Geometrie C6

Forme biliniare și forme pătratice

· $g: V\times V \to K$ e biliniară dacă e liniară în raport cu fiecare ag

$$g(ax+by, z) = ag(x,z) + bg(y,z)$$
$$g(x, ay+bz) = ag(x,y) + bg(x,z)$$

Obs: simetrică: $g(x,y) = g(y,x)$

antisimetrică: $g(x,y) = -g(y,x)$

Ex: Pe $\mathbb{R}^n$ $g(x,y) = \sum x_i y_i$ sim

$\mathbb{R}^{2n}$ $g(x,y) = \sum_{1}^{n} (x_{2i-1}y_{2i} - x_{2i}y_{2i-1})$ antisim

Fie $B = \{e_1, \dots e_n\}$ bază

$$g_{ij} = g(e_i, e_j) \qquad G = (g_{ij})$$

$x = \sum x_i e_i$

$y = \sum x_j e_j$

$$g(x,y) = g(\sum x_i e_i, \sum x_j e_j) = \sum_{i,j} x_i y_j\, g(e_i, e_j) = \sum_{i,j} x_i y_j\, g_{ij} \quad (*)$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$g(x,y) = {}^tX G Y = (x_1, \dots x_n)\, G \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La o schimbare de bază $B' = \{e'_k\}$, $e'_k = \sum a_{ek} e_e$

$$g(\sum x'_k e'_k, \sum y'_m e'_m) = \sum x'_k y_m\, g(\sum a_{lk} e_l, \sum a_{sm} e_s) = x'_k y'_m a_{lk} a_{sm} g_{ls}$$
$$= {}^tX' ({}^tAGA) Y'$$

$G' = {}^tA\,G\,A$ cu A nedegenerat (~~înainte~~ matricea de trecere între baze)

$\Rightarrow$ se pot defini:

rangul unei f. biliniare

$rg(g) := rg\ G$

g sim $\Leftrightarrow$ ${}^tX G Y \overset{t}{\Rightarrow} {}^tY\,{}^tG X \quad \forall X, Y \Rightarrow G = {}^tG$

antisim $\Leftrightarrow$ $G = -{}^tG$

Obs.: Dacă g e sim. (sau antisim)

$Ker(g) := \{x \in V / g(x,y) = 0 \ \forall y \in V\}$

g (care e sim sau antisim) se numeste nedegenerată dacă $Ker g = \{0\}$

Obs: $g(x,y) = 0 \ \forall y \Rightarrow {}^tX G Y = 0 \ \forall y$

$x \in Ker g$ $\qquad {}^tX\cancel{G} = 0 \Leftrightarrow {}^tG X = 0$

$Ker g \neq \{0\} \Leftrightarrow \det G = 0 \Leftrightarrow rg\, g < n$

g e degenerata

$car K \neq 2$

caracteristic de K

Forme pătratice

Fie $g: V \times V \to K$ simetrică

$q: V \to K$, $q(x) = g(x,x)$

$q(x) = \sum g_{ij} x_i x_j = {}^tX G X$

q e forma pătratică asociată lui g

Obs: $g(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ (identitatea de polarizare)

Obs: Matricea G e matricea formei pătratice

obs: rangul lui $q \overset{def}{=} rg\, g$

Există o bază în care $q(x) = \sum_{1}^{r} a_i x_i^2$, $r = rg\, q$

formă canonica

Dacă q e în forma canonică atunci $G = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$

Teorema (Gauss): Pt. $\forall$ formă pătratică există un reper în care ea ia forma canonică

Dem: Fie $B = \{e_i\}$ $q(x) = \sum g_{ij} x_i x_j$ $(g_{ij} = g_{ji})$

Inducție după nr. m de coordonate care apar în scrierea lui q

$m=1$ $\quad g_{11} = x_1^2$ ✓

$m-1 \mapsto m$

$q(x) = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} \cdot x_i x_j$

Nu e posibil ca toți $g_{ii} = 0$ ~~să~~ s

În caz contrar, $\exists g_{ij} \neq 0$ $i \neq j$

Punem $\cancel{u_i = x_i + x_j}$ $\quad \begin{cases} x_i = u_i + u_j \\ x_j = u_i - u_j \\ x_k = u_k & k \neq i,j \end{cases}$

$\cancel{u_j = x_i - x_j}$

$u_k = x_k \quad k \neq i,j$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & 0 & \ldots 1 \ldots & 0 \\ & & & 1 & \end{pmatrix} & i \\ j & \end{array}$$

~~Fie $g_{11} \neq 0$~~

$\to$ ~~pot~~ presupun de la început că $\exists$ un $g_{ii} \neq 0$

Fie $g_{11} \neq 0$

Grupez termenii în x_1

$q(x) = g_{11} x_1^2 + 2 g_{12} x_1 x_2 \ldots + 2 g_{1n} x_1 x_n + q'(x) = \left(\sqrt{g_{11}}\, x_1 + \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} x_2 + \ldots + \frac{g_{1n}}{\sqrt{g_{11}}} x_n\right)^2 -$

$- \frac{g_{12}^2}{g_{11}} x_2^2 - \ldots - \frac{g_{1n}^2}{g_{11}} x_n^2 + q'(x) =$

$= \left(\sqrt{g_{11}}\, x_1 + \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} x_2 + \ldots + \frac{g_{1n}}{\sqrt{g_{11}}} x_n\right)^2 + q''(x)$

nu conține decât $x_2 \ldots x_n$

Fac schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{g_{11}}\, x_1 + \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} x_2 + \dots + \frac{g_{1n}}{\sqrt{g_{11}}} x_n \\ u_i = x_i \quad i \geq 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow q(u) = u_1^2 + \underbrace{q'(u)}_{\substack{\parallel \text{ ef. ip. de inducție} \\ \sum_2^n a_i u_i^2}}$

Obs: $g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1x_2 + \dots + 2g_{1n}x_1x_n = g_{11}\left(x_1^2 + 2\frac{g_{12}}{g_{11}}x_1x_2 + \dots + 2\frac{g_{1n}}{g_{11}}x_1x_n\right) =$

$= g_{11}\left(x_1 + \frac{g_{12}}{g_{11}}x_2 + \dots + \frac{g_{1n}}{g_{11}}x_n\right)^2 - \dots$

Obs: Am dem. în particular că o matrice simetrică are toate val proprii reale și multiplicitățile liniar algebrice coincid cu multiplicitățile geometrice.

Ex: $q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3$ (pe $\mathbb{R}^3$)

1. $\begin{cases} x_1 = u_1 + u_2 \\ x_2 = u_1 - u_2 \\ x_3 = u_3 \end{cases}$

$q(u) = u_1^2 - u_2^2 + \cancel{u_1u_3} + u_2u_3 - \cancel{u_1u_3} + u_2u_3 = u_1^2 - u_2^2 + 2u_2u_3$

2. $u_1^2 - (u_2^2 \mp 2u_2u_3) = u_1^2 - (u_2 \mp u_3)^2 + u_3^2$ (posibil să fie greșit la calcul)

$v_1 = u_1$

$v_2 = u_2 \mp u_3 \quad \Rightarrow q(v) = v_1^2 - v_2^2 + v_3^2$

$v_3 = u_3$

Obs: Dacă $K = \mathbb{R}$ și $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$

Renumerotez coord a.î. $q(x) = \sum_1^p a_i x_i^2 + \sum_{p+1}^{n} a_i x_i^2$ cu $a_1, \dots a_p > 0$ și $a_{p+1}, \dots a_n < 0$

Sch. de coord.:

$$\begin{cases} x_i = \frac{1}{\sqrt{a_i}} u_i & i=\overline{1,p} \\ x_j = \frac{1}{\sqrt{-a_j}} u_j & j=\overline{p+1,r} \\ x_k = y_k & k=\overline{r+1,n} \end{cases}$$

$\Rightarrow q(u) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_r^2$

T. (Sylvester): Fie q o formă pătratică pe $\mathbb{R}$. Nr. de termeni >0 (respectiv <0) dintr-o formă canonică nu depinde de bază.

($\in$ același pt. toate formele canonice)

Obs: Nr de termeni negativ s.n. index

Dacă o formă pătratică reală are $r=n$ și index 0, ea se numește pozitiv definită.

Obs: G e poz. def. dacă toate valorile proprii sunt pozitive

Metoda lui Jacobi

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix}$$ e poz def. dacă $g_{11} > 0$

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$\vdots$

P Valorile proprii ale unei matrice ~~sunt reale~~

- simetrice sunt reale
- antisimetrice sunt pur imaginare

Dem: Fie λ val proprie pt. G $(\lambda \in \mathbb{C})$

$\Updownarrow$

$\exists v \neq 0$ a.î. $G \cdot v = \lambda v$

vector coloană într-o bază

v_i: $\sum_{j=1}^{n} g_{ij} v_j = \lambda v_i, \ i=\overline{1,n}$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, v_j \overline{v_i} = \lambda \sum v_i \overline{v_i}$$

$$G \text{ sim} \Rightarrow \sum_{i,j} g_{ij}(\underbrace{v_j\overline{v_i} + v_i\overline{v_j}}_{\in \mathbb{R}}) = \lambda \underbrace{\sum |v_i|^2}_{\in \mathbb{R}} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

$$G \text{ antisim } \sum_{i,j} g_{ij}(v_j\overline{v_i} - v_i\overline{v_j}) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \quad (z = -\overline{z})$$