muellan

23.03.2018

Seminar 3

Aplicații liniare

Fie V, W - spații vectoriale peste K.
$f: V \to W$ se numește aplicație liniară dacă $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in V$.

$f(ax) = a \cdot f(x), \forall a \in K, \forall x \in V$.

$Ker(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$

$Im(f) = \{y \in W \mid \exists x \in V \text{ a.î. } f(x) = y\}$

Teoremă $\dim_K V = \dim_K(Ker(f)) + \dim_K(Im(f))$

E1 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1, 0)$.

a) Arătați că f este aplicație liniară

b) Calculați $\dim_{\mathbb{R}}(Ker(f))$, $\dim_{\mathbb{R}}(Im(f))$.

a) 1) $f((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
$= f(x_1 + y_1, 0)$ (1)

$f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) = f(x_1, 0) + f(y_1, 0)$
$= f(x_1 + y_1, 0)$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow f((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2)$

2) $f(a(x_1,x_2)) = f(ax_1, ax_2) = (ax_1, 0) =$
$= a(x_1, 0) = a \cdot f(x_1, x_2)$.

Din 1), 2) $\Rightarrow$ f este o aplicație liniară

b) $\text{Ker } f = ?$

$f(x_1,x_2) = 0 \Rightarrow (x_1, 0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\text{Ker } f = \{ (x_1,x_2) \mid x_1 = 0 \text{ și } x_2 \in \mathbb{R} \}$
$= \{ (0, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R} \}$

$B = \{(0,1)\}$ bază în Ker f $\Rightarrow \dim \text{Ker } f = 1$

$\text{Im } f = \{ y \in W \mid \exists\, x \in V \text{ a.î. } f(x) = y \}$

$\text{Im } f = \{ (x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R} \}$

$B = \{(1,0)\} \Rightarrow \dim_K (\text{Im } f) = 1$

E2 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2,x_3) =$
$= (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_3)$

a) Arătați că f aplicație liniară

b) Calculați dim(Ker f), dim(Im f) = ?

1) $f((x_1,x_2,x_3) + (y_1,y_2,y_3)) = f(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$
$= (x_1 + y_1 + 2(x_2+y_2) - (x_3+y_3), x_1 + y_1 + x_3 + y_3)$
$= (x_1 + 2x_2 + y_1 + 2y_2 - x_3 - y_3, x_1 + x_3 + y_1 + y_3$
$=$

$= f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3)$

$f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

2) $f(a(x_1, x_2, x_3)) = f(ax_1, ax_2, ax_3)$

$\mathrm{Ker}\ f = \{(x_1, -x_1, -x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$

$B = \{(1, -1, -1)\} \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$

$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}\ f)$
$= 3 - 1 = 2.$

- $f: V \to V$ aplicație liniară s.n. endomorfism.
- valoare proprie λ.

$\lambda \in K$ cu prop. că $\exists\, v \in V$, $v \neq 0$ a.î. $f(v) = \lambda \cdot v$. v se numește vector propriu asociat valorii proprii λ.

E3. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2 + 3x_3,\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3,\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3)$

Pot să îi asociez lui f matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1 x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4x_1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4x_2 \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 \quad = 0 \end{cases}$$

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$-6x_1 + 3x_3 = 0 \Rightarrow -2x$$

$$V_4 = \{(x_1, x_1, 2x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$

$\Rightarrow \dim(V_4) = 1 = m_4$

$\Rightarrow A/f$ e diagonalizabilă

sau

$$A = C \cdot A' \cdot C^{-1}$$

A - diagonalizabilă $\Rightarrow A' = C^{-1} \cdot A \cdot C$

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$B = \{(1,1,0), (-1,0,1)\}$ bază pt V_{-2}

$B = \{(1,1,2)\}$ bază pt V_4.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$= (1-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda) + 3(-2-\lambda)(-3)$

$= (-2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 9\right] = -(2+\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 9\right]$

$= -(2+\lambda)(1-\lambda-3)(1-\lambda+3)$

$= -(2+\lambda)(-2-\lambda)(4-\lambda)$

$= (2+\lambda)^2(4-\lambda)$

Valori proprii : $-2, 4$.

$(P(\lambda) = 0 \iff (\lambda+2)^2(4-\lambda) = 0)$

$m_{-2} = 2$

$m_4 = 1$.

• Găsim vectorii proprii asociați valorilor proprii.

$\lambda = -2$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ vector pr. asoc. lui λ.

dacă $f(x) = \lambda \cdot x$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_2 = -2x_1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -2x_2 \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -2x_3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \iff x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$x_1 = x_2 - x_3 \Rightarrow V_\lambda = V_2 = \{(x_2 - x_3, x_2, x_3)$

$\mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim(V_{-2}) = 2 = m_{-2}$

- λ valoare proprie ptr. A deci $P(\lambda) := \det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$.

$V_\lambda = \{ v \in V \mid f(v) = \lambda \cdot v \}$

$\dim_K V_\lambda$ s.n. multiplicitatea geometrică a lui λ.

- A este diagonalizabilă $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} \cdot \text{ toate valorile proprii sunt din } K \\ \cdot\ \forall \lambda \text{ val. proprie } \dim V_\lambda = m_\lambda. \end{cases}$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

a) Calculați val. proprii și vectorii proprii asociați

b) Este A diagonalizabilă?

a) $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix}$

$$\xrightarrow{C_2 = C_2 + C_3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 6 & -2-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ -2-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -2-\lambda \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$+ 3(-2-\lambda) \begin{vmatrix} 3 & 1 \end{vmatrix}$