12. 01. 2017

Curs algebră

Profu' NU ȘTIE ROSTUL cursului acesta

se numește → Algebră universală

→ "universal" (nu va fi la examen)

A mulțime $\qquad f_j : A^{n_j} \longrightarrow A \;,\; n_j \in \mathbb{N}$

$(A, f_1, f_2, \dots, f_k)$ $\qquad (A^{n+1} = A^n \times A)$

$(x \in A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ ori}}$

convenție:

$(n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 0)$ $\qquad x = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

↓

signatura algebrei $\qquad f_j$ - operația n_j-ară

ex: $n_j = 1 \Rightarrow f$ = operație unară

$n_j = 2 \Rightarrow f$ = operație binară

$n_j = 0 \quad A = \emptyset$

Operație 0-ară: $f : \emptyset \longrightarrow A$

$f(\emptyset) \in A$

↓

o alegere a unui elem. din A

Conexiune cu lucrurile învățate:

- monoid $\quad (A, f_1, f_2) \quad n_1 = 2 \quad f_1 : A^2 \to A$ operație

$n_2 = 0$

(A) $f_1(f_1(x, y), z) = f_1(x, f_1(y, z))$ $\qquad f_2(\emptyset) = e$ elem. neutru

Ceva analog cu * se numește lege ecuațională

- $(G, \cdot)$ grup

(G, f_1, f_2, f_3)

$n_1 = 2 \quad n_2 = 1 \quad n_3 = 0$

$f_2 : G \to G$ (funcția care asociază fiecărui elem. inversul său)
$f_2(g) = g^{-1}$

$f_3(\emptyset) = e$

(*) $f_1(f_1(x,y),z) = f_1(x, f_1(y,z))\ \forall\ x,y,z \in G$

(*) $f_1(g, f_2(g)) = f_1(f_2(g), g) = e$

(*) $f_1(e,g) = f_1(g,e) = g,\ \forall g \in G$

- R inel

$(R, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$
$f_1 \to 2,\ f_2 \to 2,\ f_3 \to 1,\ f_4 \to 0,\ f_5 \to 0$

$f_4(\emptyset) = 0$

$f_5(\emptyset) = 1$

+

1) $f_1(x, f_1(y,z)) = f_1(f_1(x,y), z),\ \forall x,y,z \in R$

asociativitatea față de I operație

2) $f_2(x, f_2(y,z)) = f_2(f_2(x,y), z),\ \forall\ x,y,z \in R$

asociativitatea celei de-a II-a operații

3) $f_1(r, f_3(r)) = f_1(f_3(r), r) = 0$

4) $f_1(r, 0) = f_1(0, r) = r$

5) $f_2(r, 1) = f_2(1, r) = r$

6) $f_2(x, f_1(y,z)) = f_1(f_2(x,y), f_2(x,z))$

$(A, f_1, f_2, \dots f_n)$

$B \leq A$

subalgebră universală

$f_j(b_1, b_2, \dots, b_j) \in B$

nu știu de ce a pus $\forall b_1, \dots, b_j \in B$

bara asta

$(A, f_1, \dots, f_n)$ $(B, g_1, g_2, \dots, g_n)$

$h : A \to B$ morfism de algebre

$h(f_j(a_1, \dots, a_{n_j})) = g_j(h(a_1), \dots, h(a_{n_j})) \; \forall j = \overline{1,n}$

Principiile de incertitudine

Kurt Gode : — există afirmații indecidabile

Trecere în revistă a noțiunilor din urmă:

I) Mulțimi

Funcții

~~Consistența există~~

George Perec - Omission (nu apare deloc litera

A, B mulțimi

$|A| = |B| \iff \exists f : A \to B$ bijectivă

ex: $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$

$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

$f(x) = tg(x)$ (bijectivă)

$(0, 1) \xrightarrow{g} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$g(x) = ax + b$

$g(0) = -\frac{\pi}{2}$

$g(1) = \frac{\pi}{2}$

$x = 0 \Rightarrow b = -\frac{\pi}{2}$

$g(1) = \frac{\pi}{2}$

$g(1) = a - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \pi \Rightarrow g(x) = \pi x - \frac{\pi}{2}$

A mulțime

Def: A infinită dc $\exists A_1 \subsetneq A$ și $\exists f: A \to A_1$ bijectivă

Hotelul lui Hilbert:

0, 1, 2, 3, ...

$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{N} \\ -2x-1 & x \in \mathbb{Z},\ x < 0 \end{cases}$

$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$

$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$

$|N| < |R| = (0,1)$

Definim că $|A| < |B|$ dc. $\exists f: A \to B$, f inj.

și $\nexists g: A \to B$ inj.

$f: N \to R$

$f(x) = x$ inj.

Este suficient să arătăm că $\nexists f$ bijectivă

Pp. că $\exists f$ bijectivă

$f: N^* \to (0,1)$ $\quad (|N| = |N^*|)$

$f(1) = 0, a_{11} a_{12} \ldots$

$f(2) = 0, a_{21} a_{22} \ldots$

$f(n) = 0, a_{n1} a_{n2} \ldots$

Pr. diagonalizării lui Cantor:

$x \in (0,1)$

$x = 0, b_1 b_2$

$b_1 \notin \{a_{11}, 0, 9\}$ $\Rightarrow x \neq f_1$

$b_2 \notin \{a_{22}, 0, 9\}$

$\vdots$

$x \neq f(n)\ \forall n \in N^* \Rightarrow f$ nu e surjectivă

$\exists A$ a.î. $|N| < |A| < |R|$?

Afirmație indecidabilă