Algoritmica Grafurilor

Ruxandra Marinescu – Ghemeci

verman@fmi.unibuc.ro

Obiectiv general

- Însușirea principalelor noțiuni și rezultate legate de de teoria grafurilor, familiarizarea cu algoritmi fundamentali de grafuri și aplicații ale acestora

Obiective specifice

- **principalelor noțiuni și rezultate + utilitatea acestora**
- **modelarea** problemelor cu ajutorul grafurilor + **elaborarea de algoritmi** de grafuri pentru rezolvarea acestora
- justificare a **corectitudinii** algoritmilor propuși + estimarea eficienței acestora
- **implementarea** eficientă a algoritmilor

Motivații

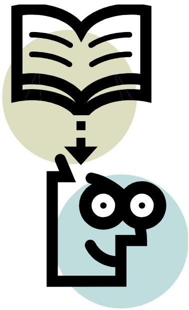
- domeniu fundamental
- numeroase aplicații în diverse domenii
  - procesarea imaginilor, bioinformatică, rețele, baze de date, proiectare, strategii
- instrumente pentru a dezvolta algoritmi eficienți
- cursuri viitoare
- interviuri

Resurse

- http://moodle.fmi.unibuc.ro/course/

- Consultații
  - verman@fmi.unibuc.ro
  - sala 318 (catedra de informatică)

Bibliografie



BIBLIOGRAFIE - curs

- Douglas B. West, **Introduction to Graph Theory**, Prentice Hall 1996, 2001
- J.A. Bondy, U.S.R Murty – **Graph theory with applications**, The Macmillan Press 1976 / Springer 2008
- Dragoș-Radu Popescu, **Combinatorică şi teoria grafurilor**, Editura Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Bucureşti, 2005.

BIBLIOGRAFIE – algoritmi + laborator

- Jon Kleinberg, Éva Tardos, **Algorithm Design**, Addison-Wesley 2005 http://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos/
- T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.R. Rivest – **Introducere in algoritmi**, MIT Press, trad. Computer Libris Agora
- H. Georgescu – **Tehnici de programare**, Editura Universităţii din Bucureşti, 2005

BIBLIOGRAFIE – curs + seminar

- Dragoș-Radu Popescu, R. Marinescu-Ghemeci, **Combinatorică şi teoria grafurilor prin exerciții și probleme**, Editura Matrixrom, 2014

- Ioan Tomescu, **Probleme de combinatorica si teoria grafurilor/ Problems in Combinatorics and Graph Theory**

BIBLIOGRAFIE

- **coursera.org**
- infoarena.ro …

Evaluare

Evaluare

- 2 puncte laborator
  - Teme la laborator + acasă

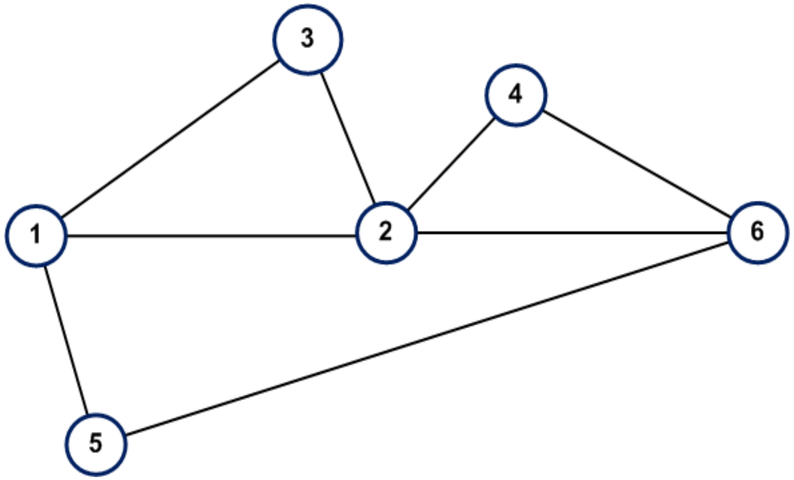
- 8 puncte examen scris
  - Subiecte din curs + seminar + laborator

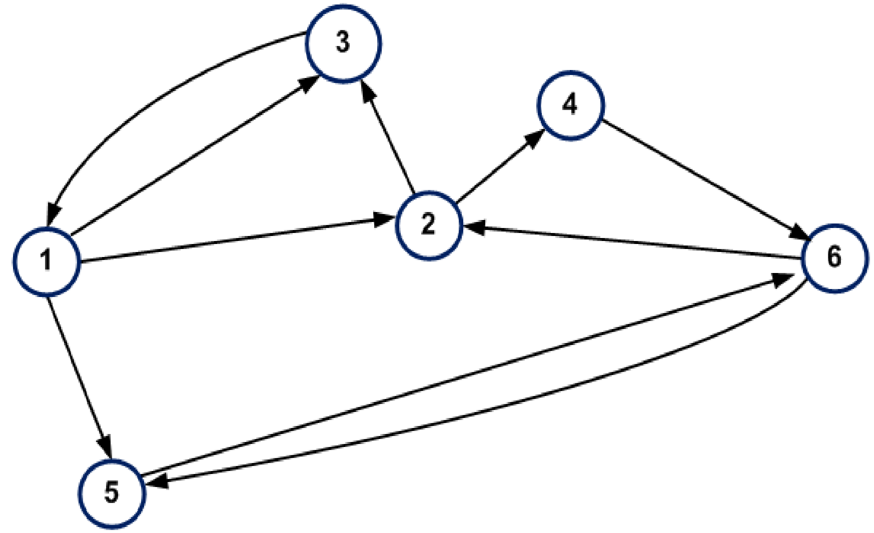
Programa

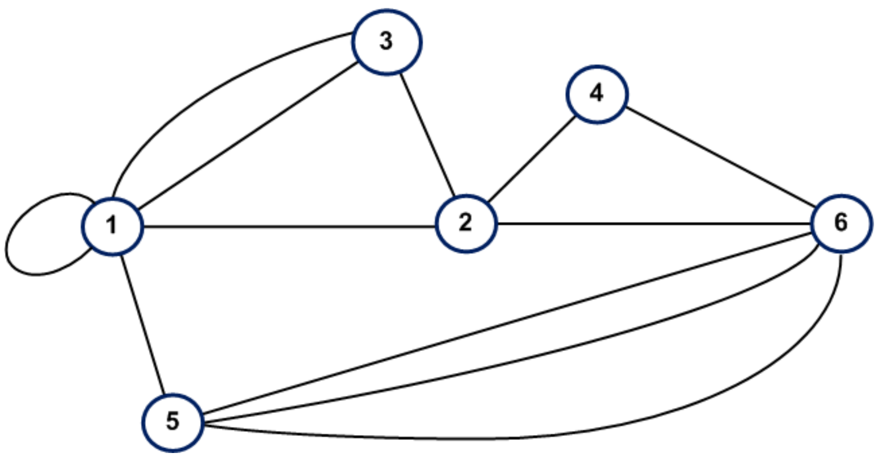
Programa

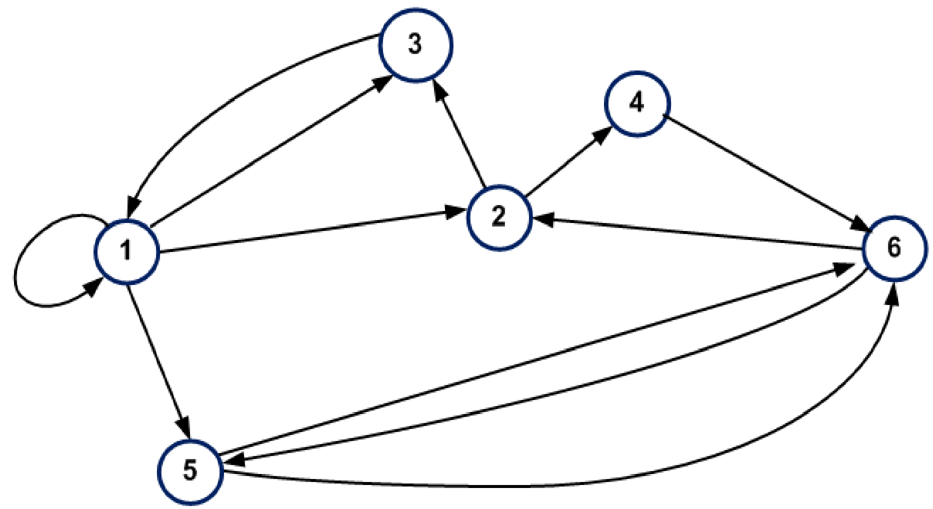
- Secvenţe de grade
- Conectivitate
- Arbori, arbori parţiali de cost minim
- Drumuri minime
- Fluxuri în reţele de transport
- Cuplaje
- Grafuri hamiltoniene
- Grafuri euleriene
- Grafuri planare

Graf + Multigraf



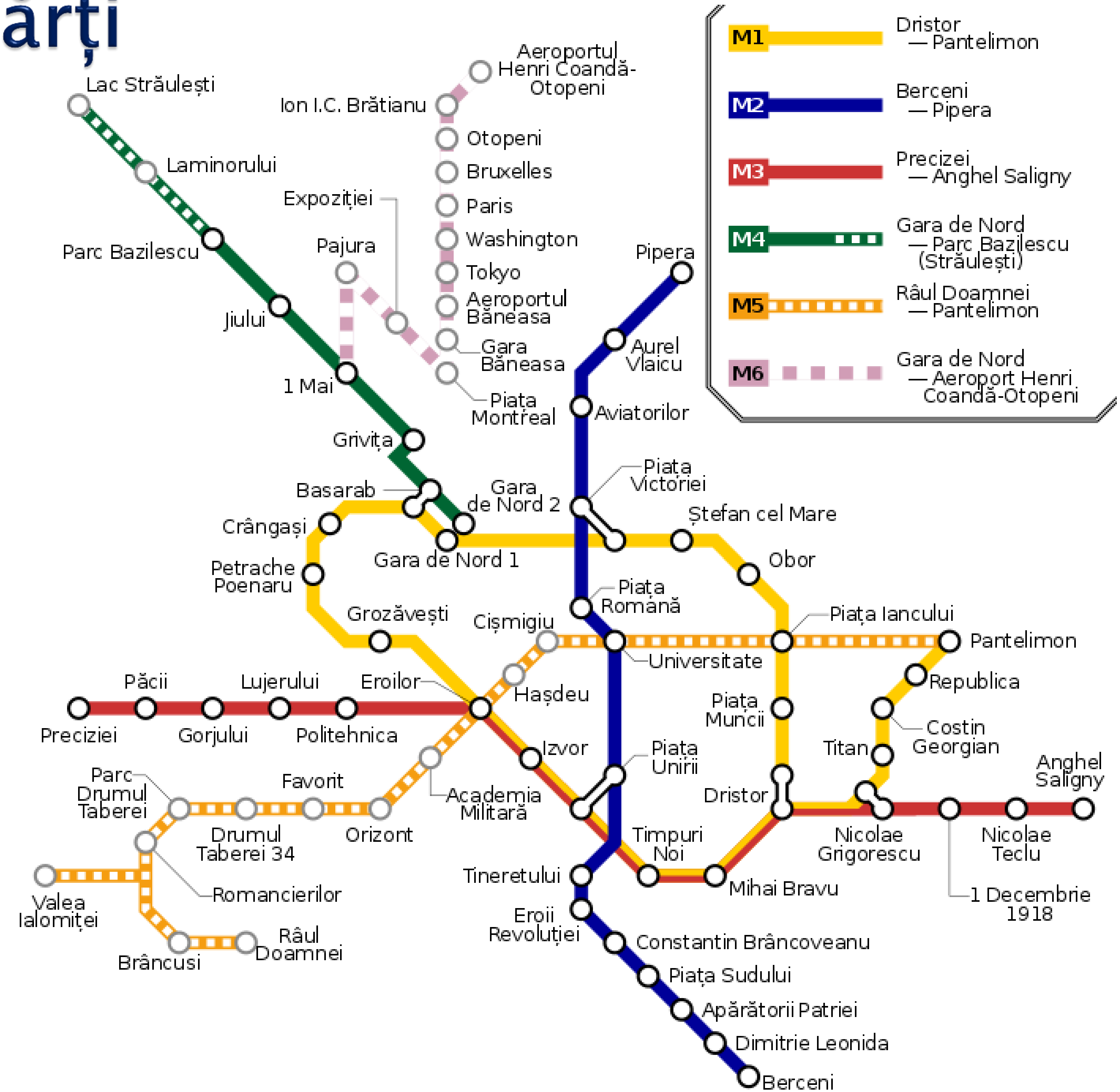






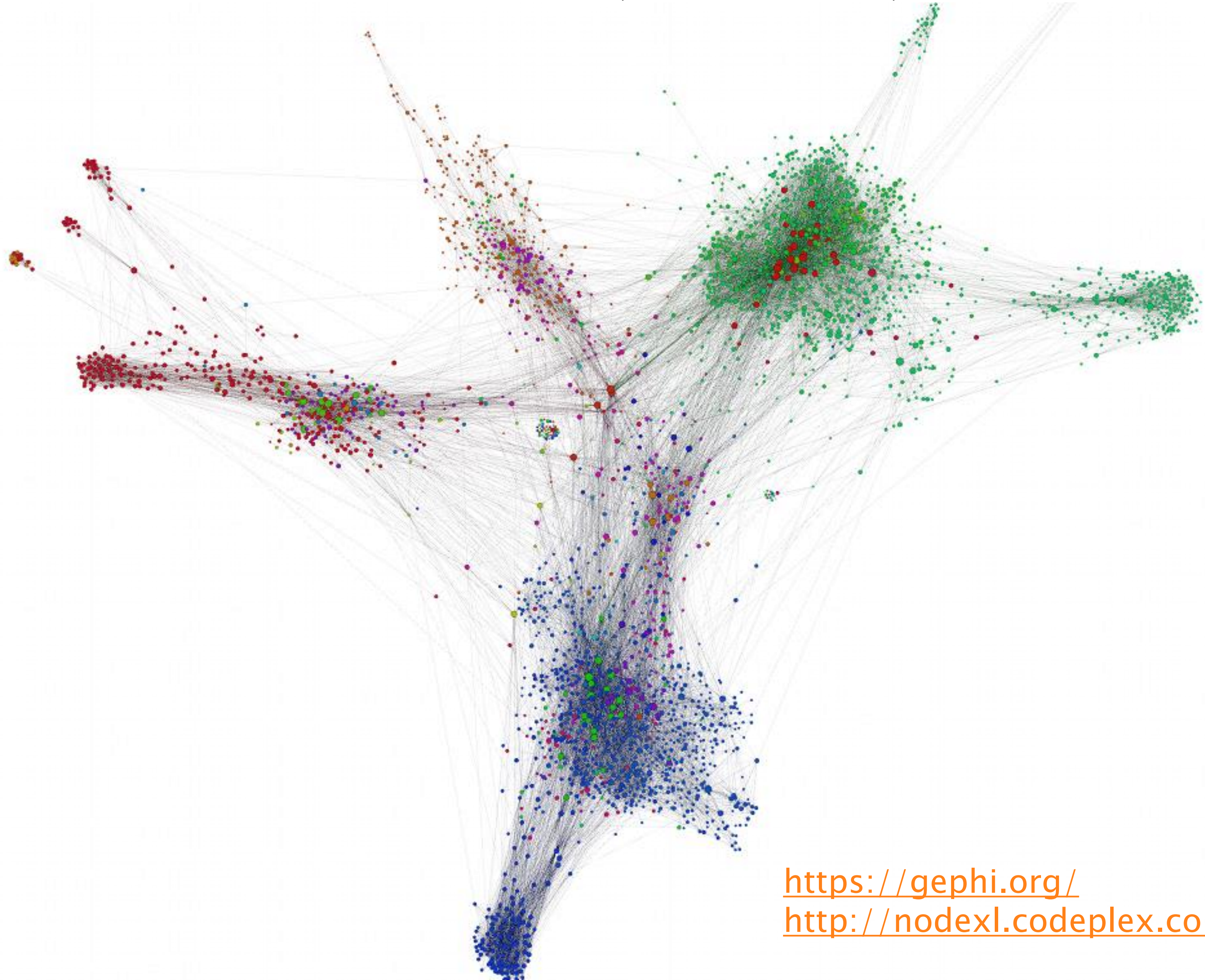
Aplicații

Rețele, hărți



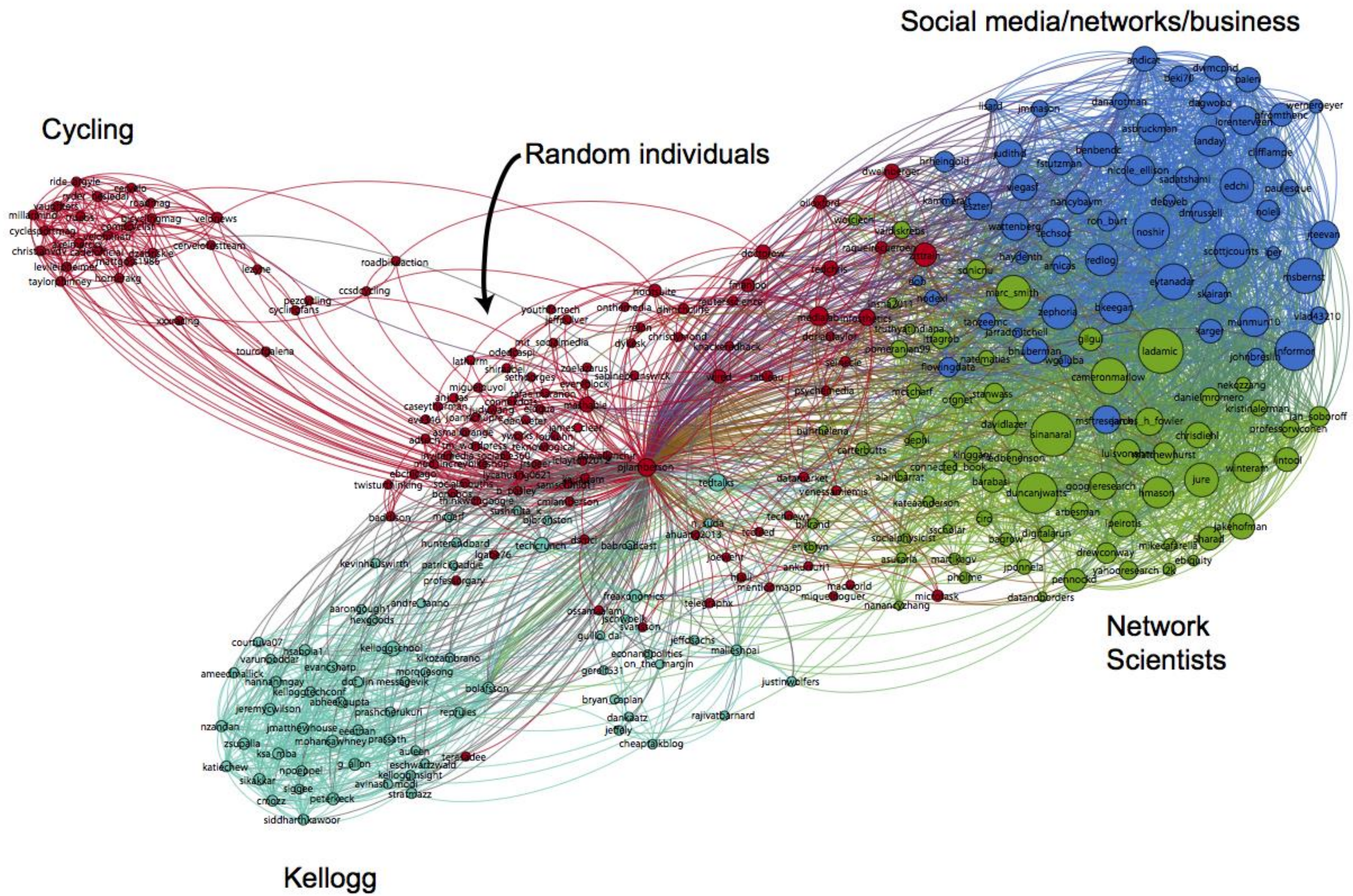
Rețele sociale

- Softuri pentru vizualizarea și analiza rețelelor sociale



https://gephi.org/
http://nodexl.codeplex.com/

Rețele sociale



http://social-dynamics.org/twitter-network-data/

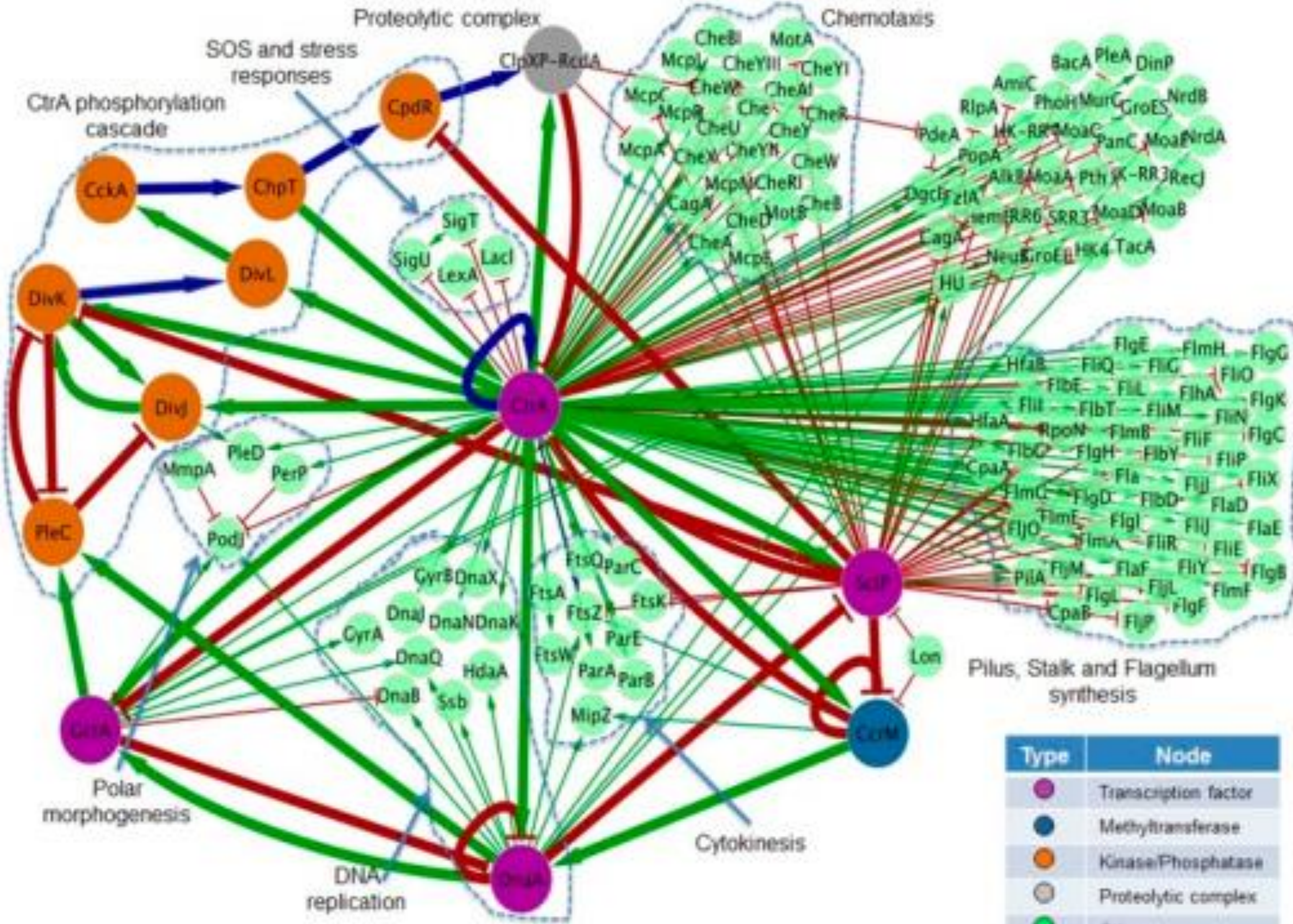
Bioinformatică

- grafuri de interacțiuni gene/proteine

http://domaingraph.bioinf.mpi-inf.mpg.de/docu/dg_network.php

- clustering
- grafuri de intersecție, grafuri De Bruijn
- arbori filogenetici

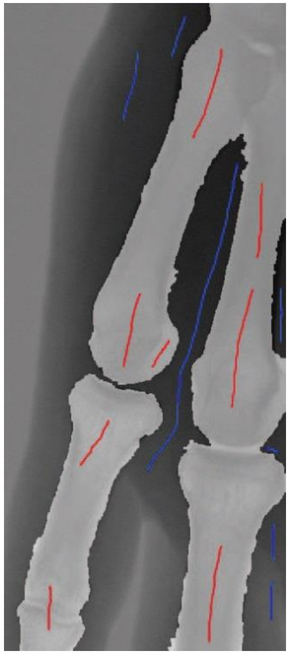
Bioinformatică



https://openi.nlm.nih.gov/detailedresult.php?img=PMC4219702_pone.0111116.g002&req=4

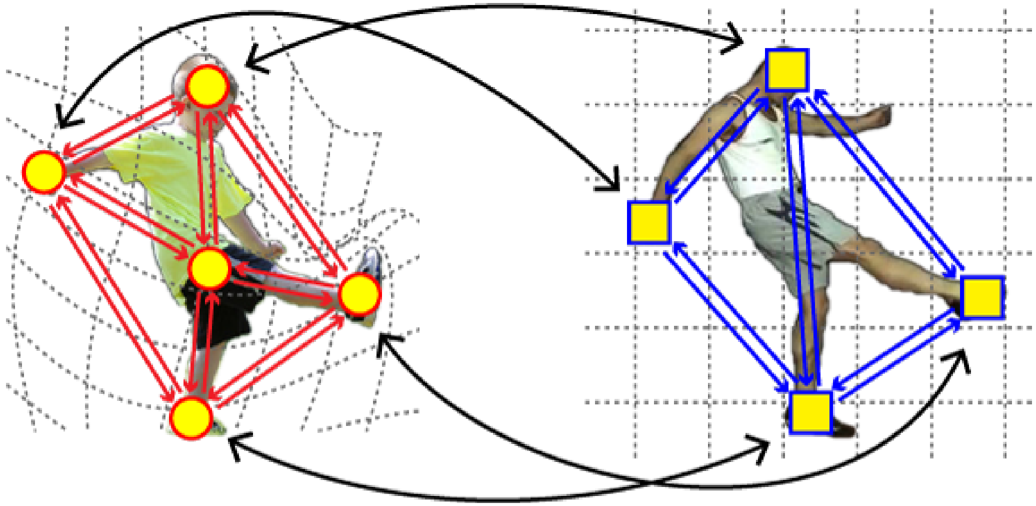
Image segmentation

- tăietura minimă – fluxuri în rețele de transport
- medicină

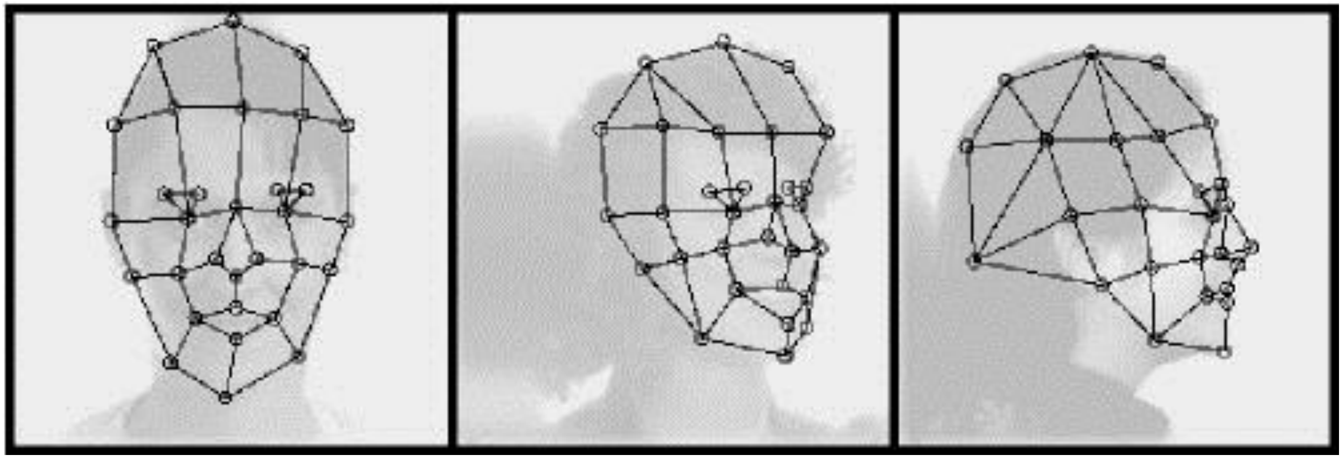


Spatially Varying Color Distributions for Interactive Multi-Label Segmentation (C. Nieuwenhuis, D. Cremers), In IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, volume 35, 2013

Computer vision



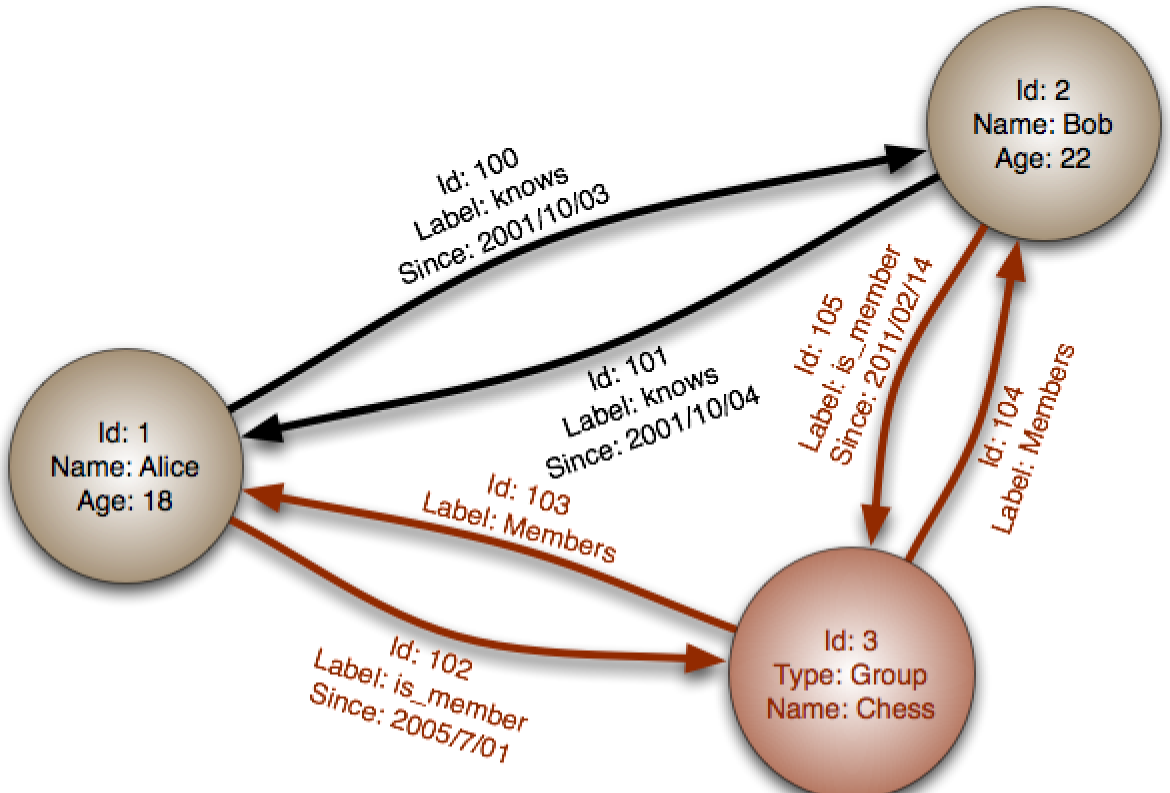
F. Zhou and F. De la Torre, Deformable Graph Matching, IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (**CVPR**), 2013 http://www.f-zhou.com/gm/2013_CVPR_DGM.pdf



https://www.ini.rub.de/PEOPLE/wiskott/Projects/EGMFaceRecognition.html

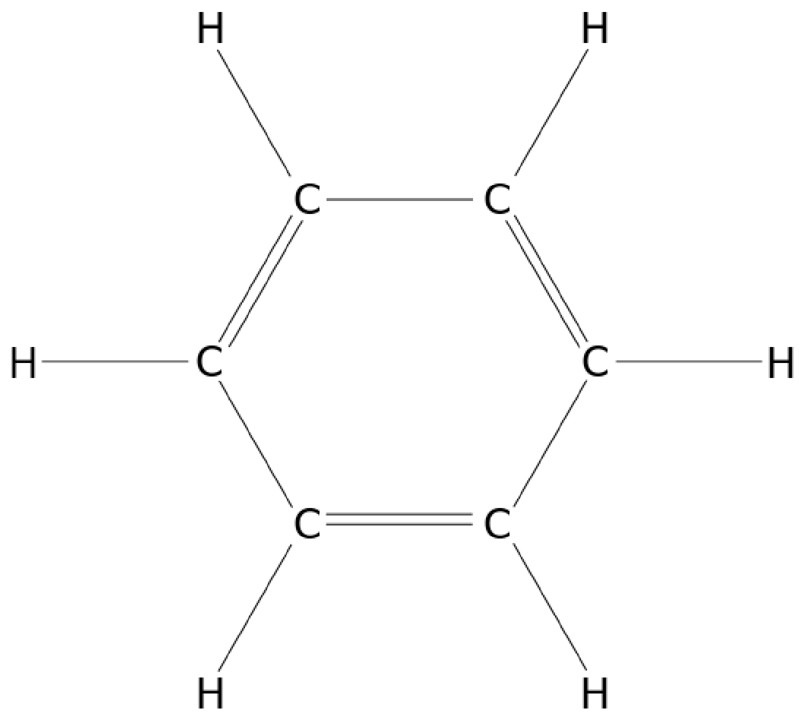
Baze de date

- Graph database
  - Neo4J https://neo4j.com/



https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_database

- Graf ← “notaţie grafică” din chimie
  - J. Silvester, 1878



Chimie

- indici topologici (Wiener, Randic…)
- izomorfism, graf de interacțiuni…

  Danail Bonchev and D.H. Rouvray, eds., *Chemical Graph Theory: Introduction and Fundamentals*, Taylor and Francis, 1991

Matematică

- **Grafuri asociate grupurilor**
  - Graful Cayley

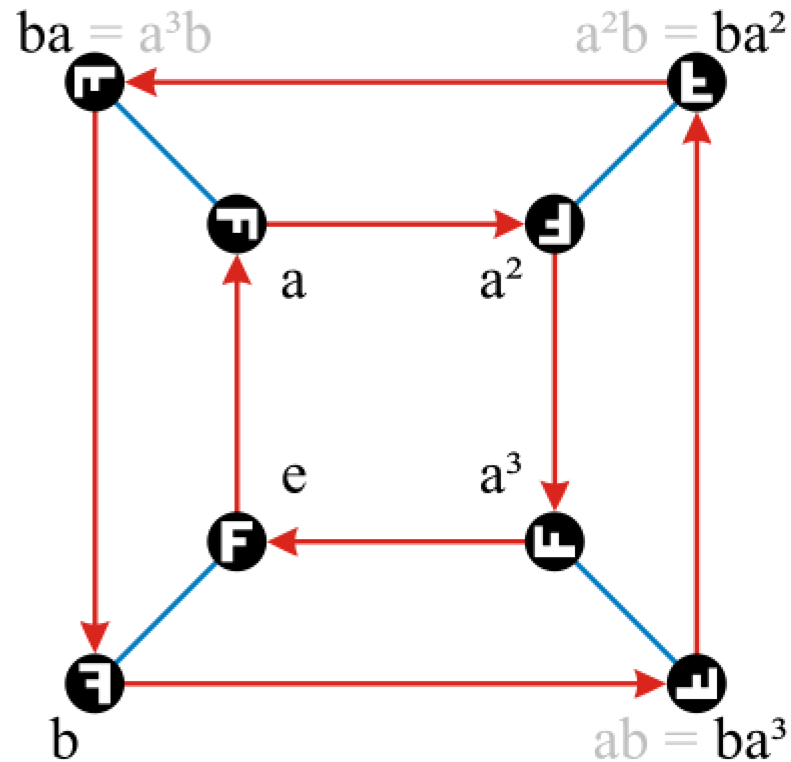
Grupul diedral D_4

$$\langle a, b \mid a^4=b^2=e,\ ab=ba^3 \rangle$$

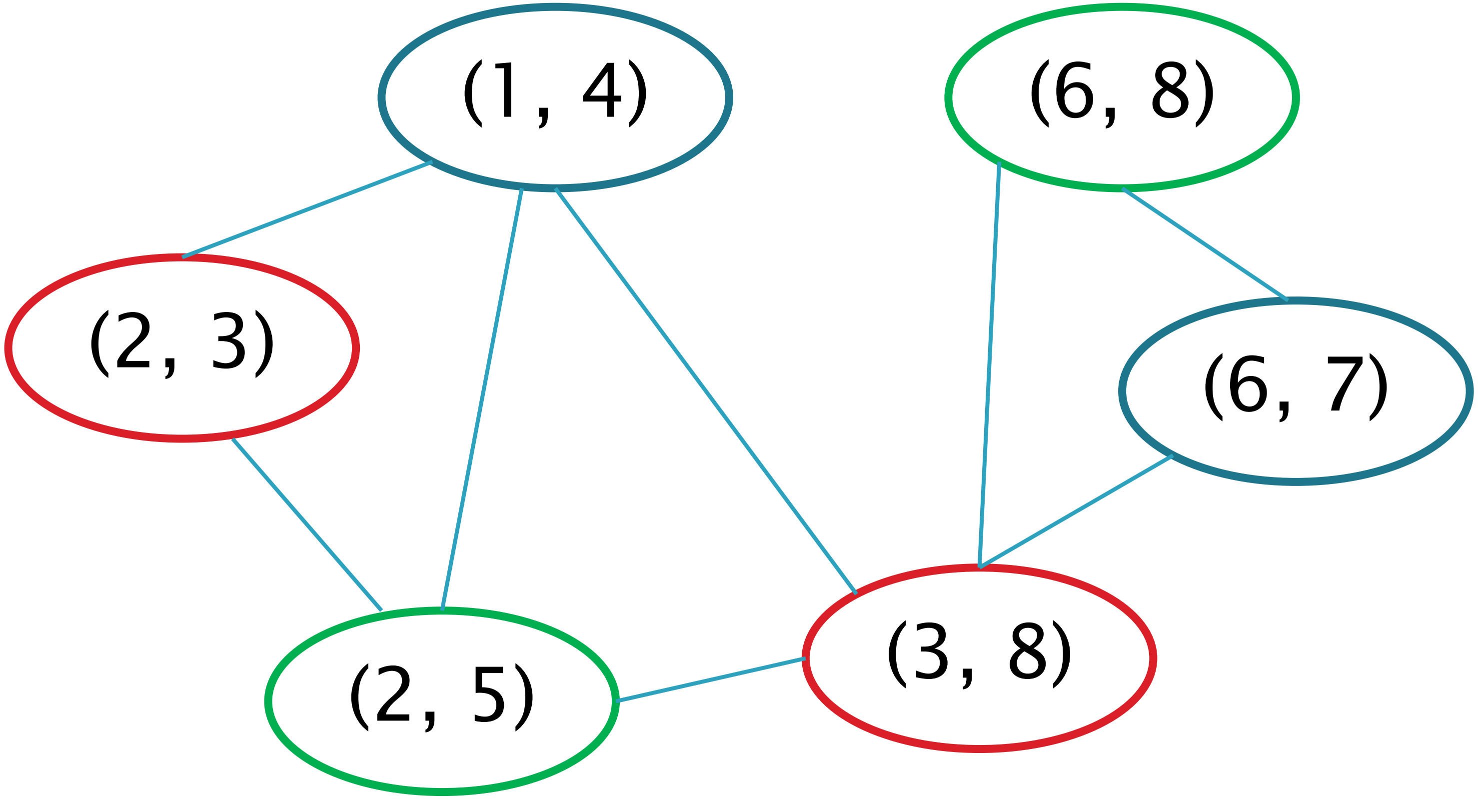
a $\longrightarrow$

b $\longrightarrow$

$\rightleftarrows \;\equiv\;$ ——



proprietăți graf $\rightleftarrows$ proprietăți grup



Minim 3 submulțimi disjuncte (resurse)

(1,4), (6,7)

(2, 3), (3,8)

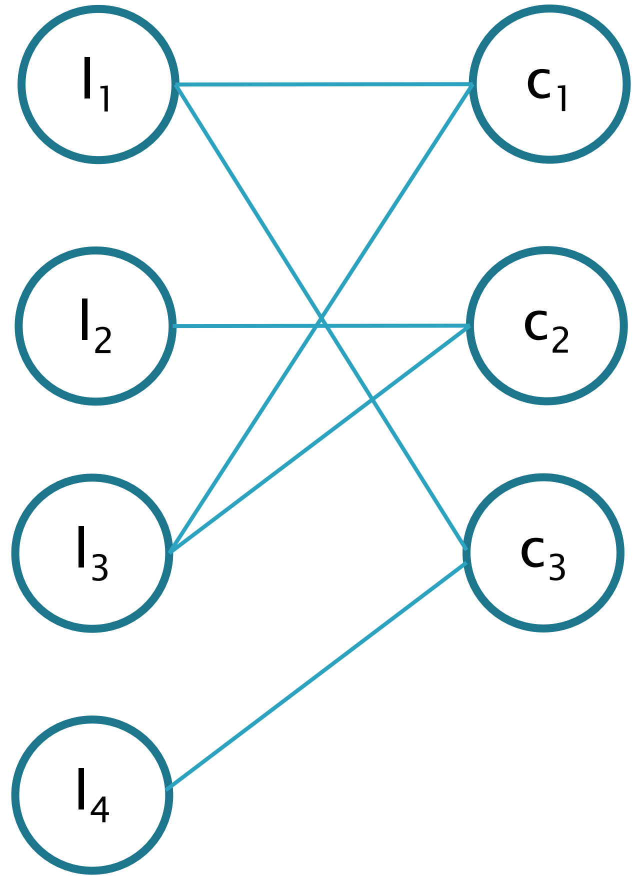
(2,5), (6,8)

Alte aplicații

- Demonstrarea unor rezultate matematice
  - Matrice -> graf
  - Diagonală/ Matrice de permutări – cuplaj

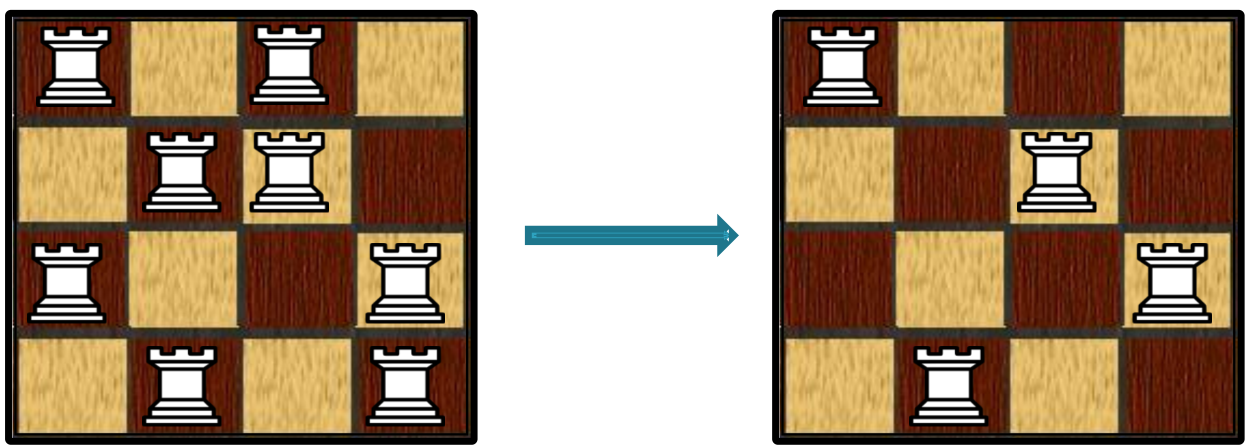
Alte aplicații

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



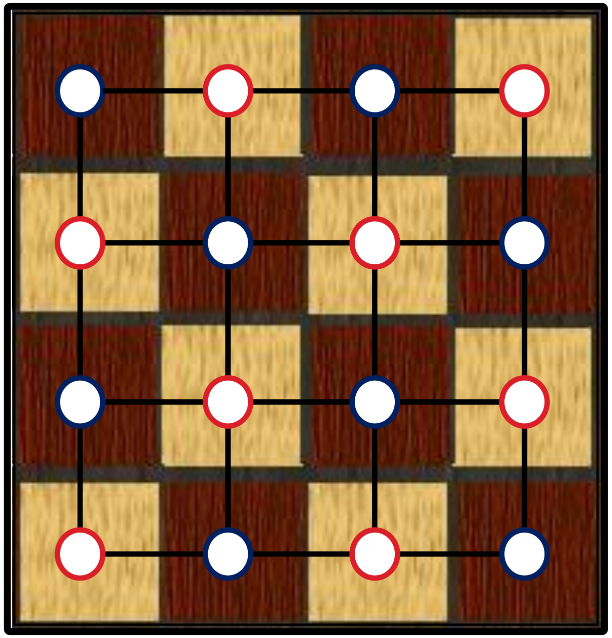
Problemă

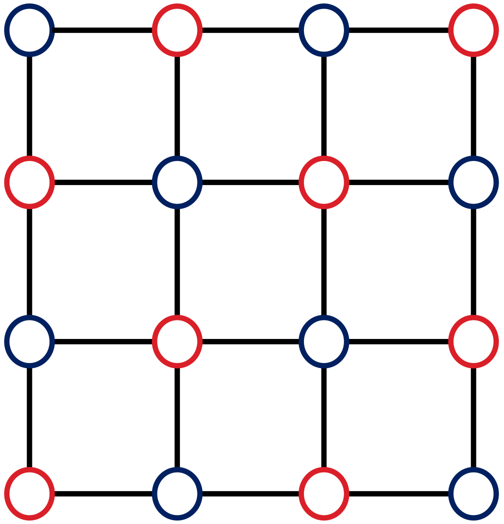
Pe o tablă de tip șah de dimensiuni nxn sunt așezate ture, astfel încât pe fiecare linie și fiecare coloană sunt **același număr de ture**. Să se arate că se pot păstra pe tablă n dintre aceste ture, care nu se atacă două câte două – **Cuplaje**



Repere istorice. Aplicaţii

- **Acoperirea unei table cu piese de domino**





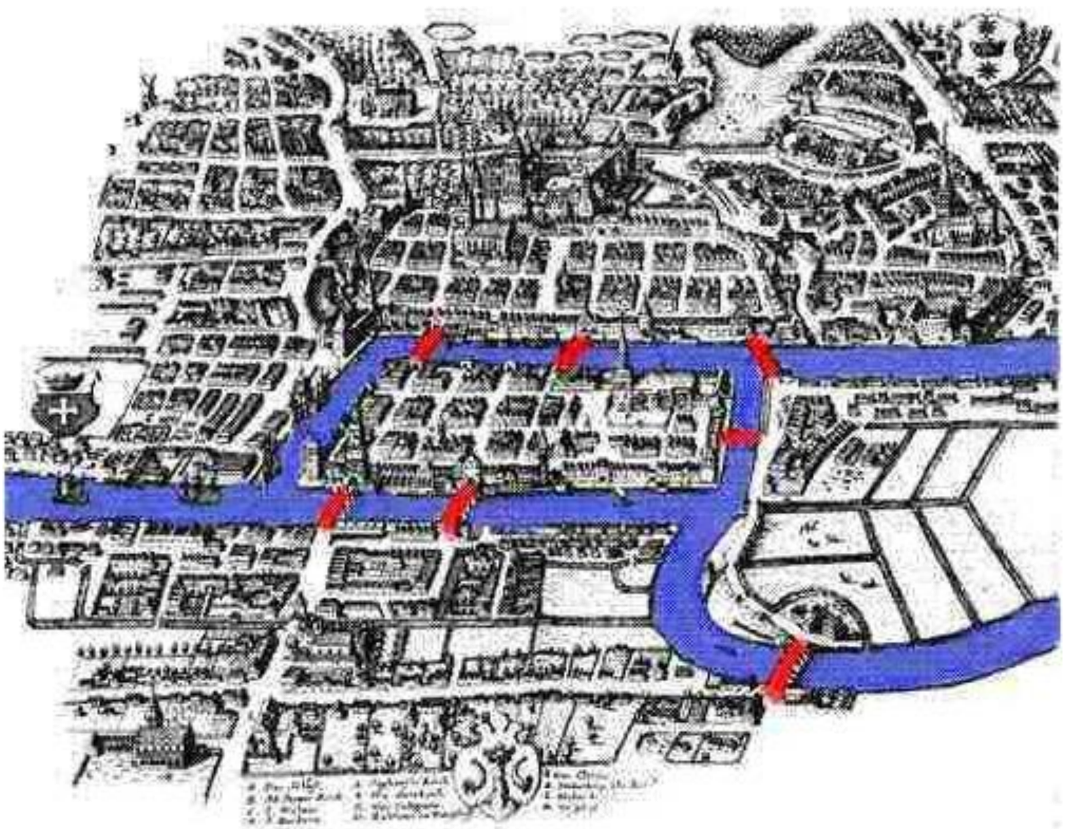
Graful grid

Alte aplicații

- Rețele
- Limbaje formale
- Probleme de planificări, repartiții...
- Teoria jocurilor

Istoric. Aplicații

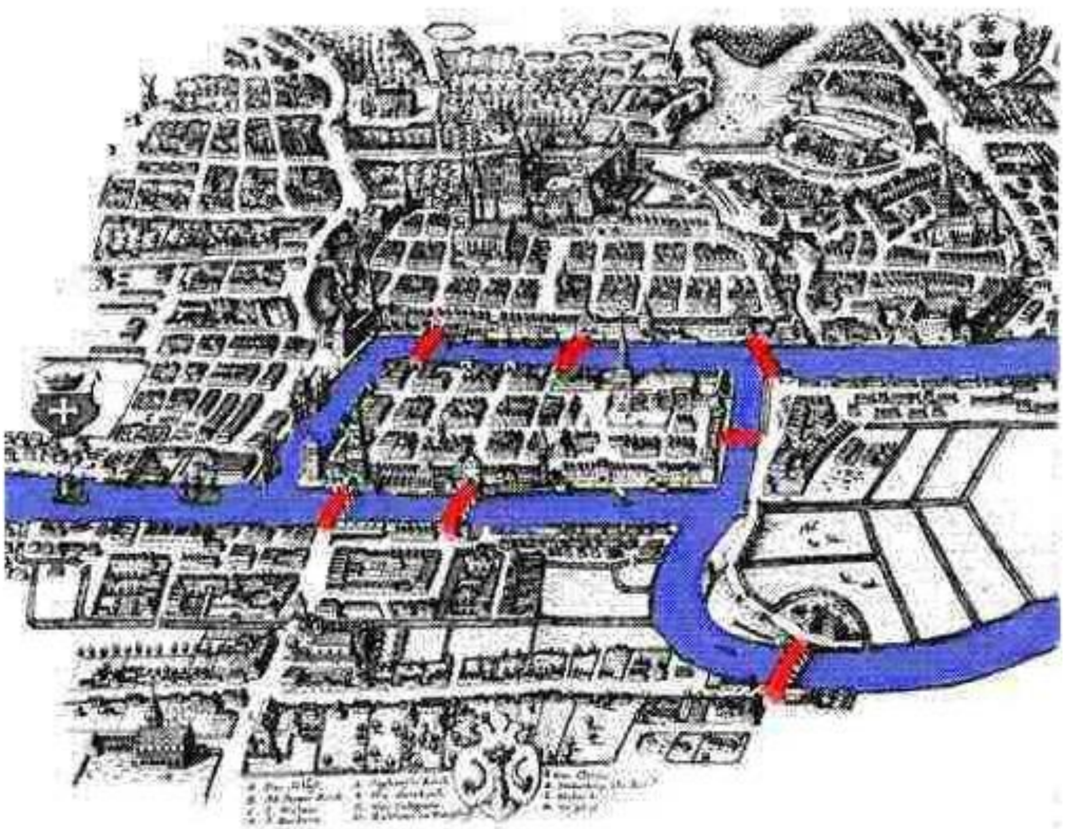
Problema celor 7 poduri din Königsberg

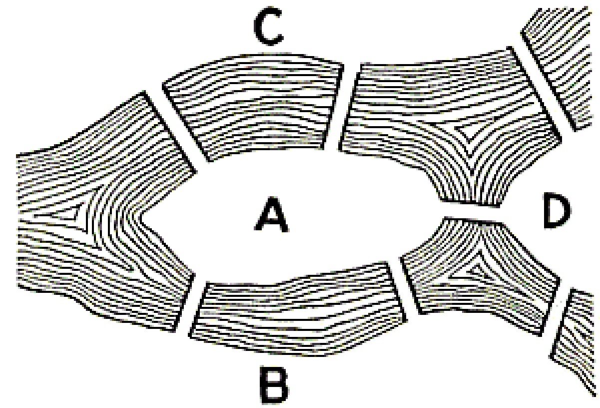


Este posibil ca un om să facă o plimbare în care să treacă pe toate cele 7 poduri o singură dată?

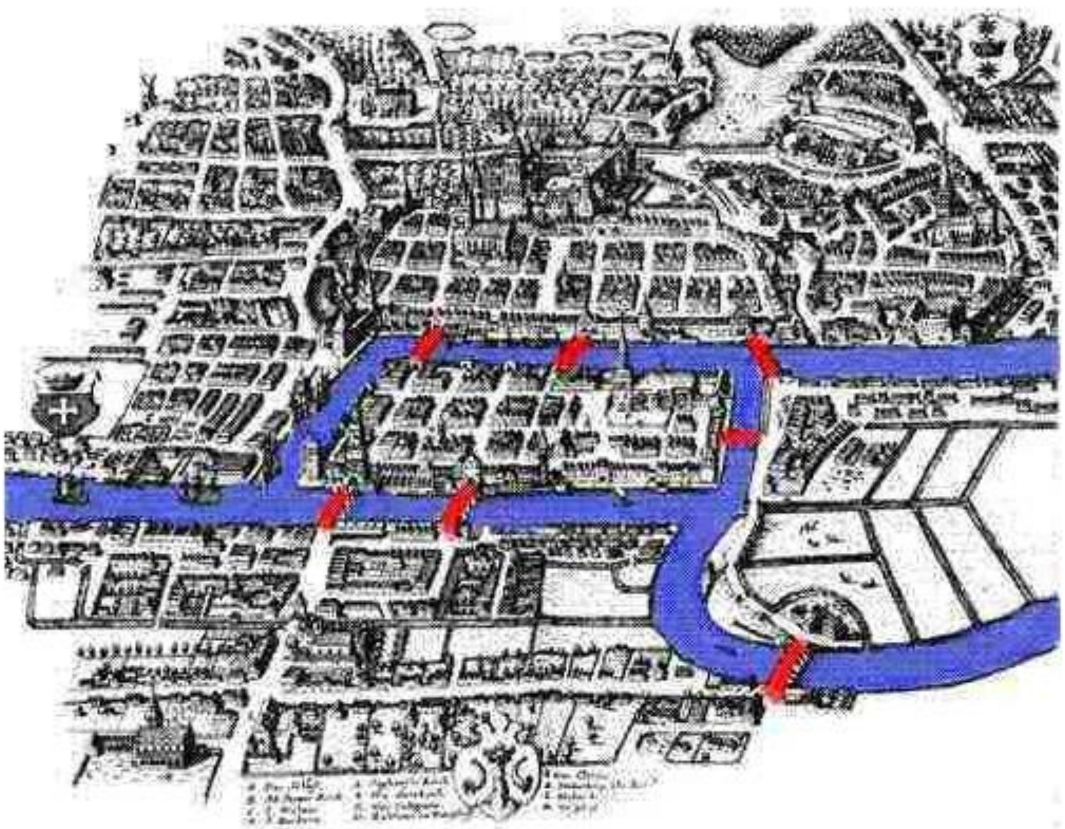
http://think-like-a-git.net/sections/graph-theory/seven-bridges-of-konigsberg.html

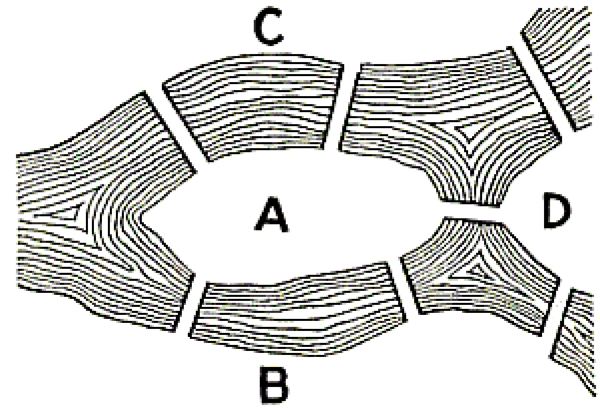
Problema celor 7 poduri din Königsberg



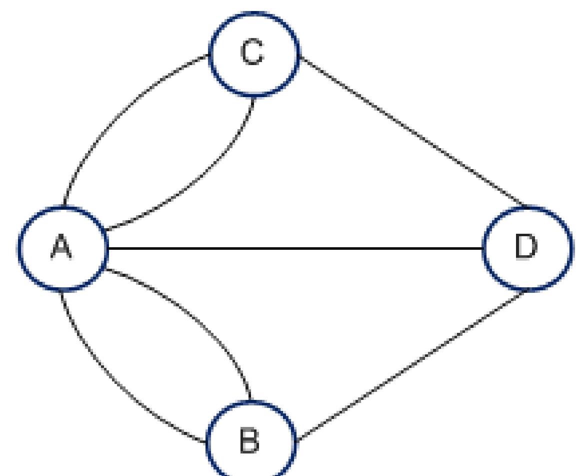


Problema celor 7 poduri din Königsberg

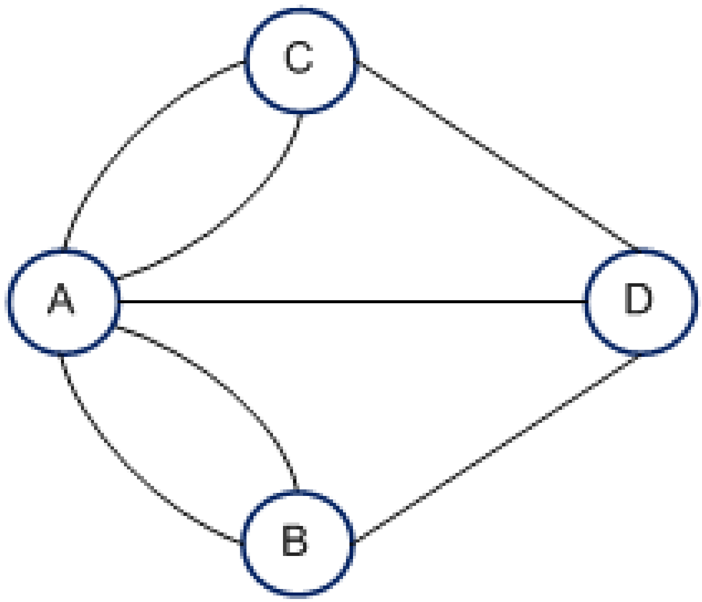




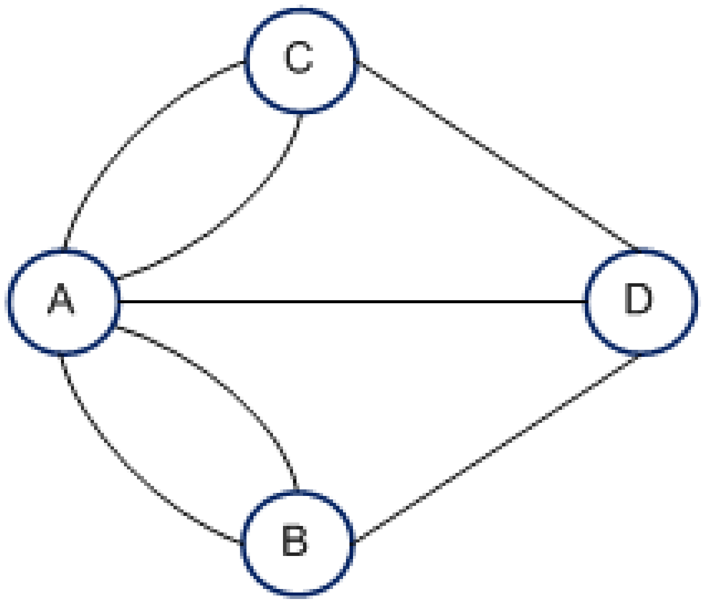
Modelare:



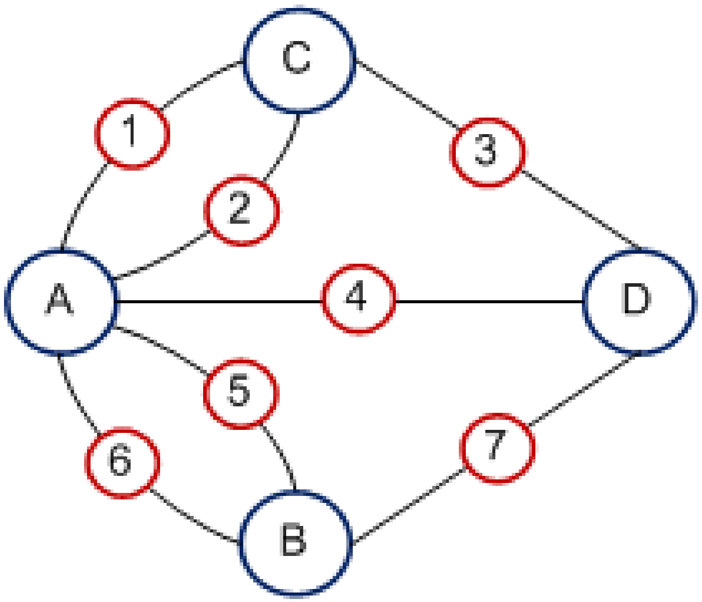
Problema celor 7 poduri din Königsberg



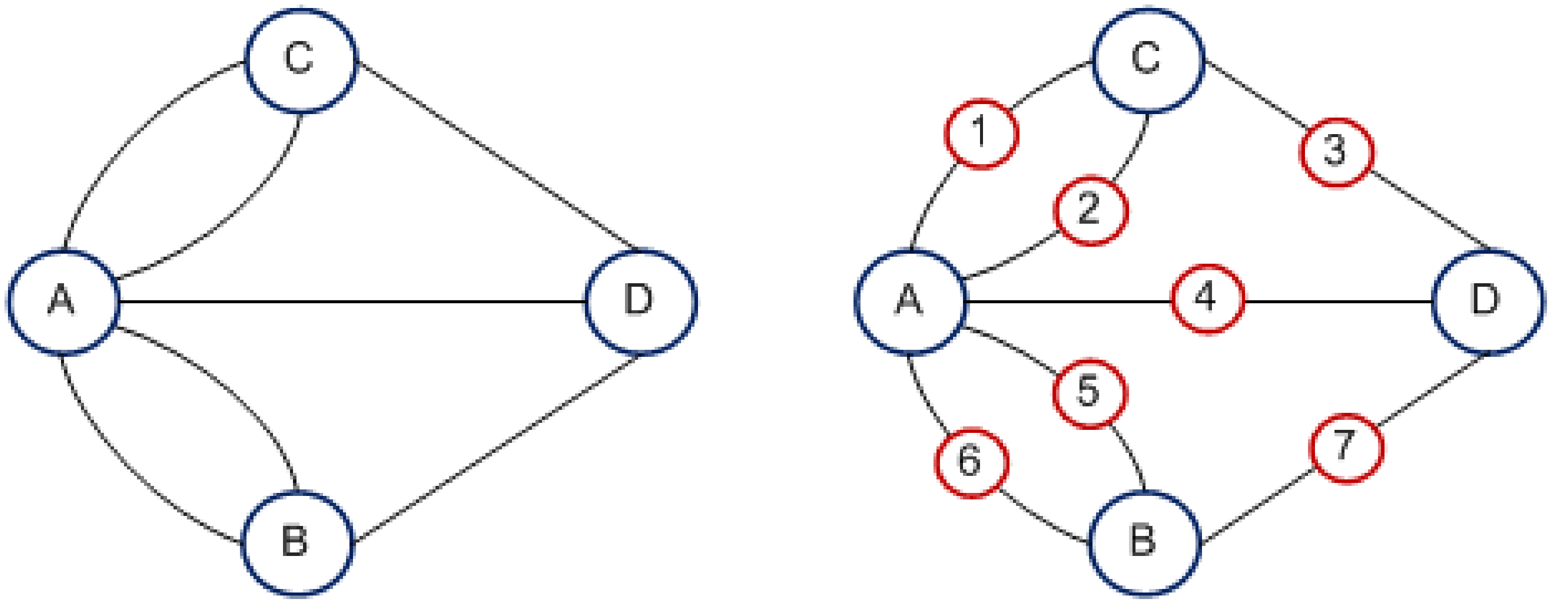
Problema celor 7 poduri din Königsberg



multigraf



Problema celor 7 poduri din Königsberg



1736 – Leonhard Euler

Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis

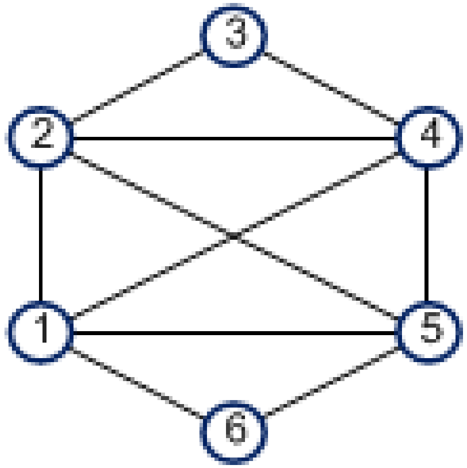
- **Ciclu eulerian** – traseu închis care trece o singură dată prin toate muchiile
- **Graf eulerian**

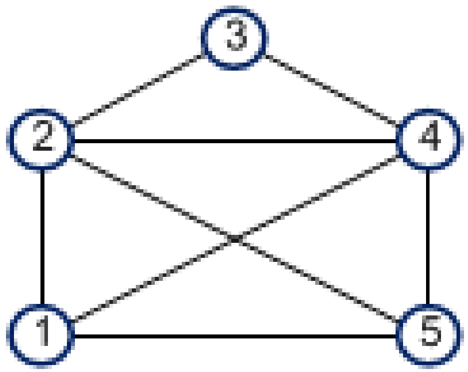
Problema celor 7 poduri din Königsberg

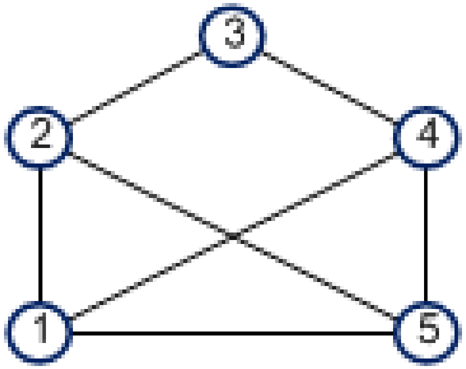
- **Interpretare**

Se poate desena diagrama printr-o curbă continuă închisă fără a ridica creionul de pe hârtie şi fără a desena o linie de două ori (în plus: să terminăm desenul în punctul în care l-am început)?

  - Tăierea unui material



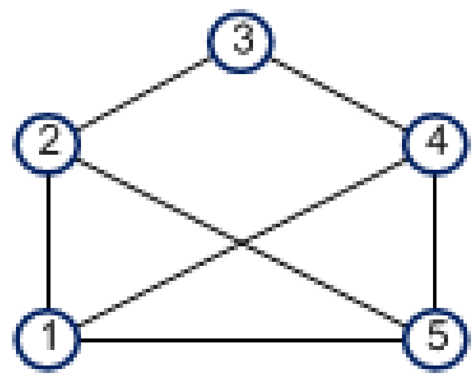




Problema celor 7 poduri din Königsberg

- **Interpretare**

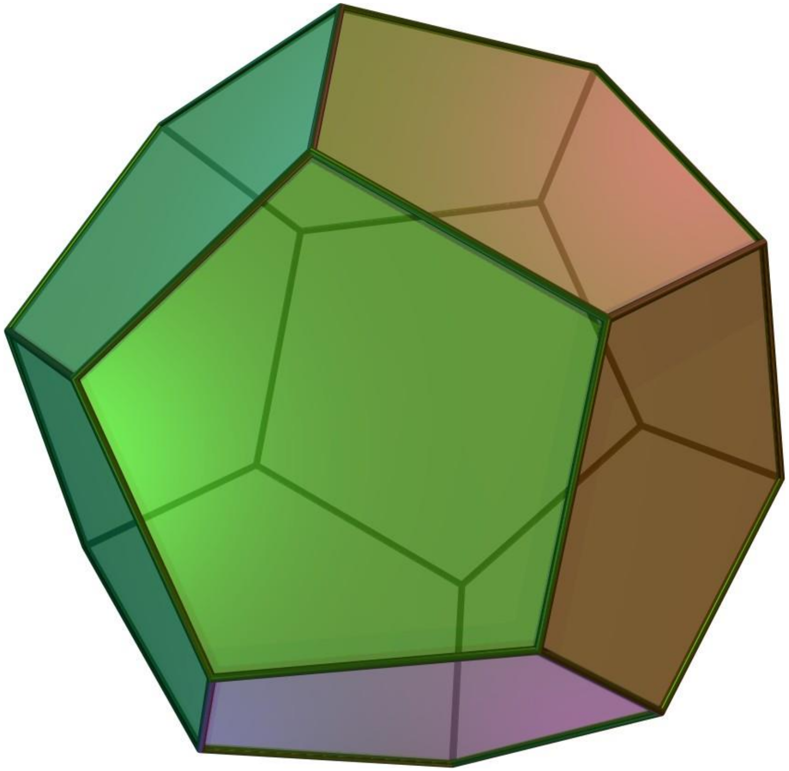
  De câte ori (minim) trebuie să ridicăm creionul de pe hârtie pentru a desena diagrama?



Jocul icosian

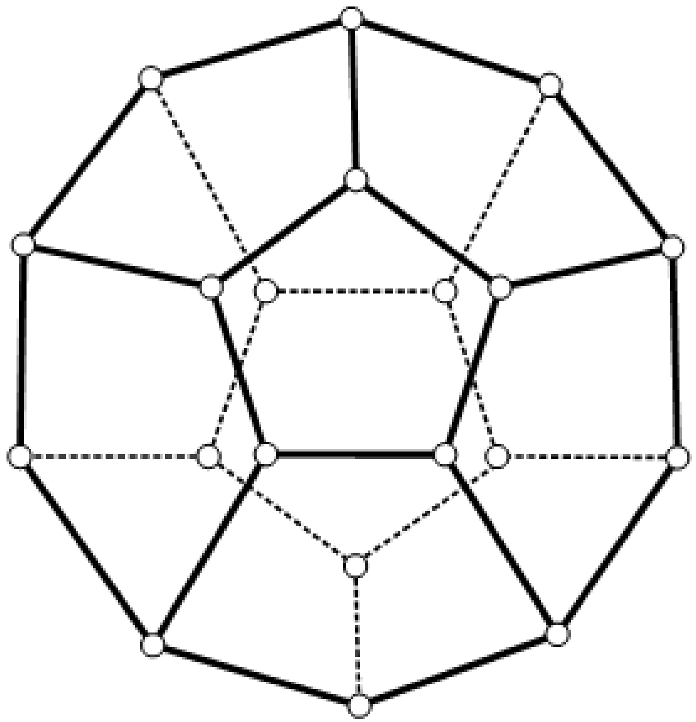
- 1856 – **Hamilton** – *“voiaj în jurul lumii”* :

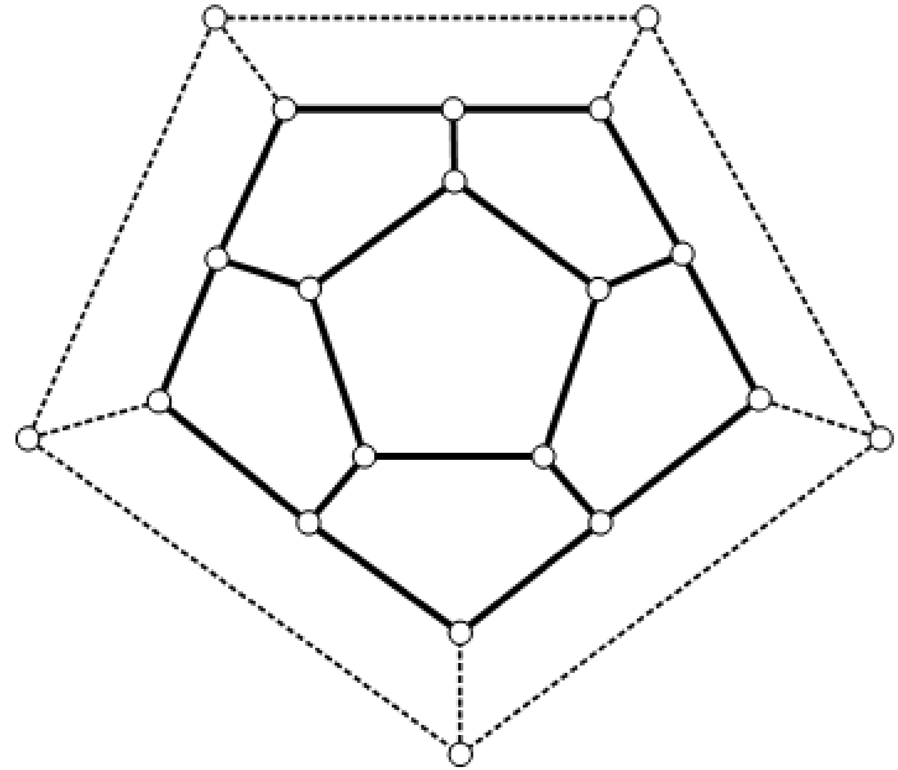
Există un traseu închis pe muchiile dodecaedrului care să treacă prin fiecare vârf o singură dată



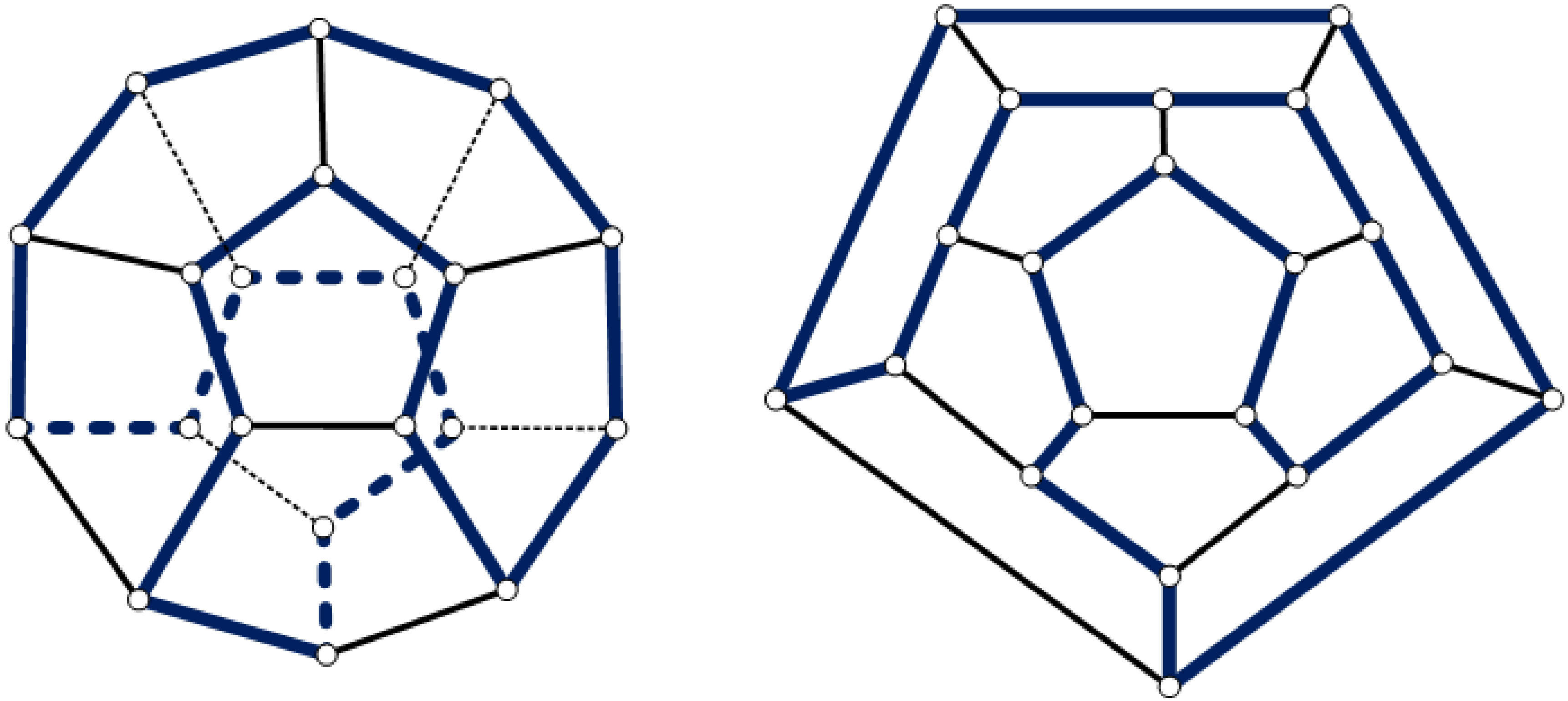
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dodecahedron.jpg

Jocul icosian





Jocul icosian



Jocul icosian

- **Ciclu hamiltonian** – trece o singură dată prin toate vârfurile
- **Graf hamiltonian**
- **Problema comis-voiajorului**

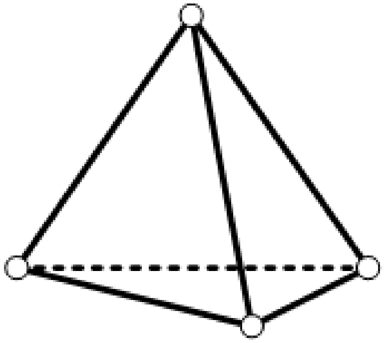
Corpuri platonice

- **Poliedru** – **corp** mărginit de suprafeţe plane
- **Poliedru convex** – segmentul care uneşte două puncte oarecare din el conţine numai puncte din interior
- **Poliedru regulat convex** – feţele sunt poligoane regulate **congruente**

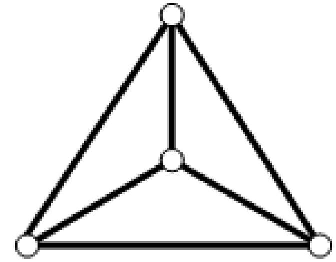
Corpuri platonice

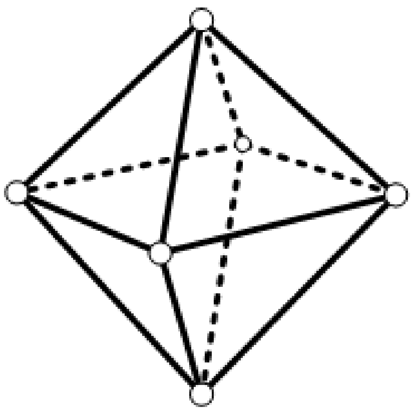
- **Poliedru** – **corp** mărginit de suprafeţe plane
- **Poliedru convex** – segmentul care uneşte două puncte oarecare din el conţine numai puncte din interior
- **Poliedru regulat convex** – feţele sunt poligoane regulate **congruente**
- **Graf planar** – se poate reprezenta în plan fără ca muchiile să se intersecteze in interior

Corpuri platonice – grafuri planare

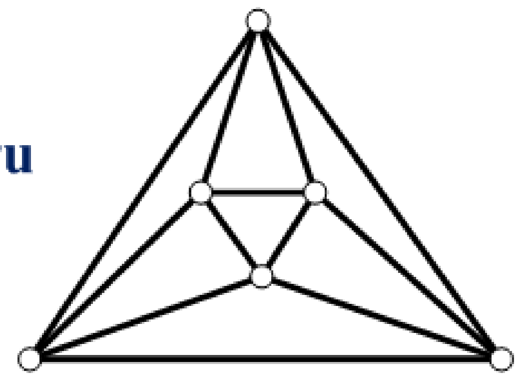


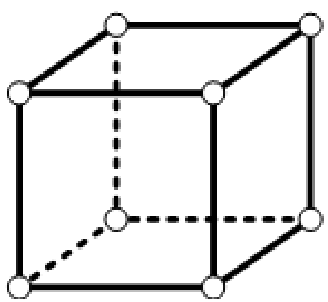
Tetraedru



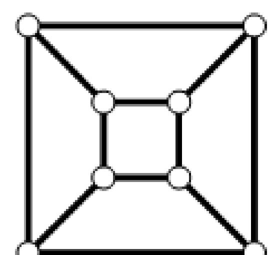


Octaedru

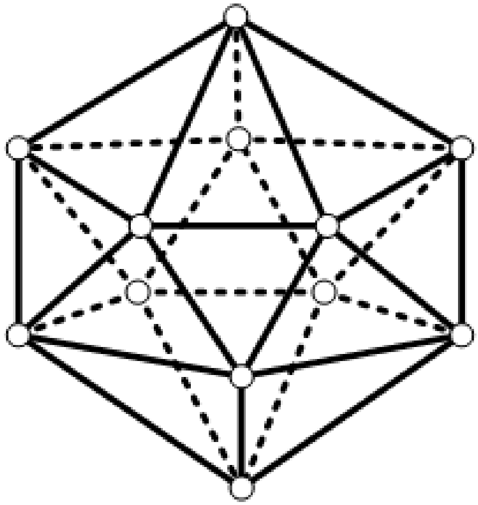




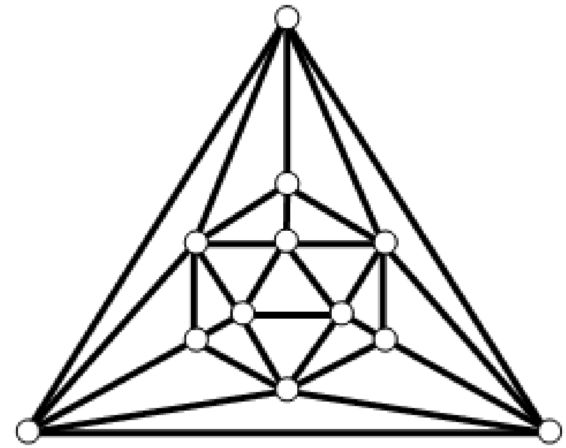
Cub

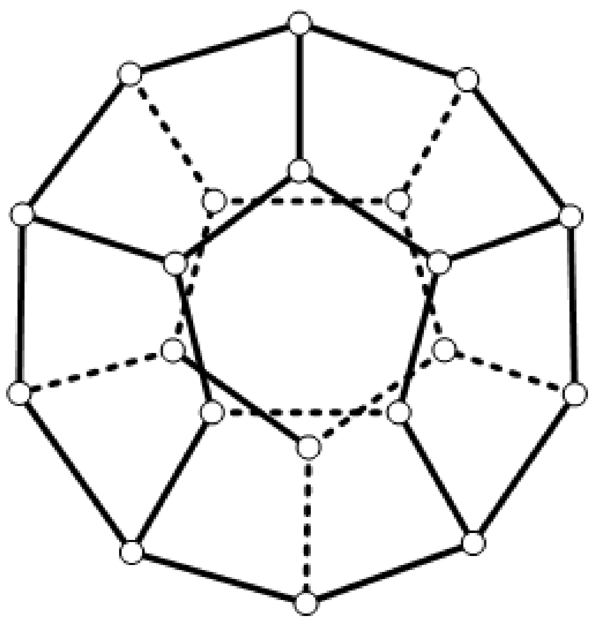


Corpuri platonice – grafuri planare

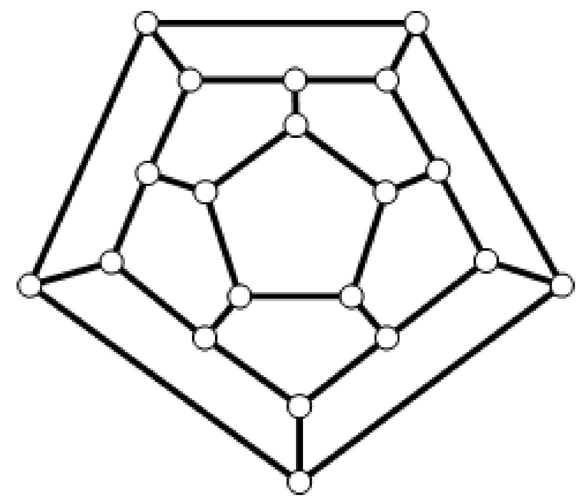


Icosaedru





Dodecaedru



Corpuri platonice

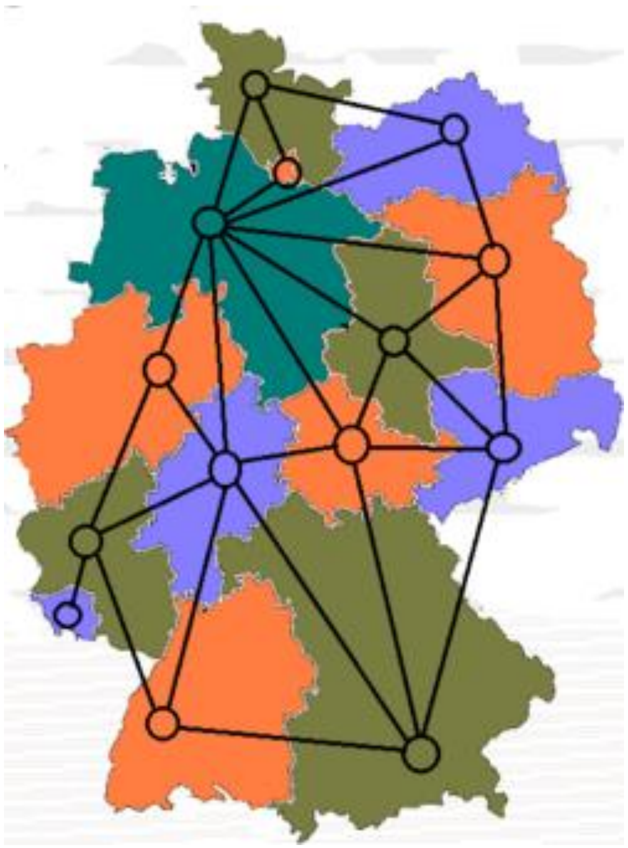
Sunt hamiltoniene?

Problema celor 4 culori

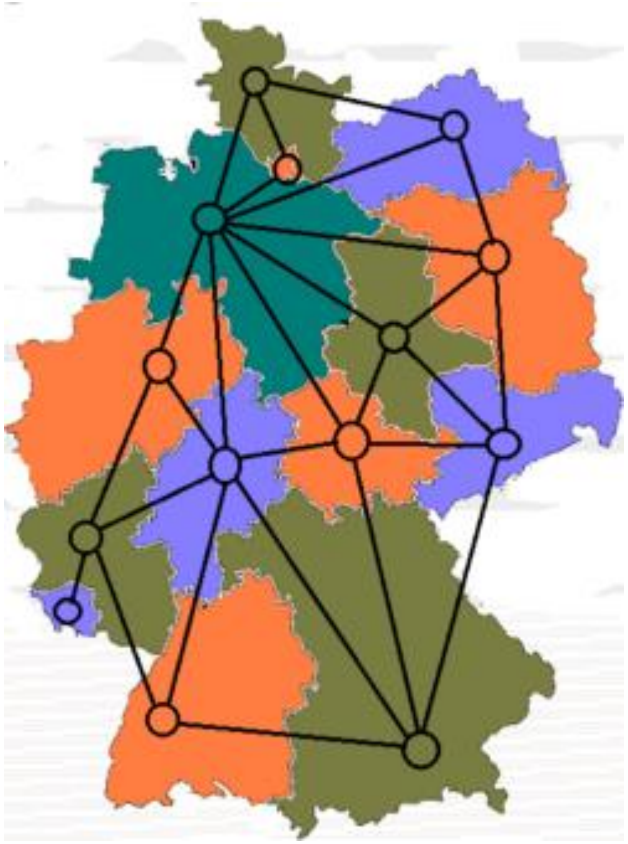
- **Problema celor 4 culori – De Morgan** 1852

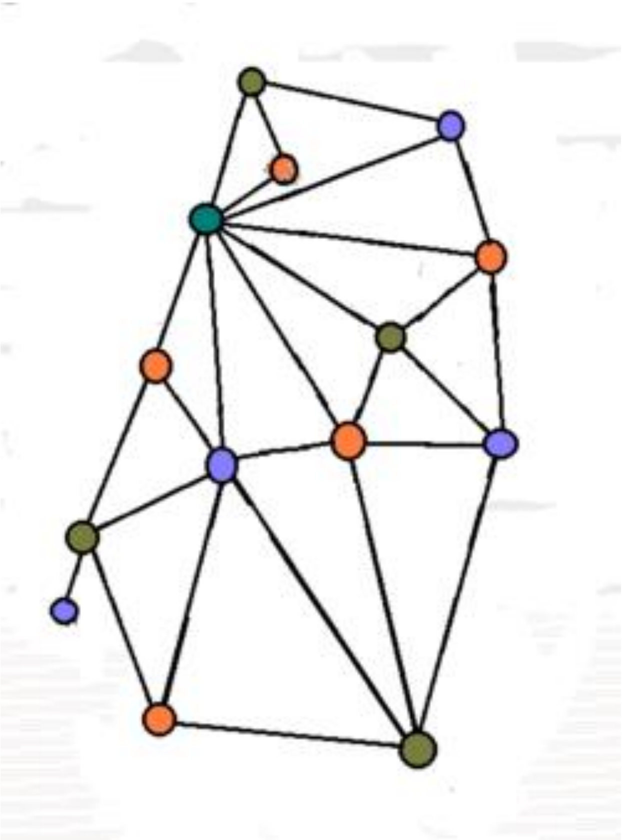
Se poate colora o hartă cu patru culori astfel încât orice două țări, care au frontieră comună și care **nu se reduce la un punct**, să aibă culori diferite?

http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem



http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem





http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem

- **Problema celor 4 culori – Appel și Haken** răspuns afirmativ în 1976 cu ajutorul calculatorului

Noţiuni introductive

Multiset

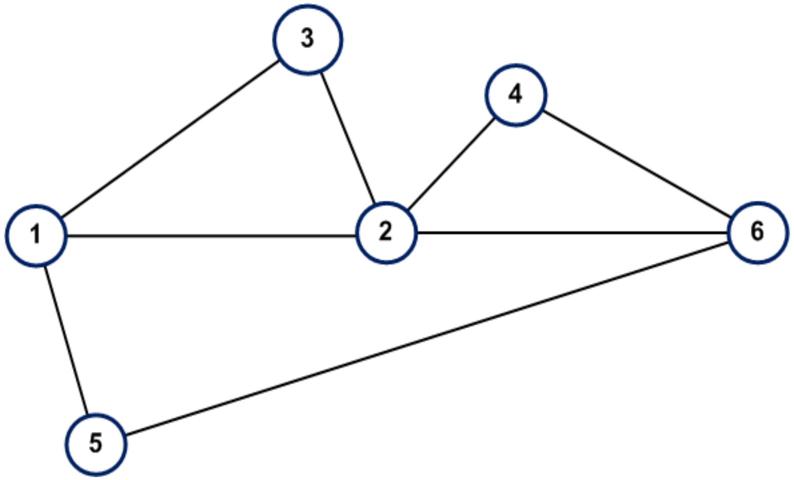
- S o mulţime (finită) nevidă
- **Multiset**
  - **Intuitiv: “mulțime” +se pot repeta elementele**

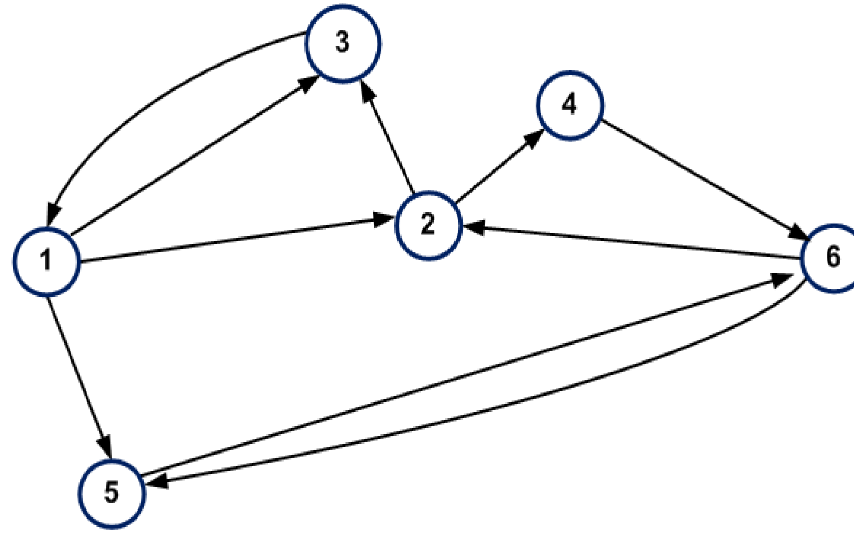
Multiset

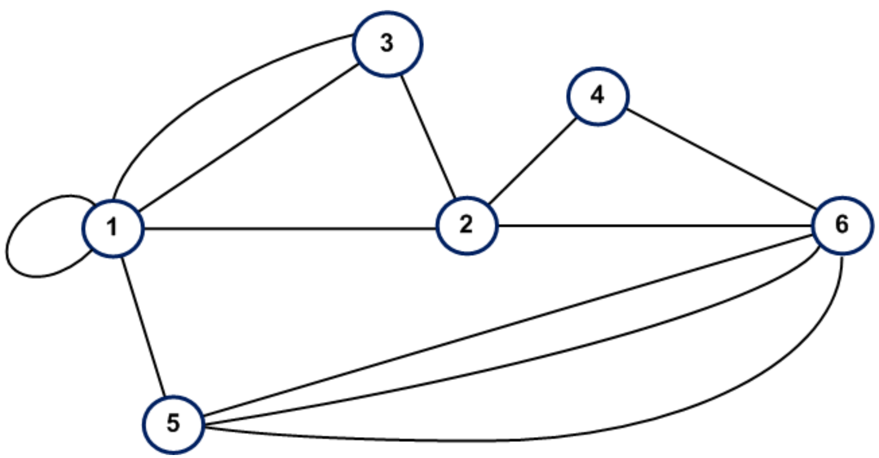
- S o mulţime (finită) nevidă
- **Multiset**
  - **$R = (S, r), r : S \to \mathbb{N}$** **funcţie de multiplicitate**
- **Notaţie**
  - **$R = \{x^{r(x)} \mid x \in S\}$**

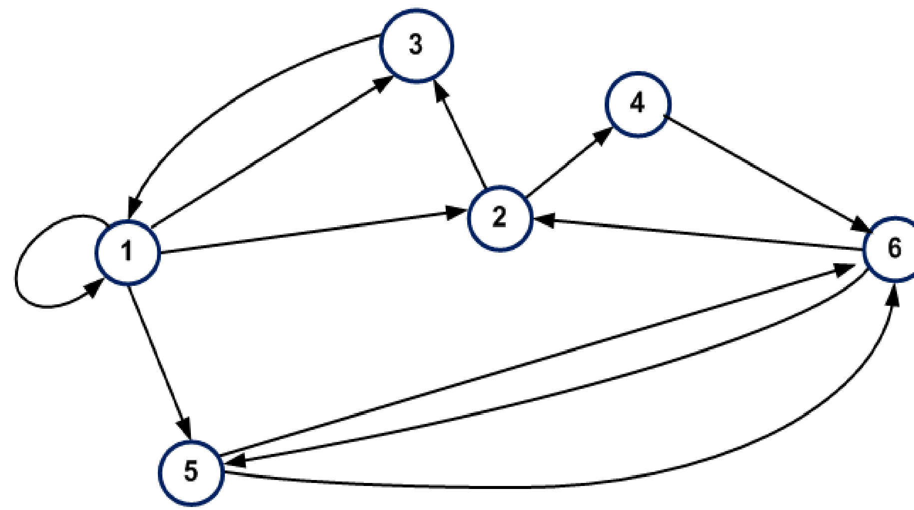
Multiset

- **Exemplu**
  - **$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$**
  - **$R = \{2^2, 3, 5^3\}$**
- $|R| = 2+1+3 = 6$ – suma multiplicităților
- $1 \notin R$

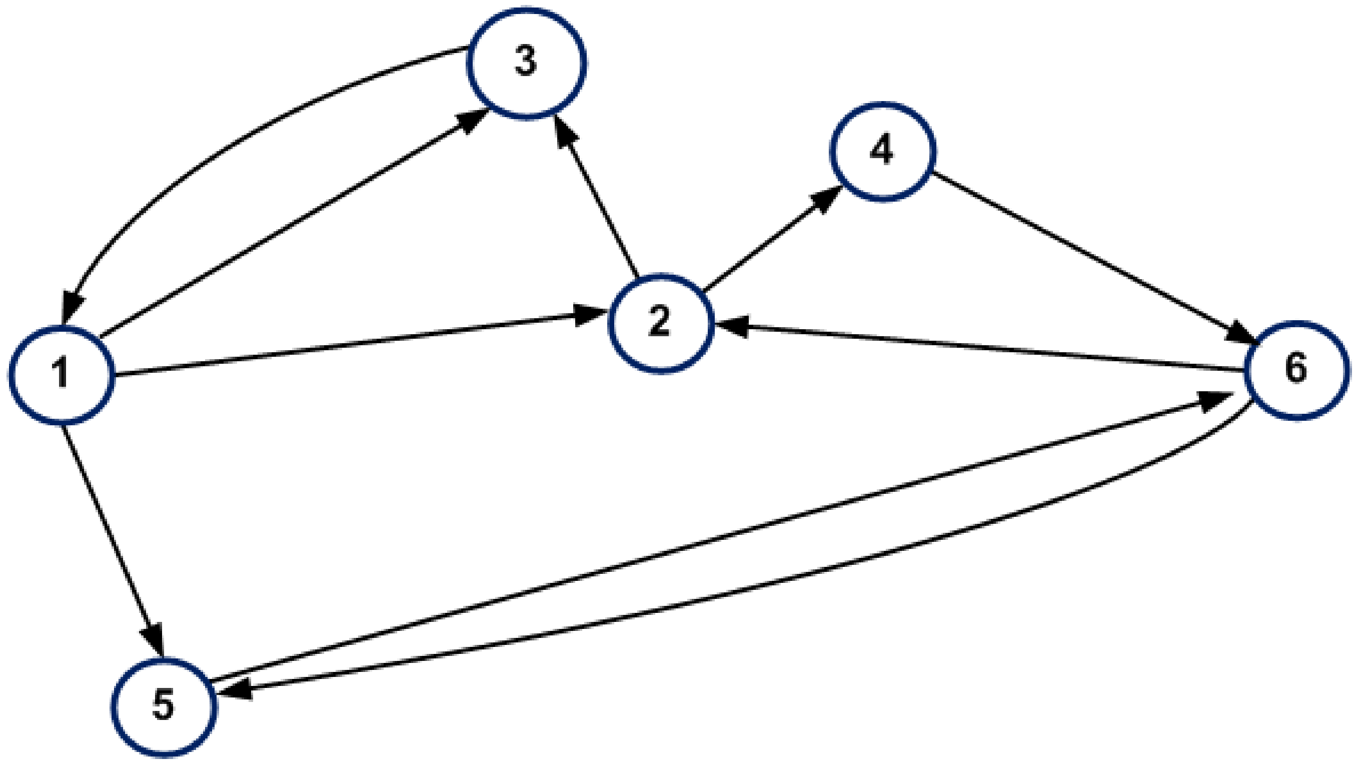

3
4
1
2
6
5


3
4
2
1
6
5


3
4
1
2
6
5


3
4
2
1
6
5

Graf orientat



Graf orientat

- **Graf orientat**: $G = (V, E)$
  - V – finită
  - E – perechi (ordonate) de 2 elemente distincte din V
  - $v \in V$ – **vârf**
  - $e = (u, v)$ **= uv** – **arc**
    - $u = e^-$ – **vârf iniţial / origine / extremitate iniţială**
    - $v = e^+$ – **vârf final / terminus / extremitate finală**

Graf orientat

- G = (V, E)
  - $d_G^-(u)$ – grad interior

    $$d_G^-(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate finala pentru } e\ \}|$$

  - $d_G^+(u)$ – grad exterior

    $$d_G^+(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate initiala pentru } e\ \}|$$

  - $d_G(u)$ – grad

    $$d_G(u) = d_G^+(u) + d_G^-(u)$$

Graf orientat

- Are loc relația

Graf orientat

- Are loc relația

$$\sum_{u \in V} d_G^-(u) = \sum_{u \in V} d_G^+(u) = |E|$$

Multisetul gradelor

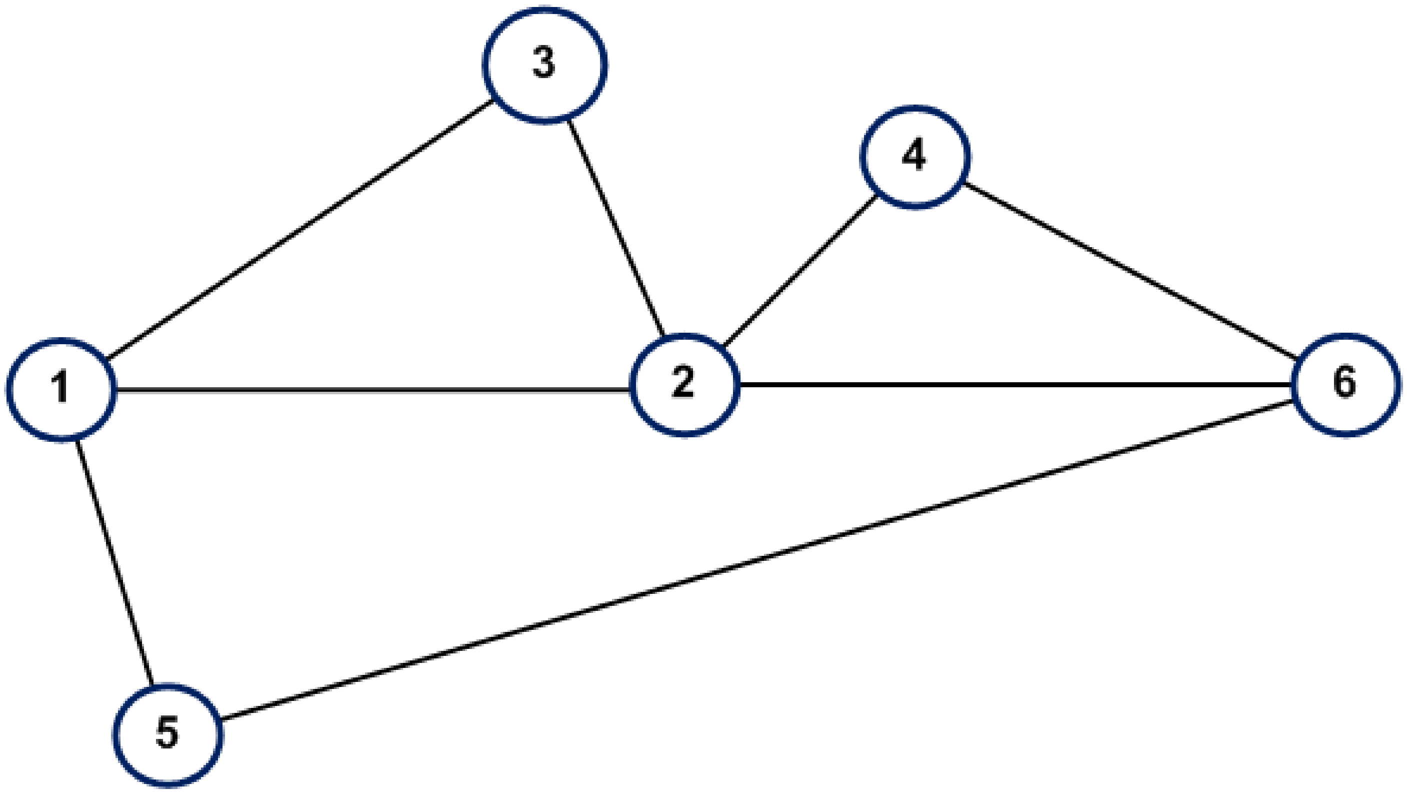
- G orientat, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
  - Multisetul gradelor interioare

$$s^-(G) = \{d_G^-(v_1), \ldots, d_G^-(v_n)\}$$

  - Multisetul gradelor exterioare

$$s^+(G) = \{d_G^+(v_1), \ldots, d_G^+(v_n)\}$$

Graf neorientat



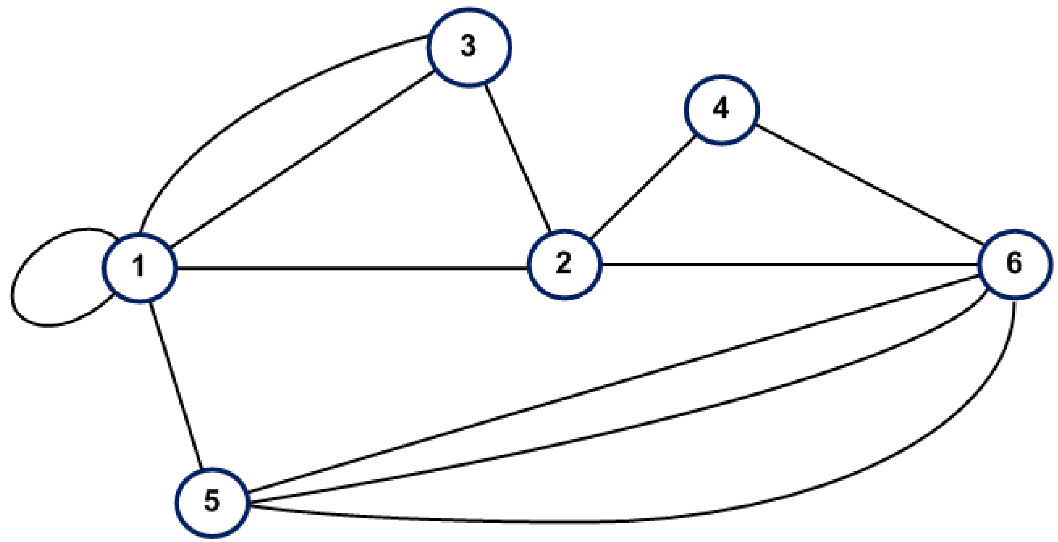
Graf neorientat

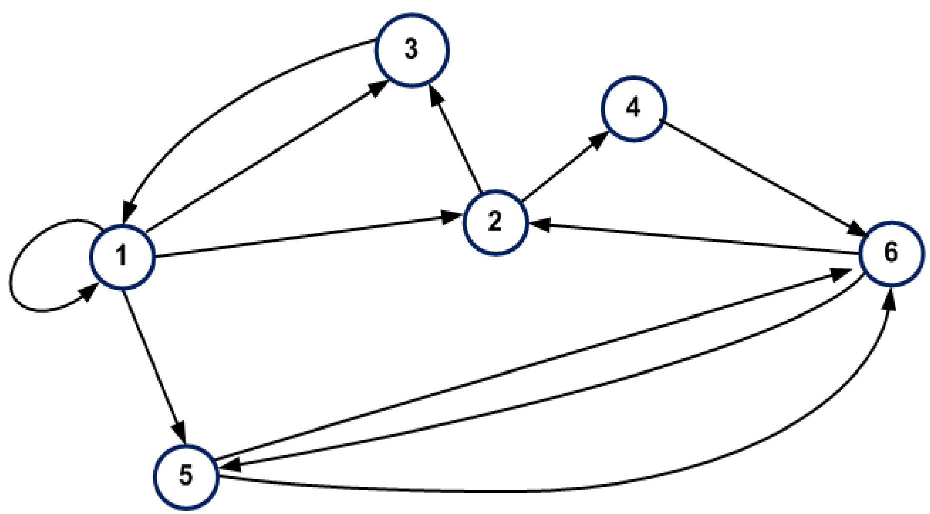
- **Graf neorientat**: $G = (V, E)$
  - **V – finită**
  - **E – submulțimi de 2 elemente (distincte) din V**
  - $v \in V$ – **vârf / nod**
  - $e = \{u,v\} = uv$ – **muchie**
    - u, v – **capete / extremităţi**

Notații

- $V(G)$, $E(G)$
- $e = uv$

Multigraf neorientat/orientat





Multigraf

- **$G = (V, E, r)$**

  $r(e)$ – multiplicitatea muchiei e

Multigraf neorientat

- G = (V, E, r)

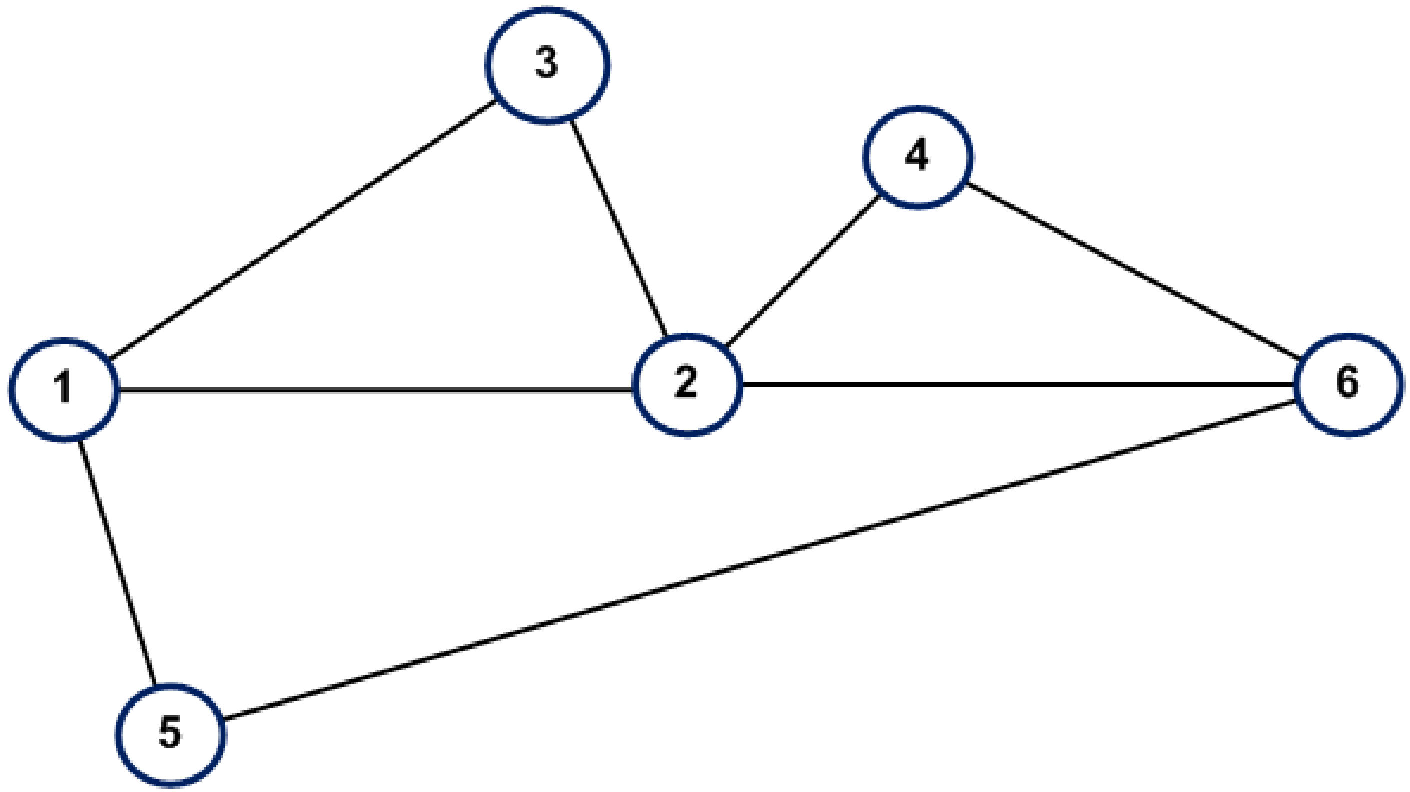
  r(e) – multiplicitatea muchiei e

  - e = {u,u} = **buclă**
  - e cu r(e) >1 = **muchie multiplă**

$$d_G(u) = |\{e \in E \mid e \text{ nu este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}| +$$
$$2 \cdot |\{e \in E \mid e \text{ este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}| +$$

Alte noţiuni fundamentale

Adiacență. Incidență



3
4
1
2
6
5

Adiacență. Incidență

- Fie $G = (V, E)$ un graf **neorientat**
  - u și v $\in$ V sunt **adiacente** dacă uv $\in$ E
  - Un **vecin** al lui u $\in$ V este un vârf adiacent cu el
  - **Notație** $N_G(u)$ = mulțimea vecinilor lui u

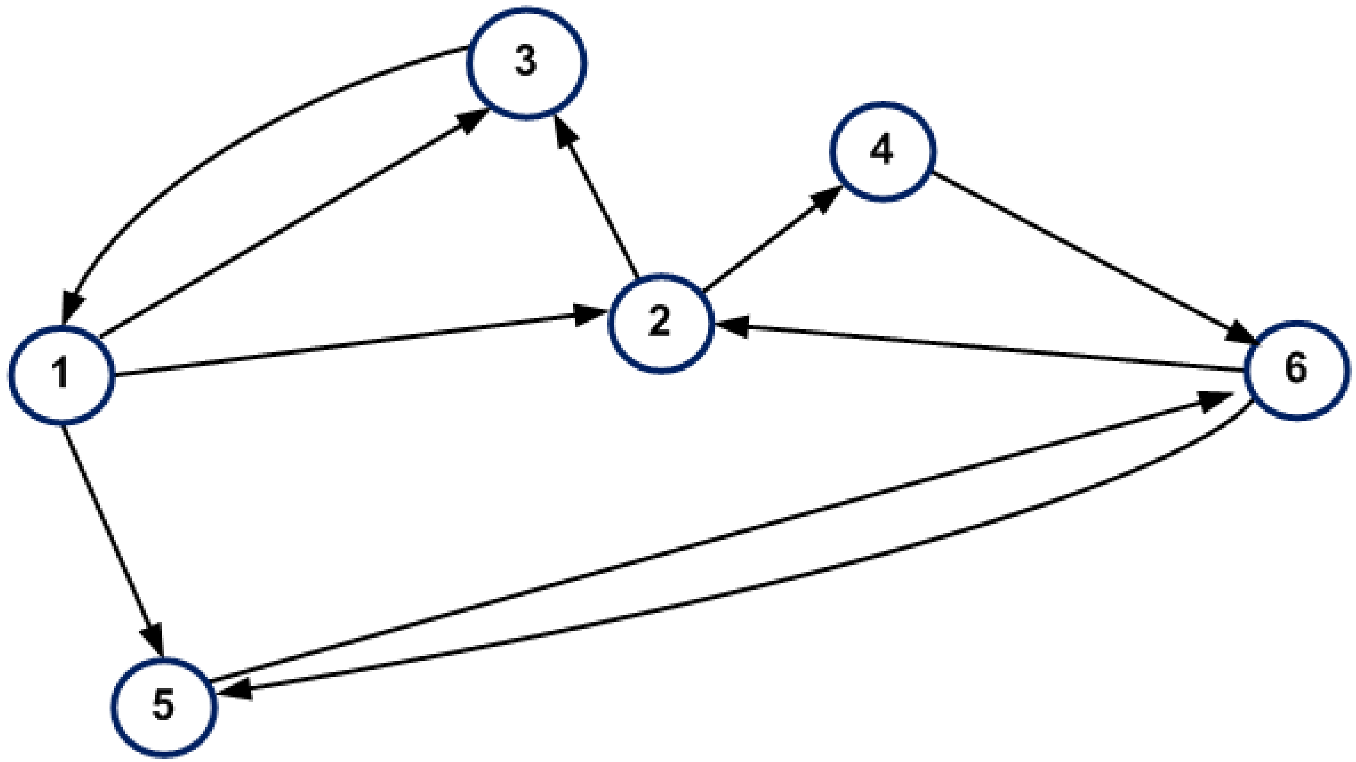
Adiacență. Incidență

- Fie $G = (V, E)$ un graf **neorientat**
  - O muchie $e \in E$ este **incidentă** cu un vârf u dacă u este extremitate a lui e
  - e și $f \in E$ sunt **adiacente** dacă există un vârf în care sunt incidente (au o extremitate în comun)

Drumuri. Circuite

Drumuri. Circuite

- Drum
- Drum simplu
- Drum elementar
- Circuit + elementar
- Lungimea unui drum
- Distanță între două vârfuri


3
4
1
2
6
5

Drumuri. Circuite

Fie G un graf **orientat**

- Un **drum** este o secvență P de vârfuri

$$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$$

unde $v_1,\ldots,v_k \in V(G)$

cu proprietatea că între oricare două vârfuri consecutive există arc:

$$(v_i, v_{i+1}) \in E(G) \ , \ \forall\ i \in \{1, \ldots, k-1\}$$

Drumuri. Circuite

Fie G un graf **orientat și un drum**

$$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$$

- P este **drum simplu** dacă nu conține un arc de mai multe ori ($(v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1})$, $\forall i \neq j$)

- P este **drum elementar** dacă nu conține un vârf de mai multe ori ($v_i \neq v_j$, $\forall i \neq j$)

Drumuri. Circuite

$$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$$

- **Lungimea** lui P = **l(P) = k-1** (cardinalul multisetului arcelor lui P)
- v_1 și v_k se numesc **capetele/ extremitățile** lui P
- P se numește și **v_1-v_k lanț**

Drumuri. Circuite

$$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$$

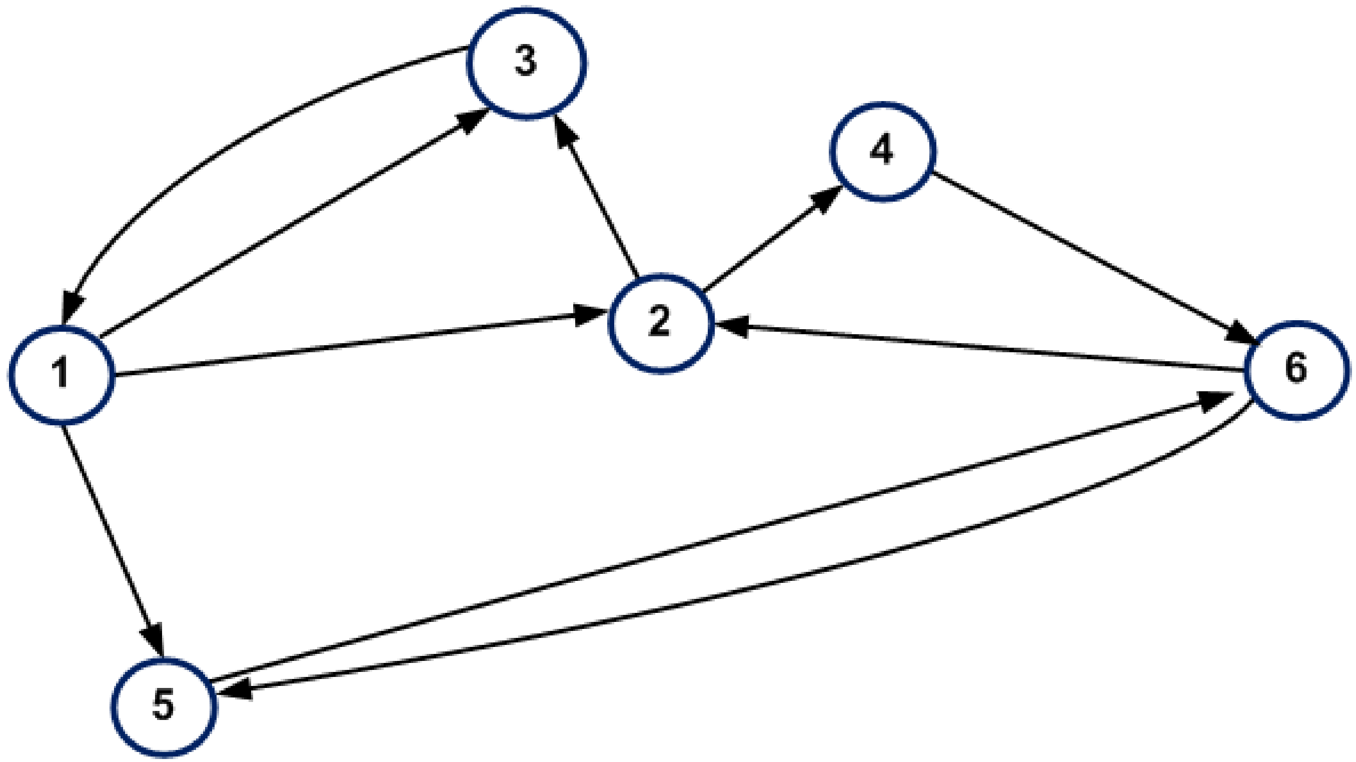
- Notăm
  - $V(P) = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$
  - $e_i = (v_i, v_{i+1})$
  - $E(P) = \{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\}$

Drumuri. Circuite

- Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u,v)=\begin{cases}\mathbf{0}, & \text{daca } \boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{\infty}, & \text{daca nu exista } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\\ \mathbf{min}\{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{P}) \mid \boldsymbol{P} \text{ este } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\}, & \text{altfel}\end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui u–v drum)


3
4
2
1
6
5

Drumuri. Circuite

- Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u,v)=\begin{cases}\mathbf{0}, \text{ daca } \boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\\ \infty, \text{ daca nu exista } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\\ \min\{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{P}) \mid \boldsymbol{P} \text{ este } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\}, \text{ altfel}\end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui u–v drum)

- Un u–v drum de lungime $d_G(u,v)$ se numește **drum minim de la u la v**
- Vom nota și $d(u,v)$ dacă G se deduce din context

Drumuri. Circuite

- Un **circuit** este un drum simplu cu capetele identice

  $C = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k,} v_1]$

- **Circuit elementar**

- **Notații** V(C), E(C)

Lanțuri. Cicluri

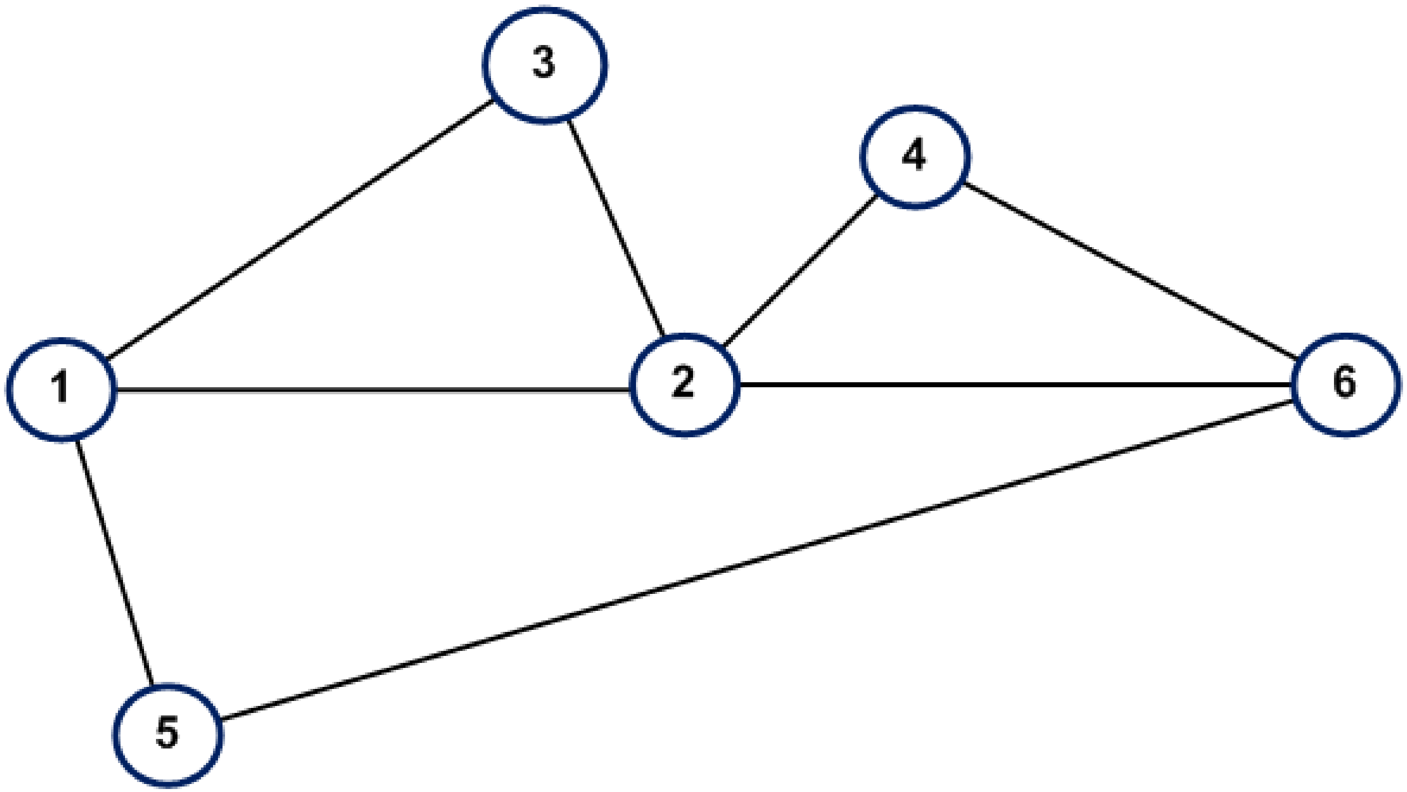
Lanțuri. Cicluri

Pentru G graf **neorientat** – **noțiuni similare**

- Un **lanț** este o secvență P de vârfuri cu proprietatea că oricare două vârfuri consecutive sunt adiacente

  $$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$$

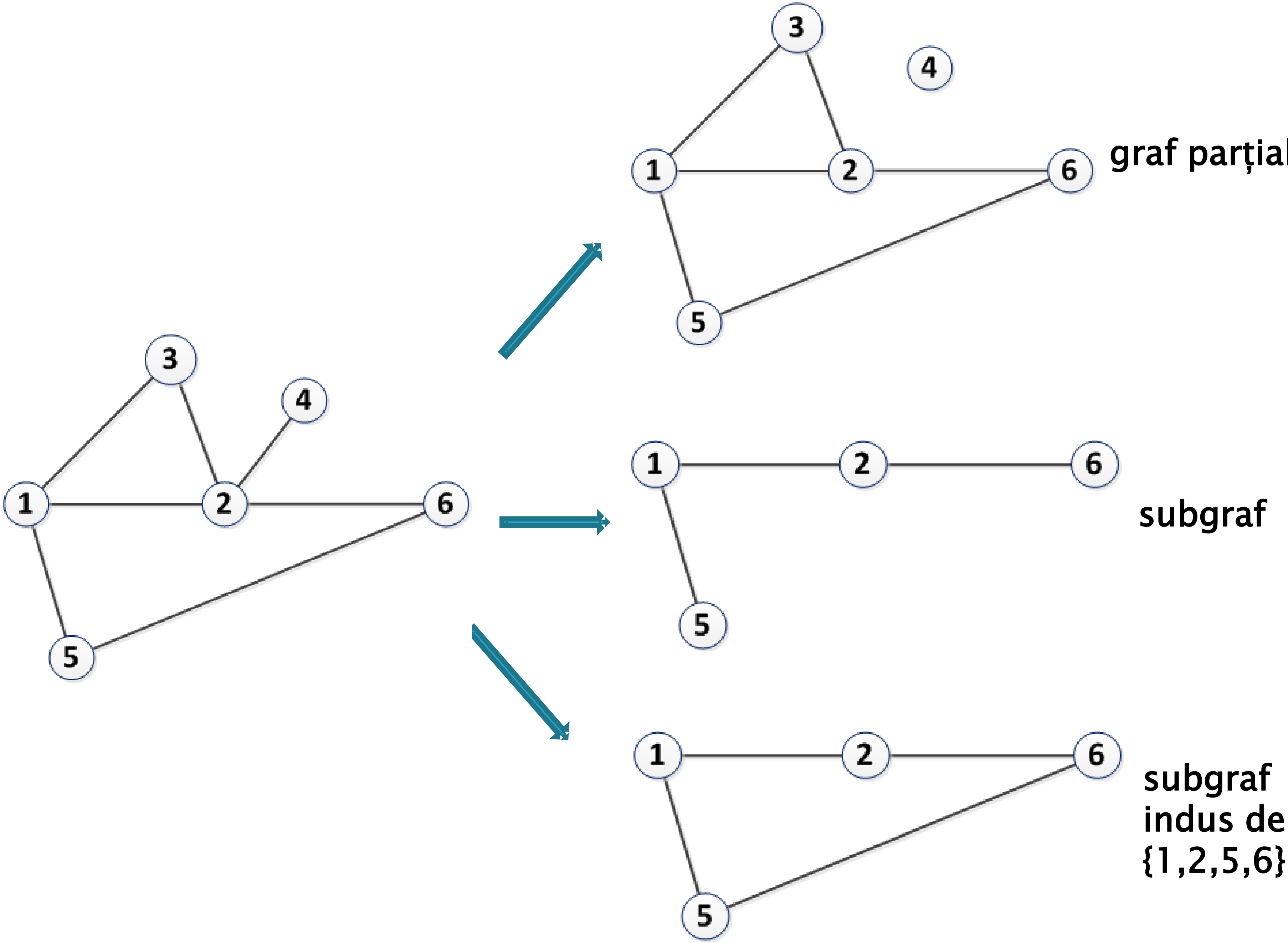
- **lanț simplu** / **lanț elementar** / **lungime**
- **ciclu** / **ciclu elementar**
- **distanță** / **lanț minim**


3
4
1
2
6
5

Graf parțial. Subgraf. Conexitate

Graf parțial. Subgraf

- graf parțial
- subgraf
- subgraf indus


3
4
1
2
6
5
graf parțial
subgraf
subgraf
indus de
{1,2,5,6}

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \leq G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \leq G}$) dacă

  $$V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$$

- G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \prec G}$) dacă

  $$V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \leq G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \prec G}$) dacă

  $V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf indus de V_1 în** G (vom nota $\mathbf{G_1 = G[V_1]}$) dacă

  $V_1 \subseteq V,$

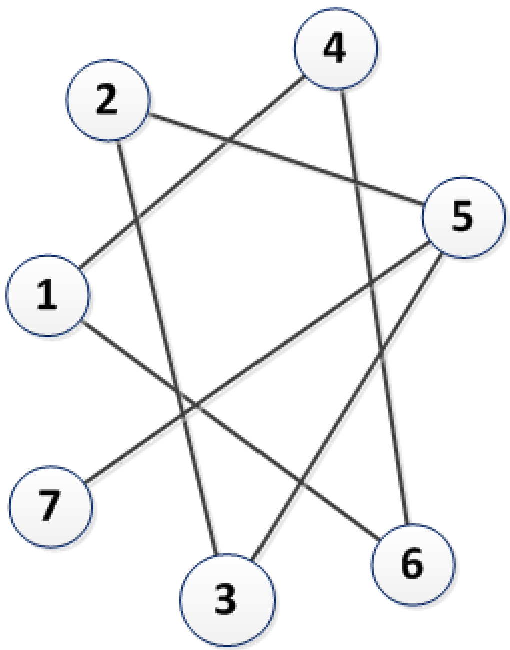
  $E_1 = \{e \mid e \in E(G), \text{ e are ambele extremități în } V_1\}$

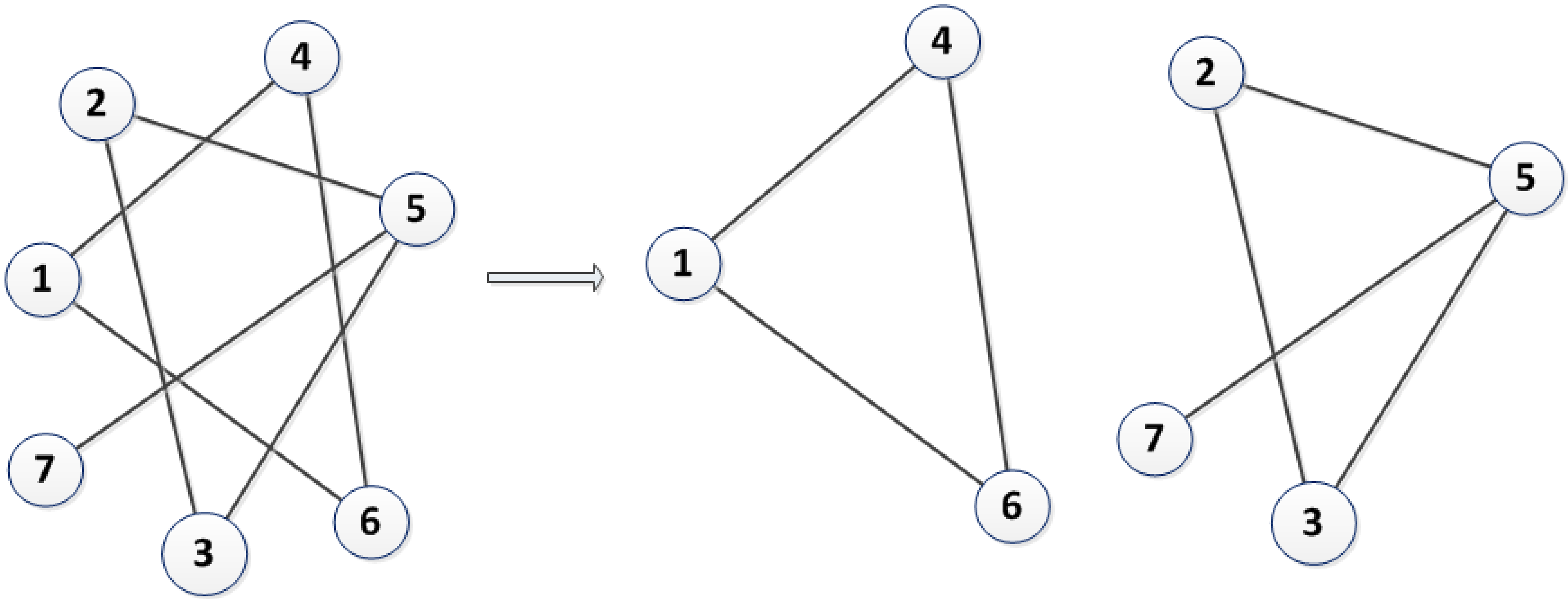
(toate arcele/muchiile cu extremități în V_1)

Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- **graf conex**
- **componentă conexă**


4
2
5
1
7
6
3



două componente conexe

Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț

Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț
- O **componentă conexă** a lui G este un subgraf indus conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)

Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

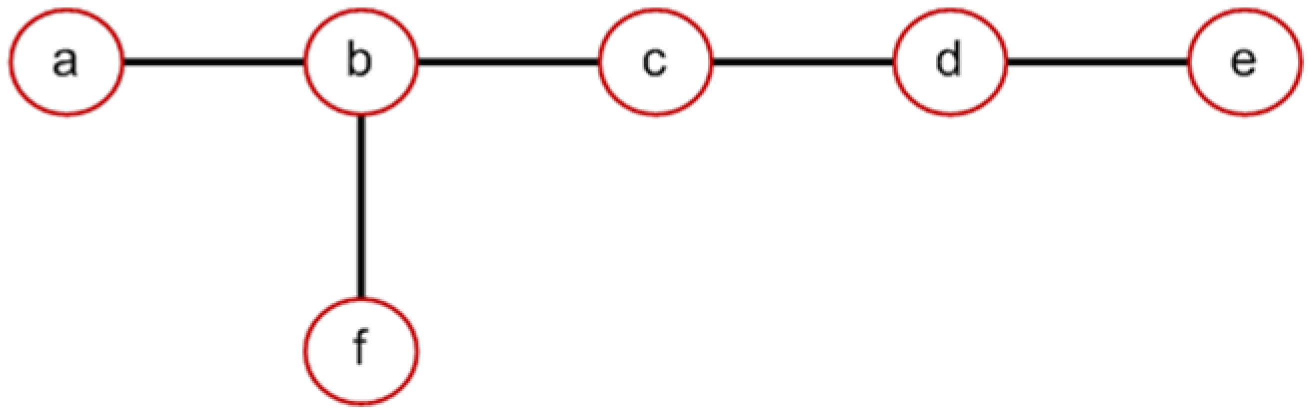
- G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț
- O **componentă conexă** a lui G este un subgraf indus conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)
- Pentru cazul orientat – **tare-conexitate**

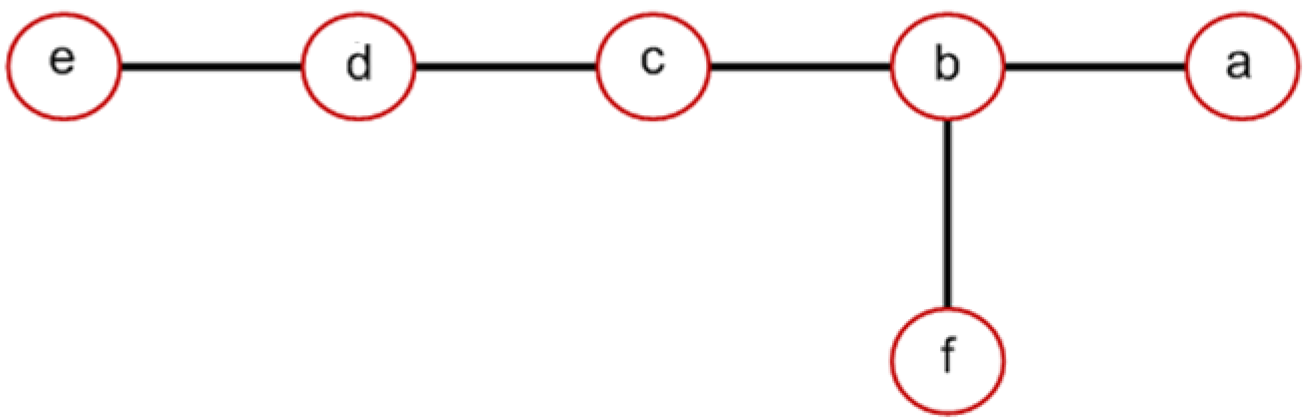
Notaţii

- **$G - v$** , $v \in V(G)$
- **$G - e$** , $e \in E(G)$
- **$G - V'$** , $V' \subseteq V(G)$
- **$G - E'$** , $E' \subseteq E(G)$
- **$G + e$**

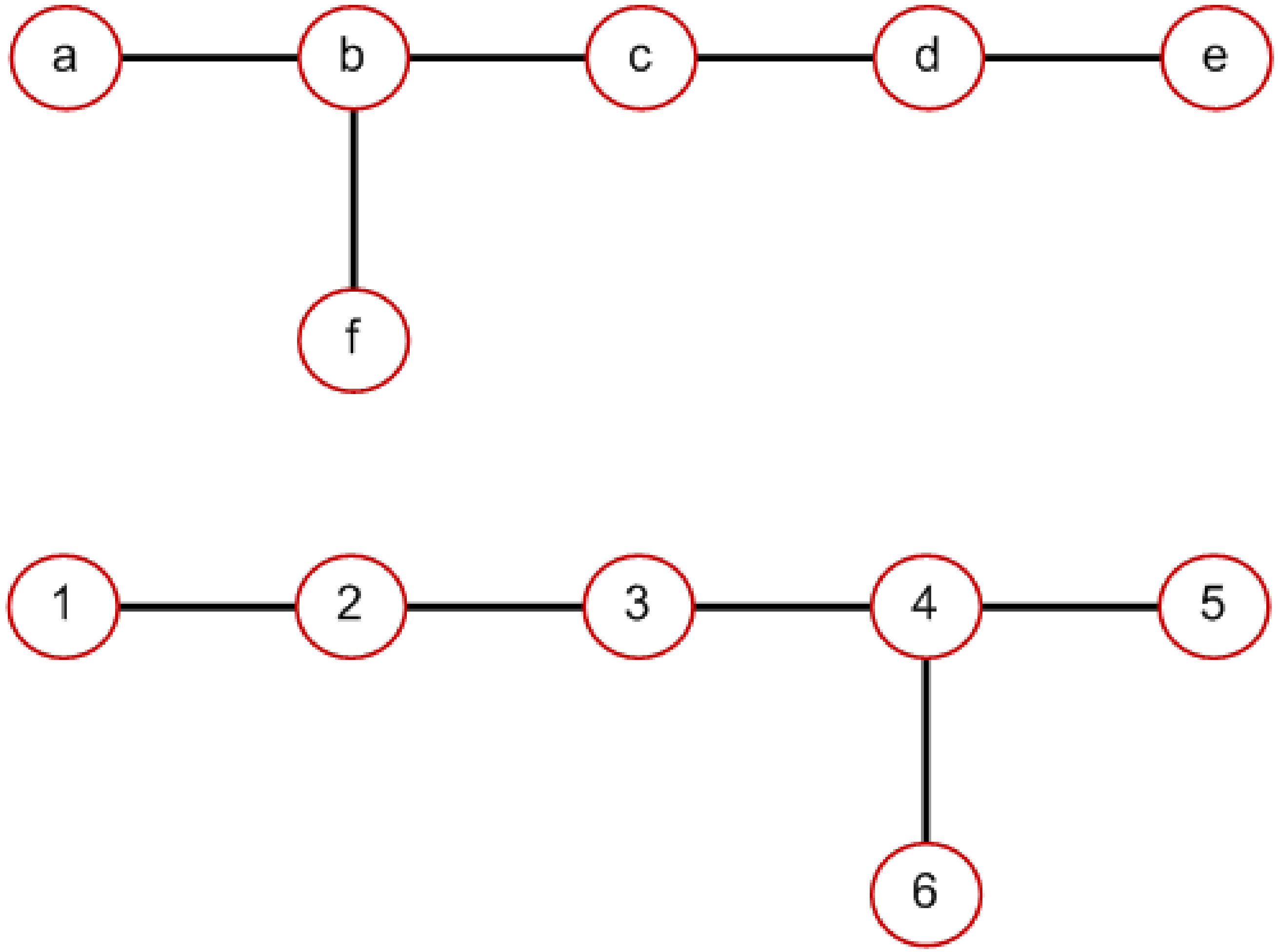
Egalitate.Izomorfism

Egalitate





Egalitate?



Izomorfism

Fie G_1, G_2 două grafuri

- $G_1 = (V_1, E_1)$
- $G_2 = (V_2, E_2)$

Grafurile G_1 și G_2 sunt **izomorfe** (**$G_1 \sim G_2$**) $\Leftrightarrow$

există $f : V_1 \to V_2$ bijectivă cu

$$uv \in E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2$$

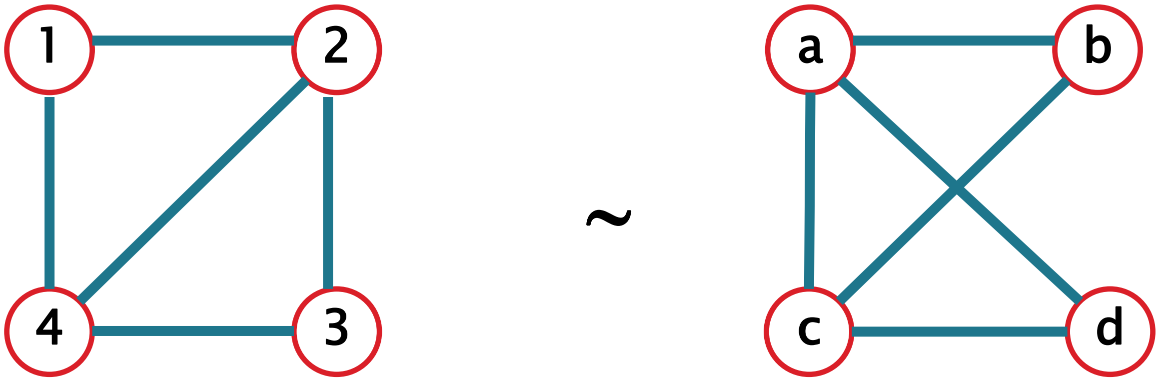
pentru orice $u,v \in V_1$

(f conservă adiacența și neadiacența)

Izomorfism

Interpretare: se pot reprezenta în plan prin același desen

Izomorfism

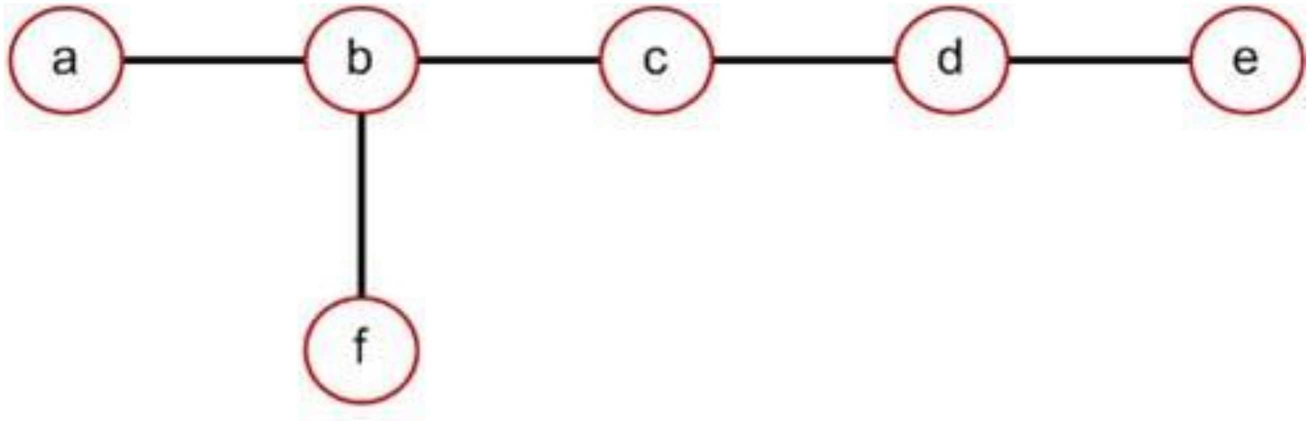


Izomorfism

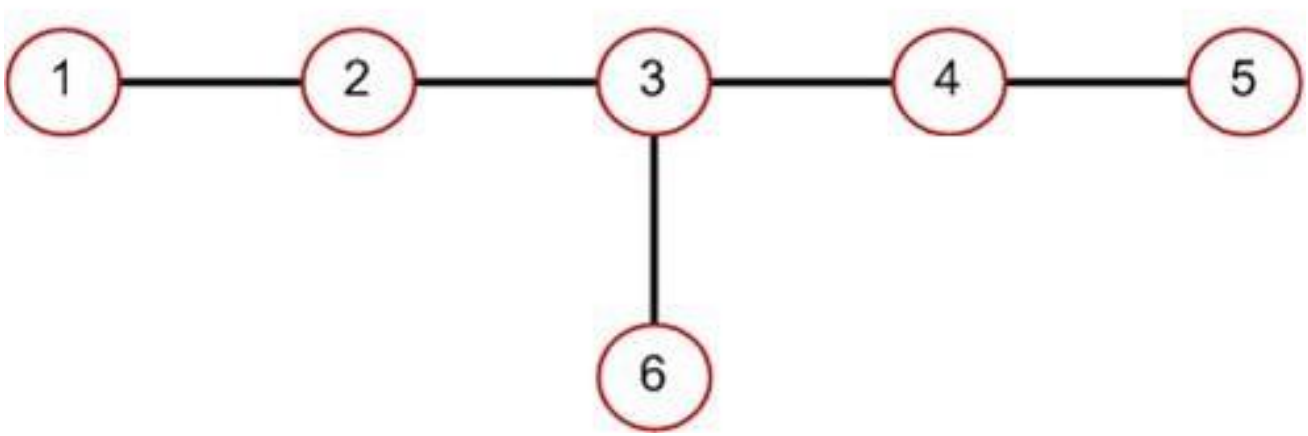
- $G_1 \sim G_2 \Rightarrow s(G_1) = s(G_2)$

- $s(G_1) = s(G_2) \not\Rightarrow G_1 \sim G_2$?

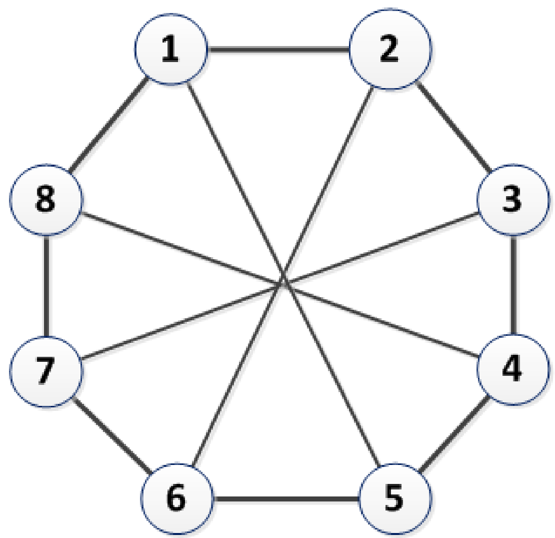
Izomorfism

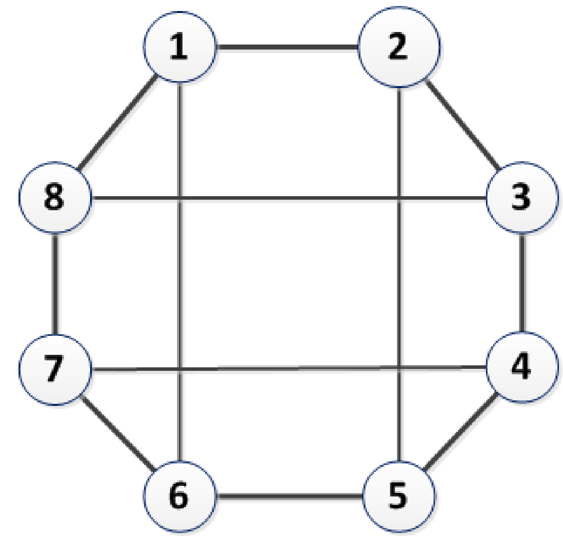


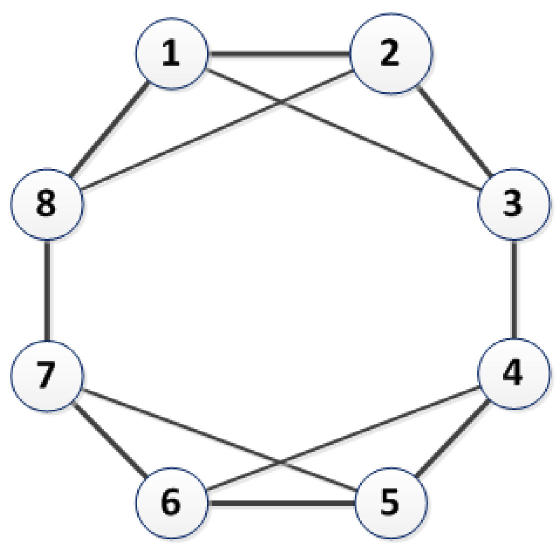
Izomorfe?



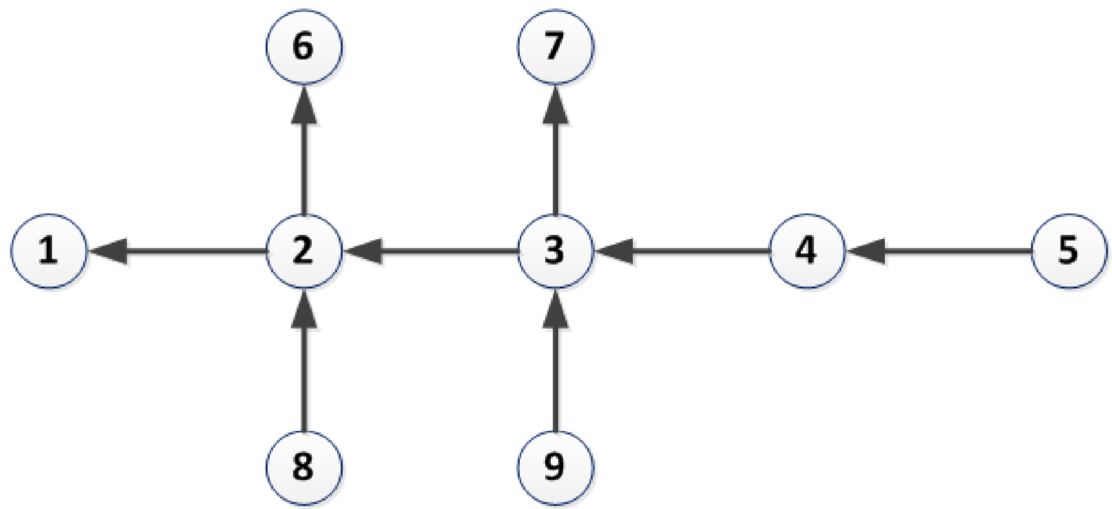
Care dintre aceste grafuri sunt izomorfe?

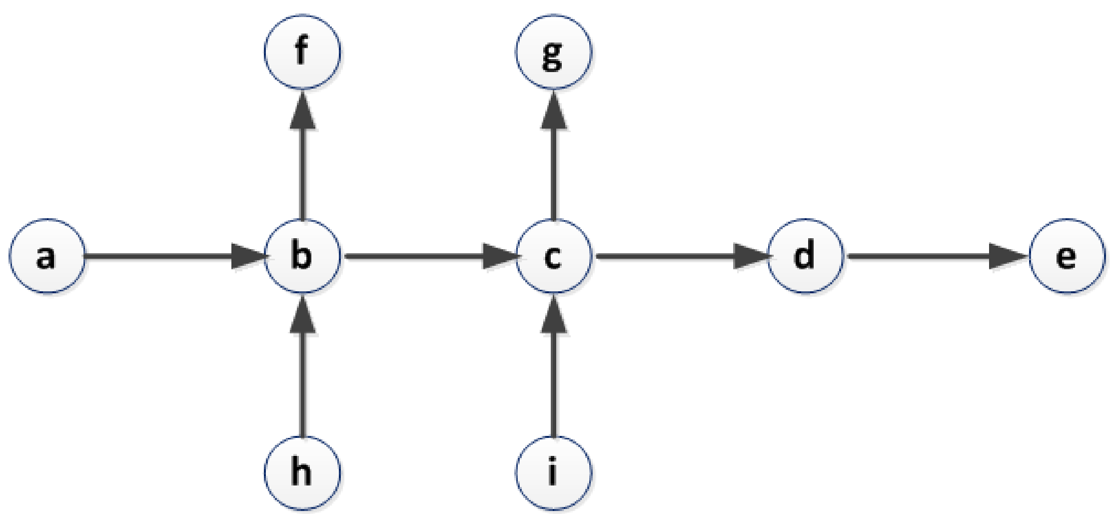






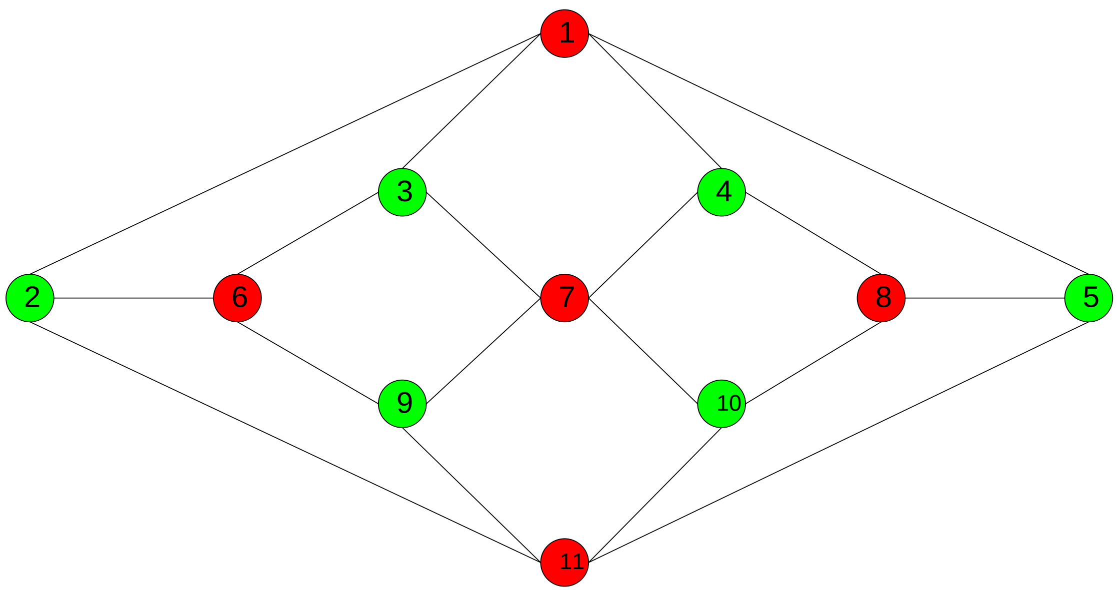
Sunt aceste grafuri izomorfe?

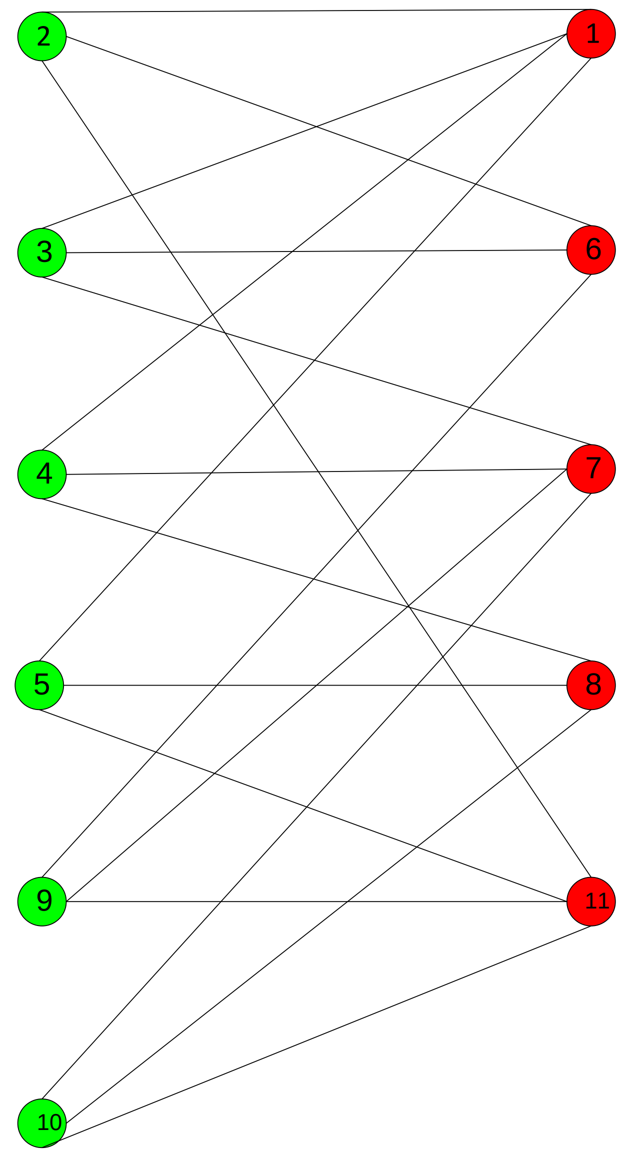




Grafuri standard

Graf bipartit





Graf bipartit

- Un graf neorientat $G = (V, E)$ se numește **bipartit** $\Leftrightarrow$ există o partiție a lui V în două submulțimi V_1, V_2 (**bipartiție**):

$$V = V_1 \cup V_2$$

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

astfel încât orice muchie $e \in E$ are o extremitate în V_1 și cealaltă în V_2:

$$|e \cap V_1| = |e \cap V_2| = 1$$

Graf bipartit

Observație

- $G = (V, E)$ **bipartit** $\Leftrightarrow$

  există o colorare a vârfurilor cu două culori:

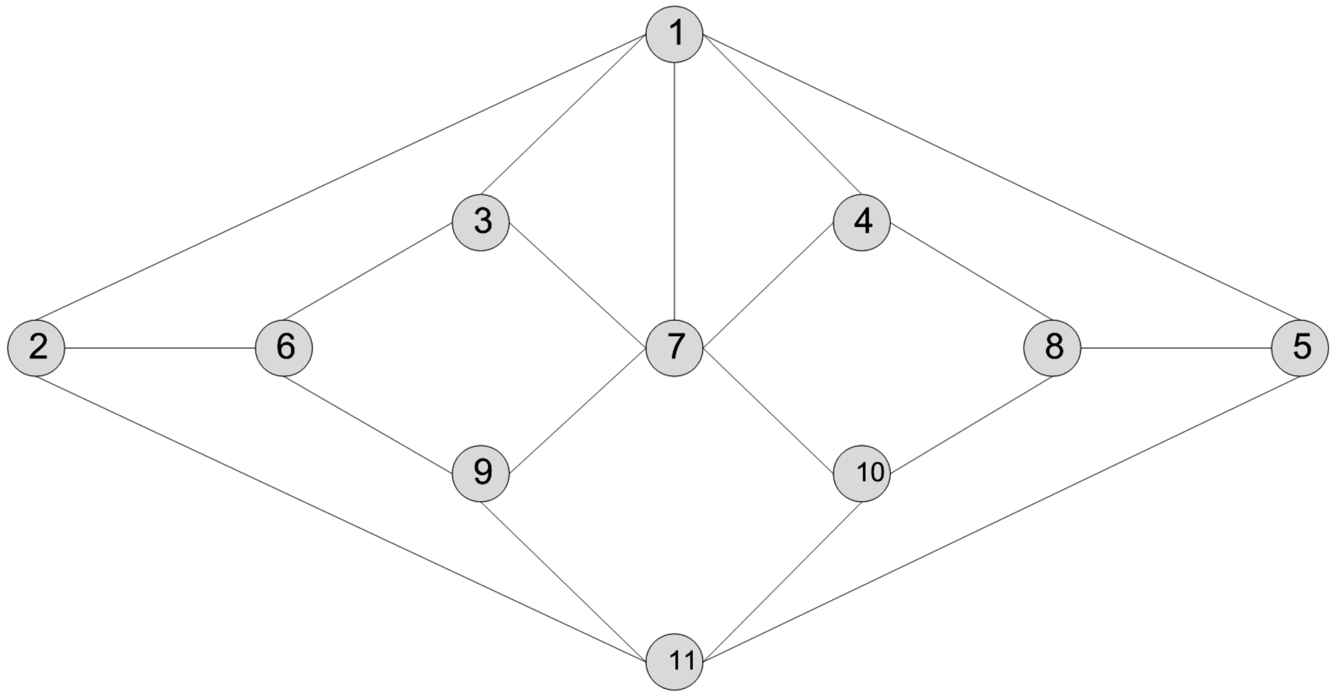
  $$c : V \rightarrow \{1, 2\}$$

  astfel încât pentru orice muchie $e=xy\in E$ avem

  $$c(x) \neq c(y)$$

  (**bicolorare**)

Graf bipartit

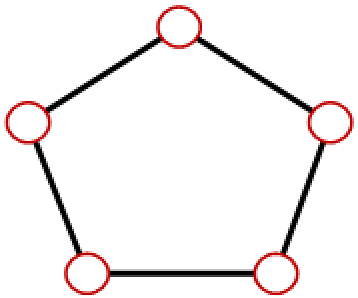


nu este bipartit

Grafuri standard

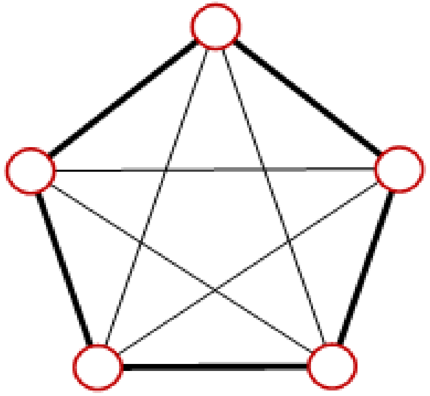
- P_n – lanţ elementar

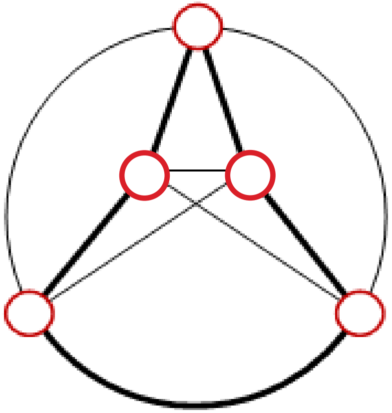
- C_n – ciclu elementar



Grafuri standard

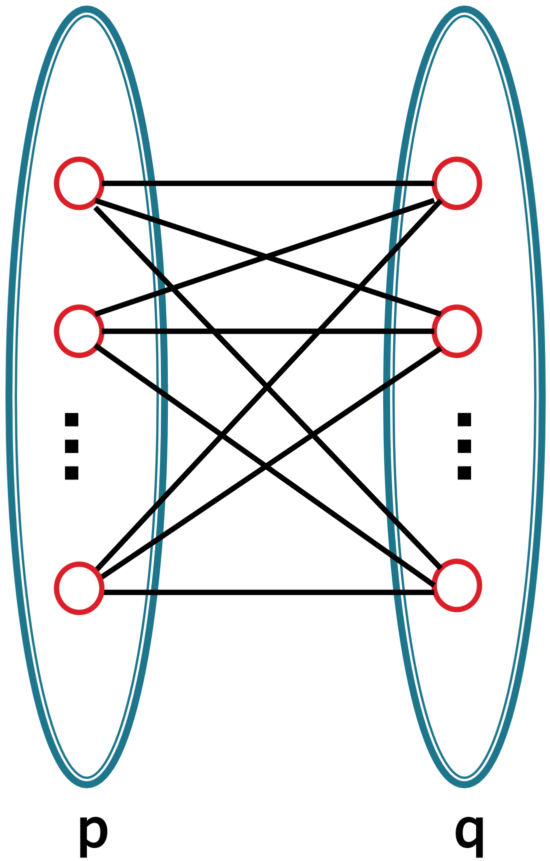
- K_n – graf complet





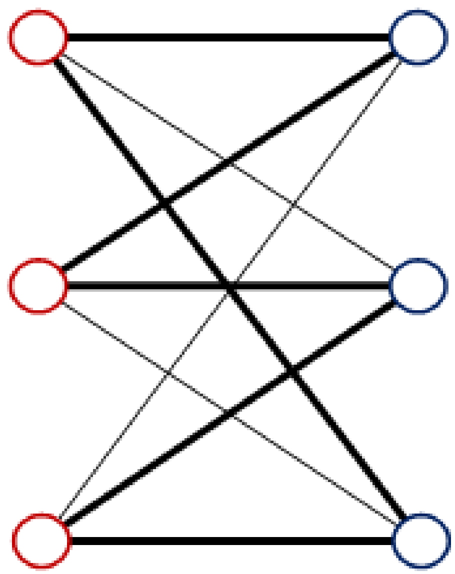
Grafuri standard

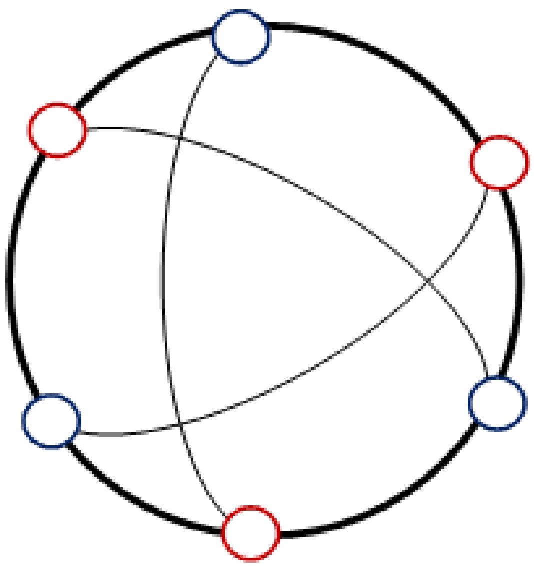
- $K_{p,q}$ – graf bipartit complet



Grafuri standard

- $K_{3,3}$





Secvenţe de grade

- Dată o secvenţă de numere s, se poate construi un graf având secvenţa gradelor s?
- Dar un multigraf?
- Dar un arbore?

  - Condiţii necesare
  - Condiţii suficiente