Analiză Cursul 5.
Serii de funcții.

APLICAȚIE: $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$; $n \in \mathbb{N}^*$ $x \in \mathbb{R}$.
Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nu este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$, dar este uniform convergentă.

$f_n(x) = (-1)^n \cdot \frac{1}{n+x^2}$ $\quad g_n, h_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g_n(x) = (-1)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $h_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f_n(x) = g_n(x) \cdot h_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. $\quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |h_n(x) - 0| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n+x^2} - 0 \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n+x^2} = \frac{1}{n}$

$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |h_n(x) - 0| \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow h_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} 0$ (1)

$h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{1}{n+1+x^2} - \frac{1}{n+x^2} = \frac{n+x^2-n-1-x^2}{(n+x^2)(n+1+x^2)} = \frac{-1}{(n+x^2)(n+1+x^2)} < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ șirul de funcții $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este descrescător. (2)

$|g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_n(x)| = |-1+1-1-\ldots+(-1)^n| \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (3)

Din 1, 2 și 3 rezultă că seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} g_n h_n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea $\mathbb{R}$.

Proprietățile seriilor de funcții.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $f_n: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Teorema 1</u>: Dacă seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \subseteq D$ către funcția $f: A \to \mathbb{R}$ și $\exists x_0 \in A$ astfel încât f_n este funcție continuă în x_0 $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci f este continuă în x_0

APLICAȚIE: $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$.

Seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.
f_n este funcție continuă pe $\mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
$\Big\} \Rightarrow$ suma seriei este o funcție continuă pe $\mathbb{R}$.

<u>Teorema 2</u>: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval mărginit, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții derivabile pe I cu $f_n: I \to \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{N}$ care verifică următoarele ipoteze:

a) seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ este uniform convergentă pe mulțimea I către funcția $g: I \to \mathbb{R}$.

b) $\exists x_0 \in I$ a.î. seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ este convergentă.

Atunci $\exists f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă astfel încât seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea I către funcția f și $f'(x) = g(x)$ $\forall x \in I$.

Serii de puteri.

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$

Definiția 1: Se numește serie de puteri o serie de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ unde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu $f_0(x) = a_0$ și $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

NOTAȚIE: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

Definiția 2: Se consideră seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

a) Numărul $R \overset{def}{=} \sup\{ r \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ serie convergentă$\}$ se numește raza de convergență a seriei de puteri.

b) Mulțimea $(x_0 - R, x_0 + R) \subset \mathbb{R}$ se numește intervalul de convergență al seriei de puteri.

c) Mulțimea $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ este serie de numere reale convergentă$\}$ se numește mulțimea de convergență a seriei de puteri.

d) Funcția $f : A \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ se numește suma seriei de puteri.

Obs: 1) $x_0 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

2) $f(x_0) = a_0$.

Teorema CAUCHY–HADAMARD:

Se consideră o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ și $l = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$, $l \in [0, +\infty)$. Este atunci
$$R = \begin{cases} \frac{1}{l}, & l \in (0, \infty) \\ +\infty, & l = 0 \\ 0, & l = +\infty \end{cases}$$

Teorema ABEL:

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ o serie de puteri și R raza ei de convergență

a) $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ este convergentă

b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R]$ seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ este divergentă

c) Dacă $R > 0$, pentru orice număr real $r \in (0, R)$ seria de funcții $\sum_{n \to \infty} a_n(x-x_0)^n$ este uniform și absolut convergentă pe $[x_0 - r, x_0 + r]$

AmC5
pag3.

COROLAR:

a) $(x_0-R, x_0+R) \subseteq A \subseteq [x_0-R, x_0+R]$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}$.

b) $R=0 \Rightarrow A=\{x_0\}$

c) $R=\infty \Rightarrow A=\mathbb{R}$.

Teorema 1: Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ o serie de puteri cu $R>0$ și $f: A \to \mathbb{R}$ suma seriei de puteri.

a) $f\big|_{(x_0-R, x_0+R)}$ este funcție indefinit derivabilă și

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n(x-x_0)^n\right)^{(k)} \quad \forall x \in (x_0-R, x_0+R).$$

b) Dacă $x_0-R \in A$ atunci f este continuă în x_0-R.

c) Dacă $x_0+R \in A$ atunci f este continuă în x_0+R.

Serii remarcabile de puteri

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\quad \forall x \in (-1,1)$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$, $\quad \forall x \in (-1,1)$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$