Alg C6
pag 1

Algebră Curs 6.

Teorema fundamentală a polinoamelor simetrice.

Def. polinom simetric.

R-inel comutativ. $f \in R[X_1, X_2, \dots, X_m]$ se numește polinom simetric dacă $f(x_1, x_2 \dots x_m) = f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(m)})$ $\forall \sigma \in S_m$.

TFP R inel comutativ. $f \in R[X_1 \dots X_m]$ f simetric.

Atunci există $g \in R[X_1 \dots X_m]$ a.î. $f(x_1 \dots x_m) = g(s_1, s_2 \dots s_m)$.

$s_1(x_1 x_2 \dots x_m) = x_1 + x_2 + \dots + x_m$

$s_2(x_1 x_2 \dots x_m) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{m-1} x_m$

$s_k(x_1 \dots x_m) = x_1 x_2 \dots x_k + \dots\dots$ grad $s_k = k$.

$s_m(x_1 \dots x_m) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m$.

Algoritm pentru aflarea lui g. (R-inel comutativ)

$grad(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) = a_1 + a_2 + \dots + a_m$.

1) Descompunerea în componente „omogene" (monoame cu aceeași grad)

Exemplu: $f(X_1, X_2, X_3) = X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_1^3 X_2^3 + X_1^3 X_3^3 + X_2^3 X_3^3$

Luăm R-inel comutativ

2) Lucrez pe componente „omogene" de grad d.

Găsesc monomul $a \cdot X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_m^{k_m}$

$k_1 + k_2 + \dots + k_m = d$ $\quad k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m \geq 0$.

Dacă găsesc 2 monoame cu aceeași k_1 maxim, îl aleg pe cel cu k_2 maxim.

Găsesc toate soluțiile $\begin{cases} t_1 + t_2 + \dots + t_m = d \\ k_1 \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_m \geq 0 \end{cases}$ $\quad t_j \in \mathbb{N}\ \forall j \in \mathbb{N},\ j \leq m$.

O astfel de soluție produce monomul $s_1^{t_1 - t_2} \cdot s_2^{t_2 - t_3} \dots s_{m-1}^{t_{m-1} - t_m} \cdot s_m^{t_m}$.

$1 \cdot (t_1 - t_2) + (t_2 - t_3) \cdot 2 + 3(t_3 - t_4) + \dots (t_{m-1} - t_m)(m-1) =$
$= t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_m = d$

3) Găsirea coeficienților. (se dau valori lui $x_1 \dots x_m$).

Continuăm pe exemplu:

$g(x_1 x_2 x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = s_1^4 + A \cdot s_1^2 s_2 + B s_2^2 + C s_1 s_3$.

$x_1^4 \cdot x_2^0 \cdot x_3^0 \rightarrow (4, 0, 0) \Rightarrow$ $\quad 4 \geq t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq 0$ $\quad t_1 + t_2 + t_3 = 4$.

3, 1, 0
2, 2, 0
2, 1, 1

A = ?
B = ?
C = ?

$(4,0,0) \rightarrow s_1$
$(3,1,0) \rightarrow s_1^2 s_2$
$(2,2,0) \rightarrow s_2^2$
$(2,1,1) \rightarrow s_1 s_3$.

Alg(6)
pag2.

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$
$$\sigma_3 = x_1x_2x_3$$

$\begin{cases} x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \\ x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{3}{2} \quad \sigma_3 = -\frac{1}{2}. \quad \sigma_2 = 0$

$g(1,1,-\frac{1}{2}) = \frac{81}{16} + C\cdot\left(\frac{-3}{4}\right) = 2 + \frac{1}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow 33 = 81 - 12C \Rightarrow 12C = 48 \Rightarrow \boxed{C = 4}$

$\begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_1 = 2, \ \sigma_2 = 1, \ \sigma_3 = 0$

$g(1,1,0) = 16 + 4A + B = 2 \Rightarrow \boxed{4A + B = -14}$

$\{ x_1 = x_2 = x_3 = 1 \Rightarrow \sigma_1 = 3, \ \sigma_2 = 3, \ \sigma_3 = 1$

$g(1,1,1) = 81 + 27A + 9B + 12 = 3$

$27A + 9B = -90 \Rightarrow \boxed{3A + B = -10}$

$\begin{cases} 4A + B = -14 \Rightarrow B = -4A - 14 = 16 - 14 = 2 \\ 3A + B = -10 \end{cases} \Rightarrow 3A - 4A - 14 = -10 \Rightarrow A = -4$

$A = -4 \quad B = 2 \quad C = 4$

Exemplul 2: $f(x_1x_2x_3) = x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_2^3x_3^3 = \sigma_2^3 + A\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + B\cdot\sigma_3^2$

$\sigma_2^3 \leftarrow (3,3,0) \qquad 3 \geq t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq 0$

$\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \leftarrow (3,2,1)$

$\sigma_3^2 \leftarrow (2,2,2)$

$f(1,1,-2) = 1 - 8 - 8 = -15 = -27 + 4B \Rightarrow 4B = 12 \Rightarrow \boxed{B = 3} \rightarrow \quad x_1 = 1 \ x_2 = 1 \ x_3 = -2, \ \sigma_1 = 0 \ \sigma_2 = 0 \ \sigma_3 = -2$

$x_1 = x_2 = x_3 = 1 \qquad \sigma_1 = 3 \ \sigma_2 = 3 \ \sigma_3 = 1$

$3 = f(1,1,1) = 27 + 9A + 3 \Rightarrow 9A = -27 \Rightarrow \boxed{A = -3}$

Teorema fundamentală a algebrei:

$f \in \mathbb{C}[X]$, $\underbrace{\text{grad } f}_{m} \geq 1 \Rightarrow \exists z \in \mathbb{C}$ a.î. $f(z) = 0$

Consecință $\exists z_1, z_2 \ldots z_m \in \mathbb{C}$ a.î. $f(x) = a(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_m)$

Schiță de demonstrație:

a) $\begin{rcases} f \in \mathbb{R}[X] \\ \text{grad } f = \text{impar} \end{rcases} \Rightarrow f$ are o rădăcină reală

$f(x) = ax^{2m+1} + bx^{2m} + \ldots + c = 0 \qquad a \neq 0$

$a > 0 \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow f(x_0) > 0 \quad f(x_1) < 0 \xrightarrow{f \text{ cont.}}$

$\Rightarrow \exists x_2 \in (x_0, x_1)$ a.î. $f(x_2) = 0$

Alg C6
pag 3

b) $az^2+bz+c=0$ $a,b,c\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$

rădăcinile ecuației sunt complexe $z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\Delta=b^2-4ac$.

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\sqrt{z}=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$ și $\sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right)$

$\cos\pi+i\sin\pi=-1.$ $e^{i\pi}=-1.$

c) $f\in\mathbb{R}[X]$ grad $f\geq 1 \Rightarrow \exists z\in\mathbb{C}$ a.î. $f(z)=0$.

grad $f=2^s\cdot m$, m impar

Inducție după s.

Verific $s=0$ (punctul a)

$s\in\mathbb{N}^*$, presupun enunțul adevărat pentru $nr\leq s-1$

Teoremă K corp comutativ. $f\in K[X]$ grad $f=m$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists L$ corp. com. a.î. $K\leq L$ a.î. f are m rădăcini în L.

Fie $L\geq\mathbb{R}$ a.î. $t_1,t_2,\dots t_m\in L$ sunt rădăcinile lui f. L corp. com,

$1\leq i<j\leq m$, $a\in\mathbb{R}$ fixat.

$u_{ij}(a)=(t_i+t_j)\cdot a+t_i\cdot t_j$.

Construiesc $g(X)=\prod_{i,j}(X-u_{ij}(a))$

⊛ grad $g=C_m^2=\frac{m(m-1)}{2}=2^{s-1}\cdot\underbrace{(m-1)}_{\text{impar}}$

$s\in\mathbb{N}^*\Rightarrow m$ par $\Rightarrow m-1$ impar.

⊛ $g\in\mathbb{R}[X]$

[Coeficienții lui g (văzuți ca nedeterminate) polinoame în $t_1\dots t_m$, pol. simetrice. $\xRightarrow{TFPS}$ coeficient $(t_1\dots t_m)=h(s_1\dots s_m)$
$h\in\mathbb{R}[x_1\dots x_m]$]

$s_K(t_1\dots t_m)=t_1t_2\dots t_K+\dots=(-1)^K\cdot\frac{a_{m-K}}{a_m}$ (Viète) $g\in\mathbb{R}[X]$

Aplic ipoteza de inducție: pt. fiecare $a\in\mathbb{R}$

$\xRightarrow{ip.ind}\exists 1\leq i<j\leq m$ a.î. $u_{ij}(a)\in\mathbb{C}$

$\exists C_m^2$ perechi (i,j) $1\leq i<j\leq m.\Rightarrow$

$\Rightarrow\exists a,b\in\mathbb{R}$ $a\neq b$ a.î. $u_{ij}(a)\in\mathbb{C}$ ~~u_{ji}~~ $u_{ij}(b)\in\mathbb{C}$

$\left\{\begin{array}{l}(t_i+t_j)a+t_it_j\in\mathbb{C}\\(t_i+t_j)b+t_it_j\in\mathbb{C}\end{array}\right]$ le scad $\Rightarrow (b-a)(t_i+t_j)\in\mathbb{C}$

$t_i+t_j\in\mathbb{C}=s$

$t_i\cdot t_j\in\mathbb{C}=p.$

$t_i,t_j\in L$ sunt rădăcinile ecuației

~~z~~ $X^2-sX+p=0$ $s,p\in\mathbb{C}\xRightarrow{b)} t_i,t_j\in\mathbb{C}$

Alg. C6
pag 4

d) $f \in \mathbb{C}[X]$, grad $f \geq 1 \Rightarrow \exists z \in \mathbb{C}$ $f(z)=0$.

$g(X) = f(X) \cdot \overline{f}(X)$ $a_K \neq 0$ $g(X) \in \mathbb{R}[X]$ ⊛

$f(X) = a_K X^K + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$

ok.

$\overline{f}(X) = \overline{a_K} X^K + \dots + \overline{a_1} X + a_0$

Dim ⊛ $\overset{c)}{\Longrightarrow}$ $\exists z \in \mathbb{C}$ a.î. $g(z) = 0 = f(z) \cdot \overline{f}(z) = 0 \Rightarrow$ $f(z)=0$ sau $\overline{f}(z)=0$

Dacă $\overline{f}(z)=0$

$\overline{a_k} \cdot \overline{z}^K + \overline{a_{K-1}} \overline{z}^{K-1} + \dots + \overline{a_1} z + a_0 = 0$

$a_K \overline{z}^K + a_{K-1} z^{K-1} + \dots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0$

d) $\exists z \in \mathbb{C}$ a.î. $f(z)=0$

$f(X) = a(X-z) f_1(X)$ $f_1 \in \mathbb{C}[X]$ grad $f_1 = n-1$. Aplic ip. ind.

<u>GAUSS</u>: X = anul

a este restul împărțirii lui X la 19.
b — " — la 4.
c — " — la 7.
d — " — $19a+15$ la 30
e — " — $2b+4c+6d+6$ la 7.

Paște: $= d+e+4$ aprilie dacă $d+e+4 \leq 30$
$= [(d+e+4)-30]$ mai dacă $d+e+4 \geq 31$

Care e primul an ≥ 2200 în care Paștele ort. pică pe 8 aprilie.