curs
Fără întârziat

Elemente de teoria mulțimilor și a funcțiilor

Def 1: a) Spunem că mulțimile A și B sunt egale $A=B$ dacă au aceleași elemente

b) Spunem că mulț A este inclusă în mulț B $(A \subseteq B)$ dacă orice elem al mulț A este element al mulț B

Obs: $A=B \Leftrightarrow A \subseteq B$ și $B \subseteq A$

Def 2: Fie mulț A, B arbitrar alese

a) $\{x \mid x \in A$ și $x \notin B\} \overset{not}{=} A \setminus B$

se numește „diferența mulț A și B”

b) $\{x \mid x \in A$ și $x \in B\} \overset{not}{=} A \cap B$

c) $\{x \mid x \in A$ sau $x \in B\} \overset{not}{=} A \cup B$

d) Dacă $A \subseteq B$, mulțimea $B \setminus A \overset{not}{=} C_B A$

Definiția 3: Fie X o mulțime arbitrară.

Mulțimea $\{A \mid A \subseteq X\} \overset{not}{=} \mathcal{P}(X)$

s.n „mulțimea părților lui X”

Obs: $A \subseteq X \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(X)$

Def 4: Fie X, Y două mulț arbitrare. Se numește relație binară de la ~~mult~~ mulț X la mulț Y și are mulț nevidă $R = X \times Y$

<u>Notații</u>: $(x,y) \in R \overset{not}{\Longleftrightarrow} xRy$

Def 5: Se numește funcție de la mulț X la mulț Y (nevide), o relație binară „f" de la X la Y dacă $\forall x \in X$ $\exists!$ $y \in Y$ a.î. xfy

<u>Not</u>: $y \overset{not}{=} f(x)$ – „valoarea funcției f în x"

$$f \subseteq X \times Y \overset{not}{=} f: X \to Y \text{ sau } X \xrightarrow{f} Y$$

X se numește „domeniul" funcției f

Y s.n. „codomeniul" funcției f

Def 6: Fie X o mulț nevidă. Se numește familie de elemente din mulț X orice funcție $f: I \to X$ unde $I \neq \emptyset$. Mulțimea I se numește mulțimea indicilor familiei de elem.

<u>Notații</u>: $f: I \to X$

$$f(i) \overset{not}{=} x_i$$

$$f \overset{not}{=} (x_i)_{i \in I}$$

Obs: Fie $f: I \to X$ o fam. de elemente din mț X dacă $I = \mathbb{N}$ funcția $f: \mathbb{N} \to X$ s.n „şir de elemente din mulțimea X"

Not: $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$

Dacă I este mț finită fcția $f: I \to X$ s.n „familie finită de elem. din X"

$(I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \to (x_{i_j})_{1 \le j \le n})$

Def 7: S.n. „familie de părți ale mț X" orice fam. de elemente din mulțimea $\mathcal{P}(X)$

Notație $f: I \to \mathcal{P}(X)$ | $f \overset{not}{=} (A_i)_{i \in I}$

$f(i) = A_i$

Def 8: Fie X o mulțime şi (A_i) o fam de părți ale lui X

a) $\{x \in X \mid x \in A_i, \forall i \in I\} \overset{not}{=} \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ intersect fam. submț.

b) $\{x \in X \mid \exists i \in I, x \in A_i\} \overset{not}{=} \bigcup\limits_{i \in I} A_i$

Def 9: mț A şi B s.n „disjuncte" dacă $A \cap B = \emptyset$

Obs: 1) $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \iff x \notin A_i \ \forall i \in I$

2) $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I$ a.î. $x \notin A_i$

<u>TEOREMĂ</u>: (legile lui De Morgan)

Fie X o mt și $(A_i)_{i \in I}$ o fam de părți de mt X. Sunt adev. următoarele afirmații

a) $C_X(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} C_X A_i$

b) $C_X(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} C_X A_i$

<u>Def 10</u>: a) Fie $f: X \to Y$ o funcție și ~~A e submt~~ $\{y \in Y \mid \exists\, x \in X$ a.î. $y = f(x)\}$ ~~s.n~~ mt $\operatorname{im} f$ s.n ~~n~~ „imaginea funcției"

b) Fie $f: X \to Y$ o fct și $A \subseteq X$, A nevidă

$f|_A : A \to Y$, $f|_A(x) = f(x)$ se numește restricția funcției f la mt A

c) funcția $f: X \to Y$ s.n injectivă dacă din egalitatea $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = X_2$

$(\forall x_1 \neq x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

d) $f: X \to Y$ s.n surjectivă dacă $\forall y \in Y\ \exists x \in X$ a.î. $f(x) = y$ $(\operatorname{im} f = Y)$

e) Funcția $f: X \to Y$ se numește bij dacă e inj și surj

Obs: $f: X \to Y$ fct e bijectivă $\Rightarrow f^{-1}: Y \to X$

Def 11: Fie $f: X \to Y$ o funcție

a) pentru mulț $A \subseteq X$ mulț $\{y \in Y \mid \exists x \in A$ a.î. $y = f(x)\}$ $\overset{not}{=} f(A) \subseteq Y$ se numește imag. directă a mulț A prin funcția f

b) Pentru o mulț $B \subseteq Y$ mulțimea $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ $\overset{not}{=} f^{-1}(B) \subseteq X$ se numește preimaginea (imaginea inversă) a mulț B prin funcția f

Obs: a) Fie $f: X \to Y$ o funcție cu $A \subseteq X$ nevidă

$f(A) = \operatorname{im} f|_A$

b) $f: X \to Y$ o fcț

$f(X) = \operatorname{im} f$

$f(\emptyset) = \emptyset$

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset = \{x \in X \mid f(x) \in \emptyset\}$

$f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\} = X$

Ex: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = [x]$

$f(0, +\infty) = \mathbb{N}$

$f^{-1}((-1, 1)) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in (-1, 1)\}$