Subgrup normal. Grup factor.

EX: $\mathbb{Z}_n = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ (de grup factor) ($H \trianglelefteq G$)

Def Subgrupul normal ($xhx^{-1} \in H$, $h \in H, x \in G$)
ex trivial

Sunt echivalente afirmațiile
a) $H \trianglelefteq G$
b) $xH = Hx, \forall x \in G$
c) $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$

Observație

$(G, \cdot)$ grup, $H \subseteq G$
$x_1, x_2 \in G$ Atunci
$x_1 H = x_2 H$ sau $x_1 H \cap x_2 H = \emptyset$

Demonstrație

Dacă sunt disjuncte ok
Ppcă $x_1 H \cap x_2 H \neq \emptyset$
$\exists h_1, h_2 \in H$ a.î. $x_1 h_1 = x_2 h_2$
Doresc să arăt că $x_1 H = x_2 H$

1) $x_1 H \subset x_2 H$

$x_1 h = (x_1 h_1) h_1^{-1} \cdot h \Leftrightarrow \cancel{x_1} \Leftrightarrow x_1 h = x_2 \underbrace{(h_2 h_1^{-1} h)}_{\in H} \Rightarrow$

$x_2 h_2 = x_1 h_1$

$\Rightarrow x_1 h \in x_2 H$

2) $x_2 H \subset x_1 H$

$x_2 h = (x_2 h_2) h_2^{-1} h = x_1 \underbrace{(h_1 h_2^{-1} h)}_{\in H} \cancel{\in x_1 H}, \forall h \in H$

$\Rightarrow x_2 H \subset x_1 H$

$(1),(2) \Rightarrow x_1 H = x_2 H$

$(G, \cdot)$ grup, $H \trianglelefteq G$

$\frac{G}{H}$ grup factor

$\frac{G}{H} = \{ xH \mid x \in G \}$

Notație $x, y \in G$

$\hat{x} = \hat{y}$ dacă $\cancel{\hat{x} H = \hat{y} H}$ $xH = yH$

Ex: $H = n\mathbb{Z} = \{ nk \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$\hat{0} H = \{ 0, n, 2n, \dots, -n, -2n, \dots \}$

$\frac{G}{H} = \{ \hat{x} \mid x \in G \}$

Notație $\frac{G}{H} = \{ \hat{x} \mid x \in G \}$

Introducem o operație

x, y

$\hat{x} * \hat{y} = \widehat{x \cdot y}$

Definiția e bună

Trebuie să arăt

$\hat{x}_1 * \hat{y}_1 = \widehat{x_1 \cdot y_1}$

$\hat{x} = \hat{y}$ - egalitate de mulțimi

$xH = yH$

$x = y h_1 h_2^{-1}$

Trebuie să arăt că $\cancel{x_1 H y} = xyH = x_1 y_2 H$

$\boxed{\begin{array}{l} \hat{x} = \hat{x}_1, \ x = \cancel{h_1^{-1} x_1 h_2} \ x_1 h_2 \\ \hat{y} = \hat{y}_1, \ y = h_3^{-1} y_1 h_4 \end{array}}$

$h_1, h_2, h_3, h_4 \in H$

$\cancel{\hat{x} = \hat{x}_1} \Leftrightarrow x = x_1 h_1 h_2^{-1}$

$\cancel{\hat{y} = \hat{y}_1} \Leftrightarrow y = y_1 h_1 h_2^{-1}$

$\cancel{\hat{x} \cdot \hat{y} = x_1 h_1 h_2^{-1} y_1 h_1 h_2^{-1}}$

$xy = x_1 (h_1 \cdot y_1) h_2$ $\Rightarrow xy = x_1 y_1 h_1 h_2$

Subgrupul e normal $y_1 H = H y_1$

$= x_1 y_1 h_3 \ \& \ h_3 = h_1 h_2$

3/

// grupul factor are sens doar pentru subgrupurile no[...]

Teorema $\left(\frac{G}{H}, +\right)$ grup.

Demonstratie

1) asociativitate

$(\widehat{x*y}) * \hat{z} = \hat{x} * (\hat{y} * \hat{z})$

$(\hat{x} * \hat{y}) * \hat{z} = \widehat{xy} * z = \widehat{(xy)z}$

$\hat{x} * (\hat{y} * \hat{z}) = x * \widehat{yz} = \widehat{x(yz)}$

asociativitatea din G $\Rightarrow$ asociativitatea din $\frac{G}{H}$

2) element neutru

$\hat{x} * \hat{e} = \hat{e} * x = \hat{x}$

$\widehat{x \cdot e} = \hat{x}$

$\widehat{e \cdot x} = \hat{x}$

3) Existenta inversului

$\hat{x} \cdot \widehat{x^{-1}} = \widehat{x x^{-1}} = \hat{e}$

$\widehat{x^{-1}} \cdot \hat{x} = \widehat{x^{-1} x} = \hat{e}$

Observatie $(G, \cdot)$ grup finit, $H \trianglelefteq G$

Atunci $\left|\frac{G}{H}\right| = \frac{|G|}{|H|}$ $\quad (|H| \mid |G|)$

$\frac{G}{H} = \{ xH \mid x \in G \}$

Ppca $\left|\frac{G}{H}\right| = r$

$x_1, x_2, \dots, x_r \in G$ a.î. $\frac{G}{H} = \{x_1H, x_2H, \dots, x_rH\}$

$x_iH \neq x_jH$ pt $i \neq j$ $\Rightarrow$ $x_1H \cap x_2H = \emptyset, \forall i, j$

$x_1H \cup x_2H \cup \dots \cup x_rH = G \Rightarrow |G| = \sum_{i=1}^{r} |x_iH| =$

$|x_1H| = |H|$ (demonstrat în cursul anterior)

$= r|H| \Rightarrow r = \frac{|G|}{|H|}$

Definiție Morfism de grupuri ...

$(G_1, \cdot)$ $(G_2, *)$

f izomorfism

Observații - f morfism de grupuri

1) $f(e_1) = e_2$

2) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

Demonstrație

$f(e_1) = f(e_1 \cdot e_1) = f(e_1) * f(e_1) = e_2$

$f(x^{-1}) * f(x) = f(x \cdot x^{-1}) = f(e_1) \Leftrightarrow f(x^{-1}) * f(x) = e_2$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

$\operatorname{Ker} f = \{ g \in G \mid f(g) = e_2 \}$

$\operatorname{Im} f = \{ f(g) \mid g \in G_1 \}$

$\operatorname{Im} f \subseteq G_2$

Scopul e să demonstrăm că $\frac{G_1}{\operatorname{Ker} f} \simeq \operatorname{Im} f$

$\operatorname{Im} f \subseteq G_2$

$e_2 \in \operatorname{Im} f$

$x, y \in \operatorname{Im} f \Rightarrow x * y \in \operatorname{Im} f$

$x = f(g_1)$

$y = f(g_2)$

$x * y = f(g_1 g_2) \in \operatorname{Im} f, \; g_1, g_2 \in G_1$

Inversul și neutru $\in \operatorname{Im} f$ -

~~Fie $x * y$~~

Fie $x, y \in \ker f$, $x, y \in \ker f$

$f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$ | $\Rightarrow f(xy) = e_2 \in \ker f$

pt $f(x) = e_2$

$f(y) = e_2$

$f(x^{-1}) = f^{-1}(x) \Rightarrow x^{-1} \in \ker f$

Fie $g \in G$, $x \in \ker f$

$g x g^{-1} \in \ker f$?

$f(g x g^{-1}) \overset{\text{def morfism}}{=} f(g) * f(x) * f(g^{-1}) =$

Idee pt a demonstra că $\frac{G_1}{\ker f} \simeq \operatorname{Im} f$