Lema de determinism

Fie $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ un NFA.

Atunci $(\forall)\ x \in \Sigma^*$, cu $\left.\begin{array}{l} Kx \vdash^* N \\ Kx \vdash^* P \end{array}\right| \Rightarrow N = P$
$(\forall)\ K \subseteq Q$

Lemă

Fie $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ un NFA

$(\forall)\ x \in \Sigma^*$ și pentru toți $p \in Q$, $p x \vdash^* p$.

atunci $\{q\} x \vdash^* P$, pentru un P cu $p \in P$.

Teoremă

Fie $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ un NFA și $M' = (Q', \Sigma', \delta', s', F')$ obținut prin subset-construction atunci $L(M) = L(M')$!

Dem:

Din lemă $(\forall)\ x \in \Sigma^*$ din M $sx \vdash^* p$.

dacă și numai dacă $\{s\} x \vdash^* P$ pentru un P cu $p \in P$

$\{s\} x \vdash^* P$ în M ddacă

$\{s\} x \vdash^* P$ în M'

$x \in L(M) \Leftrightarrow sx \vdash^* f$ pentru un $f \in F$

$\Leftrightarrow \{s\} x \vdash^* P$, $f \in P$ în M.

$\Leftrightarrow \{s\} x \vdash^* P$, în M' și $P \cap F \neq \emptyset$.

$\Leftrightarrow s'x \vdash^* p,\ p \in F$

$\Leftrightarrow x \in L(M')$.

Proprietăți de închidere ale automatelor finite

Reuniune

$L_1 = L(M_1)$, $L_2 = L(M_2)$ unde M_1 și M_2 sunt două DFA cu $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, s_1, F_1)$

$M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, s_2, F_2)$.

Arătăm: $L = L_1 \cup L_2$ este un limbaj DFA.

Fie λ-NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ unde

$Q = Q_1 \cup Q_2$

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$\delta = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{(s, \lambda, s_1), (s, \lambda, s_2)\}$

$F = F_1 \cup F_2$.

Acum demonstrăm că $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$.

(1). Fie $x \in L(M) \Rightarrow sx \vdash^* f$ unde $f \in F = F_1 \cup F_2$

Dacă $f \in F_1$ obținem $sx \vdash_M^* , s_1x \vdash_M^* f$.

și obținem $s_1 x \vdash_{M_1}^* f \Rightarrow x \in L(M_1)$.

Dacă $f \in F_2$, ~~...~~ $sx \vdash_M$ ~~...~~ $s_2 x \vdash_M^* f \Rightarrow$

$\Rightarrow s_2 x \vdash_{M_2}^* f \Rightarrow x \in L(M_2)$.

Din cele de mai sus $\Rightarrow x \in L(M_1) \cup L(M_2) = L_1 \cup L_2$

$\Rightarrow L(M) \subseteq L_1 \cup L_2$.

(2) Fie $x \in L_1 \cup L_2$.

Pp. fără a pierde generalitatea că $x \in L_1 = L(M_1)$.

$s_1 x \vdash^*_{M_1} f$ unde $f \in F_1$.

$s\, x \vdash_M s_1 x \vdash^*_M f$. $\Rightarrow x \in L(M)$, deci

$L_1 \cup L_2 \subseteq L(M)$

Din (1) și (2). $\Rightarrow L_1 \cup L_2 = L(M)$

Cum un λ-NFA ~ DFA $\Big| \Rightarrow L_1 \cup L_2$ e DFA language

2 Complementarea

Fie $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ un DFA.

atunci $\overline{M} = (Q, \Sigma, \delta, s, Q - F)$.

3 Intersecția

$L = L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

4 Concatenarea

$M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, s_1, F_1)$.

$M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, s_2, F_2)$.

$L(M) = L(M_1) L(M_2)$.

$M = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, s_1, F_2)$.

$\delta = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{(f, \lambda, s_2) \mid f \in F_1\}$.

5. Stelarea

$L = L(M)$ unde $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

$L^* = L(M')$ unde

$M' = (Q', \Sigma', \delta', s', F')$.

$Q' = Q \cup s'$

$\Sigma' = \Sigma$.

$\delta' = \delta \cup \{(s', \lambda, s)\} \cup \{(f, \lambda, s') \mid f \in F\}$.

$F' = F \cup \{s'\}$.

Proprietăți de decidabilitate

1. Apartenența

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

$x \in \Sigma^*$

$x \in L(M)$?

Dem so parcurge x în M astfel.

$sx \vdash^* f$. Dacă $f \in F$. A.

$f \notin F$ F.

2. DFA vid

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

$L(M) = \emptyset$?

Dem $L(M) = \emptyset$ ddaca nu $\exists$ nici un drum de la s la nici un f din F

Daca $F = \emptyset$, e imediat

Daca $F \neq \emptyset$ se marcheaza toate starile accesibile din s, apoi toate starile accesibile din cele descoperite anterior, pana cand nu mai $\exists$ astfel de stari. Daca printre starile marcate $\exists$ cel putin o stare finala e nevid daca nu $\exists$ nici o stare finala atunci $L(M) = \emptyset$.

3. DFA Universal

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

$L(M) = \Sigma^*$.

Dem

4. Incluziunea de limbaje

$M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, s_1, F_1)$

$M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, s_2, F_2)$.

$L(M_1) \subseteq L(M_2)$?

Dem $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)} = \emptyset \Rightarrow L(M_1) \subseteq L(M_2)$.

5. Echivalenta

$L(M_1) = L(M_2)$?

Dem

$L(M_1) \subseteq L(M_2)$ apoi $L(M_2) \subseteq L(M_1)$.

LEMA DE POMPARE PENTRU DFA :

Fie $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ un DFA.

cu $p = |Q|$. Atunci $(\forall)\ x \in L(M)$ cu $|x| \geq p$

x se descompune in uvw, cu $u, v, w \in \Sigma^*$

astfel incat
i). $|uv| \leq p$
ii) $|v| \geq 1$
iii). $(\forall)\ i \geq 0\ uv^i w \in L(M)$.

Dem

Fie $x \in L(M)$ cu $|x| \geq p$. Atunci M are configuratia de acceptare pentru x:

$\rho_0 a_1 \dots a_n \vdash \rho_1 a_2 \dots a_n \vdash \dots \vdash \rho_{n-1} a_n \vdash \rho_n$

unde $\rho_0 = s$, $\rho_n \in F$.

Considerand primele p tranzitii $s, \rho_1, \dots \rho_p$ nu pot fi distincte deoarece $\exists$ doar p stari distincte (din principiul cutiei) $\Rightarrow \exists\ i, j \in \overline{0, p}$ a.i. $\rho_i = \rho_j$

unde $0 \leq i < j \leq p$.

Fie $u = a_1 \dots a_i$

$v = a_{i+1} \dots a_j$

$w = a_{j+1}, \dots a_n$

Deci avem $s = \rho_0$

$\rho_0 u \vdash^* \rho_i$

$\rho_i v \vdash^+ \rho_j \quad (\rho_i = \rho_j)$

$\rho_j w \vdash^* \rho_r$

Dacă $\rho_i = \rho_j \Rightarrow \rho_i v^k \vdash^* \rho_j$ pentru $(\forall)\, k \geq 0$.

Deci avem ca (i) $|uv| \leq p$ deoarece $j \leq p$

ii) $|v| \geq 1$ deoarece $i < j$

iii) $uv^k w \in L(M)$ $(\forall)\, k \in \mathbb{N}$

deoarece $\rho_0 uv^k w \vdash^* \rho_i v^k w \vdash^* \rho_j w \vdash^* \rho_r \in F$.

qed.

Proprietăți de decidabilitate:

6 Finitudinea

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

$L(M)$ finit? e decidabil

Dem $L(M)$ finit $\Leftrightarrow M$ nu acceptă ~~...~~ cuvinte x a.î. $|Q| \leq x < 2|Q|$

Dem Pp ca M^{lnu} accepta nici un cuv. x a.î.

$|Q| \le |x| < 2|Q|$ atunci $L(M)$ e infinit.

Deoarece $L(M)$ e infinit, trebuie sa accepte si cuvinte x cu $|x| \ge 2|Q|$. Din L.P. $x = u.v.w$ cu $|Q| \ge |v| \ge 1$ si $x' = uw \in L(M)$.

De remarcat ca $|x| > |x'| \ge |x| - |Q|$.

Daca $|x'| \ge 2|Q|$ se repeta procesul

$$2|Q| > |x'| \ge |Q| \quad (2|Q| - |Q|) \text{ Ø.}$$

închiderea la morfisme

Fie $L \subseteq \Sigma^*$ un DFA language $\Rightarrow \exists$.

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ un DFA cu $L = L(M)$

Fie $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ un morfism

$f(L) = \{ f(x) \mid x \in L \}$ este limbaj DFA

$M' = (Q, \Delta, \delta', s, F)$.

$(p, f(a), q) \in \delta' \Leftrightarrow \delta(p, a) = q$.

M' este un lazy DFA. cu $L(M') \in \mathcal{L}_{DFA}$.

$L(M') = f(L) \in \mathcal{L}_{DFA}$.

Th. Kleene

Dacă limbajul L este acceptat de un DFA atunci $\exists$ o expresie regulată E a.î. $L(E) = L$.

Dem Fie $A = (\{1, \ldots, n\}, \Sigma, \delta, s, F)$ automatul după o eventuală renumerotare de stări. $L(A) = L$

Fie mulțimile

$$R_{ij}^{k} = \{x \mid \delta(i,x) = j \text{ și } x = yz,\ |y| \neq 0,\ |y| \neq |x|,\ \delta(i,y) = t \text{ și } |t| \leq |k|\}$$

R_{ij}^{k} – mulțimea cuvintelor de la i la j ce trec prin cel mult k stări.

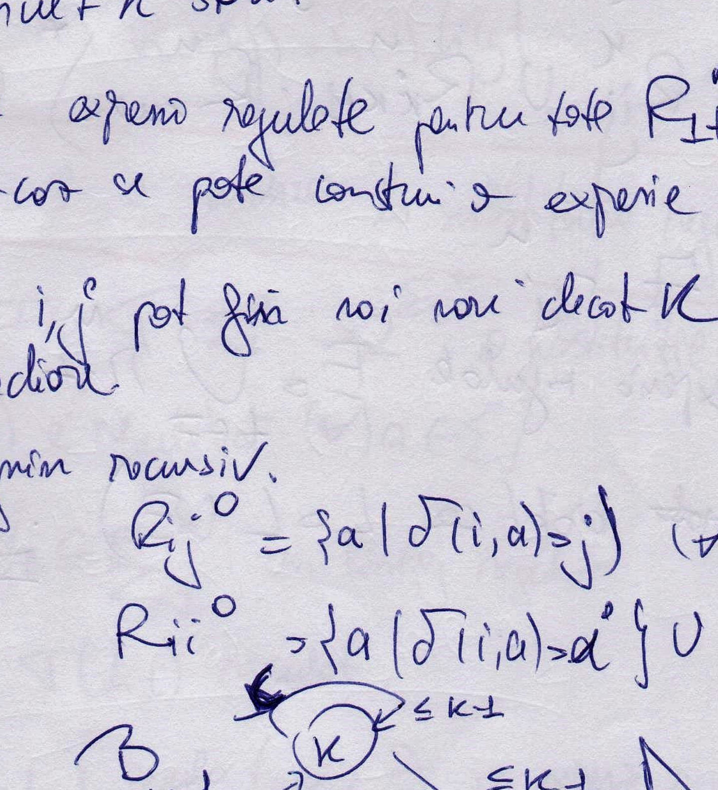
Vreau expresii regulate pentru toate R_{1t}^{n} $(\forall)\ t \in F$.
În acest caz se poate construi o expresie regulată pentru ~~L~~.

În R_{ij}^{k} i, j pot fi mai mari decât k, restricția e la stările intermediare.

Definim recursiv.

$$R_{ij}^{0} = \{a \mid \delta(i,a) = j\} \quad (\forall)\ i \neq j$$

$$R_{ii}^{0} = \{a \mid \delta(i,a) = i\} \cup \{\lambda\}.$$



$$\Rightarrow R_{ij}^{k} = A \cup B C^{*} D$$

$$R_{ij}^{k} = R_{ij}^{k-1} \cup R_{ik}^{k-1} \left(R_{kk}^{k-1}\right)^{*} R_{kj}^{k-1}.$$

Dem prin inductie ca $\exists$ expresii regulate $(\forall)$ R_{ij}

$(\forall)$ i, j, k, $\exists$ r_{ij}^{k} expresie regulată cu $L(r_{ij}^{k}) = R_{ij}^{k}$

$k=0$: R_{ij}^{0} - e finită (contine eventual λ dacă $i=j$)

se construieste o expresie regulată în mod trivial

inductie: Pp că $(\forall)$ k $\exists$ r_{ij}^{k} cu $R_{ij}^{k} = L(r_{ij}^{k})$ $\forall$ $i, j \in Q$

Pas inductiv: dem. că $\exists$ o expresie regulată R_{ij}^{k+1}.

fie $r_{ij}^{k+1} = r_{ij}^{k} \cup r_{i\,k+1}^{k} (r_{k+1,k+1}^{k})^{*} r_{k+1\,j}^{k}$

$$L(r_{ij}^{k+1}) = L(r_{ij}^{k}) \cup L(r_{i\,k+1}^{k}) \cdot \left(L(r_{k+1,k+1}^{k})\right)^{*} L(r_{k+1\,j}^{k})$$

$$= R_{ij}^{k} \cup R_{i\,k+1}^{k} \cdot (R_{k+1\,k+1}^{k})^{*} R_{k+1\,j}^{k} = R_{ij}^{k+1}$$

Deci $\forall$ i, j, k $\exists$ r_{ij}^{k}

Considerăm expresia regulată $E = \bigcup_{t \in F} r_{1t}^{n}$

E trivial că ~~...~~ obțin că $L = L(E)$. $\square$

Substituție

$$\sigma : \Sigma_1^* \to 2^{\Sigma_2^*}$$

$\sigma(\lambda) = \{\lambda\}$

$\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) \quad (\forall)\ x, y \in \Sigma_1^*$

Morfism

$f : \Sigma_1^* \to 2^{\Sigma_2^*} \quad |f(a)| = 1 \quad (\forall)\ a \in \Sigma_1$

$h : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$

$h(\lambda) = \lambda$

$h(xy) = h(x) \cdot h(y)$

$\boxed{\text{REG e închisă la substituții regulate}}$

Fie $\sigma : \Sigma_1^* \to 2^{\Sigma_2^*}$ o substituție cu proprietatea că $\sigma(a)$ e regulată $(\forall)\ a \in \Sigma_1^*$

Fie $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ un limbaj regulat.

Vrem $\sigma(L_1)$ regulat.

Cum L_1 e regulat $\Rightarrow \exists$ o expresie regulată r_1 ce descrie L_1

$L(r_1) = L_1$

$\sigma(a)$ regulat $(\forall)\ a \in \Sigma_1 \Rightarrow \exists\ r_a$ expresii regulate ce descriu $\sigma(a)$. $(\forall)\ a \in \Sigma_1$

r_1 – expresie regulată peste Σ_1, r_a – expr. reg. peste Σ_2

Construim expresia r_2 din r_1 înlocuind fiecare simbol a din r_1 cu expresia r_a.

r_1 - regulată
r_a - regulată $(\forall)\, a \in \Sigma_1$ $\Big| \Rightarrow r_2$ regulată

formată din $\cup, *, \cdot$ de expresii regulate peste Σ_2

Trebuie dem că $L(r_2) = \sigma(L_1) \Leftrightarrow L(r_2) = \sigma(L(r_1))$

Dem prin inducție după nr de operatori din r_1.

Vf. Dacă r_1 are 0 operatori $\Rightarrow r_1 \in \{\emptyset, \lambda\} \cup \Sigma_1$.

Dacă $r_1 = \emptyset \Rightarrow r_2 = \emptyset \Rightarrow L(r_2) = L(\emptyset) = \sigma(\emptyset) = \sigma(L(r_1))$

$r_1 = \lambda \Rightarrow r_2 = \lambda \Rightarrow L(r_2) = L(\lambda) = \{\lambda\} = \sigma(\{\lambda\}) = \sigma(L(r_1))$

$r_1 = a \Rightarrow r_2 = r_a \Rightarrow L(r_a) = \sigma(a)$ din def lui r_a
$\in \Sigma_1$

Pp $L(r_2) = \sigma(r_1)$ pentru expresia r_1 cu cel mult k op. operatori

Dem $P(k) \to P(k+1)$

Caz 1. $r_1 = r_1' + r_1''$. Din construcția lui r_2 avem că $r_2 = r_2' + r_2''$ (dacă înlocuim în r_1' și în r_1'' fiecare $a \in \Sigma_1$ cu r_a)

Din ipoteza de inducție $\Rightarrow L(r_2') = \sigma(L(r_1'))$ și
$L(r_2'') = \sigma(L(r_2''))$

$L(r_2) = L(r_2' + r_2'') = L(r_2') \cup L(r_2'') = \sigma(L(r_1')) \cup \sigma(L(r_1''))$
$= \sigma(L(r_1') \cup L(r_1'')) = \sigma(L(r_1' + r_1'')) = \sigma(L(r_1))$

Caz 2. $r_1 = r_1' \cdot r_1''$. Din construcția lui r_2 avem

că $r_2 = r_2' \cdot r_2''$ (dacă înlocuim în r_1' și în r_1'' fiecare

$a \in \Sigma$ cu r_a).

Din ipoteza de inducție avem că $L(r_2') = \sigma(L(r_1'))$

$L(r_2'') = \sigma(L(r_1''))$

$$L(r_2) = L(r_2' r_2'') \overset{reg.}{=} L(r_2') \cdot L(r_2'') = \sigma(L(r_1'))\,\sigma(L(r_1''))$$

$$= \sigma(L(r_1') \cdot L(r_1'')) = \sigma(L(r_1)).$$

Caz 3 $r_1 = r_1'^{*} \Rightarrow r_2 = r_2'^{*}$

$$L(r_2) \overset{reg.}{=} L(r_2'^{*}) \overset{reg}{=} (L(r_2'))^{*} = (\sigma(L(r_1')))^{*} =$$

$$\sigma((L(r_1'))^{*}) = \sigma(L(r_1'^{*})) = \sigma(L(r_1)).$$

Reg e închisă la morfisme

Fie $L \subseteq \Sigma_1^*$ un limbaj regulat și $h: \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ un morfism.

Vrem $h(L) \in Reg$.

Iese imediat din Dem. anterioară, pentru că limbajele finite sunt regulate, deci caz particular pentru dem. anterioară.

Lema de pompare pentru independent de context

Fie $G = (N, \Sigma, P, S)$ și $L = L(G)$.

$m = \max\{|\alpha| \mid A \to \alpha \in P\}$ și

$p = 1 + m^{|N|+1}$

Atunci $(\forall)\ z \in L(G)$ cu $|z| \geq p$ are o secvență de derivare $S \Rightarrow^* uAv \Rightarrow^+ uxAyv \Rightarrow^+ uxwyv = z$ pentru un $A \in N$ și $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ astfel.

i). $|xwy| < p$

ii) $|xy| \geq 1$

iii) $ux^iwy^iv \in L$ ~~(G)~~ $i \in N$

Dem:

Un arbore m-ar cu $> m^h$ frunze are și înălțimea $> h$.

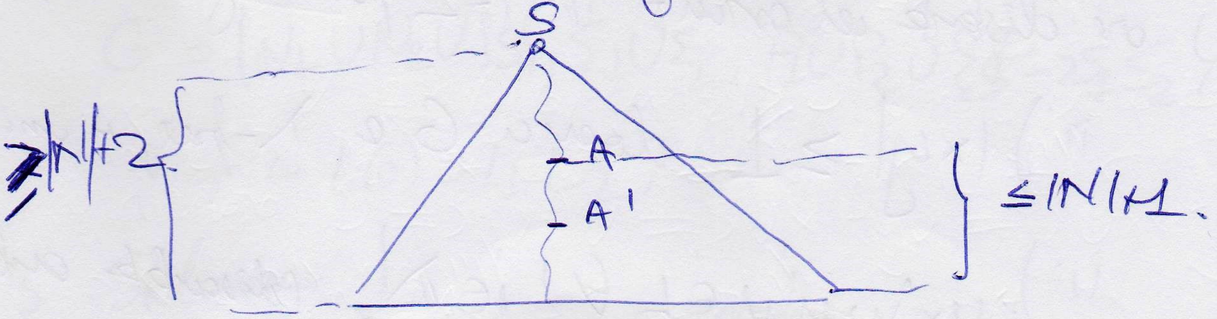
Atunci

i) Dacă un arbore de sintaxă pentru G are $> m^h$ producții ($m = \max rhs(G)$) atunci și înălțimea $> h$.

ii). Dacă înălțimea $< h$ atunci $(\forall)$ producție are lungimea $\leq m^h$.

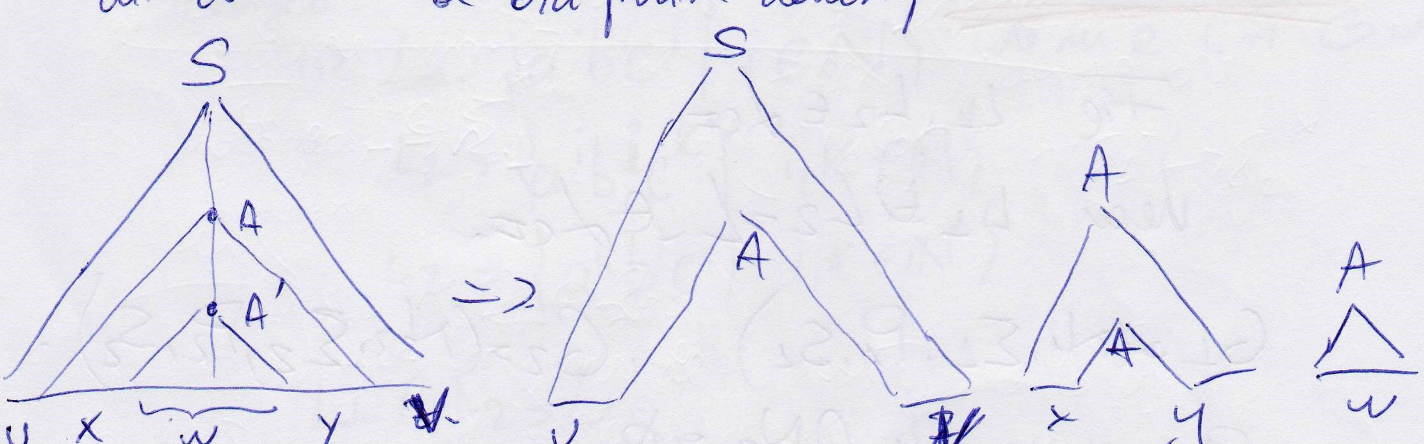
Fie z cu $|z| \geq p \geq \cancel{m} + m^{|N|+1}$

Avem orice arbore de sinteză ~~pentru~~ pentru z. are înălțimea $> |N|+1$. Fie cel mai lung drum de la rădăcina la frontiera.



Are lungimea $> |N|+1 \geq |N|+2$. (adică conține cel puțin $|N|+3$ simboluri).

Luând în considerare cele mai mici $|N|+1$ neterminale. Din principiul cutiei $\Rightarrow \exists$ un neterminal A ce apare de cel puțin 2 ori printre cele $|N|+1$ neterminale din drum. De aici rezultă descompunerea lui z.



$$S \overset{*}{\Rightarrow} uAv \overset{+}{\Rightarrow} uxAyv \overset{+}{\Rightarrow} uxwyv = z.$$

$S \Rightarrow^{*} uAv \Rightarrow^{+} uxAyv \Rightarrow^{+} ux^iAy^iv \Rightarrow^{*} ux^iw$ /

Considerand cele 3 condiții:

i) $|xwy| \leq p$ (deoarece partea superioară a lui A are distinctă cel mult $|N|+1$ pana la frontiera).

ii) $|xy| \geq 1$ deoarece G e λ-free și unit-free

iii) $ux^iwy^iv \in L(G)$ $i \in \mathbb{N}$ (din subpct anterior)

Proprietăți de închidere

$\mathcal{L}_{CF}$ e închis la $\cup$, $\cdot$, $*$ nu are închis la $\cap$ și $\overline{}$.

∞

1 Reuniunea

Fie $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{CF}$

Vrem $L_1 \cup L_2 = L \in \mathcal{L}_{CF}$

$G_1 = (N_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$, $G_2 = (N_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$.

Presupunem $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Fie $G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 | S_2\}, S)$

Avem $L(G) = L_1 \cup L_2 = L(G_1) \cup L(G_2)$

2 Concatenarea

$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{CF}$ vrem $L = L_1 \cdot L_2 \in \mathcal{L}_{CF}$.

$G_1 = (N_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$
$G_2 = (N_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$
$G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}, S)$

Atunci $L(G) = L_1 L_2$.

3 Stelarea

$L_1 \in \mathcal{L}_{CF} \Rightarrow L_1^* \in \mathcal{L}_{CF}$.

$S \to S_1 S \mid \lambda$.

4 Intersectia

$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{CF} \not\Rightarrow L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_{CF}$.

Exemplu

Fie $L = \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ care nu e CFG.

$L_1 = \{a^i b^i c^k \mid i, k \in \mathbb{N}\}$

$L_2 = \{a^k b^i c^i \mid i, k \in \mathbb{N}\}$

$L_1 \cap L_2 = L$.

$\in \mathcal{L}_{CF}$ $\quad \in \mathcal{L}_{CF}$ $\quad \notin \mathcal{L}_{CF}$ $\quad$ α.

5. Complementarea

$L_1 \in \mathcal{L}_{CF} \not\Rightarrow \overline{L_1} \in \mathcal{L}_{CF}$

Dem

Pp. ca $\mathcal{L}_{CF}$ e inchis la $\overline{}$.

$x \cdot 0{,}85 + 1{,}65 + 1 = 9{,}5$

$\boxed{x = 8}$

Fie L_1 și $L_2 \in \mathcal{L}_{CF}$.

$L = L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} \in \mathcal{L}_{CF}$.

$\mathcal{L}_{CF}$ nu e inchis la $\cap$. $\mathcal{L}_C$

Th Fie $\varphi : V \to \mathcal{P}(W^+)$ a.î. $\varphi(a)$ e independentă de context $(\forall)\, a \in V$ (substitutie independenta de context)

Fie $L \subseteq V^*$ un limbaj $\in \mathcal{L}_{CF}$.

Atunci $\varphi(L) \in \mathcal{L}_{CF}$.

Dem:

Fie $G = (N, \Sigma, P, S)$ o gramatica $\in \mathcal{L}_{CF}$.

$\Rightarrow L(G) = L$.

Definim $G_a = (N_a, W, P_a, S_a)$ o gramatica $\in \mathcal{L}_{CF}$.

a.î. $L(G_a) = \varphi(a)$. $(\forall)\, a \in V$.

Construim gramatica $G' = (N', W, P', S)$ unde.

$N' = N \cup \{S_a \mid a \in V\} \cup \bigcup_{a \in V} (N_a \setminus \{S_a\})$

$P' = \bigcup_{a \in V} P_a \cup \{ x \to \alpha' \mid x \to \alpha \in P$ și α' e obținut din α prin înlocuirea fiecărui a cu $S_{g(a)}$ $(\forall)\, a \in V\}$

Avem $w \in L(G') \Leftrightarrow S \overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}} w \Leftrightarrow S \overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}} S_{a_1} S_{a_2} \dots S_{a_k}$
$\overset{*}{\Rightarrow} w \Leftrightarrow w \in \varphi(a_1)\varphi(a_2)\dots\varphi(a_n) \Leftrightarrow$

$w \in \varphi(a_1 \dots a_n)$ unde $S \overset{*}{\Rightarrow} a_1 \dots a_n$

Deci $w \in L(G') \Leftrightarrow w \in \varphi(L)$

G' e independentă de context $\Rightarrow$ concluzia.