Geom C12
pag1.

# Geometrii Curs 12
## Geometrie euclidiană

$K=\mathbb{R}$ $\quad E/\mathbb{R}$ = spațiu vectorial

$(\mathcal{E}, E, \varphi)$ $\quad (E/\mathbb{R}, \langle , \rangle)$

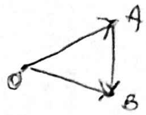
1) Putem lucra cu repere ortonormate $\mathcal{R}=\{O, e_1 \dots e_m\}$ $\quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

$\Rightarrow$ schimbări de coordonate sunt de tipul $X' = AX+B$, $A \in \mathcal{O}(m)$.

2) $d: \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$, $d(A,B) := \|\vec{AB}\| = \sqrt{\langle \vec{AB}, \vec{AB}\rangle}$

CBS $\Rightarrow$ ineg $\Delta$ pt $d$.

Dacă în $\mathcal{R}$ $A=(x_1 \dots x_m)$, $B=(y_1 \dots y_m)$ $\quad \vec{OA} = \sum x_i e_i$ $\quad \vec{OB} = \sum y_j e_j$



$d(A,B) = \|\vec{AB}\| = \|\vec{OB} - \vec{OA}\| = \|\sum (y_i - x_i) e_i\| = [\sum_i (y_i - x_i)^2]^{1/2}$

Corolar: $\vec{AB} \perp \vec{AC} \Leftrightarrow d(A,B)^2 + d(A,C)^2 = d(B,C)^2$

$\sum (b_i - a_i)(c_i - a_i) = 0 \qquad \sum (b_i - a_i)^2 + \sum (c_i - a_i)^2 = \sum (c_i - b_i)^2$

Perpendicularitatea:

$\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_2$ două subspații, dacă $E_1 \subseteq E_2^\perp$ sau $E_2 \subseteq E_1^\perp$ $\quad E_{1,2}$ subspații directoare

- $E_1 = E_2^\perp$ $\quad (\dim E_1 + \dim E_2 = m,\ E_1 \oplus E_2 = E)$

$\mathcal{E}_1$ și $\mathcal{E}_2$ se numesc normale.

Propoziție: Dacă $\mathcal{E}_1$ și $\mathcal{E}_2$ sunt normale $\Rightarrow$ $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{\cdot\}$

Dem: Folosesc teorema dimensiunii $\dim(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \dim \mathcal{E}_1 + \dim \mathcal{E}_2 + 1 - \dim(E_1 \cap E_2)$ [$\dim(E_1\cap E_2) = 0$]

$\Rightarrow \dim(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = m+1$ abs pt. că $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$ $\Rightarrow$ $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \neq \emptyset$

Teorema Pitagora $\Rightarrow$ Dacă $H$ e hiperplan, $d \perp H$.

Dacă $d \cap H = \{A\}$. și dacă $d(P,H) = \min\{d(P,B) \mid B \in H\} = d(P,A)$
$P \in d$, $P \notin H$

Ecuațiile subspațiilor:

1) $(d)$ $\quad \dfrac{x_1 - x_{10}}{l_1} = \dots = \dfrac{x_m - x_{m0}}{l_m}$ $\quad (l_1, \dots, l_m)$ determinați până la proporționalitate. $\quad \mathcal{R} = \{O, e_i, \dots, e_m\}$ fixat.

$\left(\dfrac{l_1}{\sqrt{\sum l_i^2}}, \dots, \dfrac{l_m}{\sqrt{\sum l_i^2}}\right) \Rightarrow$ pot presupune că $\sum l_i^2 = 1$

$\cos(\vec{d}, e_i) = \dfrac{\langle \vec{d}, e_i \rangle}{\|\vec{d}\| \cdot \|e_i\|} = \dfrac{\langle \sum l_j e_j, e_i \rangle}{\sqrt{\sum l_j^2}} = l_i$

2) Fie $H$ de ec. $a_1 x_1 + \dots + a_m x_m + a_0 = 0$

Caut ecuația unei normale la $H$? Care e direcția?

Fie $d$ o normală, de direcție $(l_1 \dots l_m)$ $\quad \dfrac{x_i - x_{i0}}{l_i} = t$.

Avem $(l_1, \dots, l_m) \perp \underbrace{(a_1 x_1 + \dots + a_m x_m) = 0}_{\text{"}H\text{"}}$ $\leftarrow$ ecuația omogenă atașată

$v \in H$ e de forma $\left(\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}, -\dfrac{a_1}{a_m}\alpha_1 - \dots - \dfrac{a_{m-1}}{a_m}\alpha_{m-1}\right)$

Condiția de $\perp$: $\quad l_1\alpha_1 + \dots + l_{m-1}\alpha_{m-1} - l_m\left(\dfrac{a_1}{a_m}\alpha_1 + \dots + \dfrac{a_{m-1}}{a_m}\alpha_{m-1}\right) = 0$

$\forall (\alpha_1 \dots \alpha_{m-1})$

Geom C12
pag 2.

$$\begin{cases} l_1 - l_n \frac{a_1}{a_n} = 0 \\ \vdots \\ l_{n-1} - l_n \frac{a_{n-1}}{a_n} = 0 \end{cases} \qquad \frac{l_1}{a_1} = \frac{l_2}{a_2} = \dots = \frac{l_{n-1}}{a_n} = \frac{l_n}{a_n}$$

$(l_i) = (k a_i) \quad i = \overline{1,n}$

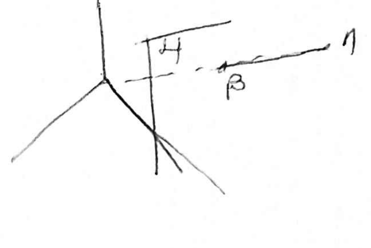
P. Parametrii directori ai normalei la H sunt proporționali cu coeficienții ec. lui H

Ex: $x+y+z-1=0 \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ e normală la plan prin $(1,1,1)$

Distanța de la un punct la un subspațiu.

1) $d(A,H) = ?$ $A \notin H$. $A(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ și $(H)$ $\sum_1^n a_i x_i + a_0 = 0$

- Ecuația normalei prin A: $\frac{x_i - \alpha_i}{a_i} = t$ (d)
- $d \cap H$: $\sum (a_i t + \alpha_i) a_i + a_0 = 0$




$t = -a_0 - \frac{\sum a_i \alpha_i}{\sum a_i^2}$

Coordonatele lui B: $-a_i \frac{a_0 + \sum a_i \alpha_i}{\sum a_i^2} + \alpha_i$

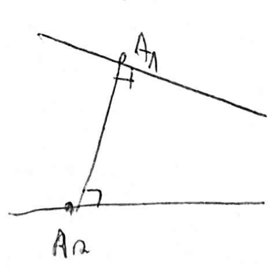
$d(A,H) = |\overline{AB}| = \frac{\sum a_i (a_0 + \sum a_i \alpha_i)}{(\sum a_j^2)} = \frac{|\sum_1^n a_i x_i + a_0|}{\sum_1^n a_j^2}$

2) Dacă $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$ subspații de dim k, $A \notin \mathcal{E}$, $\dim(\mathcal{E}_1 + \{A\}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{E}_1$ e hiperplan în $\mathcal{E}_1 + \{A\} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Există și se calculează ca mai sus $d(A, \mathcal{E}_1)$.

Exc: $d(d_1, d_2)$ în $\mathbb{R}^3$ și găsiți perpendiculara ~~pe~~ comună.

$\frac{x_1 - a_1}{l_1} = \frac{y_1 - b_1}{m_1} = \frac{z_1 - c_1}{n_1} = t$

$\frac{x_2 - a_2}{l_2} = \frac{y_2 - b_2}{m_2} = \frac{z_2 - c_2}{n_2} = s$




$d^2(A_1, A_2) = (l_1 t + a_1 - l_2 s - a_2)^2 + \dots$
$f(s,t)$ $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$ $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

# Conice și cuadrice.

Mulțimi de soluții ale unor ecuații de gradul 2.

$\mathbb{R}^2$ $\quad ax^2+by^2+2cx+2dy+e+2fxy=0$

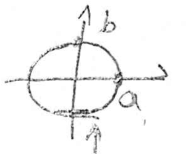
$\mathbb{R}^3$ $\quad ax^2+by^2+cz^2+2bxy+2cxz+2dyz+2ex+2fy+2gz+h=0$

În general: $\sum a_{ij}x_ix_j \qquad A=(a_{ij}) \quad a_{ij}=a_{ji}$

$\sum a_{ij}x_ix_j+2\sum b_ix_i+c=0$

$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{ij} & b_1 \\ & \vdots \\ & b_{m-1} \\ b_1 \dots b_{m-1} & c \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad {}^t\overline{X}\,\overline{A}\,\overline{X}=0 \iff \boxed{{}^tXAX+2\,{}^tBX+c=0}$

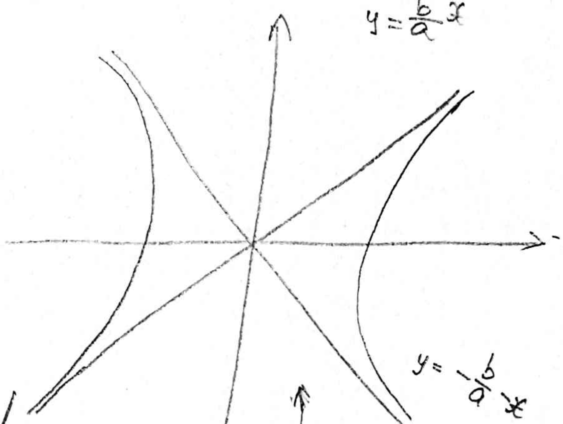
$\overline{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_m \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$




1) Conice în $\mathbb{R}^2$

Cazul 1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ elipsă

$a=b \Rightarrow$ cerc.



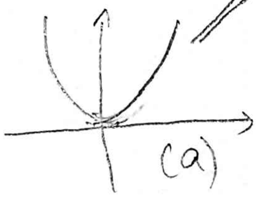

Cazul 2. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$

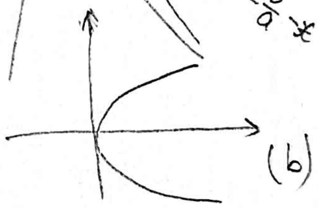
$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$

Cazul 3. $x^2-ky=0$ (a)

$y-kx=0$ (b)

parabolă.

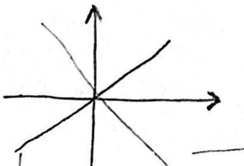



$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

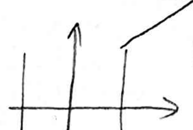
$B=\begin{pmatrix} 0 \\ -k/2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -\frac{k}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

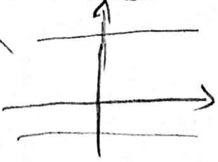
Cazul 4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \Rightarrow (0,0)$




Cazul 5: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

Caz 6: $x^2=k>0 \quad y^2=k>0$





Dacă avem în general: ${}^tXAX+2\,{}^tBX+c=0 \qquad n=2$

A simetrică $\Rightarrow$ are valori proprii reale.

Există o schimbare de coordonate (prin transf. ortogonale) a.î. (izometrie)

A ia forma diagonală $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \ddots & \lambda_m \end{pmatrix}$

$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\cancel{2\,{}^tBB}\;2b_1'x+2b_2'y+c=0$

$\lambda_1\left(x^2+2\frac{b_1'}{\lambda_1}x\right)+\lambda_2\left(y^2+2\frac{b_2'}{\lambda_2}y\right)+c=0$

$\lambda_1\left(x+\frac{b_1'}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y+\frac{b_2'}{\lambda_2}\right)^2+c-\frac{b_1'}{\lambda_1}-\frac{b_2'}{\lambda_2}=0$

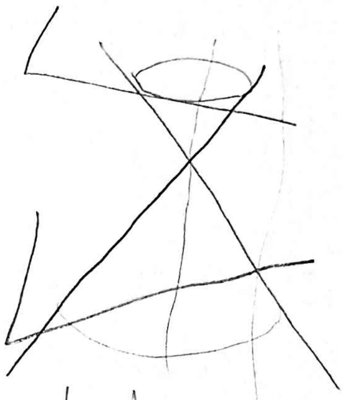
Dacă $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow$ elipsă sau hiperbolă.

$\lambda_1 = 0$: $\lambda_2 y'^2 + 2b_1' x' + c' = 0$

$$2b_1'\left(x' + \frac{c'}{2b_1'}\right) = 0$$

$x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x + y - 1 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 2 \end{pmatrix}$ $\delta = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ hiperbola.



$2x - 3y - 2 = 0$ ${}^tAX + 2BX + C = 0$

$4y - 3x + 1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

<u>Prop</u>: Locul geometric al punctului cu raportul distanțelor la un punct fix și la o dreaptă fixă constant e o conică nedegenerată. $(\mathrm{rg}\,\bar{A} = 3)$

$$\underbrace{(x-c)^2}_{d(A,d)^2} + y^2 = e^2\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]$$