonali $\Longleftrightarrow$ $\cos \measuredangle(x, y) = 0 \Longleftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$

<u>Exemple:</u> $\mathbb{R}^n$

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\forall\ x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Baza canonică din $\mathbb{R}^n$ e ex. de bază ortonormată

$B_0 = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 1)\}$

Curs 7 06 Aprilie 2017

SPAȚII VECTORIALE EUCLIDIENE

Def: S.n. „spațiu vectorial euclidian", un spațiu vectorial real, dotat cu un produs scalar.

↓ formă biliniară simetrică și pozitiv definită

$(V/\mathbb{R}, \langle , \rangle)$

Exemplu: $\mathbb{R}^n$, $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

produs scalar canonic

Baze ortonormate $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},\ \forall\, i, j = \overline{1,n} \iff$$

→ $\|e_i\| = 1,\ \forall\, i = \overline{1,n}$ // versori

→ $e_i \perp e_j,\ \forall\, 1 \leq i \neq j \leq n \longrightarrow$ b. ortogonală

b. ortogonală

Exemplu: $(\mathbb{R}^n, \underbrace{\langle , \rangle})$ ↳ produs scalar canonic

$$B_0 = \{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)\} \subset \mathbb{R}^n$$

baza canonică din $\mathbb{R}^n$ este o bază ortonormată, în rapo cu produsul scalar canonic

PROCEDEUL DE ORTONORMALIZARE GRAM-SCHMIDT

$$\forall\, \underbrace{\{f_1, \ldots, f_n\}}_{\text{bază}} \subset V_{\text{sp. vect. euclidian}} \Longrightarrow \exists\, \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V \text{ a.î.}$$

↳ bază ortonormată

$$sp\{e_1, \ldots, e_i\} = sp\{f_1, \ldots, f_i\},\ \forall\, i = \overline{1,n}$$

DEM: Inducție matematică după n

$$n = 1 \qquad e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}; \quad \|f_1\| = \sqrt{\langle f_1, f_1 \rangle}$$

Presupunem că am construit $e_1, \dots, e_p$ conform cerințelor

$e_{p+1} = ?$

$e_{p+1} = \dfrac{g_{p+1}}{\|g_{p+1}\|}$, unde $g_{p+1} = f_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i$,

$\langle \cdot, e_i \rangle$, $\forall\, i = \overline{1,p}$

$0 = \langle f_{p+1}, e_i \rangle + \alpha_i \Rightarrow \alpha_i = -\langle f_{p+1}, e_i \rangle$, $\forall\, i = \overline{1,p}$

$\Longrightarrow g_{p+1} = f_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \langle f_{p+1}, e_i \rangle$

sp $\{e_1, \dots, e_p\}$ = sp $\{f_1, \dots, f_p\}$ // din ip.

$\Longrightarrow$ sp $\{e_1, \dots, e_{p+1}\}$ = sp $\{f_1, \dots, f_{p+1}\}$

Avem „=" deoarece e_{p+1} este o comb liniară de $\{e_1, \dots, e_p\}$ și f_{p+1} q.e.d.

Exemplu: $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ ↳ produs scalar canonic

$S = \{v_1 = (0,1,1),\ v_2 = (1,0,1),\ v_3 = (1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$

Să se construiască, utilizând procedeul de ortonormat G-S, o bază ortonormată.

$f_1 = v_1$ $\qquad e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|}$, $\|f_1\| = \sqrt{\langle f_1, f_1 \rangle} = \sqrt{0^2+1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\Longrightarrow e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0,1,1)$

$e_2 = \dfrac{f_2}{\|f_2\|}$, $f_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle \cdot e_1 \Rightarrow$

$f_2 = (1,0,1) - \langle (1,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) =$

$= (1,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = (1,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,1) =$

$= \left(1-0, 0-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}\right) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot (2,-1,1)$

$\|f_2\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \Longrightarrow e_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2} (2,-1,1) = \frac{1}{\sqrt{6}} (2,-1,1)$

$e_3 = \dfrac{f_3}{\|f_3\|}$, $f_3 = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle \cdot e_2 =$

$$= \frac{2}{3}(1,1,-1)$$

$$\|f_3\| = \frac{2}{3}\sqrt{3} \Rightarrow e_3 = \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}\sqrt{3}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}(1,1,-1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \ \forall i,j = \overline{1,3}$$

<u>Def</u>: 1) $(V, \langle , \rangle)$ sp. vect. eucl.

$v \in V$, $v \perp S \subseteq V \overset{def}{\Longleftrightarrow} v \perp x, \forall x \in S$

2) $S_1, S_2 \subseteq V$, $S_1 \perp S_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow}$, $\forall x \in S_1$, $x \perp S_2$

3) Dacă V_1, V_2 sunt subsp. vect. ale lui V a.î. $V_1 \perp V_2$ atunci V_2 s.n. „complementul ortogonal al lui V_1" (sau invers, V_1 compl. lui V_2).

4) Dacă, în plus, $V_1 \oplus V_2 = V$ atunci V_1, V_2 s.n. „<u>suplementare</u>".

<u>Teoremă</u>: Dacă $V_1 \subseteq V$ e subsp. vect. atunci $\exists!$ complementul său ortogonal V_2 a.î. V_1 și V_2 suplementare.

$$\forall V_1 \subseteq V, \exists! V_2 \subseteq V \text{ a.î. } V_1 \oplus V_2 = V, \ V_1 \perp V_2$$

SCHIMBARE DE REPER ORTONORMAT

Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, $B' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ 2 repere ortonormate pe un sp. vect. eucl. V

Notez cu A mat. de trecere de la B la B'

$$e_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \ \forall i = \overline{1,n}$$

$$\langle e_i', e_j' \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \sum_{s=1}^{n} a_{sj} e_s \rangle$$

$$= \sum_{k,s=1}^{n} a_{ki} a_{sj} \underbrace{\langle e_k, e_s \rangle}_{\delta_{ks} \text{ (Kronecker)}}$$

$$= \sum_{k,s=1}^{n} a_{ki} a_{sj} \cdot \delta_{ks}$$

$$\underset{(k=s)}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$$

Dar $\langle e_i', e_j' \rangle = \delta_{ij} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$

$$\boxed{A^t \cdot A = I_n} \Rightarrow A - \text{m. ortogonală}$$

def. mat. trecere

<u>Teoremă</u>: Matricea de trecere între 2 repere ortogonale este o m. ortogonală.

<u>Obs</u>: * A m. ortogonală $\Rightarrow A^{-1} = A^t$

* $\det(A^t \cdot A) = \det I_n = 1$

$\det A^t = \det A \Rightarrow \det(A^t \cdot A) = \det^2(A) = 1 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\det(A) = \pm 1}$$

TRANSFORMĂRI ORTOGONALE

Fie $(V/\mathbb{R}, \langle , \rangle)$ sp. vect. euclidian

<u>Def</u>: Un endomorf. $f: V \to V$ s.n. transformare ortogonală dacă $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \ \forall x, y \in V$

<u>Obs</u>: 1) O transformare ortog. conservă produsul scalar.

2) $\cancel{y} = \cancel{x} \Rightarrow \|x\| = \|f(x)\|, \ \forall x \in V$

Matricea asociată unei transf. ortogonale într-un reper ortonormat:

Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ reper ortonormat

$f: V \to V$ transf. ortogonală

$(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} = A$ = mat. asociată transformării ortog., în raport cu reperul ortonormat B

$$\Rightarrow f(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \ \forall i = \overline{1,n}$$

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \sum_{s=1}^{n} a_{sj} e_s \rangle =$$

$$= \sum_{k,s=1}^{n} a_{ki} a_{sj} \underbrace{\langle e_k, e_s \rangle}_{\delta_{ks}} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$$

$k = s$, altfel e 0

Dc. $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$ (transf. ort.)

și știm că $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \Rightarrow A - \text{m. ortogonală}$$

<u>Teoremă</u>: Matricea asociată unei transformări ortogonale într-un reper ortonormat este o matrice ortogonală.

Altfel spus, orice transformare ortogonală poate fi privită ca o schimbare de reper ortonormat.

ENDOMORFISME SIMETRICE

Fie $(V_{/\mathbb{R}}, \langle , \rangle)$ un sp. vect. euclidian

Def: Un endomorfism $f: V \to V$ s.n. simetric dacă:

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle, \forall x, y \in V$$

Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază $\subseteq V$ reper ortonormat

Atunci f e endomorfism simetric $\iff \langle f(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, f(e_j) \rangle$ $\forall i, j = \overline{1,n}$

Notez cu A mat. asoc endomorf sim în raport cu reperul ortonormat $B \subset V$.

$$f(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot e_k, \forall i = \overline{1,n}$$

$$\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot e_k, e_j \rangle = \langle e_i, \sum_{s=1}^{n} a_{sj} \cdot e_s \rangle, \forall i, j = \overline{1,n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \underbrace{\langle e_k, e_j \rangle}_{\delta_{kj}} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj} \underbrace{\langle e_i, e_s \rangle}_{\delta_{is}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot \delta_{kj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj} \delta_{is}$$

$k=j \Rightarrow \delta = 1$ altfel $= 0$ $\quad i=s$

$$\Rightarrow a_{ji} = a_{ij} \Rightarrow A \text{ matrice simetrică}$$

$\forall i, j = \overline{1,n}$

Propoziție: O condiție necesară și suficientă ca un endomorfism al unui sp. euclidian să fie sim. este ca matricea asoc endomorf în raport cu o bază ortonormată să fie simetrică.

Obs: Matricea asoc. unui endomorf. sim. este sim., chiar dacă reperul considerat nu este obligatoriu ortonormat (dată fiind formula de sch. ~~de reper~~ a matricei asociate unui endomorfism la sch. de reper).

Proprietăți:

1) Teoremă: Rădăcinile pol. caracteristic al unui endomorf. simetric sunt reale (toate).

în corpul scalarilor sunt val. proprii

2) Teoremă: Vectorii proprii corespunzători val. proprii distincte, pt. un endomorf. simetric, sunt ortogonali.

DEM: Fie $f: V \to V$ endomorf sim.

și v_1, v_2 doi vectori proprii corsp. val. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ adică

$f(v_1) = \lambda_1 v_1$

$f(v_2) = \lambda_2 v_2$

$\langle f(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, f(v_2) \rangle \Leftrightarrow \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ dar $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$ contradicție

sau

$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ // v_1 și v_2 sunt ortogonali $(v_1 \perp v_2)$

q.e.d.

3) Teoremă: $\exists$ un reper ortonormat al unui sp vect. euclidian a.î. mat. asoc. unui endomorfism simetric este diagonală. Altfel spus, orice endomorf. simetric este diagonalizabil.

Conexiunea între endom. simetric și formele bil. sim.:

Fie $g: V \times V \to \mathbb{R}$ f b.s.

$B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ reper ortonormat

$g(e_i, e_j) = g_{ij}$

mat $G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

mat. asoc. f b.s. este simetrica: $g(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \cdot x_i \cdot y_j$

Considerăm $f: V \to V$ endomorf. cu m. asoc G, în raport cu B. Dar G e mat. sim $\Longrightarrow f$ end. simetric $\Rightarrow \exists$ un reper ortonormat a.î. mat. asoc. endom. f, adică G, are forma diagonală.

Atunci și forma pătratică corесp f b.s. poate fi adusă la o formă canonică prin sch. de reper ortonormate, adică prin metoda transf. ortogonale.

ex 3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$f_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)\dots(5-\lambda)$$

$\Rightarrow$ v.p. ale lui A sunt $1, \dots, 5$

$V_{\lambda_1} = \langle e_1 \rangle \quad \dots \quad V_{\lambda_5} = \langle e_5 \rangle$

Def: $A \in M_n(K)$ s.n. diagonalizabilă dacă $\exists P \in M_n(K)$, inversabilă și $D \in M_n(K)$ a.î. $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$\left\{ A^{2017} = P \cdot D \cdot \cancel{P^{-1}} \cdot \cancel{P} \cdot \cancel{\dots} \cancel{P} \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^{2017} \cdot P^{-1} \right.$

Def: Fie λ - e v.p. pt. A;

mult. algebrică $m_a(\lambda)$ = mult lui λ ca răd în f_A

mult geometrică $m_g(\lambda) = \dim_K V_\lambda$

OBS: $m_g(\lambda) \le m_a(\lambda)$

Teoremă: A e diagonalizabilă dacă $\forall \lambda$ v.p $m_g(\lambda) = m_a(\lambda) \iff K^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}$

„$\supseteq$" $\dim = m_g(\lambda_1) = m_a \lambda_1$ ... $\dim = m_g(\lambda_s) = m_a \lambda_s$

$= m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_s) = n$ (nr. de răd. al pol. f_A)

ex 4: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$

Pasul 1: Calculăm val. prop; vect. prop;

$V_{\lambda_1}, \dots,$

Pasul 2: $m_a(\lambda) = m_g(\lambda), \forall \lambda$??

$$f_A = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & -\lambda \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda)(3-\lambda)^2 \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 3 \end{array}$$

$$V\lambda_1 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \langle v_1 \rangle \Rightarrow$$

$$\dim V\lambda_1 = mg(\lambda_1) = 3 - rg\, A = 1 = ma(\lambda_1)$$

$$V\lambda_2 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \quad V\lambda_2 = \langle v_2, v_3 \rangle$$

$$\dim V\lambda_2 = mg(\lambda_2) = 3 - \underbrace{rg\, \cancel{A}mat}_{=1} = 2 = ma(\lambda_2)$$

$\Rightarrow A$ e diagonalizabilă

∇ <u>Algoritm de aflare a lui D și P</u>

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

are pe diag. v.p. ale lui A cu tot cu multipl.

ex: $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

P va avea pe coloane baze din $V\lambda$ păstrând ordinea în care am pus vp pe diag. lui D.

$$P = \left[\underbrace{v_2 \,\middle|\, v_3}_{\text{baze ale lui } V\lambda_2} \,\middle|\, \underbrace{v_1}_{\text{baza lui } V\lambda_1}\right]$$

Temă: calc P pt. ex 4

Obs: Dacă A are n val. propri diferite $\Longrightarrow$ A e diagonalizabil
$m_a(\lambda_i) = 1, \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow m_g(\lambda_i) = 1 \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$P = \left[v_1 \middle| \dots \middle| v_n \right]$$

Celulă Jordan $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$

Formă Jordan: $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

Curs 8

CONICE ÎN PLANUL EUCLIDIAN $\mathbb{R}^2$

Def: Locul geom. al pct. din planul $\mathbb{R}^2$ ale căror coord (x,y) într-un reper satisf. o ec. de forma:

$f(x,y)=0$, unde $f(x,y)= a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+ 2a_{23}y+a_{33}$, unde $a_{11}^2+a_{22}^2+a_{33}^2\neq 0$ $(*)$

Se numește CONICA forma $(*)$ a ec. conice nu se schimbă la o sch. a reperului, se sch. însă coef $a_{ij}\in\mathbb{R}$, $i,j=\overline{1,3}$

Pb: Raportăm conicele la sist. de coordonate convenabile a.î. să fie descrise prin ec. cât mai simple.

$$a=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} a & b\\ {}^tb & a_{33}\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} a_{13}\\ a_{23}\end{pmatrix}$$

$\delta=\det a$, $\Delta=\det A$

Dacă $\delta\neq 0 \Rightarrow$ conica are centru unic

Dacă $\Delta\neq 0 \Longrightarrow$ conica este nedegenerat

ADUCEREA LA FORMA CANONICĂ A CONICELOR

$f(x,y)=\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+c=0$

$f(x,y)=\lambda_1x^2+cy=0$

Def: Centrul unei conice este un pct. C din plan cu prop. că simetricul $\forall$ pct. de pe conică față de C aparține de asemenea conicei.

Dacă $\delta\neq 0 \Rightarrow$ conica are un centru unic $C(x_0,y_0)$, sol. a sistemului
$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases} \iff \begin{cases}2a_{11}x+2a_{12}y+2a_{13}=0\\ 2a_{22}y+2a_{12}x+2a_{23}=0\end{cases}\iff$$

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0\\ a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0\end{cases}$$

Facem translația τ de ec. $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{array}$

$$\tau(\Gamma): a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + 2a_{12}x'y' + \underbrace{f(x_0, y_0)}_{= \frac{\Delta}{\delta}} = 0$$

! Alegem două axe ortogonale ale conicei

Direcțiile sunt date de 2 vectori proprii ort. ai matricei a

Mai întâi găsim val. proprii ale lui a.

$$\underset{\text{ec. caract.}}{P(\lambda) = 0} \iff \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - I\lambda + \delta = 0 \qquad I = a_{11} + a_{22}, \quad \delta = \det a$$

Fie λ_1, λ_2 2 val. prop. și

$\exists\ \delta_i = (l_i, m_i)$ $i = \overline{1,2}$ 2 vect. proprii ort. coresp.

Schimbarea de reper de la rep. canonic la $\{O, \delta_1, \delta_2\}$ se face cu transf. ortog. θ $\begin{cases} x'' = l_1 x' + m_1 y' \\ y'' = l_2 x' + m_2 y' \end{cases}$ $\begin{array}{l} (l_1, m_1) \to (1, 0) \\ (l_2, m_2) \to (0, 1) \end{array}$

Axele conicei sunt aplicate peste axele reperului.

$$\theta \circ \tau(\Gamma) : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

$\downarrow$ conica congruentă cu Γ

$$\delta = \det a' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$$

Dacă $\Delta \neq 0$ $\begin{cases} \delta > 0 - \text{elipsă} \\ \delta < 0 - \text{hiperbolă} \end{cases}$

$\Delta = 0$ $\begin{cases} \delta > 0 - \text{pct. dublu} \\ \delta < 0 - \text{2 dr. concurente} \end{cases}$

Dacă $\delta = 0$ conica este de tip parabolă.

$\left.\begin{array}{l}\delta = 0 \\ rg\, a \neq 1\end{array}\right\} \Rightarrow$ putem pp. că $\begin{array}{l}\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 \neq 0\end{array}$

Aplic izom θ și obț. conica congr.:

$\theta(\gamma): \lambda_1 x^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & a'_{13} \\ 0 & 0 & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix} = -\lambda_1 (a'_{23})^2$$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow a'_{23} = 0$

$$\lambda_1 x^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a_{33} = 0$$

$$\lambda_1 \left(x + \frac{a'_{13}}{\lambda_1}\right)^2 - \lambda_1 \frac{a'^2_{13}}{\lambda_1^2} + 2a'_{23}y + a_{33} = 0$$

$\lambda_1 x^2 + 2a'_{23}y + c = 0$, unde $c = a'_{33} - \frac{a'^2_{13}}{\lambda_1}$

Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow$ ec. repr. $\emptyset$ sau o pereche de dr. $\parallel$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ efectuăm translația

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + \frac{c}{2a'_{23}} \end{cases}$$

Obținem $\lambda_1 x^2 + 2a'_{23}y = 0$, $a'_{23} \neq 0 \longrightarrow$ PARABOLĂ

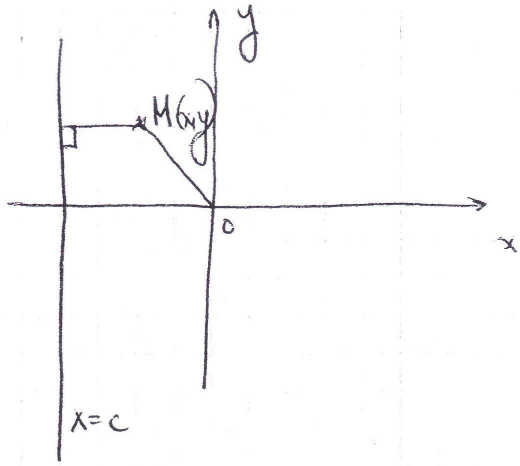
Dacă, în cazul $\delta = 0$ avem $\begin{cases} \Delta \neq 0 \rightarrow \text{PARABOLĂ} \\ \Delta = 0 \rightarrow 2 \text{ dr. } \parallel \end{cases}$

Teorema de caracterizare a conicelor nedegenerate

Fie d dr. și $F \notin d$. Locul geometric al pctelor din $\mathbb{R}^2$ pt. care raportul dist. la dr d și la pct. F (numit focar) este o ct. $e \in (0, \infty)$, este o conică nedegenerată:

1) hiperbolă pt. $e \in (0,1)$
2) parabolă pt. $e = 1$
3) elipsă pt. $e \in (1, \infty)$

Dem: $e = \dfrac{|x-c|}{\sqrt{x^2+y^2}}$



$(x-c)^2 = e^2(x^2+y^2)$

$\Gamma: (1-e^2)x^2 - e^2y^2 - 2cx + c^2 = 0$

$\delta = \begin{vmatrix} 1-e^2 & 0 \\ 0 & -e^2 \end{vmatrix} = e^2(e^2-1)$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1-e^2 & 0 & -c \\ 0 & -e^2 & 0 \\ -c & 0 & c^2 \end{vmatrix} = -e^2 \begin{vmatrix} 1-e^2 & -c \\ -c & c^2 \end{vmatrix} = c^2 \cdot e^4 \neq 0$

Dacă $\delta > 0 \iff e \in (1, \infty)$
$\boxed{\text{ELIPSĂ}}$

$\delta = 0 \iff e = 1$
$\boxed{\text{PARABOLA}}$

$\delta < 0 \iff e \in (0, 1)$
$\boxed{\text{HIPERBOLA}}$

Avem $\delta \neq 0$
- $\Delta \neq 0$ conică nedeg.
  - $\delta > 0$ elipsă sau $\emptyset$
  - $\delta < 0$ hiperbolă
- $\Delta = 0$ conică deg.
  - $\delta > 0$ pct. dublu
  - $\delta < 0$ 2 dr. concurente

DEF: $(\forall)$ conică cu $\delta > 0$ s.n. de gen. elipsă
- $\Delta \neq 0$ ELIPSĂ
- $\Delta = 0$ pct. T

— ıı — $\delta < 0$ s.n. hiperbolă
- $\Delta \neq 0$ hiperbolă
- $\Delta = 0$ 2 dr. concurente

$\Delta, \delta, I \longrightarrow$ invarianții matricei unei conice

27. Aprilie 2017

CUADRICE

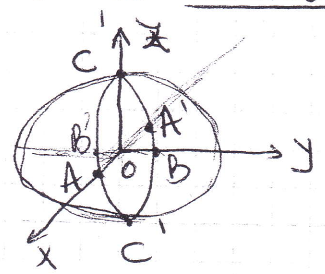
A) Cuadrice pe ecuație redusă

1. ELIPSOIDUL

Def: Locul geometric din spațiul geom. $\mathbb{R}^3$ ale căror coord. în rap. cu un reper fixat, satisface ec.:

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ fixate

se numește <u>ELIPSOID</u>.



Intersecția cu axele de coord:

$Oz\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z^2 - c^2 = 0 \end{cases}$

$z = \pm c$

$C(0,0,c)$, $C'(0,0,-c)$

$Ox\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x^2 - a^2 = 0 \end{cases}$

$x = \pm a$ $\quad A(a,0,0)$, $A'(-a,0,0)$

$Oy\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y^2 - b^2 = 0 \end{cases}$ $\quad B(0,b,0)$, $B'(0,-b,0)$

$y = \pm b$

<u>6 vârfuri</u>

$\cap$ cu plane de coordonate:

$$YOZ: \begin{cases} x=0 \\ \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases} \longrightarrow \text{ELIPSA}$$

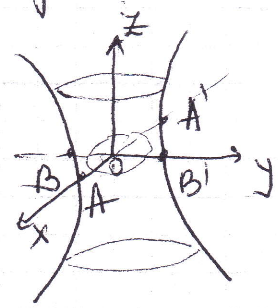
$$XOZ \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases} \rightarrow \text{ELIPSĂ}$$

$$XOY \begin{cases} z=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \end{cases} \rightarrow \text{ELIPSĂ}$$

Intersecțiile elipsoidului cu plane paralele cu axele de coord pot fi elipse, puncte sau $\emptyset$.

2. HIPERBOLOIDUL cu o PÂNZĂ

$$H_{1p}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \quad , \quad a,b,c \in \mathbb{R}^* \text{ fixate}$$



Intersecția cu axele de coord:

$$OZ: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z^2+c^2=0 \end{cases} \quad \emptyset$$

$\downarrow$ axa netransversă

$$OX: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x^2-a^2=0 \end{cases} \quad x=\pm a \qquad A(a,0,0),\ A'(-a,0,0)$$

$$OY: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ y^2-b^2=0 \end{cases} \quad y=\pm b \qquad B(0,b,0)\ ,\ B'(0,-b,0)$$

4 vârfuri

Intersecția cu planele de coord:

$$yOz: \begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{HIPERBOLĂ}$$

$$xOz: \begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{HIPERBOLĂ}$$

$$xOy: \begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{ELIPSĂ}$$

Intersecția cu planele de coord poate fi o hiperbolă sau o elipsă.

__Obs__: Prin orice pt. al hiperboloidului cu o pânză trec <u>drepte generatoare</u> conținute în întregime de suprafața respectivă.

$\downarrow$ generatoare rectilinii

$$Hip: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \iff \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

dreptele generatoare:

$$d_\lambda: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b} \end{cases}, \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$

$\{d_\lambda\} \rightarrow$ o familie de drepte generatoare

$$d_\mu: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b} \end{cases}, \mu \in \overline{\mathbb{R}}$$

$\{d_\mu\}$ → fam de dr. gen.

(*) Deci Hip admite 2 fam. de dr. gen cu propr. următoare:

1) prin fiecare pct. trec 2 gen, câte una din fiecare familie de dr. gen

2) ∀ 2 dr. gen. din aceeași familie sunt <u>necoplanare</u>

Fie $S : f(x,y,z)=0$ o suprafață, $P_0(x_0,y_0,z_0) \in S$

P_0 s.n. pct. regulat pt. supr. S dacă:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{P_0}\right)^2 \neq 0$$

Planul tg la supr. S în pct: $P_0(x_0,y_0,z_0) \in S$:

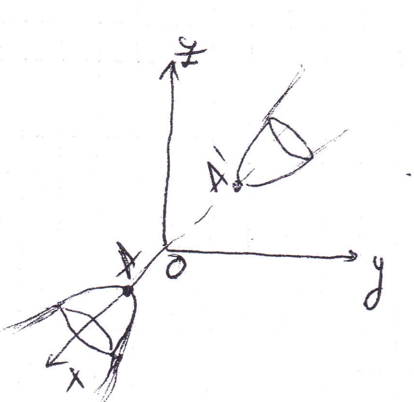
$$\underset{\text{planul tg.}}{\Pi_{P_0}} : \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0}(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{P_0}(z-z_0) =$$

Proprietate: Toate pctele elipsoidului și hiperboloidului cu o pânză sunt <u>pcte. regulate</u>.

<u>Def</u>: Dacă $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0} = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0} = \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{P_0}$ → P_0 pct. singularitate

3. HIPERBOLOIDUL CU 2 PÂNZE

$$H_{2p} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$



Proprietate: H_{2p} - suprafață neconexă și în consecință nu ad. dr. gen.

$\cap\ Oz: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z^2+c^2=0 \end{cases} \quad \emptyset$

$\cap\ Ox: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x^2-a^2=0 \end{cases} \Rightarrow A(a,0,0),\ A'(-a,0,0)$

$\cap\ Oy: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ y^2+b^2=0 \end{cases} \quad \emptyset$

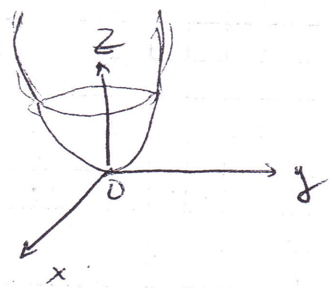
$\cap\ yOz: \begin{cases} x=0 \\ -\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$

$\cap\ xOz: \begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases} \Rightarrow$ hiperbolă

$\cap\ xOy: \begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0 \end{cases} \Rightarrow$ hiperbolă

4. PARABOLOIDUL ELIPTIC

$P_E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$



$\cap$ Axele de coord:

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

$O(0,0,0) \rightarrow$ vârf real

$\cap$ Pl. de coord:

$yOz: \begin{cases} x=0 \\ y^2=2b^2z \end{cases} \Rightarrow$ PARABOLĂ

$XOZ: \begin{cases} y=0 \\ x^2 = 2a^2 z \end{cases} \rightarrow$ parabolă

$XOY \begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow x=y=0 \end{cases}$

$O(0,0,0)$

$\pi \parallel XOY$

$\pi : z = k, \ k \in \mathbb{R}$

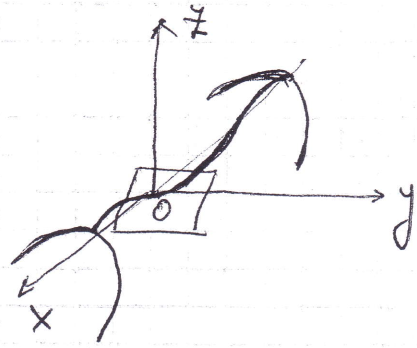
$P_E \cap \pi \begin{cases} z = k \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2k = 0 \end{cases}$ pt. $k>0 \rightarrow$ elipsă

$k=0 \rightarrow$ pct (= vf).

$k<0 \rightarrow \emptyset$

5. PARABOLOIDUL HIPERBOLIC

$P_H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$



$\cap$ Axele de coord:

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

$O(0,0,0)$ singurul vf real al P_H

$\cap$ Pl. de coord

$YOZ : \begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0 \end{cases}$

$y^2 = -2b^2 z \rightarrow$ parabolă

$XOZ : \begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{y = \pm \frac{b}{a} x} \end{cases}$

2 drepte concurente în origine

$P_H \cap \pi \parallel xOy \quad \begin{cases} z = k \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 2k = 0 \end{cases} \rightarrow$ hiperbolă

$P_H : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 2z = 0$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z$$

$d\lambda \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 2\lambda \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = z \end{cases} \qquad \{d\lambda\}_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}}$ fam. de dr. gen.

$d\mu \begin{cases} \mu\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = z \\ \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 2\mu \end{cases} \qquad \{d\mu\}_{\mu \in \overline{\mathbb{R}}}$ —— " ——

Propietate: Toate pctele P_H sunt pct. regulate și pl. tg. în fiecare pct. al P_H conține dr. gen. care trec prin pct. resp.

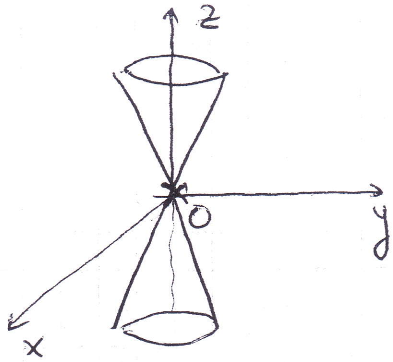
(*) Deci P_H admite 2 fam de dr. gen cu propr. urm.:
1) prin fiecare pct. trec 2 gen., câte una din fiecare fam.
2) $\forall$ 2 dr. gen. din aceeași fam sunt necoplanare

Hiperboloidul cu o pânză și paraboloidul hiperb. sunt 2 ~~drepte~~ suprafețe dublu riglate, i.e. admit fiecare în parte, câte 2 fam. de dr. generatoare

6. CON

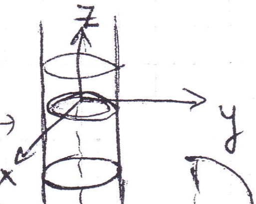
$$\mathcal{C}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

O – vf. conului este un pct. singular

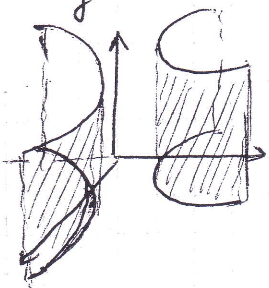


7. CILINDRU

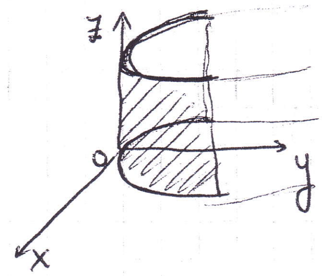
a) eliptic: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ⓐ →



b) hiperbolic: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ⓑ →



c) parabolic: $\frac{x^2}{a^2} - 2y = 0$ ⓒ ↓



B) Cuadrice pe ec. generală

Def: Locul geom. al pctelor din sp $\mathbb{R}^3$ ale căror coord în raport cu un reper fixat, satisfac ec. următoare a rel $f(x,y,z)=0$ se numește <u>cuadrică pe ec. generală</u>.

unde (*) $$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (*)$$

$a = (a_{ij}),\ i,j=\overline{1,3}$ $\qquad \delta \overset{not}{=} \det a$

$A = (a_{ij})\ \ i,j=\overline{1,4}$ $\qquad \Delta = \det A$

Ce reper luăm a.î. forma ec. (*) să fie cea mai simplă → forma canonică

(1) $f(x,y,z) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i, c \in \mathbb{R} \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^3 \neq 0 \end{array} \right.$

(2) $f(x,y,z) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2cz = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0 \\ \lambda_i, c \in \mathbb{R} \end{array} \right.$

Forma gen $\to$ forma canonică

transf. geom $\to$ izometrie

(!) $\forall$ cuadrică pe ec. gen. poate fi adusă la o form. canonică prin sch. izometrică de reper

04. Mai 2017

SEMINAR: Forme biliniare

Def: V/K, $W: V \times V \to K$ s.n. formă biliniară dacă:

- $W(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha W(v_1, w) + \beta W(v_2, w)$
- $W(w, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha W(w, v_1) + \beta W(w, v_2)$,

$\forall \alpha, \beta \in K$; $\forall v_1, v_2, w \in V$

- W s.n. simetrică dacă $W(x,y) = W(y,x)$, $\forall x, y \in V$
- W s.n. antisimetrică dacă $W(x,y) = -W(y,x)$

EXEMPLU: $g: K^n \times K^n \to K$, $g(\underset{x_i}{x}, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in K$

produsul scalar ($K = \mathbb{R}$), $g(x,y) = \langle x,y \rangle$ $(= (x,y))$

$\sum_{i=1}^n (x_i^1 + x_i^2) \cdot y_i =$

$= \sum_{i=1}^n x_i^1 y_i + \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i$

TEMĂ: Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

a) $\langle x, Ay \rangle = \langle A^t x, y \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

b) $\langle x, Ay \rangle = 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow A = 0$

Ex: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

a) $w_A(x, y) = \langle x, Ay \rangle \; (= x^T A y)$ - forma biliniară

b) $A_{ij} = ?$ în funcție de w_A

c) Dem că $\forall\, w$ biliniară (pe $\mathbb{R}^n$), $\exists!\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a.î. $w = w_A$

d) Când e w simetrică?

a) $w_A(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \langle \alpha x_1 + \beta x_2, Ay \rangle \overset{\langle\,\rangle \text{ bil.}}{=\!=}$
$\alpha \langle x_1, Ay \rangle + \beta \langle x_2, Ay \rangle = \alpha\, w_A(x_1, y) + \beta\, w_A(x_2, y)$

$$w_A(y, \alpha x_1 + \beta x_2) = \langle y, A(\alpha x_1 + \beta x_2) \rangle =$$
$$= \langle y, \alpha A x_1 + \beta A x_2 \rangle = \alpha \langle y, Ax_1 \rangle + \beta \langle y, Ax_2 \rangle =$$
$$= \alpha\, w_A(y, x_1) + \beta\, w_A(y, x_2)$$

b) $w_A(x, y) = x^t \cdot A \cdot y = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$

Fixez $i, j = \overline{1,n}$

$w_A(e_i, e_j) = a_{ij}$

c) w bil.

$A = ?$ a.î. $w = w_A$

$a_{ij} = w(e_i, e_j) \Rightarrow w(e_i, e_j) = w_A(e_i, e_j) = a_{ij}, \forall i, j = \overline{1,n}$

$\Rightarrow w = w_A$ pt. că sunt egale pe o bază

d) ω e sim $\Longleftrightarrow$ A e sim.

"$\Leftarrow$" $\omega_A(x,y) = \langle x, Ay\rangle = \langle A^t x, y\rangle \overset{A=A^T}{=\!=}$

$= \langle Ax, y\rangle \overset{\langle,\rangle \text{ sim.}}{=\!=} \langle y, Ax\rangle = \omega_A(y,x)$

"$\Rightarrow$" $\omega_A(x,y) = \langle A^t x, y\rangle = \langle y, A^T x\rangle$

$\omega_A(y,x) = \langle y, Ax\rangle$ $\Longrightarrow$

$\Rightarrow \langle y, A^t x\rangle = \langle y, Ax\rangle \Leftrightarrow \langle y, (A^T - A)x\rangle = 0$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \overset{b)}{\Longrightarrow}$

$A^T - A = 0$

$$\underset{5\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 1}{B} \Rightarrow \underset{5\times 1}{C}$$

Exerciții

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ \cancel{0}-1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow W_A \qquad W_A(x,y) = \sum a_{ij} x_i y_j$

$W_A = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - x_2y_2 + 2x_2y_3 - x_3y_1 + 2x_3y_2 + x_3y_3$

$W_A = 2x_1y_2 - 3x_1y_1 + 4x_3y_3 - 2x_1y_3 + 5x_2y_2$

$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

- $W : V \times V \to K \qquad \dim_K V = n$

B_1 bază $\rightsquigarrow A_W^{B_1}$ matr. lui W în baza B_1:

$W(v_1, v_2) = {}^T(v_1)_{B_1} \cdot A_W^{B_1} (v_2)_{B_1}$

B_2 bază $\rightsquigarrow A_W^{B_2}$ matr. lui W în baza B_2:

$W(v_1, v_2) = {}^T(v_1) A_W^{B_2} (v_2)_{B_2}$

$f : V \to V$ apl. lin.

$[f]_{B_2} = M_{B_2}^{B_1} [f]_{B_1} \cdot M_{B_1}^{B_2} = \left(M_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} [f]_{B_1} \cdot M_{B_1}^{B_2}$

matr. lui f în B_2

$\forall\, v_1, v_2 \in V, \quad {}^T(v_1)_{B_1} A_W^{B_1} \cdot (v_2)_{B_1} = {}^T(v_1)_{B_2} \cdot A_W^{B_2} \cdot (v_2)_{B_2}$

$(v)_{B_1} = M_{B_1}^{B_2} (v)_{B_2}$

$$\Rightarrow (v_1)'_{B_2} \cdot (M_{B_1}^{B_2})^T \cdot A_W^{B_1} \cdot M_{B_1}^{B_2} (v_2)_{B_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{{}^T(M_{B_1}^{B_2}) \cdot A_W^{B_1} \cdot M_{B_1}^{B_2} = A_W^{B_2}}$$

Forme pătratice

Def: 1) V/K, $Q : V \to K$ s.n. formă pătratică dc. $\exists$ $w : V \times V \to K$ formă biliniară, simetrică a.î. $Q(v) = w(v, v)$

?? $w(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x) + Q(y) - Q(x-y))$ formă de polarizare

2) Matricea lui Q (în baza B) = matricea lui W

ex: $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$Q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_3^2 + 2x_2^2 + x_1x_3 - 2x_2x_3$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} w(x,y) = \sum a_{ij} x_i y_j \\ w(x,x) = \sum a_{ij} x_i x_j \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow Q_A(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - x_2^2 + 2x_3^2$$

Teoremă: Pt. orice formă pătratică $Q: V \to K$, $\exists$ o baza B în care Q are forma $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ matricea lui $Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Dem: I. A_Q mat lui $Q \rightsquigarrow \Delta = P \cdot A_Q \cdot (P)^{-1}$ diagonalizabila

A_Q e mat în baza canonică

$A_Q = A_Q^{B_0}$

$A_Q^{B} = (M) \cdot A_Q^{B_0} (M^T)$

! Dc. găsim o bază în care A_Q e diagonală şi $P^{-1} = P^T$

II. Cu Met. Gauss

$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

ALGORITM:

Alegem: Pt. fiecare variabilă, pe rând:

Pasul pt. x_i:

$$Q(x) = \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j x_j^2 + \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_i x_j}_{A} + \text{restul}$$

Cazul I: Dacă $a_{ii} = 0$ (x_i^2 nu apare), sch. de var.

$\begin{cases} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \end{cases}$ Pt un j, $a_{ij} \neq 0$

$\Rightarrow a_{ij} x_i x_j = a_{ij}(y_i^2 - y_j^2)$

CAZUL II: $q_{ii} \neq 0$, $Q(x) = A + \sum_{j=i}^{n} q_{ij} x_i x_j +$ restul $= A + \frac{1}{q_{ii}} \left(q_{ii}^2 x_i^2 + \sum_{j=i+1}^{n} q_{ij} \cdot q_{ii} \cdot x_i x_j \right) +$ restul $=$

$$= A + \frac{1}{q_{ii}} \left(q_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{q_{ij} \cdot x_i}{2} \right) -$$

$-$ $\underbrace{\text{ce trebuie adăugat}}_{\text{nu are } x_1, \dots, x_i}$ $+$ restul

ex: 1 $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Alg. pt. x_1 $= (2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3) + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 =$

$$= \frac{1}{2} \left(2^2 x_1^2 - 2 \cdot 2 \cdot x_1 x_2 - 2 \cdot 2 \cdot x_1 x_3 \right) + \text{restul}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(2x_1 - x_2 - x_3 \right)^2}_{y_1^2} - \frac{1}{2} \left(x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \right) +$$

$+ \underbrace{\text{restul}}$ $= 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

$$= \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{3}{2} x_2^2 + \frac{3}{2} x_3^2 - 3x_2x_3$$

Alg pt. x_2 $= \frac{1}{2} y_1^2 + \left(\frac{3}{2} x_2^2 - 3x_2x_3 \right) + \frac{3}{2} x_3^2$

$$= \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{2}{3} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^2 \cdot x_2^2 - \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot x_2x_3 \right) + \frac{3}{2} x_3^2$$

$$= \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{2}{3} \underbrace{\left(\frac{3}{2} x_2 - \frac{3}{2} x_3 \right)^2}_{y_2^2} \cancel{- \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^2 x_3^2 + \frac{3}{2} x_3^2}$$

$$= \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{2}{3} y_2^2$$

ex2: $Q(x) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_3^2$

$= 2(y_1+y_2)(y_1-y_2) - 2(y_1+y_2)x_3 - 2(y_1-y_2)x_3$

$- 2x_3^2 = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_1x_3 - \cancel{2y_2x_3} - 2y_1x_3 +$

$+ \cancel{2y_2x_3} - 2x_3^2 =$

$= \left(2y_1^2 - 4y_1x_3\right) - 2y_2^2 - 2x_3^2$

$= \frac{1}{2}\cdot\left(2^2y_1^2 - 2\cdot 4\cdot y_1x_3\right) - 2y_2^2 - 2x_3^2$

$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{2y_1 - 2x_3}_{z_1}\right)^2 - 2x_3^2 - 2y_2^2 - 2x_3^2$

$= \frac{1}{2}z_1^2 - 2y_2^2 - 4x_3^2$

Temă: $Q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 8x_2x_3 - 4x_1x_3$

Cursul 10 04. Mai 2017

CUADRICE ÎN SPAȚII EUCLIDIENE $\mathbb{R}^3$
ELEMENTE DE GEOMETRIE AFINĂ

1. $\mathbb{R}^3$

$f(x,y,z)=0$, unde $f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 +$
$+ 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44}$

$rg\,(a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{23}) = 1$

$\rightarrow$ CUADRICĂ PE EC. GENERALĂ

CUADRICE PE EC. REDUSĂ
1. ELIPSOIDUL
2. HIPERBOLOIDUL CU O PÂNZĂ
3. —"— DOUĂ PÂNZE
4. PARABOLOIDUL ELIPTIC
5. —"— HIPERBOLIC
6. CON
7. CILINDRU $\leftarrow$ eliptic, hiperbolic, parabolic

Pe ec. generală

$a = (a_{ij})\ \overline{i,j = 1,3}$, $a_{ij} = a_{ji}$

$A = (a_{ij})\ i,j = \overline{1,4}$

$\delta = \det a \rightarrow$ dacă $\begin{cases} \delta \neq 0 \rightarrow \text{cuadrica are un centru unic} \\ \delta = 0 \rightarrow \text{cuadrica nu —"— —} \end{cases}$

$\Delta = \det A \rightarrow \begin{cases} \Delta \neq 0 & \text{cuadrica este nedegenerată} \\ \Delta = 0 & \text{cuadrica este degenerată} \end{cases}$

$\boxed{\delta \neq 0}$: Coord. centrului $C(x_0, y_0, z_0)$ se det. ca sol. unică a sist. următor $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$

Considerăm translația următoare:

$$t \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \\ z' = z - z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases}$$

$$t(\Gamma): a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z'^2 + f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Obs: Centrul cuadricei dev. originea reperului de coord.

~~Problemă: $f(x_0, y$~~

Prop: $f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\Delta}{\delta}$ (ex. la seminar)

$\delta \neq 0$

Obiectivul: $\Gamma \rightarrow$ forma canonică

I. $f(x, y, z) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0$

II. $f(x, y, z) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2cz = 0$

Alegem 3 axe ortog. 2x2 coresp. val. prop. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ale mat. a

$\det(a - \lambda I_3) = 0$ (ec. caract.)

$\lambda^3 - I\lambda^2 + J\lambda - \delta = 0$

unde $I = Tr(a)$

$J = A_{11} + A_{22} + A_{33} \rightarrow$ compl. alg. al elem. a_{ii} di a $\forall i = \overline{1,3}$

Fie $f_i = (l_i, m_i, n_i) \rightarrow$ vect. prop. unitari coresp. la val. proprii distincte

$f_1 = (l_1, m_1, n_1)$

$f_2 = (l_2, m_2, n_2)$

$f_3 = (l_3, m_3, n_3)$

Aplicăm o transf. ortog. T $\begin{cases} x'' = l_1 x' + m_1 y' + n_1 z' \\ y'' = l_2 x' + m_2 y' + n_2 z' \\ z'' = l_3 x' + m_3 y' + n_3 z' \end{cases} \Rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x' = f(x'', y'', z'') \\ y' = f(x'', y'', z'') \\ z' = f(x'', y'', z'') \end{cases} \quad ?$$

$$(rot)(\Gamma) : \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

<u>Obs</u>: Transf. ortogonală T transformă axele cuadricei în axele de coord.:

$(l_1, m_1, n_1) \rightarrow (1, 0, 0)$ OX

$(l_2, m_2, n_2) \rightarrow (0, 1, 0)$ OY

$(l_3, m_3, n_3) \rightarrow (0, 0, 1)$ OZ

$\left.\begin{matrix} \delta \neq 0 \\ \Delta \neq 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$ ELIPSOIZI

HIPERBOLOID cu o PÂNZĂ / DOUĂ

$\left.\begin{matrix} \delta \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$ CON

PCT. DUBLU

Cazul $\delta = 0$ (cuadrica nu are centru unic)

$\Rightarrow \exists\ \lambda_i = 0$ (cel puțin o val. proprie este egală cu 0)

Ec. gen $\rightarrow$ f canonică $\rightarrow$ paraboloid ⟨ eliptic / hiperbolic

$(\Delta \neq 0)$ CILINDRU ⟨ eliptic / hiperbolic / parabolic

$(\Delta = 0) \rightarrow$ dr. duble

o pereche de plane paralele