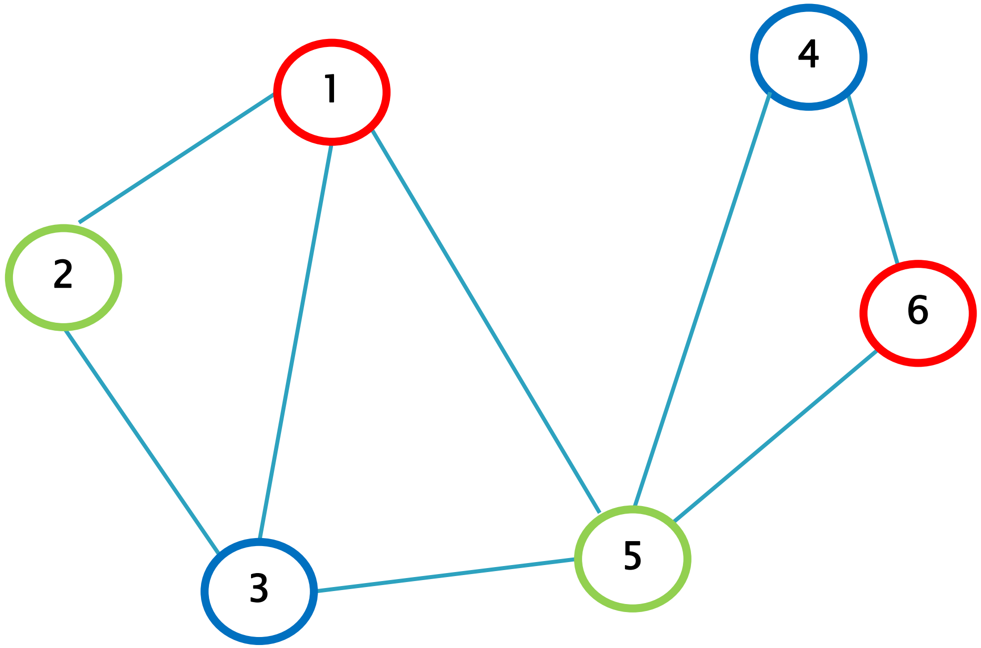
Grafuri bipartite

Colorări ale grafurilor

- $G = (V, E)$ graf neorientat
  - $c : V \to \{1, 2, \dots, p\}$ s.n <u>p-colorare</u> a lui G
  - $c : V \to \{1, 2, \dots, p\}$ cu $c(x) \neq c(y)$ $\forall xy \in E$ s.n <u>p-colorare proprie</u> a lui G
  - G s.n <u>p-colorabil</u> dacă admite o p-colorare proprie

Colorări ale grafurilor



3-colorabil, dar nu și 2-colorabil (!)

Graf bipartit

- $G = (V, E)$ graf neorientat s.n. **bipartit** $\Leftrightarrow$ există o partiție a lui V în două submulțimi V_1, V_2 (**bipartiție**):

$$V = V_1 \cup V_2$$

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

astfel încât orice muchie $e \in E$ are o extremitate în V_1 și cealaltă în V_2

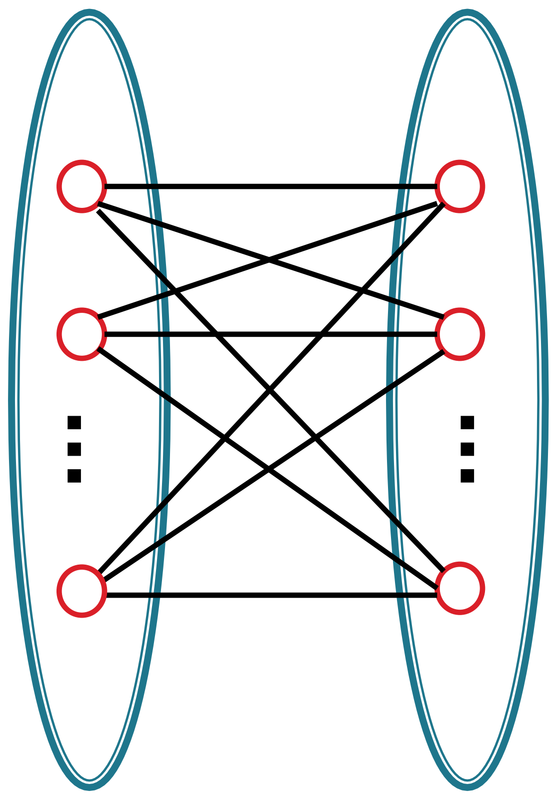
- Notăm $G = (V_1 \dot\cup V_2, E)$

Graf bipartit

- $G = (V, E)$ s.n **bipartit complet** $\Leftrightarrow$

  este bipartit și $E = \{xy \mid x \in V_1,\ y \in V_2\}$

- Notăm cu $K_{p,q}$ dacă $p = |V_1|$ și $q = |V_2|$



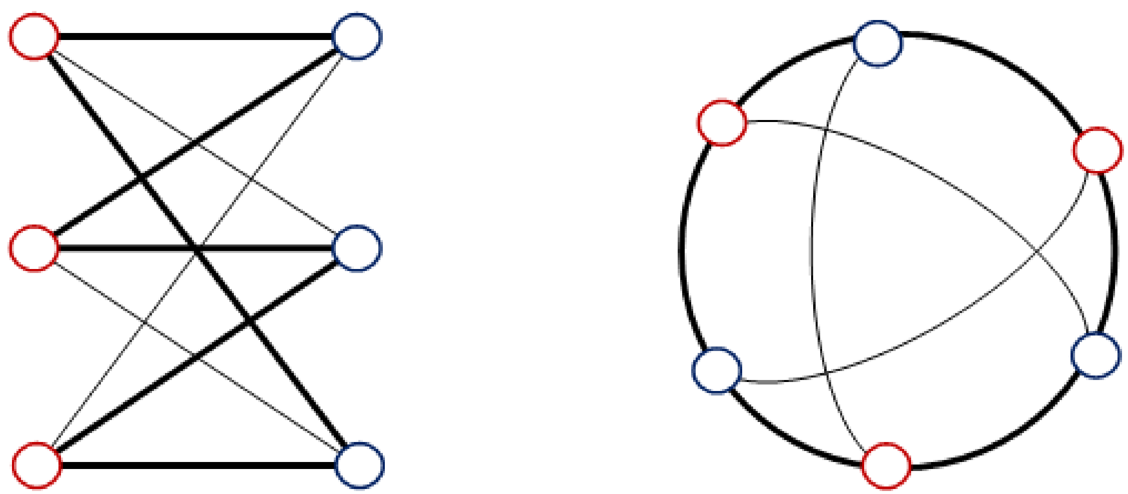
Graf bipartit

- $G = (V, E)$ s.n **bipartit complet** $\Leftrightarrow$

  este bipartit și $E = \{xy \mid x \in V_1, y \in V_2\}$

- Notăm cu $K_{p,q}$ dacă $p = |V_1|$ și $q = |V_2|$

- $K_{3,3}$



Graf bipartit

Observație

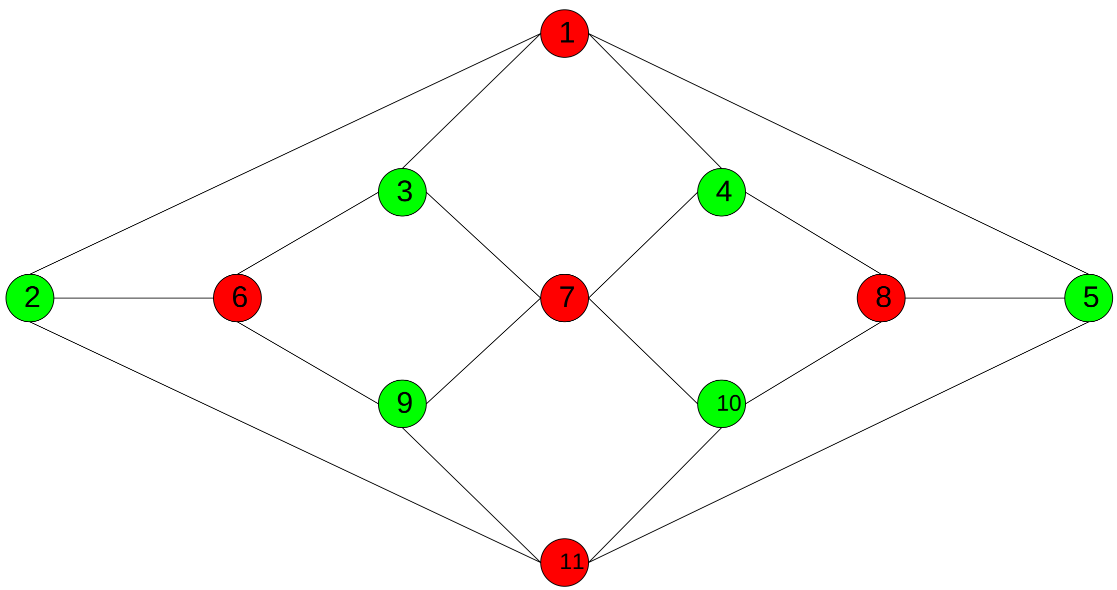
- $G = (V, E)$ **bipartit** $\Leftrightarrow$

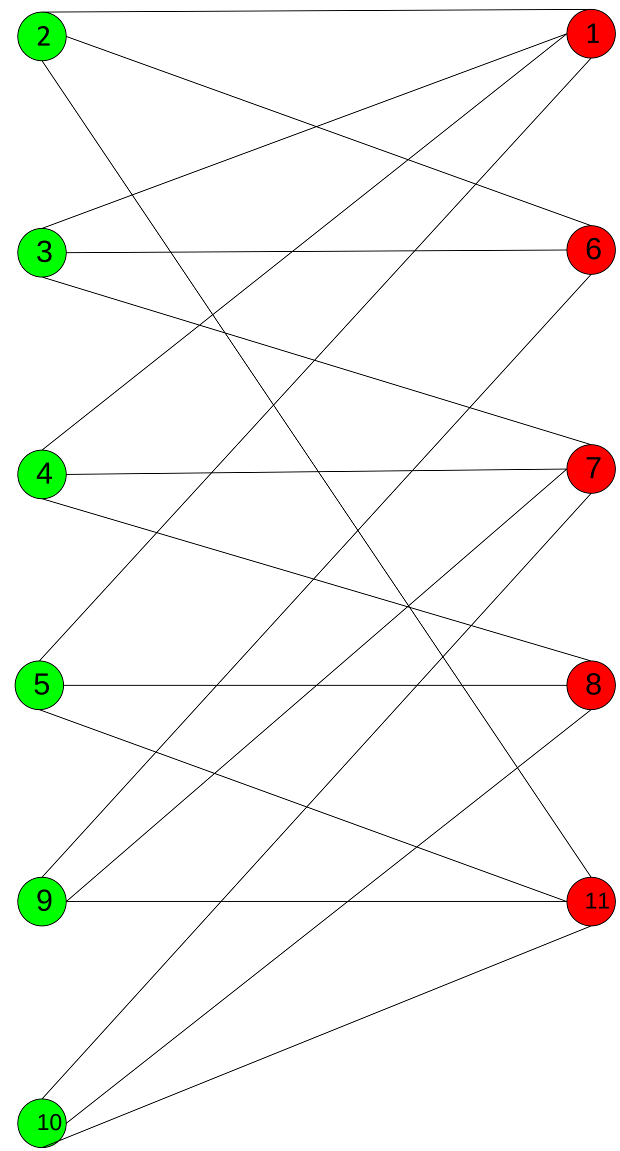
  există o 2-colorare proprie a vârfurilor (**bicolorare**):

  $$c : V \rightarrow \{1, 2\}$$

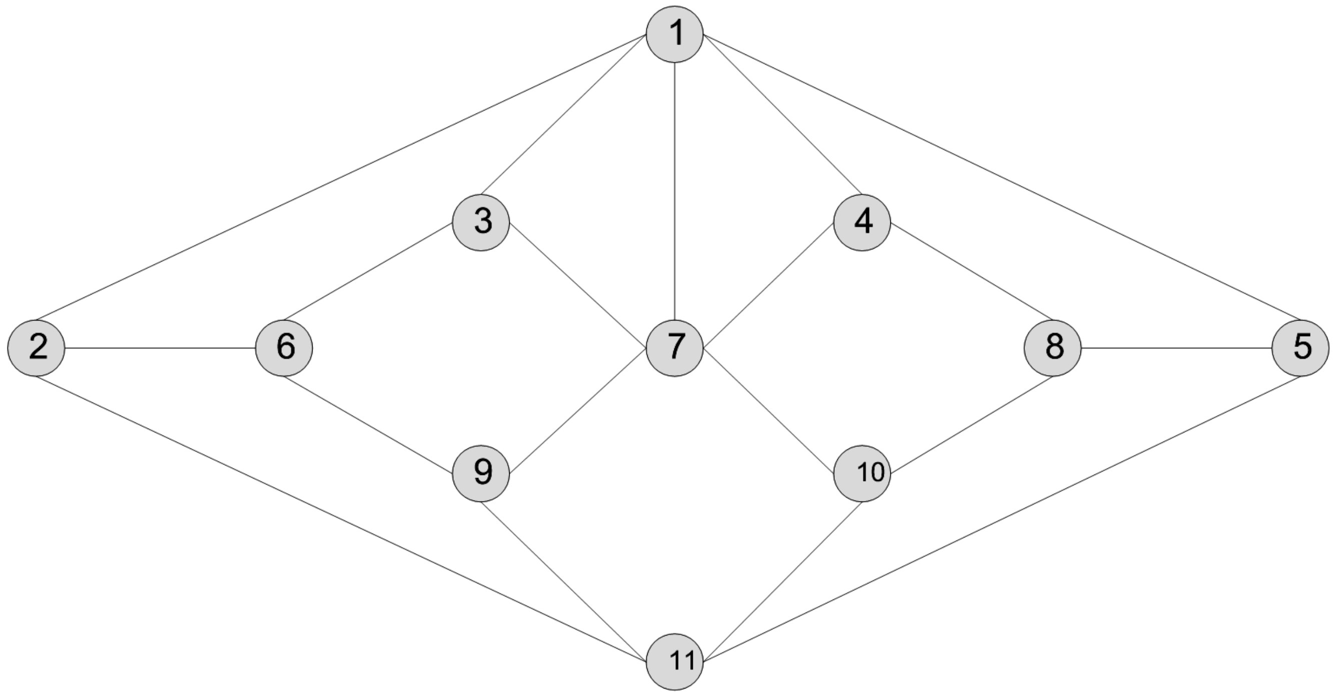
  (i.e. astfel încât pentru orice muchie $e=xy \in E$ avem $c(x) \neq c(y)$)

Graf bipartit



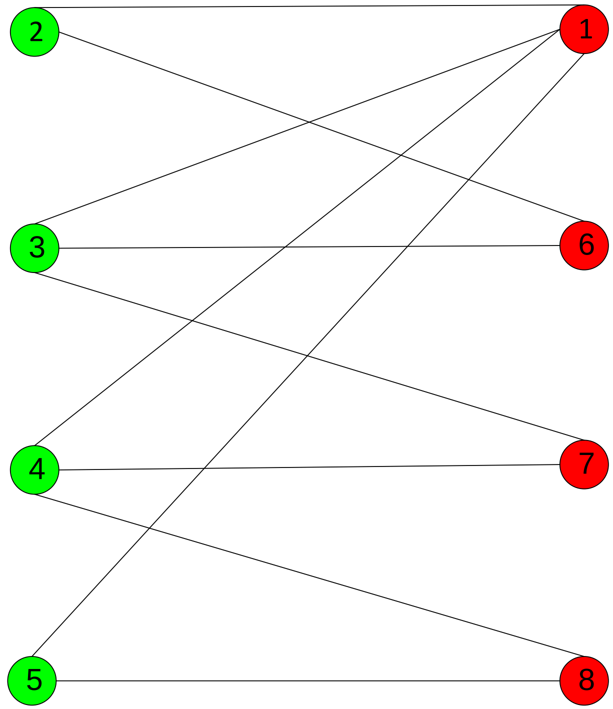


Graf bipartit



nu este bipartit

Modelare

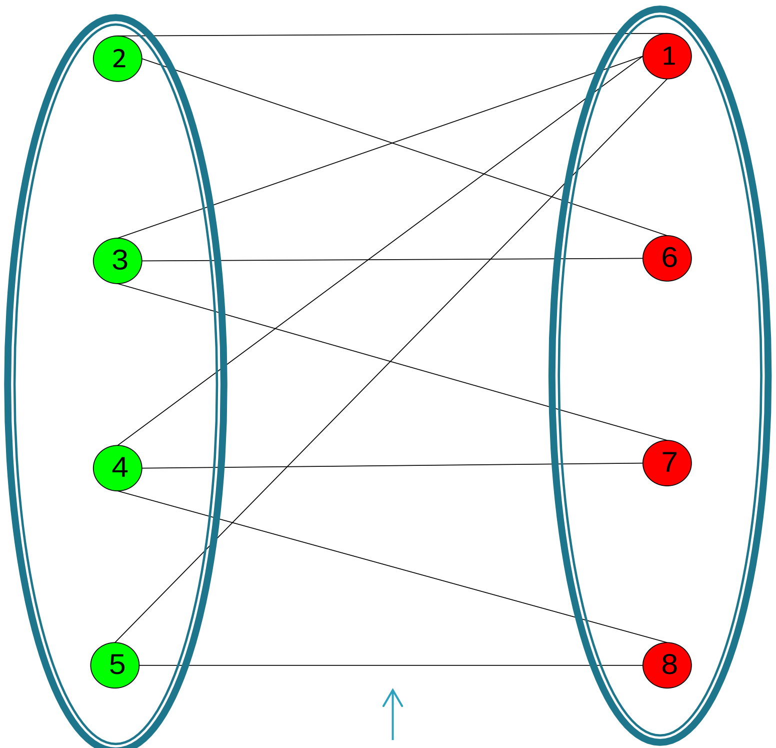


Profesori *predau la* **Cursuri**

Candidați *depun CV la* **Joburi**

Aplicații

Graf de conflicte (exemplu substanțe care interacționează, activități incompatibile, relații în rețele sociale)



submulțime fără conflicte
(de evenimente compatibile)

submulțime fără conflicte
(de evenimente compatibile)

în conflict cu

- Cuplaje, rețele...

Aplicații p -colorări

Exemplu – **De câte săli este nevoie minim pentru programarea într-o zi a n conferințe cu intervale de desfășurare date?**

Conf. 1: interval (1,4)

Conf. 2: interval (2,3)

Conf. 3: interval (2,5)

Conf. 4: interval (6,8)

Conf. 5: interval (3,8)

Conf. 6: interval (6,7)

Aplicații p -colorări

Exemplu – **De câte săli este nevoie minim pentru programarea într-o zi a n conferințe cu intervale de desfășurare date?**

Conf. 1: interval (1,4)

Conf. 2: interval (2,3)

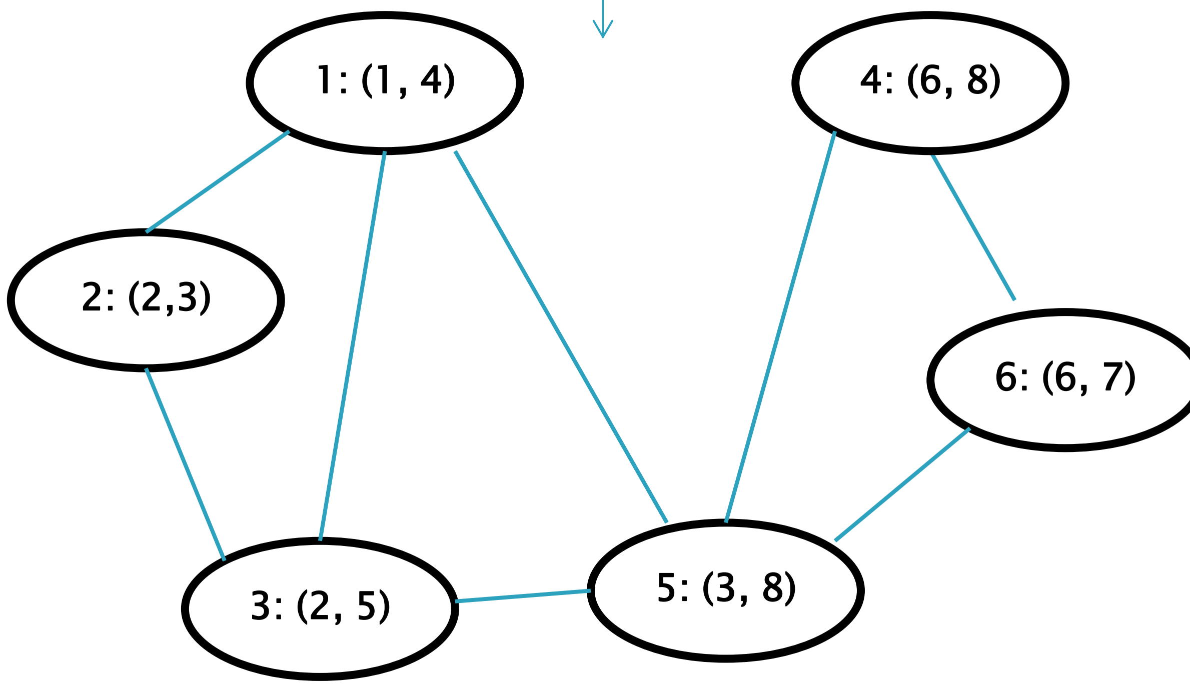
Conf. 3: interval (2,5)

Conf. 4: interval (6,8)

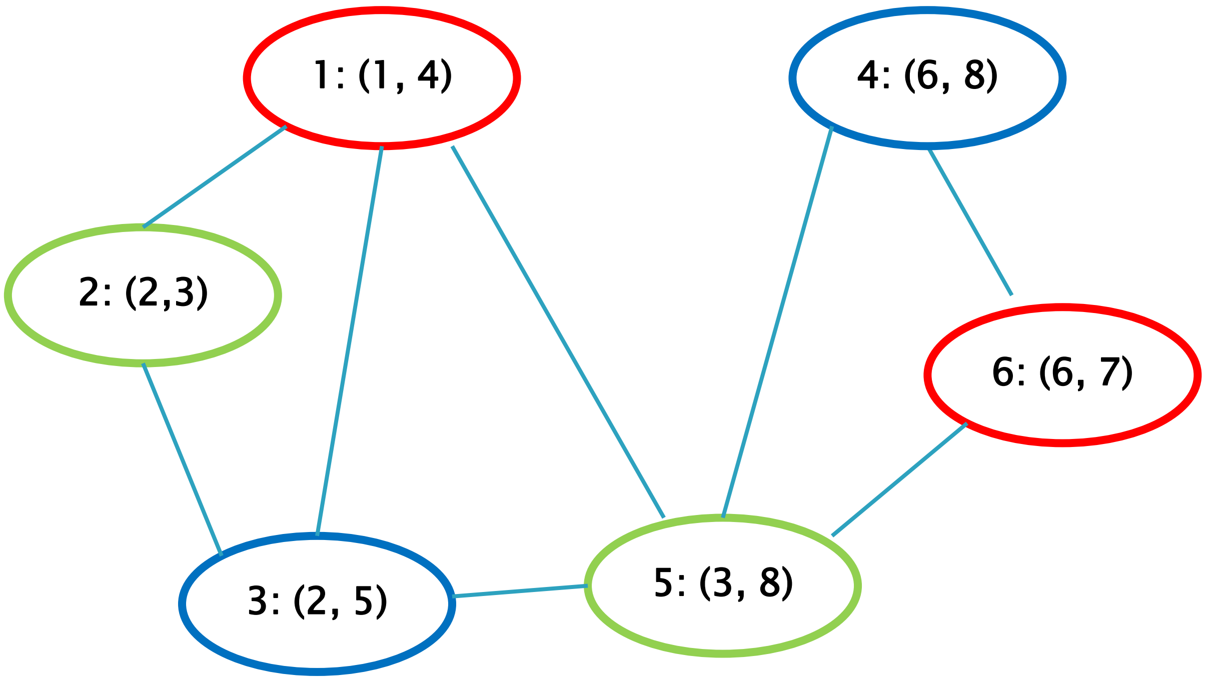
Conf. 5: interval (3,8)

Conf. 6: interval (6,7)

se intersectează cu



Graful intersecției intervalelor este 3-colorabil:



Sunt necesare minim 3 săli (corespunzătoare celor 3 culori):

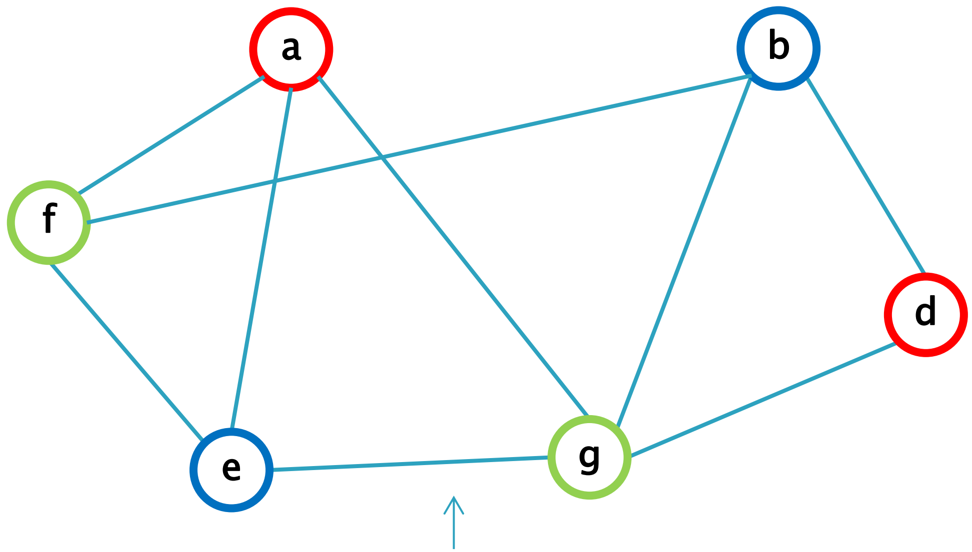
Sala 1: (1,4), (6,7)

Sala 2: (2,3), (3,8)

Sala 3: (2,5), (6,8)

Aplicații p -colorări

Alocare de regiștrii (Register allocation problem)



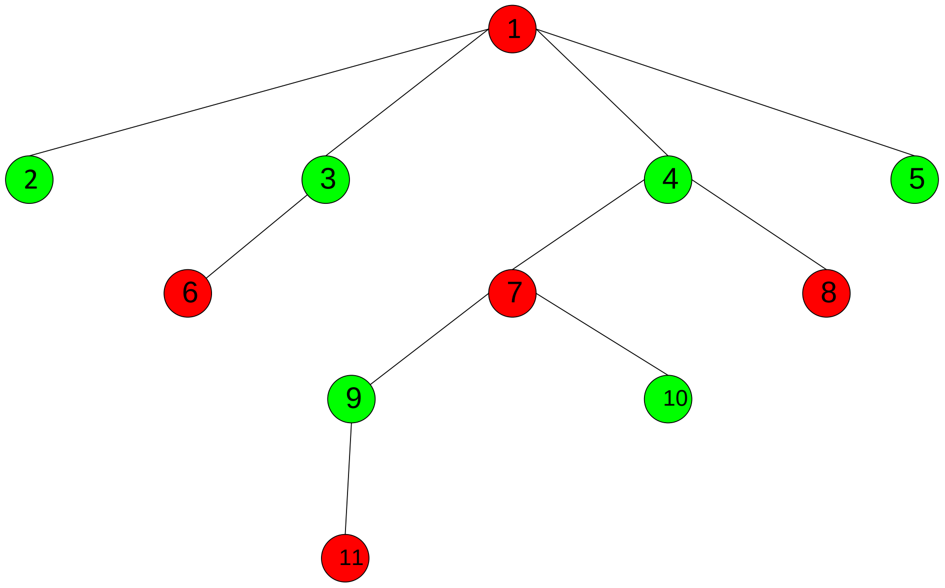
pot fi simultan active
(nu pot fi memorate în același registru)

- Numărul de culori = numărul de regiștri
- Vârfuri de aceeași culoare = pot fi memorate în același registru

Graf bipartit

- **Propoziție**

Un arbore este graf bipartit



Graf bipartit

- **Teorema König – Caracterizarea grafurilor bipartite**

Fie $G = (V, E)$ un graf cu $n \geq 2$ vârfuri.

Avem

$$G \text{ este bipartit} \Leftrightarrow \text{toate ciclurile elementare din } G \text{ sunt pare}$$

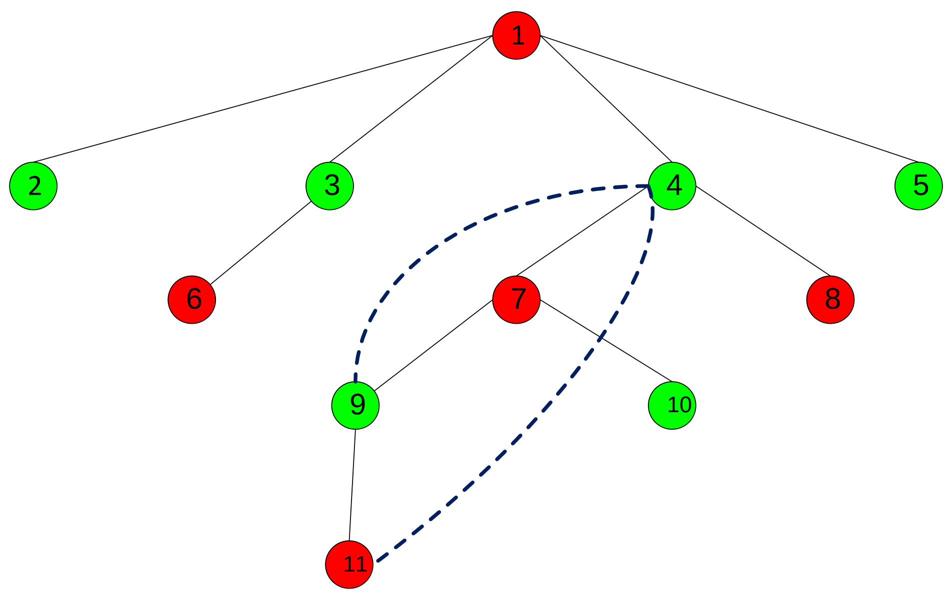
Graf bipartit

- **Teorema König – Caracterizarea grafurilor bipartite**

Demonstraţie – Idee: Presupunem G conex.

Colorăm un arbore parțial al său.

Arătăm că celelalte muchii (care nu sunt în arborele parțial) au extremitățile colorate diferit

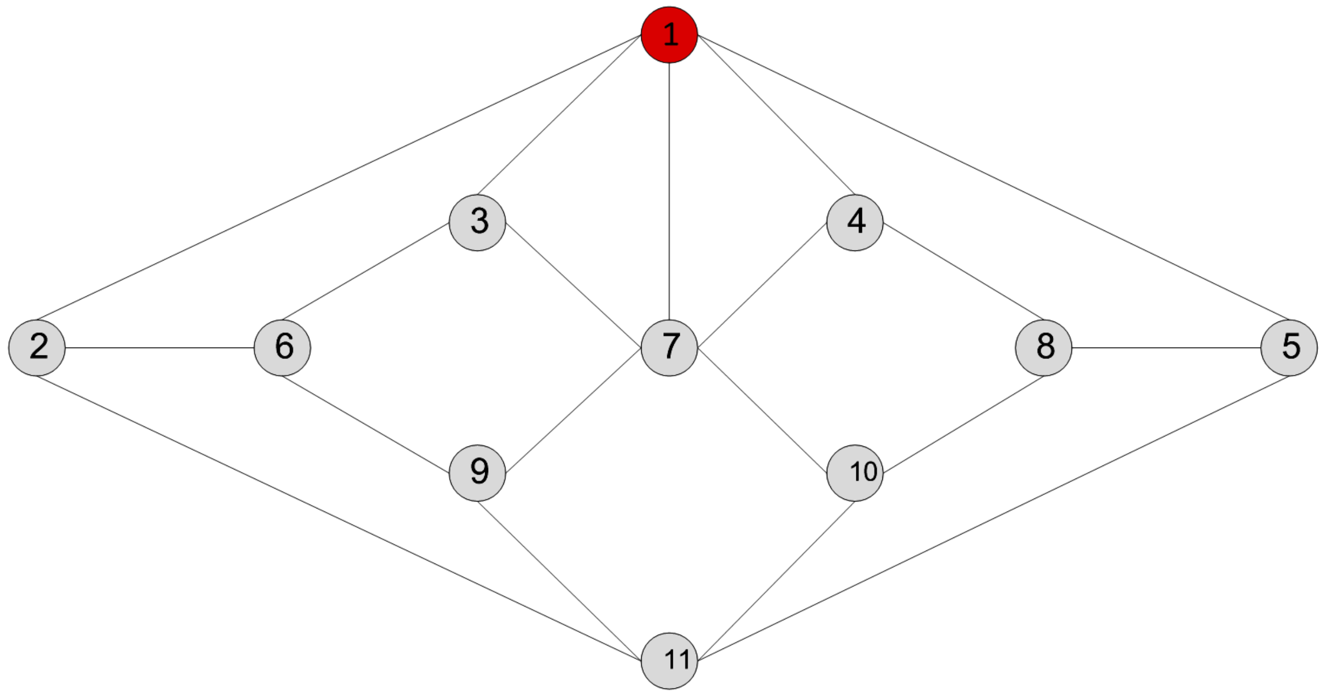


Bibliografie DR Popescu – Combinatorică și Teoria grafurilor (Teorema 4.18)

Graf bipartit

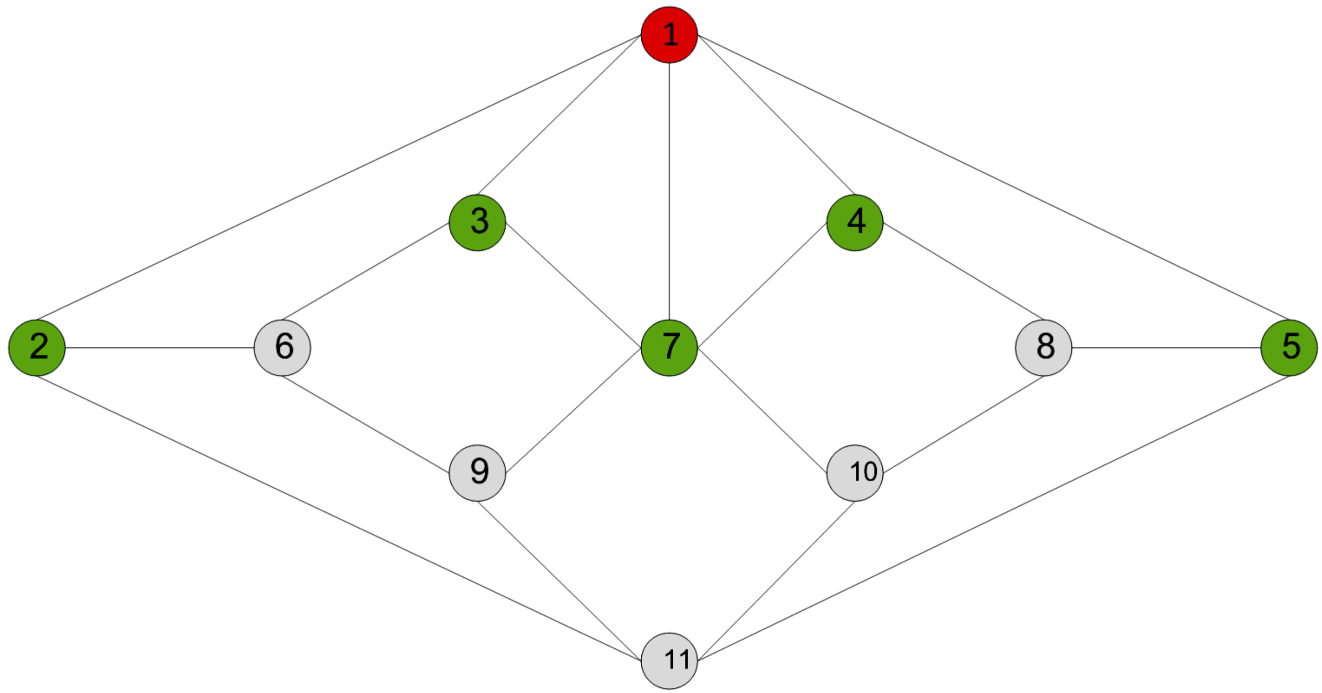
- **Teorema König ⇒ Agoritm pentru a testa dacă un graf este bipartit**
  - Colorăm un arbore parțial al său printr-o parcurgere (colorăm orice vecin j nevizitat al vârfului curent i cu o culoare diferită de cea a lui i)
  - Testăm dacă celelalte muchii – de la i la vecini j deja vizitați (colorați) au extremitățile i și j colorate diferit

Exemplu test bipartit BF

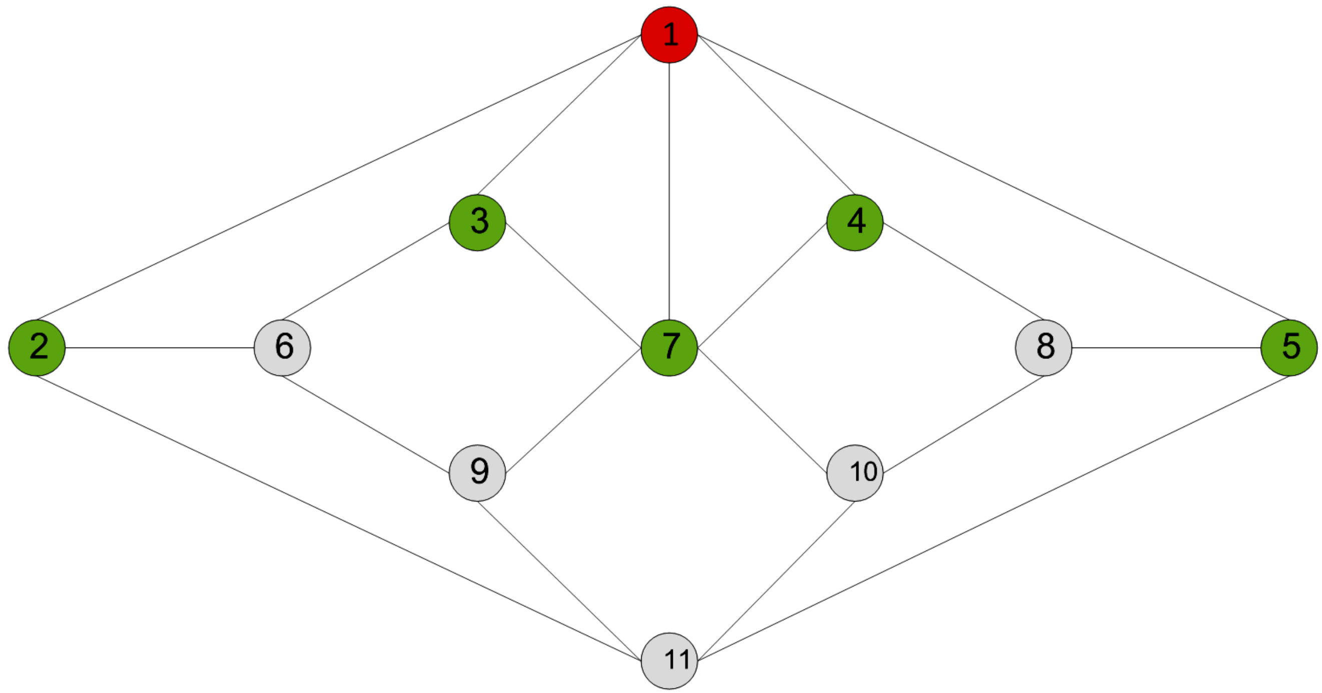


$i = 1$

Exemplu test bipartit BF

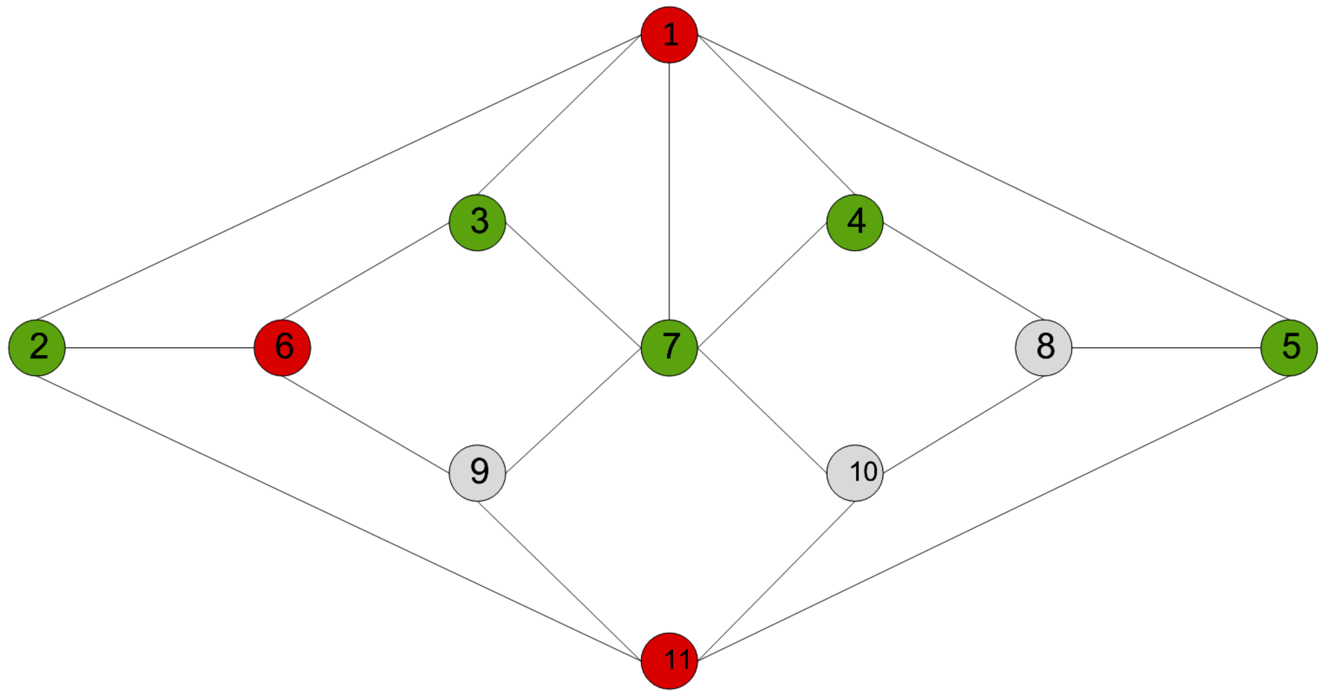


Exemplu test bipartit BF

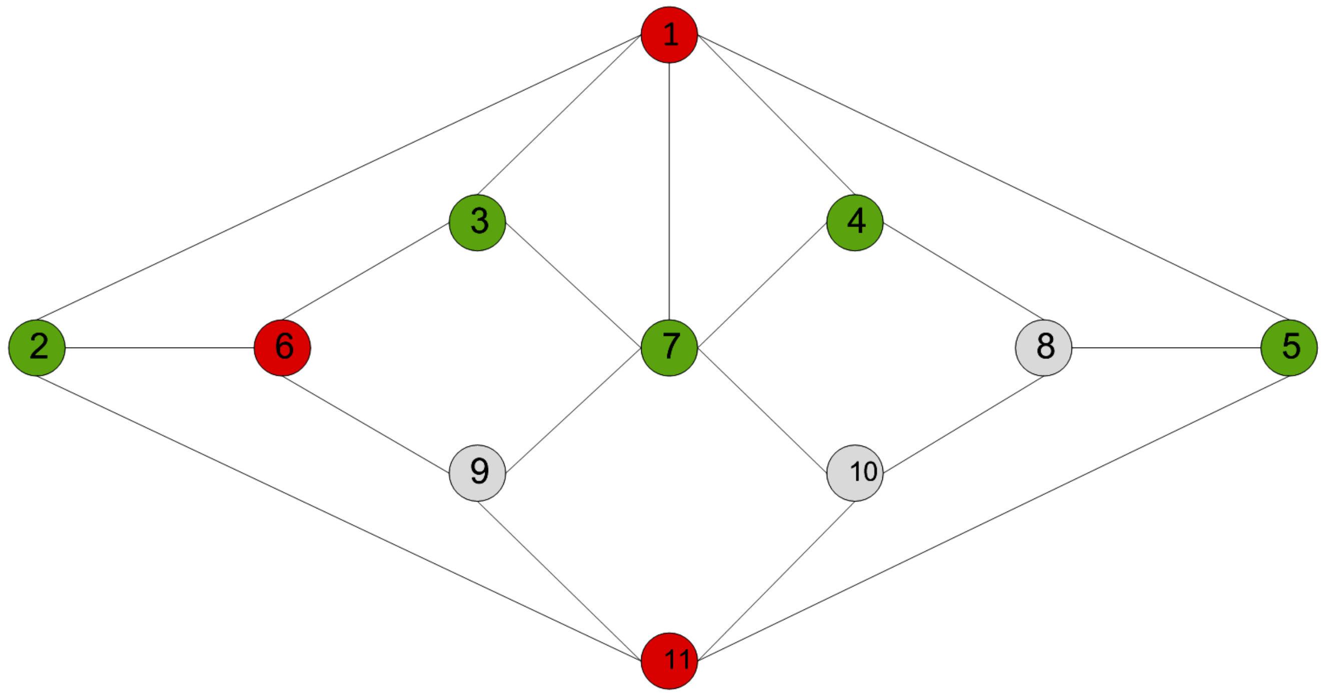


$i = 2$

Exemplu test bipartit BF



Exemplu test bipartit BF



i = 3

Exemplu test bipartit BF