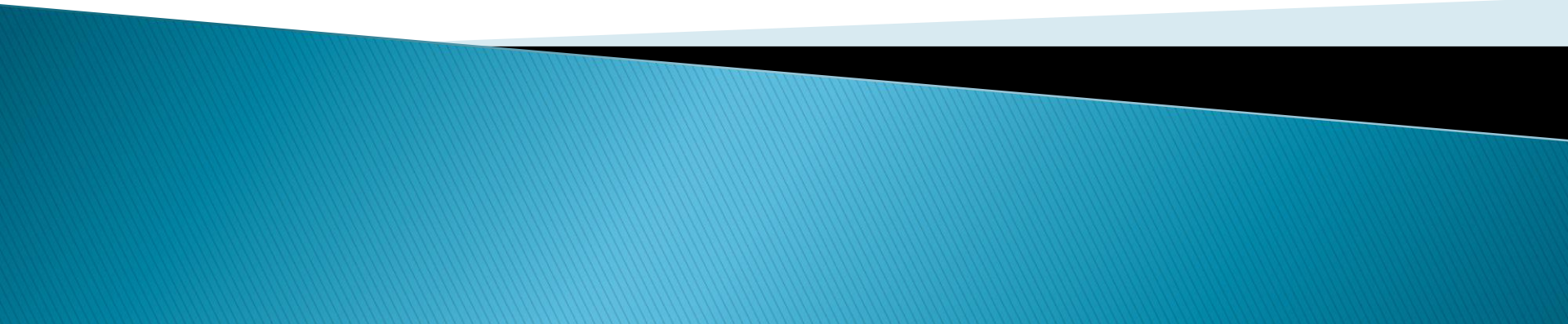


Noțiuni introductive



Multiset

- ▶ S o mulțime (finită) nevidă
- ▶ **Multiset**
 - Intuitiv: “mulțime” + se pot repeta elementele

Multiset

- ▶ S o mulțime (finită) nevidă
- ▶ **Multiset**
 - $R = (S, r), r : S \rightarrow \mathbb{N}$ funcție de multiplicitate
- ▶ **Notăție**
 - $R = \{x^{r(x)} \mid x \in S\}$

Multiset

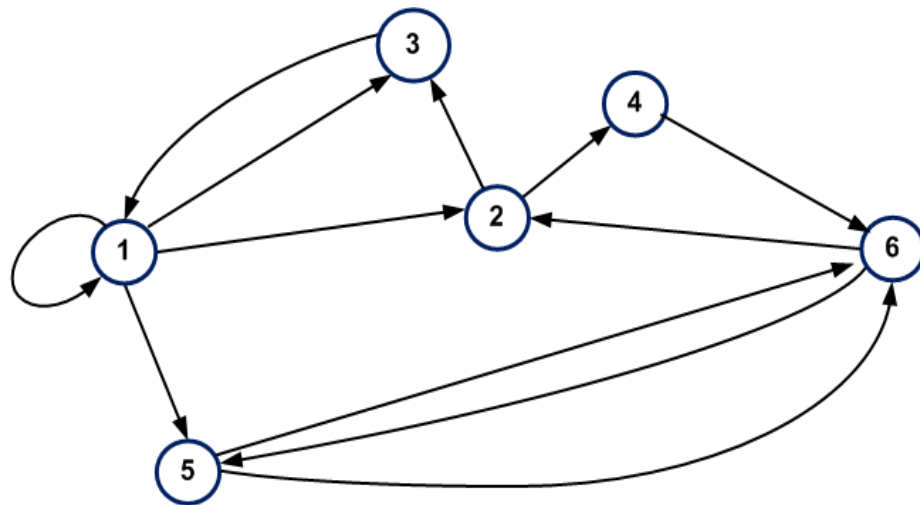
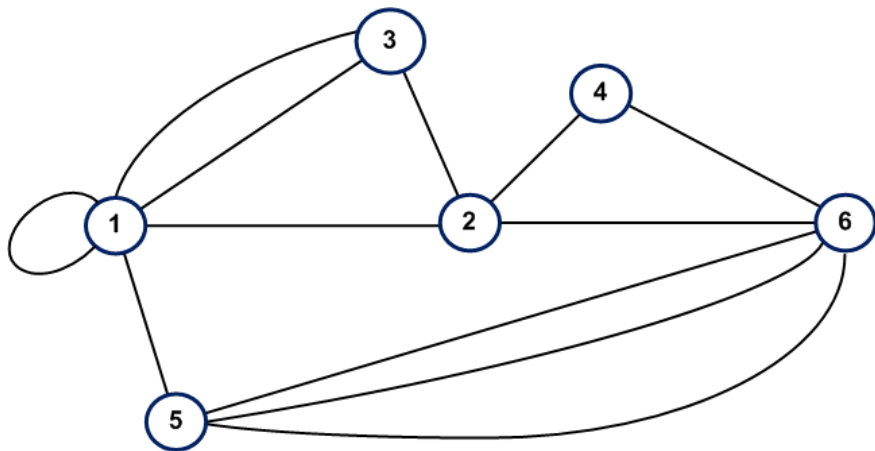
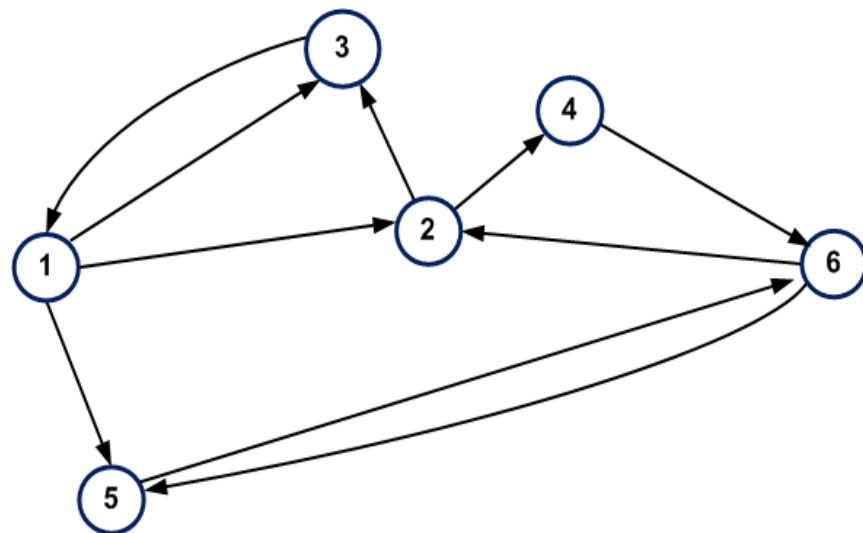
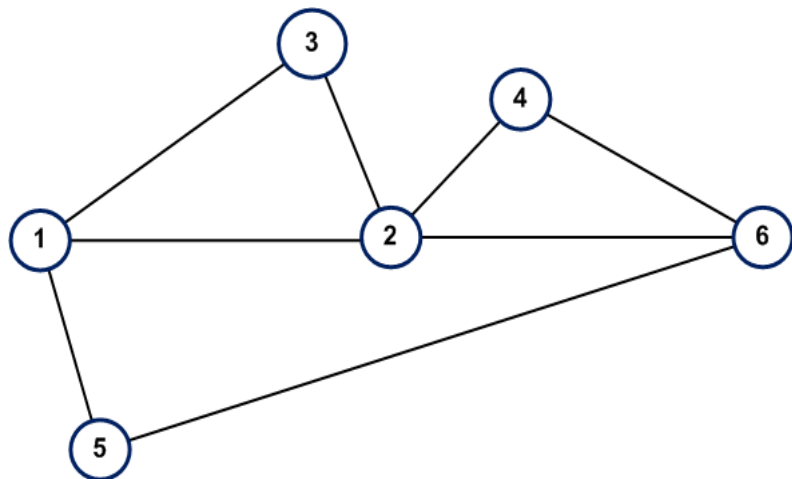
- ▶ Exemplu

- $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

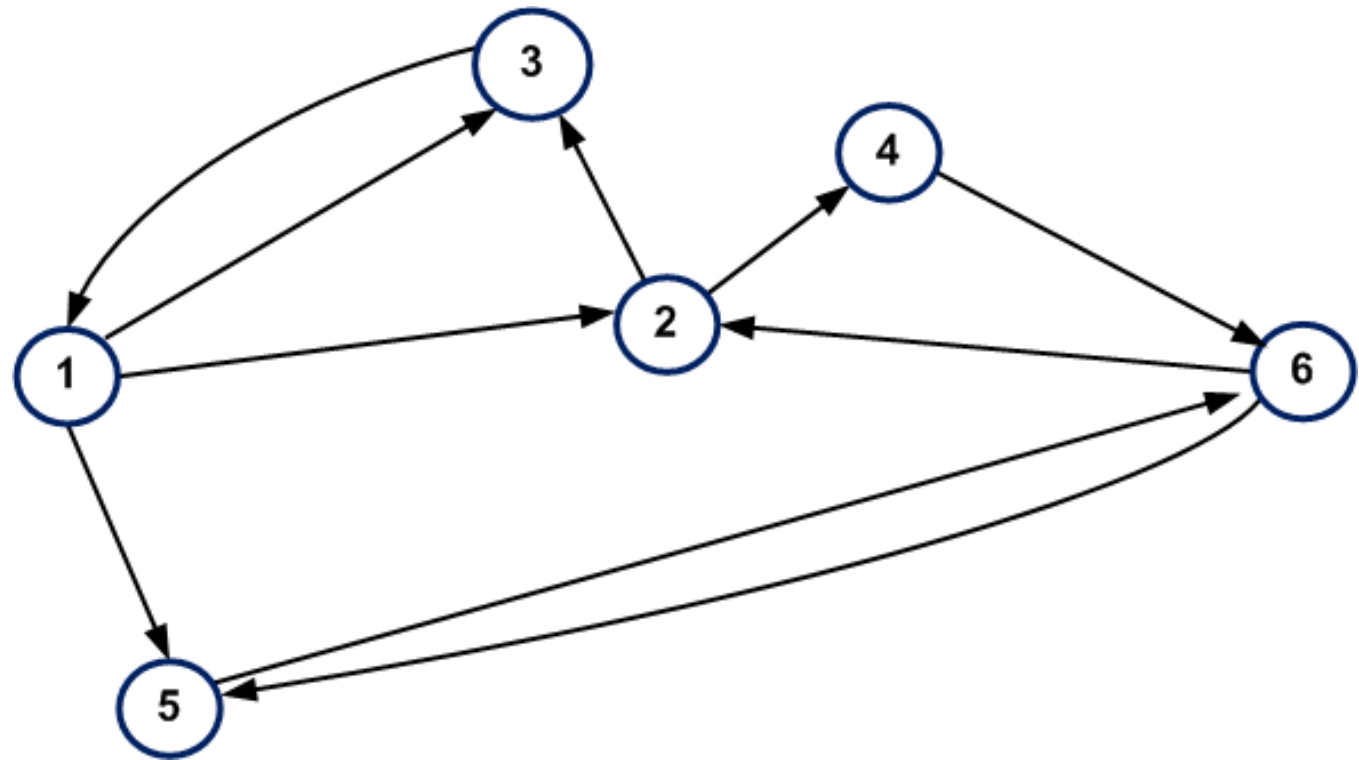
- $R = \{2^2, 3, 5^3\}$

- ▶ $|R| = 2 + 1 + 3 = 6$ – suma multiplicităților

- ▶ $1 \notin R$



Graf orientat



Graf orientat

► Graf orientat: $G = (V, E)$

- V – finită
- E – perechi (ordonate) de 2 elemente distincte din V
- $v \in V$ – **vârf**
- $e = (u, v)$ = **uv** – **arc**
 - $u = e^-$ – **vârf inițial** / origine / extremitate inițială
 - $v = e^+$ – **vârf final** / terminus / extremitate finală

Graf orientat

▶ $G = (V, E)$

- $d_G^-(u)$ – **grad interior**

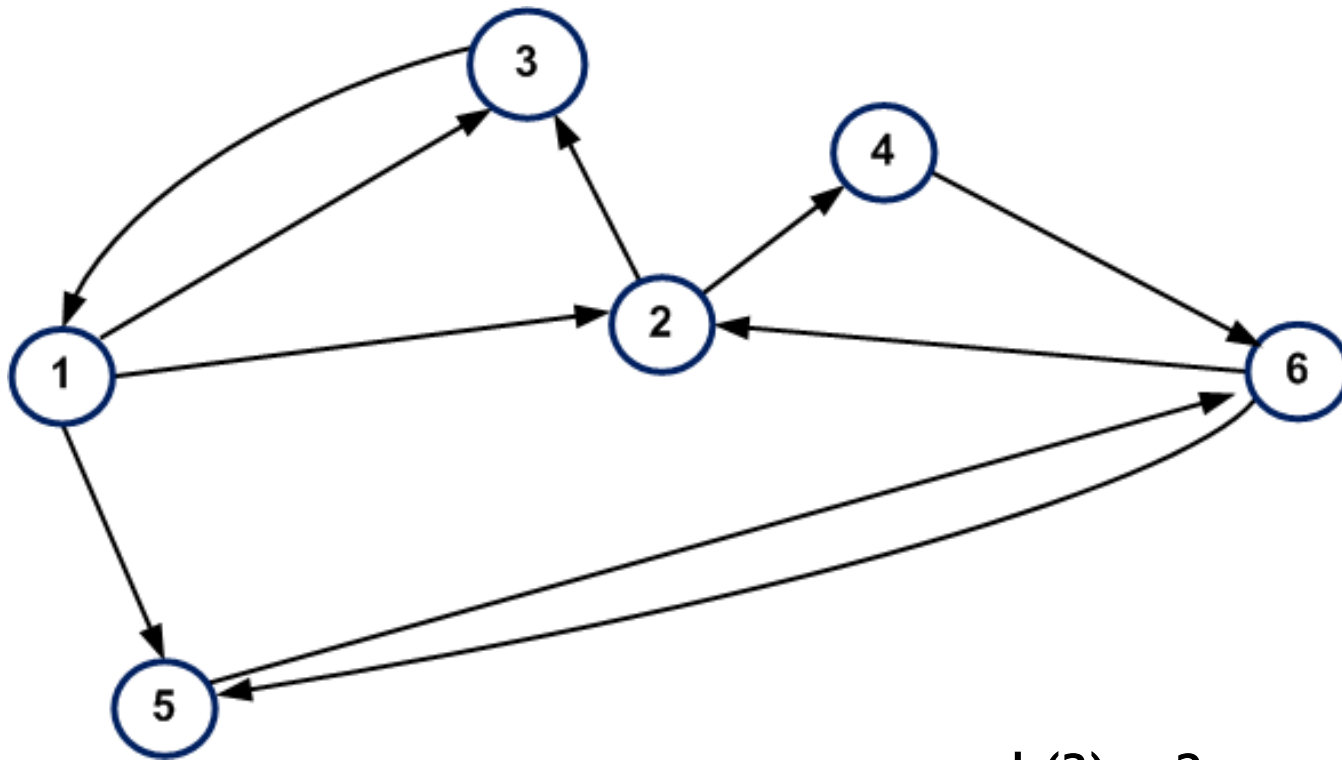
$$d_G^-(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate finala pentru } e\}|$$

- $d_G^+(u)$ – **grad exterior**

$$d_G^+(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate initiala pentru } e\}|$$

- $d_G(u)$ – **grad**

$$d_G(u) = d_G^+(u) + d_G^-(u)$$



$$d^-(3) = 2$$

$$d^+(3) = 1$$

Graf orientat

- Are loc relația

$$\sum_{u \in V} d_G^-(u) = \sum_{u \in V} d_G^+(u) = |E|$$

Multisetul gradelor

- ▶ **G orientat, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$**

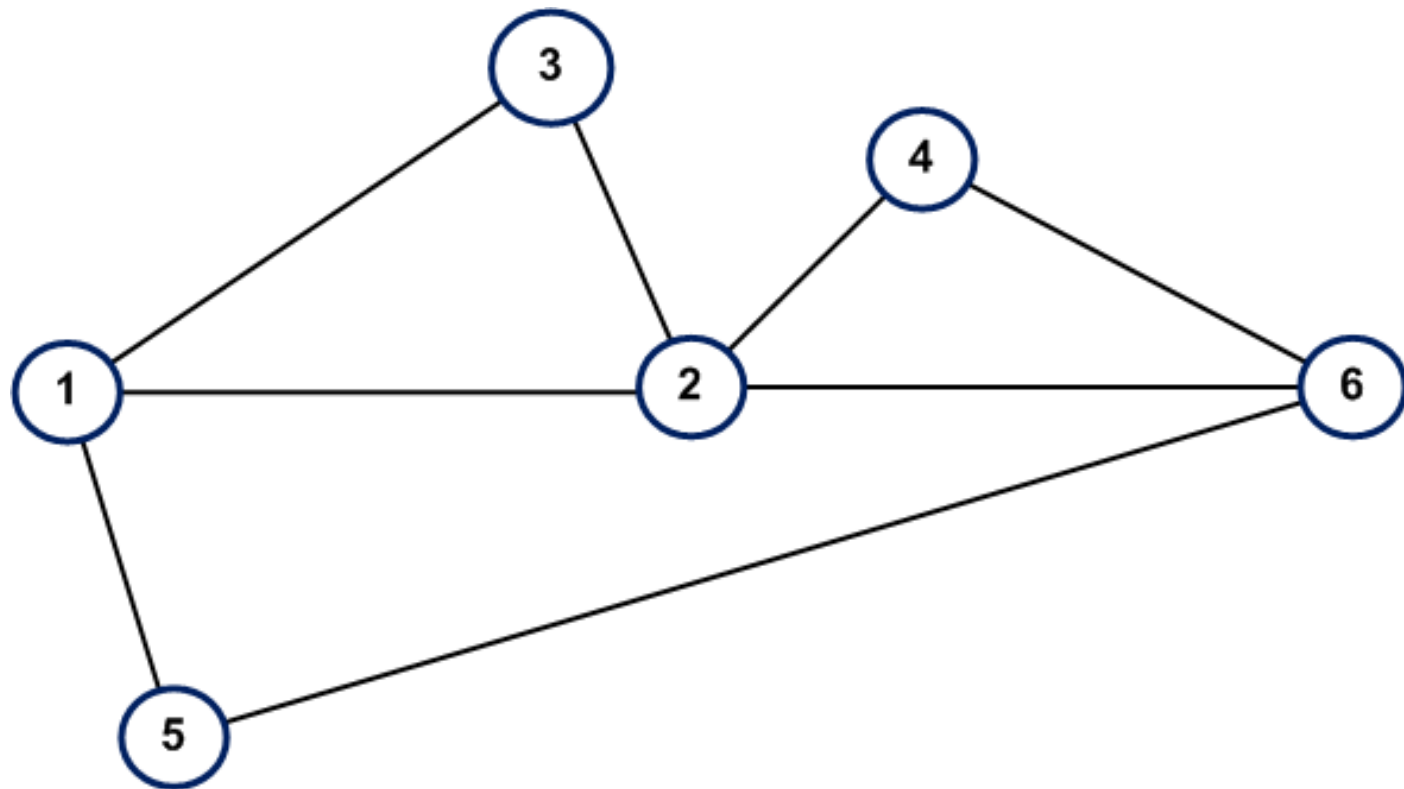
- **Multisetul gradelor interioare**

$$s^-(G) = \{d_G^-(v_1), \dots, d_G^-(v_n)\}$$

- **Multisetul gradelor exterioare**

$$s^+(G) = \{d_G^+(v_1), \dots, d_G^+(v_n)\}$$

Graf neorientat



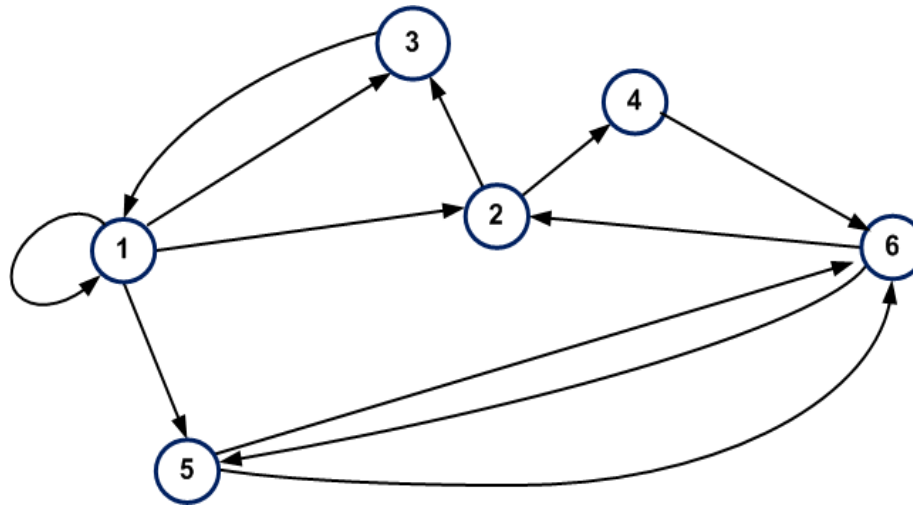
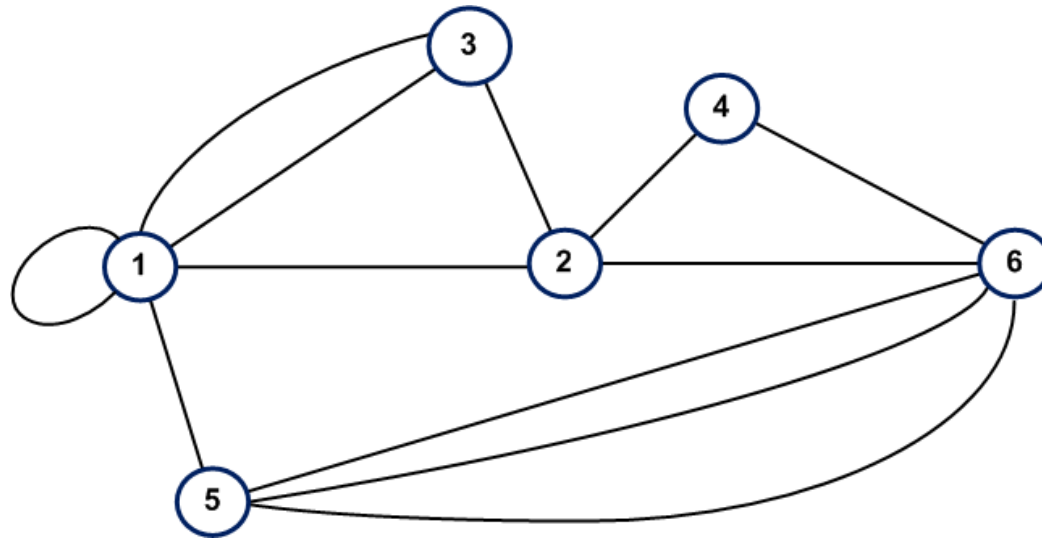
Graf neorientat

- ▶ **Graf neorientat:** $G = (V, E)$
 - V – finită
 - E – submulțimi de 2 elemente (distincte) din V
 - $v \in V$ – **vârf / nod**
 - $e = \{u, v\} = uv$ – **muchie**
 - u, v – **capete / extremități**

Notății

- ▶ $V(G)$, $E(G)$
- ▶ $e = uv$

Multigraf neorientat/orientat



Multigraf

- ▶ $G = (V, E, r)$

$r(e)$ – multiplicitatea muchiei e

Multigraf neorientat

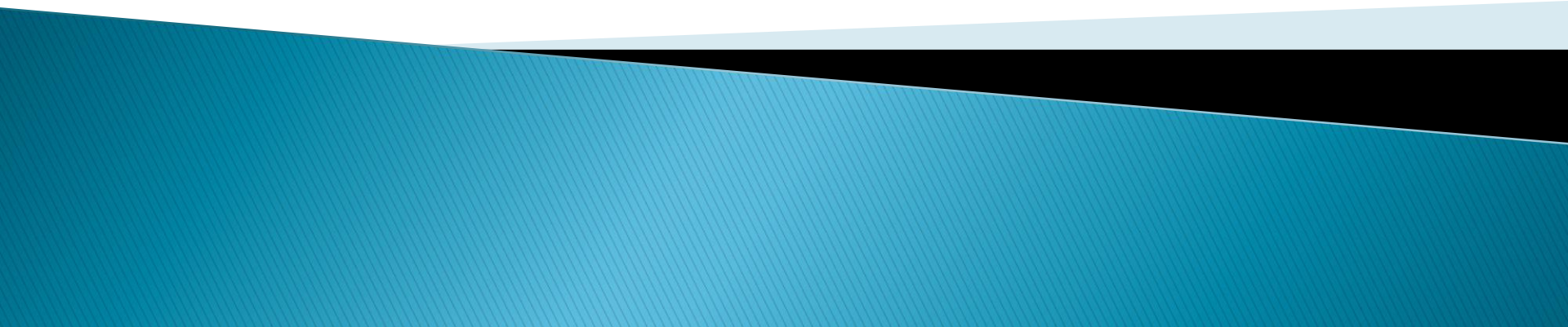
► $G = (V, E, r)$

$r(e)$ – multiplicitatea muchiei e

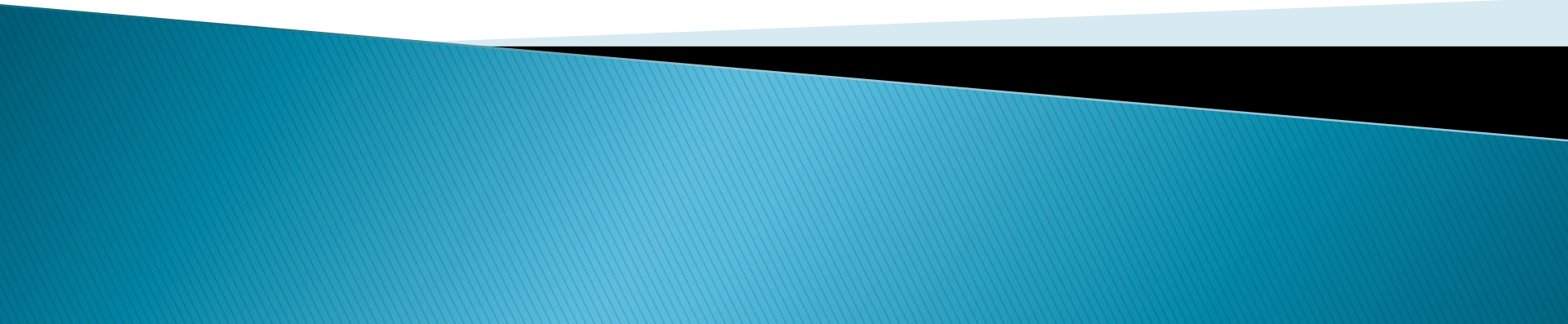
- $e = \{u, u\}$ = **buclă**
- e cu $r(e) > 1$ = **muchie multiplă**

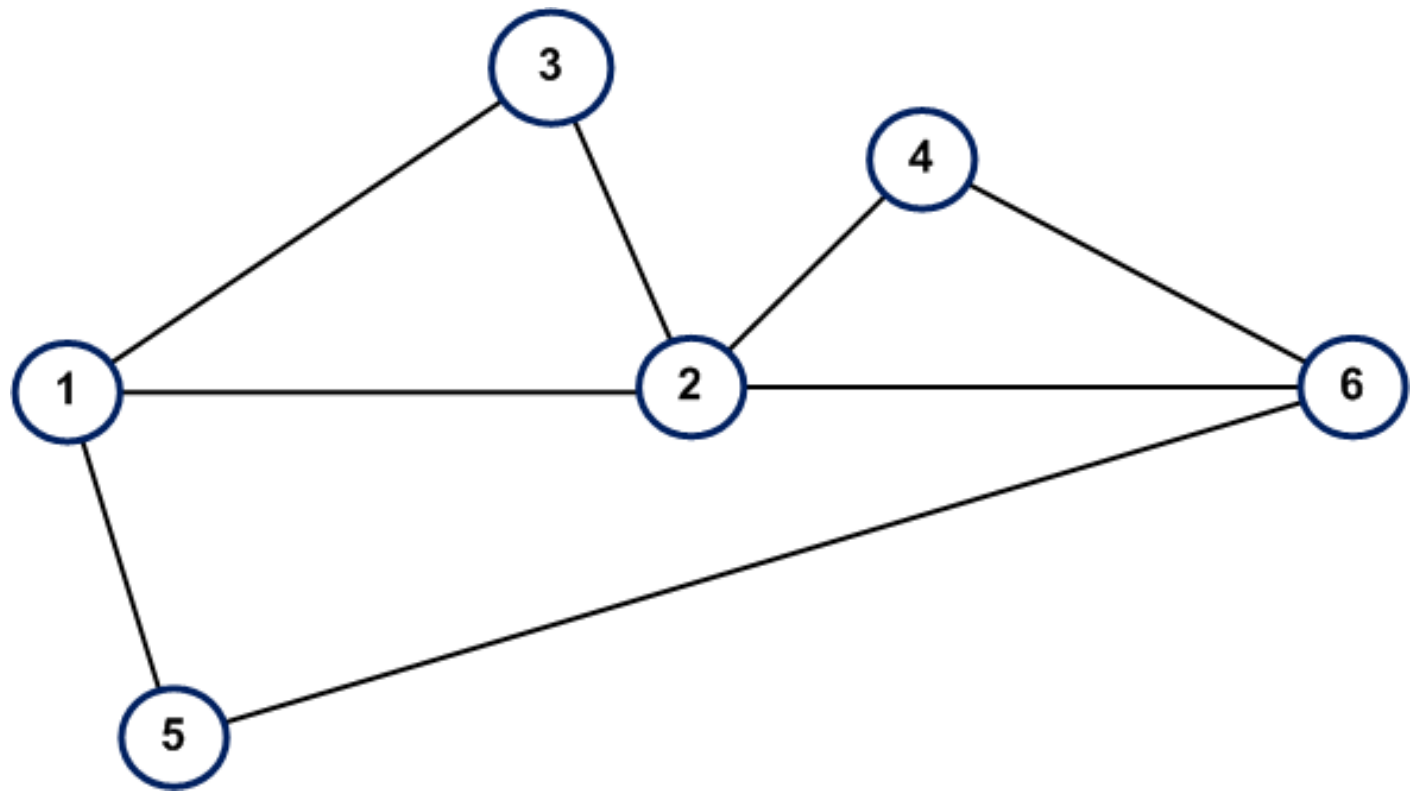
$$d_G(u) = |\{e \in E \mid e \text{ nu este buclă, } u \text{ extremitate a lui } e\}| + 2 \cdot |\{e \in E \mid e \text{ este buclă, } u \text{ extremitate a lui } e\}| +$$

Alte noțiuni fundamentale



Adiacență. Incidență





Adiacență. Incidență

- ▶ Fie $G = (V, E)$ un graf **neorientat**
 - u și $v \in V$ sunt **adiacente** dacă $uv \in E$
 - Un **vecin** al lui $u \in V$ este un vârf adiacent cu el
 - **Notăție** $N_G(u)$ = mulțimea vecinilor lui u

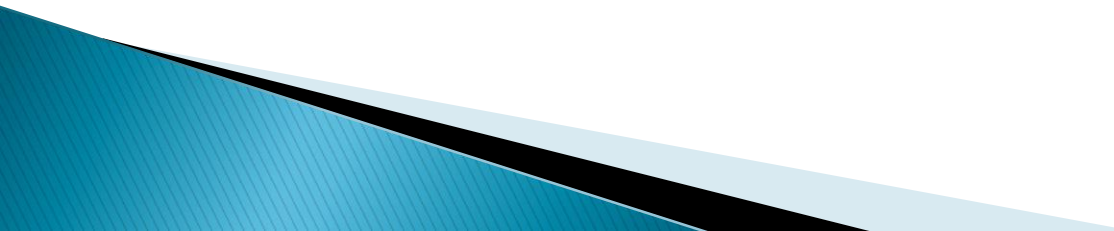
Adiacență. Incidență

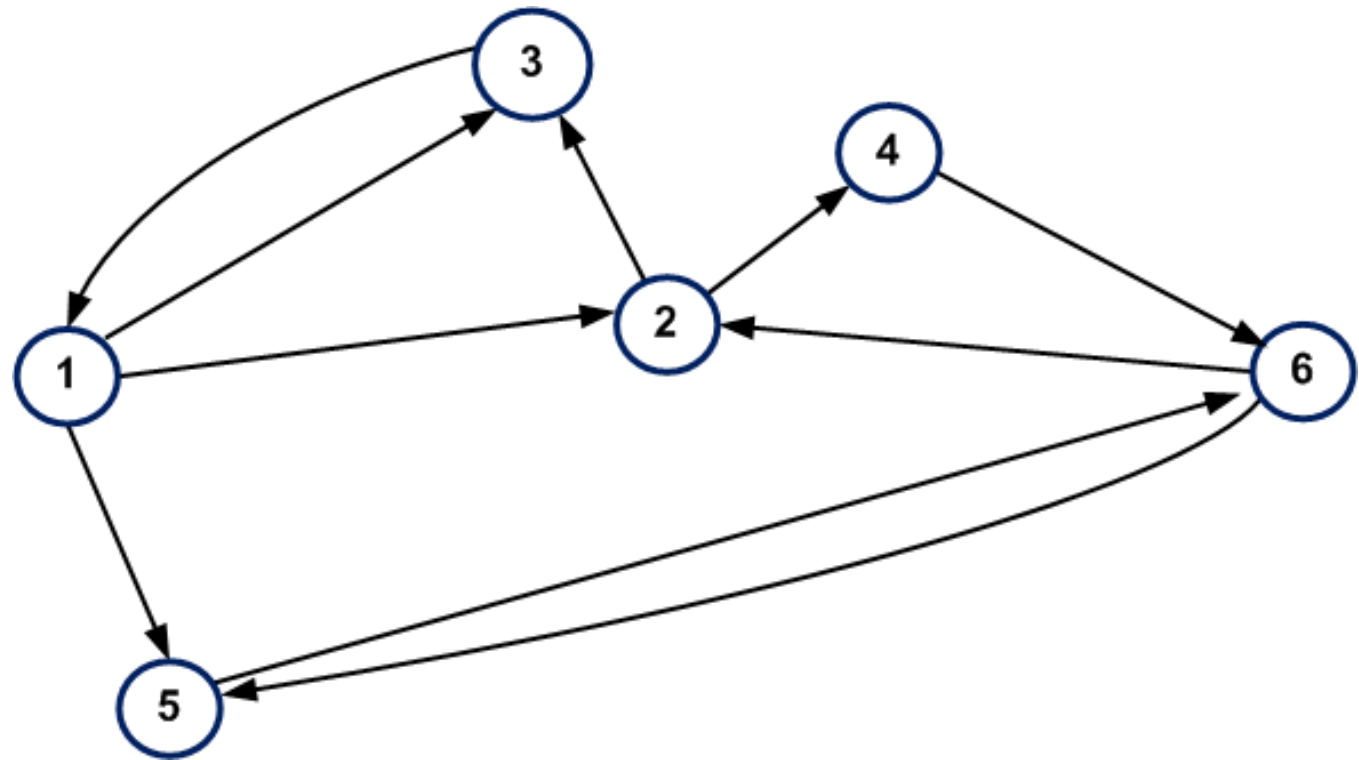
- ▶ Fie $G = (V, E)$ un graf **neorientat**
 - O muchie $e \in E$ este **incidentă** cu un vârf u dacă u este extremitate a lui e
 - e și $f \in E$ sunt **adiacente** dacă există un vârf în care sunt incidente (au o extremitate în comun)

Drumuri. Circuite



Drumuri. Circuite

- ▶ Drum (walk)
 - ▶ Drum simplu (trail)
 - ▶ Drum elementar (path)
 - ▶ Circuit + elementar
 - ▶ Lungimea unui drum
 - ▶ Distanță între două vârfuri
- 



Drumuri. Circuite

Fie G un graf **orientat**

- ▶ Un **drum** este o secvență P de vârfuri

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

unde $v_1, \dots, v_k \in V(G)$

cu proprietatea că între oricare două vârfuri consecutive există arc:

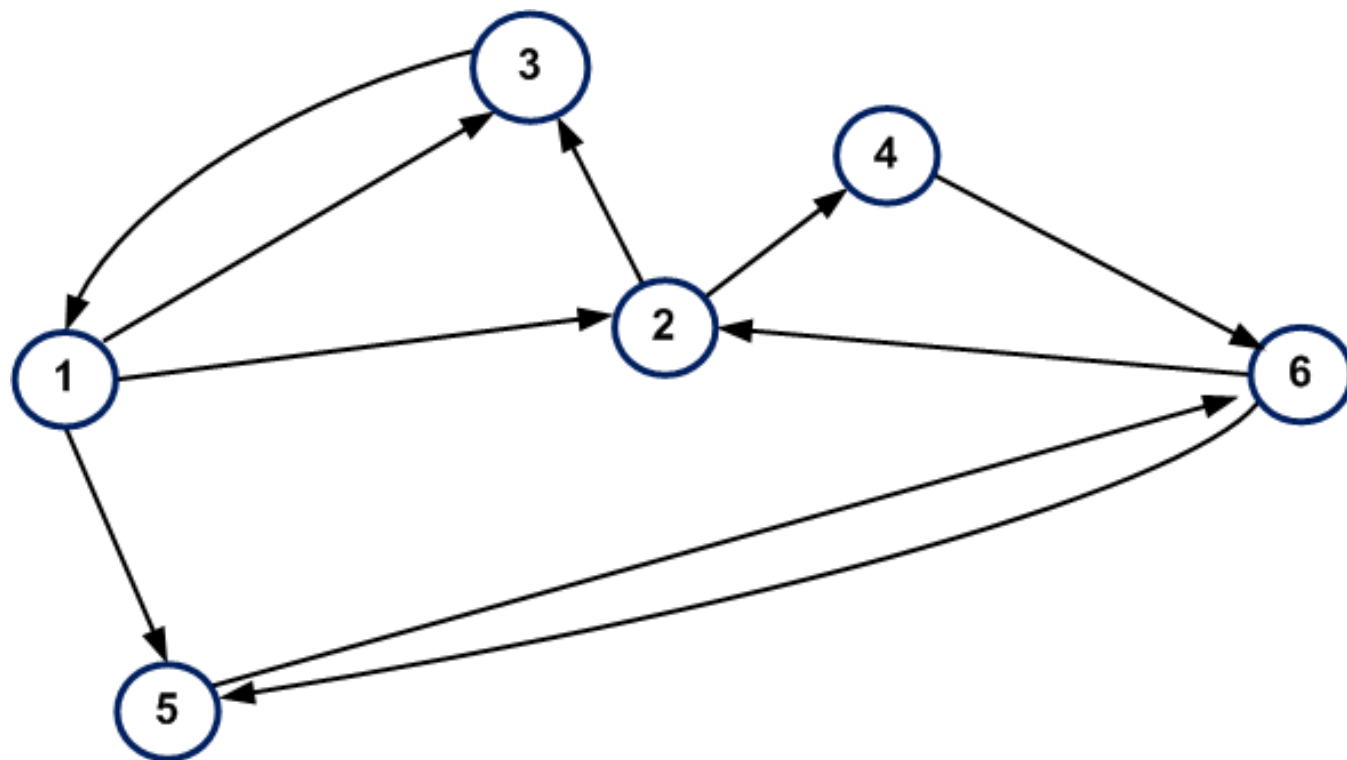
$$(v_i, v_{i+1}) \in E(G), \forall i \in \{1, \dots, k-1\}$$

Drumuri. Circuite

Fie G un graf **orientat** și un **drum**

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

- ▶ P este **drum simplu** dacă nu conține un arc de mai multe ori ($(v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1})$, $\forall i \neq j$)
- ▶ P este **drum elementar** dacă nu conține un vârf de mai multe ori ($v_i \neq v_j$, $\forall i \neq j$)



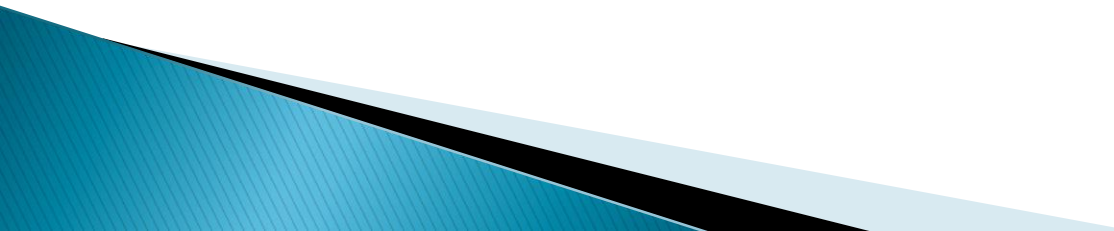
[1, 2, 4, 6, 2, 4] – drum care nu este simplu

[1, 2, 4, 6, 2, 3] – drum simplu care nu este elementar

[1, 2, 4, 6] – drum elementar

Drumuri. Circuite

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

- ▶ **Lungimea** lui $P = l(P) = k-1$ (cardinalul multisetului arcelor lui P)
 - ▶ v_1 și v_k se numesc **capetele/ extremitățile** lui P
 - ▶ P se numește și **v_1-v_k lanț**
- 

Drumuri. Circuite

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

► Notăm

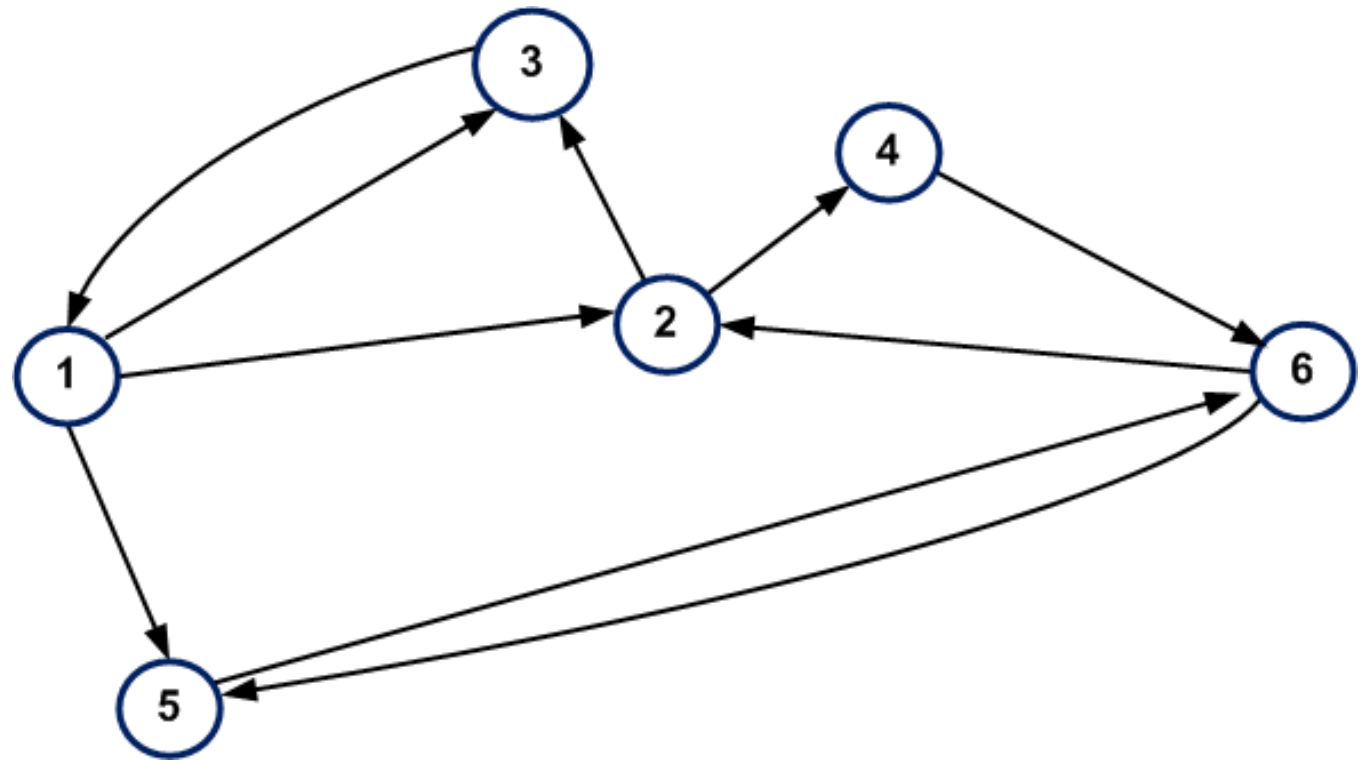
- $V(P) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$
- $e_i = (v_i, v_{i+1})$
- $E(P) = \{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$

Drumuri. Circuite

- ▶ Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{daca } u = v \\ \infty, & \text{daca nu exista } u - v \text{ drum in } G \\ \min\{l(P) \mid P \text{ este } u - v \text{ drum in } G\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui $u-v$ drum)



Drumuri. Circuite

- ▶ Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{daca } u = v \\ \infty, & \text{daca nu exista } u - v \text{ drum in } G \\ \min\{l(P) \mid P \text{ este } u - v \text{ drum in } G\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui $u-v$ drum)

- ▶ Un $u-v$ drum de lungime $d_G(u, v)$ se numește **drum minim de la u la v**
- ▶ Vom nota și $d(u, v)$ dacă G se deduce din context

Drumuri. Circuite

- ▶ Un **circuit** este un drum simplu cu capetele identice

$$C = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k, v_1]$$

- ▶ **Circuit elementar**

- ▶ **Notatii** $V(C)$, $E(C)$

Lanțuri. Cicluri

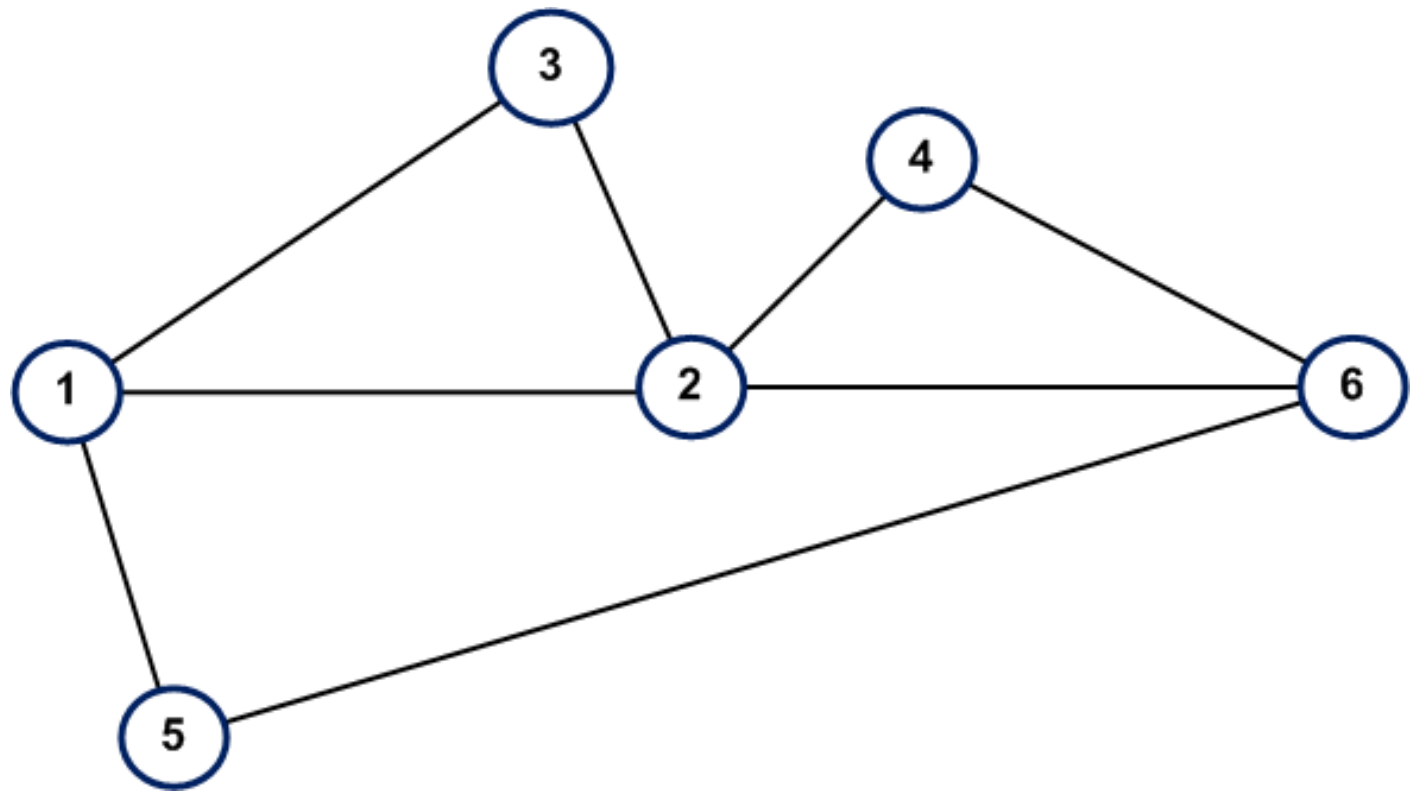
Lanțuri. Cicluri

Pentru G graf **neorientat** – **noțiuni similare**

- ▶ Un **lanț** este o secvență P de vârfuri cu proprietatea că oricare două vârfuri consecutive sunt adiacente

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

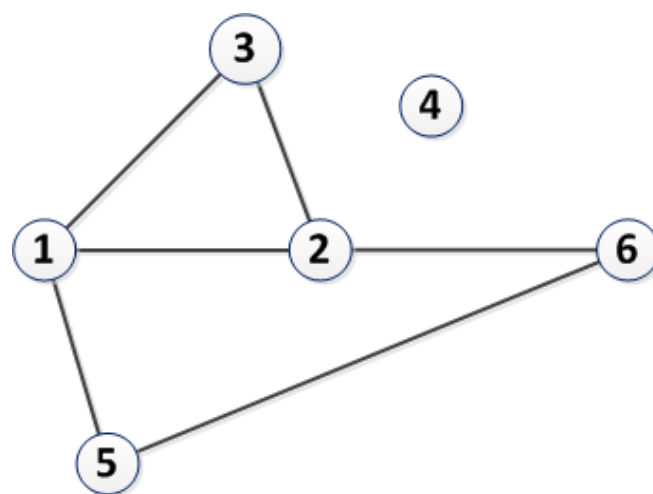
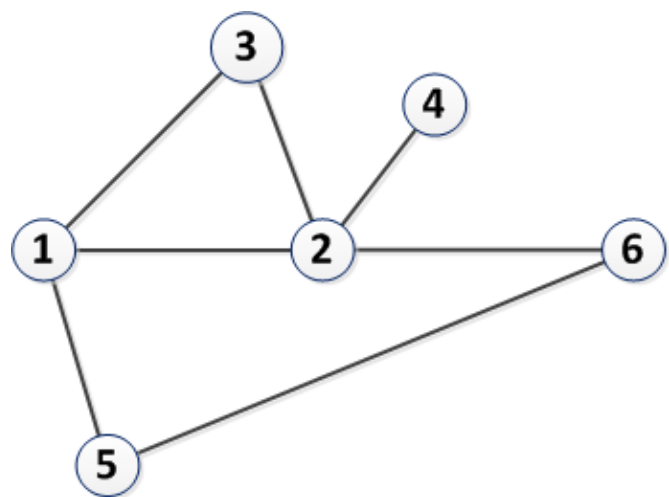
- lanț simplu / lanț elementar / lungime
- ciclu / ciclu elementar
- distanță / lanț minim



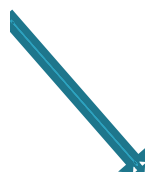
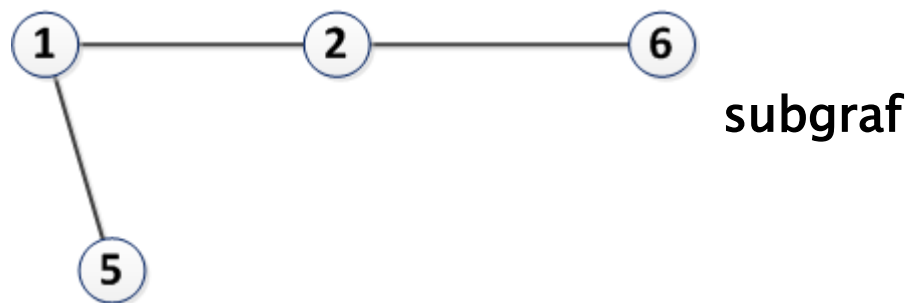
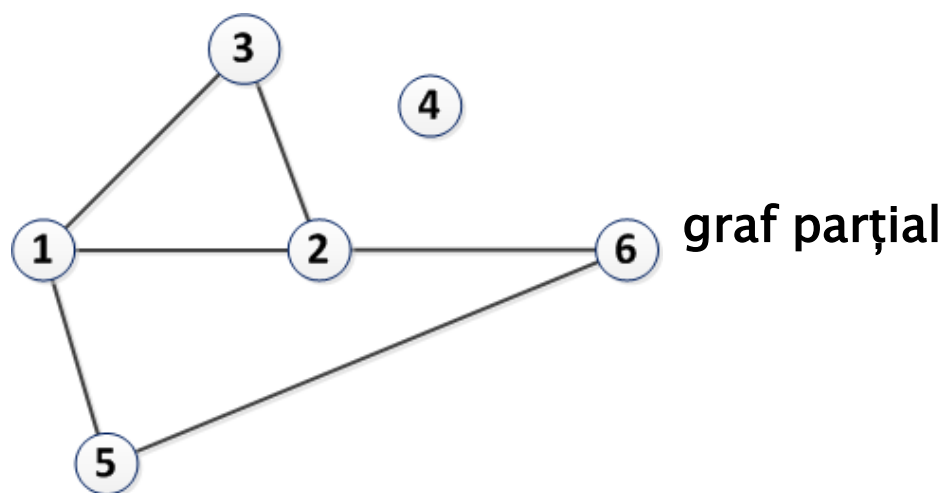
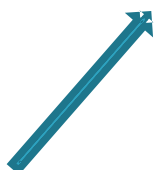
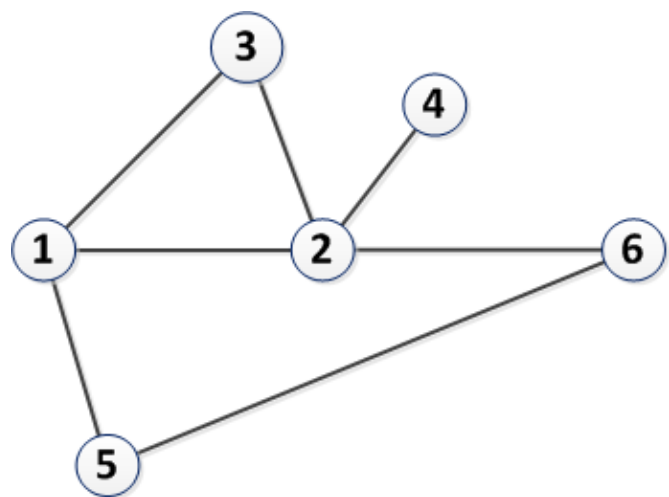
Graf parțial. Subgraf. Conexitate

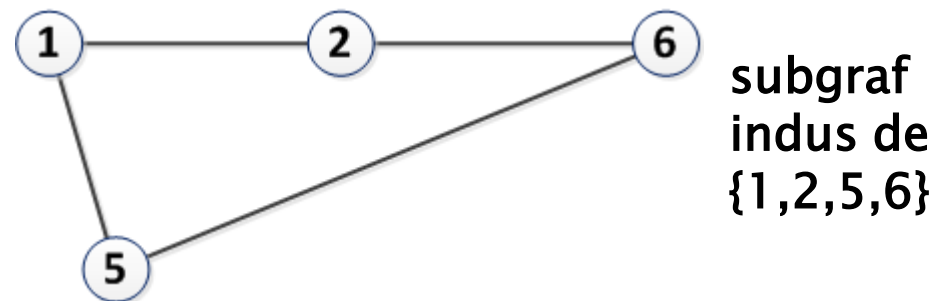
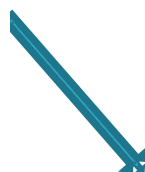
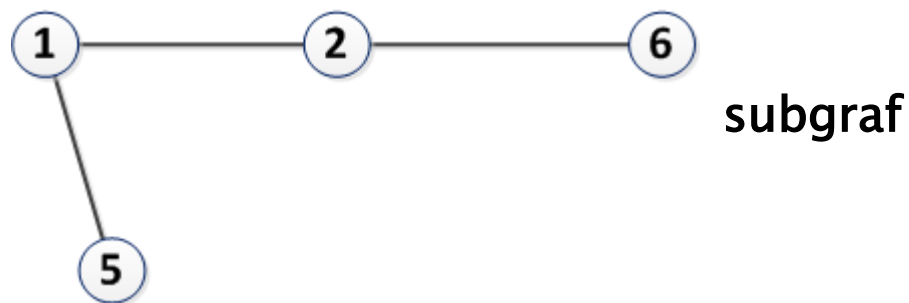
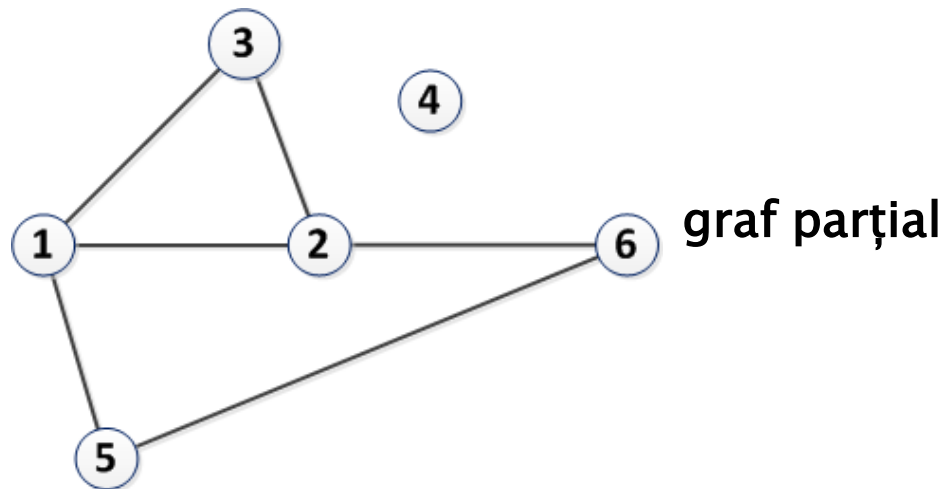
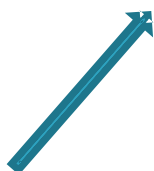
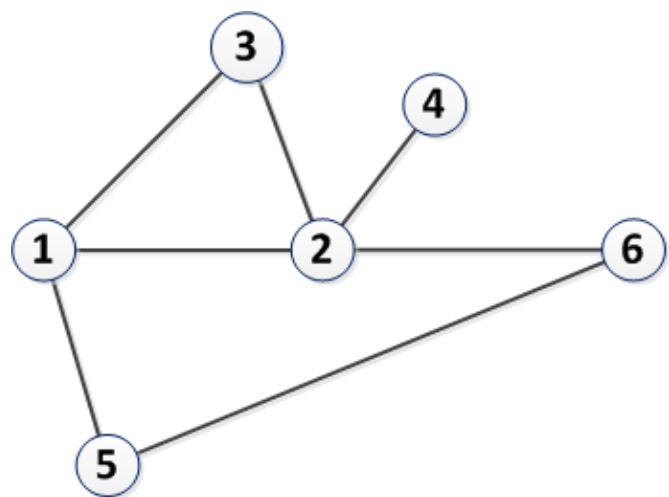
Graf parțial. Subgraf

- ▶ graf parțial
- ▶ subgraf
- ▶ subgraf indus



graf parțial





Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- ▶ G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $G_1 \leq G$) dacă
$$V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- ▶ G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $G_1 \leq G$) dacă

$$V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$$

- ▶ G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $G_1 < G$) dacă

$$V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- ▶ G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $G_1 \leq G$) dacă

$$V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$$

- ▶ G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $G_1 < G$) dacă

$$V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$$

- ▶ G_1 este **subgraf indus de V_1 în G** (vom nota $G_1 = G[V_1]$) dacă

$$V_1 \subseteq V,$$

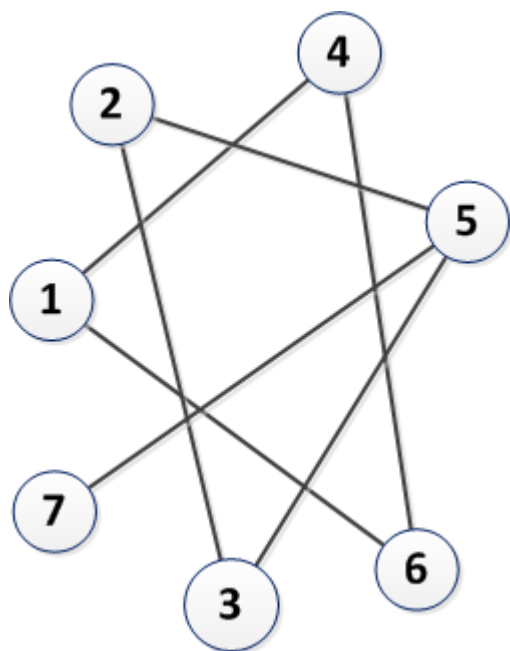
$$E_1 = \{e \mid e \in E(G), e \text{ are ambele extremități în } V_1\}$$

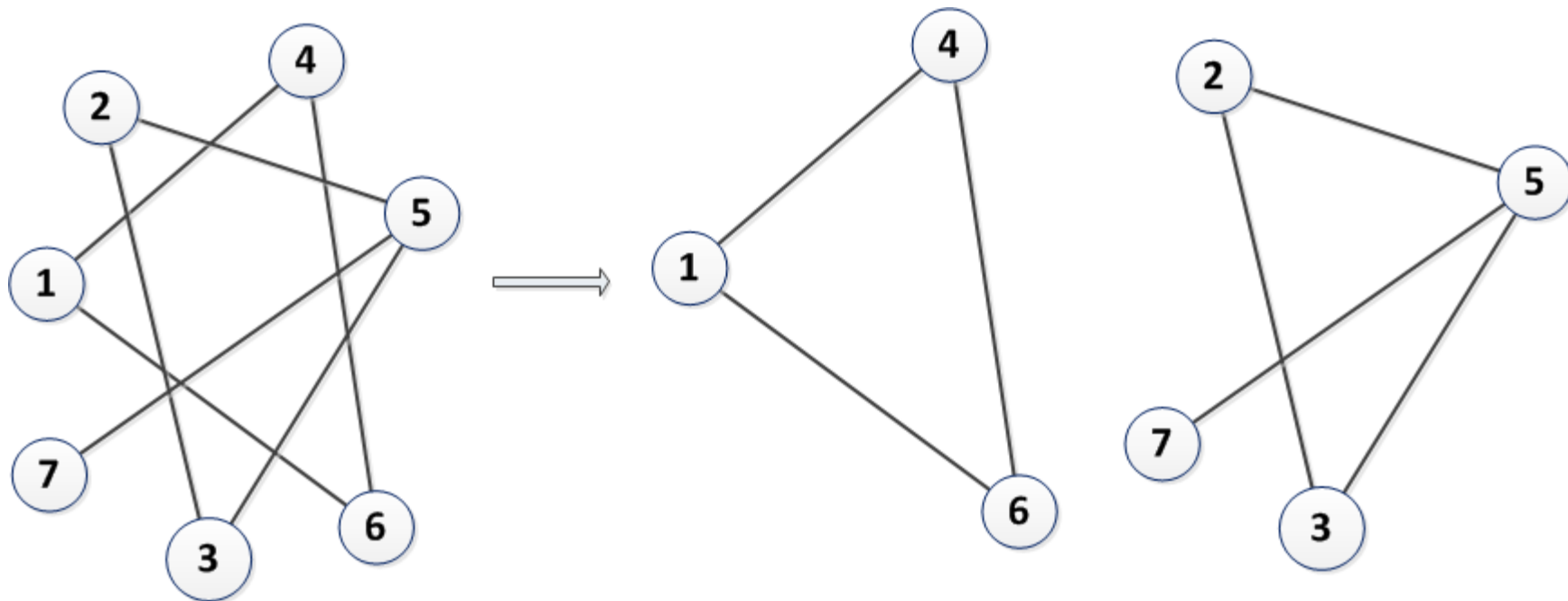
(toate arcele/muchiile cu extremități în V_1)

Conexitate

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat

- ▶ graf conex
- ▶ componentă conexă





două componente conexe

Conexitate

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat

- ▶ G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț

Conexitate

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat

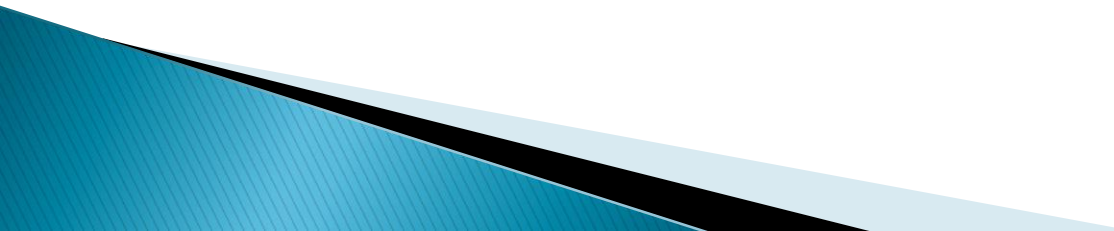
- ▶ G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț
- ▶ O **componentă conexă** a lui G este un subgraf indus conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)

Conexitate

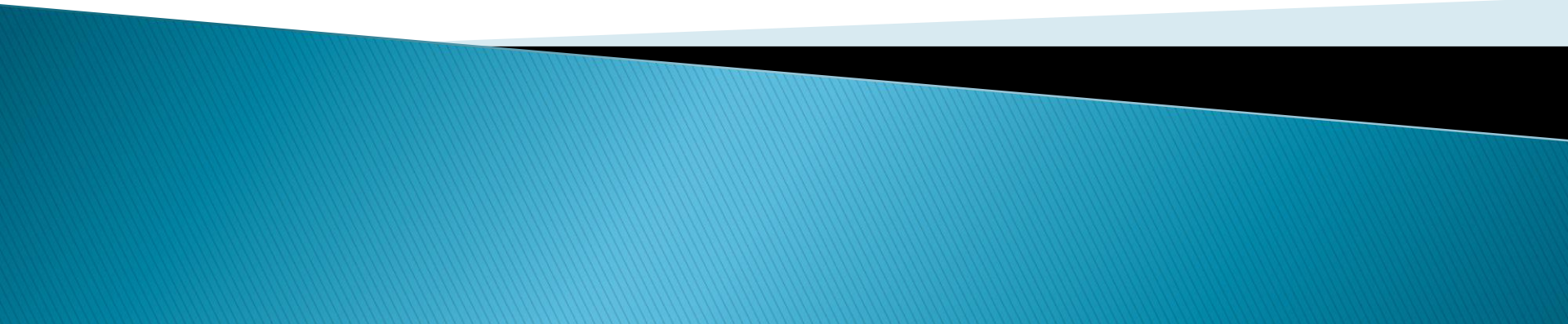
Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat

- ▶ G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț
- ▶ O **componentă conexă** a lui G este un subgraf indus conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)
- ▶ Pentru cazul orientat – **tare-conexitate**

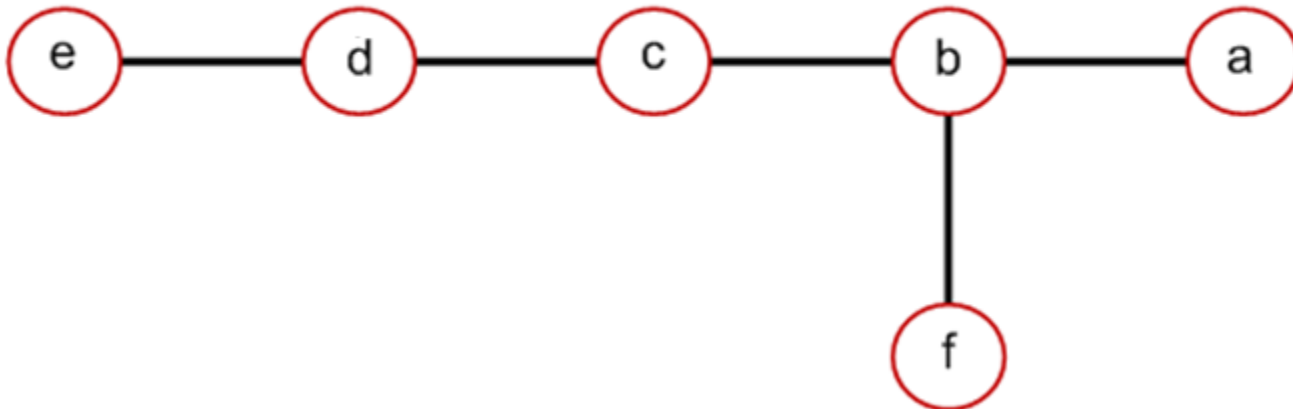
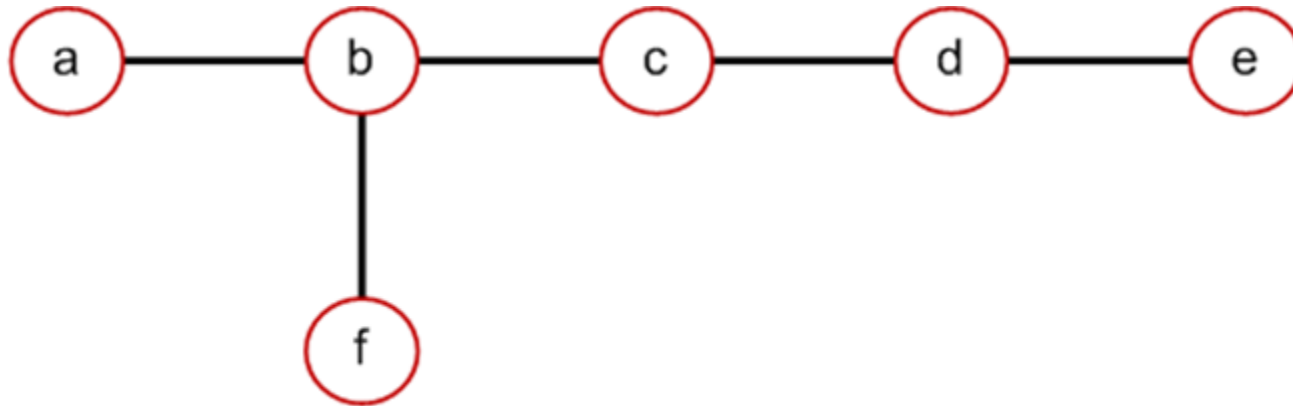
Notății

- ▶ $G - v$, $v \in V(G)$
 - ▶ $G - e$, $e \in E(G)$
 - ▶ $G - V'$, $V' \subseteq V(G)$
 - ▶ $G - E'$, $E' \subseteq E(G)$
 - ▶ $G + e$
- 

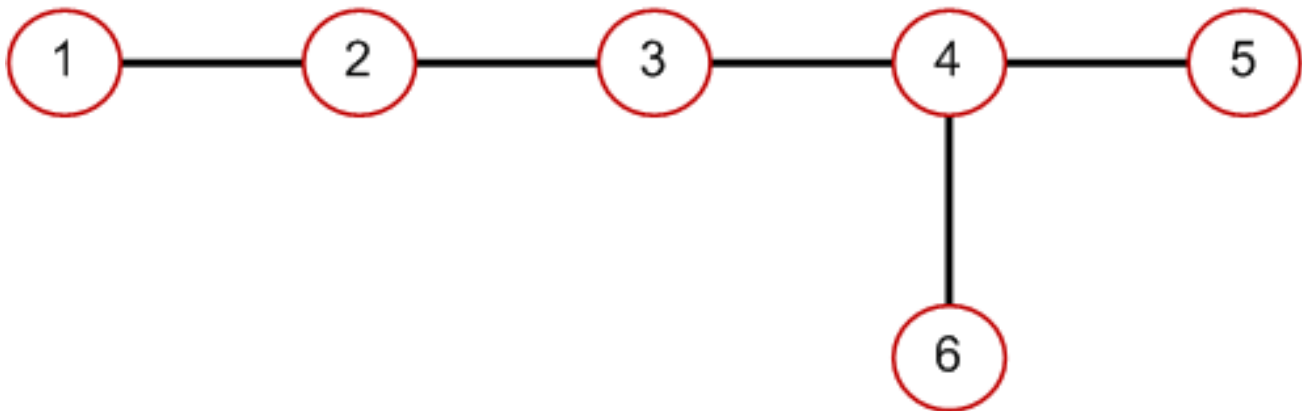
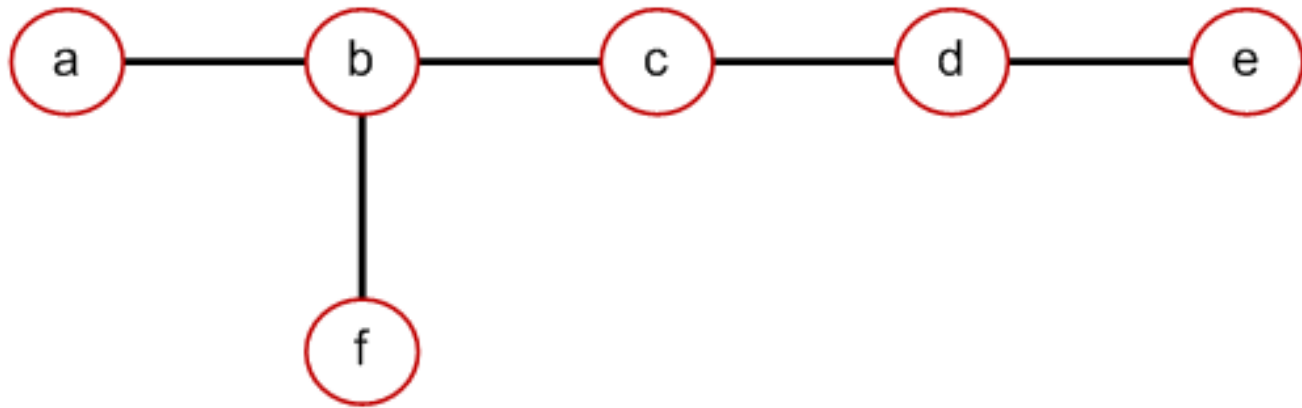
Egalitate. Izomorfism



Egalitate



Egalitate?



Izomorfism

Fie G_1, G_2 două grafuri

▶ $G_1 = (V_1, E_1)$

▶ $G_2 = (V_2, E_2)$

Grafurile G_1 și G_2 sunt **izomorfe** ($G_1 \sim G_2$) \Leftrightarrow

există $f : V_1 \rightarrow V_2$ bijectivă cu

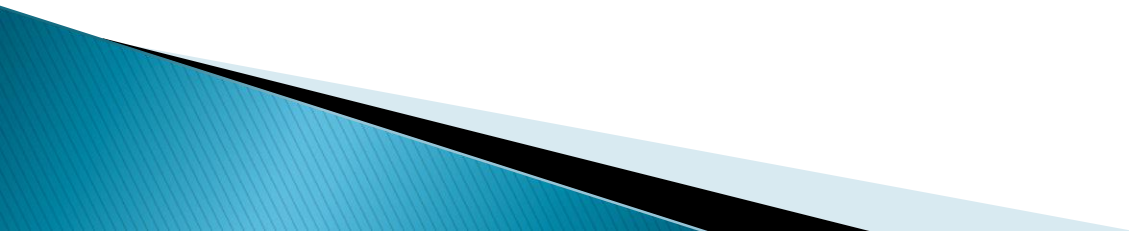
$$uv \in E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2$$

pentru orice $u, v \in V_1$

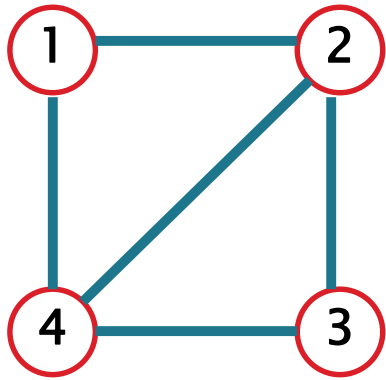
(f conservă adiacența și neadiacența)

Izomorfism

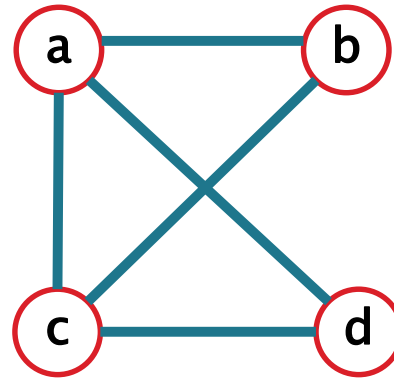
Interpretare: se pot reprezenta în plan prin același desen



Izomorfism



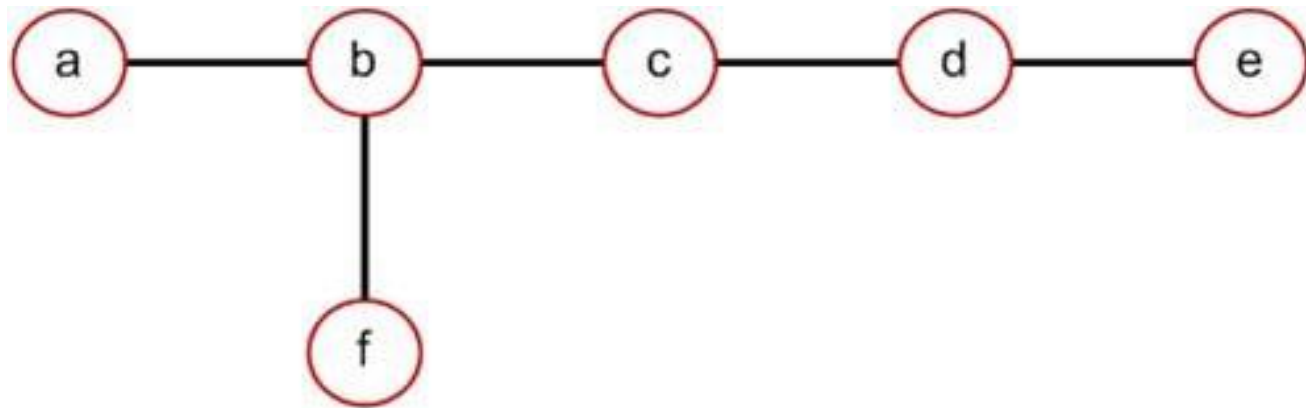
\sim



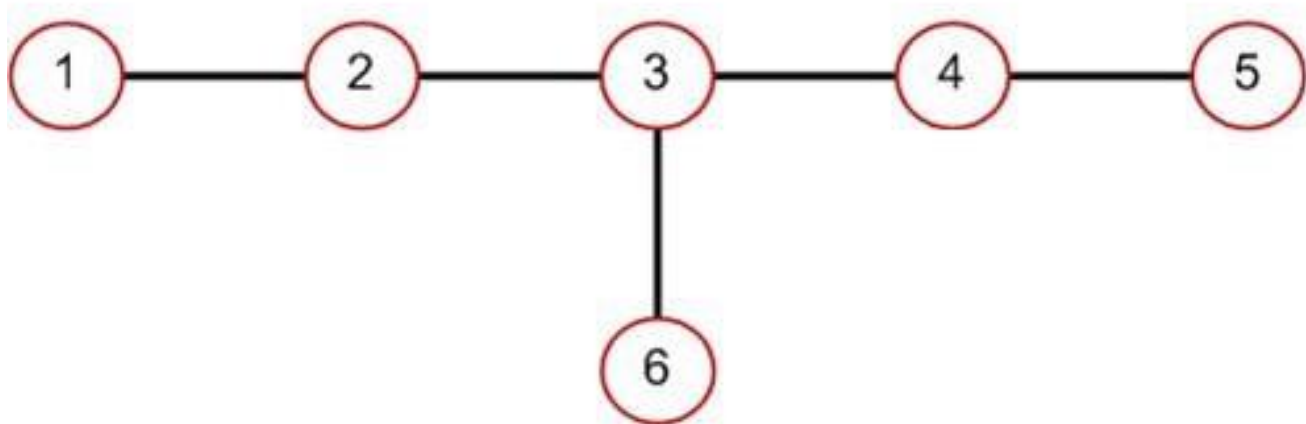
Izomorfism

- ▶ $G_1 \sim G_2 \Rightarrow s(G_1) = s(G_2)$
- ▶ $s(G_1) = s(G_2) \not\Rightarrow G_1 \sim G_2$?

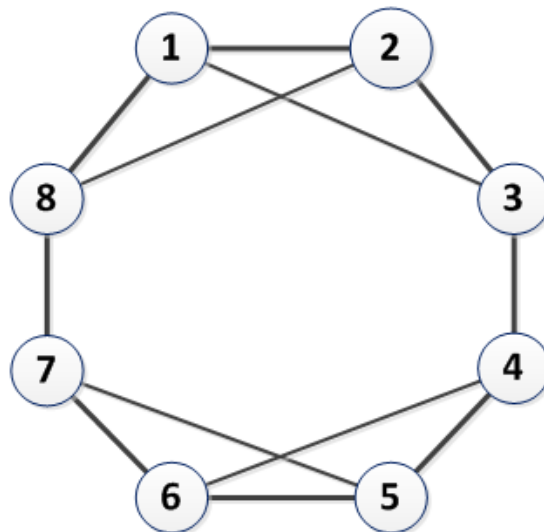
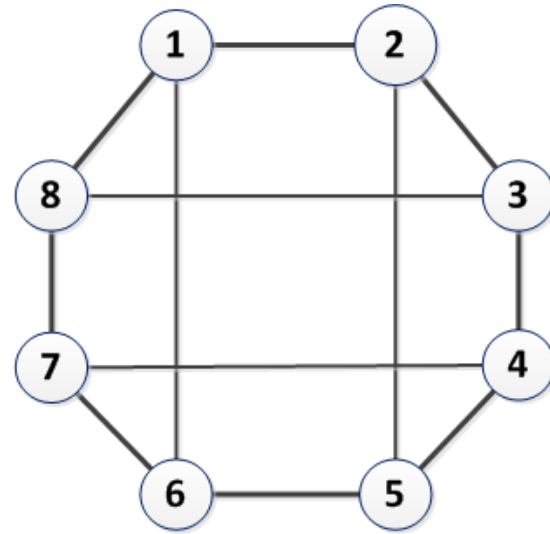
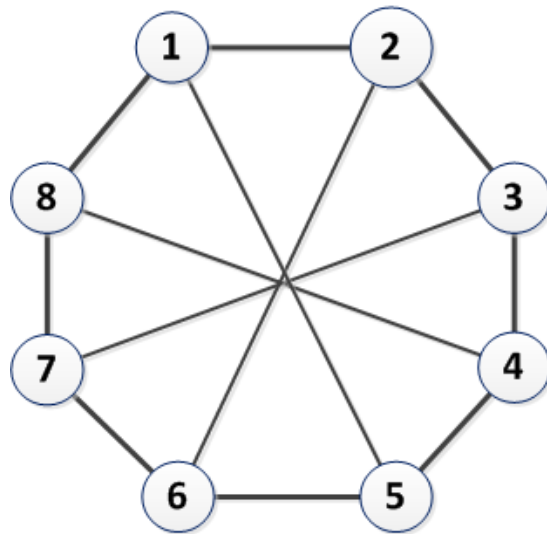
Izomorfism



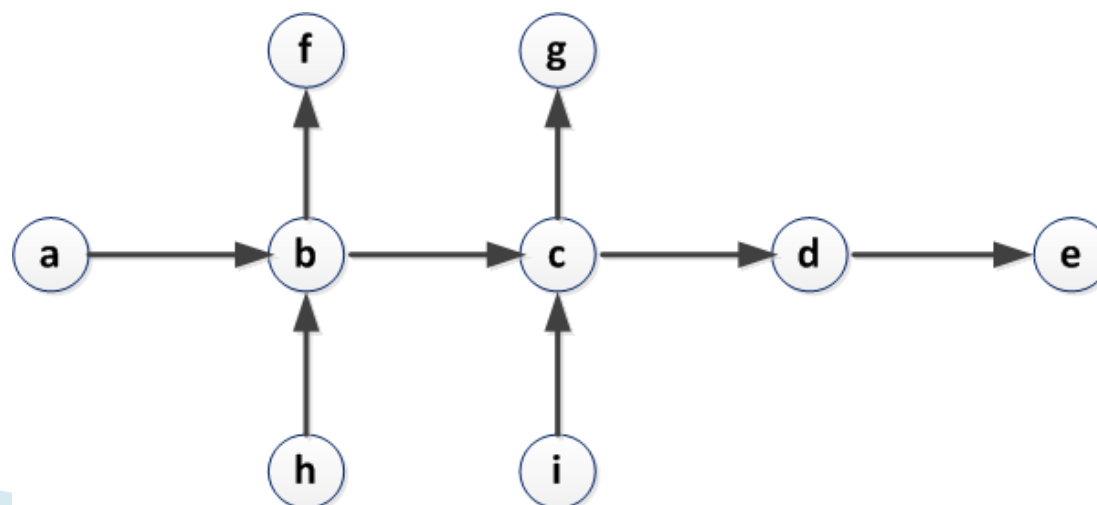
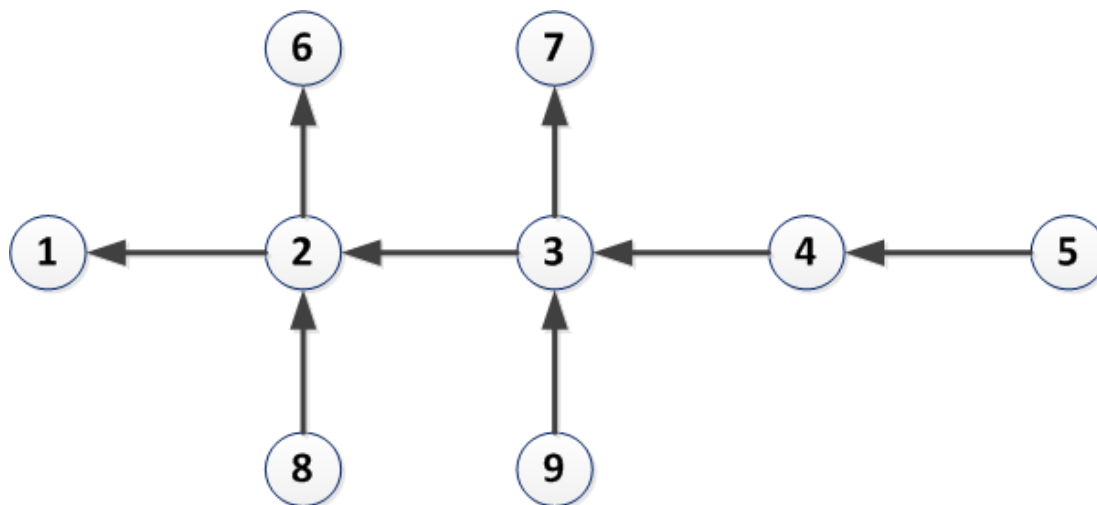
Izomorfe?



Care dintre aceste grafuri sunt izomorfe?

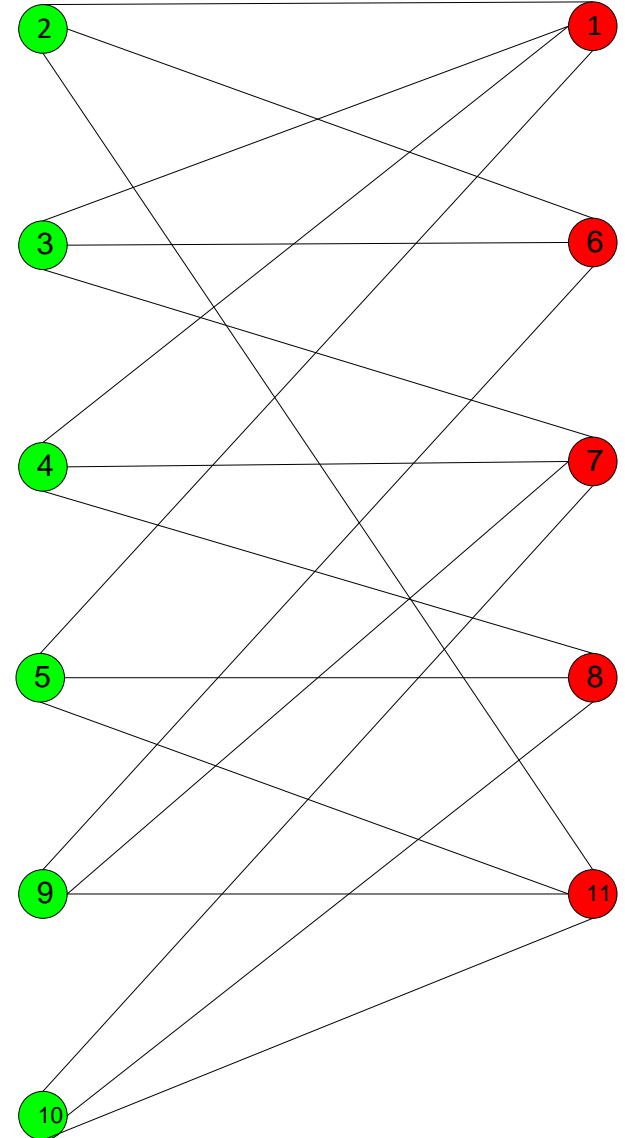
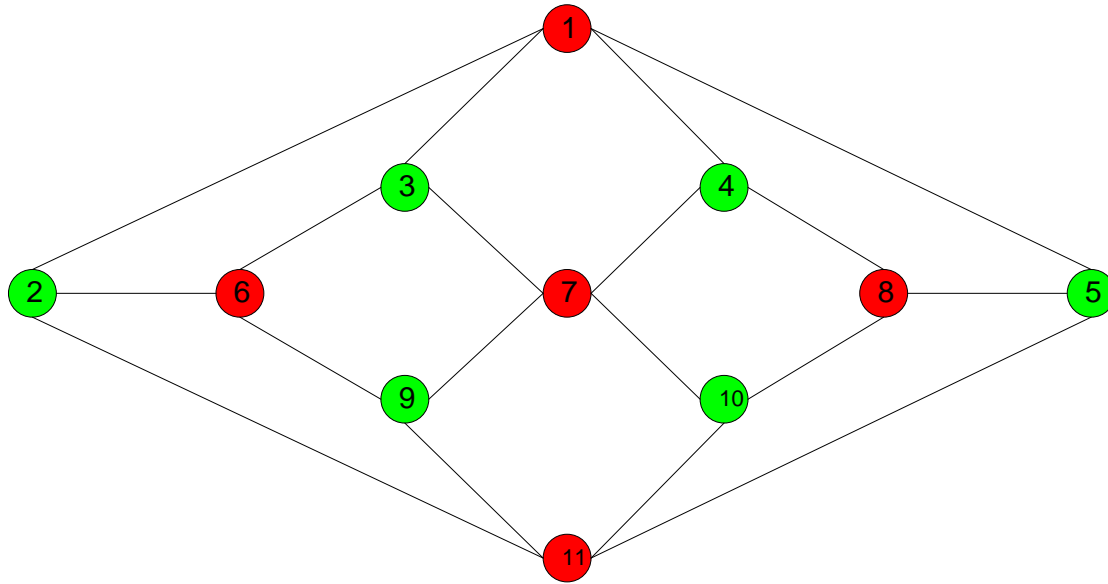


Sunt aceste grafuri izomorfe?



Grafuri standard

Graf bipartit



Graf bipartit

- ▶ Un graf neorientat $G = (V, E)$ se numește **bipartit** \Leftrightarrow există o partiție a lui V în două submulțimi V_1, V_2 (**bipartiție**):

$$V = V_1 \cup V_2$$

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

astfel încât orice muchie $e \in E$ are o extremitate în V_1 și cealaltă în V_2 :

$$|e \cap V_1| = |e \cap V_2| = 1$$

Graf bipartit

Observație

► $G = (V, E)$ **bipartit** \Leftrightarrow

există o colorare a vârfurilor cu două culori:

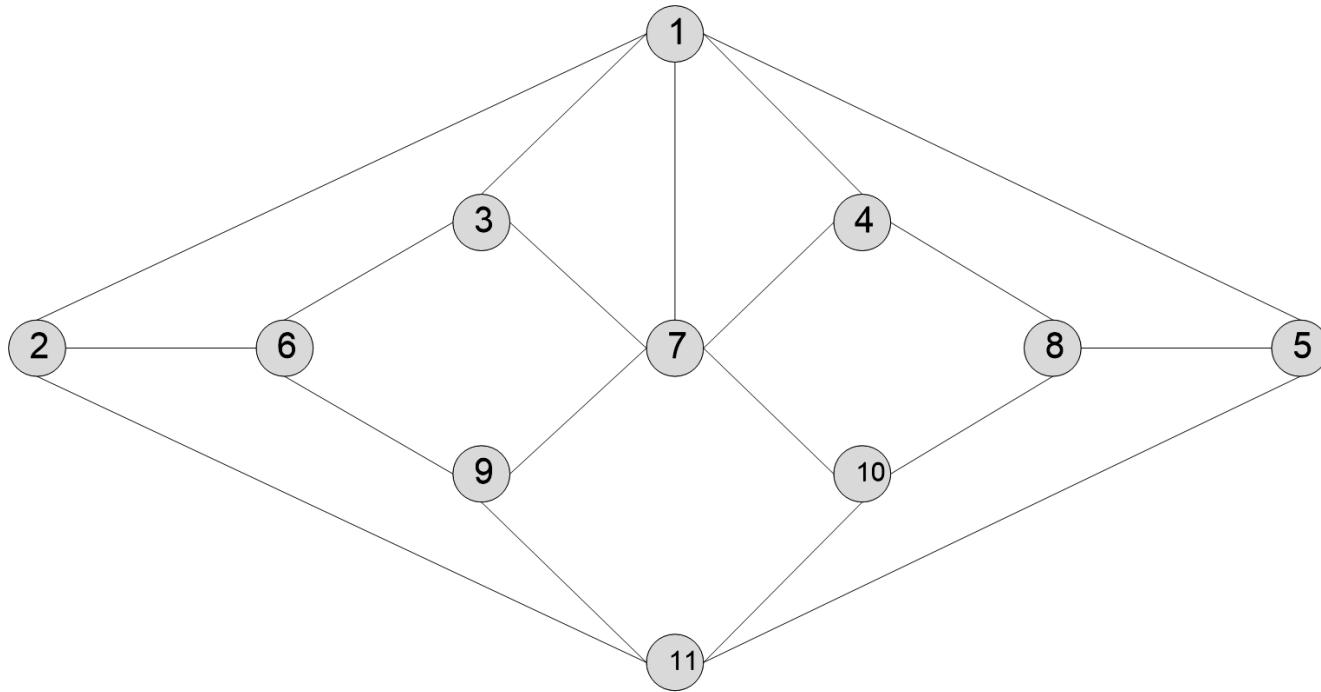
$$c : V \rightarrow \{1, 2\}$$

astfel încât pentru orice muchie $e=xy \in E$ avem

$$c(x) \neq c(y)$$

(**bicolorare**)

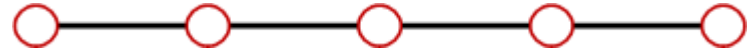
Graf bipartit



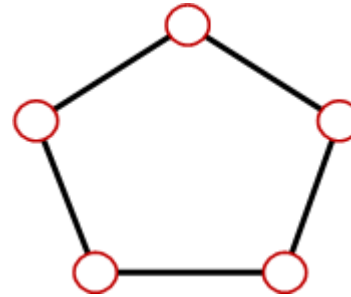
nu este bipartit

Grafuri standard

► P_n – lanț elementar

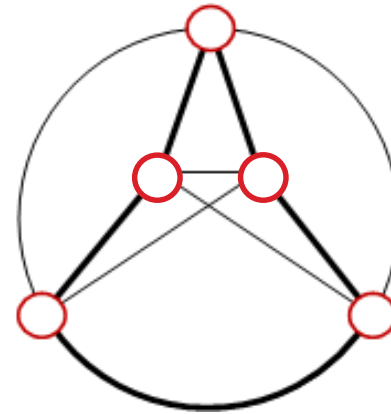
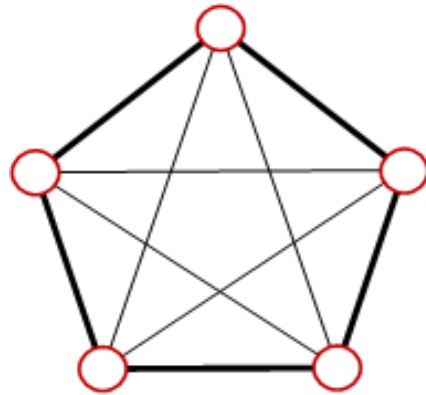


► C_n – ciclu elementar



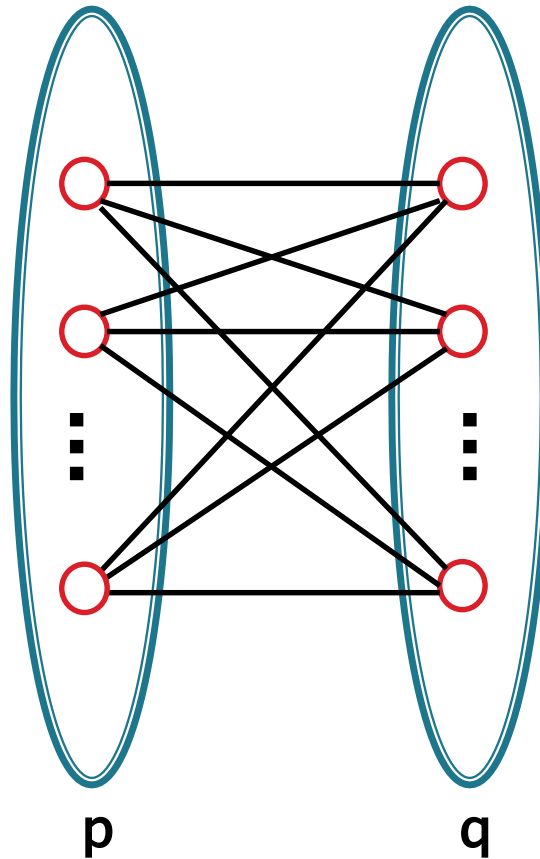
Grafuri standard

- ▶ K_n – graf complet



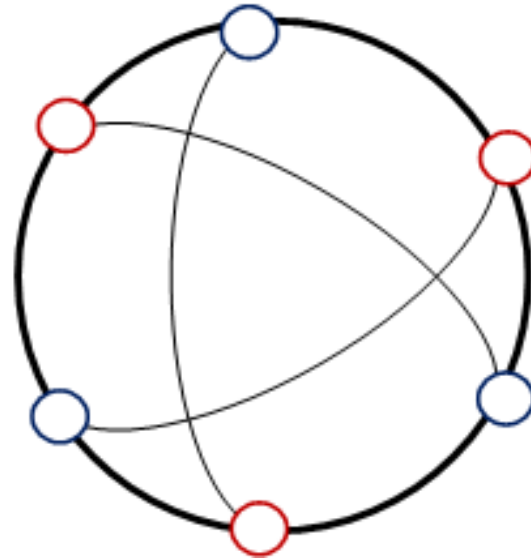
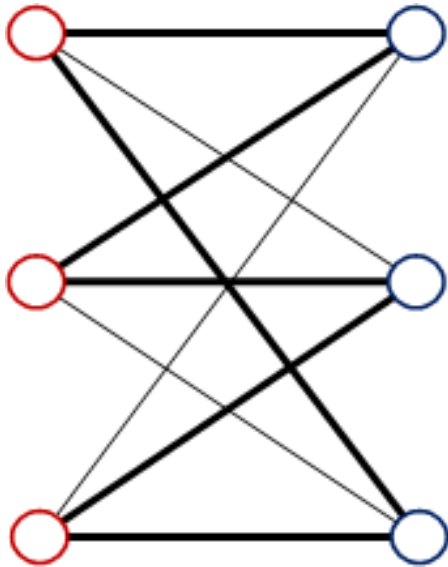
Grafuri standard

- ▶ $K_{p,q}$ – graf bipartit complet



Grafuri standard

► $K_{3,3}$



Secvențe de grade



Data o formulă chimică, există un compus chimic cu această formulă? Dar unul aciclic? Ce structuri poate avea un astfel de compus?

C_mH_n – poate exista moleculă aciclică cu această formulă?

Secvențe de grade



Din studii empirice, chestionare, analize \Rightarrow informații despre numărul de interacțiuni ale unui nod

Este realizabilă o rețea de legături între noduri care să respecte numărul de legături?

Secvențe de grade



Din studii empirice, chestionare, analize \Rightarrow informații despre numărul de interacțiuni ale unui nod

Este realizabilă o rețea de legături între noduri care să respecte numărul de legături?

Exemplu: Într-o grupă de studenți, fiecare student este întrebat cu câți colegi a colaborat în timpul anilor de studii. Este realizabilă o rețea de colaborări care să corespundă răspunsurilor lor (sau este posibil ca informațiile adunate să fie incorecte)?

- Studentul 1 – cu 3
- Studentul 2 – cu 3
- Studentul 3 – cu 2
- Studentul 4 – cu 3
- Studentul 5 – cu 2

Secvențe de grade



- Dată o secvență de numere s , se poate construi un graf neorientat având secvența gradelor s ?
 - Dar un multigraf?
 - Dar un arbore?
-
- Condiții necesare
 - Condiții suficiente

Secvențe de grade

- Construcția de grafuri cu secvența gradelor dată

Aplicații:

- **chimie** – studiul structurii posibile a unor compuși cu formula chimică dată
 - **proiectare de rețele**
 - **biologie** – rețele metabolice, de interacțiuni între gene/proteine
 - **studii epidemiologice** – în care prin chestionare anonime persoanele declară numărul de persoane cu care au interacționat
 - studii bazate pe simulări de rețele...
- 