FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 1

(S1.1) Fie T o mulţime şi $A, B, X \subseteq T$ cu $A \cap B = \emptyset$ şi $A \cup (B \setminus X) = B \cup X$. Să se arate că $X = A$.
Demonstraţie: Arătăm egalitatea prin dublă incluziune.

Fie întâi $x \in X$. Atunci $x \in B \cup X = A \cup (B \setminus X)$. Cum $x \in X$, $x \notin B \setminus X$, deci $x \in A$. Luăm acum $x \in A$. Atunci $x \in A \cup (B \setminus X) = B \cup X$. Cum $A \cap B = \emptyset$, $x \notin B$, deci $x \in X$. $\square$

(S1.2) Fie $A = \{a, b, c, d\}$ şi $R = \{(a, b), (a, c), (c, d), (a, a), (b, a)\}$ o relaţie binară pe A. Care este compunerea $R \circ R$? Care este inversa R^{-1} a lui R? Care dintre relaţiile $R, R^{-1}, R \circ R$ poate fi relaţia subiacentă unei funcţii de la A la A?
Demonstraţie: Obţinem

$$\begin{aligned} R \circ R &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c)\}, \\ R^{-1} &= \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, a), (d, c)\}. \end{aligned}$$

Niciuna dintre relaţiile $R, R^{-1}, R \circ R$ nu poate descrie o funcţie de la A la A, deoarece

(i) $(a, b) \in R$ şi $(a, c) \in R$;

(ii) $(a, a) \in R^{-1}$ şi $(a, b) \in R^{-1}$;

(iii) nu există y astfel încât $(d, y) \in R \circ R$.

De asemenea, se observă că o relaţie "validă" ar avea patru elemente, fapt ce nu e valabil pentru niciuna din relaţiile de mai sus. $\square$

(S1.3) Daţi exemplu de familie de submulţimi ale lui $\mathbb{R}$, indexată, pe rând, după:

(i) $\mathbb{N}^*$;

(ii) $\mathbb{Z}$;

(iii) $\{2, 3, 4\}$.

Determinaţi reuniunea şi intersecţia fiecărei familii date ca exemplu.
Demonstraţie:

(i) (a) $A_n = \{n\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \emptyset$.

(b) $B_1 = \{0\}, B_2 = \mathbb{N}^*, B_3 = \mathbb{Q}$ şi $B_n = \mathbb{R}$ pentru orice $n \geq 5$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n = \mathbb{R}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n = \emptyset$.

(c) $E_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = (-1, 1)$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = \{0\}$.

(d) $A_n = \{1\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{1\}$.

(e) $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{1\}$.

(ii) $C_1 = (-\infty, 0), C_2 = \{0\}, C_{-n} = \{3\}$ pentru orice $n \geq 0$, $C_n = \{7\}$ pentru orice $n \geq 3$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} C_n = (-\infty, 0] \cup \{3\} \cup \{7\}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} C_n = \emptyset$.

(iii) $D_2 = \{0\}, D_3 = \{2\}, D_4 = \{3\}$. Atunci $\bigcup_{x\in\{2,3,4\}} D_x = \{0, 2, 3\}$, $\bigcap_{x\in\{2,3,4\}} D_x = \emptyset$.

□

(S1.4) Dacă $(A_i)_{i\in I}$ este o familie de submulţimi ale unei mulţimi X, arătaţi următoarele (**legile lui De Morgan**):

(i) $C_X \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} C_X A_i$;

(ii) $C_X \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} C_X A_i$.

Demonstraţie:

(i) Fie $x \in X$. Atunci $x \in C_X \bigcup_{i\in I} A_i \iff x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că (există $i \in I$ a.î. $x \in A_i$) $\iff$
pentru orice $i \in I$, $x \notin A_i \iff$ pentru orice $i \in I$, $x \in C_X A_i \iff x \in \bigcap_{i\in I} C_X A_i$.

(ii) Fie $x \in X$. Atunci $x \in C_X \bigcap_{i\in I} A_i \iff x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că (pentru orice $i \in I$, $x \in A_i$) $\iff$ există $i \in I$ a.î. $x \notin A_i \iff$ există $i \in I$ a.î. $x \in C_X A_i \iff x \in \bigcup_{i\in I} C_X A_i$.

□

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 2

(S2.1)

(i) Demonstraţi că orice intervale deschise (a, b), (c, d) ale lui $\mathbb{R}$ sunt echipotente.

(ii) Demonstraţi că $(0, 1), (0, 1], [0, 1), [0, 1]$ şi $\mathbb{R}$ sunt echipotente.

Demonstraţie:

(i) Fie funcţia

$$f : (a, b) \to (c, d), \quad f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c \quad \text{pentru orice } x \in (a, b).$$

Dacă $a < x < b$, avem că $0 < x - a < b - a$ şi $0 < \frac{d-c}{b-a}(x-a) < d - c$. Adăugând c, rezultă că funcţia noastră este bine definită, i.e. valoarea dată de noi pentru $f(x)$ se află într-adevăr în (c, d). Definim funcţia

$$g : (c, d) \to (a, b), \quad g(x) = \frac{b-a}{d-c}(x-c) + a \quad \text{pentru orice } x \in (c, d).$$

Se observă uşor că f şi g sunt inverse una celeilalte. Prin urmare, (a, b) şi (c, d) sunt echipotente.

(ii) Ştim că $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ este bijectivă, iar din punctul anterior avem că $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ este echipotent cu $(0, 1)$.

O soluţie directă este: se ia funcţia $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, definită, pentru orice $x \in (0, 1)$, prin:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{x}, & \text{dacă } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1-x} - 2, & \text{altminteri} \end{cases}$$

ce are inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, 1)$, definită, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, prin:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2-y}, & \text{dacă } y < 0 \\ 1 - \frac{1}{2+y}, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0,1)$ şi $\mathbb{R}$ sunt echipotente.

Se ia apoi funcţia $h : (0,1] \to (0,1)$, definită, pentru orice $x \in (0,1]$, prin:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa $h^{-1} : (0,1) \to (0,1]$ este definită, pentru orice $y \in (0,1)$, prin:

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0,1]$ şi $(0,1)$ sunt echipotente.

Considerăm apoi funcţia $j : [0,1] \to (0,1)$, definită, pentru orice $x \in [0,1]$, prin:

$$j(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{1}{n+2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa $j^{-1} : (0,1) \to [0,1]$ este definită, pentru orice $y \in (0,1)$, prin:

$$j^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\} \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{dacă } y = \frac{1}{2} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0,1)$ şi $[0,1]$ sunt echipotente.

În sfârşit, se observă uşor că funcţia $F : (0,1] \to [0,1)$, $F(x) = 1 - x$ este bijectivă (inversa lui F fiind tot F). Prin urmare, $(0,1]$ şi $[0,1)$ sunt echipotente.

□

(S2.2) Fie X o mulţime. Să se arate că nu există o funcţie surjectivă cu domeniul X şi codomeniul $\mathcal{P}(X)$.

Demonstraţie: Presupunem că ar exista, şi fie $f : X \to \mathcal{P}(X)$ surjectivă. Fie mulţimea

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Dat fiind că f este surjectivă, există $y \in X$ cu $f(y) = A$. Dar atunci: $y \in A \Leftrightarrow y \notin f(y) = A \Leftrightarrow y \notin A$ ceea ce este o contradicţie. □

(S2.3) Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) $\mathbb{N}^*$ este numărabilă.

(ii) $\mathbb{Z}$ este numărabilă.

(iii) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Definim
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*, \quad f(n) = n + 1.$$
Se demonstrează imediat că f este bijecţie, inversa sa fiind
$$f^{-1} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, \quad f^{-1}(n) = n - 1.$$

(ii) Enumerăm elementele lui $\mathbb{Z}$ astfel:
$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$$
Funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ corespunzătoare acestei enumerări este următoarea:
$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dacă } n \text{ e par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{dacă } n \text{ e impar.} \end{cases}$$
E clar că f e bijectivă şi că $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definită prin:
$$h(s) = \begin{cases} 2s & \text{dacă } s \geq 0 \\ -2s - 1 & \text{dacă } s < 0 \end{cases}$$
este inversa lui f.

(iii) Ordonăm elementele lui $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ după suma coordonatelor şi în cadrul elementelor cu aceeaşi sumă după prima componentă în ordine crescătoare:
$$\begin{array}{rc} \text{linia } 0 & (0,0), \\ \text{linia } 1 & (0,1), (1,0), \\ \text{linia } 2 & (0,2), (1,1), (2,0), \\ \text{linia } 3 & (0,3), (1,2), (2,1), (3,0), \\ \vdots & \\ \text{linia } k & (0,k), (1,k-1), \ldots, (k-1,1), (k,0), \\ \vdots & \end{array}$$

Prin urmare, pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$, pe linia k sunt $k+1$ perechi $(i, k-i), i = 0, \ldots, k$. Definim $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel: $f(0,0) = 0$, $f(0,1) = 1$, $f(1,0) = 2$, ... În general, $f(i,j)$ se defineşte ca fiind numărul perechilor situate înaintea lui (i,j). Deoarece (i,j) este al $(i+1)$-lea element pe linia $i+j$, rezultă că înaintea sa sunt $1+2+3+\ldots+(i+j)+i = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$ elemente. Aşadar, bijecţia va fi funcţia

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(i,j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i.$$

Această funcţie se numeşte şi *funcţia numărare diagonală a lui Cantor* (în engleză, *Cantor pairing function*).

□

(S2.4) Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Produsul cartezian a două mulţimi numărabile este numărabil.

(ii) Produsul cartezian al unui număr finit (≥ 2) de mulţimi numărabile este numărabil.

Demonstraţie:

(i) Fie A_1 şi A_2 două mulţimi numărabile. Prin urmare, le putem enumera:

$$A_1 = \{a_{1,0}, a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, \ldots,\}, \ A_2 = \{a_{2,0}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,n}, \ldots,\}.$$

Definim
$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A_1 \times A_2, \quad f(m,n) = (a_{1,m}, a_{2,n}).$$
Se demonstrează uşor că f este bijecţie.

(ii) Demonstrăm prin inducţie după n că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi pentru orice mulţimi numărabile $A_1, \ldots, A_n$, $A_1 \times A_2 \ldots A_n$ este numărabilă.

$n = 2$: Aplicăm (i).

$n \Rightarrow n+1$. Fie $A_1, \ldots, A_{n+1}$ mulţimi numărabile şi $B = \prod_{i=1}^{n} A_i$. Atunci B este numărabilă, conform ipotezei de inducţie, deci, conform (i), $B \times A_{n+1}$ este numărabilă. Se observă imediat că funcţia

$$f : \prod_{i=1}^{n+1} A_i \to B \times A_{n+1}, \quad f((a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})) = ((a_1, a_2, \ldots, a_n), a_{n+1})$$

este bijecţie. Prin urmare, $\prod_{i=1}^{n+1} A_i$ este numărabilă.

$\square$

Definiţia 1. *O familie de mulţimi* $(A_i)_{i\in I}$ *se numeşte* **disjunctă** *dacă pentru orice* $i, j \in I$ *cu* $i \neq j$ *avem* $A_i \cap A_j = \emptyset$.

(S2.5) Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi. Pentru orice $i \in I$ notăm $A'_i := \{i\} \times A_i$. Să se arate că $A'_i \sim A_i$ pentru orice $i \in I$ şi că $(A'_i)_{i\in I}$ este o familie disjunctă de mulţimi.
Demonstraţie: Este evident că, pentru orice $i \in I$, funcţia

$$f_i : A_i \to A'_i, \quad f_i(a) = (i, a)$$

este bijecţie.
Presupunem prin reducere la absurd că $(A'_i)_{i\in I}$ nu este o familie disjunctă de mulţimi. Atunci există $j, k \in I$ cu $j \neq k$ a.î. $A'_j \cap A'_k \neq \emptyset$, deci există $x \in A'_j \cap A'_k$. Deoarece $x \in A'_j$, există $a \in A_j$ cu $x = (j, a)$. Similar, deoarece $x \in A'_k$, există $b \in A_k$ cu $x = (k, b)$. Rezultă că $(j, a) = (k, b)$, deci $k = j$, ceea ce contrazice presupunerea. $\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 3

(S3.1) Daţi exemple, pe rând, de relaţii care:

(i) sunt reflexive şi tranzitive, dar nu sunt simetrice;

(ii) sunt reflexive şi simetrice, dar nu sunt tranzitive;

(iii) sunt simetrice şi tranzitive, dar nu sunt reflexive.

Demonstraţie: Notăm, pentru orice mulţime C, $\Delta_C := \{(x, y) \in C \times C \mid x = y\}$ (**relaţia diagonală**).

(i) $\leq$ pe $\mathbb{Z}$; $\leq$ pe $\mathbb{R}$; relaţia de divizibilitate pe $\mathbb{Z}$.

(ii) $R = \Delta_{\mathbb{Z}} \cup \{(7, 8), (8, 7), (8, 9), (9, 8)\}$ pe $\mathbb{Z}$. Nu este tranzitivă, deoarece $(7, 8) \in R$ şi $(8, 9) \in R$, dar $(7, 9) \notin R$. Alt exemplu este $R' = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x - y| \leq 1\}$ (R' nu este tranzitivă, pentru că $(1, 2)$ şi $(2, 3)$ sunt în R', dar $(1, 3)$ nu este).

În general, o intuiţie potrivită pentru acest gen de relaţii este relaţia de prietenie între oameni (considerând că orice om este prieten cu sine). Doi oameni pot fi prieteni cu un al treilea fără să fie prieteni între ei. Pornind de la această idee, putem construi următorul exemplu "minimal" – luăm mulţimea $A := \{1, 2, 3\}$ şi relaţia R pe ea egală cu $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

(iii) $R = \Delta_{\mathbb{Z}} \setminus \{(7, 7)\}$ pe $\mathbb{Z}$. Alt exemplu (tot pe $\mathbb{Z}$) este $R' = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \neq 0 \text{ şi } y \neq 0\}$.

Observăm, de asemenea, că pe orice mulţime nevidă relaţia vidă satisface condiţia (de ce, totuşi, relaţia vidă pe mulţimea vidă nu este un exemplu?). Un exemplu "minimal", dar nevid, este următorul: $A := \{1, 2\}$, $R := \{(2, 2)\}$.

□

(S3.2) Fie $R \subseteq A \times A$ o relaţie descrisă în fiecare situaţie de mai jos. Verificaţi, pe rând, dacă R este relaţie de ordine parţială, strictă sau totală sau relaţie de echivalenţă.

(i) $A = \mathbb{N}$ şi $(a, b) \in R$ dacă şi numai dacă $a \mid b$.

(ii) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ şi $(a, b)R(c, d)$ dacă şi numai dacă $a \leq b$ sau $b \leq d$.

(iii) $A = \mathbb{N}$ şi $(a, b) \in R$ dacă şi numai dacă $b = a$ sau $b = a + 1$.

(iv) A este mulţimea tuturor cuvintelor în limba engleză şi $(a, b) \in R$ dacă şi numai dacă a nu este mai lung ca b.

Demonstraţie:

(i) R este

(a) tranzitivă: Fie $(a, b) \in R$ şi $(b, c) \in R$, deci $a \mid b$ şi $b \mid c$. Rezultă că $a \mid c$, deci $(a, c) \in R$.

(b) reflexivă: Pentru orice $a \in \mathbb{N}$, avem că $a \mid a$, deci $(a, a) \in R$.

(c) antisimetrică: Presupunem că $(a, b) \in R$ şi $(b, a) \in R$, deci că $a \mid b$ şi $b \mid a$. Deoarece $a, b \in \mathbb{N}$, rezultă că $a = b$.

R nu este

(a) simetrică: avem că $(3, 6) \in R$, deoarece $3 \mid 6$. Pe de altă parte $6 \nmid 3$, prin urmare $(6, 3) \notin R$.

(b) totală: $2 \nmid 3$ şi $3 \nmid 2$. Aşadar, $(2, 3) \notin R$ şi $(3, 2) \notin R$.

Prin urmare, R este relaţie de ordine parţială, dar R nu este relaţie de ordine strictă sau totală şi nici relaţie de echivalenţă.

(ii) R este reflexivă, deoarece $b \leq b$, prin urmare $(a, b)R(a, b)$ pentru orice $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Aşadar, R nu este relaţie de ordine strictă. Observăm că R nu este

(a) simetrică: $(2, 2)R(4, 3)$, dar $((4, 3), (2, 2)) \notin R$.

(b) antisimetrică: $(3, 5)R(7, 2)$ (deoarece $3 \leq 5$) şi $(7, 2)R(3, 5)$ (deoarece $2 \leq 5$), dar $(3, 5) \neq (7, 2)$.

(c) tranzitivă: $(5, 4)R(5, 6)$ şi $(5, 6)R(3, 3)$, dar $((5, 4), (3, 3)) \notin R$.

Prin urmare, R nu este nici relaţie de ordine totală sau parţială şi nici relaţie de echivalenţă.

(iii) În acest caz, $R = \Delta_{\mathbb{N}} \cup \{(a, a+1) \mid a \in \mathbb{N}\}$. Este clar că R este reflexivă, deci R nu este o relaţie de ordine strictă. Se observă că R nu este tranzitivă: $(5,6) \in R$ şi $(6,7) \in R$, dar $(5,7) \notin R$. Prin urmare, R nu este nici relaţie de ordine totală sau parţială şi nici relaţie de echivalenţă.

(iv) R este reflexivă, deci R nu este o relaţie de ordine strictă. Observăm că R nu este

   (a) antisimetrică: dacă (a, b) şi (b, a) sunt în R, atunci a şi b au aceeaşi lungime, dar nu coincid neapărat. De exemplu, $a =$"do" şi $b =$"go".

   (b) simetrică: ("it", "and") $\in R$, dar ("and","it") $\notin R$.

   Prin urmare, R nu este nici relaţie de ordine totală sau parţială şi nici relaţie de echivalenţă.

□

Definiţia 1. *Fie A o mulţime şi $n \in \mathbb{N}$. Spunem că A* **are n elemente** *dacă este echipotentă cu $\{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j \leq n\}$ (mulţime notată şi $\{1, ..., n\}$).*

Definiţia 2. *O mulţime A se numeşte* **finită** *dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât A are n elemente.*

Definiţia 3. *O mulţime se numeşte* **infinită** *dacă nu e finită.*

(S3.3) Fie $n \in \mathbb{N}$ şi A o mulţime infinită. Să se arate că există $B \subseteq A$ astfel încât B are n elemente.

Demonstraţie: Demonstrăm prin inducţie după $n \in \mathbb{N}$.

Pentru $n = 0$, iau $B := \emptyset$. Ea are 0 elemente, pentru că este echipotentă cu $\{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j \leq 0\}$, care este tot $\emptyset$ (echipotenţa se realizează via "funcţia vidă", $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$).
Presupunem acum că am arătat existenţa unei mulţimi C cu n elemente şi dorim să construim o mulţime B cu $n+1$ elemente. Fie $g : \{1, 2, ..., n\} \to C$ o bijecţie. Dacă am avea $C = A$, atunci existenţa lui g ar indica faptul că A este finită, contrazicând ipoteza noastră. Rămâne că există $x \in A \setminus C$. Luăm $B := C \cup \{x\}$. Definim $h : \{1, 2, ..., n+1\} \to B$, pentru orice $j \in \{1, 2, ..., n+1\}$, prin:

$$h(j) := \begin{cases} g(j), & \text{dacă } j \in \{1, 2, ..., n\} \\ x, & \text{dacă } j = n+1. \end{cases}$$

Avem că h este bijecţia căutată. □

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 4

(S4.1) Fie A, B mulţimi a.î. există $f : B \to A$ injectivă. Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Dacă B este infinită, atunci şi A este infinită.

(ii) Dacă B este infinită şi A este numărabilă, atunci B este numărabilă. În particular, orice submulţime infinită a unei mulţimi numărabile este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Presupunem prin absurd că A este finită. Atunci există n astfel încât A are n elemente. Vom demonstra că există m astfel încât B are m elemente, ceea ce va contrazice ipoteza noastră.

Demonstrăm prin inducţie după n.

Pentru $n = 0$, avem $A = \emptyset$. Dacă am avea un $x \in B$, atunci $f(x) \in A = \emptyset$, contradicţie. Rămâne că $B = \emptyset$. Prin urmare B are 0 elemente, deci putem lua $m := 0$.

Presupunem că am arătat propoziţia pentru mulţimi cu n elemente şi considerăm acum că A are $n+1$ elemente. Luăm $g : \{1, ..., n+1\} \to A$ bijecţie. Notăm $C := g(\{1, ..., n\})$ şi $D := \{x \in B \mid f(x) \in C\}$.

Cum $f(D) \subseteq C$, putem atât restricţiona cât şi corestricţiona pe f la o funcţie $f' : D \to C$ ce ia aceleaşi valori ca f şi este deci tot injectivă. Facem acelaşi lucru pornind de la $g(\{1, ..., n\}) = C$ şi obţinem o bijecţie $g' : \{1, ..., n\} \to C$. Rezultă că C are n elemente. Aplicând ipoteza de inducţie pentru f', obţinem că există p astfel încât D are p elemente şi deci există o bijecţie $h : \{1, ..., p\} \to D$.

Distingem două cazuri. Dacă nu există $a \in B$ cu $f(a) = g(n + 1)$, atunci $B = D$ şi deci B are p elemente. Luăm aşadar $m := p$. În celălalt caz, dacă există $a \in B$ cu $f(a) = g(n + 1)$, avem că $B = D \cup \{a\}$, iar reuniunea este disjunctă. Luăm acum funcţia $h' : \{1, 2, ..., p + 1\} \to B$, definită, pentru orice j, prin:

$$h'(j) := \begin{cases} h(j), & \text{dacă } j \leq p \\ a, & \text{dacă } j = p + 1. \end{cases}$$

Cum h' este bijectivă, B are $p + 1$ elemente. Luăm, aşadar, în acest caz, $m := p + 1$.

(ii) Demonstrăm prima dată că orice submulţime infinită a lui $\mathbb{N}$ este numărabilă.

Fie $B \subseteq \mathbb{N}$ infinită, deci nevidă. Construim inductiv o enumerare a sa

$$B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\},$$

unde pentru orice n avem $b_n < b_{n+1}$ şi $b_n \geq n$.

Fie b_0 cel mai mic element al ei. Clar, $b_0 \geq 0$. Atunci, B fiind infinită, $B \setminus \{b_0\}$ rămâne infinită şi deci nevidă. Punem b_1 ca fiind minimul acelei mulţimi. Clar, $b_1 \neq b_0$ şi cum b_0 este minimul lui B, avem că $b_0 < b_1$. Rezultă şi că $b_1 > b_0 \geq 0$, deci $b_1 \geq 1$.

Presupunem că am fixat pe $b_0, \ldots, b_n$ (pentru un $n \geq 1$) şi vrem să îl alegem pe b_{n+1}, Îl punem ca fiind minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_n\}$ şi deci $b_{n+1} \neq b_n$. Dat fiind că b_n fusese ales ca minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_{n-1}\}$, avem că $b_n < b_{n+1}$ şi deci $b_{n+1} \geq n + 1$.

Luăm funcţia $g : \mathbb{N} \to B$, $g(n) = b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Funcţia fiind strict crescătoare, este injectivă. Fie acum $m \in B$. Atunci $b_{m+1} \geq m + 1 > m$. Cum b_{m+1} este minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_m\}$, rezultă că $m \in \{b_0, \ldots, b_m\}$. Deci există $i \in \mathbb{N}$, $i \leq m$ cu $m = b_i = g(i)$. Am arătat aşadar că g este surjectivă.

Demonstrăm acum enunţul principal. Fie $h : A \to \mathbb{N}$ o bijecţie. Atunci $B \sim g(B) \sim h(g(B))$, deci $h(g(B)$ e infinită şi este submulţime a lui $\mathbb{N}$, deci numărabilă, din cele anterioare. Rezultă că şi B este numărabilă.

$\square$

(S4.2) Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Dacă A este finită şi B este numărabilă, atunci $A \cup B$ este numărabilă.

(ii) Dacă I este o mulţime numărabilă şi $(A_i)_{i \in I}$ este o familie disjunctă de mulţimi numărabile, atunci $\bigcup_{i \in I} A_i$ este numărabilă.

(iii) Dacă I este o mulţime numărabilă şi $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulţimi numărabile, atunci $\bigcup_{i \in I} A_i$ este numărabilă.

(iv) $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Dacă A este finită, atunci are un număr natural de elemente n. Demonstrăm prin inducţie după acel n.

Dacă $n = 0$, atunci $A = \emptyset$ şi $A \cup B = B$, numărabilă.

Presupunem acum adevărată pentru un n şi demonstrăm pentru $n+1$. Putem deci scrie $A = \{a\} \cup A'$ unde $|A'| = n$ şi $a \notin A'$. Atunci $A' \cup B$ e numărabilă, din ipoteza de inducţie – în particular, $A' \cup B \sim \mathbb{N}^*$. Scriem $A \cup B = \{a\} \cup A' \cup B$. Dacă $a \in B$, atunci $\{a\} \cup A' \cup B = A' \cup B$, numărabilă. Dacă $a \notin B$, atunci $\{a\} \cup A' \cup B \sim \{0\} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$.

(ii) Oferim mai întâi demonstraţia pentru $I = \mathbb{N}$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, A_n este numărabilă, deci $A_n = \{a_{n,0}, a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,k}, \ldots\}$. Definim

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in N} A_n, \quad f(n,m) = a_{n,m}.$$

Se observă uşor, în felul următor, că f este bijecţie. Pentru orice $a \in A$ există un unic $n_a \in \mathbb{N}$ a.î. $a \in A_{n_a}$ (deoarece $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este familie disjunctă), deci există un unic $m_a \in \mathbb{N}$ a.î. $a = a_{n_a, m_a}$. Inversa lui f se defineşte, aşadar, astfel:

$$f^{-1} : \bigcup_{n \in N} A_n \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad f^{-1}(a) = (n_a, m_a).$$

Deoarece $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă, rezultă că $\bigcup_{n \in N} A_n$ este numărabilă.

Considerăm acum cazul general, când I este mulţime numărabilă arbitrară şi fie $F : \mathbb{N} \to I$ o bijecţie. Notăm, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $B_n := A_{F(n)}$. Atunci $\bigcup_{n \in N} B_n = \bigcup_{n \in N} A_{F(n)} = \bigcup_{i \in I} A_i$. Însă, din cazul particular de mai sus, rezultă că $\bigcup_{n \in N} B_n$ e numărabilă. Demonstraţia este încheiată.

(iii) Oferim mai întâi demonstraţia pentru $I = \mathbb{N}$.

Fie $A'_n := \{n\} \times A_n$. Atunci, conform (S2.5), $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este o familie disjunctă de mulţimi numărabile. Aplicăm (ii) pentru a concluziona că $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n$ este numărabilă. Definim

$$f : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n, \quad f(a) = (n_a, a),$$

unde $n_a = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a \in A_n\}$. Este evident că f este bine definită (din faptul că $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, rezultă că există $n \in \mathbb{N}$ cu $a \in A_n$, deci mulţimea căreia îi căutăm minimul este nevidă) şi injectivă. De asemenea, din (S4.1).(i), $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ este infinită, deoarece A_0 este infinită şi incluziunea

$$j : A_0 \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad j(a) = a$$

este injecţie. În sfârşit, putem aplica (S4.1).(ii) pentru a conchide că $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ este numărabilă.

Considerăm acum cazul general, când I este o mulţime numărabilă arbitrară şi fie $F : \mathbb{N} \to I$ o bijecţie. Considerăm familia $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definită, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, prin:

$$B_n := A_{F(n)}$$

Atunci $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ şi deci $\bigcup_{i\in I} A_i \sim \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \sim \mathbb{N}$.

(iv) Notăm, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $A_n := \{\frac{m}{n+1} \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Arătăm că mulţimile ce compun această familie numărabilă sunt şi ele numărabile. Luăm pentru orice $n \in \mathbb{N}$, bijecţia $f_n : \mathbb{Z} \to A_n$, definită, pentru orice m, prin $f_n(m) = \frac{m}{n+1}$. Observăm acum că $\mathbb{Q}$ este reuniunea familiei, deci este şi ea numărabilă, aplicând (iii).

□

(S4.3) Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată şi $\emptyset \neq S \subseteq A$. Atunci:

(i) Dacă minimul lui S există, atunci acesta este unic.

(ii) Orice minim (maxim) al lui S este element minimal (maximal).

Demonstraţie:

(i) Vom presupune că există două valori minime şi vom demonstra că acestea sunt egale. Fie x minim al lui S, deci pentru orice $y \in S$, $x \leq y$. Fie x' minim al lui S, deci pentru orice $y' \in S$, $x' \leq y'$. Cum $x \leq y$ pentru orice $y \in S$, alegem $y = x'$. Rezultă că $x \leq x'$. Cum $x' \leq y'$ pentru orice $y' \in S$, alegem $y' = x$. Rezulă că $x' \leq x$. Atunci obţinem că $x' = x$, deci minimul este unic.
Se procedează asemănător pentru maxim.

(ii) Fie x minimul mulţimii S. Pentru a demonstra că x este element minimal, vom presupune că există cel puţin un element $t \in S$ a.î. $t \leq x$ şi vom arăta că $t = x$. Cum x este minim şi $t \in S$, rezultă că $x \leq t$. Prin urmare, $t = x$, deci x este element minimal al lui S.
Se procedează asemănător pentru maxim.

□

(S4.4) Fie $D(n) = \{d \in \mathbf{N} \mid\ d|n\}$ şi $P(n) = \{d \in \mathbf{N} \mid\ d|n,\ d \neq 1,\ d \neq n\}$.
Demonstraţi că $(P(n), |)$ şi $(D(n), |)$ sunt mulţimi parţial ordonate. Enumeraţi elementele minimale, elementele maximale, minimul şi maximul (dacă există) pentru următoarele mulţimi: $P(12)$, $P(32)$, $P(72)$, $D(72)$.

Demonstraţie:

Definim relaţia de divizibilitate pe mulţimea $P(n)$ astfel : $R = \{(a,b) \in P(n) \times P(n) |\ a|b\}$.

Reflexivitate

Pentru orice $a \in P(n)$, $a = a \cdot 1 \Rightarrow a|a$ pentru orice $a \in P(n)$

Antisimetrie

Pentru orice $a, b \in P(n)$, dacă $(a,b) \in R$ şi $(b,a) \in R$, atunci:

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow \text{există } r \in \mathbb{N} \text{ a.î. } b = a \cdot r \\ b|a \Rightarrow \text{există } t \in \mathbb{N} \text{ a.î. } a = b \cdot t \end{array}\right| \Rightarrow a = a \cdot r \cdot t,\ r,t \in \mathbb{N} \Rightarrow r \cdot t = 1,\ r,t \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$\Rightarrow t = \frac{1}{r} \in \mathbb{N}$. Deci r este divizor al lui 1. Rezultă $r = 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow a = b \cdot 1 \Rightarrow a = b$.

Tranzitivitate

Pentru orice $a, b, c \in P(n)$, dacă $(a,b) \in P(n)$ şi $(b,c) \in P(n)$, atunci:

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow \text{există } r \in \mathbb{N} \text{ a.î. } b = a \cdot r \\ b|c \Rightarrow \text{există } t \in \mathbb{N} \text{ a.î. } c = b \cdot t \end{array}\right| \Rightarrow c = a \cdot r \cdot t,\ r,t \in \mathbb{N} \Rightarrow a|c, \text{ unde } a, c \in P(n)$$

$\Rightarrow (a,c) \in R$.

În concluzie, R este o relaţie de ordine parţială, deci $(P(n), |)$ este mulţime parţial ordonată.
Asemător se demonstrează şi că $(D(n), |)$ este mulţime parţial ordonată.

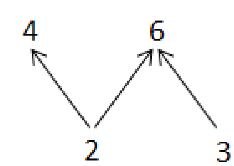
Definiţia 1. *Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată. Construim diagrama Hasse corespunzătoare sub forma unui graf orientat în modul următor:*

(i) vârfurile grafului reprezintă toate elementele mulţimii A.

(ii) există muchie $x \to y$ dacă $x < y$ şi nu există $z \in A$ a.î. $x < z < y$

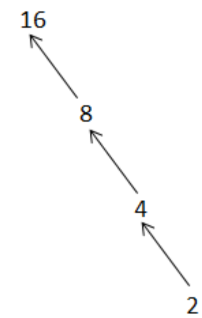
Folosim diagrama Hasse pentru a observa diferenţa dintre elementele minimale(maximale) şi minimul(maximul) unei mulţimi parţial ordonate.

$P(12) = \{2, 3, 4, 6\}$.
Observăm că pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $y|2$, rezultă $y = 2$, sau dacă $y|3$, rezultă $y = 3$. Deci, 2 şi 3 sunt elemente minimale.
Asemănător, pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $4|y$, rezultă $y = 4$, sau dacă $y|6$, rezultă $y = 6$. Deci, 4 şi 6 sunt elemente maximale.
Nu avem element minim, deoarece 2 şi 3 nu sunt într-o relaţie.
Nu avem element maxim, deoarece 4 şi 6 nu sunt într-o relaţie.
Observăm că dacă un element este minimal(maximal), nu implică faptul că el este minim(maxim).



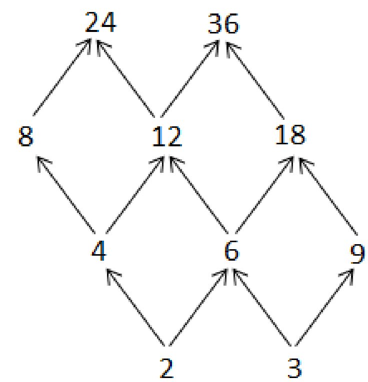
$2|4$
$2|6$
$3|6$

$P(32) = \{2, 4, 8, 16\}$.
2 este element minimal, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $y|2$, rezultă $y = 2$.
Exemplu: 4 nu este maximal, deoarece pentru $y|4$, unde $y \in S$, avem $y \in \{2, 4\}$, deci nu implică $y = 4$.
2 este şi minim, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ avem $2|y$.
16 este element maximal, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $16|y$, rezultă $y = 16$.
Dar 16 este şi maxim, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ avem $y|16$.

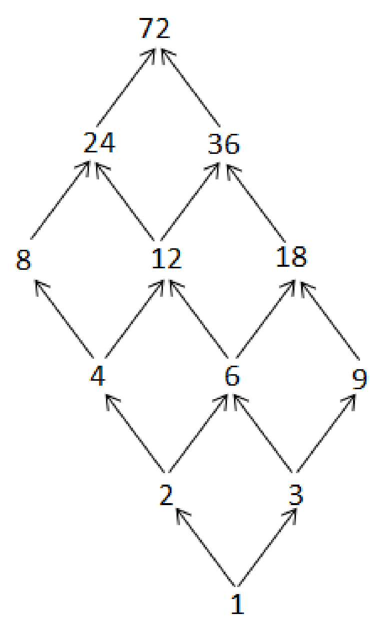


$2|4|8|16$

$P(72) = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36\}$.
2 şi 3 sunt elemente minimale.
24 şi 36 sunt elemente maximale.
Nu avem minim, deoarece 2 şi 3 nu sunt într-o relaţie de divizibilitate şi nici maxim, deoarece 24 şi 36 nu sunt într-o relaţie de divizibilitate.



$D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$.
1 este element minimal, dar şi minim.
72 este element maximal, dar şi maxim.



$\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 5

(S5.1) Fie următoarele propoziţii exprimate în limbaj natural:

(i) Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva.

(ii) Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele.

(iii) Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul.

(iv) Treci examenul la logică dacă faci o prezentare de calitate.

Transpuneţi-le în formule ale limbajului formal al logicii propoziţionale.
Demonstraţie:

(i) Fie φ = Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva. Considerăm propoziţiile atomice:

p = Merg în parc. q = Îmi termin treaba. r = Apare altceva.

Atunci $\varphi = (q \wedge (\neg r)) \rightarrow p$.

(ii) Fie ψ = Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele. Considerăm propoziţiile atomice:

s = Plouă. t = Putem observa stelele.

Atunci $\psi = t \rightarrow \neg s$.

(iii) Fie θ = Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul. Considerăm propoziţiile atomice:

w = Treci examenul la logică. z = Înţelegi subiectul.

Atunci $\theta = w \rightarrow z$.

(iv) Fie χ = Treci examenul la logică dacă faci o prezentare de calitate. Considerăm propoziţiile atomice:

$u =$ Treci examenul la logică. $\quad v =$ Faci o prezentare de calitate.

Atunci $\chi = v \to u$.

$\square$

(S5.2) Să se arate că mulţimea $Form$, a formulelor logicii propoziţionale, este numărabilă.

Demonstraţie: Avem că $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n = \{\lambda\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} Sim^n$. Deoarece $Sim = V \cup \{\neg, \to, (,)\}$ şi V este numărabilă, obţinem, din (S4.2).(i), că Sim este numărabilă. Conform (S2.4).(ii), Sim^n este numărabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Aplicând (S4.2).(iii) şi (S4.2).(i), rezultă că $Expr$ este numărabilă. Deoarece $V \subseteq Form$, din (S4.1).(i) rezultă că $Form$ este infinită. Însă $Form \subseteq Expr$, deci $Form$ este o submulţime infinită a unei mulţimi numărabile. Aplicăm (S4.1).(ii) pentru a conchide că $Form$ este numărabilă. $\square$

(S5.3) Să se arate că pentru orice formulă φ, numărul parantezelor deschise care apar în φ coincide cu numărul parantezelor închise care apar în φ.

Demonstraţie: Notăm, pentru orice $\varphi \in Form$, cu $l(\varphi)$ numărul parantezelor deschise şi cu $r(\varphi)$ numărul parantezelor închise care apar în φ. Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

$$\varphi \text{ are proprietatea } \boldsymbol{P} \text{ dacă şi numai dacă } l(\varphi) = r(\varphi).$$

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ folosind Principiul inducţiei pe formule. Avem următoarele cazuri:

- Formula φ este în V, deci există $n \in \mathbb{N}$ cu $\varphi = v_n$. Atunci $l(\varphi) = l(v_n) = 0 = r(v_n) = r(\varphi)$.
- Există $\psi \in Form$ cu $\varphi = (\neg\psi)$. Presupunem că ψ satisface $\boldsymbol{P}$. Obţinem

$$l(\varphi) = l(\psi) + 1 = r(\psi) + 1 = r(\varphi).$$

- Există $\psi, \chi \in Form$ cu $\varphi = (\psi \to \chi)$. Presupunem că ψ, χ satisfac $\boldsymbol{P}$. Obţinem

$$l(\varphi) = l(\psi) + l(\chi) + 1 = r(\psi) + r(\chi) + 1 = r(\varphi).$$

$\square$

$\square$

(S5.4) Să se dea o definiţie recursivă a mulţimii variabilelor unei formule.
Demonstraţie: Se observă că $Var : Form \to 2^V$ satisface următoarele condiţii:

$$\begin{array}{lll} (R0) & Var(v) & = \{v\} \\ (R1) & Var(\neg\varphi) & = Var(\varphi) \\ (R2) & Var(\varphi \to \psi) & = Var(\varphi) \cup V(\psi). \end{array}$$

Aplicăm Principiul recursiei pe formule pentru $A = 2^V$ şi pentru

$$\begin{array}{rr} G_0 : V \to A, & G_0(v) = \{v\}, \\ G_\neg : A \to A, & G_\neg(\Gamma) = \Gamma, \\ G_\to : A \times A \to A, & G_\to(\Gamma, \Delta) = \Gamma \cup \Delta. \end{array}$$

pentru a concluziona că Var este unica funcţie care satisface (R0), (R1) şi (R2). $\square$

(S5.5) Să se demonstreze că pentru orice x_0, x_1, x_3, x_4 din $\{0, 1\}$ avem:

(i) $((x_0 \to x_1) \to x_0) \to x_0 = 1$;

(ii) $(x_3 \to x_4) \to ((x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1)) = 1$.

Demonstraţie:

(i)

x_0	x_1	$x_0 \to x_1$	$(x_0 \to x_1) \to x_0$	$((x_0 \to x_1) \to x_0) \to x_0$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

(ii) Notăm $f(x_1, x_3, x_4) := (x_3 \to x_4) \to ((x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1))$.

x_1	x_3	x_4	$x_3 \to x_4$	$x_4 \to x_1$	$x_3 \to x_1$	$(x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1)$	$f(x_1, x_3, x_4)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

$\square$

(S5.6) Să se arate că pentru orice $e : V \to \{0,1\}$ şi pentru orice formule φ, ψ avem:

(i) $e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \boldsymbol{\vee} e^+(\psi)$;

(ii) $e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi)$;

(iii) $e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \boldsymbol{\leftrightarrow} e^+(\psi)$.

Demonstraţie:

(i)

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\neg\varphi \to \psi) = e^+(\neg\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = \boldsymbol{\neg} e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\psi) \overset{(*)}{=} e^+(\varphi) \boldsymbol{\vee} e^+(\psi).$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0,1\}$, avem $\boldsymbol{\neg} x \boldsymbol{\to} y = x \boldsymbol{\vee} y$:

x	y	$\boldsymbol{\neg} x$	$\boldsymbol{\neg} x \boldsymbol{\to} y$	$x \boldsymbol{\vee} y$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

(ii)

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \wedge \psi) &= e^+(\neg(\varphi \to \neg\psi)) \\ &= \boldsymbol{\neg} e^+(\varphi \to \neg\psi) \\ &= \boldsymbol{\neg}(e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\neg\psi)) \\ &= \boldsymbol{\neg}(e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} \boldsymbol{\neg} e^+(\psi)) \\ &\overset{(*)}{=} e^+(\varphi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi). \end{aligned}$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0,1\}$, avem $\boldsymbol{\neg}(x \boldsymbol{\to} \boldsymbol{\neg} y) = x \boldsymbol{\wedge} y$:

x	y	$\boldsymbol{\neg} y$	$x \boldsymbol{\to} \boldsymbol{\neg} y$	$\boldsymbol{\neg}(x \boldsymbol{\to} \boldsymbol{\neg} y)$	$x \boldsymbol{\wedge} y$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

(iii)

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) &= e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} e^+(\varphi \to \psi) \mathbin{\pmb{\wedge}} e^+(\psi \to \varphi) \\ &= (e^+(\varphi) \mathbin{\pmb{\to}} e^+(\psi)) \mathbin{\pmb{\wedge}} (e^+(\psi) \mathbin{\pmb{\to}} e^+(\varphi)) \\ &\overset{(*)}{=} e^+(\varphi) \mathbin{\pmb{\leftrightarrow}} e^+(\psi). \end{aligned}$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0, 1\}$, avem $(x \mathbin{\pmb{\to}} y) \mathbin{\pmb{\wedge}} (y \mathbin{\pmb{\to}} x) = x \mathbin{\pmb{\leftrightarrow}} y$:

x	y	$x \mathbin{\pmb{\to}} y$	$y \mathbin{\pmb{\to}} x$	$(x \mathbin{\pmb{\to}} y) \mathbin{\pmb{\wedge}} (y \mathbin{\pmb{\to}} x)$	$x \mathbin{\pmb{\leftrightarrow}} y$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

$\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 6

(S6.1) Să se găsească câte un model pentru fiecare din formulele:

(i) $v_0 \to v_2$;

(ii) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

Demonstraţie:

(i) Fie funcţia $e : V \to \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_2 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$e^+(v_0 \to v_2) = e^+(v_0) \to e^+(v_2) = e(v_0) \to e(v_2) = 0 \to 1 = 1.$$

(ii) Fie funcţia $e : V \to \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_3 \\ 0, & \text{dacă } x = v_4 \\ 1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} e^+(v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4) &= e^+(v_0) \wedge e^+(v_3) \wedge \neg e^+(v_4) \\ &= e(v_0) \wedge e(v_3) \wedge \neg e(v_4) \\ &= 1 \wedge 1 \wedge \neg 0 \\ &= 1 \wedge 1 \wedge 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\square$

(S6.2) Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ,

(i) φ este tautologie dacă şi numai dacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.

(ii) φ este nesatisfiabilă dacă şi numai dacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ este tautologie} &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\varphi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \boldsymbol{\neg} e^+(\varphi) = 0\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\neg\varphi) = 0\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \text{nu avem că } \ e^+(\neg\varphi) = 1\\
&\iff \text{nu avem că există } e : V \to \{0,1\} \text{ cu } \ e^+(\neg\varphi) = 1\\
&\iff \text{nu avem că } \neg\varphi \text{ e satisfiabilă}\\
&\iff \neg\varphi \text{ nu e satisfiabilă}\\
&\iff \neg\varphi \text{ e nesatisfiabilă.}
\end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ este nesatisfiabilă} &\iff \varphi \text{ nu e satisfiabilă}\\
&\iff \text{nu avem că } \varphi \text{ e satisfiabilă}\\
&\iff \text{nu avem că există } e : V \to \{0,1\} \text{ cu } \ e^+(\varphi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \text{nu avem că } \ e^+(\varphi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\varphi) = 0\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \boldsymbol{\neg} e^+(\varphi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\neg\varphi) = 1\\
&\iff \neg\varphi \text{ este tautologie.}
\end{aligned}$$

$\square$

(S6.3) Să se demonstreze că, pentru orice formule φ, ψ,

(i) $\psi \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $\vDash \psi \to \varphi$.

(ii) $\psi \sim \varphi$ dacă şi numai dacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
\psi \vDash \varphi &\iff \text{orice model al lui } \psi \text{ este şi model pentru } \varphi \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \text{dacă } e^+(\psi) = 1,\ \text{atunci } e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi) \leq e^+(\varphi) \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi) \to e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi \to \varphi) = 1 \\
&\iff \vDash \psi \to \varphi.
\end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
\psi \sim \varphi &\iff Mod(\psi) = Mod(\varphi) \\
&\iff Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi) \text{ şi } Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi) \\
&\iff \psi \vDash \varphi \text{ şi } \varphi \vDash \psi \\
&\overset{\text{(i)}}{\iff} \vDash \psi \to \varphi \text{ şi } \vDash \varphi \to \psi \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \to \psi) = 1 \text{ şi } e^+(\psi \to \varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \to \psi) \wedge e^+(\psi \to \varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \\
&\iff \vDash \psi \leftrightarrow \varphi.
\end{aligned}$$

□

(S6.4) Confirmaţi sau infirmaţi:

(i) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\vDash \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ şi $\vDash \psi$;

(ii) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\vDash \varphi \vee \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ sau $\vDash \psi$.

Demonstraţie:

(i) Este adevărat. Avem:

$$\begin{aligned}
\models \varphi \land \psi &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \land \psi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi } e^+(\psi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi}\\
&\qquad \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi) = 1\\
&\iff \models \varphi \text{ şi} \models \psi.
\end{aligned}$$

(ii) Nu este adevărat! Dacă luăm $e_1 : V \to \{0,1\}$, $e_1(x) = 1$, pentru orice $x \in V$, şi $e_2 : V \to \{0,1\}$, $e_2(x) = 0$, pentru orice $x \in V$, avem că $e_1 \not\models \neg v_0$ şi $e_2 \not\models v_0$, deci v_0 şi $\neg v_0$ nu sunt tautologii, pe când $v_0 \lor \neg v_0$ este tautologie.

□

(S6.5) Arătaţi că pentru orice φ, ψ, $\chi \in Form$, avem:

(i) $\psi \models \varphi \to \psi$;

(ii) $(\varphi \to \psi) \land (\psi \to \chi) \models \varphi \to \chi$;

(iii) $\varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \land \psi) \to \chi$;

(iv) $\varphi \lor (\varphi \land \psi) \sim \varphi$;

(v) $\varphi \land \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \lor (\psi \to \chi)$;

(vi) $\models \neg\varphi \to (\neg\psi \to (\psi \leftrightarrow \varphi))$.

Demonstraţie: Vom folosi în demonstraţii următoarele: pentru orice $a, b \in \{0,1\}$,

$$\begin{aligned}
a \to b = 1 &\iff a \leq b,\\
1 \to a = a, &\qquad a \to 1 = 1\\
0 \to a = 1, &\qquad a \to 0 = \neg a\\
1 \wedge a = a, &\qquad 0 \wedge a = 0,\\
1 \vee a = 1, &\qquad 0 \vee a = a.
\end{aligned}$$

(i) Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $e^+(\psi) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Dar:

$$e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi) = e^+(\varphi) \to 1 = 1.$$

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $e^+((\varphi \to \psi) \land (\psi \to \chi)) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \to \chi) = 1$. Avem că

$$1 = e^+((\varphi \to \psi) \land (\psi \to \chi)) = (e^+(\varphi) \mathbf{\to} e^+(\psi)) \mathbf{\wedge} (e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi)),$$

de unde tragem concluzia că $e^+(\varphi) \mathbf{\to} e^+(\psi) = 1$ şi $e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi) = 1$. Prin urmare, $e^+(\varphi) \leq e^+(\psi)$ şi $e^+(\psi) \leq e^+(\chi)$. Obţinem atunci, din tranzitivitatea lui $\leq$, că $e^+(\varphi) \leq e^+(\chi)$. Aşadar,

$$e^+(\varphi \to \chi) = e^+(\varphi) \mathbf{\to} e^+(\chi) = 1.$$

(iii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi) = 1 \text{ dacă şi numai dacă } e^+(\varphi \land \psi \to \chi) = 1,$$

ceea ce este echivalent cu a arăta că $e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) = e^+(\varphi \land \psi \to \chi)$.

Metoda 1: Ne folosim de următorul tabel:

$e^+(\varphi)$	$e^+(\psi)$	$e^+(\chi)$	$e^+(\psi \to \chi)$	$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi))$	$e^+(\varphi \land \psi)$	$e^+(\varphi \land \psi \to \chi)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Metoda 2: Raţionăm direct. Observăm că

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) &= e^+(\varphi) \mathbf{\to} (e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi)), \\ e^+(\varphi \land \psi \to \chi) &= e^+(\varphi) \mathbf{\wedge} e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi). \end{aligned}$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \mathbf{\to} (e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi)) &= 0 \mathbf{\to} (e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi)) = 1, \\ e^+(\varphi) \mathbf{\wedge} e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi) &= 0 \mathbf{\wedge} e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi) = 0 \mathbf{\to} e^+(\chi) = 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= 1 \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = e^+(\psi) \to e^+(\chi), \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) &= 1 \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) = e^+(\psi) \to e^+(\chi). \end{aligned}$$

(iv) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) = e^+(\varphi), \quad \text{deci că} \quad e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = e^+(\varphi).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee (1 \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee e^+(\psi) = 1.$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee (0 \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee 0 = 0.$$

(v) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) = e^+((\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)),$$

deci că

$$(e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) = (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) &= 1 \to e^+(\chi) = e^+(\chi), \\ (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= (1 \to e^+(\chi)) \vee (1 \to e^+(\chi)) \\ &= e^+(\chi) \vee e^+(\chi) = e^+(\chi). \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) &= (0 \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) \\ &= 0 \to e^+(\chi) = 1, \\ (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= (0 \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) \\ &= 1 \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = 1. \end{aligned}$$

(c) $e^+(\psi) = 0$. Similar cu cazul precedent.

(vi) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară.

$$e^+(\neg\varphi \to (\neg\psi \to (\psi \leftrightarrow \varphi))) = \neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ şi, prin urmare,

$$\begin{aligned}\neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= 0 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) \\ &= 1.\end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned}\neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= \neg 0 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0)) \\ &= 1 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0)) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow \neg e^+(\psi) \\ &= 1.\end{aligned}$$

$\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 7

(S7.1) Să se găsească toate modelele fiecăreia din mulţimile de formule:

(i) $\Gamma = \{v_n \to v_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(ii) $\Gamma = \{v_0\} \cup \{v_n \to v_{n+1} \mid 0 \leq n \leq 7\}$.

Demonstraţie:

(i) Fie $e : V \to \{0,1\}$ şi $n \in \mathbb{N}$. Atunci $e \vDash v_n \to v_{n+1}$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n \to v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n) \to e^+(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \to e(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$. Prin urmare,

$e \vDash \Gamma$ dacă şi numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$
dacă şi numai dacă $e(v_0) \leq e(v_1) \leq \ldots \leq e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \leq \ldots$
dacă şi numai dacă $(e(v) = 0$ pentru orice $v \in V)$
sau $(e(v) = 1$ pentru orice $v \in V)$
sau (există $k \geq 1$ a.î. $e(v_i) = 0$ pentru orice $i < k$ şi $e(v_i) = 1$ pentru orice $i \geq k$).

Definim $e^0 : V \to \{0,1\}$, $e^0(v) = 0$, $e^1 : V \to \{0,1\}$, $e^1(v) = 1$ şi, pentru orice $k \geq 1$,

$$e_k : V \to \{0,1\}, \quad e_k(v_n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < k \\ 1 & \text{dacă } n \geq k. \end{cases}$$

Atunci

$$Mod(\Gamma) = \{e_k \mid k \geq 1\} \cup \{e^0, e^1\}.$$

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$. Atunci

$e \vDash \Gamma$ dacă şi numai dacă $e \vDash v_0$ şi $e \vDash v_n \to v_{n+1}$ pentru orice $0 \leq n \leq 7$
dacă şi numai dacă $e(v_0) = 1$ şi $e(v_0) \leq e(v_1) \leq \ldots \leq e(v_7) \leq e(v_8)$
dacă şi numai dacă $e(v_n) = 1$ pentru orice $n \in \{0,1,\ldots,8\}$.

Aşadar,

$$Mod(\Gamma) = \{e : V \to \{0,1\} \mid e(v_n) = 1 \text{ pentru orice } 0 \leq n \leq 8\}.$$

$\square$

(S7.2) Să se arate că

$$\{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\} \vDash (v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)$$

Demonstraţie:

Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $e \vDash \{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\}$. Atunci $e^+(v_0) = 1$ (deci $e(v_0) = 1$) şi $e^+(\neg v_0 \vee v_1 \vee v_2) = 1$. Aşadar,

$$1 \;=\; \neg e(v_0) \vee e(v_1) \vee e(v_2) = \neg 1 \vee e(v_1) \vee e(v_2) = 0 \vee e(v_1) \vee e(v_2) = e(v_1) \vee e(v_2).$$

Conform definiţiei lui $\vee$, avem că $v_1 \vee v_2 = \neg v_1 \to v_2$, deci

$$e^+(\neg v_1 \to v_2) = e^+(v_1 \vee v_2) = e(v_1) \vee e(v_2) = 1.$$

Prin urmare,

$$e^+((v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)) = e^+(v_3 \to v_2) \vee e^+(\neg v_1 \to v_2) = e^+(v_3 \to v_2) \vee 1 = 1,$$

adică $e \vDash (v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)$. $\square$

(S7.3) Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Să se demonstreze:

(i) Dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vDash \psi$.

(ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

Demonstraţie:

(i) Fie e un model al lui Γ. Vrem să arătăm că e este model al lui ψ. Cum $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \varphi \to \psi$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Deoarece $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi) = 1 \to e^+(\psi) = e^+(\psi)$, rezultă că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(ii) "$\Rightarrow$" Fie e un model al lui Γ. Vrem să arătăm că e este model al lui $\varphi \to \psi$. Avem două cazuri:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $e^+(\varphi \to \psi) = 0 \to e^+(\psi) = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

(b) $e^+(\varphi) = 1$, deci $e \vDash \varphi$. Atunci $e \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$, şi prin urmare, $e \vDash \psi$, adică $e^+(\psi) = 1$. Rezultă că $e^+(\varphi \to \psi) = 1 \to 1 = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

"$\Leftarrow$" Fie e un model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e \vDash \Gamma$, deci, din ipoteză, $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Obţinem atunci, ca la (i), că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \psi \iff \Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

$\square$

Notaţie

Pentru orice mulţime Γ *de formule şi orice formulă* φ*, notăm*

$$\Gamma \vDash_{fin} \varphi \quad :\iff \quad \textit{există o submulţime finită } \Delta \textit{ a lui } \Gamma \textit{ a.î. } \Delta \vDash \varphi.$$

(S7.4) Să se arate că pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formulă φ avem că $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este finit satisfiabilă.

Demonstraţie:

Avem întâi că $\Gamma \vDash_{fin} \varphi \iff$ există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \vDash \varphi \iff$ (din Propoziţia 1.33.(i)) există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ nesatisfiabilă (*).

Apoi, cum o mulţime finit satisfiabilă înseamnă o mulţime pentru care orice submulţime finită a sa e satisfiabilă, avem că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu e finit satisfiabilă $\iff$ există $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ finită astfel încât Δ' e nesatisfiabilă (**).

Noi vrem să arătăm că (*) este echivalent cu (**).

Pentru "(*) implică (**)", luăm $\Delta' := \Delta \cup \{\neg\varphi\}$, ce este, clar, o submulţime finită a lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

Pentru "(**) implică (*)", luăm $\Delta := \Delta' \cap \Gamma$. Clar, Δ este o submulţime finită a lui Γ. Rămâne de arătat că $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă. Cum $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, avem:

$$\Delta' = \Delta' \cap (\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = (\Delta' \cap \Gamma) \cup (\Delta' \cap \{\neg\varphi\}) = \Delta \cup (\Delta' \cap \{\neg\varphi\}) \subseteq \Delta \cup \{\neg\varphi\}.$$

Cum Δ' e nesatisfiabilă, rezultă că şi $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă. $\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 8

(S8.1) Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(V1) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.

(V2) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este nesatisfiabilă ddacă Γ nu este finit satisfiabilă.

(V3) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, $\varphi \in Form$, $\Gamma \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$.

Demonstraţie:

Echivalenţa între (V1) şi (V2) este evidentă.

Demonstrăm că (V2) $\Rightarrow$ (V3):

$\Gamma \vDash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă (conform Propoziţiei 1.33.(i))
$\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este finit satisfiabilă (conform (V2) pentru $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$)
$\iff \Gamma \vDash_{fin} \varphi$ (conform (S7.4)).

Demonstrăm că (V3) $\Rightarrow$ (V2):

Γ este nesatisfiabilă $\iff \Gamma \vDash \bot$ (conform Propoziţiei 1.32)
$\iff \Gamma \vDash_{fin} \bot$ (conform (V3) pentru Γ şi $\bot$)
$\iff$ există o submulţime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \vDash \bot$
$\iff$ există o submulţime finită Δ a lui Γ a.î. Δ este nesatisfiabilă (conform Propoziţiei 1.32)
$\iff \Gamma$ nu este finit satisfiabilă.

$\square$

(S8.2) (Metoda reducerii la absurd)
Să se arate că pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \psi.$$

Demonstraţie:

Avem

(1)	$\Gamma \cup \{\neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	Ipoteză
(2)	Γ	$\vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)$	Teorema deducţiei
(3)	Γ	$\vdash (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to \varphi) \to \psi)$	(A3) şi Propoziţia 1.40.(i)
(4)	Γ	$\vdash (\varphi \to \varphi) \to \psi$	(MP): (2), (3)
(5)	Γ	$\vdash \varphi \to \varphi$	Propoziţiile 1.48 şi 1.42.(ii)
(6)	Γ	$\vdash \psi$	(MP): (4), (5).

□

(S8.3) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

(i) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$;

(ii) $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$;

(iii) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$;

(iv) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$.

Demonstraţie: Demonstrăm (i):

(1)		$\vdash \neg\psi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	(A1)
(2)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \neg\psi$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$	(A3) şi Propoziţia 1.40.(i)
(4)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash \varphi$	Teorema deducţiei.

Punctul (ii) se obţine din (i) aplicând de două ori Teorema deducţiei:

(1)	$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash \varphi$	(S8.3).(i)
(2)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	Teorema deducţiei
(3)		$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \chi)$	Teorema deducţiei.

Demonstrăm în continuare (iii).

(1)	$\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	(i)
(2)	$\{\neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(1) şi (S8.2)
(3)		$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi.$	Teorema deducţiei.

Demonstrăm (iv):

(1)	$\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	(iii) cu $\varphi := \neg\varphi$
(2)	$\vdash (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	(A3)
(3)	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	(MP): (1), (2).

□

(S8.4) ("Reciproca" axiomei 3)
Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi).$$

Demonstraţie:

(1)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi \to \psi$	Propoziţia 1.40.(ii)
(2)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi$	Propoziţia 1.40.(ii)
(3)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi$	Propoziţia 1.40.(ii)
(4)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(S8.3).(iii) şi Propoziţia 1.42.(ii)
(5)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \neg(\varphi \to \varphi))$	(S8.3).(ii) şi Propoziţia 1.42.(ii)
(8)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \psi \to \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (2), (7)
(9)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (6), (8)
(10)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$	$\vdash \neg\varphi$	(9) şi (S8.2)
(11)	$\{\varphi \to \psi\}$	$\vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	Teorema deducţiei
(12)		$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	Teorema deducţiei.

$\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 9

(S9.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

$$\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \to \varphi).$$

Demonstraţie: Avem

(1)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \psi$	Propoziţia 1.40.(ii)
(2)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\varphi$	Propoziţia 1.40.(ii)
(3)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\neg(\psi \to \varphi)$	Propoziţia 1.40.(ii)
(4)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\neg(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi)$	(S8.3).(iii) şi Prop. 1.42.(ii)
(5)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi))$	(S8.3).(ii) şi Prop. 1.42.(ii)
(8)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (2), (7)
(9)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (6), (8)
(10)	$\{\psi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\psi \to \varphi)$	(9) şi (S8.2).

□

(S9.2) Să se arate, folosind substituţia, că formula

$$\chi := (((v_0 \to \neg(v_3 \to v_5)) \to v_6) \wedge (\neg(v_4 \to v_{10}) \to v_2)) \to ((v_0 \to \neg(v_3 \to v_5)) \to v_6)$$

este tautologie.

Demonstraţie: Ştim că $v_0 \wedge v_1 \to v_0$ este tautologie. Aplicăm Propoziţia 1.24.(ii) pentru $\varphi := (v_0 \wedge v_1) \to v_0$, $v := v_0$ şi $\theta := (v_0 \to \neg(v_3 \to v_5)) \to v_6$ pentru a obţine că:

$$\psi := \varphi_v(\theta) = (((v_0 \to \neg(v_3 \to v_5)) \to v_6) \wedge v_1 \to ((v_0 \to \neg(v_3 \to v_5)) \to v_6)$$

este tautologie. Aplicăm încă o dată Propoziţia 1.24.(ii) pentru $\varphi := \psi$, $v := v_1$ şi $\theta := \neg(v_4 \to v_{10}) \to v_2$ pentru a obţine că χ este tautologie.

□

(S9.3)

(i) Să se arate că mulţimea modelelor unei mulţimi satisfiabile şi finite de formule este infinită.

(ii) Găsiţi o mulţime infinită de formule care nu este semantic echivalentă cu nicio mulţime finită de formule.

Demonstraţie:

(i) Fie Γ o mulţime de formule ca în enunţ. Dat fiind că Γ este satisfiabilă, admite un model şi fie acesta e. Pe de altă parte, dat fiind că Γ este finită, există un $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\bigcup_{\varphi\in\Gamma} Var(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$.

Fie, atunci, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, câte o funcţie $e_k : V \to \{0,1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e_k(x) := \begin{cases} e(x), & \text{dacă } x \in \{v_0, \ldots, v_n\} \\ 1, & \text{dacă } x \in \{v_{n+1}, \ldots, v_{n+k}\} \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci, pentru $k \neq l$ avem $e_k \neq e_l$. Prin urmare, $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ este o mulţime numărabilă. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $\varphi \in \Gamma$, aplicând Propoziţia 1.14 pentru φ, e şi e_k, avem că $e_k^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $e_k \vDash \varphi$.

Am obţinut astfel că $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq Mod(\Gamma)$. Aşadar, $Mod(\Gamma)$ este infinită. (Cu ce mulţime este $Mod(\Gamma)$ echipotentă?)

(ii) Considerăm $\Gamma := V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, o mulţime infinită de formule. Demonstrăm că Γ nu este echivalentă cu nicio mulţime finită de formule. Observăm că o evaluare $e : V \to \{0,1\}$ este model al lui Γ dacă şi numai dacă $e(v_n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ dacă şi numai dacă e este funcţia constantă 1. Prin urmare, $Mod(\Gamma)$ are un singur element, pe e.

Fie acum Δ o mulţime finită de formule. Avem două cazuri:

(a) Δ nu este satisfiabilă. Atunci $Mod(\Delta) = \emptyset$.

(b) Δ este satisfiabilă. Atunci aplicăm (i) pentru a concluziona că $Mod(\Delta)$ este infinită.

În ambele cazuri, obţinem că $Mod(\Delta) \neq \{e\} = Mod(\Gamma)$, deci Γ nu este echivalentă cu Δ.

$\square$

Definiţia 1. *Un* **graf (neorientat)** *este o pereche* (X, E) *unde* X *e o mulţime şi* E *este o relaţie ireflexivă şi simetrică pe* X*. Spunem că un graf* (X, E) *este* **finit** *(respectiv* **numărabil***) dacă* X *este finită (respectiv numărabilă).*

Definiţia 2. *Fie* (X, E) *un graf şi* $k \in \mathbb{N}$*. O* k**-colorare a lui** (X, E) *este o funcţie* $c : X \to \{0, ..., k-1\}$ *astfel încât pentru orice* $x, y \in X$ *cu* $(x, y) \in E$ *avem* $c(x) \neq c(y)$*. Spunem că* (X, E) *este* k**-colorabil** *dacă există o* k*-colorare a lui* (X, E)*.*

Definiţia 3. *Fie* (X, E)*,* (X', E') *grafuri. Spunem că* (X', E') *este* **subgraf al lui** (X, E) *dacă* $X' \subseteq X$ *şi* $E' \subseteq E$*.*

(S9.4) Fie (X, E) un graf numărabil şi $k \in \mathbb{N}$. Arătaţi că dacă orice subgraf finit al lui (X, E) este k-colorabil, avem că şi (X, E) este k-colorabil.
Demonstraţie: Considerăm $X = \{x_0, x_1, x_2, ...\}$. Notăm, pentru orice $i \in \mathbb{N}$ şi $j \in \{0, ..., k-1\}$, $a_{i,j} := v_{i \cdot k + j}$ (unde v_0, v_1, v_2 etc. sunt variabilele logicii propoziţionale). De remarcat că asocierea este bijectivă, adică pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există o unică pereche $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ cu $v_n = a_{i,j}$. (Intuitiv, $a_{i,j}$ va fi "adevărat" când vârful x_i va fi colorat în culoarea j.)
Considerăm următoarele mulţimi de formule:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &:= \{a_{i,0} \vee ... \vee a_{i,k-1} \mid i \in \mathbb{N}\} \\
&\quad \text{(intuitiv, spune că fiecare vârf al grafului e colorat în cel puţin o culoare)} \\
\Gamma_2 &:= \{a_{i,j_1} \to \neg a_{i,j_2} \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq j_1 < j_2 < k\} \\
&\quad \text{(intuitiv, spune că fiecare vârf al grafului e colorat în cel mult o culoare)} \\
\Gamma_3 &:= \{a_{i,j} \to \neg a_{p,j} \mid i, p \in \mathbb{N}, (x_i, x_p) \in E, 0 \leq j < k\} \\
&\quad \text{(intuitiv, spune că două vârfuri adiacente sunt colorate prin culori diferite)} \\
\Gamma &:= \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3.
\end{aligned}$$

Afirmaţie: Dacă Γ este satisfiabilă, atunci (X, E) este k-colorabil.
Demonstraţie: Fie $e \vDash \Gamma$. Deoarece $e \vDash \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, rezultă că pentru orice $i \in \mathbb{N}$ există un unic $J_i \in \{0, ..., k-1\}$ a.î. $e(a_{i,J_i}) = 1$. Definim atunci

$$c : X \to \{0, ..., k-1\}, \quad c(x_i) = J_i.$$

Demonstrăm că c este o k-colorare a lui (X, E). Fie $i, p \in \mathbb{N}$ a.î. $(x_i, x_p) \in E$. Trebuie să arătăm că $c(x_i) \neq c(x_p)$, adică, $J_i \neq J_p$. Presupunem prin reducere la absurd că $J_i = J_p$ şi notăm cu J valoarea comună. Atunci $e(a_{i,J}) = e(a_{p,J}) = 1$.

Deoarece $e \vDash \Gamma_3$, avem că

$$1 = e^+(a_{i,J} \to \neg a_{p,J}) = e(a_{i,J}) \rightarrow \neg e(a_{p,J}) = 1 \rightarrow \neg 1 = 1 \rightarrow 0 = 0,$$

o contradicţie. $\blacksquare$

Rămâne să arătăm că Γ este satisfiabilă. Din Teorema de compacitate, e suficient să demonstrăm că orice submulţime finită Δ a lui Γ este satisfiabilă.
Fie o asemenea mulţime Δ. Definim

$$\begin{aligned} A &:= \bigcup_{\varphi \in \Delta} \{i \in \mathbb{N} \mid \text{ există } j \in \{0, ..., k-1\} \text{ a.î. } a_{i,j} \in Var(\varphi)\}, \\ Y &:= \{x_i \mid i \in A\}. \end{aligned}$$

Deoarece Δ este finită, se arată uşor că A este finită. Prin urmare, Y este o mulţime finită de vârfuri ale grafului (X, E). Ca urmare, subgraful indus $(Y, E \cap (Y \times Y))$ este un subgraf finit al lui (X, E), ce admite, din ipoteza problemei, o k-colorare - să o notăm cu h_Y.
Definim $e : V \to \{0, 1\}$ astfel: pentru orice $i \in \mathbb{N}$ şi $j \in \{0, ..., k-1\}$,

$$e(a_{i,j}) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } i \in A \text{ şi } h_Y(x_i) = j; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Rezultă că pentru orice $i \in A$ există un unic $J_i \in \{0, ..., k-1\}$ a.î. $h_Y(x_i) = J_i$, deci $e(a_{i,J_i}) = 1$.
Demonstrăm că e este model al lui Δ. Fie $\varphi \in \Delta$. Avem cazurile:

(i) $\varphi \in \Gamma_1$, adică $\varphi = a_{i,0} \vee ... \vee a_{i,k-1}$ pentru un $i \in \mathbb{N}$. Atunci $i \in A$ şi $e(a_{i,J_i}) = 1$, adică $e \vDash a_{i,J_i}$. Rezultă că $e \vDash \varphi$.

(ii) $\varphi \in \Gamma_2$, adică $\varphi = a_{i,j_1} \to \neg a_{i,j_2}$ pentru un $i \in \mathbb{N}$ şi $0 \leq j_1 < j_2 < k$. Atunci $i \in A$. Avem cazurile:

   (a) $j_1 \neq J_i$, deci $e(a_{i,j_1}) = 0$. Atunci $e^+(\varphi) = e(a_{i,j_1}) \rightarrow \neg e(a_{i,j_2}) = 1$, deci $e \vDash \varphi$.
   (b) $j_1 = J_i$, deci $e(a_{i,j_1}) = 1$. Atunci $e(a_{i,j_2}) = 0$. Obţinem că $e^+(\varphi) = 1 \rightarrow \neg 0 = 1$.

(iii) $\varphi \in \Gamma_3$, adică $\varphi = a_{i,j} \to \neg a_{p,j}$, cu $i, p \in \mathbb{N}$ a.î. $(x_i, x_p) \in E$, $0 \leq j < k$. Atunci $i, p \in A$, aşa că $x_i, x_p \in Y$ şi, prin urmare, (x_i, x_p) este o muchie a grafului $(Y, E \cap (Y \times Y))$. Deoarece h_Y este o k-colorare, avem că $h_Y(x_i) \neq h_Y(x_p)$, adică $J_i \neq J_p$. Avem cazurile:

   (a) $j \neq J_i$, deci $e(a_{i,j}) = 0$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$, deci $e \vDash \varphi$.
   (b) $j = J_i$, deci $e(a_{i,j}) = 1$. Atunci $j \neq J_p$, deci $e(a_{p,j}) = 0$. Obţinem că $e^+(\varphi) = 1$.

$\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 10

(S10.1) Să se demonstreze Teorema de completitudine tare - versiunea 2, dar fără a se folosi, precum în curs, Teorema de completitudine tare - versiunea 1.
Demonstraţie: Fie $\varphi \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$. Abreviem Teorema de completitudine (slabă) cu TC, iar Teorema de compacitate cu TK. Avem că:

$$\begin{aligned}
\Gamma \vdash \varphi &\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi && \text{(din Propoziţia 1.47)}\\
&\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \vdash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi && \text{(din Propoziţia 1.62.(i))}\\
&\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \vDash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi && \text{(din TC)}\\
&\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vDash \varphi && \text{(din Propoziţia 1.34.(ii))}\\
&\Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi. && \text{(din TK - versiunea 3)}
\end{aligned}$$

□

(S10.2) Să se arate că Teorema de completitudine tare - versiunea 2 implică imediat Teorema de completitudine tare - versiunea 1.
Demonstraţie: Vrem să arătăm că o mulţime de formule este consistentă dacă şi numai dacă este satisfiabilă. Fie $\Gamma \subseteq Form$. Abreviem Teorema de completitudine tare cu TCT. Avem că:

$$\begin{aligned}
\Gamma \text{ este consistentă} &\Leftrightarrow \Gamma \nvdash \bot && \text{(din Propoziţia 1.60)}\\
&\Leftrightarrow \Gamma \nvDash \bot && \text{(din TCT - versiunea 2)}\\
&\Leftrightarrow \Gamma \text{ este satisfiabilă.} && \text{(din Propoziţia 1.32)}
\end{aligned}$$

□

(S10.3) Să se aducă următoarele formule la cele două forme normale prin transformări sintactice:

(i) $((v_0 \to v_1) \wedge v_1) \to v_0$;

(ii) $(v_1 \vee \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3)$.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
((v_0 \to v_1) \wedge v_1) \to v_0 &\sim \neg((\neg v_0 \vee v_1) \wedge v_1) \vee v_0 && \text{(înlocuirea implicaţiei)}\\
&\sim \neg(\neg v_0 \vee v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (\neg\neg v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0, && \text{(reducerea dublei negaţii)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$\begin{aligned}
(v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 &\sim ((v_0 \vee \neg v_1) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_1)) \vee v_0 && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_0) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_1 \vee v_0) && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (v_0 \vee \neg v_1) \wedge (\neg v_1 \vee v_0), && \text{(idempotenţă)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC. De asemenea, ultima formulă este echivalentă şi cu:

$$v_0 \vee \neg v_1,$$

care este şi în FND, şi în FNC.

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
(v_1 \vee \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3) &\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee (\neg\neg v_2 \vee v_3) && \text{(înlocuirea implicaţiilor)}\\
&\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(reducerea dublei negaţii)}\\
&\sim (\neg v_1 \wedge \neg\neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3, && \text{(reducerea dublei negaţii)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$\begin{aligned}
(\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3 &\sim ((\neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_4 \vee v_2)) \vee v_3 && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (v_4 \vee v_2 \vee v_3), && \text{(distributivitate)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC.

$\square$

(S10.4) Să se aducă formula $\varphi = (v_0 \to v_1) \to v_2$ la cele două forme normale trecându-se prin funcţia booleană asociată (i.e. metoda tabelului).

Demonstraţie: Alcătuim tabelul de valori al funcţiei asociate $F_\varphi : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$, precum şi a funcţiei $\neg \circ F_\varphi$.

x_0	x_1	x_2	$x_0 \to x_1$	$F_\varphi(x_0,x_1,x_2) := (x_0 \to x_1) \to x_2$	$\neg F_\varphi(x_0,x_1,x_2)$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1

Obţinem, aşadar, uitându-ne pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui F_φ şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 1.75 şi 1.77, că o formă normală disjunctivă a lui φ este:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2),$$

iar uitându-ne pe liniile cu 0 de pe coloana valorilor lui F_φ şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 1.76 şi 1.77, obţinem că o formă normală conjunctivă a lui φ este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

Alternativ, ne putem uita pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui $\neg \circ F_\varphi = F_{\neg\varphi}$ pentru a obţine (ca mai sus) următoarea formă normală disjunctivă a lui $\neg\varphi$:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2),$$

iar, pe urmă, aplicând Propoziţia 1.71.(ii), obţinem că o formă normală conjunctivă a lui $\neg\neg\varphi$, şi deci a lui φ, este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

$\square$

(S10.5) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ, χ avem:

(i) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$;

(ii) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$;

(iii) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$;

(iv) $\{\varphi, \psi\} \vdash \chi$ ddacă $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$.

Demonstraţie: Reamintim că $\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \to \neg\psi)$. De asemenea, oriunde folosim o teoremă formală cunoscută, aplicăm implicit Propoziţia 1.42.(ii).

Demonstrăm (i):

(1)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$	Propoziţia 1.40.(ii)
(2)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)$	(S8.3).(ii)
(3)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash (\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\varphi)$	(S8.4)
(4)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\varphi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg\varphi$	(MP): (1), (4)
(6)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(S8.3).(iii)
(7)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (5), (6).

Demonstrăm (ii):

(1)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg\psi \to (\varphi \to \neg\psi)$	(A1) şi Propoziţia 1.40.(i)
(2)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg\psi$	Propoziţia 1.40.(ii)
(3)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$	Propoziţia 1.40.(ii)
(5)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \bot)$	(S8.3).(iii)
(6)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash (\varphi \to \neg\psi) \to \bot$	(MP): (4), (5)
(7)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \bot$	(MP): (3), (6)
(8)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi$	(7) şi (S8.2).

Demonstrăm (iii):

(1)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi$	Propoziţia 1.40.(ii)
(2)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi$	Propoziţia 1.40.(ii)
(3)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)$	Propoziţia 1.40.(ii)
(4)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\psi) \to (\varphi \to \neg\psi)$	(S8.3).(iii)
(5)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\psi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \bot)$	(S8.3).(ii)
(8)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi \to \bot$	(MP): (6), (7)
(9)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \bot$	(MP): (2), (8)
(10)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$	(9) şi (S8.2).

Demonstrăm (iv), implicaţia "$\Rightarrow$":

(1)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \chi$	Ipoteză
(2)	$\{\varphi\}$	$\vdash \psi \to \chi$	Teorema deducţiei
(3)		$\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	Teorema deducţiei
(4)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	(3)
(5)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \varphi$	(i)
(6)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \psi \to \chi$	(MP): (4), (5)
(7)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \psi$	(ii)
(8)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \chi$	(MP): (6), (7).

Demonstrăm (iv), implicaţia "$\Leftarrow$":

(1)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \chi$	Ipoteză
(2)		$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$	(2)
(4)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \varphi \wedge \psi$	(iii)
(5)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \chi$	(MP): (3), (4).

$\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 11

(S11.1) Să se testeze dacă următoarele mulţimi de clauze sunt satisfiabile:

(i) $\{\{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_2, \neg v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$;

(ii) $\{\{v_0, v_1\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, v_2, v_3\}\}$.

Demonstraţie:

(i) Presupunem că am avea un model e al mulţimii de clauze. Atunci $e(v_0) = e(v_2) = e(v_3) = 1$. Cum $e \vDash \{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}$, avem că $e(v_1) = 1$. Dar atunci $e \not\vDash \{\neg v_2, \neg v_1\}$. Am obţinut o contradicţie. Rămâne că mulţimea de clauze din enunţ este nesatisfiabilă.

(ii) Fie evaluarea $e : V \to \{0, 1\}$ astfel încât $e(v_0) = 1$, $e(v_1) = 0$, şi $e(v_i) = 1$ pentru orice $i \geq 2$. Atunci e satisface fiecare clauză din mulţime, deci este model pentru mulţimea de clauze. Aşadar, mulţimea de clauze din enunţ este satisfiabilă.

$\square$

(S11.2) Să se determine mulţimea $Res(C_1, C_2)$ în fiecare din următoarele cazuri:

(i) $C_1 := \{v_1, \neg v_4, v_5\}$; $C_2 := \{v_4, v_5, v_6\}$;

(ii) $C_1 := \{v_3, \neg v_4, v_5\}$; $C_2 := \{\neg v_3, v_1, v_6, v_4\}$;

(iii) $C_1 := \{v_1, \neg v_3\}$; $C_2 := \{v_1, \neg v_2\}$.

Demonstraţie:

(i) Putem alege doar $L := \neg v_4$, deci există un singur rezolvent, anume $\{v_1, v_5, v_6\}$.

(ii) Putem rezolva clauzele, pe rând, după $L := v_3$ şi $L := \neg v_4$, obţinând aşadar

$$Res(C_1, C_2) = \{\{\neg v_4, v_5, v_1, v_6, v_4\}, \{v_3, v_5, \neg v_3, v_1, v_6\}\}.$$

(iii) Nu există L astfel încât $L \in C_1$ şi $L^c \in C_2$, deci $Res(C_1, C_2) = \emptyset$.

$\square$

(S11.3) Derivaţi prin rezoluţie clauza $C := \{v_0, \neg v_2, v_3\}$ din mulţimea

$$\mathcal{S} := \{\{v_0, v_4\}, \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\}, \{\neg v_4, v_0, v_1\}, \{\neg v_0, v_3\}\}.$$

Demonstraţie: Notăm:

$$\begin{array}{ll}
C_1 := \{v_0, v_4\} & \\
C_2 := \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\} & \\
C_3 := \{\neg v_4, v_0, v_1\} & \\
C_4 := \{\neg v_0, v_3\} & \\
C_5 := \{v_0, v_1\} & \text{(rezolvent al } C_1,\ C_3) \\
C_6 := \{\neg v_1, \neg v_2, v_3\} & \text{(rezolvent al } C_2,\ C_4) \\
C_7 := \{v_0, \neg v_2, v_3\} & \text{(rezolvent al } C_5,\ C_6)
\end{array}$$

Avem, aşadar, că secvenţa $(C_1, C_2, \ldots, C_6, C_7 = C)$ este o derivare prin rezoluţie a lui C din $\mathcal{S}$. $\square$

(S11.4) Să se deriveze prin rezoluţie clauza $C := \{\neg v_0, v_2\}$ din forma clauzală a unei formule în FNC echivalente semantic cu:

$$\varphi := ((v_0 \wedge v_1) \to v_2) \wedge (v_0 \to v_1)$$

Demonstraţie: Înlocuind implicaţiile şi aplicând legile de Morgan, obţinem că:

$$\begin{aligned}
\varphi &\sim (\neg(v_0 \wedge v_1) \vee v_2) \wedge (\neg v_0 \vee v_1) \\
&\sim (\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_0 \vee v_1),
\end{aligned}$$

o formulă în FNC pe care o notăm cu φ', a cărei formă clauzală este

$$\mathcal{S}_{\varphi'} = \{C_1 := \{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, C_2 := \{\neg v_0, v_1\}\}.$$

Din faptul că $v_1 \in C_2$ şi $\neg v_1 \in C_1$, avem că

$$C := (C_1 \setminus \{\neg v_1\}) \cup (C_2 \setminus \{v_1\}) = \{\neg v_0, v_2\}$$

este un rezolvent al clauzelor C_1 şi C_2. Cum C_1 şi C_2 sunt în $\mathcal{S}_{\varphi'}$, avem aşadar că (C_1, C_2, C) este o derivare prin rezoluţie a lui C din $\mathcal{S}_{\varphi'}$, forma clauzală a lui φ', formulă în FNC echivalentă semantic cu φ. $\square$

(S11.5) Să se arate, folosind rezoluţia, că formula:

$$\varphi := (v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \to v_1) \wedge \neg v_1 \wedge (v_0 \to v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (v_4 \to v_3)$$

este nesatisfiabilă.

Demonstraţie: Înlocuind implicaţiile, obţinem că:

$$\varphi \sim (v_0 \vee v_2) \wedge (\neg v_2 \vee v_1) \wedge \neg v_1 \wedge (\neg v_0 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_4 \vee v_3),$$

o formulă în FNC pe care o notăm cu φ'. Notând:

$$\begin{aligned}
C_1 &:= \{v_0, v_2\} \\
C_2 &:= \{\neg v_2, v_1\} \\
C_3 &:= \{\neg v_1\} \\
C_4 &:= \{\neg v_0, v_4\} \\
C_5 &:= \{\neg v_3\} \\
C_6 &:= \{\neg v_4, v_3\}
\end{aligned}$$

se observă că $\mathcal{S}_{\varphi'} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$. Notând mai departe:

$$\begin{aligned}
C_7 &:= \{\neg v_2\} && \text{(rezolvent al } C_2,\ C_3\text{)} \\
C_8 &:= \{v_0\} && \text{(rezolvent al } C_1,\ C_7\text{)} \\
C_9 &:= \{v_4\} && \text{(rezolvent al } C_4,\ C_8\text{)} \\
C_{10} &:= \{v_3\} && \text{(rezolvent al } C_6,\ C_9\text{)} \\
C_{11} &:= \square && \text{(rezolvent al } C_5,\ C_{10}\text{)}
\end{aligned}$$

avem că secvenţa $(C_1, C_2, \ldots, C_{11})$ este o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din $\mathcal{S}_{\varphi'}$, de unde, aplicând Teorema 1.93, rezultă că $\mathcal{S}_{\varphi'}$ este nesatisfiabilă. Din Propoziţia 1.87, rezultă că φ' este nesatisfiabilă, deci şi φ, care este echivalentă semantic cu φ', este nesatisfiabilă. $\square$

(S11.6) Să se ruleze algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea:

$$\{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_6\}\}.$$

Demonstraţie: Notând mulţimea de clauze de mai sus cu $\mathcal{S}$, obţinem următoarea rulare:

$$i := 1$$

$$\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$$

$P1.1.$ $x_1 := v_0$

$T_1^1 := \{\{v_0\}\}$

$T_1^0 := \{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_0, v_3\}\}$

$P1.2.$ $U_1 := \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\}$

$P1.3.$ $\mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\}$

$P1.4.$ $i := 2;$ goto $P2.1$

$P2.1.$ $x_2 := v_1$

$T_2^1 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}\}$

$T_2^0 := \{\{\neg v_1, v_2\}\}$

$P2.2.$ $U_2 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$

$P2.3.$ $\mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$

$P2.4.$ $i := 3;$ goto $P3.1$

$P3.1.$ $x_3 := v_2$

$T_3^1 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$

$T_3^0 := \{\{\neg v_2, v_6\}\}$

$P3.2.$ $U_3 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$

$P3.3.$ $\mathcal{S}_4 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$

$P3.4.$ $i := 4;$ goto $P4.1$

$P4.1.$ $x_4 := v_3$

$T_4^1 := \{\{v_3\}\}$

$T_4^0 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$

$P4.2.$ $U_4 := \{\{v_4, v_6\}\}$

$P4.3.$ $\mathcal{S}_5 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\}$

$P4.4.$ $i := 5;$ goto $P5.1$

$P5.1.$ $x_5 := v_4$

$T_5^1 := \{\{v_4, v_6\}\}$

$T_5^0 := \{\{\neg v_4, v_5\}\}$

$P5.2.$ $U_5 := \{\{v_5, v_6\}\}$

$P5.3.$ $\mathcal{S}_6 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{v_5, v_6\}\}$

$P5.4.$ $i := 6;$ goto $P6.1$

$P6.1.$	$x_6 := v_5$
	$T_6^1 := \{\{v_5, v_6\}\}$
	$T_6^0 := \{\{\neg v_5, v_6\}\}$
$P6.2.$	$U_6 := \{\{v_6\}\}$
$P6.3.$	$\mathcal{S}_7 := \{\{\neg v_6\}, \{v_6\}\}$
$P6.4.$	$i := 7;$ goto $P7.1$
$P7.1.$	$x_7 := v_6$
	$T_7^1 := \{\{v_6\}\}$
	$T_7^0 := \{\{\neg v_6\}\}$
$P7.2.$	$U_7 := \{\square\}$
$P7.3.$	$\mathcal{S}_8 := \{\square\}$
$P7.4.$	$\square \in \mathcal{S}_8 \Rightarrow \mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

$\square$

(S11.7) Există o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din mulţimea de clauze $\mathcal{S} := \{C_1 := \{v_0, \neg v_1\}, C_2 := \{\neg v_0, v_1\}\}$? Justificaţi.

Demonstraţie: Fie mulţimea de clauze $\mathcal{S}' := \{C_1, C_2, C_3 := \{v_0, \neg v_0\}, C_4 := \{v_1, \neg v_1\}\}$.
Observăm că $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ şi că:

$$Res(C_1, C_1) = \emptyset$$

$$Res(C_1, C_2) = \{C_3, C_4\}$$

$$Res(C_1, C_3) = \{C_1\}$$

$$Res(C_1, C_4) = \{C_1\}$$

$$Res(C_2, C_2) = \emptyset$$

$$Res(C_2, C_3) = \{C_2\}$$

$$Res(C_2, C_4) = \{C_2\}$$

$$Res(C_3, C_3) = \{C_3\}$$

$$Res(C_3, C_4) = \emptyset$$

$$Res(C_4, C_4) = \{C_4\}$$

Am arătat, deci, că pentru orice $D_1, D_2 \in \mathcal{S}'$, $Res(D_1, D_2) \subseteq \mathcal{S}'$ (*). Presupunem prin absurd că există o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din $\mathcal{S}$ şi fie aceasta $(C'_1, \ldots, C'_n = \square)$. Demonstrăm prin inducţie completă că pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, $C'_i \in \mathcal{S}'$. Fie un astfel de i. Din definiţia derivării, avem că ori $C'_i \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$, ceea ce rezolvă problema, ori există $j, k < i$ cu $C'_i \in Res(C'_j, C'_k)$. Din ipoteza de inducţie completă, $C'_j, C'_k \in \mathcal{S}'$, iar din (*) avem $Res(C'_j, C'_k) \subseteq \mathcal{S}'$, deci $C'_i \in \mathcal{S}'$. Am obţinut că $C'_n = \square \in \mathcal{S}'$, ceea ce este o contradicţie. Rămâne că nu există o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din $\mathcal{S}$. $\square$

(S11.8) Demonstraţi, folosindu-vă de proprietăţile satisfacerii semantice şi de aplicarea sistematică (i.e., via algoritmul Davis-Putnam) a regulii rezoluţiei:

$$\{v_2, v_2 \to \neg v_3, v_3 \to v_4\} \vDash (\neg v_3 \to \neg(v_1 \to \neg v_2)) \vee (v_1 \to (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4.$$

Demonstraţie: Aplicând Propoziţia 1.33.(i), condiţia din enunţ este echivalentă cu faptul că mulţimea de formule:

$$\{v_2, v_2 \to \neg v_3, v_3 \to v_4, \neg((\neg v_3 \to \neg(v_1 \to \neg v_2)) \vee (v_1 \to (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4)\}$$

este nesatisfiabilă şi, mai departe, din Propoziţia 1.34.(i), cu faptul că formula:

$$v_2 \wedge (v_2 \to \neg v_3) \wedge (v_3 \to v_4) \wedge \neg((\neg v_3 \to \neg(v_1 \to \neg v_2)) \vee (v_1 \to (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4)$$

este nesatisfiabilă. Aplicând transformări sintactice succesive, obţinem că formula de mai sus este echivalentă, pe rând, cu:

$$v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg(\neg\neg v_3 \vee \neg(\neg v_1 \vee \neg v_2) \vee \neg v_1 \vee (v_3 \wedge v_4) \vee v_4),$$

$$v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg\neg\neg v_3 \wedge \neg\neg(\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge \neg\neg v_1 \wedge \neg(v_3 \wedge v_4) \wedge \neg v_4,$$

$$v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge v_1 \wedge \neg(v_3 \wedge v_4) \wedge \neg v_4,$$

$$v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge v_1 \wedge (\neg v_3 \vee \neg v_4) \wedge \neg v_4,$$

ultima formulă fiind în FNC şi corespunzându-i forma clauzală:

$$\mathcal{S} := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_1, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}\},$$

despre care vom arăta că este nesatisfiabilă, încheind astfel demonstraţia (prin aplicarea Propoziţiei 1.87). Folosim mulţimea $\mathcal{S}$ ca intrare a algoritmului Davis-Putnam, a cărui rulare se produce după cum urmează.

$$
\begin{array}{ll}
 & i := 1 \\
 & \mathcal{S}_1 := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_1, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}\} \\
P1.1. & x_1 := v_1 \\
 & T_1^1 := \{\{v_1\}\} \\
 & T_1^0 := \{\{\neg v_1, \neg v_2\}\} \\
P1.2. & U_1 := \{\{\neg v_2\}\} \\
P1.3. & \mathcal{S}_2 := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}\} \\
P1.4. & i := 2;\ \text{goto } P2.1 \\
P2.1. & x_2 := v_2 \\
 & T_2^1 := \{\{v_2\}\} \\
 & T_2^0 := \{\{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_2\}\} \\
P2.2. & U_2 := \{\{\neg v_3\}, \Box\} \\
P2.3. & \mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_3\}, \Box\} \\
P2.4. & \Box \in \mathcal{S}_3 \Rightarrow \mathcal{S} \text{ este nesatisfiabilă.}
\end{array}
$$

Rămâne, deci, că $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă. $\Box$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 12

(S12.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I, $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$. Să se demonstreze că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă x:

(i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\vee} \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(ii) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\wedge} \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\leftrightarrow} \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iv) $(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1, & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned} (\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff \boldsymbol{\neg}\varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\to} \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\vee} \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1. \end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg(\varphi \to \neg\psi))^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff \boldsymbol{\neg}(\varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\to} \boldsymbol{\neg}\psi^{\mathcal{A}}(e)) = 1 \\ &\iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\wedge} \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1. \end{aligned}$$

(iii) Avem:

$$\begin{aligned} (\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ &\iff (\varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\to} \psi^{\mathcal{A}}(e)) \boldsymbol{\wedge} (\psi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\to} \varphi^{\mathcal{A}}(e)) = 1 \\ &\iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) \boldsymbol{\leftrightarrow} \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1. \end{aligned}$$

(iv) Avem:

$$\begin{aligned}(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e)=1 &\iff (\neg\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e)=1 \iff \neg(\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e)=1\\ &\iff (\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e)=0\\ &\iff \text{ există } a\in A \text{ a.î. } (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a})=0\\ &\iff \text{ există } a\in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a})=1.\end{aligned}$$

□

(S12.2) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar}=(\dot{<};\dot{+},\dot{\times},\dot{S};\dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N}=(\mathbb{N},<,+,\cdot,S,0)$.

(i) Fie $x,y\in V$ cu $x\neq y$, şi $t=\dot{S}x\dot{\times}\dot{S}\dot{S}y=\dot{\times}(\dot{S}x,\dot{S}\dot{S}y)$. Să se calculeze $t^{\mathcal{N}}(e)$, unde $e:V\to\mathbb{N}$ este o evaluare ce verifică $e(x)=3$ şi $e(y)=7$.

(ii) Fie $\varphi=x\dot{<}\dot{S}y\to(x\dot{<}y\vee x=y)=\dot{<}(x,\dot{S}y)\to(\dot{<}(x,y)\vee x=y)$. Să se arate că $\mathcal{N}\vDash\varphi[e]$ pentru orice $e:V\to\mathbb{N}$.

Demonstraţie:

(i) Pentru orice interpretare $e:V\to\mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned}t^{\mathcal{N}}(e) &= \dot{\times}^{\mathcal{N}}((\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e),(\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e))=(\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e)\cdot(\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)\\ &= \dot{S}^{\mathcal{N}}(x^{\mathcal{N}}(e))\cdot\dot{S}^{\mathcal{N}}((\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e))=S(e(x))\cdot S(\dot{S}^{\mathcal{N}}(y^{\mathcal{N}}(e)))\\ &= S(e(x))\cdot S(S(e(y))).\end{aligned}$$

Prin urmare, dacă $e(x)=3$ şi $e(y)=7$, atunci

$$t^{\mathcal{N}}(e)=S(3)\cdot S(S(7))=4\cdot 9=36.$$

(ii) Pentru orice interpretare $e:V\to\mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned}\mathcal{N}\vDash\varphi[e] &\iff \mathcal{N}\nvDash(\dot{<}(x,\dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N}\vDash(\dot{<}(x,y)\vee x=y)[e]\\ &\iff \dot{<}^{\mathcal{N}}(e(x),S(e(y))\text{ nu e satisfăcută sau}\\ &\qquad \mathcal{N}\vDash(\dot{<}(x,y))[e]\text{ sau }\mathcal{N}\vDash(x=y)[e]\\ &\iff <(e(x),S(e(y))\text{ nu e satisfăcută sau } <(e(x),e(y))\\ &\qquad \text{sau } e(x)=e(y)\\ &\iff e(x)\geq S(e(y))\text{ sau } e(x)<e(y)\text{ sau } e(x)=e(y)\\ &\iff e(x)\geq e(y)+1\text{ sau } e(x)<e(y)\text{ sau } e(x)=e(y).\end{aligned}$$

Prin urmare, $\mathcal{N} \vDash \varphi[e]$ pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$.

De obicei, scriem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} \vDash \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \nvDash (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \vDash (\dot{<}(x,y) \vee x = y)[e] \\
&\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\
&\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y).
\end{aligned}$$

□

(S12.3) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Fie formula $\varphi = \forall v_4(v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)$. Să se caracterizeze acele $e : V \to \mathbb{N}$ ce au proprietatea că $\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1$.
Demonstraţie: Fie $e : V \to \mathbb{N}$. Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1 &\iff (\forall v_4(v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4))^{\mathcal{N}}(e) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) \vee (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \text{ sau } (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) < e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \text{ sau } e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) = e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) \leq e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \\
&\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e(v_3) \leq a \\
&\iff e(v_3) = 0.
\end{aligned}$$

□

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 13

Notaţia 1. *Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Pentru orice variabile x, y cu $x \neq y$, orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, orice $e : V \to A$ şi orice $a, b \in A$, avem că:*

$$(e_{y\leftarrow b})_{x\leftarrow a} = (e_{x\leftarrow a})_{y\leftarrow b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu $e_{x\leftarrow a, y\leftarrow b}$. Aşadar,

$$e_{x\leftarrow a,y\leftarrow b} : V \to A, \quad e_{x\leftarrow a,y\leftarrow b}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \text{ şi } v \neq y \\ a & \text{dacă } v = x \\ b & \text{dacă } v = y. \end{cases}$$

(S13.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabile x, y cu $x \neq y$ avem,

(i) $\neg\exists x\varphi \mathrel{\text{⫤}}\models \forall x\neg\varphi$;

(ii) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤}}\models \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;

(iii) $\exists y\forall x\varphi \models \forall x\exists y\varphi$;

(iv) $\forall x(\varphi \to \psi) \models \forall x\varphi \to \forall x\psi$.

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ şi $e : V \to A$.

(i) Ştim că "$\exists x$" este o prescurtare pentru "$\neg\forall x\neg$".
$\mathcal{A} \models (\neg\exists x\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \models (\neg\neg\forall x\neg\varphi)[e] \iff$ nu este adevărat că $\mathcal{A} \models (\neg\forall x\neg\varphi)[e]$ $\iff$ nu este adevărat că nu este adevărat că $\mathcal{A} \models (\forall x\neg\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \models (\forall x\neg\varphi)[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi\wedge\psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models (\varphi\wedge\psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ şi $\mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \big($pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x\leftarrow a}]\big)$ şi $\big($pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models \psi[e_{x\leftarrow a}]\big) \iff \mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[e]$ şi $\mathcal{A} \models (\forall x\psi)[e]$ $\iff \mathcal{A} \models (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)[e]$.

(iii) Avem că $\mathcal{A} \vDash (\exists y \forall x \varphi)[e] \iff$ există $b \in A$ a.î. pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[(e_{y \leftarrow b})_{x \leftarrow a}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}]$ (*).

Pe de altă parte, $\mathcal{A} \vDash (\forall x \exists y \varphi)[e] \iff$ pentru orice $c \in A$ există $d \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[(e_{x \leftarrow c})_{y \leftarrow d}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$ (**).

Ştim (*) şi vrem să arătăm (**). Fie $c \in A$. Vrem $d \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$.

Luăm d să fie b-ul din (*). Atunci, pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a, y \leftarrow d}]$. În particular, luând $a := c$, obţinem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$, ceea ce ne trebuia.

(iv) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e]$. Atunci, pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x \leftarrow a}]$, lucru pe care îl putem scrie şi $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) \to \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1$ sau chiar $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a})$ (*).

Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\forall x \varphi \to \forall x \psi)[e]$, ceea ce este echivalent, din aceleaşi considerente, cu $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) \leq (\forall x \psi)^{\mathcal{A}}(e)$.

Dacă $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0$, suntem OK. Presupunem, aşadar, că $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$, i.e. pentru orice $b \in A$, $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow b}) = 1$ (**).

Ne rămâne de arătat că $(\forall x \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$, i.e. că pentru pentru orice $c \in A$, $\psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1$. Fie $c \in A$. Din (*), avem că $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c})$, iar din (**), că $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1$. Deci $\psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1$, ceea ce ne trebuia.

□

(S13.2) Fie x, y variabile cu $x \neq y$. Să se dea exemple de limbaj de ordinul I, $\mathcal{L}$, şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

(i) $\forall x(\varphi \vee \psi) \nvDash \forall x \varphi \vee \forall x \psi$;

(ii) $\exists x \varphi \wedge \exists x \psi \nvDash \exists x(\varphi \wedge \psi)$;

(iii) $\forall x \exists y \varphi \nvDash \exists y \forall x \varphi$.

Demonstraţie: Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară (să zicem, punem $e(v) := 7$ pentru orice $v \in V$).

(i) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x \dot{<} \dot{2}$ şi $\varphi := \neg(x \dot{<} \dot{2})$. Atunci

$$\mathcal{N} \vDash \forall x(\varphi \vee \psi)[e].$$

Pe de altă parte,

(a) $\mathcal{N} \vDash (\forall x\varphi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n < 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\vDash (\forall x\varphi)[e]$.

(b) $\mathcal{N} \vDash (\forall x\psi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \vDash \psi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n \geq 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\vDash (\forall x\psi)[e]$.

Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\vDash (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)[e].$$

(ii) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x\dot{<}\dot{2}$ şi $\varphi := \neg(x\dot{<}\dot{2})$. Avem:

(a) $\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n < 2$, ceea ce este adevărat (luând $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi)[e]$.

(b) $\mathcal{N} \vDash (\exists x\psi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \vDash \psi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n \geq 2$, ceea ce este adevărat (luând $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \vDash (\exists x\psi)[e]$. Prin urmare,

$$\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)[e].$$

Pe de altă parte, $\mathcal{N} \vDash \exists x(\varphi \wedge \psi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n < 2$ şi $n \geq 2$, ceea ce este fals. Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\vDash \exists x(\varphi \wedge \psi)[e].$$

(iii) Fie $\varphi := x\dot{<}y$. Atunci

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} \vDash (\forall x\exists y\varphi)[e] &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}\text{, avem } \mathcal{N} \vDash (\exists y\varphi)[e_{x\leftarrow n}] \\
&\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow n, y\leftarrow m}] \\
&\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } n < m,
\end{aligned}$$

ceea ce este adevărat – se ia, de pildă, $m := n + 1$. Aşadar,

$$\mathcal{N} \vDash (\forall x\exists y\varphi)[e].$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} \vDash (\exists y\forall x\varphi)[e] &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \vDash (\forall x\varphi)[e_{y\leftarrow m}] \\
&\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \\
&\ \text{avem } \mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow n, y\leftarrow m}] \\
&\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ avem } n < m,
\end{aligned}$$

ceea ce este fals. Aşadar,

$$\mathcal{N} \not\vDash (\exists y\forall x\varphi)[e].$$

$\square$

(S13.3) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \vDash\!\dashv \varphi \wedge \forall x \psi \quad (1)$$
$$\exists x(\varphi \vee \psi) \vDash\!\dashv \varphi \vee \exists x \psi \quad (2)$$
$$\forall x(\varphi \to \psi) \vDash\!\dashv \varphi \to \forall x \psi \quad (3)$$
$$\exists x(\psi \to \varphi) \vDash\!\dashv \forall x \psi \to \varphi \quad (4)$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

$\forall x(\varphi \wedge \psi) \vDash\!\dashv \varphi \wedge \forall x \psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash \forall x \psi[e]$ $\iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \forall x \psi)[e]$.

$\exists x(\varphi \vee \psi) \vDash\!\dashv \varphi \vee \exists x \psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\exists x(\varphi \vee \psi))[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \exists x \psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \exists x \psi)[e]$.

$\forall x(\varphi \to \psi) \vDash\!\dashv \varphi \to \forall x \psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \nvDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ sau pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \forall x \psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \to \forall x \psi)[e]$.

$\exists x(\psi \to \varphi) \vDash\!\dashv \forall x \psi \to \varphi$:
$\mathcal{A} \vDash \exists x(\psi \to \varphi)[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash (\psi \to \varphi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x \leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x \leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \nvDash \forall x \psi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x \psi \to \varphi)[e]$.

$\square$

FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 14

(S14.1) Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ şi orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice termen t, dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(t)$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2)$.

Demonstraţie: Aplicăm inducţia pe termeni. Avem următoarele cazuri:

• $t = v \in V$. Atunci $t^{\mathcal{A}}(e_1) = e_1(v) = e_2(v) = t^{\mathcal{A}}(e_2)$.
• $t = c \in \mathcal{C}$. Atunci $t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2) = c^{\mathcal{A}}$.
• $t = ft_1 \ldots t_m$, cu $f \in \mathcal{F}_m, m \geq 1$ şi $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni. Deoarece $Var(t_i) \subseteq Var(t)$, rezultă că pentru orice $i = 1, \ldots, m$, avem $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(t_i)$. Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducţie pentru a concluziona că

$$t_i^{\mathcal{A}}(e_1) = t_i^{\mathcal{A}}(e_2) \text{ pentru orice } i = 1, \ldots, m.$$

Atunci

$$t^{\mathcal{A}}(e_1) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_1), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e_1)) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e_2)) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

□

(S14.2) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Să se arate că:

(i) pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă x,

$$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$$

este validă;

(ii) pentru orice formulă φ şi orice variabilă x cu $x \notin Var(\varphi)$,

$$\varphi \to \forall x\varphi$$

este validă;

(iii) pentru orice variabilă x şi orice termen t cu $x \notin Var(t)$,

$$\exists x(x = t)$$

este validă.

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o evaluare.

(i) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e]$. Deci pentru orice $a \in A$, vom avea că are loc $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}]$ (*). Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \to \forall x\psi)[e]$. Presupunem prin absurd că nu e aşa – atunci avem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ şi $\mathcal{A} \nvDash (\forall x\psi)[e]$. Deci pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ (**) şi există un $b \in A$ cu $\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x\leftarrow b}]$ (***). Luând în (*) şi (**) $a := b$, obţinem că $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow b}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow b}]$, ceea ce contrazice (***).

(ii) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$. Vrem să arătăm $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$, i.e. că pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$. Fie $a \in A$. Clar $FV(\varphi) \subseteq Var(\varphi)$. Cum $x \notin Var(\varphi)$, $x \notin FV(\varphi)$. Avem că e şi $e_{x\leftarrow a}$ diferă cel mult pe "poziţia" x, deci restricţionate la $FV(\varphi)$ ele devin egale. Aplicând Propoziţia 2.26, rezultă că avem într-adevăr $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$.

(iii) Trebuie arătat, folosind (S12.1).(iv), că există un $b \in A$ astfel încât $\mathcal{A} \vDash (x = t)[e_{x\leftarrow b}]$, i.e. că există un $b \in A$ astfel încât $b = t^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow b})$. Cum $x \notin Var(t)$, aplicând Propoziţia 2.24, avem $t^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow b}) = t^{\mathcal{A}}(e)$. Deci trebuie arătat doar că există un $b \in A$ astfel încât $b = t^{\mathcal{A}}(e)$. Dar acum e simplu, luăm $b := t^{\mathcal{A}}(e)$.

□

(S14.3) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x(f(x) = c) \land \neg\forall z(g(y,z) = d) \\
\varphi_2 &= \forall y(\forall x P(x,y) \to \exists z Q(x,z)) \\
\varphi_3 &= \exists x\forall y P(x,y) \lor \neg\exists y(S(y) \to \forall z R(z)) \\
\varphi_4 &= \exists z(\exists x Q(x,z) \lor \exists x R(x)) \to \neg(\neg\exists x R(x) \land \forall x\exists z Q(z,x))
\end{aligned}$$

Demonstraţie:

$$\begin{aligned}
\forall x(f(x) = c) \land \neg\forall z(g(y,z) = d) &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall x(f(x) = c \land \exists z\neg(g(y,z) = d) \\
&\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall x\exists z(f(x) = c \land \neg(g(y,z) = d)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\forall y(\forall x P(x,y) \to \exists z Q(x,z)) \quad &\mathrel{\Dashv\vDash} \quad \forall y \exists z(\forall x P(x,y) \to Q(x,z)) \vDash \forall y \exists z(\forall u P(u,y) \to Q(x,z)) \\
&\mathrel{\Dashv\vDash} \quad \forall y \exists z \exists u(P(u,y) \to Q(x,z)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\exists x \forall y P(x,y) \lor \neg \exists y(S(y) \to \forall z R(z)) \quad &\mathrel{\Dashv\vDash} \quad \exists x(\forall y P(x,y) \lor \neg \exists y \forall z(S(y) \to R(z)) \\
&\mathrel{\Dashv\vDash} \quad \exists x(\forall y P(x,y) \lor \forall y \exists z \neg(S(y) \to R(z)) \\
&\mathrel{\Dashv\vDash} \quad \exists x(\forall u P(x,u) \lor \forall y \exists z \neg(S(y) \to R(z)) \\
&\mathrel{\Dashv\vDash} \quad \exists x \forall u \forall y \exists z(P(x,u) \lor \neg(S(y) \to R(z))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\exists z(\exists x Q(x,z) \lor \exists x R(x)) \to \neg(\neg \exists x R(x) \land \forall x \exists z Q(z,x)) \quad &\mathrel{\Dashv\vDash} \\
\exists z \exists x(Q(x,z) \lor R(x)) \to (\neg\neg \exists x R(x) \lor \neg \forall x \exists z Q(z,x)) \quad &\mathrel{\Dashv\vDash} \\
\exists z \exists x(Q(x,z) \lor R(x)) \to (\exists x R(x) \lor \exists x \forall z \neg Q(z,x)) \quad &\mathrel{\Dashv\vDash} \\
\exists z \exists x(Q(x,z) \lor R(x)) \to \exists x(R(x) \lor \forall z \neg Q(z,x)) \quad &\mathrel{\Dashv\vDash} \\
\exists z \exists x(Q(x,z) \lor R(x)) \to \exists x \forall z(R(x) \lor \neg Q(z,x)) \quad &\mathrel{\Dashv\vDash} \\
\exists z \exists x(Q(x,z) \lor R(x)) \to \exists u \forall v(R(u) \lor \neg Q(v,u)) \quad &\mathrel{\Dashv\vDash} \\
\forall z \forall x \exists u \forall v((Q(x,z) \lor R(x)) \to (R(u) \lor \neg Q(v,u))) \quad &
\end{aligned}
$$

$\square$