Geom. C7
pag 1

Geometrie Curs 7

Forma canonică Jordan

Motivație: $f \in End(V) \rightsquigarrow$ valori proprii (și vectori proprii)

$= det(A - \lambda I_n)$, $A = [f]$ într-o bază dată. rădăcini ale ec. pol. $P_f(\lambda) = 0 =$

Teoremă: ∃o bază în care $[f]$ e diagonală ⟺ toate valorile proprii sunt în K și mult. algebrice coincid cu cele geometrice.

Morala: În general, un endomorfism nu se diagonalizează.

Obs: Dată o matrice A, ∃U nedegenerată a.î. $U^{-1}AU$ să fie diagonală (cu λ_i pe diagonală).

Lucrăm peste $\mathbb{C}$:

Bloc Jordan $J_p := \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(p, \mathbb{C})$

Matricea în forma J: $\begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{p_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{p_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$ $p_1 + \dots + p_k = n$

Teorema: $f \in End(V/\mathbb{C})$ Atunci există o bază a lui V în care matricea lui f are forma Jordan. Altfel spus: dată o matrice $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ există $U \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ inversabilă a.î. $U^{-1}AU$ să fie în forma Jordan.

În plus, forma Jordan e unică până la o permutare a blocurilor.

Demonstrație: 1. De unde apar blocurile Jordan?

Fie $f \in End(V)$. $f \circ \dots \circ f = 0$ (compus de p ori) $\simeq$ (Fie A cu $A^p = 0$).

f endomorfism nilpotent.

Exercițiu: $P_f(X) = X^p$

Fie $v \in V \setminus \{0\}$ a.î. $f^p(v) = 0 \Rightarrow \{v, f(v), f^2(v) \dots f^{p-1}(v)\}$ e liniar independent.

$a_0 v + a_1 f(v) + \dots + a_{p-1} f^{p-1}(v) = 0$. Se aplică f.

Presupun $p = n \Rightarrow \{\underset{e_1''}{v}, \underset{e_2''}{f(v)}, \dots, \underset{e_n''}{f^{n-1}(v)}\}$ e bază în V

$A = [f]$ în baza asta? $f(e_i) = f(f^{i-1}(e_i)) = f^i(e_i) = e_{i+1}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J_n(0)$

În general vom avea $\{v, f(v), \dots f^{p_1-1}(v)\} \to J_{p_1}$
$w, f(w), \dots, f^{p_2-1}(w) \to J_{p_2}$
⋮
Corespund unei descompuneri $V = V_1^{p_1} \oplus V_2^{p_2} \oplus \dots \oplus V_k^{p_k}$.
Vom avea n_1 blocuri de dim 1.
n_2 — " — 2
⋮
n_k — " — k.

Relație: $n_i = rg A^{i-1} - 2 rg A^i + rg A^{i+1}$

Exemplu: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A = X^4$
$rg A = 2$

$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $rg A^2 = 1$. $A^3 = O_4 \Rightarrow rg A^3 = rg A^k = 0 \ \forall k \geq 3$

$n_1 = rg A^0 - 2 rg A^1 + rg A^2 = 4 - 2 \cdot 2 + 1 = 1 \Rightarrow 1$ bloc de dim 1.
$n_2 = 0 \Rightarrow 0$ blocuri de dim 2.
$n_3 = 1 \Rightarrow 1$ bloc de dim 3.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J_A$.

În general, $f \in End(V/\mathbb{C})$. Fixez o bază $[f] = A$.
$P_f(X) = \prod (X - \lambda_i)^{p_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $p_1 + \dots + p_k = n$.
Dacă există o singură valoare proprie λ, atunci $f - \lambda \cdot 1_V$ (cu matricea $A - \lambda I_n$) $\Rightarrow (A + \lambda I_n)^n = 0 \Rightarrow A - \lambda I_n$ e nilpotentă, cu forma J: $\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{p_k}(0) \end{pmatrix}$. Atunci f va avea forma J $\begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{p_k}(\lambda) \end{pmatrix}$

În cazul general (*): Fiecare λ_i produce un subspațiu invariant $V_{\lambda_i}^{p_i}$

Exemplu: $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

1. $P(X) = \det(A - X \cdot I_4) = (X-2)^3 (X-1)$
2. Valorile proprii $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 1$ $\dim V_{\lambda_1} = 3$ $\dim V_{\lambda_2} = 1$.
3. Pentru $\lambda_2 = 1 \Rightarrow$ un singur bloc J de dimensiune 1.
$\lambda_1 = 2 \Rightarrow$ pot avea blocuri de dimensiune 1, 2, 3.

Calculez $B = A - \lambda_i \cdot I_4$, B^2, B^3 ...
$\Rightarrow$ rang $B = 2$ $rg B^2 = 1$ $rg B^3 = 1$

Geom C7
pag3.

$m_1 = 1 \Rightarrow$ un singur bloc de dim 1.
$m_2 = 1 \Rightarrow$ un bloc de dim 2.
$m_3 = 0 \Rightarrow$ nu am blocuri de dim 3.

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} \boxed{1} & & \\ & \boxed{2} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Aplicatii:

1. $A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots J_k \end{pmatrix} \Rightarrow A^p = \begin{pmatrix} J_1^p & & \\ & J_2^p & \\ & & \ddots J_k^p \end{pmatrix}$

$U^{-1}BU = J$.
$B^p = U J^p U^{-1}$

2. Fie $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ P_A - polinomul caracteristic

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ 3 & 4-X \end{vmatrix} = X^2 - 5X + (-2) = X^2 - \operatorname{tr} A X + \det A.$

$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ $A^2 - 5A - 2I_2 = O_2$

$$P_A = X^n - \operatorname{tr} A \cdot X^{n-1} + \left(\sum a_{ij} a_{ke}\right) X^{n-2} + \dots + \det A.$$

Teorema Hamilton - Cayley: $P_A(A) = 0$.

Corolar: $A^n \in \operatorname{sp}\{A^0, A^1, \dots, A^{n-1}\}$

Obs: $\det(A - \lambda I) = \det(U^{-1}AU - \lambda I) \Rightarrow P_A = P_{U^{-1}AU} = P_{J_A}$

$\Rightarrow$ e suficient de dem. H-C pt. $A = J$ (matricea în forma J)

$$P_J = \prod_{i=1}^{k} P_{J_i}$$

$\det J = \det J_1 \cdot \det J_2 \dots \det J$

$$P_J = \det \begin{pmatrix} J_1 - \lambda I_{m_1} & \\ & \ddots J_2 - \lambda I_{m_2} \end{pmatrix} = \det(J_1 - \lambda I_{m_1}) \cdot \ldots \cdot \det(J_k - \lambda I_{m_k}) = P_{J_1} \cdots P_{J_k}.$$

$P_J(J) = 0$ e suf. să arat că $P_{J_i}(J_i) = 0 \ \forall i$

E suf. să dem H-C pt. $J = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ $P_J = (X - \lambda)^p$

$P_J(J) = (J - \lambda I_p)^p = 0$.

Def Polinomul minimal μ_A al matricii A este polinomul monic de grad minim care are A printre rădăcini.

$\mu(A) = 0$ $\forall f$ cu $f(A) = 0$, $\operatorname{gr} f > \operatorname{gr} \mu_A$.

Corolar: Polinomul minimal divide polinomul caracteristic.