rs 1 Analiză

Spații Liniare Normate

X spațiu liniar peste corpul $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$u, v \in X \Rightarrow u+v \in X$

$\alpha \in K, u \in X \Rightarrow \alpha \cdot u \in X$

$(X,+)$ grup comutativ

0_X = elem. neutru al grupului $(X,+)$

$\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$

$(\alpha+\beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ $\quad \forall \alpha, \beta \in K$

$(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$ $\quad \forall u, v \in X$

Exemple:

1) $\mathbb{R}$ spațiu liniar real

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ corp

$(\mathbb{R},+)$ gr. comut

2) $n \geq 2$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \; \forall \; 1 \leq i \leq n\}$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \overset{def}{=} (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$

$\alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) \overset{def}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

$0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0)$

$\mathbb{R}^n$ spațiu liniar real

<u>Definiția</u>: O funcție $p: X \to \mathbb{R}_+$ se numește <u>normă</u> <u>pe X</u> dacă îndeplinește urm. condiții:

a) $p(0_x) = 0$

$$p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_x$$

b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$

subaditivă

c) $p(\alpha \cdot x) = |\alpha| \cdot p(x) \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in K$

<u>Notații</u>:

$p: X \to \mathbb{R}_+$ normă

$p(x) \overset{not}{=} \|x\| \in \mathbb{R}_+$

$p \overset{not}{=} \| \ \|$

<u>Definiția 2</u>: Se numește <u>spațiu liniar normat</u> un spațiu liniar real sau complex, pe care se definește cel puțin o normă $\| \ \|: X \to \mathbb{R}_+$

<u>Notație</u>: $(X, \| \ \|)$ - spațiu liniar real sau complex normat

Exemple de norme:

1) $| \ |: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$x \to |x| \in \mathbb{R}_+$ normă pe $\mathbb{R}$

2) $n \geq 2$

$\| \ \|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ norma euclidiană
norma uzuală a lui $\mathbb{R}^n$

3) $\| \ \|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ normă pe $\mathbb{R}^n$

4) $\| \ \|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ normă pe $\mathbb{R}^n$

Teorema 1

Orice spațiu linear normat $(X, \| \ \|)$ este spațiu metric.

Demonstrație: $\| \ \| : X \to \mathbb{R}_+$ normă

Definim funcția: $d : X^2 \to \mathbb{R}_+$ prin formula

$d(u,v) = \|u - v\| \geq 0 \quad \forall u, v \in X$
vectori

$d(u,v) = \|u - v\| = \|(-1)\cdot(v - u)\| = |-1| \cdot \|v - u\|$
$= \|v - u\| = d(v,u)$

$d(u,v) = 0 \Leftrightarrow \|u - v\| = 0 \Leftrightarrow u - v = 0_X \Leftrightarrow u = v$

$d(u,w) = \|u - w\| = \|(u - v) + (v - w)\| \leq \|u - v\| + \|v - w\|$
$= d(u,v) + d(v,w)$

d este distanță pe X (d se num. distanța generată de norma $\| \ \|$) $\square$

$\Rightarrow (X, d)$ spațiu metric

$$(X, \| \ \|) \xRightarrow{Th 1} (X, d) \Rightarrow (\cancel{X}, \mathcal{T}_d)$$

$\mathcal{T}_d \overset{not}{=} \mathcal{T}_{\| \ \|}$ topologia generată de norma $\| \ \|$

<u>NOTAȚIE</u>

$(X, \| \ \|)$ spațiu liniar normat

$u \in X$, $\alpha \in K^*$

$$\frac{u}{\alpha} \overset{not}{=} \frac{1}{\alpha} \cdot u$$

<u>Funcții derivabile</u>

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \| \ \|_X)$

<u>Definiția 1</u>: Funcția $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \| \ \|_X)$ este derivabilă în punctul $x_0 \in D \cap D'$ dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in X$

pct de acumulare

Notație: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{not.}{=} f'(x_0) \in X$ - derivata funcției

<u>Definiția 2</u>: Funcția $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \| \ \|_X)$ este derivabilă mulțimea $A \subseteq D \cap D'$ dacă f este derivabilă în orice pct din A

Exemplu:

$f:[0,1]\cup\{2\}\to(X,\|\ \|_X)$

$2\in$ izo $D\Rightarrow 2\notin D'\Rightarrow f$ nu este deriv în 2

Teorema 1 Orice funcție $f:D\subseteq\mathbb{R}\to(X,\|\ \|_X)$ deriv. într-un punct $x_0\in D\cap D'$ este continuă în x_0

Dem: $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in X$

Alegem $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din D a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$

Vrem să demonstrăm că ~~limită când~~ $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(x_0)$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=f'(x_0)$ (1)

$$0\le\|f(x_n)-f(x_0)\|=\left\|(x_n-x_0)\cdot\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right\|=$$

$$=|x_n-x_0|\cdot\left\|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right\|=$$

$$=|x_n-x_0|\cdot\left\|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}-f'(x_0)+f'(x_0)\right\|\le|x_n-x_0|\cdot$$

$$\cdot\left(\left\|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}-f'(x_0)\right\|+\|f'(x_0)\|\right)$$

$$\underbrace{0}_{\to 0}\le\underbrace{\|f(x_n)-f(x_0)\|}_{\to 0}\le\underbrace{\underbrace{|x_n-x_0|}_{\to 0}\cdot\left\|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}-f'(x_0)\right\|+\underbrace{|x_n-x_0|}_{\to 0}\cdot\|f'(x_0)\|}_{\to 0}$$

$\exists \lim_{n\to\infty} \|f(x_n) - f(x_0)\| = 0 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ (2')

Conform definiției cu șiruri, funcția f este continuă în x_0 $\square$

$n \geq 2$

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funcție vectorială

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$

$f_1, f_2, \dots, f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ componentele funcției vectoriale f

$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$

<u>Teorema 2:</u> O funcție vectorială $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ este derivabilă în $x_0 \in D \cap D'$ dacă și numai dacă $f_1, f_2, \dots, f_n$ sunt derivabile în x_0

În plus $f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \dots, f_n'(x_0))$

<u>Definiția 3:</u> O funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \|\ \|_X)$ s.n. derivabilă la dreapta în pctul $x_0 \in D \cap (D \cap (x_0, \infty))'$ dacă $\exists \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in X$

Analiză

Curs 2

Funcții derivabile

Definiția 1: O funcție $f = D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \| \|)$ se numește „derivată la stânga în punctul $x_0 \in D \cap (D \cap (-\infty, x_0))'$ dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{not}{=} f'_s(x_0) \in X$

Definiția 2:

O funcție $f: D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \| \|_X)$ s.n funcție derivabilă la dreapta în punctul $x_0 \in D \cap (D \cap (x_0, \infty))'$ dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{not}{=} f'_d(x_0)$

Observații:

1) $x_0 \in \overset{\circ}{D} \Rightarrow x \in (D \cap (-\infty, x_0))$ și $x \in (D \cap (x_0, \infty))$

2) $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in \overset{\circ}{D} \Leftrightarrow f$ este derivabilă la stânga și dreapta în x_0 și $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$

Funcții derivabile reale

Teorema 1: (operații cu funcții derivabile reale)

a) Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile în punctul $x_0 \in D \cap D'$

Atunci funcțiile $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\lambda f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt derivabile și $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- $(\lambda \cdot f(x_0))' = \lambda \cdot f'(x_0)$

În plus dacă $g(x) \neq 0 \ \forall x \in D$, atunci $\frac{f}{g} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă în x_0 și:

- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

b) Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \to E \subseteq \mathbb{R}$ și $g: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$ a.î. $y_0 = f(x_0) \in E \cap E'$. Dacă f este funcție derivabilă în x_0 și g este funcție derivabilă a.î. $y_0 = f(x_0)$ (pctele de acc. ale codomeniului), atunci $g \circ f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 și $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x)) \cdot f'(x_0)$

c) Fie I, J, două intervale din $\mathbb{R}$, $f: I \to J$ o funcție biject. strict monotonă. Dacă $\exists x_0 \in I$ a.î. f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) \neq 0$ atunci $f^{-1}: J \to I$ este derivabilă în $f(x_0)$ și $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Definiția 2: Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție

a) Elementul $x_0 \in D$ se numește punct de minim local pentru f dacă $\exists R > 0$ a.î. $\forall x \in D \cap (x_0 - R, x_0 + R)$ $f(x) \geq f(x_0)$

vecinătate

b) ——— " ——— se numește pct de minim global dacă $\forall x \in D$ avem $f(x) \geq f(x_0)$

c) ——— " ——— punct de maxim local pentru f dacă $\exists R > 0$ a.î. $\forall x \in D \cap (x_0 - R, x_0 + R)$ avem $f(x_0) \geq f(x)$

d) ——— " ——— punct de maxim global pentru f dacă $\forall x \in D$ avem $f(x_0) \geq f(x)$

TEOREMA LUI FERMAT: Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in \mathring{D}$ astfel încât x_0 este punct de extrem local pentru f și f este derivabilă în punctul x_0. Atunci $f'(x_0) = 0$

Demonstrație: $x_0 \in \mathring{D} \Rightarrow \exists R_1 > 0$ a.î. $x_0 \in (x_0 - R_1, x_0 + R_1) \subseteq D$

Demonstrăm că x_0 este punct de maxim local pentru f $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists R_2 > 0$ a.î. $\forall x \in D \cap (x_0 - R_2, x_0 + R_2)$ avem $f(x) \leq f(x_0)$

Alegem $R = \min\{R_1, R_2\} \Rightarrow (x_0 - R, x+R) \subseteq D$ $\forall x \in (x_0 - R, x+R)$ avem $f(x) \le f(x_0)$

$x_0 \in \overset{\circ}{D}$
f derivabilă în x_0 $\Big\} \Rightarrow \exists f'_s(x_0), \exists f'_d(x_0)$ și $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$ ①

$$x \in (x_0 - R, x_0 + R) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} \ge 0 \overset{\text{(Trecem la limită)}}{\Rightarrow} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$$

$$x \in (x_0 - R, x_0 + R) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \Leftrightarrow \quad f'_s(x_0) \ge 0 \ ②$$

$\Leftrightarrow f'_d(x_0) \le 0$ ③

Din ①②③ $\Rightarrow \underline{f'(x_0) = 0}$

Analog dacă x_0 este punct de minim □

Observație: $I \subseteq \mathbb{R}$ interval și $\exists\, a, b \in I$, $a \ne b$ $\Rightarrow I \subseteq I'$

TEOREMA LUI ROLLE: Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, o funcție continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) și $f(a) = f(b)$. Există $c \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) = 0$

Demonstrație: $[a,b]$ mulțime compactă
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$ $\Rightarrow$ f este mărginită și își atinge marginile

$\exists m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x) \Rightarrow \exists u \in [a,b]$ a.î. $f(u) = m$

$\exists M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x) \Rightarrow \exists v \in [a,b]$ a.î. $f(v) = M$

$f(u) \le f(v)$

Se disting următoarele cazuri

$u, v = \{a, b\}$
$f(u) \le f(v)$
$f(a) = f(b)$ $\Rightarrow M = m \Rightarrow f$ este funcție constantă
$f'(c) = 0$ $\forall c \in (a,b)$

Cazul II

$u \in \{a,b\}$

$v \in (a,b) = \overset{\circ}{[a,b]}$

$f(x) \le f(v)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow v$ punct de maxim global

f derivabilă în v

$\xRightarrow{\text{Th. Fermat}} f'(v) = 0$

c din Th $= v$

Cazul III

$v \in \{a,b\}$

$u \in (a,b) = \overset{\circ}{[a,b]}$

$f(x) \ge f(u)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow u$ punct de minim global pt f

f derivabilă în u

$\xRightarrow{\text{Th. Fermat}} f'(u) = 0$

c din Th. e u

Cazul IV

$u, v \in (a,b) = \overset{\circ}{[a,b]}$

$f(u) \le f(x) \le f(v)\ \forall x \in [a,b]$

f derivabilă în u

f derivabilă în v

$\xRightarrow{\text{Th. Fermat}} f'(u) = f'(v) = 0$

c_1 din Th. $= u$.

c_2 din Th. $= v$

$\square$

TEOREMA LUI LAGRANGE

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b)

Atunci $\exists\, c \in (a,b)$ astfel încât $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Demonstrație: Se consideră funcția $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \alpha$

g derivabilă pe (a,b)

$g(a) = g(b) \Leftrightarrow f(a) - \alpha \cdot a = f(b) - \alpha \cdot b \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$

Aplicăm th. ROLLE pt fcția $g \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ a.î. $g'(c) = 0$

COROLARE: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție

1) Dc. f este derivabilă pe I și $f'(x)=0$ $\forall x \in I$ atunci f este funcție continuă

2) Presupunem că f este derivabilă pe I
Dacă $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ atunci f este fcție crescătoare

3) Presupunem că f este funcție continuă pe I, derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$. Dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) \in \mathbb{R}'$, atunci f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$

4) Presupunem că f este deriv. pe I și că $\exists M > 0$ a.î $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in I$. Atunci $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x-y|$ $\forall x, y \in I$

Definiția 3:

a) o funcție $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, elementul $u \in D$ s.n „punct fix" pt f dacă $f(u) = u$

b) Funcția $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.n „contracție" dacă $\exists\ 0<M<1$ a.î $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ $\forall x, y \in D$

Exemple: $f: I \to \mathbb{R}$ funcție derivabilă pe I
$\exists\ 0<M<1$ a.î

Principiul Contracțiilor

Fie $D = \bar{D} \subseteq \mathbb{R}$. Orice contracție $f: D \to \mathbb{R}$ are un unic punct fix $u \in D$

Construcția lui u

1) Alegem $x_0 \in D$

2) Construim şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care are elemente în D prin relaţia de recurenţă $x_{n+1} = f(x_n)\ \forall n\in\mathbb{N}$

3) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent

Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = u \in D$

$f(u) = u$

u este unicul pct fix al lui f

4) Evaluarea lui u

factorul de eroare (cred)

$$|x_n - u| \leq \frac{M^n}{1-M}|x_1 - x_0|\ \forall n\in\mathbb{N}$$