Seminar 3 Analiză

Mulțimi ordonate
Mulțimi și funcții

[1] Pe R^2 definim relația binară „$\le$" def prin

$(x_1, y_1) \le (x_2, y_2) \overset{def}{\Leftrightarrow} (x_1 = x_2 \wedge y_1 \le y_2) \vee (x_1 < x_2)$

a) Dem că „$\le$" relație de ordine pe R^2

b) Arătați că $(R^2, \le)$ este total ord.

a) - Reflexivă

$\forall (x_1, y_1) \in R^2 \quad (x_1, y_1) \le (x_1, y_1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1 = x_1 \wedge y_1 \le y_1) \vee (x_1 < x_1)$ (A)

- Antisimetrie

$(x_1, x_2) \le (x_3, x_4) \Leftrightarrow \underbrace{(x_1 = x_3 \wedge x_2 \le x_4)}_{P_1} \vee \underbrace{(x_1 < x_3)}_{Q_1}$

$\underbrace{(x_3 = x_1 \wedge x_4 \le x_2)}_{P_2} \vee \underbrace{(x_3 < x_1)}_{Q_2}$

I $v(Q_1) = 1 \Rightarrow v(Q_2) = 0 \Rightarrow v(P_2) = 1$

$v(Q_1) = v(P_2) = 1$ (Fals)

II $v(P_1) = 1 \Rightarrow v(Q_2) = 0 \Rightarrow v(P_2) = 1$

$v(P_1) = v(P_2) = 1 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \end{matrix}$ Antisimetric

- Tranzitivitate

$(x_1, x_2) \le (x_3, x_4)$

$(x_3, x_4) \le (x_5, x_6)$

Rel este tranzitivă, reflexivă, antisimetrică $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Rel. este de ordine

b) $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$
sau
$(x_2, y_2) \leq (x_1, y_1)$

I $x_1 = x_2$ $\begin{cases} 1)\ y_1 \leq y_2 \\ 2)\ y_2 \leq y_1 \end{cases}$

$(x_1 = x_2) \wedge (y_1 \leq y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$
$(x_2 = x_1) \wedge (y_2 \leq y_1) \Rightarrow$ vec 1 $\leq$ vec 2

II $x_1 < x_2 \Rightarrow$ vec 1 $\leq$ vec 2

III $x_2 < x_1 \Rightarrow$ vec 2 $\leq$ vec 1

Concluzie „$\leq$" pe R^2 este total ordonat

Ex 2: Pe $\mathcal{P}(R)$ def relația binară „$\leq$" prin
$A \leq B \overset{def}{\Leftrightarrow} A \subseteq B$

a) Dem că „$\leq$" e relație de ordine pe $\mathcal{P}(R)$
b) Ar că $(\mathcal{P}(R), \leq)$ nu este tot ord.
nu este bine ord.
este complet ord.

- Reflexivitate
$A \leq A$ $\quad \forall A \in \mathcal{P}(R) \Leftrightarrow A \subseteq A \ \forall A \in \mathcal{P}(R)$

(A)

- Antisimetrie $\quad \forall \left.\begin{matrix} A \leq B \\ B \leq A \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{matrix} \Rightarrow A = B$

- Tranzitivitate

$$\left.\begin{array}{l} A \le B \\ B \le C \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \subseteq C \end{array}\right| \Rightarrow A \subseteq C \Rightarrow A \le C$$

Concluzie $(\mathcal{P}(R), \text{„}\le\text{"})$ este relație de ordine

b) $A = \{3,4,5,6\}$ $A, B \in \mathcal{P}(X)$

$B = \{7,8,9\}$

$A \not\subseteq B \Rightarrow A \not\le B$

$B \not\subseteq A \Rightarrow B \not\le A$

$(\mathcal{P}(R), \le)$ nu e <u>ordonată</u>

$\{A, B\} \subseteq \mathcal{P}(R)$

$\left.\begin{array}{l} A \not\le B \\ B \not\le A \end{array}\right\} \Rightarrow$ nu $\nexists$ $\min\{A; B\} \Rightarrow$ nu e <u>bine ordonată</u>

Fie $\{A_i \mid i \in I\} = \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(R)$ mărginită

Fie $M = \bigcup_{i \in I} A_i$ și $N = \bigcap_{i \in I} A_i$

Dem că $M = \sup \mathcal{A}$ și $N = \inf \mathcal{A}$

$M = \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow A_i \subseteq M \quad \forall i \in I$

$A_i \le M \quad \forall i \in I \Rightarrow M$ majorant pentru $\mathcal{A}$

Fie M_1 majorant pt $\mathcal{A}$ => $A_i \leq M_1$, $\forall i \in I$ <=>
=> $A_i \subseteq M_1$, $\forall i \in I$ => $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq M_1$ =>
=> $M \subseteq M_1$ => $M \leq M_1$ => $M = \sup \mathcal{A}$

$N = \bigcap_{i \in I} A_i$ => $N \subseteq A_i$ $\forall i \in I$ => $N \leq A_i$ $\forall i \in I$
=> N - minorant pentru $\mathcal{A}$

Fie N_1 minorant pt $\mathcal{A}$ => $N_1 \leq A_i$ $\forall i \in I$ <=>
=> $N_1 \subseteq A_i$ $\forall i \in I$ => $N_1 \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$ =>
=> $N_1 \subseteq N$ => $N_1 \leq N$ => $N = \inf \mathcal{A}$
=> $(\mathcal{P}(M, \subseteq))$ este complet ordonată

$f : X \to Y$
$A \subseteq X$ => $f(A) = \{ y \in Y \mid \exists x \in A$ a.î. $y = f(x) \}$

$$\boxed{\begin{array}{l} y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A \text{ a.î. } y = f(x) \\ x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B \end{array}}$$

Ex 3 = Fie $f : X \to Y$ o funcție. Să se dem. urm. afirmații:
a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ $\forall A_1, A_2 \subseteq X$

b) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ $\forall A_1, A_2 \subseteq X$

c) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$, $B_1, B_2 \subseteq Y$

d) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ $\forall B_1, B_2 \subseteq Y$

e) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ $\forall A_1, A_2 \subseteq Y \Leftrightarrow$ f este fcție injectivă

<u>Dem:</u> c) „$\subseteq$"

Fie $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2)$

$x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

„$\supseteq$"

Fie $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2)$

$\Rightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2 \Rightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ (Am demonstrat dubla incluziune) $\Rightarrow$ egalitatea adev.