Drumuri minime în grafuri ponderate

Aplicaţii

- Dată o hartă rutieră, să se determine
  - un drum minim între două orașe date
  - câte un drum minim între oricare două orașe de pe hartă

Aplicaţii

- Determinarea de drumuri minime/distanţe – numeroase aplicaţii
  - probleme de rutare
  - robotică
  - procesarea imaginilor
  - strategii jocuri

Cadru

Fie:

- G – graf **orientat** ponderat
- P – drum

$$\mathbf{w(P)} = \sum_{e \in E(P)} \mathbf{w(e)}$$

costul/ponderea/lungimea drumului P

Cadru

- Fie $s, v \in V$, $s \neq v$.
- **Distanţa de la s la v**

$$d_G(s, v) = \min\{ w(P) \mid P \text{ este drum de la } s \text{ la } v\}$$

Cadru

- Fie s,v$\in$V, **s $\neq$ v.**
- **Distanţa de la s la v**

  $d_G(s, v) = \min\{ w(P) \mid P$ este drum de la s la v$\}$

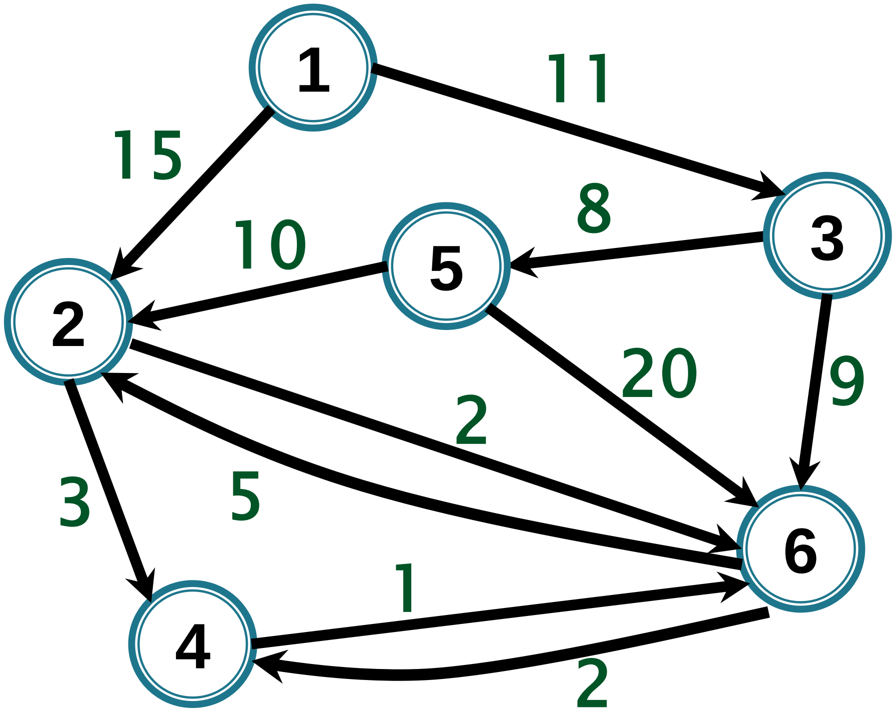
  - $d_G(s, s) = 0$
  - **Convenţie.** $\min \emptyset = \infty$

Cadru

- Fie s,v∈V, **s ≠ v.**
- **Distanţa de la s la v**

  $$d_G(s, v) = \min\{\, w(P) \mid P \text{ este drum de la s la v}\}$$

  - $d_G(s, s) = 0$
  - **Convenţie.** $\min \varnothing = \infty$
- Un drum P de la s la v se numește **drum minim de la s la v** dacă $w(P) = d_G(s, v)$


1
2
3
4
5
6
11
15
10
8
20
9
2
5
3
1
2

Tipuri de probleme de drumuri minime

- între două vârfuri date
- de la un vârf la toate celelalte
- între oricare două vârfuri

Tipuri de probleme de drumuri minime

- între două vârfuri date
- de la un vârf la toate celelalte
- între oricare două vârfuri

Situaţii:

- Sunt acceptate şi arce de cost negativ?

Tipuri de probleme de drumuri minime

- între două vârfuri date
- de la un vârf la toate celelalte
- între oricare două vârfuri

Situaţii:

- Sunt acceptate şi arce de cost negativ?
- Graful conţine circuite?
- Graful conţine circuite de cost negativ?

Drumuri minime de la un vârf s dat la celelalte vârfuri (de sursă unică)

Problema drumurilor minime de <u>sursă</u> <u>unică</u> (de la s la celelalte vârfuri)

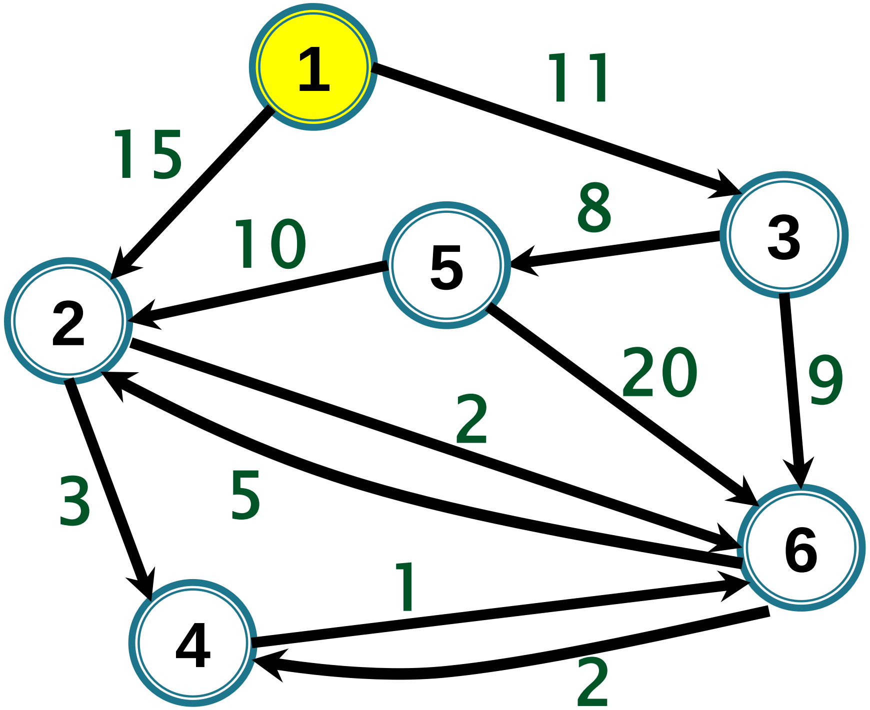
Se dau:

- un graf orientat ponderat G= (V, E, w), cu

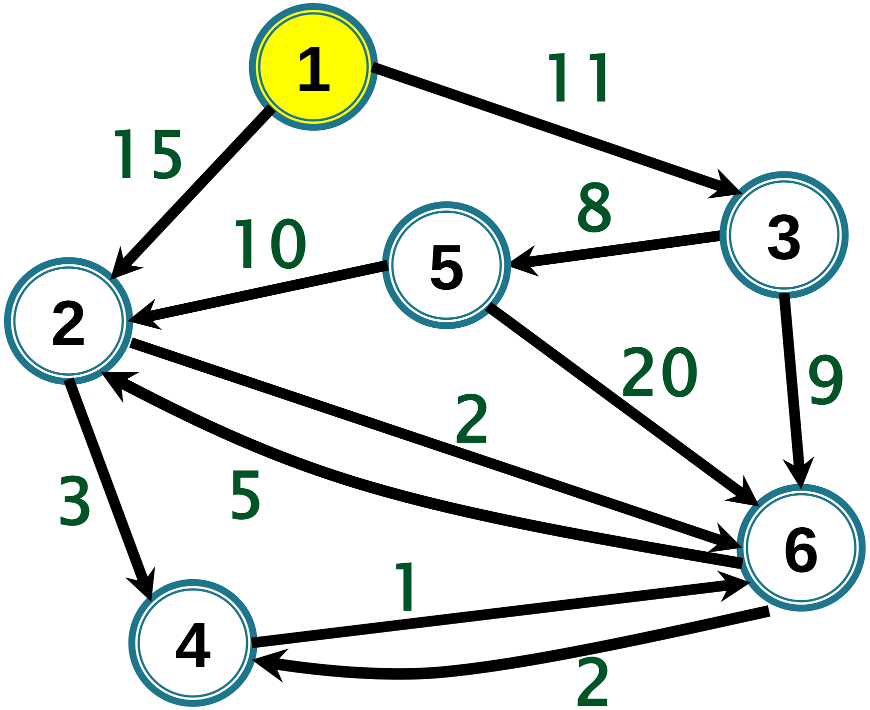
  $w : E \to \mathbb{R}$

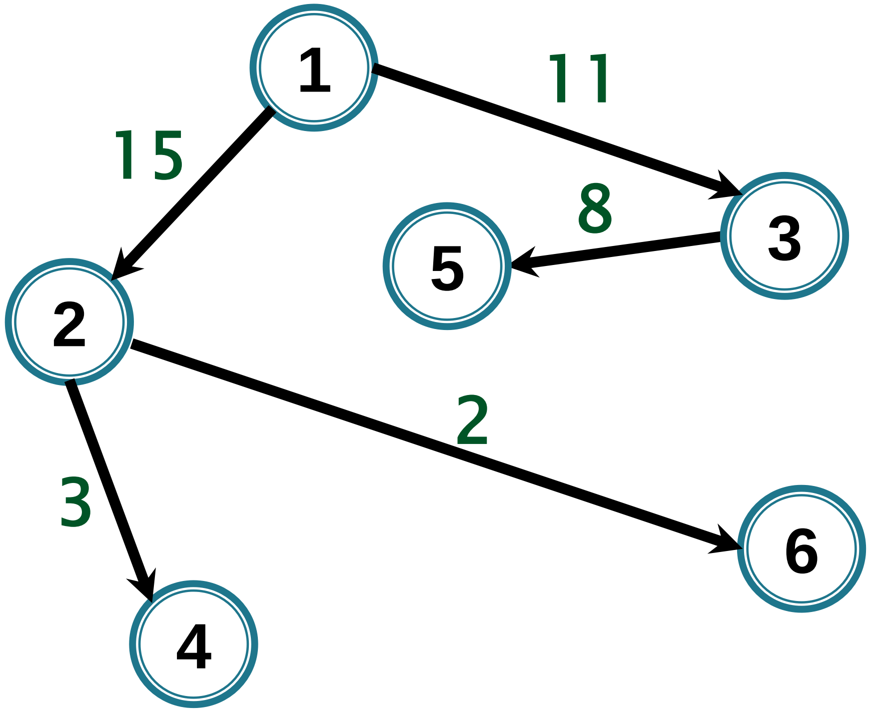
- un vârf de start s

Să se determine distanța de la s la fiecare vârf x al lui G / la un vârf dat t (și un arbore al distanțelor față de s/ un drum minim de la s la t) s = 1



Soluție

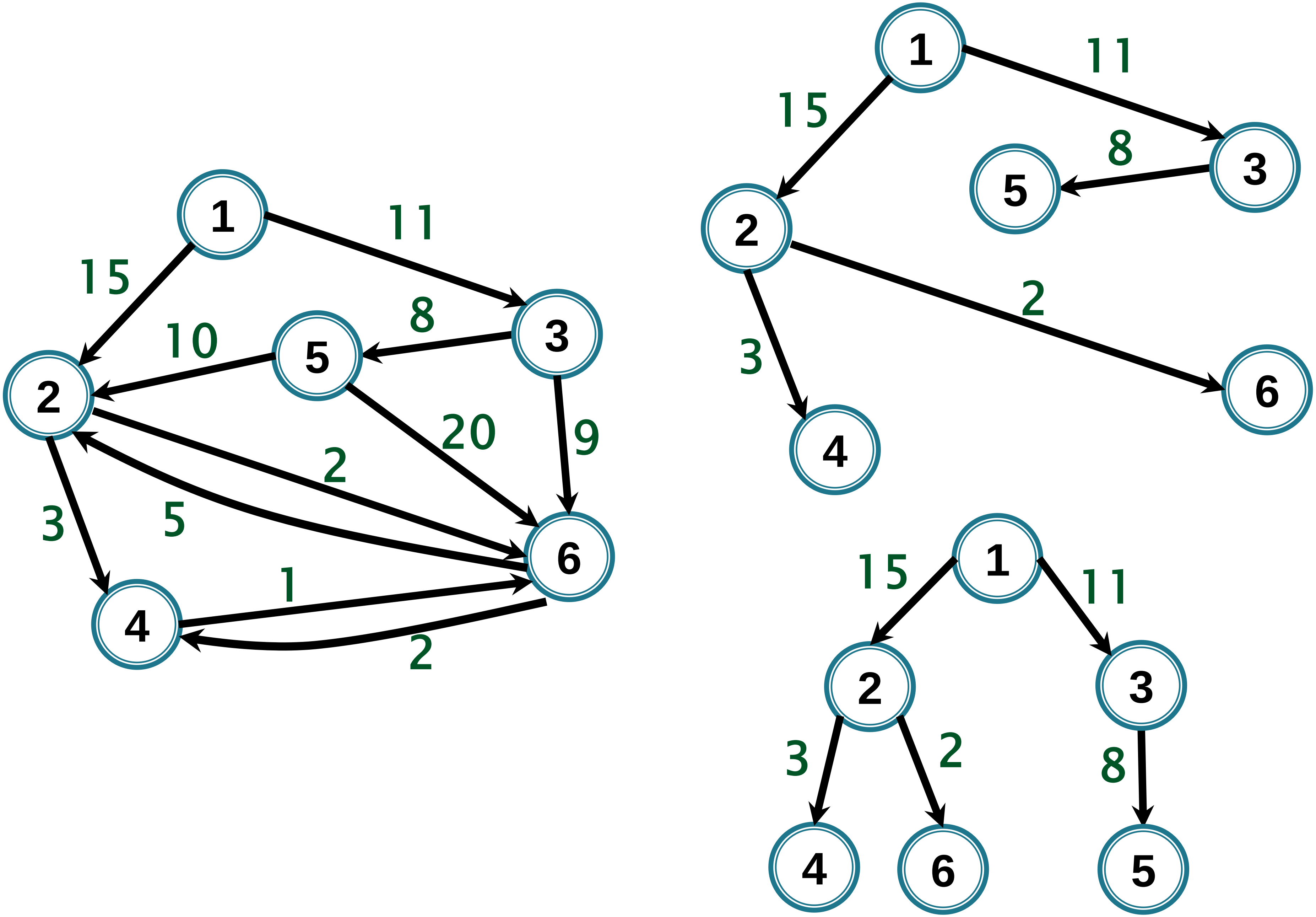




Definiție: Pentru un vârf dat s un <u>arbore al distanțelor față de s</u> = un subgraf T al lui G care **conservă distanțele** de la s la celelalte vârfuri accesibile din s

$$d_T(s, v) = d_G(s, v), \ \forall v \in V \text{ accesibil din } s,$$

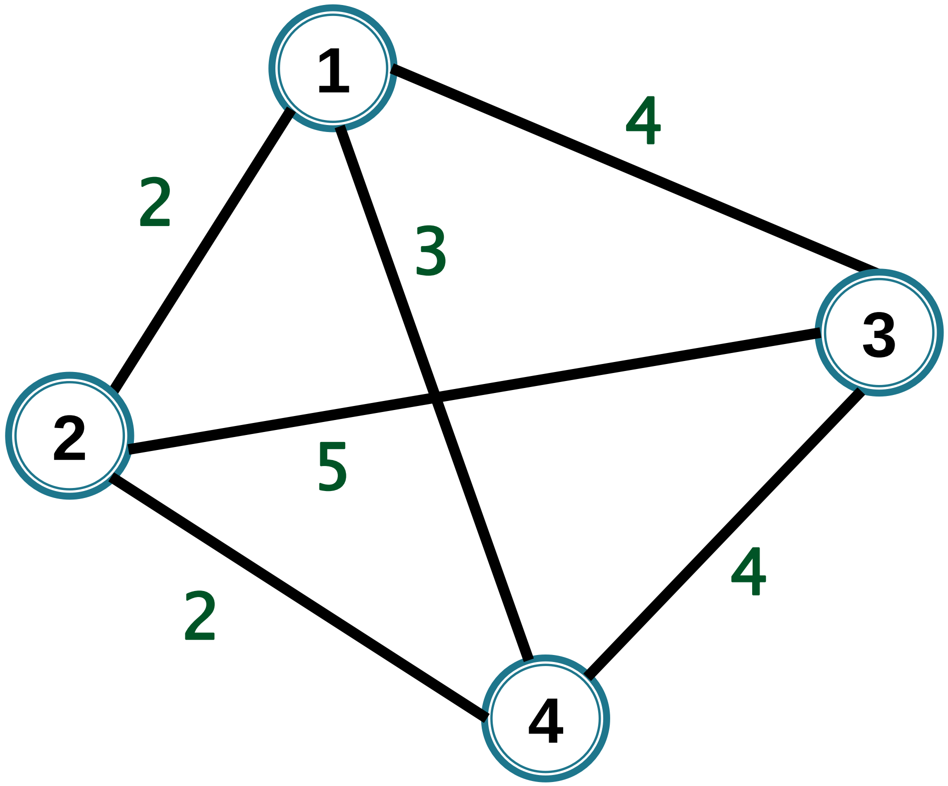
graful neorientat asociat lui T fiind arbore cu rădăcina în s (cu arcele corespunzătoare orientate de la s la frunze)



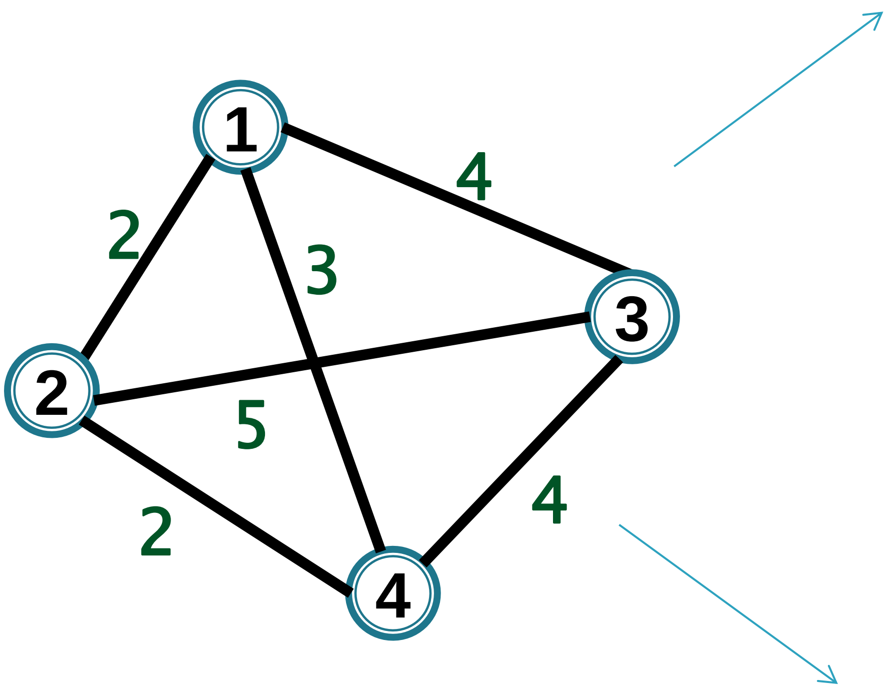
arborele distanţelor faţă de 1

- Presupunem că toate vârfurile sunt accesibile din s
- Problema drumurilor minime de sursă unică este echivalentă cu determinarea unui arbore al distanțelor față de s

- Un arbore parțial de cost minim <u>nu</u> este neapărat un arbore de distanțe minime



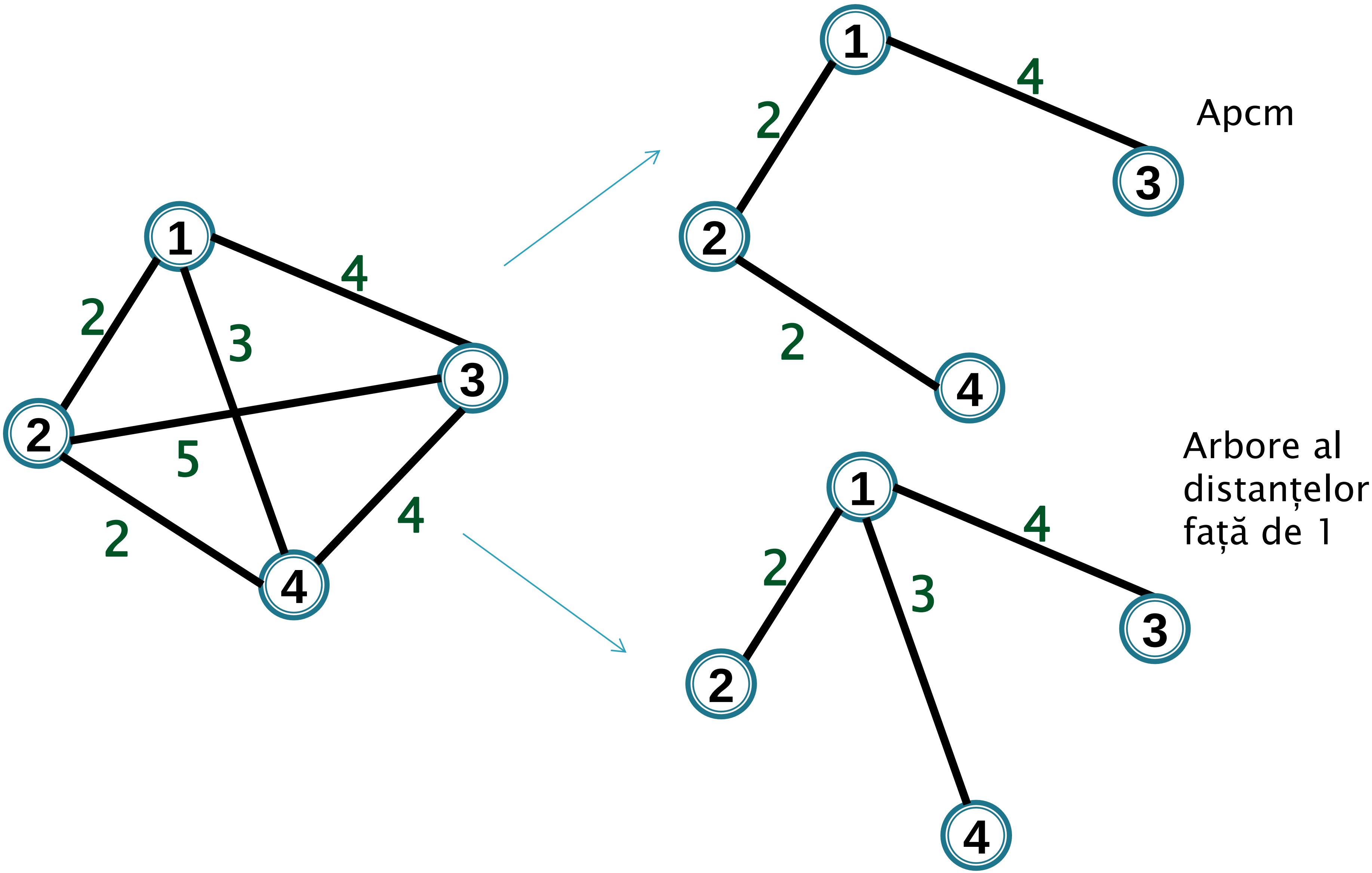
Un arbore parțial de cost minim nu este neapărat un arbore de distanțe minime



Apcm

Arbore al distanțelor față de 1

Un arbore parțial de cost minim nu este neapărat un arbore de distanțe minime



Drumuri minime de sursă unică s

- Dacă G nu este ponderat, cum putem calcula distanţele față de s?

Drumuri minime de sursă unică s

- **Amintim**

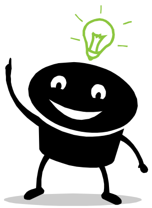
În cazul unui graf neponderat, problema se rezolvă folosind parcurgerea BF din s

Drumuri minime de sursă unică s

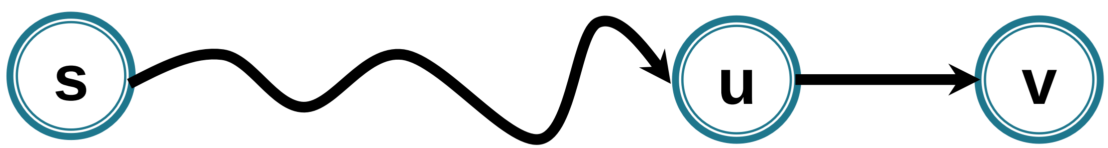
- În ce ordine considerăm vârfurile pentru a calcula distanţele față de s?

Drumuri minime de sursă unică s

- În ce ordine considerăm vârfurile pentru a calcula distanţele față de s?

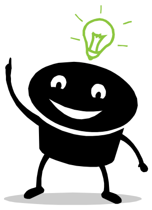


"din aproape în aproape"



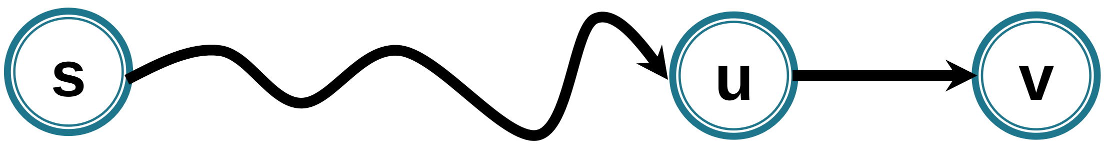
Drumuri minime de sursă unică s

- În ce ordine considerăm vârfurile pentru a calcula distanţele faţă de s?



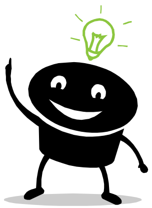
"din aproape în aproape" $\Rightarrow$

când considerăm un vârf v, pentru a calcula d(s,v) ar fi util să ştim deja d(s,u) pentru orice u cu uv$\in$E



Drumuri minime de sursă unică s

- În ce ordine considerăm vârfurile pentru a calcula distanţele faţă de s?



"din aproape în aproape" $\Rightarrow$

când considerăm un vârf v, pentru a calcula d(s,v) ar fi util să ştim deja d(s,u) pentru orice u cu uv$\in$E

- Ar fi utilă o ordonare a vârfurilor astfel încât dacă uv$\in$E, atunci u se află înaintea lui v

Drumuri minime de sursă unică s

- În ce ordine considerăm vârfurile pentru a calcula distanţele faţă de s?

  "din aproape în aproape" $\Rightarrow$
  când considerăm un vârf v, pentru a calcula d(s,v) ar fi util să ştim deja d(s,u) pentru orice u cu $uv \in E$

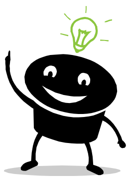
  - Ar fi utilă o ordonare a vârfurilor astfel încât dacă $uv \in E$, atunci u se află înaintea lui v

O astfel de ordonare nu există dacă graful conţine circuite

Drumuri minime de sursă unică s

- În ce ordine considerăm vârfurile pentru a calcula distanţele faţă de s?

  "din aproape în aproape"



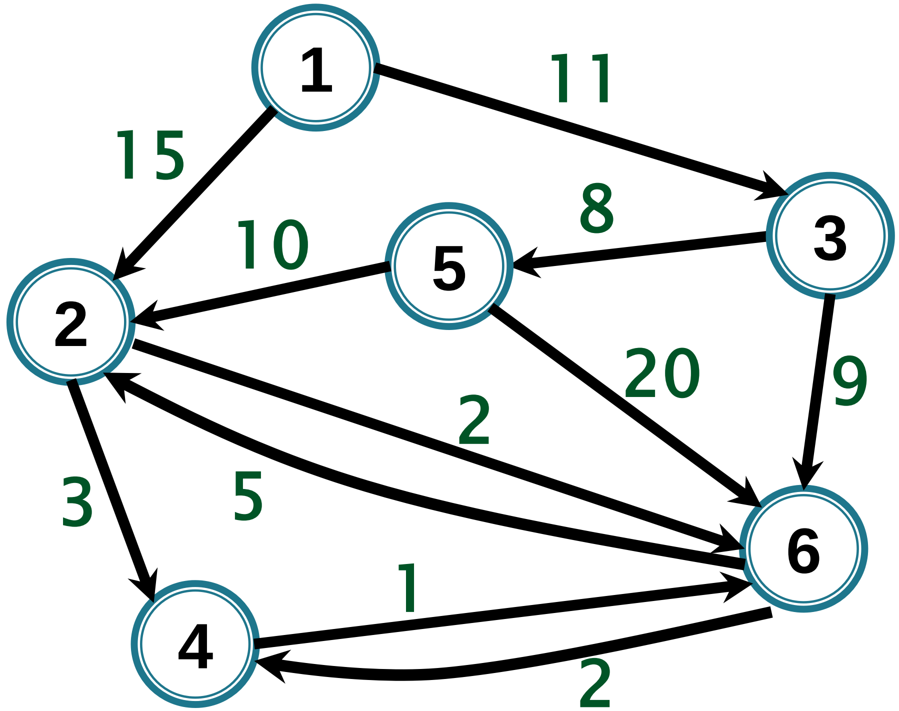
Idee: <u>estimăm</u> distanţele pe parcursul algoritmului şi considerăm vârful care este estimat a fi cel mai aproape de s

Algoritmul lui Dijkstra

- **Ipoteză:**

  Presupunem că arcele au <u>cost pozitiv</u>

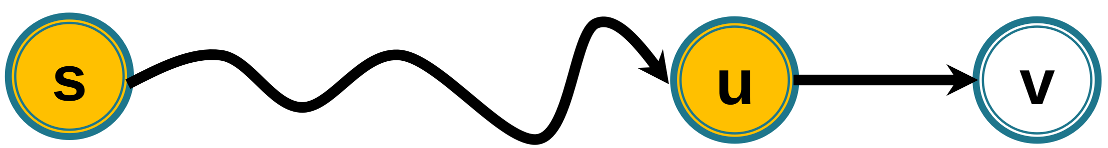
  (graful poate conţine circuite)


1
2
3
4
5
6
11
15
8
10
20
9
2
3
5
1
2

Algoritmul lui Dijkstra

Idee: La un pas este ales ca vârf curent vârful u care estimat a fi cel mai apropiat de s

Estimarea pentru u = cel mai scurt drum de la s la u determinat până la pasul curent

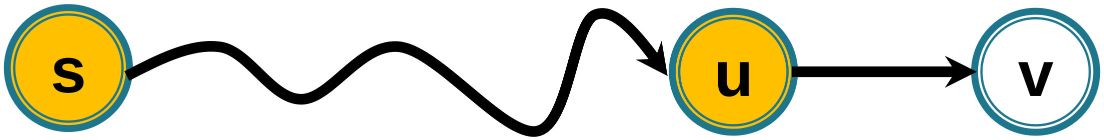


Algoritmul lui Dijkstra

Idee: **La un pas este ales ca vârf curent vârful u care <u>estimat</u> a fi cel mai apropiat de s**

+ se descoperă noi drumuri către vecinii lui $\Rightarrow$

se actualizează distanţele estimate pentru vecinii



Algoritmul lui Dijkstra

- generalizare a ideii de parcurgere BF
- dacă toate arcele au cost egal Dijkstra ≡ BF

Pseudocod

Algoritmul lui Dijkstra

- Reţinem pentru fiecare vârf etichetele
  - d[u]
  - tata[u]

Algoritmul lui Dijkstra

- **Asociem fiecărui vârf u o etichetă de distanță**

  d[u] = costul minim al unui drum de la s la u descoperit până la acel moment

- d[u] **estimare superioară (** $\geq d(s,u)$ **)**

Algoritmul lui Dijkstra

- **Asociem fiecărui vârf u o etichetă de distanță**

  d[u] = **costul minim al unui drum de la s la u descoperit până la acel moment**

- d[u] **estimare superioară** ($\geq d(s,u)$)

Iniţial?

Algoritmul lui Dijkstra

- **Memorare drumuri**

Algoritmul lui Dijkstra

- **Memorare drumuri**

  – rețінem **predecesor** = **tată** în arborele distanţelor față de vârful s:

  tata[u] = **predecesorul** lui u pe drumul de cost minim de la s la u descoperit până la acel moment

Algoritmul lui Dijkstra

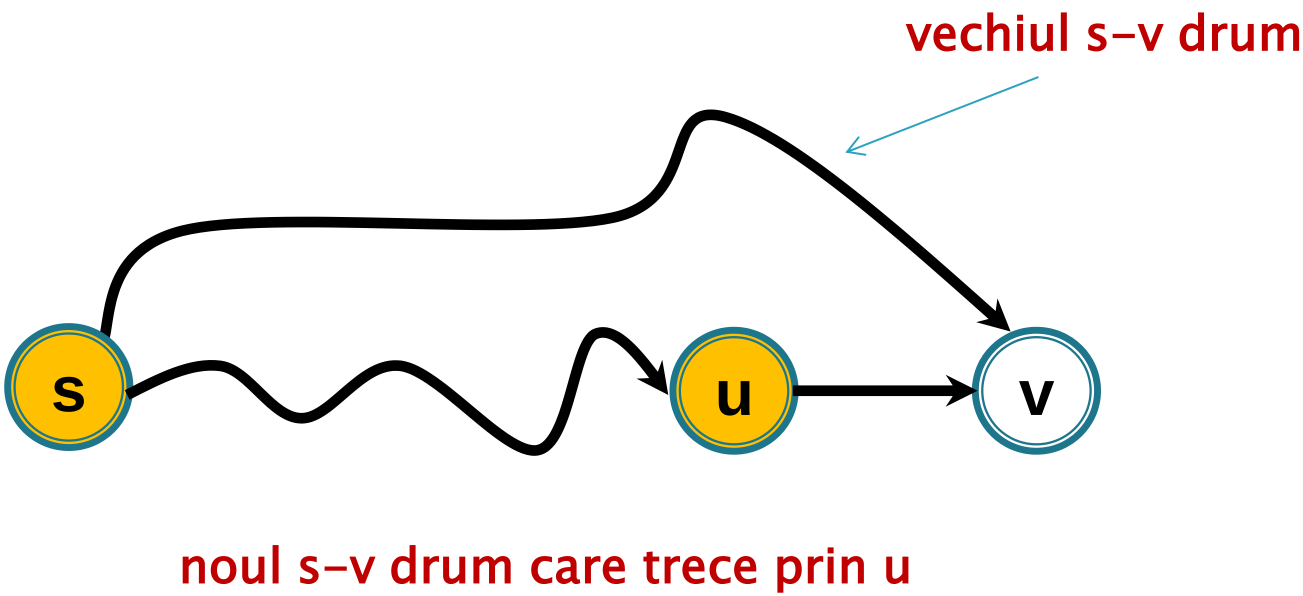
- **Astfel, la un pas**
  - este selectat un vârf u (neselectat) care "**pare**" cel mai apropiat de s $\Leftrightarrow$ are eticheta d minimă

Algoritmul lui Dijkstra

- **Astfel, la un pas**
  - este selectat un vârf u (neselectat) care “**pare**” cel mai apropiat de s ⇔ are eticheta d minimă
  - Se actualizează etichetele d[v] ale vecinilor lui u – considerând drumuri care trec prin u
    - **tehnică de <u>relaxare a arcelor</u> care ies din u**

Algoritmul lui Dijkstra

- **Relaxarea unui arc (u, v)** = a verifica dacă d[v] poate fi îmbunătăţit trecând prin vârful u



Algoritmul lui Dijkstra

- Relaxarea unui arc (u, v) :

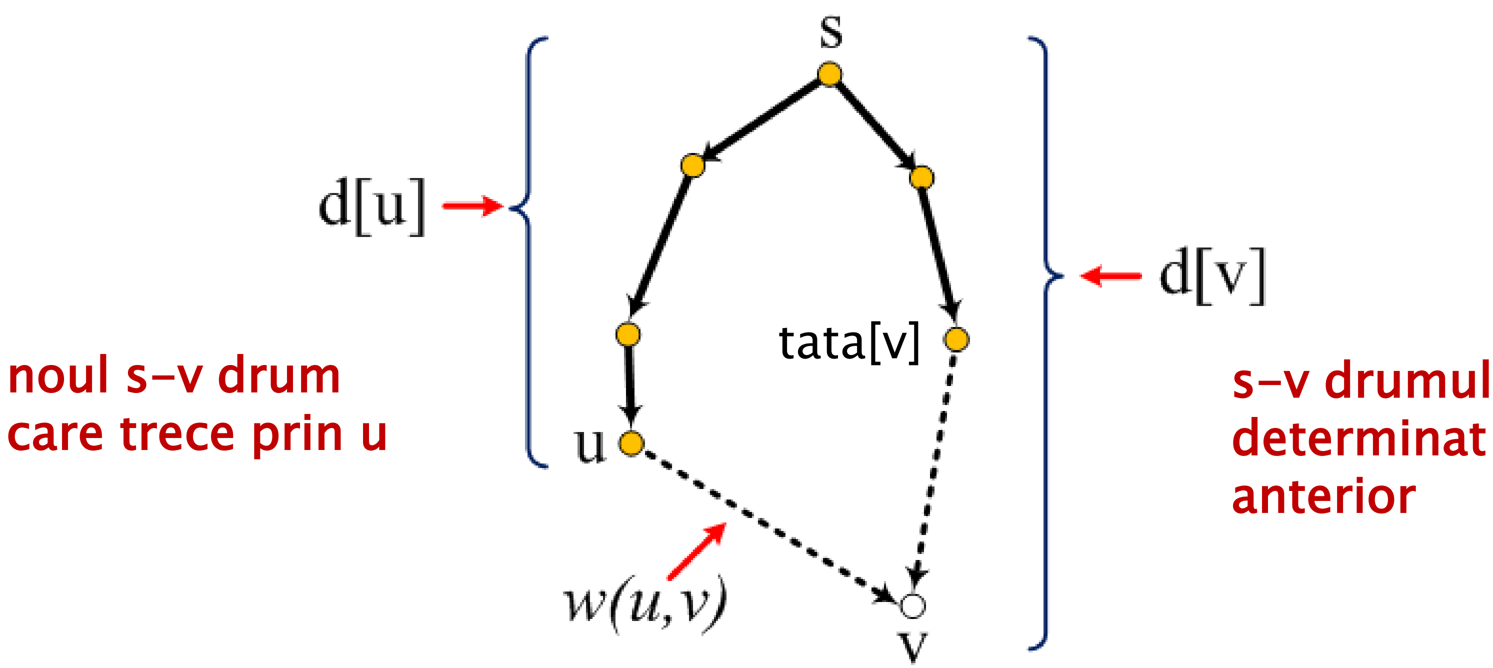
```
dacă d[u] + w(u,v) < d[v] atunci
        d[v] = d[u] + w(u,v);
        tata[v] = u
```

- $\infty + x = \infty$

Algoritmul lui Dijkstra

- Relaxarea unui arc (u, v) :

```
dacă d[u] + w(u,v) < d[v] atunci
        d[v] = d[u] + w(u,v);
        tata[v] = u
```



Dijkstra(G, w, s)

```
inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
```

Dijkstra(G, w, s)

```
  inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
   pentru fiecare u∈V executa
       d[u] = ∞; tata[u]=0
```

Dijkstra(G, w, s)

```
  inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
   pentru fiecare u∈V executa
       d[u] = ∞; tata[u]=0
   d[s] = 0
```

Dijkstra(G, w, s)

```
  inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
   pentru fiecare u∈V executa
       d[u] = ∞; tata[u]=0
  d[s] = 0
  cat timp Q ≠ ∅ executa ⇔ pentru i=1,n executa
```

Dijkstra(G, w, s)

```
  inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
   pentru fiecare u∈V executa
       d[u] = ∞; tata[u]=0
   d[s] = 0
   cat timp Q ≠ ∅ executa
       u = extrage vârf cu eticheta d minimă din Q
```

Dijkstra(G, w, s)

```
inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
 pentru fiecare u∈V executa
      d[u] = ∞; tata[u]=0
 d[s] = 0
 cat timp Q ≠ ∅ executa
      u = extrage vârf cu eticheta d minimă din Q
      pentru fiecare uv∈E executa  //relaxare uv
```

Dijkstra(G, w, s)

```
  inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
   pentru fiecare u∈V executa
        d[u] = ∞; tata[u]=0
   d[s] = 0
   cat timp Q ≠ ∅ executa
        u = extrage vârf cu eticheta d minimă din Q
        pentru fiecare uv∈E executa
             daca v∈Q si d[u]+w(u,v)<d[v] atunci
                     d[v] = d[u]+w(u,v)
                     tata[v] = u
```

Dijkstra(G, w, s)

```
initializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
 pentru fiecare u∈V executa
     d[u] = ∞; tata[u]=0
d[s] = 0
cat timp Q ≠ ∅ executa
     u = extrage vârf cu eticheta d minimă din Q
     pentru fiecare uv∈E executa
           daca d[u]+w(u,v)<d[v] atunci
                     d[v] = d[u]+w(u,v)
                     tata[v] = u
scrie d, tata

//scrie drum minim de la s la t un varf t dat folosind tata
```

Dijkstra(G, w, s)

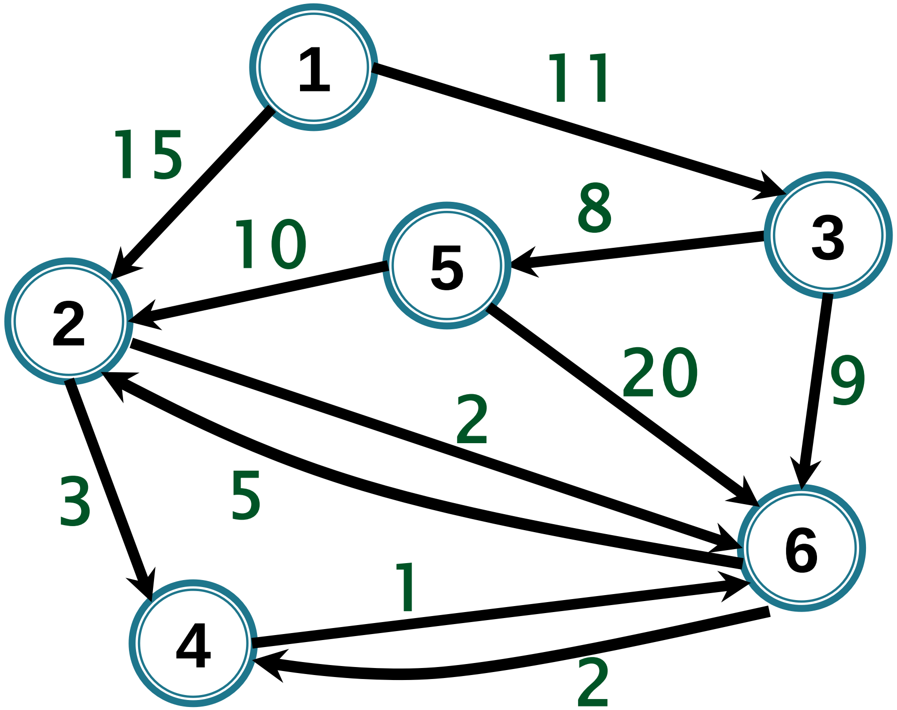
```
inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
 pentru fiecare u∈V executa
     d[u] = ∞; tata[u]=0
d[s] = 0
cat timp Q ≠ ∅ executa
     u = extrage vârf cu eticheta d minimă din Q
     pentru fiecare uv∈E executa
           daca d[u]+w(u,v)<d[v] atunci
                  d[v] = d[u]+w(u,v)
                  tata[v] = u
scrie d, tata

//scrie drum minim de la s la t un varf t dat folosind tata
```

Dijkstra

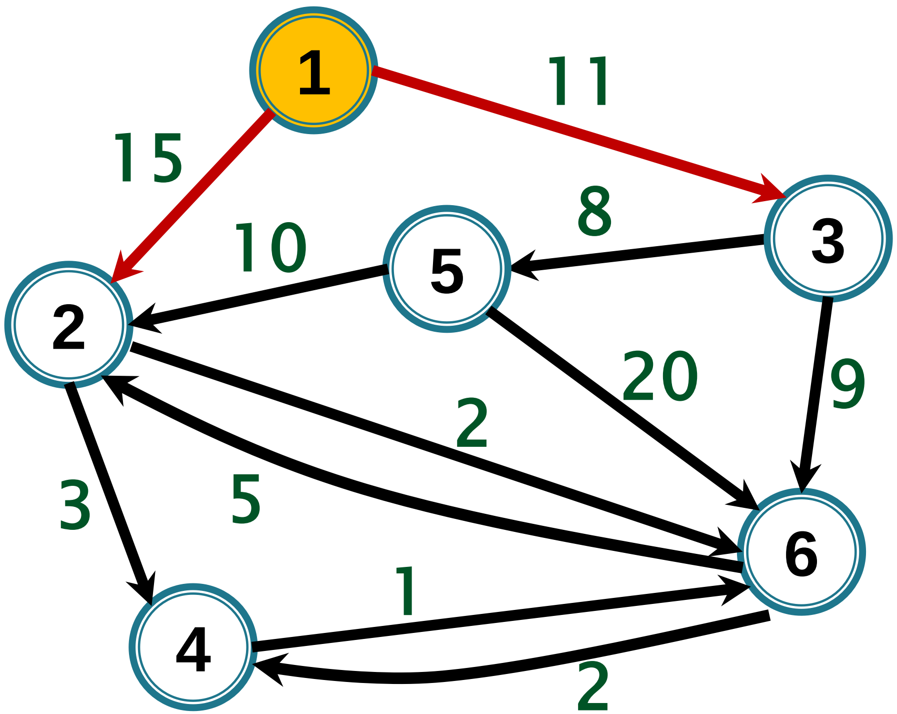
- **Observație**

  Vom demonstra că atunci când u este extras din Q eticheta lui d[u] este chiar cu d(s,u) (este corectă) şi **nu se va mai actualiza** $\Rightarrow$ $\cancel{v \in Q}$

Exemplu

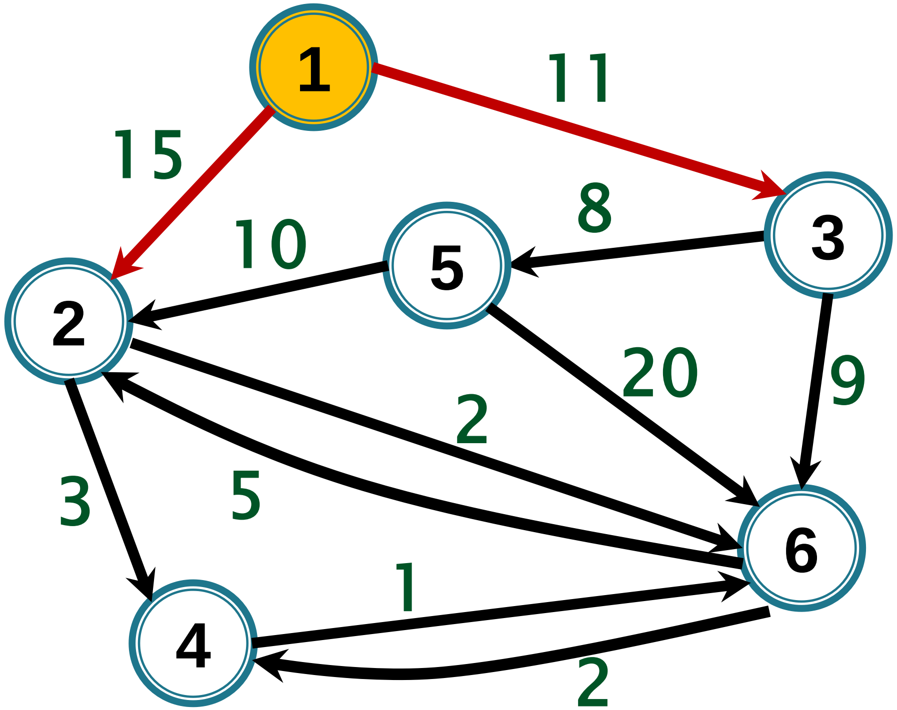


d/tata	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]

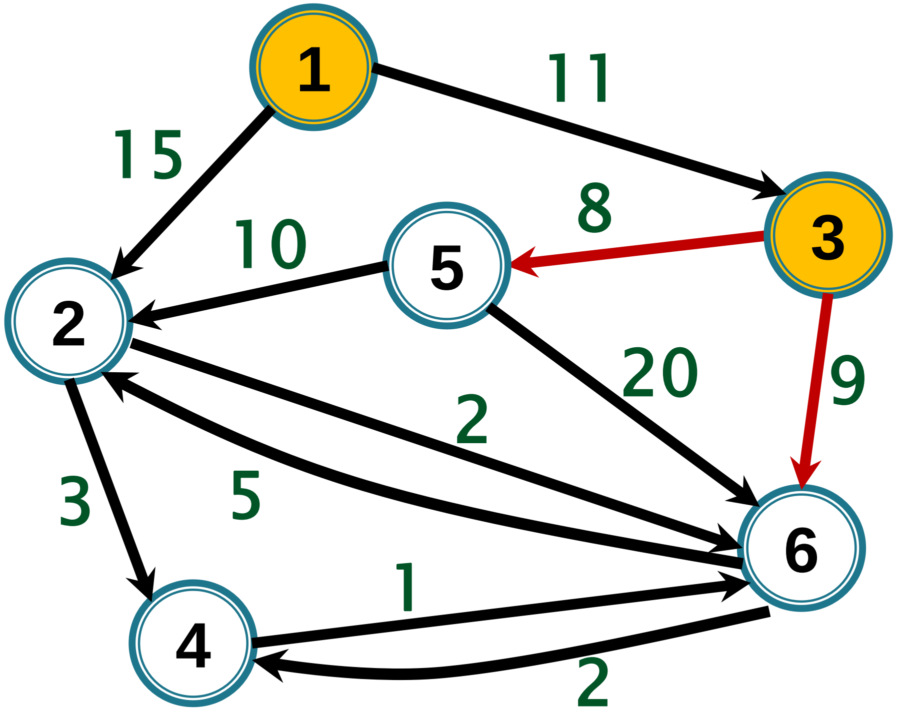


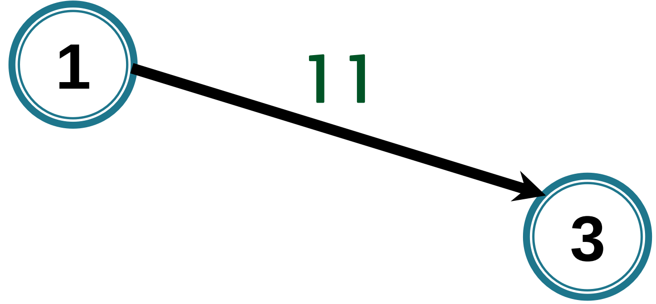
d/tata	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]

Sel. 1:

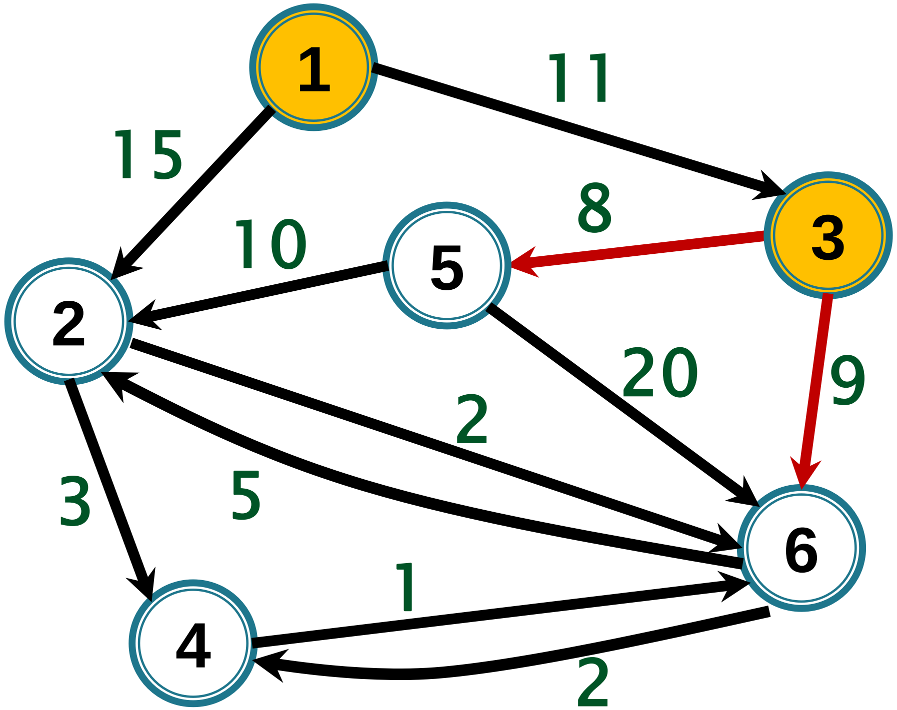


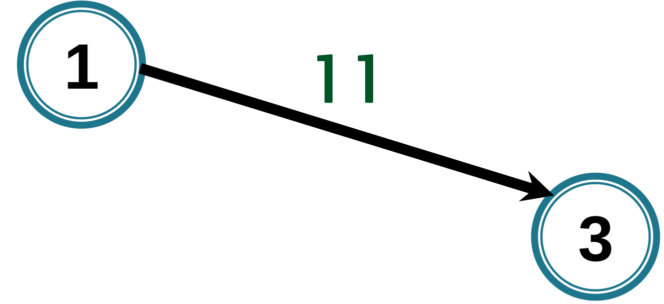
d/tata	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]



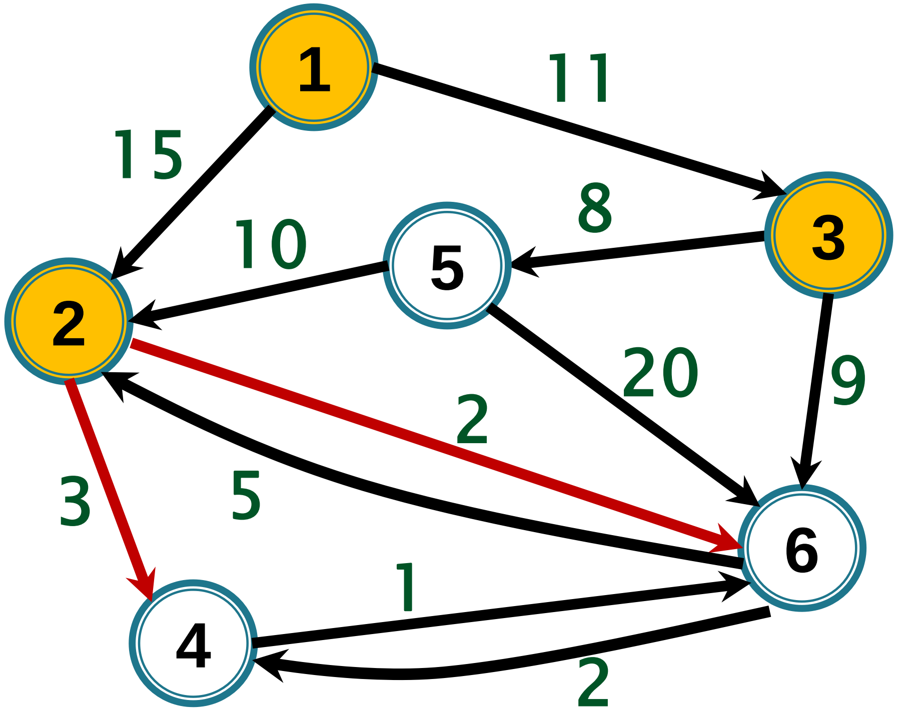


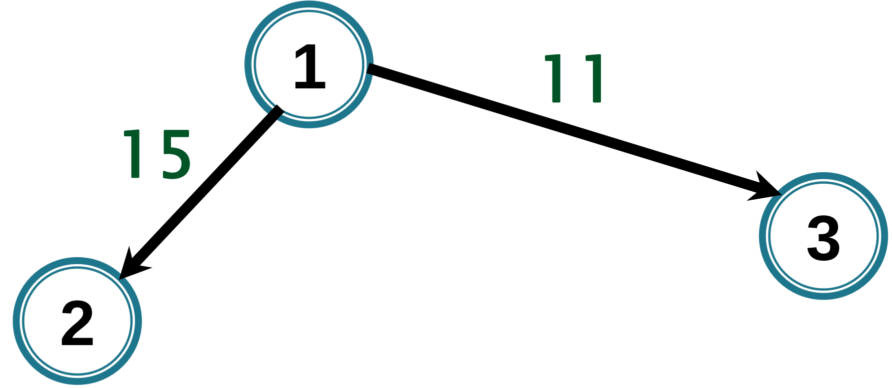
d/tata	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3						



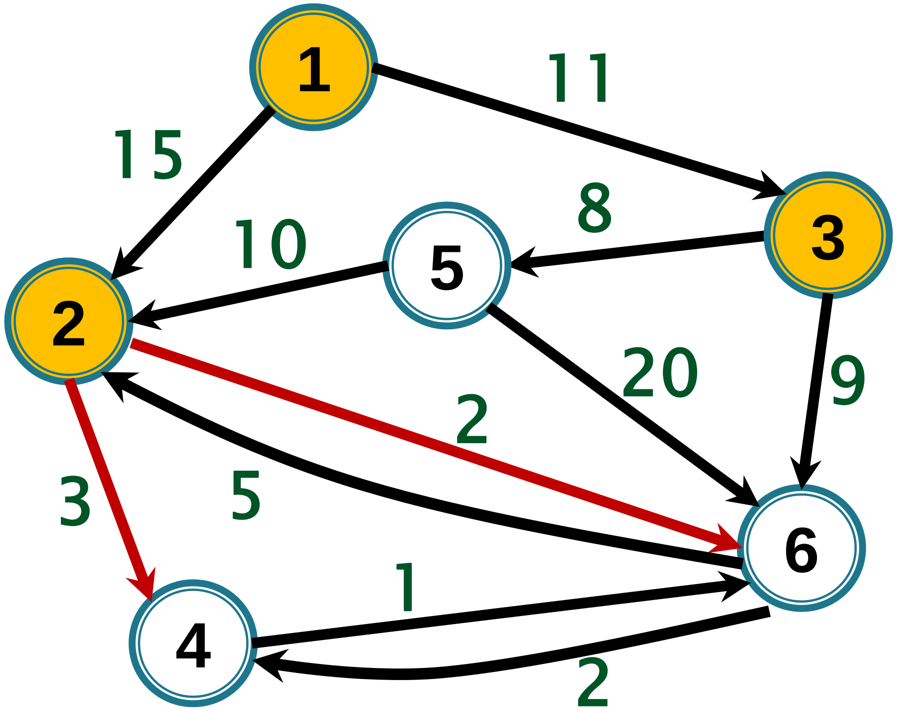


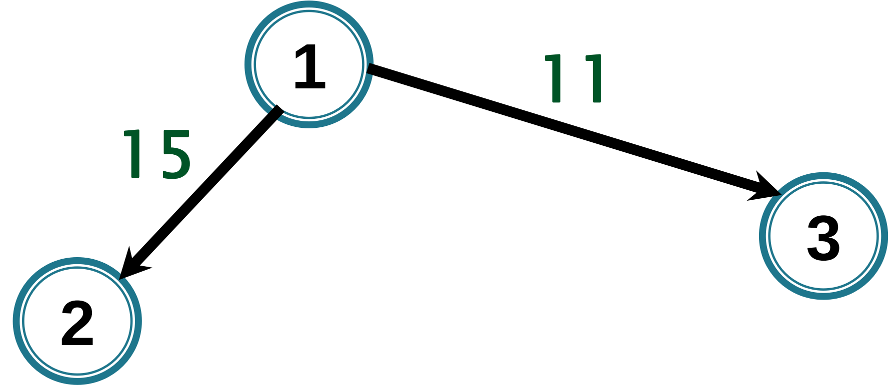
d/tata	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	19/3,	20/3]



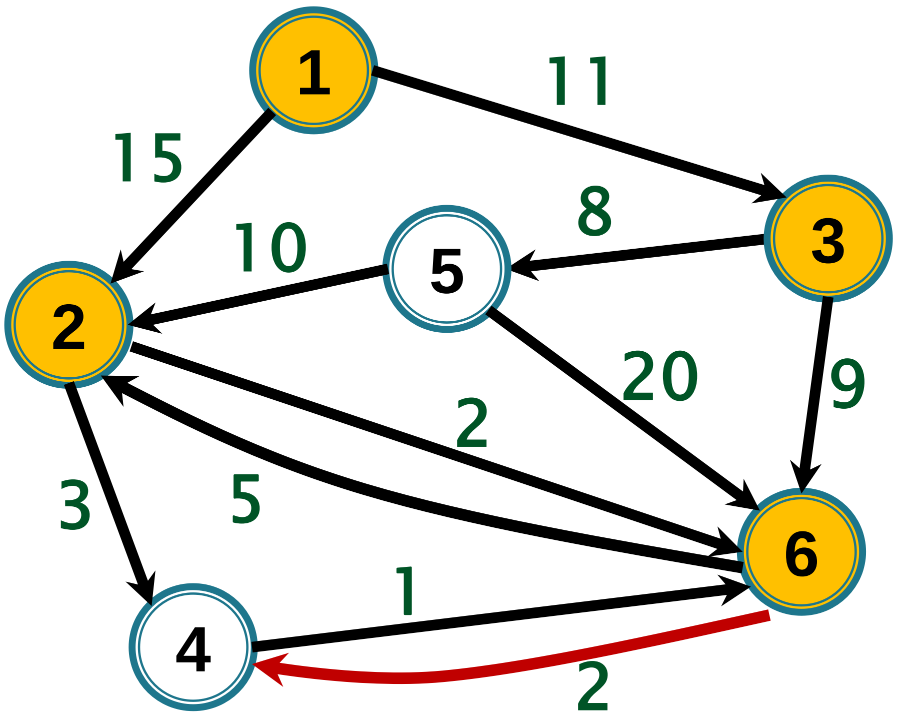


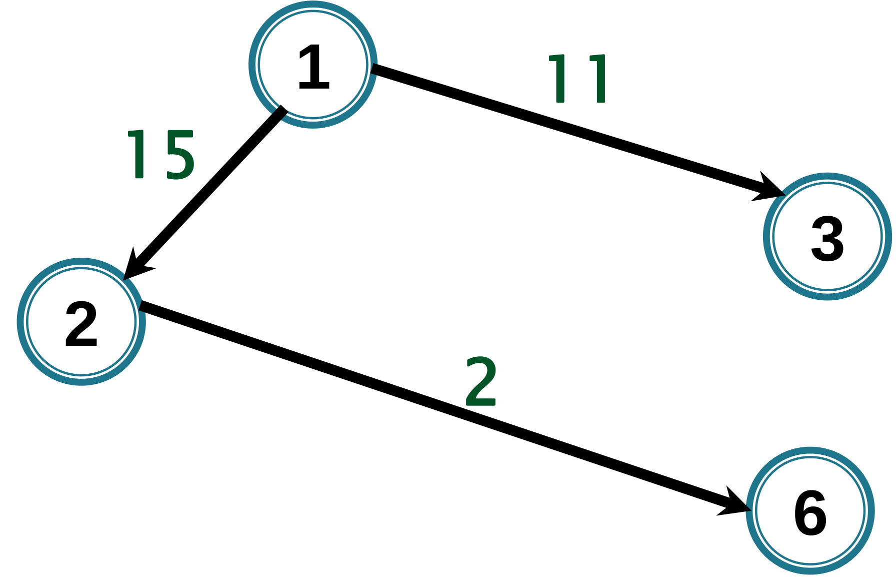
d/tata	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	19/3,	20/3]
Sel. 2:						



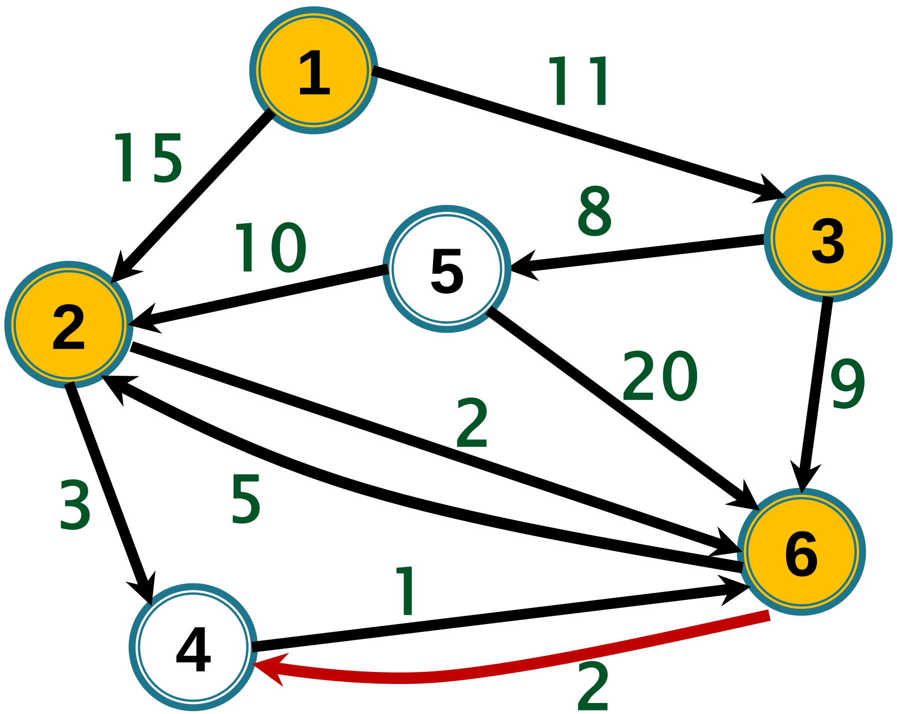


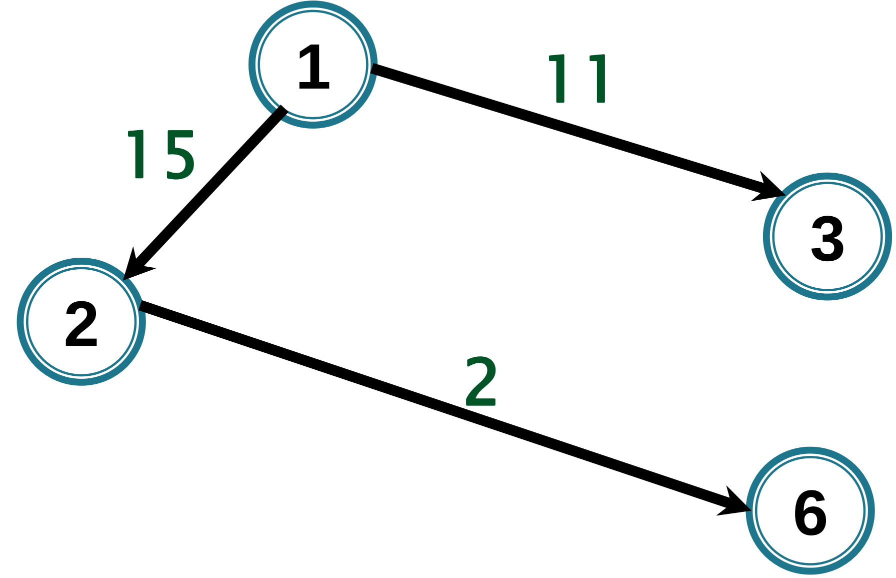
d/tata	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	19/3,	20/3]
Sel. 2:	[– ,	– ,	– ,	18/2,	19/3,	17/2]



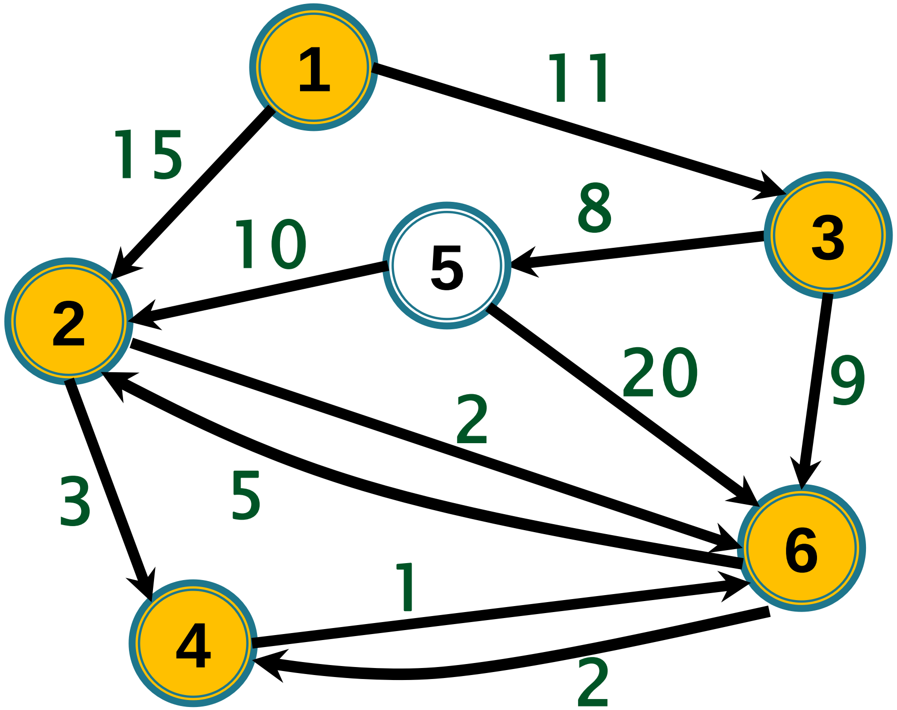


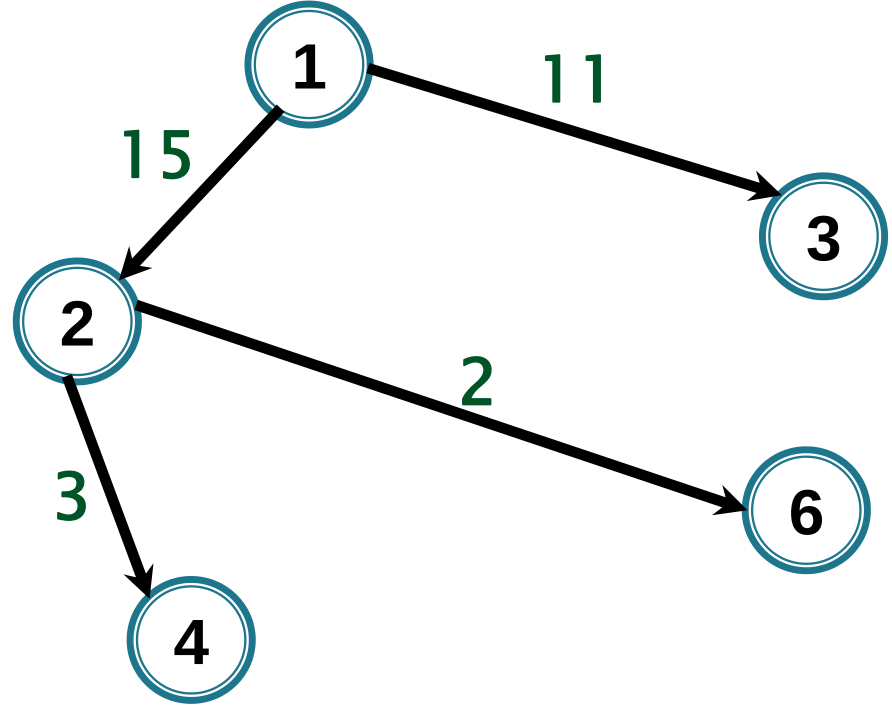
d/tata	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	19/3,	20/3]
Sel. 2:	[– ,	– ,	– ,	18/2,	19/3,	17/2]
Sel. 6:						



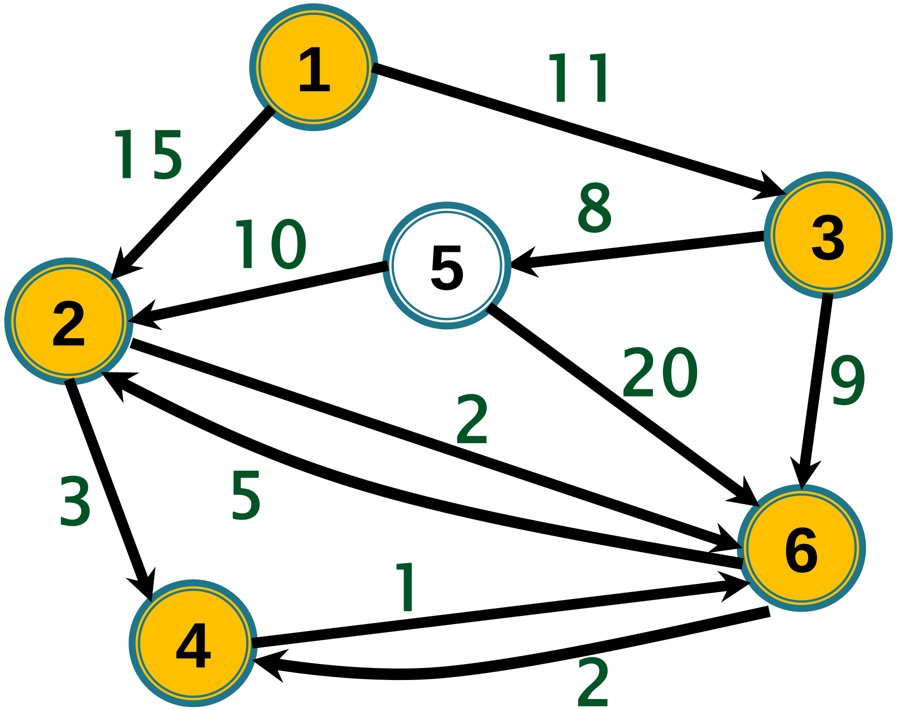


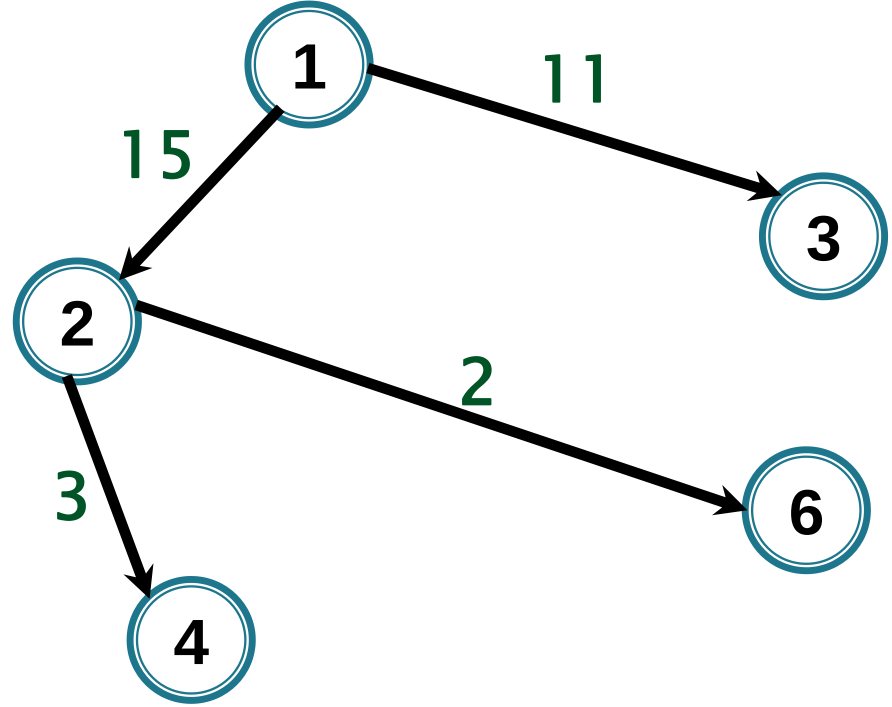
d/tata	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	19/3,	20/3]
Sel. 2:	[– ,	– ,	– ,	18/2,	19/3,	17/2]
Sel. 6:	[– ,	– ,	– ,	18/2,	19/3,	–]



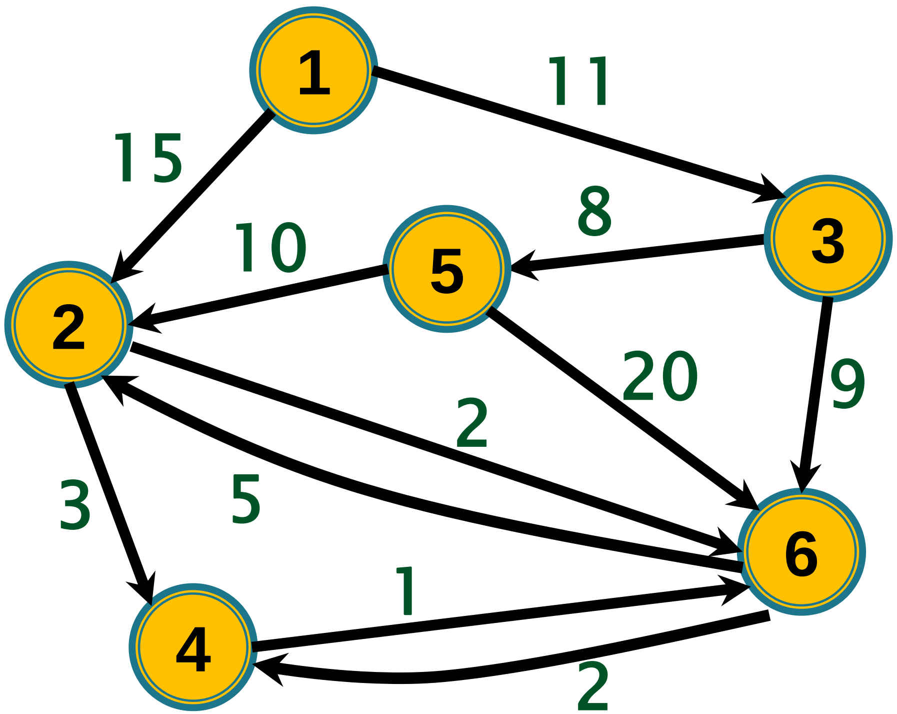


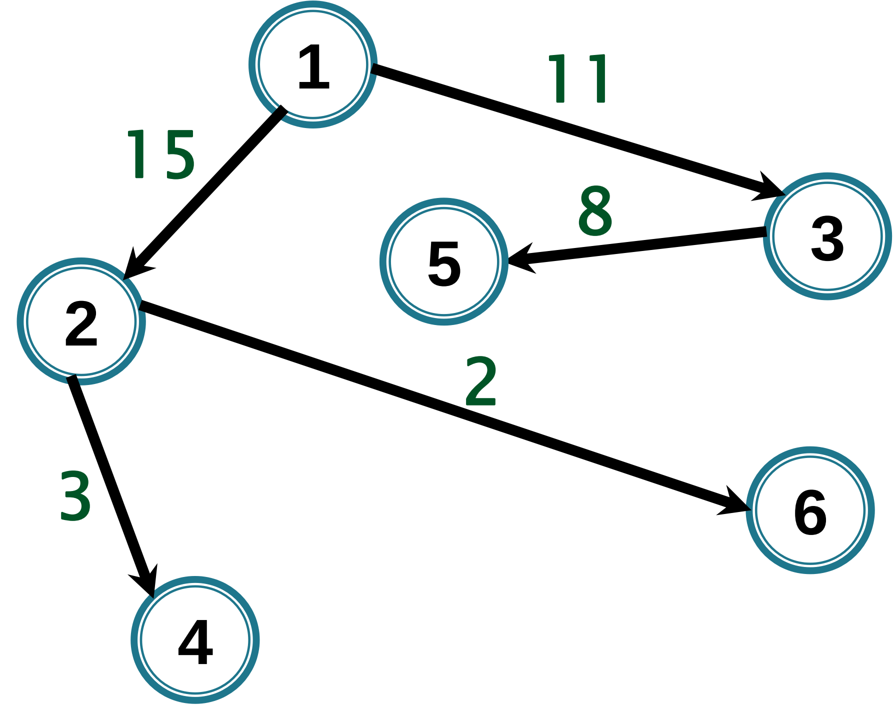
d/tata	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	19/3,	20/3]
Sel. 2:	[– ,	– ,	– ,	18/2,	19/3,	17/2]
Sel. 6:	[– ,	– ,	– ,	18/2,	19/3,	–]
Sel. 4:						



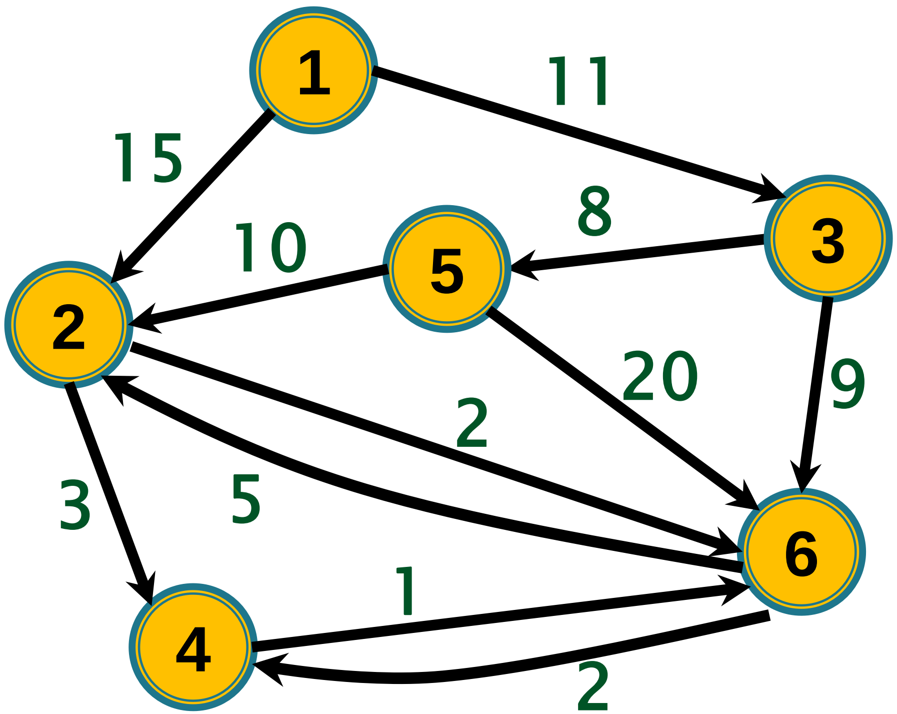


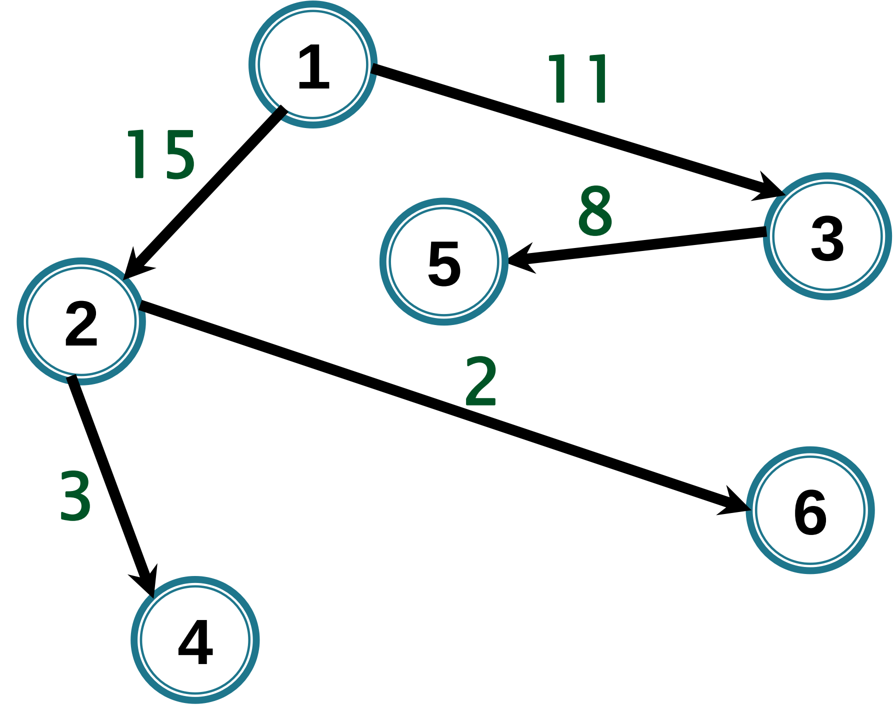
d/tata	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	19/3,	20/3]
Sel. 2:	[– ,	– ,	– ,	18/2,	19/3,	17/2]
Sel. 6:	[– ,	– ,	– ,	18/2,	19/3,	–]
Sel. 4:	[– ,	– ,	– ,	– ,	19/3,	–]



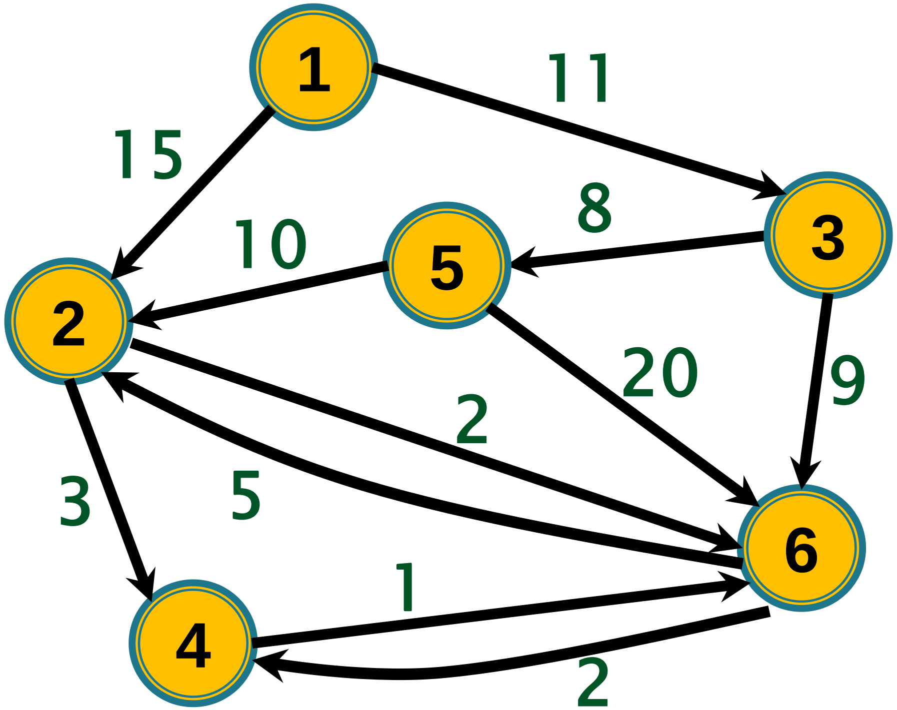


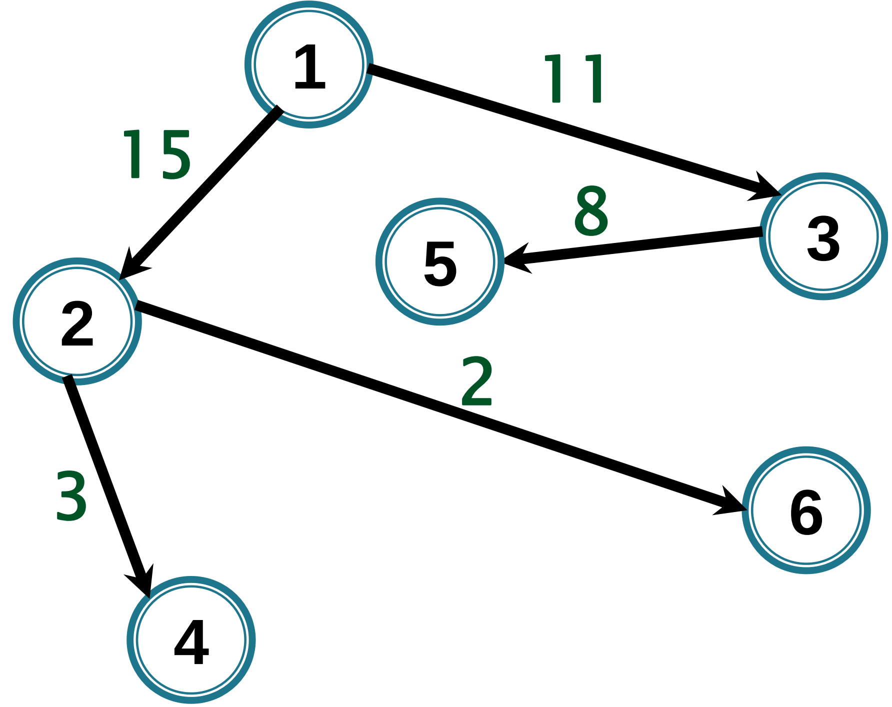
d/tata	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	19/3,	20/3]
Sel. 2:	[– ,	– ,	– ,	18/2,	19/3,	17/2]
Sel. 6:	[– ,	– ,	– ,	18/2,	19/3,	–]
Sel. 4:	[– ,	– ,	– ,	– ,	19/3,	–]
Sel. 5:						





d/tata	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	19/3,	20/3]
Sel. 2:	[– ,	– ,	– ,	18/2,	19/3,	17/2]
Sel. 6:	[– ,	– ,	– ,	18/2,	19/3,	–]
Sel. 4:	[– ,	– ,	– ,	– ,	19/3,	–]
Sel. 5:	[– ,	– ,	– ,	– ,	– ,	–]





d/tata	1	2	3	4	5	6
Soluție:	[0/0,	15/1,	11/1,	18/2,	19/3,	17/2]

Un drum minim de la 1 la 6?

Dijkstra

- **Observații.**

1. Dacă vârful u curent are eticheta d[u] = ∞, algoritmul se poate opri

2. Vectorul tata memorează arborele distanțelor față de s (vârfurile neaccesibile din s rămân cu tata 0)

Complexitate

Dijkstra(G, w, s)

```
  inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
   pentru fiecare u∈V executa
       d[u] = ∞; tata[u]=0
  d[s] = 0
  cat timp Q ≠ ∅ executa
       u = extrage vârf cu eticheta d minimă din Q
       pentru fiecare uv∈E executa
             daca d[u]+w(u,v)<d[v] atunci
                      d[v] = d[u]+w(u,v)
                      tata[v] = u
  scrie d, tata

  //scrie drum minim de la s la t un varf t dat folosind tata
```

Dijkstra

Cum memorăm Q = vârfurile încă neselectate?

Dijkstra

Q poate fi (ca și în cazul algoritmului lui Prim)

- **vector:**

  $Q[u] = 1$, **dacă u este selectat ($u \notin Q$)**

  $\quad\quad\quad 0$, **altfel ($u \in Q$)**

- **min-ansamblu (heap)**

Dijkstra

Complexitate – reprezentarea lui Q ca vector

$Q[u] = 1$, dacă u este selectat în V(T)

$\quad\quad 0$, altfel ($u \in Q$)

- Inițializare Q ->
- n * extragere vârf minim ->
- actualizare etichete vecini ->

Dijkstra

Complexitate – reprezentarea lui Q ca vector

$$Q[u] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } u \text{ este selectat în } V(T) \\ 0, & \text{altfel } (u \in Q) \end{cases}$$

- **Inițializare Q** -> O(n)
- **n * extragere vârf minim** ->
- **actualizare etichete vecini** ->

Dijkstra

Complexitate – reprezentarea lui Q ca vector

$$Q[u] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } u \text{ este selectat în } V(T) \\ 0, & \text{altfel } (u \in Q) \end{cases}$$

- **Inițializare Q** -> O(n)
- **n * extragere vârf minim** -> $O(n^2)$
- **actualizare etichete vecini** -> ______________

Dijkstra

Complexitate – reprezentarea lui Q ca vector

$$Q[u] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } u \text{ este selectat în } V(T) \\ 0, & \text{altfel } (u \in Q) \end{cases}$$

- **Inițializare Q** -> $O(n)$
- **n * extragere vârf minim** -> $O(n^2)$
- **actualizare etichete vecini** -> $O(m)$

Dijkstra

Complexitate – reprezentarea lui Q ca vector

Q[u] = 1, dacă u este selectat în V(T)

0, altfel ($u \in Q$)

- Inițializare Q -> $O(n)$
- n * extragere vârf minim -> $O(n^2)$
- actualizare etichete vecini -> $O(m)$

$O(n^2)$

Dijkstra

Complexitate **–** Q min-heap

- **Inițializare Q** ->
- **n * extragere vârf minim** ->
- **actualizare etichete vecini** ->

Dijkstra(G, w, s) - Q min-heap in raport cu d

```
pentru fiecare u∈V executa
    d[u] = ∞; tata[u]=0
d[s] = 0
Q = V //creare heap cu cheile din d
cat timp Q ≠ ∅ executa
    u = extrage_min(Q)
    pentru fiecare uv∈E executa
        daca d[u]+w(u,v)<d[v] atunci
            d[v] = d[u]+w(u,v)
            repara(Q,v)
            tata[v] = u
scrie d, tata

//scrie drum minim de la s la t un varf t dat folosind tata
```

Dijkstra

Complexitate – Q min-heap

- **Inițializare Q** -> O(n)
- **n * extragere vârf minim** -> O(n log n)
- **actualizare etichete vecini** ->

Dijkstra

Complexitate – Q min-heap

- **Inițializare Q** -> O(n)
- **n * extragere vârf minim** -> O(n log n)
- **actualizare etichete vecini** -> O(m log n)

!!+ actualizare Q

O(m log n)

Dijkstra

- **Observație.** **Pentru a determina drumul minim între două vârfuri s și t date putem folosi algoritmul lui Dijkstra cu următoarea modificare:**
  - dacă vârful u ales este chiar t, algoritmul se oprește;
  - Drumul de la s la t se afișează folosind vectorul tata (vezi BF)

Dijkstra

- **Dijkstra ≈ Prim** (versiunea $O(n^2)$/$O(m \log n)$)

Dijkstra

Algoritmul funcţionează şi pentru grafuri neorientate?

Dijkstra

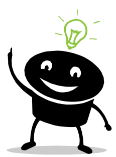
- De ce nu funcţionează corect algoritmul dacă avem arce cu cost negativ + exemplu?

- Cum putem rezolva problema dacă avem și arce de cost negativ?

Dijkstra

- De ce nu funcţionează corect algoritmul dacă avem arce cu cost negativ + exemplu?

- Cum putem rezolva problema dacă avem și arce de cost negativ?

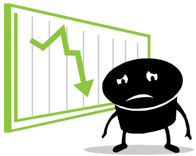


Putem aduna o constantă la costul fiecărui arc astfel încât toate arcele să aibă cost pozitiv. Drumul minim între 2 vârfuri rămâne la fel?

Dijkstra

- De ce nu funcţionează corect algoritmul dacă avem arce cu cost negativ + exemplu?

- Cum putem rezolva problema dacă avem şi arce de cost negativ?
  - Putem aduna o constantă la costul fiecărui arc astfel încât toate arcele să aibă cost pozitiv. Drumul minim între 2 vârfuri rămâne la fel?



Dijkstra

- Cum putem rezolva problema dacă avem și arce de cost negativ?
  - Algoritmul BELLMAN - FORD (suplimentar)
    - La un pas nu relaxăm arcele dintr-un vârf selectat u, ci din toate vârfurile (deci relaxăm toate arcele)

Dijkstra

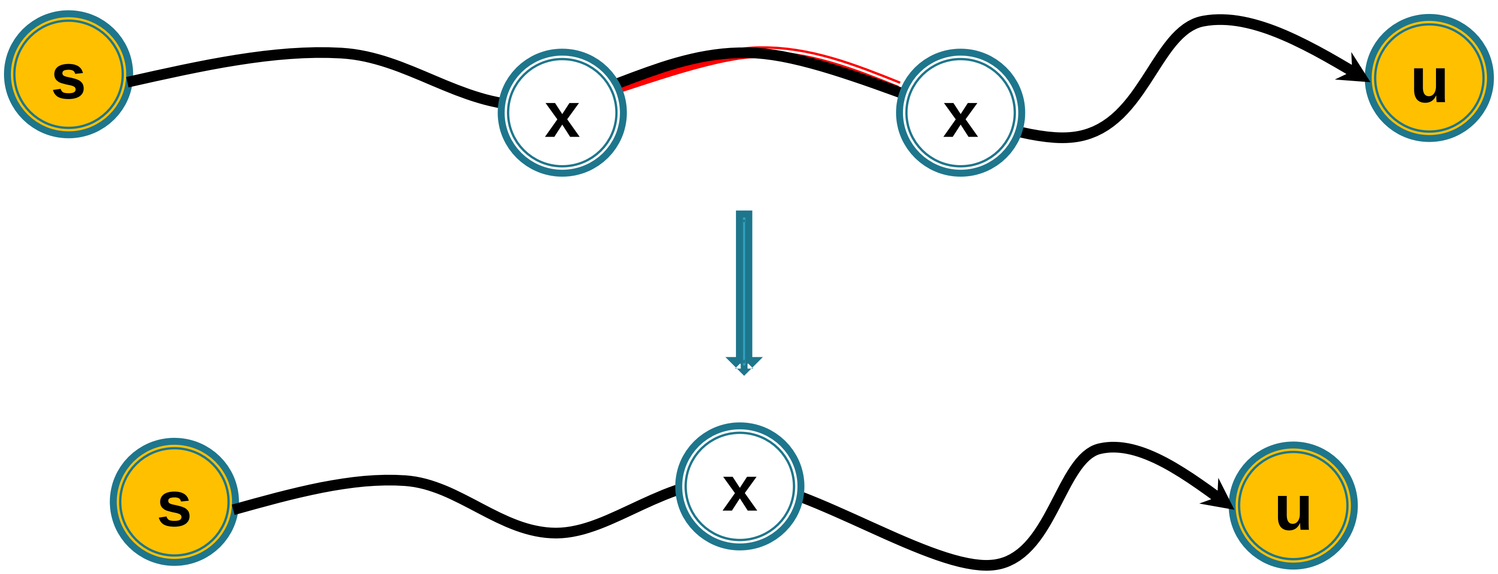
- Cum putem rezolva problema dacă avem și arce de cost negativ?
  - Algoritmul BELLMAN – FORD (suplimentar)
    - La un pas nu relaxăm arcele dintr-un vârf selectat u, ci din toate vârfurile (deci relaxăm toate arcele)

```
pentru i = 1,n-1 executa
   pentru fiecare uv∈E executa
         daca d[u]+w(u,v)<d[v] atunci
               d[v] = d[u]+w(u,v)
               tata[v] = u
```

Corectitudine

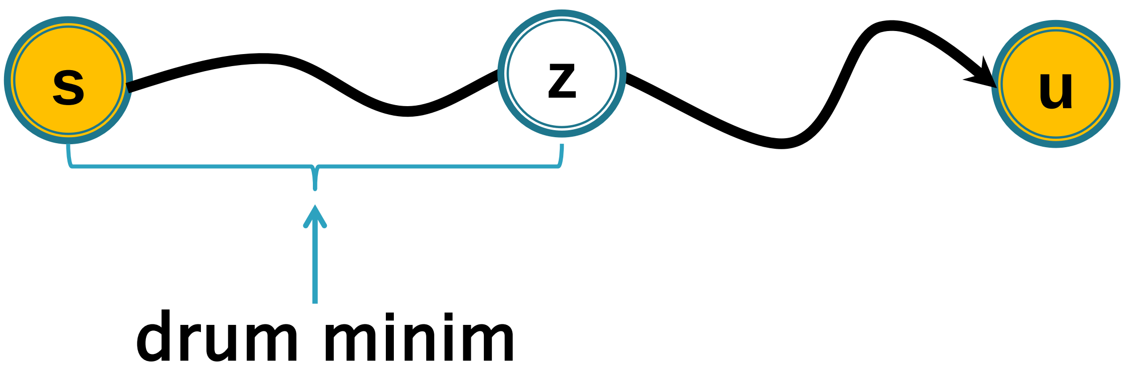
Corectitudine

- **Observația 1.** Dacă P este un drum minim de la s la u, atunci P este drum **elementar.**

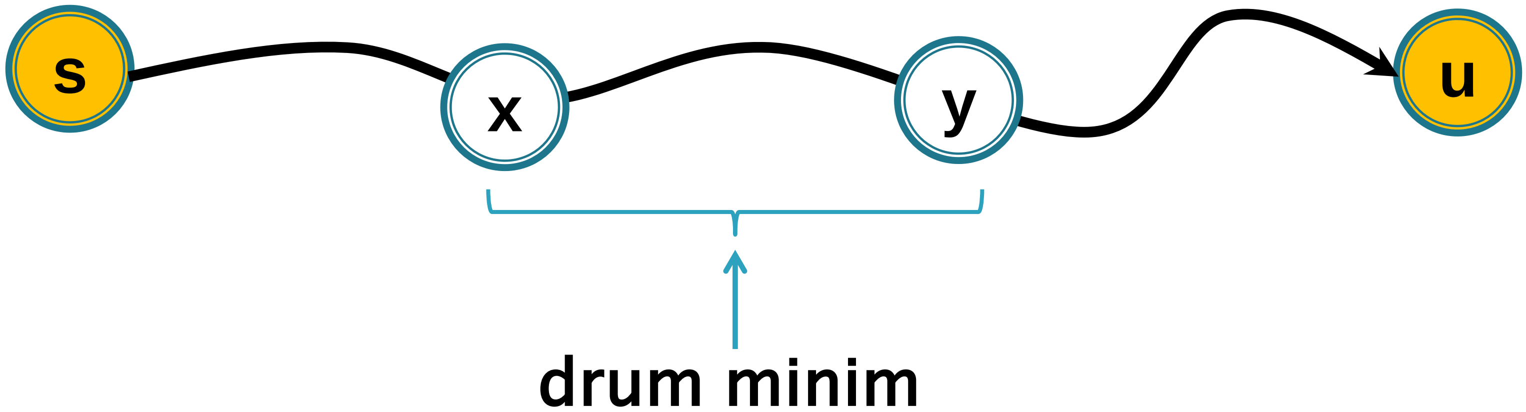


Corectitudine

- **Observația 2.** Dacă P este un drum minim de la s la u și z este un vârf al lui P, atunci subdrumul lui P de la s la z este drum minim de la s la z.



Corectitudine



Corectitudine

- **Lema 1.** Pentru orice $u \in V$, la orice pas al algoritmului Dijkstra avem:

  a) dacă $d[u] < \infty$, există un drum de la s la u în G de cost $d[u]$

  b) $d[u] \geq d(s,u)$

Corectitudine

- **Lema 1.** Pentru orice $u \in V$, la orice pas al algoritmului Dijkstra avem:

  a) dacă $d[u] < \infty$, există un drum de la s la u în G de cost $d[u]$

  b) $d[u] \geq d(s,u)$

- **Consecinţă.** Dacă la un pas al algoritmului avem pentru un vârf u relația $d[u] = d(s, u)$, atunci $d[u]$ nu se mai modifică până la final.

Corectitudine

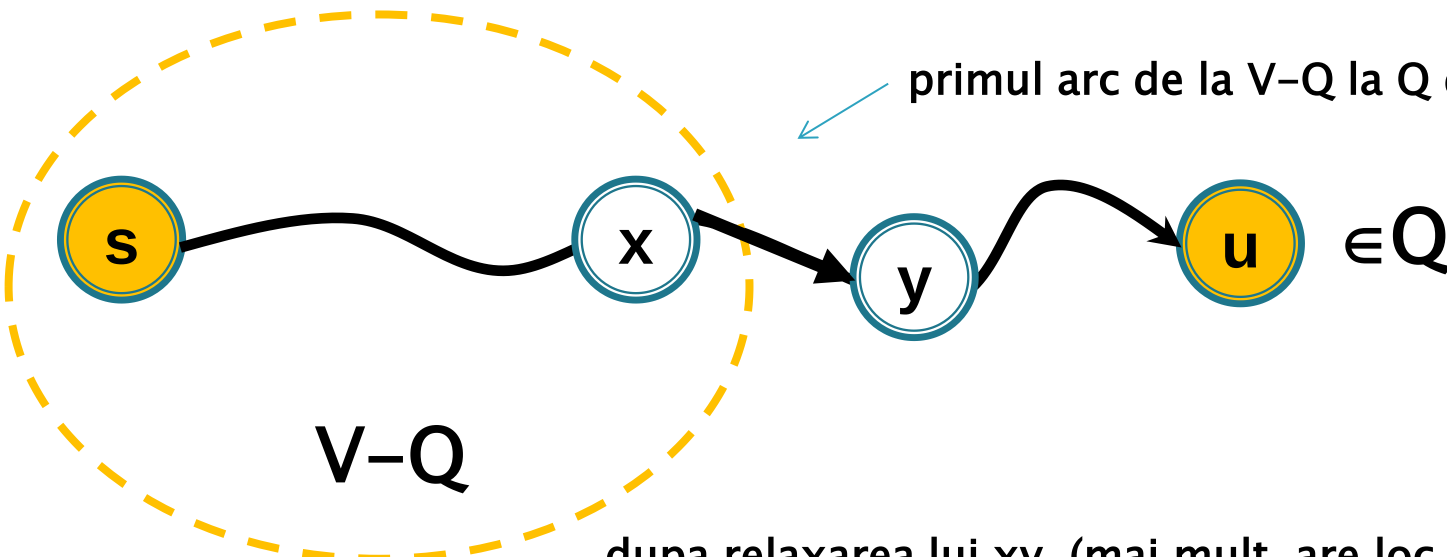
- **Propoziție.** Fie $G=(V, E, w)$ un graf orientat ponderat cu $w : E \to \mathbb{R}_+$ și $s \in V$ fixat. La finalul algoritmul lui Dijkstra avem:

  $d[u] = d(s, u)$ pentru orice $u \in V$

Corectitudine

- **Demonstraţie (idee).** Inducţie: d[x] = d(s, x) $\forall$ x $\notin$ Q (=deja selectat)
- Când un vârf u este selectat: fie P un s-u drum minim

primul arc de la V-Q la Q din P



dupa relaxarea lui xy (mai mult, are loc chiar egalitate: $d[y] = d(s,x) + w(x,y) = w\left(s \overset{P}{-} y\right) = d(s,y)$)

din modul în care este ales u

$$d[u] \le d[y] \le d[x] + w(x,y) = d(s,x) + w(x,y) = w(s \overset{P}{-} y)$$

$$\le w(P) \le d[u]$$

ipoteza de inductie pentru x

$$\Rightarrow d[u] = d[y] = w(P) = d(s,u)$$