

# Algoritmica Grafurilor

Ruxandra Marinescu – Ghemeci

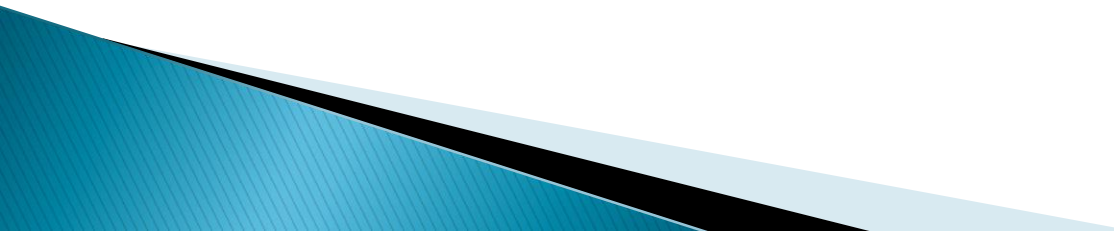
[verman@fmi.unibuc.ro](mailto:verman@fmi.unibuc.ro)



# Programa



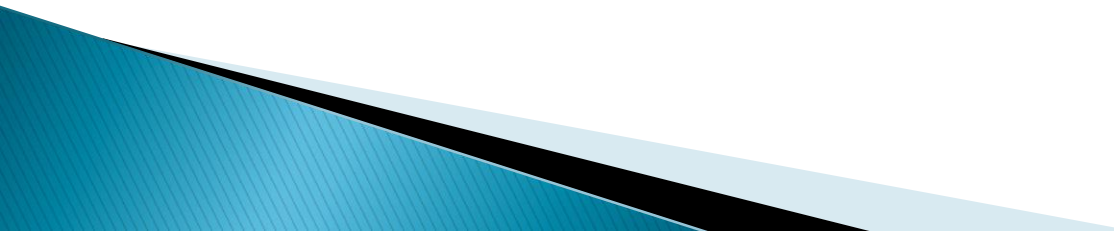
# Programa

- ▶ Secvențe de grade
  - ▶ Conectivitate
  - ▶ Arbori, arbori parțiali de cost minim
  - ▶ Drumuri minime
  - ▶ Fluxuri în rețele de transport
  - ▶ Cuplaje
  - ▶ Grafuri hamiltoniene
  - ▶ Grafuri euleriene
  - ▶ Grafuri planare
- 

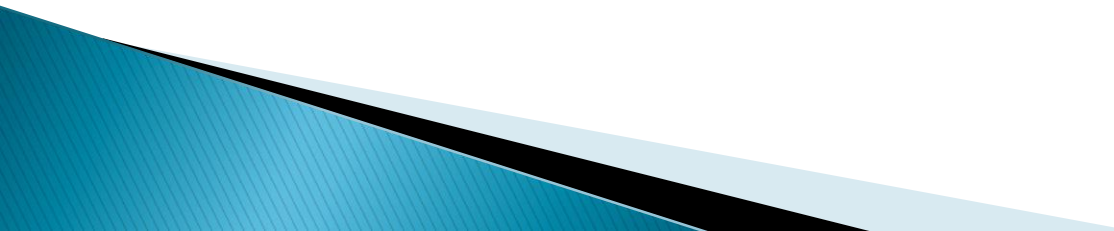
# Obiectiv general

- ▶ Însușirea principalelor noțiuni și rezultate legate de de teoria grafurilor, familiarizarea cu algoritmi fundamentali de grafuri și aplicații ale acestora

# Obiective specifice

- ▶ principalelor noțiuni și rezultate + utilitatea acestora
  - ▶ modelarea problemelor cu ajutorul grafurilor + elaborarea de algoritmi de grafuri pentru rezolvarea acestora
  - ▶ justificare a corectitudinii algoritmilor propuși + estimarea eficienței acestora
  - ▶ implementarea eficientă a algoritmilor
- 

# Motivații

- domeniu fundamental
  - numeroase aplicații în diverse domenii  
procesarea imaginilor, bioinformatică, rețele, baze de date, proiectare, strategii
  - instrumente pentru a dezvolta algoritmi eficienți
  - cursuri viitoare
  - interviuri
- 

# Structura


## ▶ Curs

- 2 ore pe săptămâna
- finalizat cu examen scris

## ▶ Laborator

- 2 ore la două săptămâni
- limbaj C/C++
- finalizat cu test de laborator

## ▶ Seminar

- 2 ore la două săptămâni
  - discuții probleme curs/laborator, complexități + exerciții
  - nu este notat separat, subiecte legate de seminar se vor regăsi la examenul scris + laborator
- 

# Evaluare





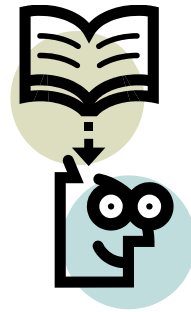
# Evaluare

- ▶ Test de laborator – **1 / 3** nota finală

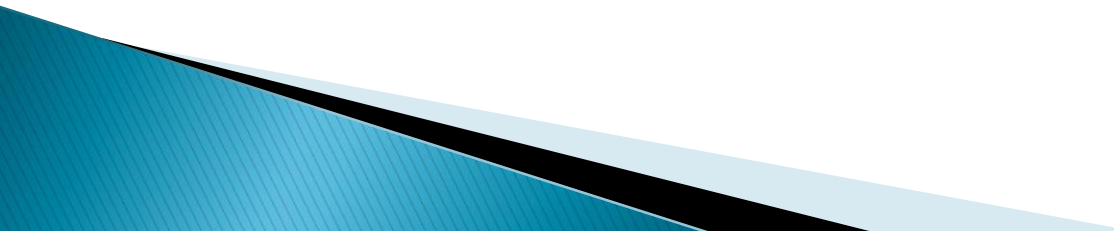
**Nota test laborator  $\geq 5$**

- ▶ Examen scris – **2 / 3** nota finală
  - Subiecte din curs + **seminar** + laborator
  - **!!!** în ultima săptămână din semestru, nu în sesiune

# Bibliografie



# BIBLIOGRAFIE – curs

- ❖ Douglas B. West, **Introduction to Graph Theory**, Prentice Hall 1996, 2001
  - ❖ J.A. Bondy, U.S.R Murty – **Graph theory with applications**, The Macmillan Press 1976 / Springer 2008
  - ❖ Dragoș–Radu Popescu, **Combinatorică și teoria grafurilor**, Editura Societatea de Științe Matematice din România, București, 2005.
- 

# BIBLIOGRAFIE – algoritmi + laborator

- ❖ Jon Kleinberg, Éva Tardos, **Algorithm Design**, Addison–Wesley 2005  
<http://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos/>
- ❖ T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.R. Rivest – **Introducere in algoritmi**, MIT Press, trad. Computer Libris Agora
- ❖ H. Georgescu – **Tehnici de programare**, Editura Universităţii din Bucureşti, 2005

# BIBLIOGRAFIE – curs + seminar

- ❖ Dragoș–Radu Popescu, R. Marinescu–Ghemeci, **Combinatorică și teoria grafurilor prin exerciții și probleme**, Editura Matrixrom, 2014
- ❖ Ioan Tomescu, **Probleme de combinatorica si teoria grafurilor/ Problems in Combinatorics and Graph Theory**

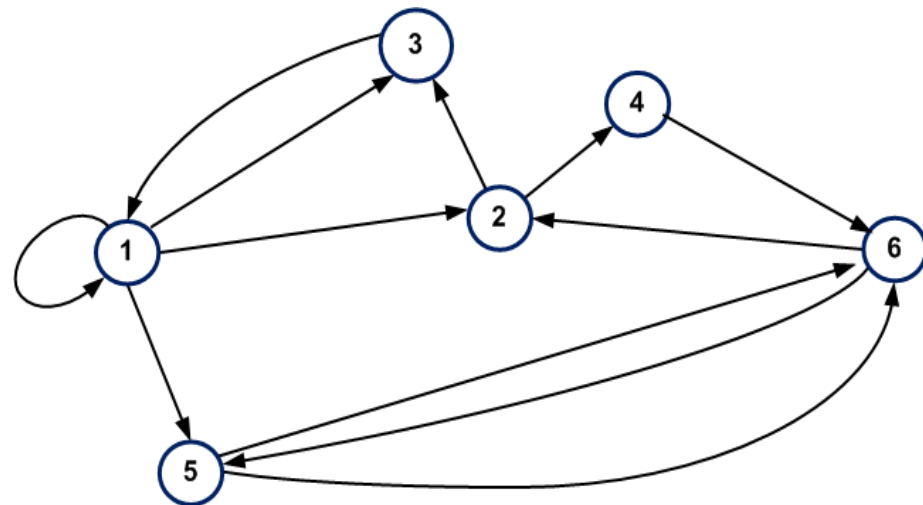
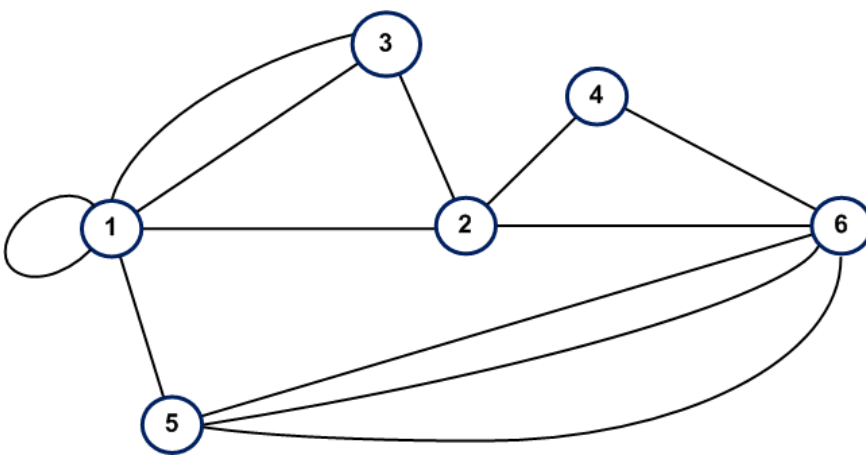
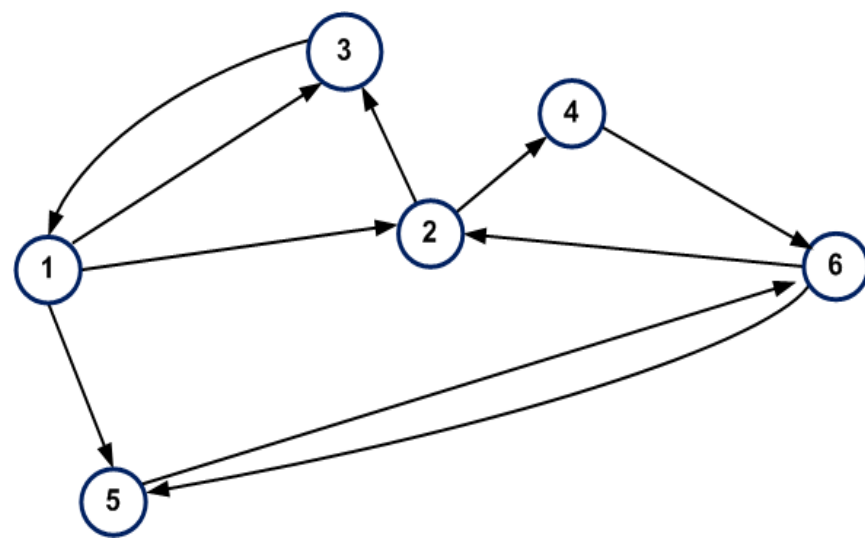
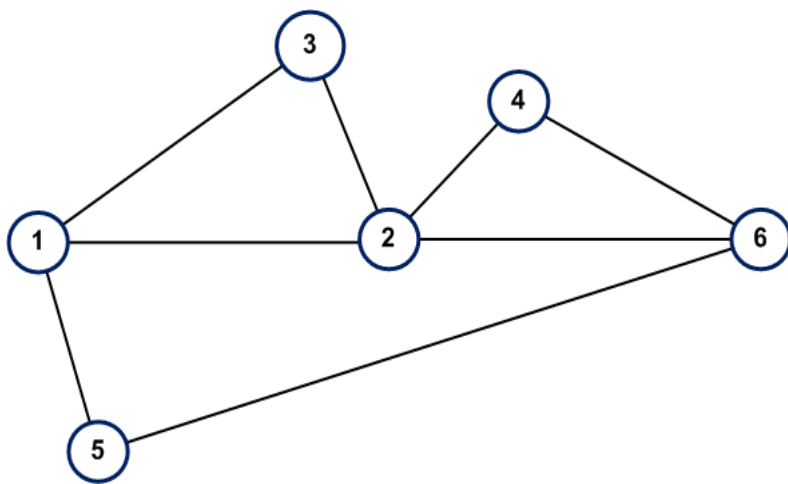
# BIBLIOGRAFIE

- ❖ **coursera.org**
- ❖ **infoarena.ro ...**

# Resurse

- <http://moodle.fmi.unibuc.ro/course/>
- ▶ **Consultații**
  - [verman@fmi.unibuc.ro](mailto:verman@fmi.unibuc.ro)
  - sala 318 (catedra de informatică)

# Graf + Multigraf



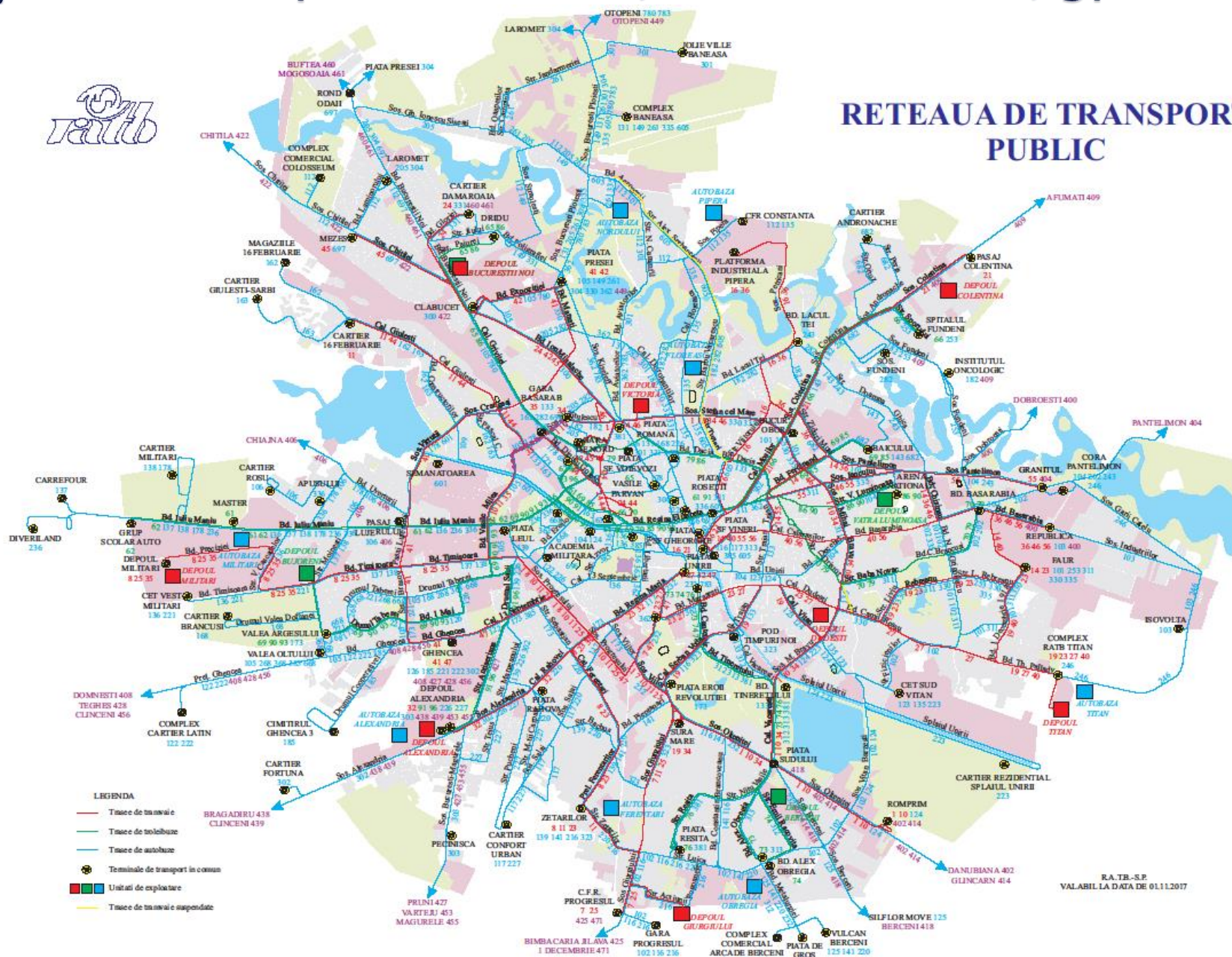


# Aplicații

# Rețele de transport în comun, trasee turistice, gps



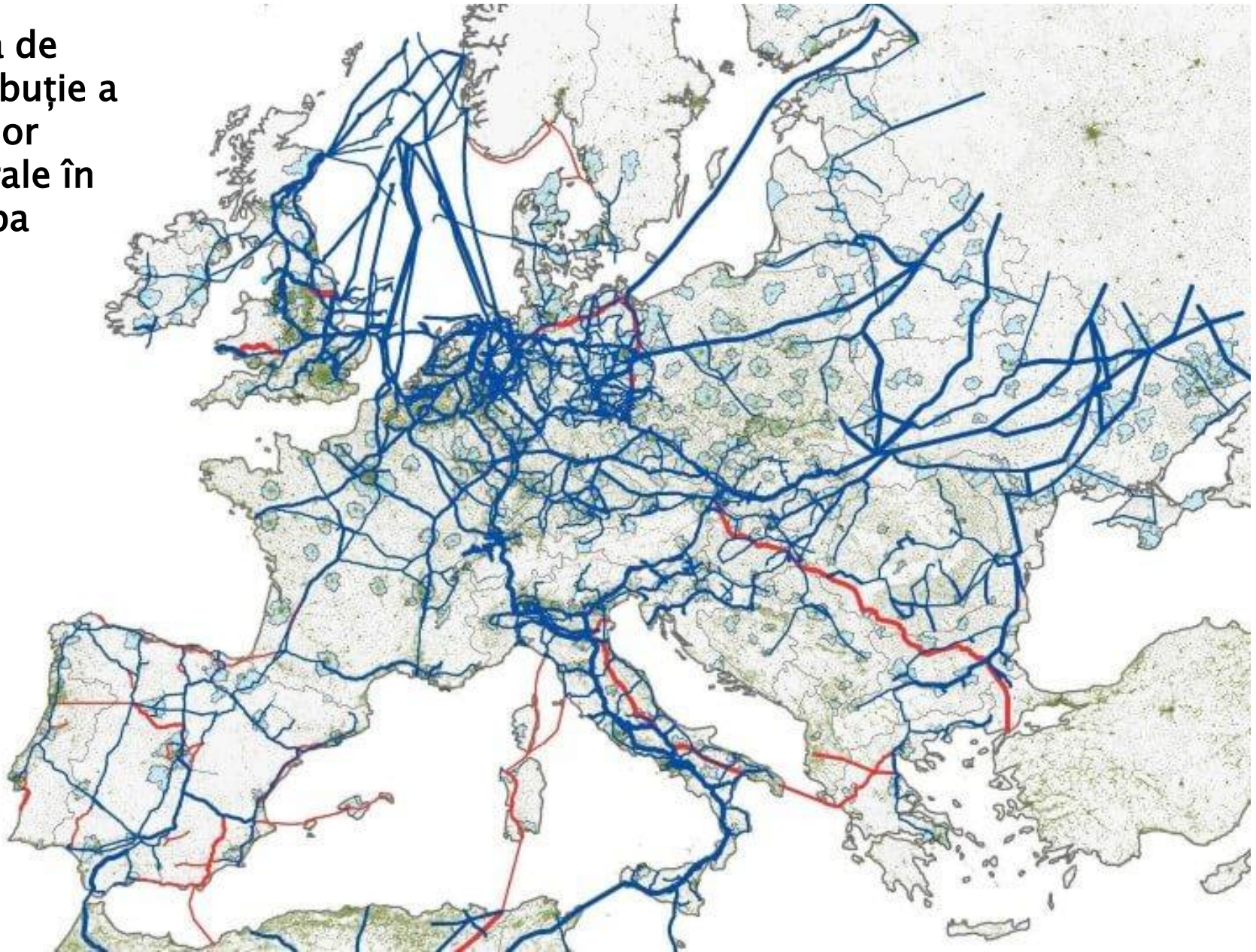
## RETEAUA DE TRANSPORT PUBLIC





# Rețele de transport în comun, trasee turistice, gps

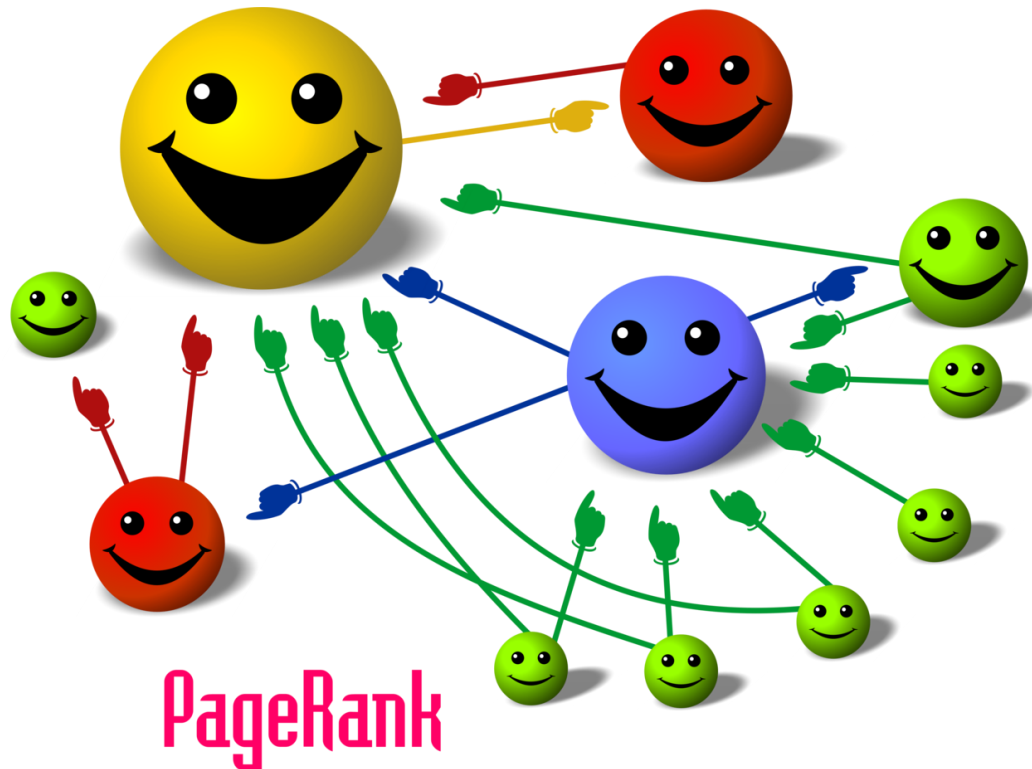
Rețea de  
distribuție a  
gazelor  
naturale în  
Europa



# Analiza rețelor

## ► Interacțiuni

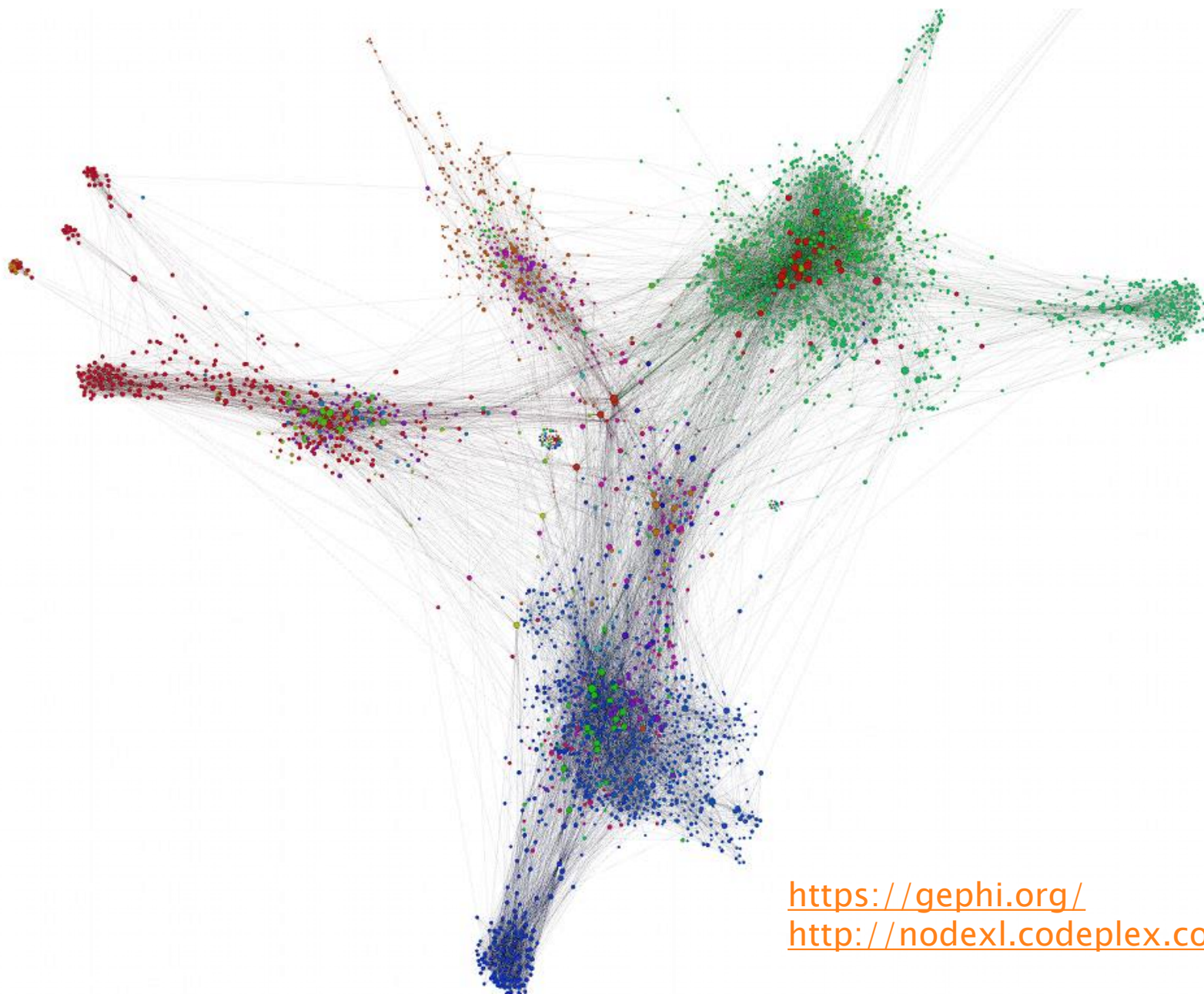
- Rețele sociale
- Rețele biologice
- Rețele de citări, de știri, de spionaj etc



<https://en.wikipedia.org/wiki/PageRank>

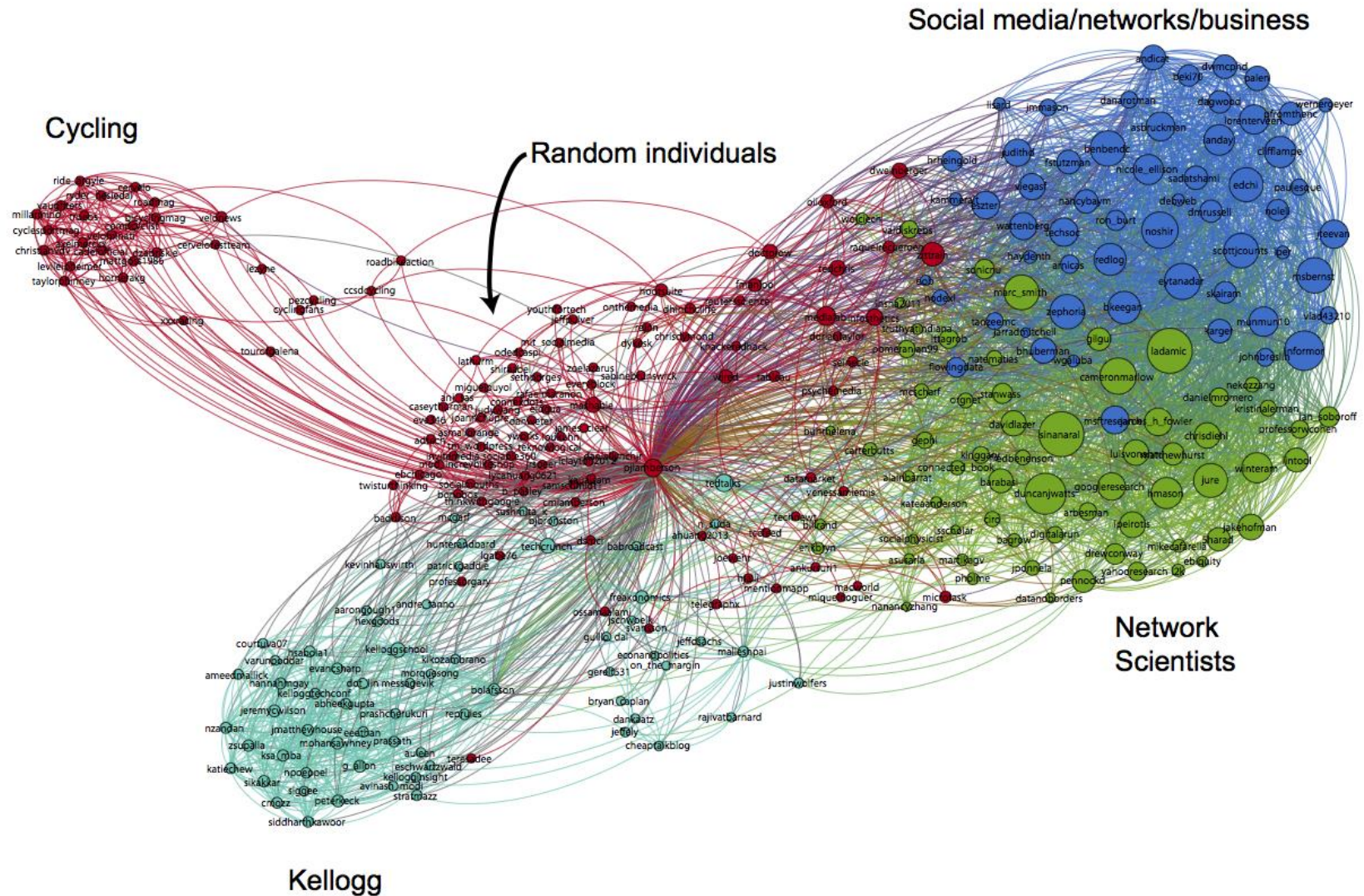


## ► Softuri pentru vizualizarea și analiza rețelelor



<https://gephi.org/>  
<http://nodexl.codeplex.com/>

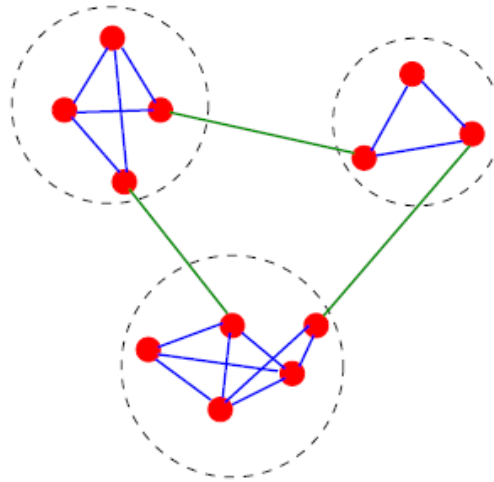
# Rețele sociale



<http://social-dynamics.org/twitter-network-data/>

# Rețele sociale

Detectare de comunități, clustering



3 comunități

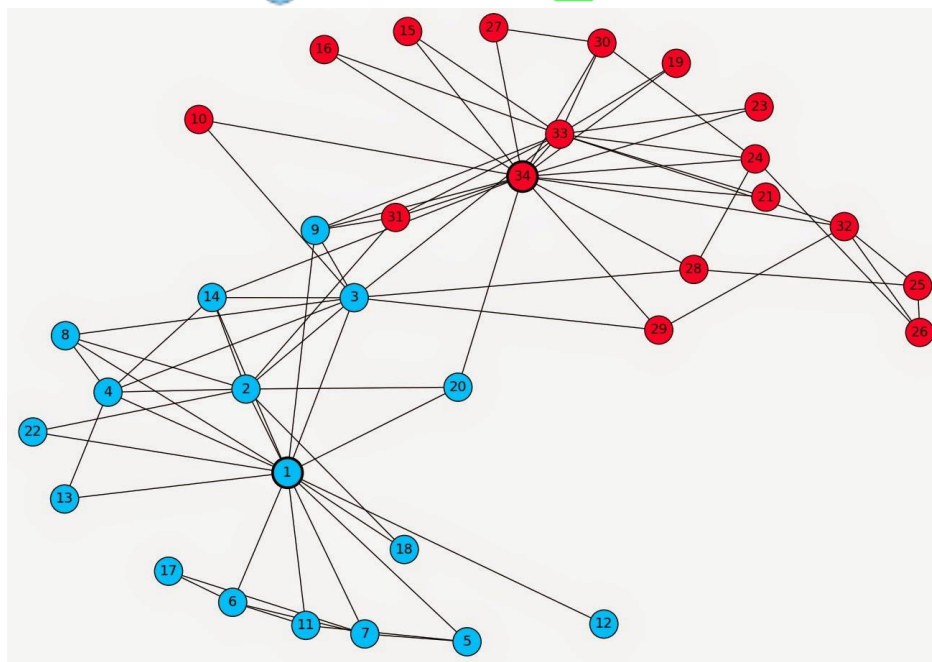
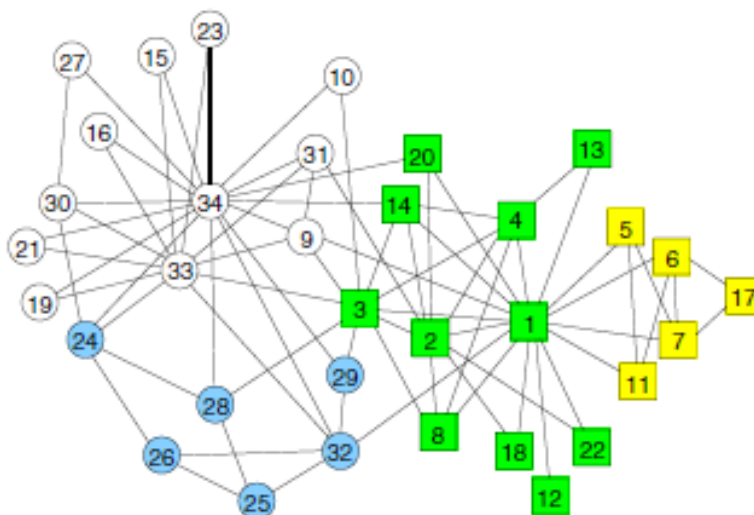


# Rețele sociale

**Clubul de carate al lui Zachary:  
membri + interacțiuni în afara  
clubului**

**⇒ comunități**

Santo Fortunato, Community detection in graphs,  
Physics Reports 486 (2010) 75–174

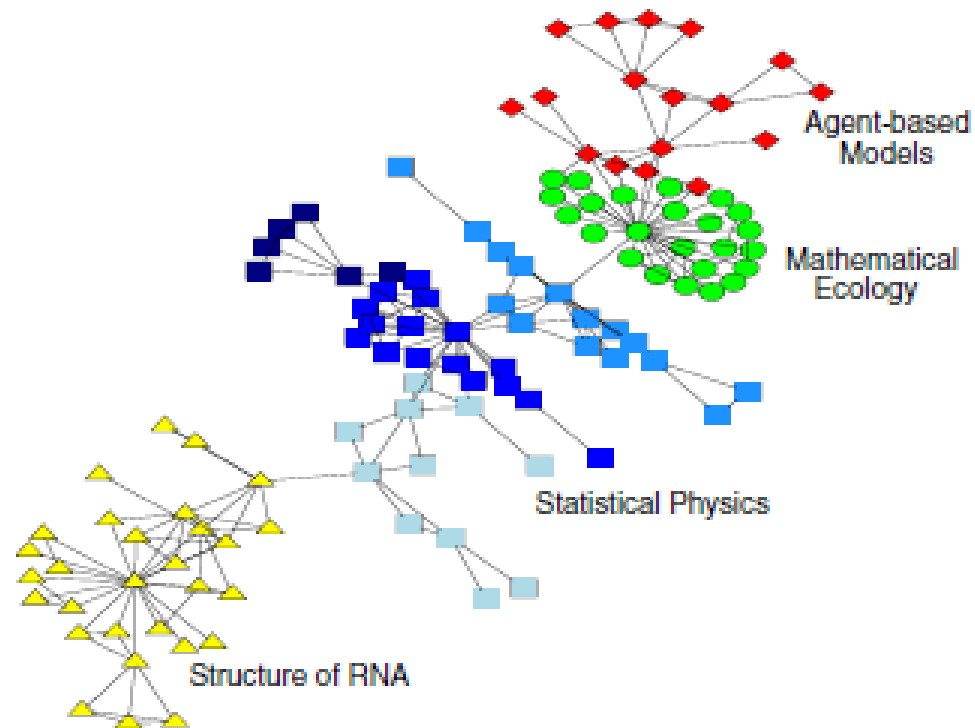


Zachary, W. W. (1977), Information Flow  
Model for Conflict and Fission in Small  
Groups, J. of Anthropological Research 33,  
452–473.

<http://historicaldataninjas.com/karate-club-network/>  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Zachary%27s\\_karate\\_club](https://en.wikipedia.org/wiki/Zachary%27s_karate_club)



# Rețele sociale



**Rețea de colaborări între cercetătorii de la Institutul Santa Fe**  
clusterelor – corespund departamentelor de cercetare

# Rețele

- ▶ **Rețele de știri – detectarea de știri false**

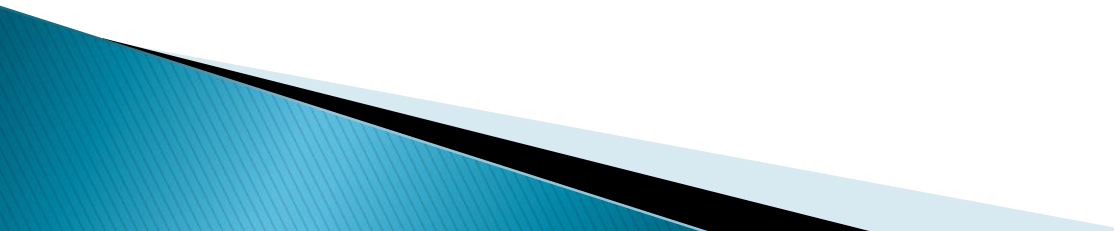
<https://neo4j.com/blog/machine-learning-graphs-fake-news-epidemic-part-2/>  
<https://cambridge-intelligence.com/detecting-fake-news/>

- ▶ **Rețele de teroriști**

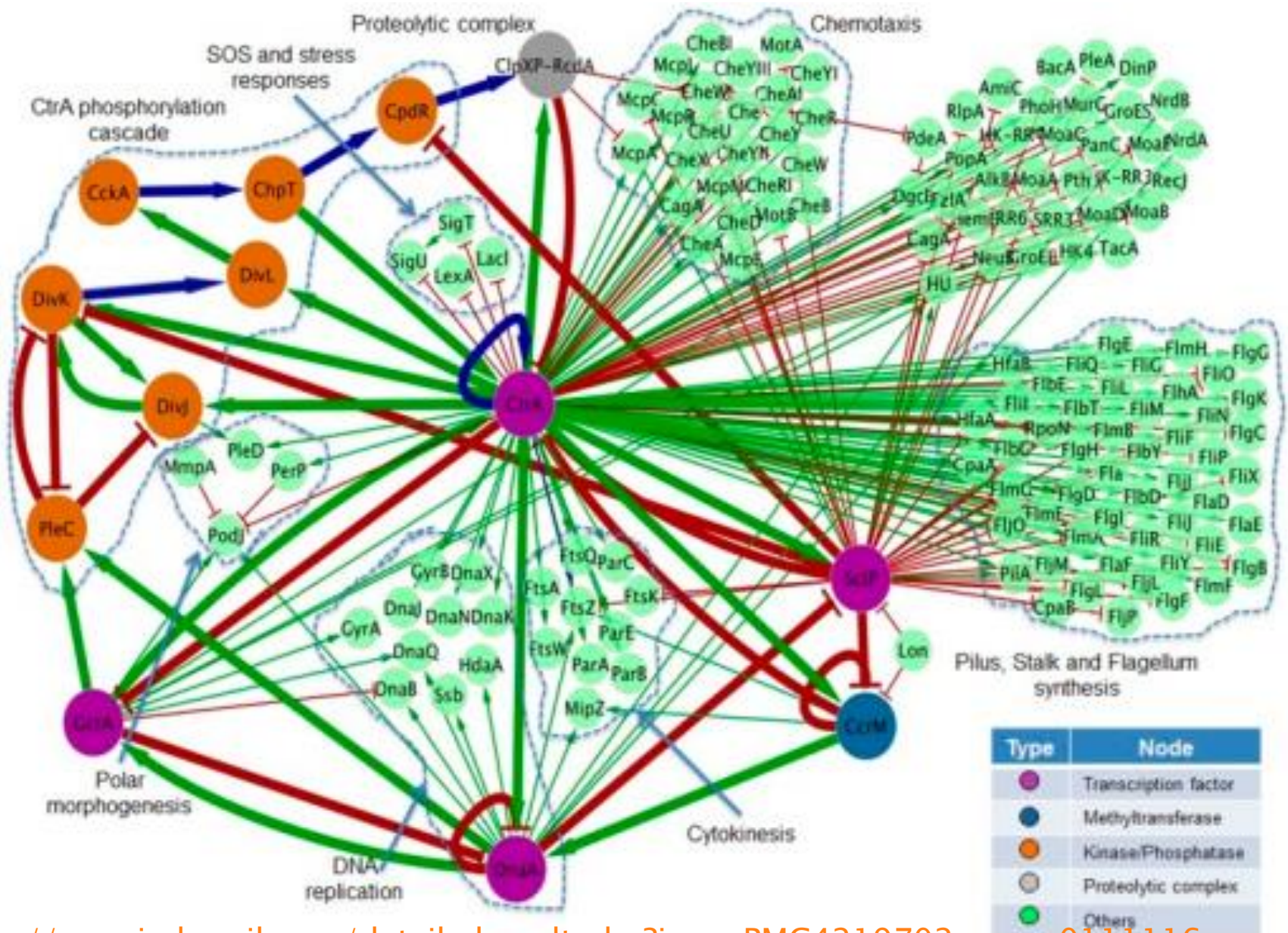
# Bioinformatică

- ▶ grafuri de interacțiuni gene/proteine

[http://domaingraph.bioinf.mpi-inf.mpg.de/docu/dg\\_network.php](http://domaingraph.bioinf.mpi-inf.mpg.de/docu/dg_network.php)

- ▶ clustering
  - ▶ grafuri de intersecție, grafuri De Bruijn
  - ▶ arbori filogenetici
- 

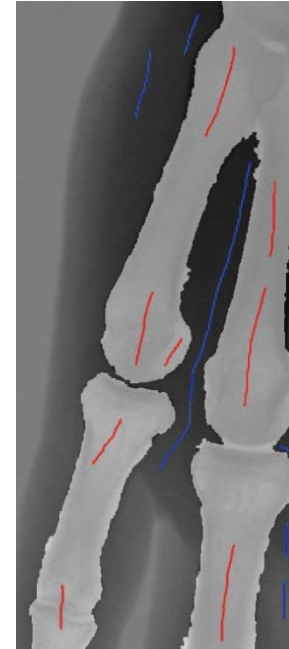
# Bioinformatică



[https://openi.nlm.nih.gov/detailedresult.php?img=PMC4219702\\_pone.0111116.g002&req=4](https://openi.nlm.nih.gov/detailedresult.php?img=PMC4219702_pone.0111116.g002&req=4)

# Image segmentation

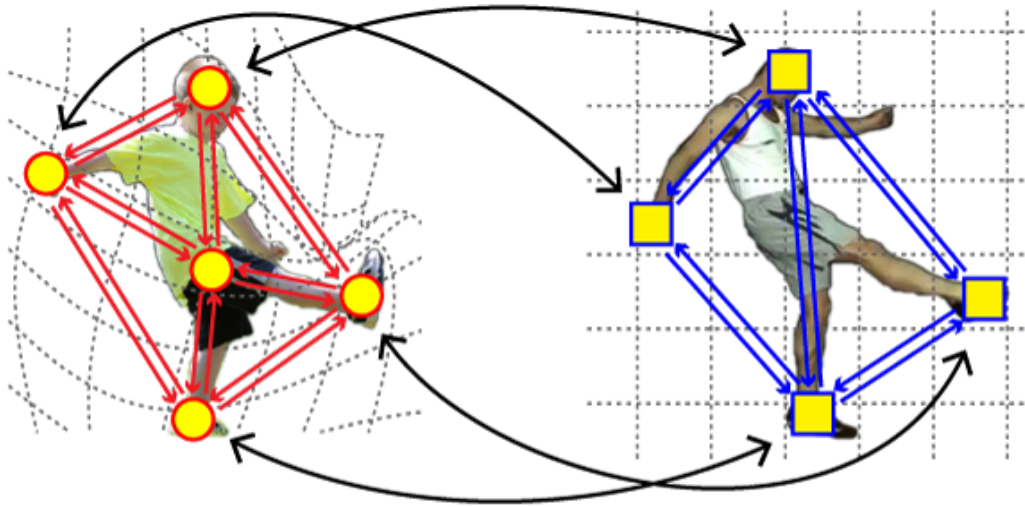
- tăietura minimă – fluxuri în rețele de transport
- medicină



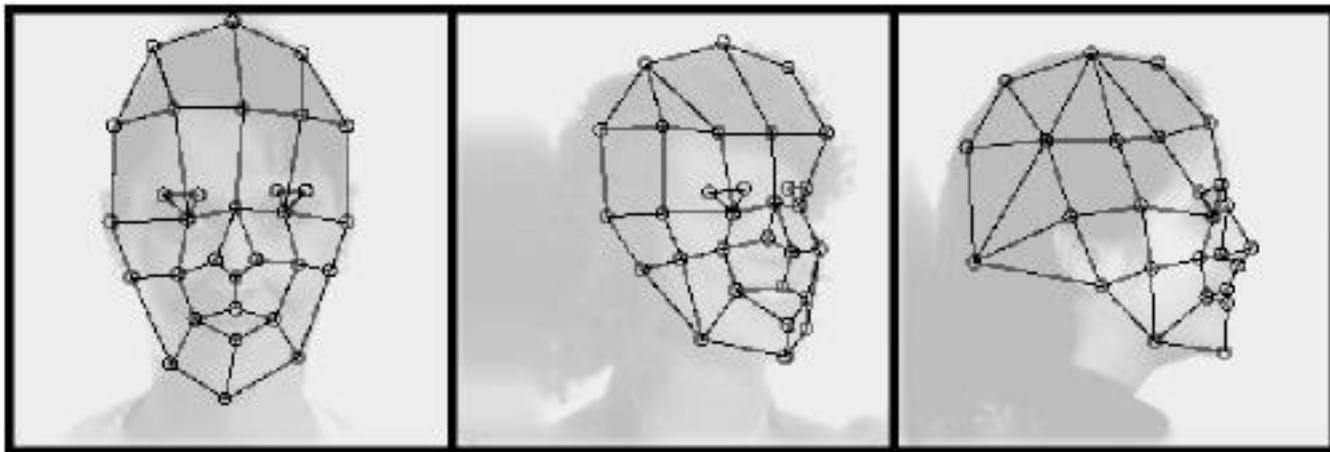
**Spatially Varying Color Distributions for Interactive Multi-Label Segmentation** (C. Nieuwenhuis, D. Cremers), In IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, volume 35, 2013



# Computer vision



F. Zhou and F. De la Torre, Deformable Graph Matching, IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2013 [http://www.f-zhou.com/gm/2013\\_CVPR\\_DGM.pdf](http://www.f-zhou.com/gm/2013_CVPR_DGM.pdf)

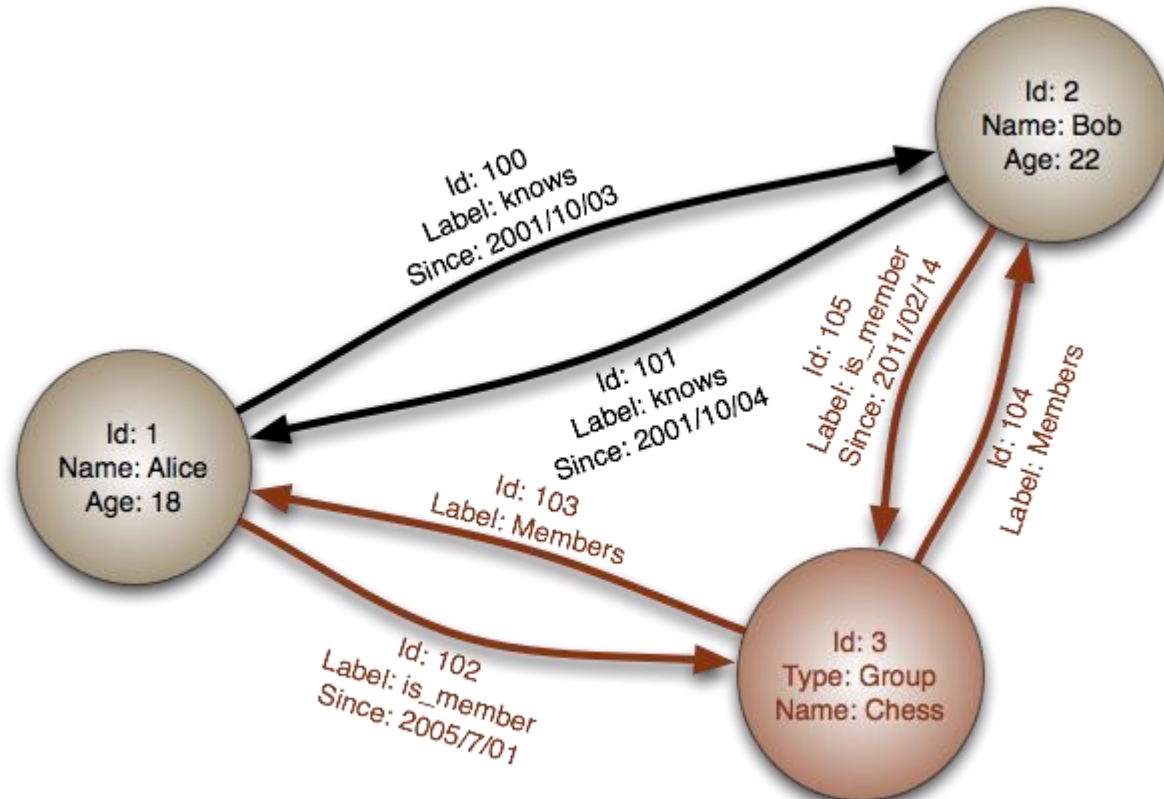


<https://www.ini.rub.de/PEOPLE/wiskott/Projects/EGMFaceRecognition.html>

# Baze de date

## ► Graph database

- Neo4J <https://neo4j.com/>



[https://en.wikipedia.org/wiki/Graph\\_database](https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_database)

# Probleme de planificare, orar

**Exemplu – De câte săli este nevoie minim pentru programarea într-o zi a  $n$  conferințe cu intervale de desfășurare date?**

Conf. 1: interval (1,4)

Conf. 2: interval (2,3)

Conf. 3: interval (2,5)

Conf. 4: interval (6,8)

Conf. 5: interval (3,8)

Conf. 6: interval (6,7)



# Probleme de planificare, orar

**Exemplu – De câte săli este nevoie minim pentru programarea într-o zi a n conferințe cu intervale de desfășurare date?**

Conf. 1: interval (1,4)

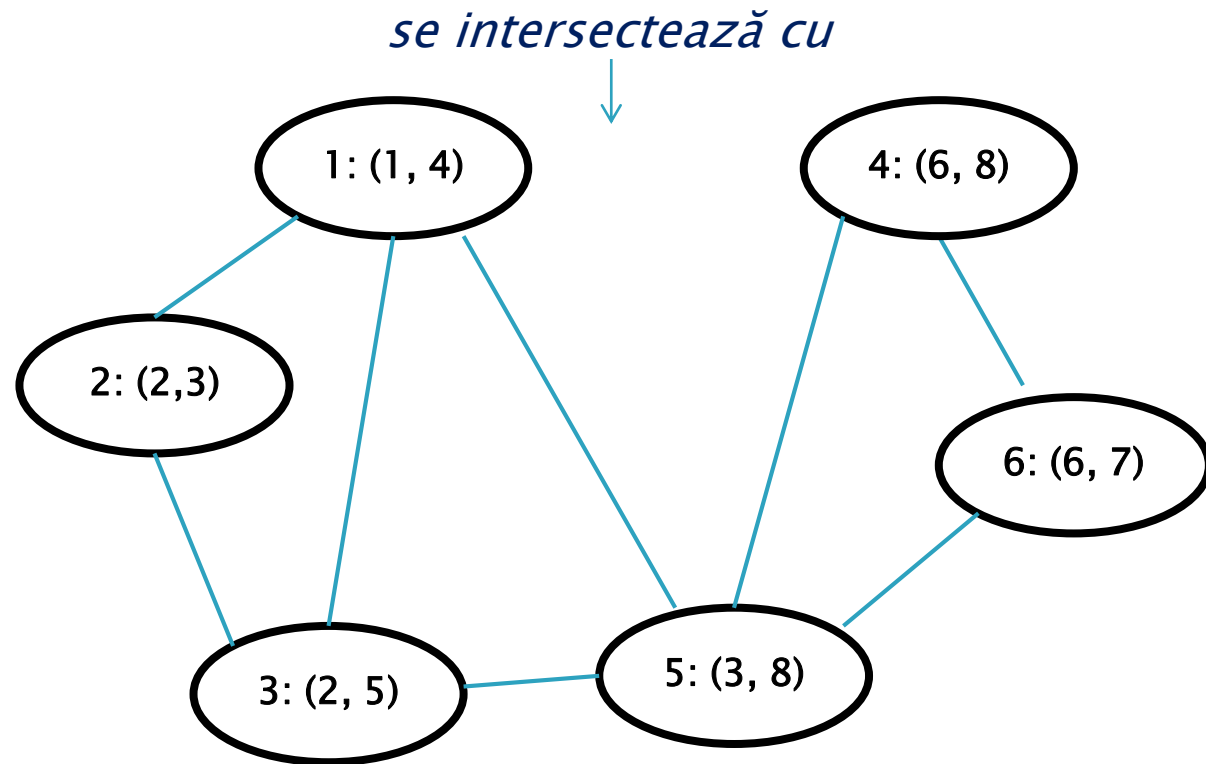
Conf. 2: interval (2,3)

Conf. 3: interval (2,5)

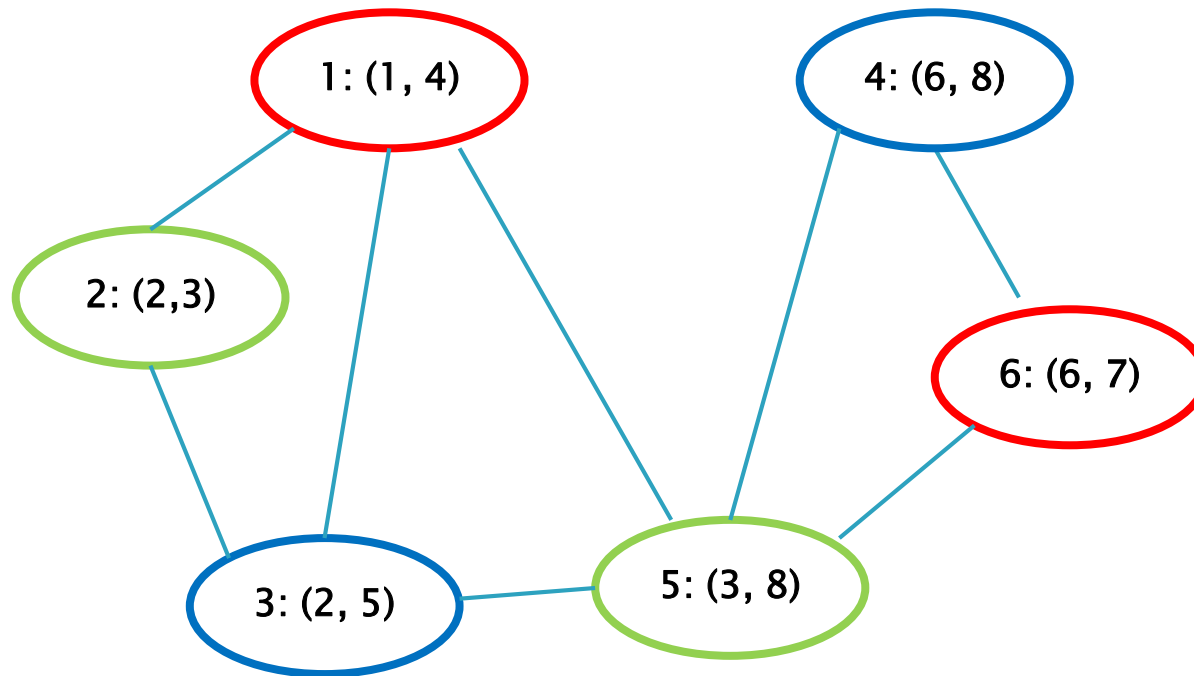
Conf. 4: interval (6,8)

Conf. 5: interval (3,8)

Conf. 6: interval (6,7)



# Graful intersecției intervalelor este 3-colorabil:



Sunt necesare minim 3 săli (corespunzătoare celor 3 culori):

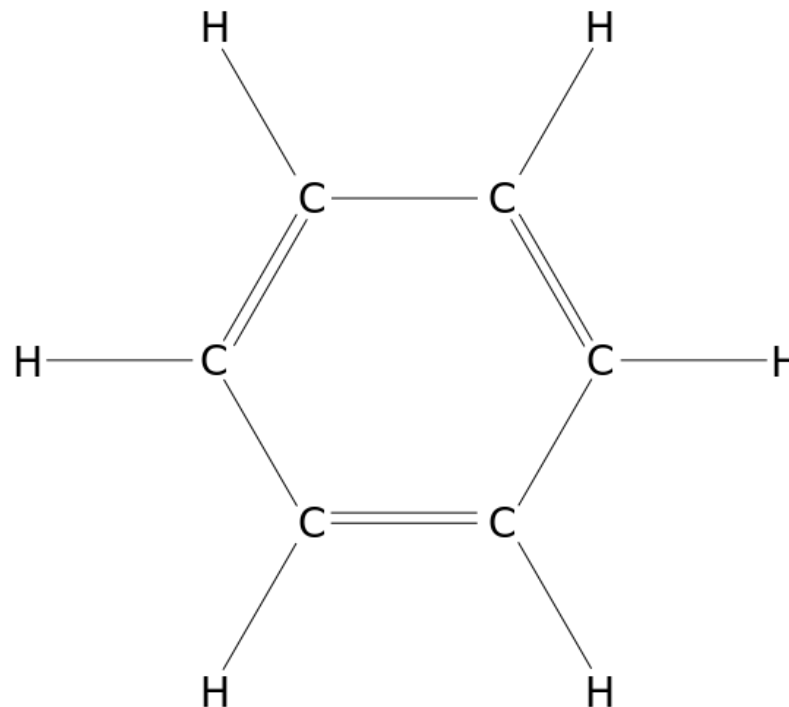
**Sala 1:** (1,4), (6,7)

**Sala 2:** (2,3), (3,8)

**Sala 3:** (2,5), (6,8)

## ► Graf ← “notație grafică” din chimie

- J. Silvester, 1878



# Chimie

- ▶ indici topologici (Wiener, Randic...)
- ▶ izomorfism, graf de interacțiuni...

Danail Bonchev and D.H. Rouvray, eds., *Chemical Graph Theory: Introduction and Fundamentals*, Taylor and Francis, 1991

# Matematică

## ► Grafuri asociate grupurilor



### ◦ Graful Cayley

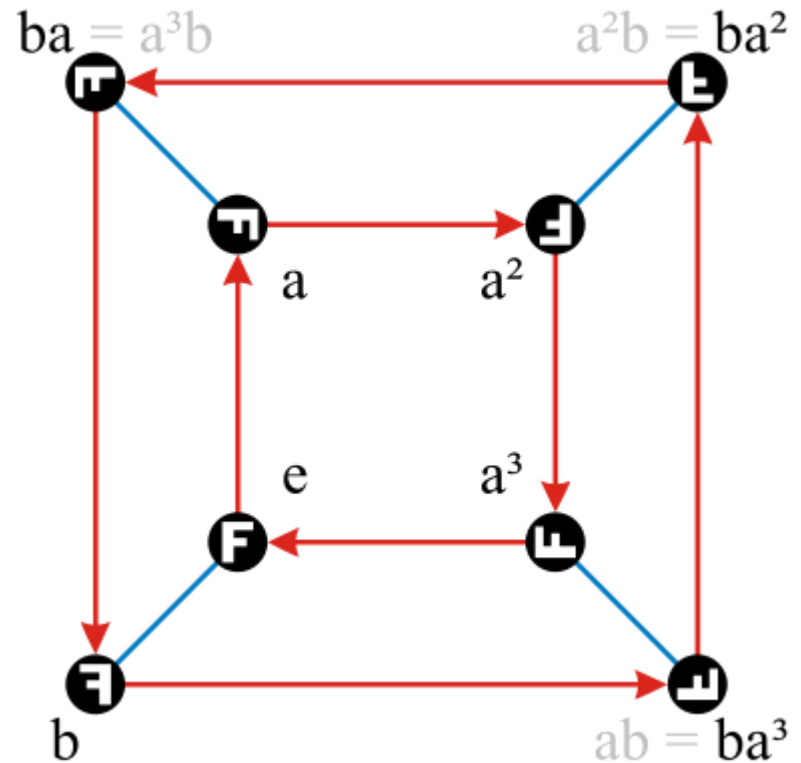
Grupul diedral  $D_4$

$$\langle a, b \mid a^4 = b^2 = e, ab = ba^3 \rangle$$

$a$  

$b$  

  $\equiv$  



proprietăți graf



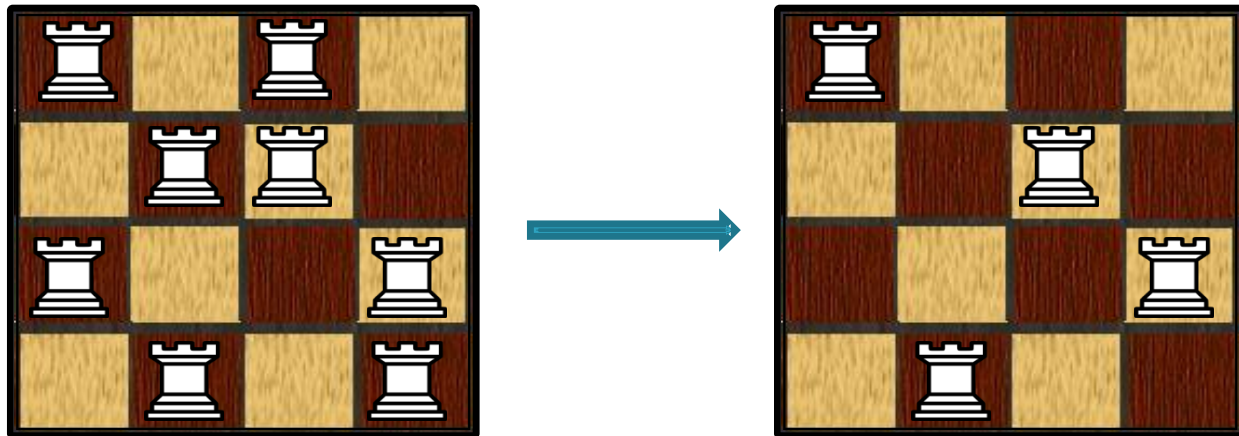
proprietăți grup

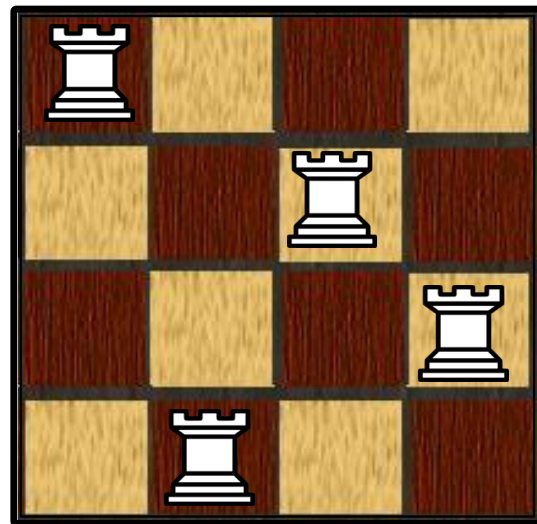
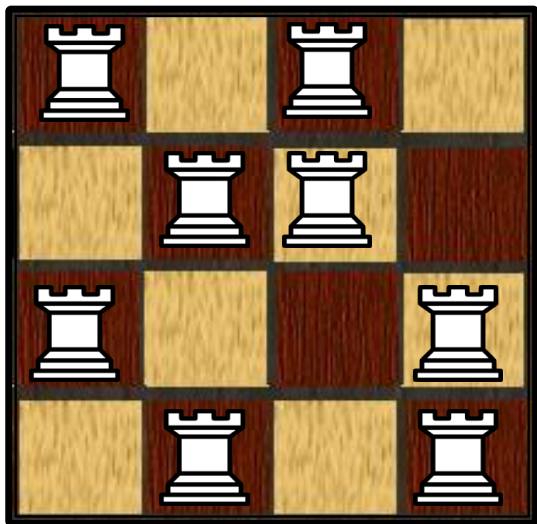
# Matematică

- ▶ **Demonstrarea unor rezultate matematice**
  - **Matrice  $\rightarrow$  graf**
  - **Diagonală/ Matrice de permutări – cuplaj**

# Probleme

Pe o tablă de tip șah de dimensiuni  $n \times n$  sunt așezate ture, astfel încât pe fiecare linie și fiecare coloană sunt **același număr de ture**. Să se arate că se pot păstra pe tablă  $n$  dintre aceste ture, care nu se atacă două câte două – **Cuplaje**





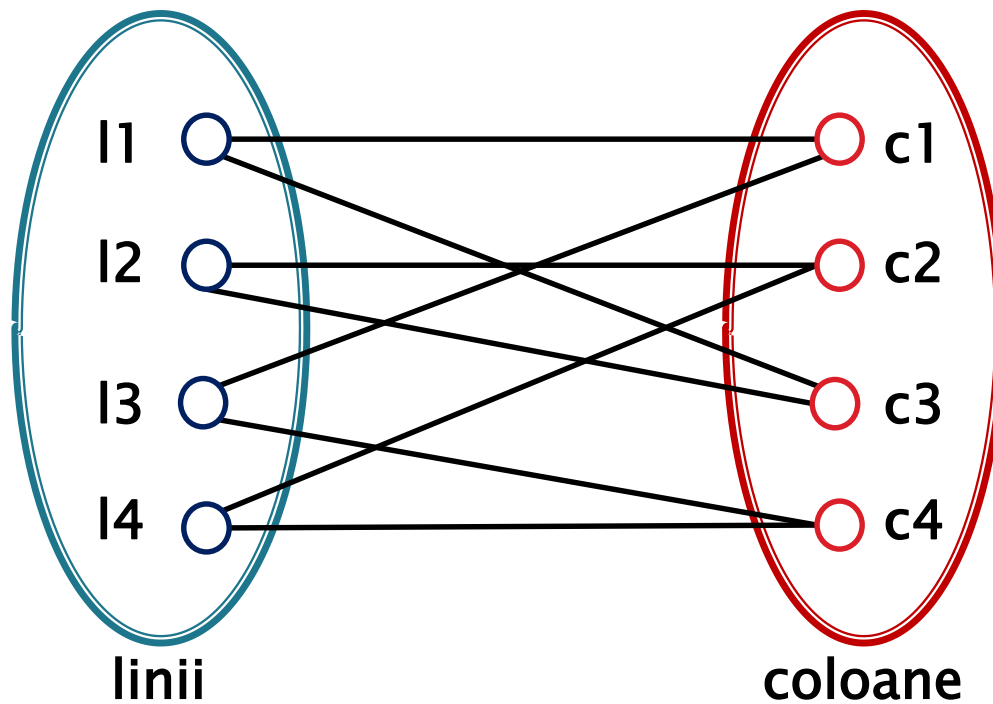
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



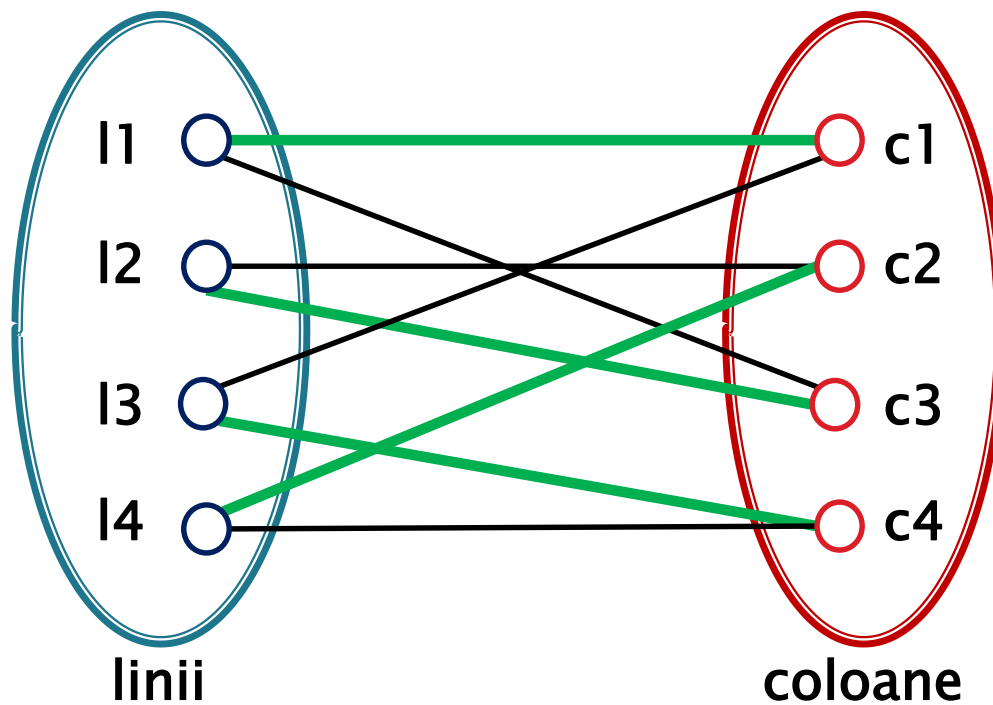
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



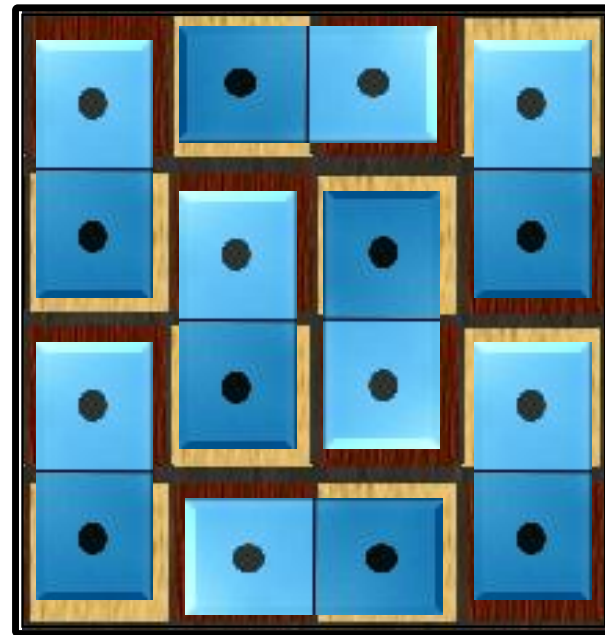
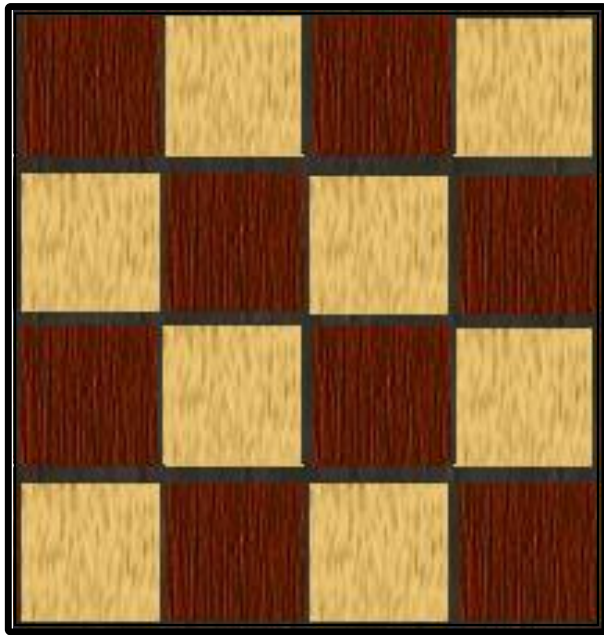
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Cuplaj perfect

# Probleme

- Acoperirea unei table cu piese de domino

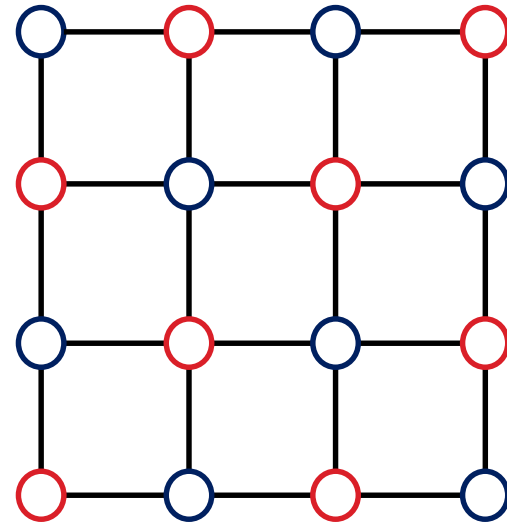
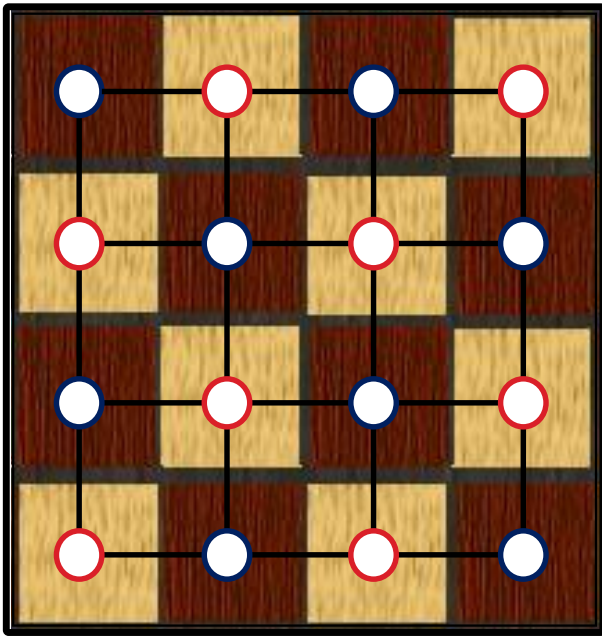


# Probleme

► Tabla

⇒

graful grid



Graful grid

# Probleme

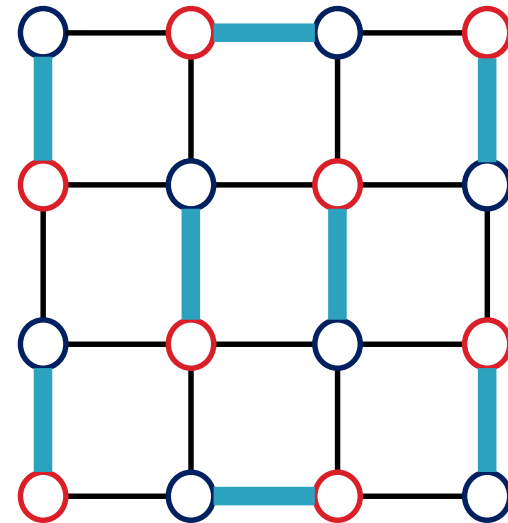
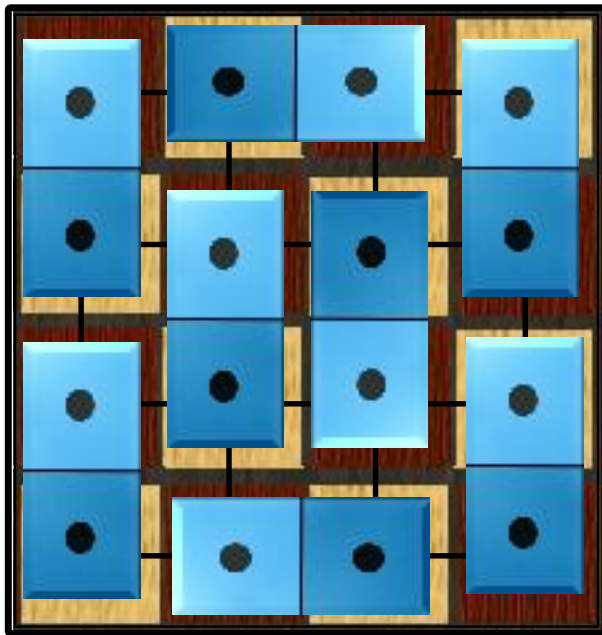
- ▶ Tabla
- ▶ Acoperire

⇒

graful grid

⇒

cuplaj perfect

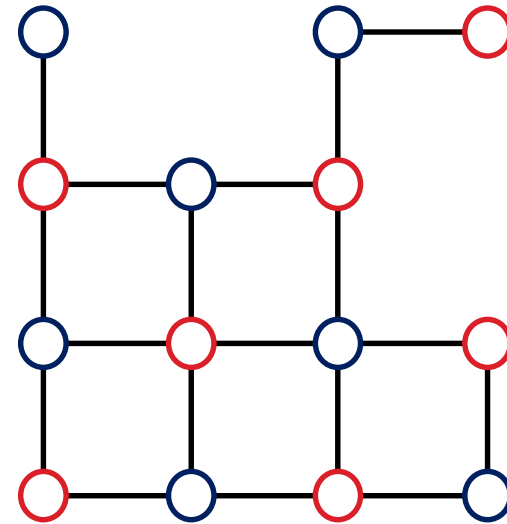
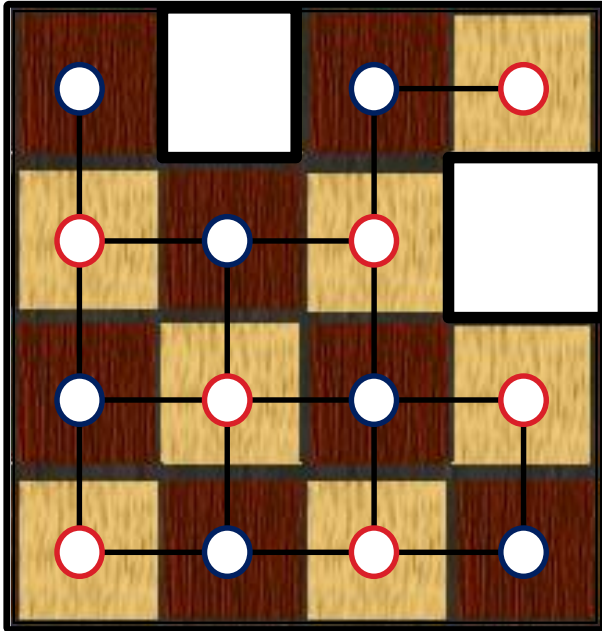


Graful grid

# Probleme

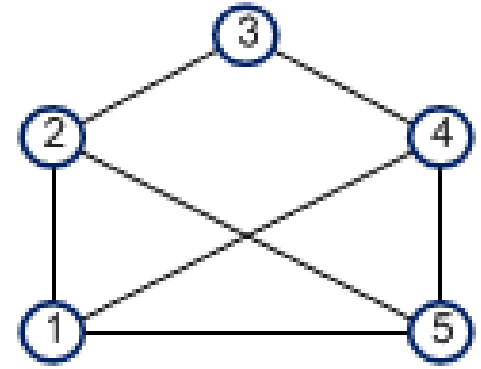
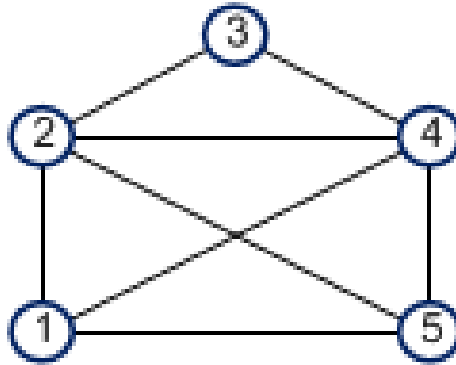
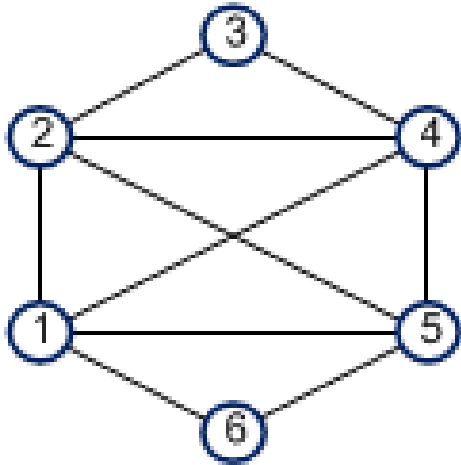
- ▶ Acoperirea unei table  $m \times n$  cu piese de domino
  - Este acoperibilă  $\Leftrightarrow mn$  par
  - Dacă tabla este acoperibilă, dar eliminăm două pătrățele din ea, în ce condiții rămâne acoperibilă?

# Probleme

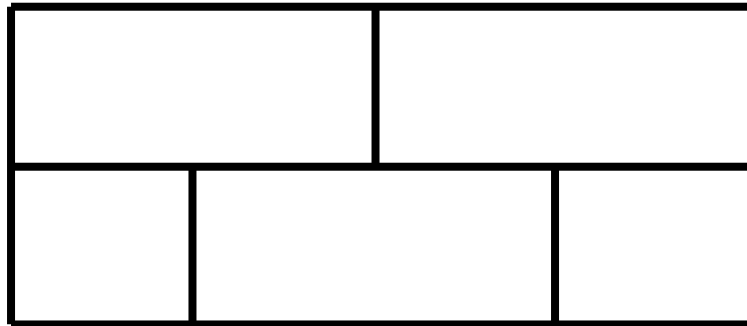


Graful grid

# Probleme



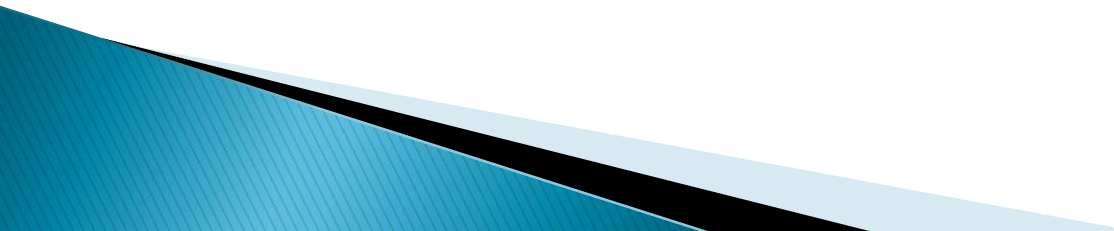
Se poate desena diagrama printr-o curbă continuă închisă fără a ridica creionul de pe hârtie și fără a desena o linie de două ori?



Există linie continuă neînchisă care să intersecteze în interior fiecare segment o singură dată?

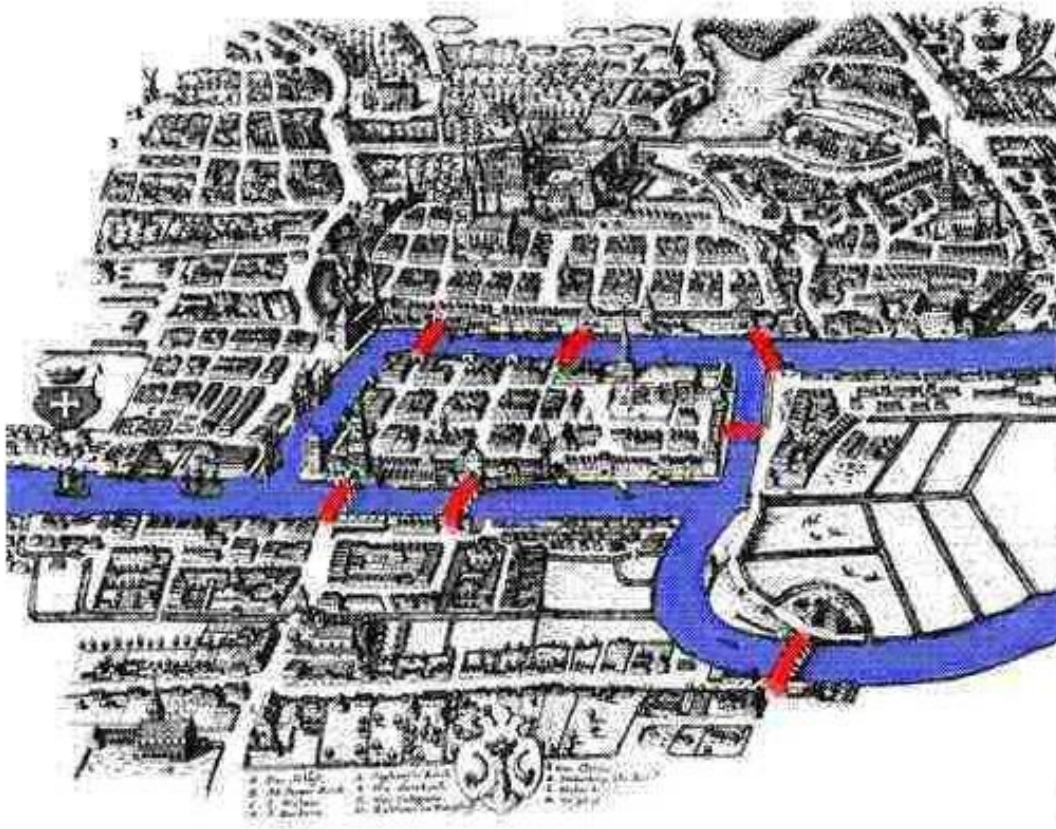


# Alte aplicații

- ▶ Rețele de calculatoare
  - ▶ Limbaje formale
  - ▶ Probleme de planificări, repartiții...
  - ▶ Teoria jocurilor
- 

# Istoric

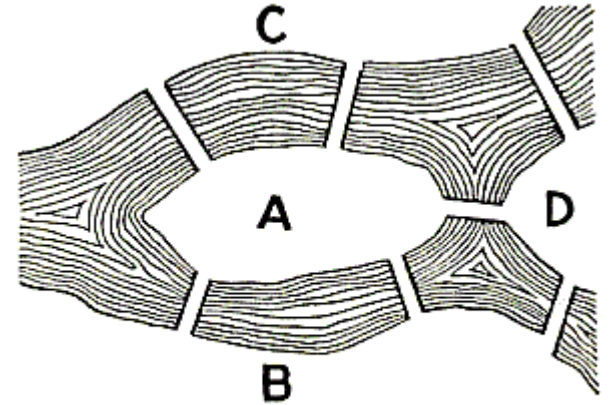
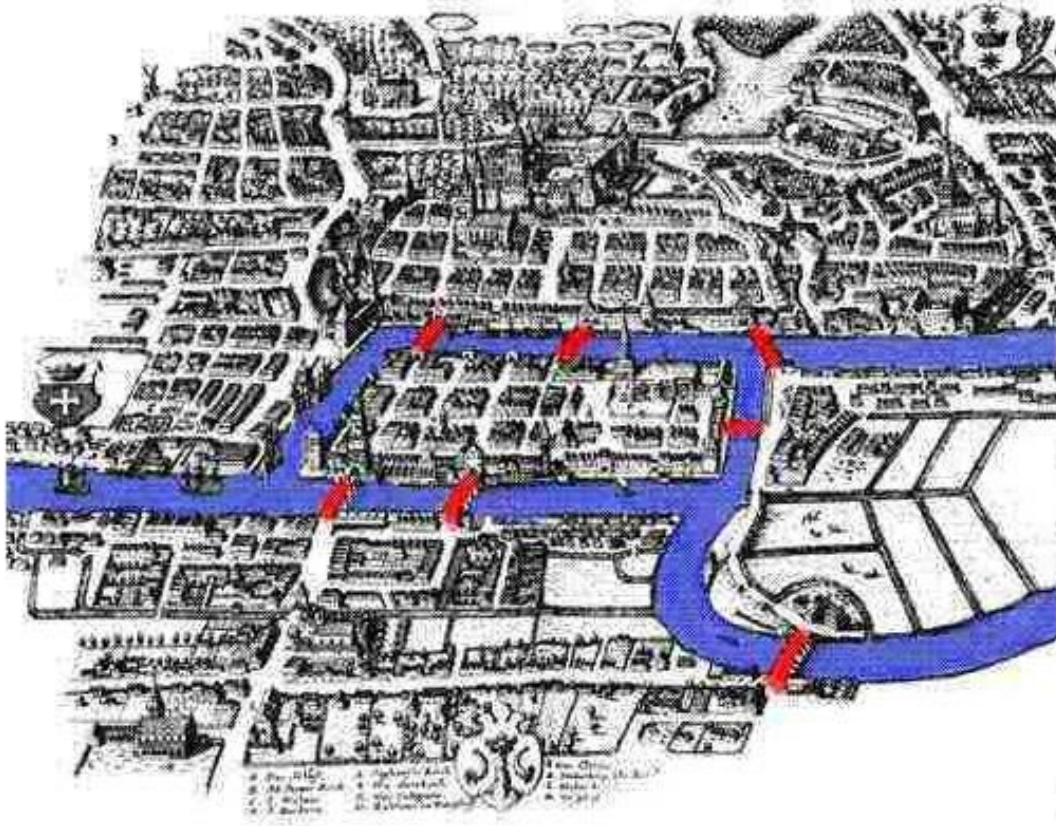
# Problema celor 7 poduri din Königsberg



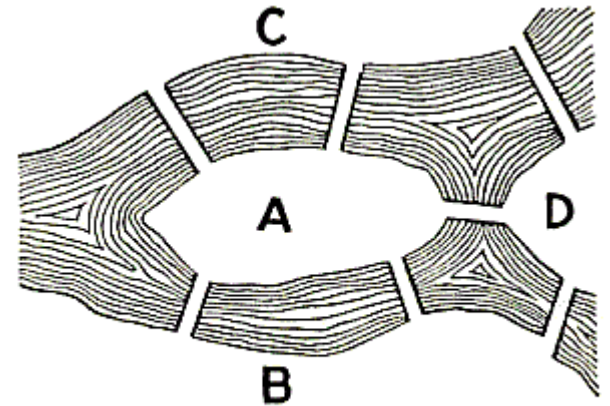
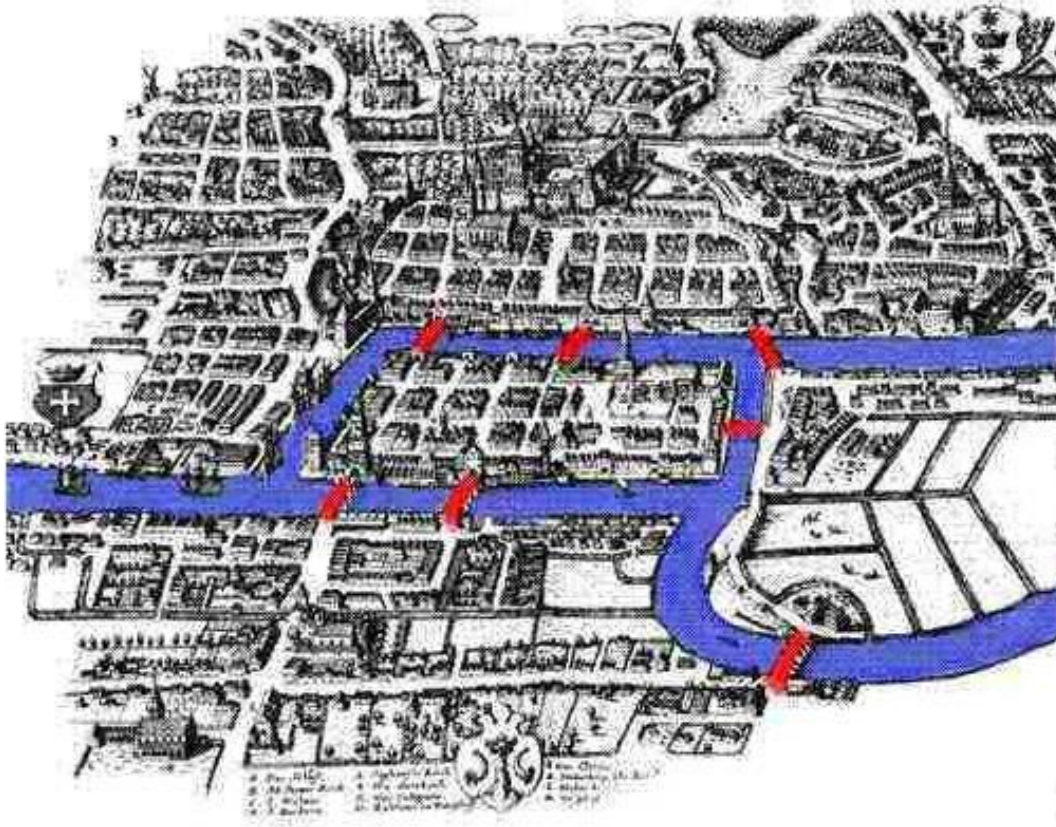
Este posibil ca un om să facă o plimbare în care să treacă pe toate cele 7 poduri o singură dată?



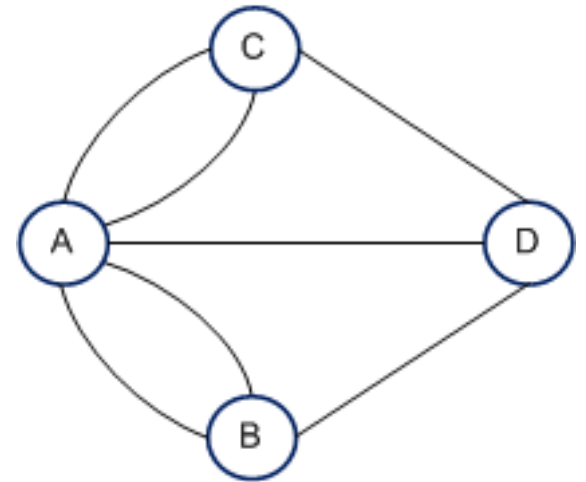
# Problema celor 7 poduri din Königsberg



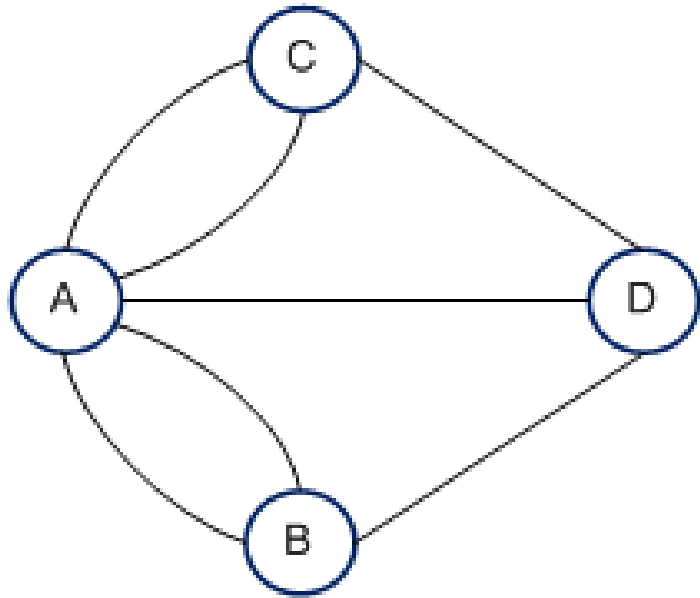
# Problema celor 7 poduri din Königsberg



Modelare:

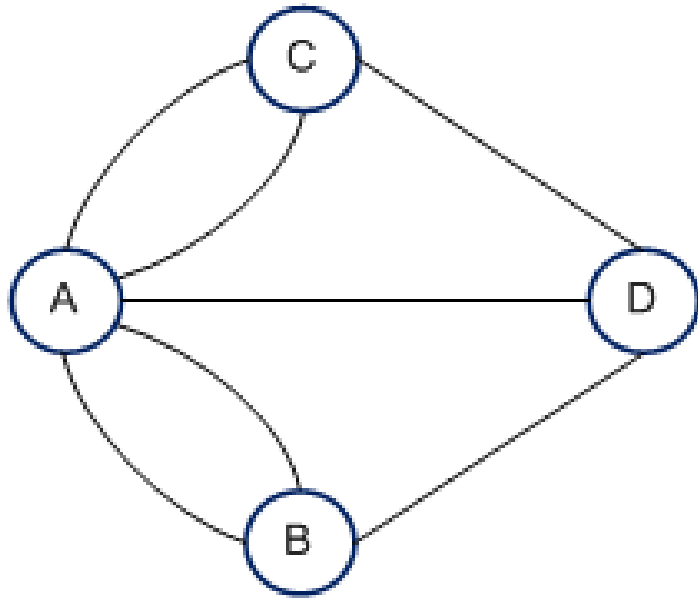


# Problema celor 7 poduri din Königsberg

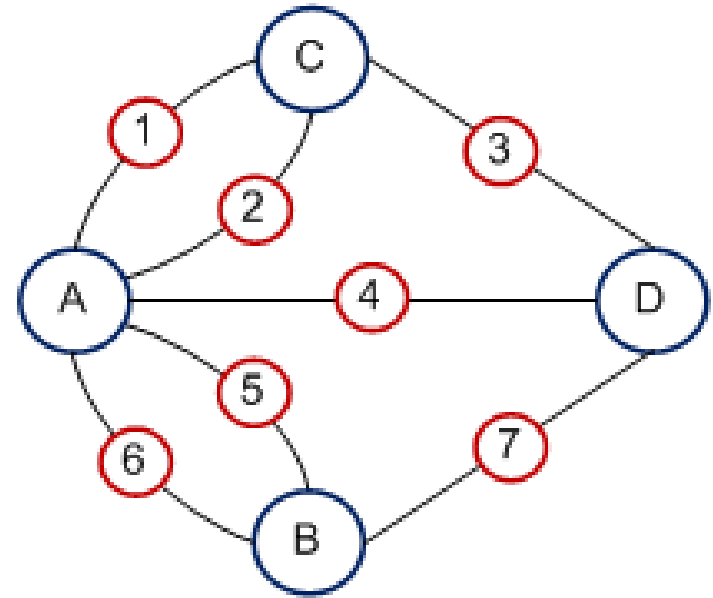




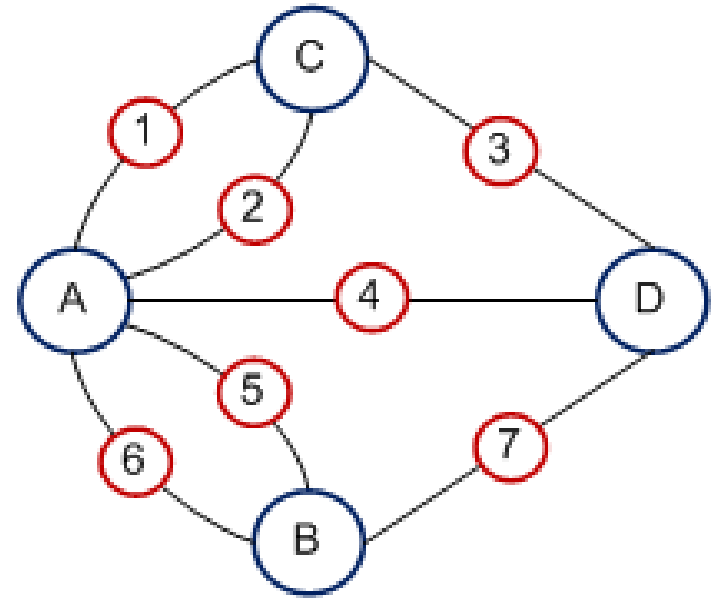
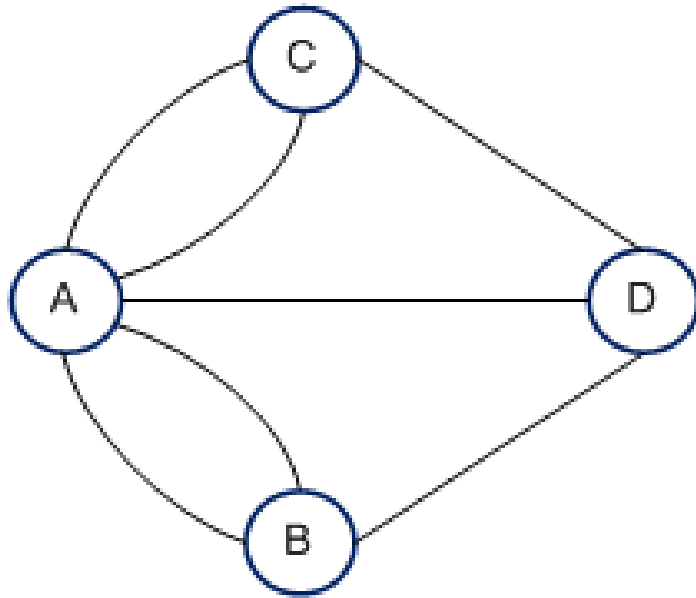
# Problema celor 7 poduri din Königsberg



multigraf



# Problema celor 7 poduri din Königsberg



1736 – Leonhard Euler

*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*

- ▶ **Ciclu eulerian** – traseu închis care trece o singură dată prin toate muchiile
- ▶ **Graf eulerian**

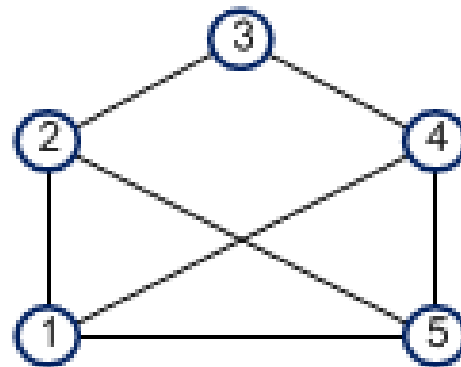
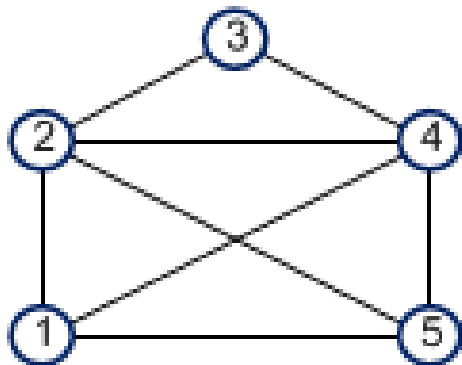
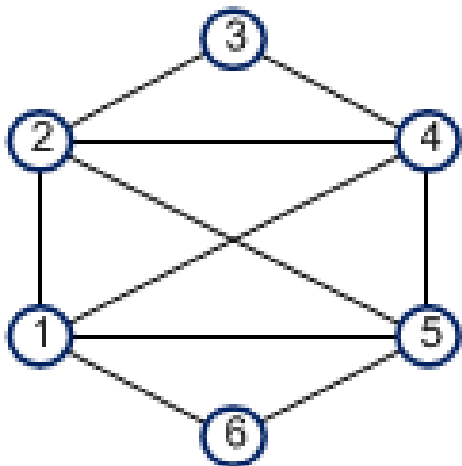


# Problema celor 7 poduri din Königsberg

## ► Interpretare

Se poate desena diagrama printr-o curbă continuă închisă fără a ridica creionul de pe hârtie și fără a desena o linie de două ori (în plus: să terminăm desenul în punctul în care l-am început)?

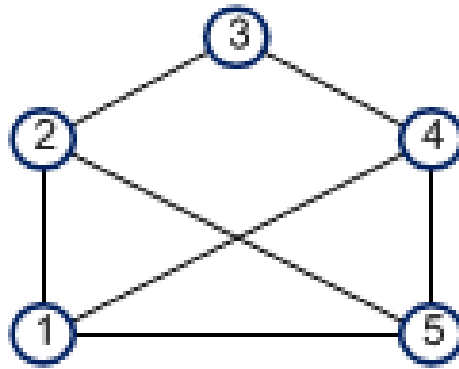
- Tăierea unui material



# Problema celor 7 poduri din Königsberg

## ► Interpretare

De câte ori (minim) trebuie să ridicăm creionul de pe hârtie pentru a desena diagrama?

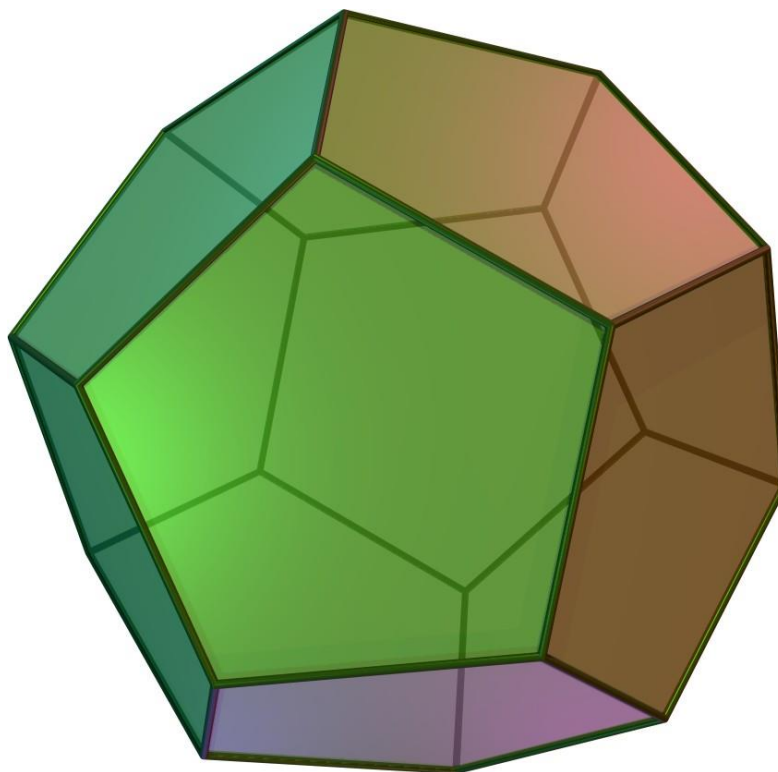


# Jocul icosian

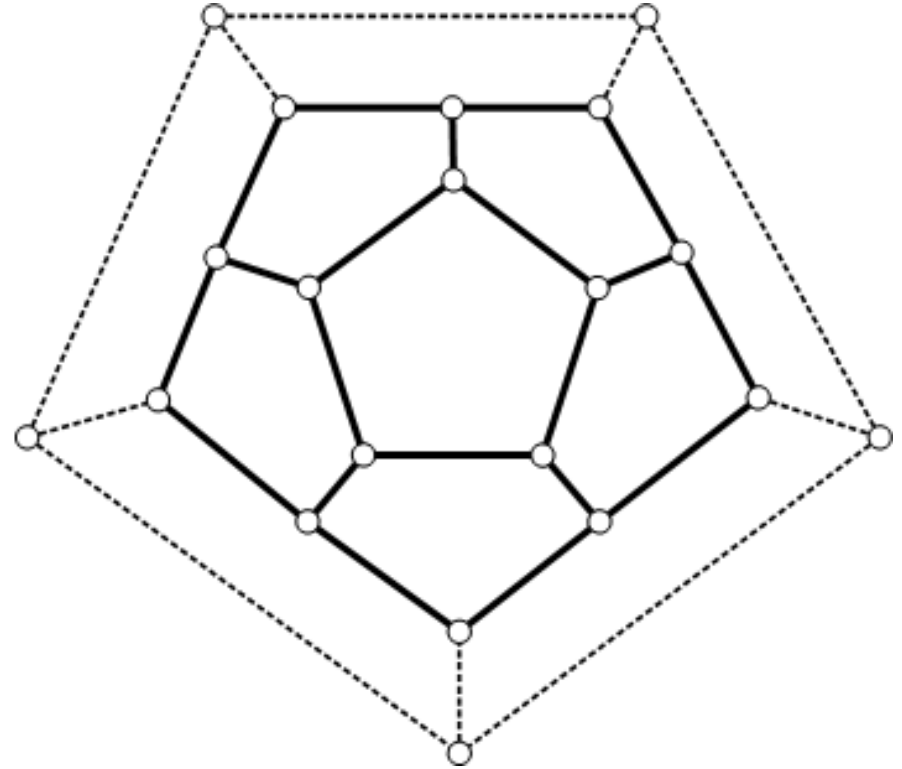
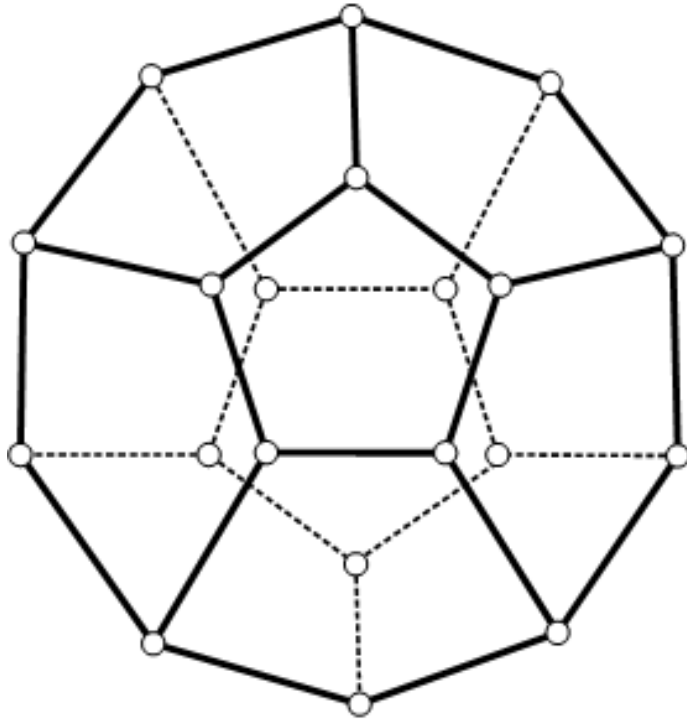


- 1856 – Hamilton – *“voiaj în jurul lumii”*:

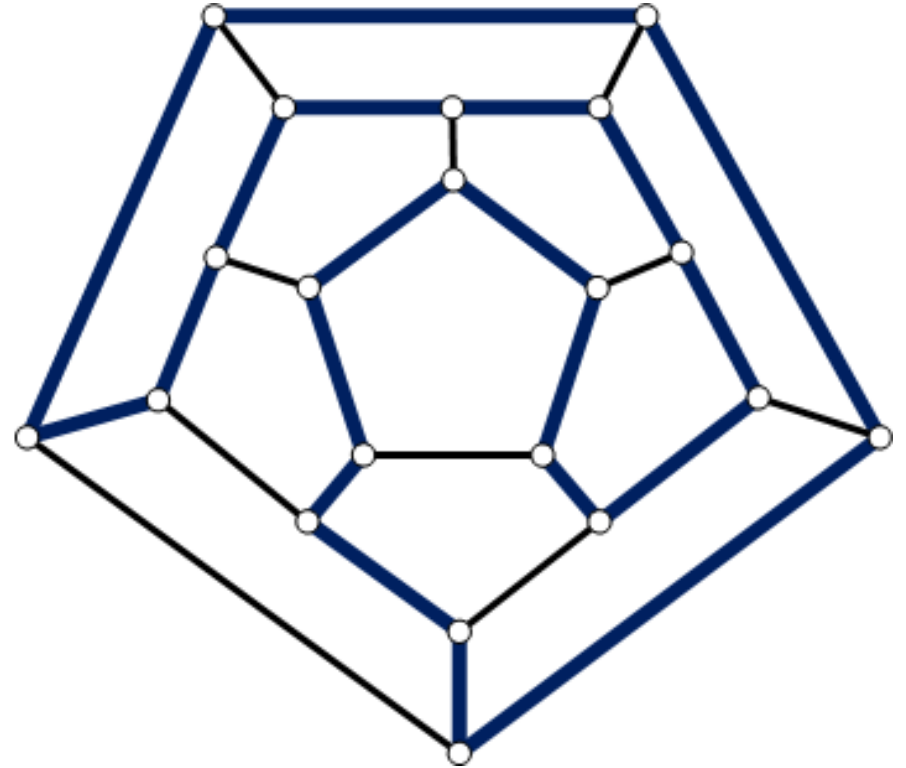
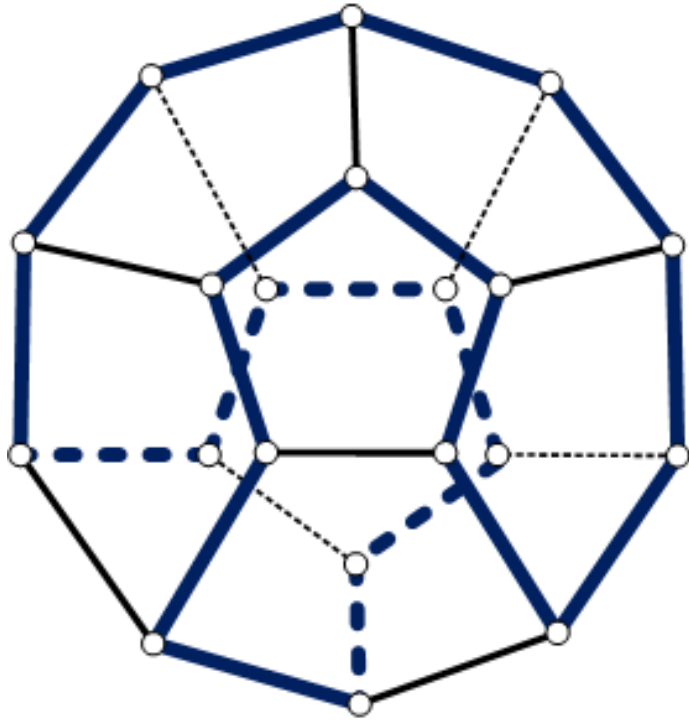
Există un traseu închis pe muchiile dodecaedrului care să treacă prin fiecare vârf o singură dată



# Jocul icosian



# Jocul icosian



# Jocul icosian

- ▶ **Ciclu hamiltonian** – trece o singură dată prin toate vârfurile
- ▶ **Graf hamiltonian**
- ▶ **Problema comis-voiajorului**



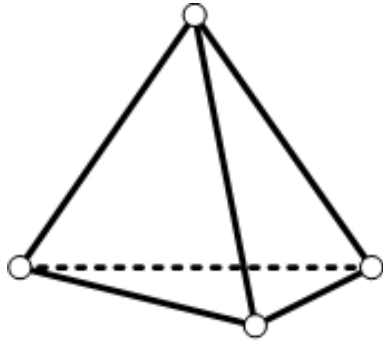
# Corpuri platonice

- **Poliedru** – corp mărginit de suprafețe plane
- **Poliedru convex** – segmentul care unește două puncte oarecare din el conține numai puncte din interior
- **Poliedru regulat convex** – fețele sunt poligoane regulate congruente

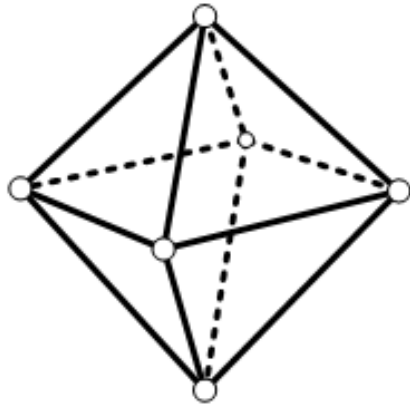
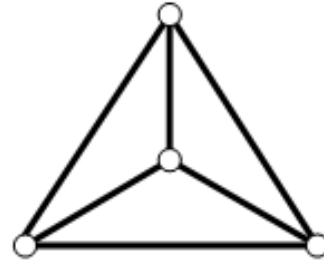
# Corpuri platonice

- **Poliedru** – corp mărginit de suprafețe plane
- **Poliedru convex** – segmentul care unește două puncte oarecare din el conține numai puncte din interior
- **Poliedru regulat convex** – fețele sunt poligoane regulate congruente
- **Graf planar** – se poate reprezenta în plan fără ca muchiile să se intersecteze în interior

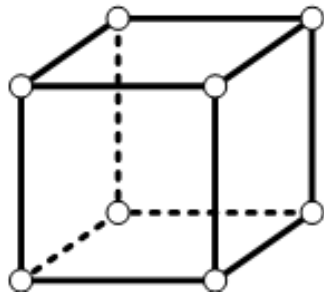
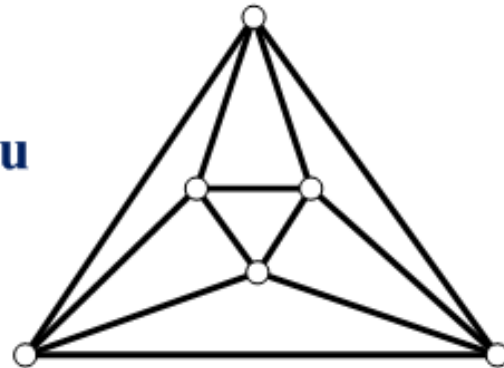
# Corpuri platonice – grafuri planare



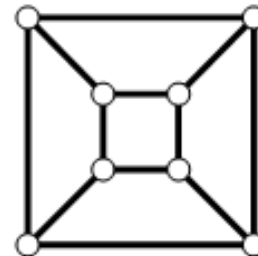
**Tetraedru**



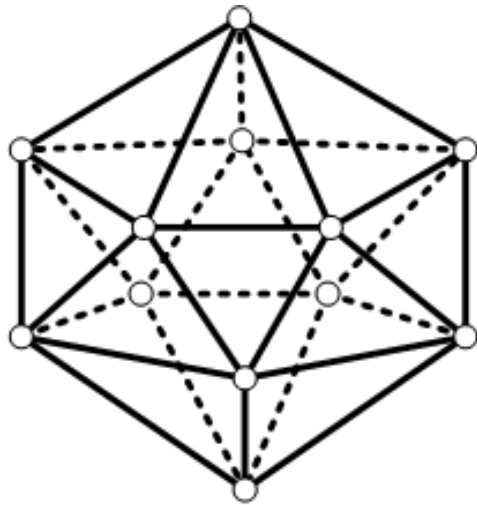
**Octaedru**



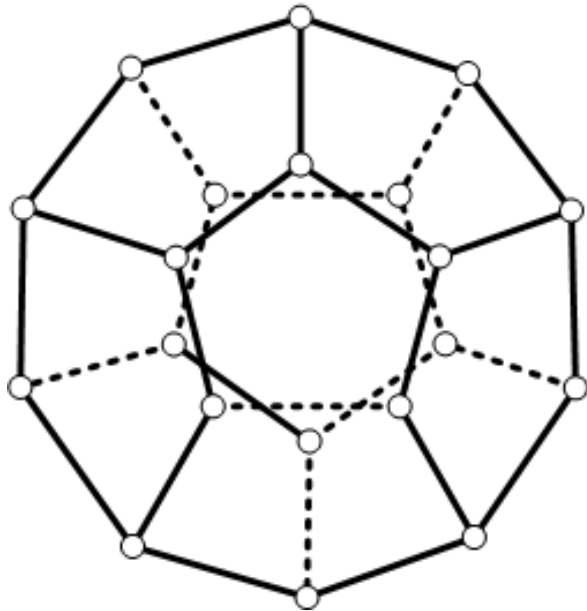
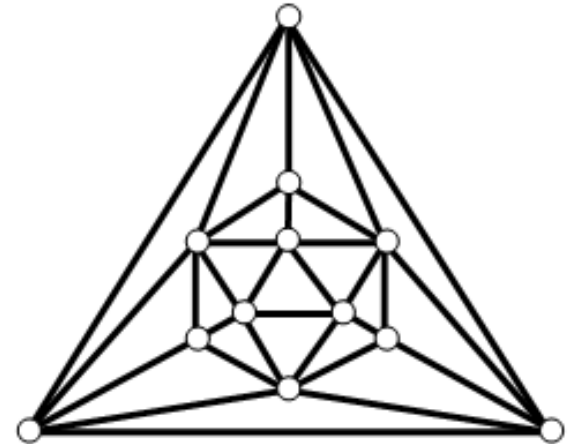
**Cub**



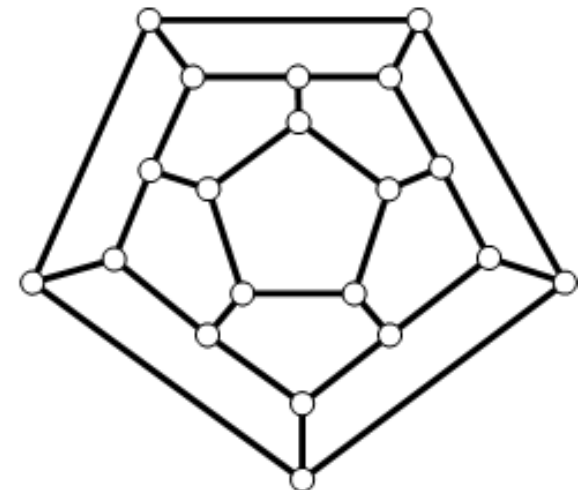
# Corpuri platonice – grafuri planare



**Icosaedru**



**Dodecaedru**



# Corpuri platonice



Sunt hamiltoniene?

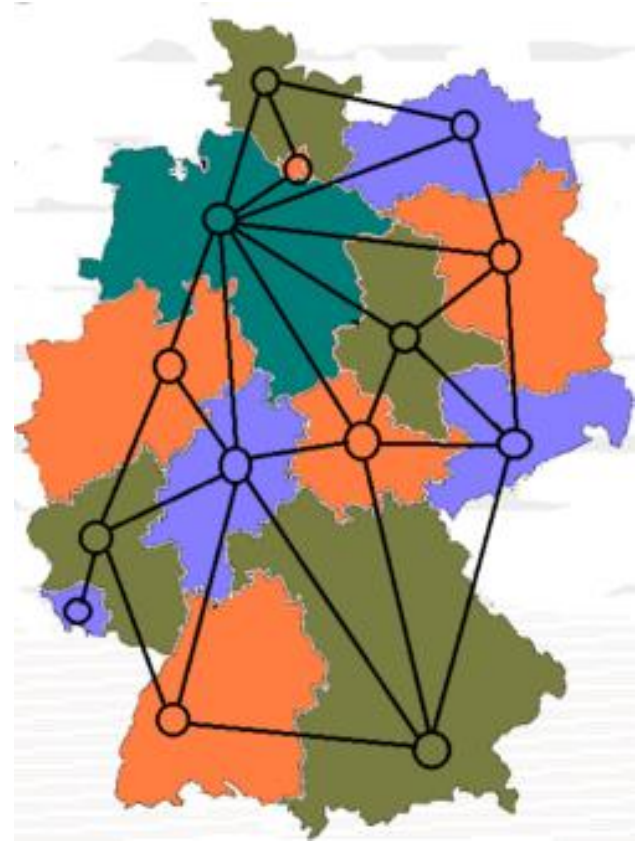
# Problema celor 4 culori

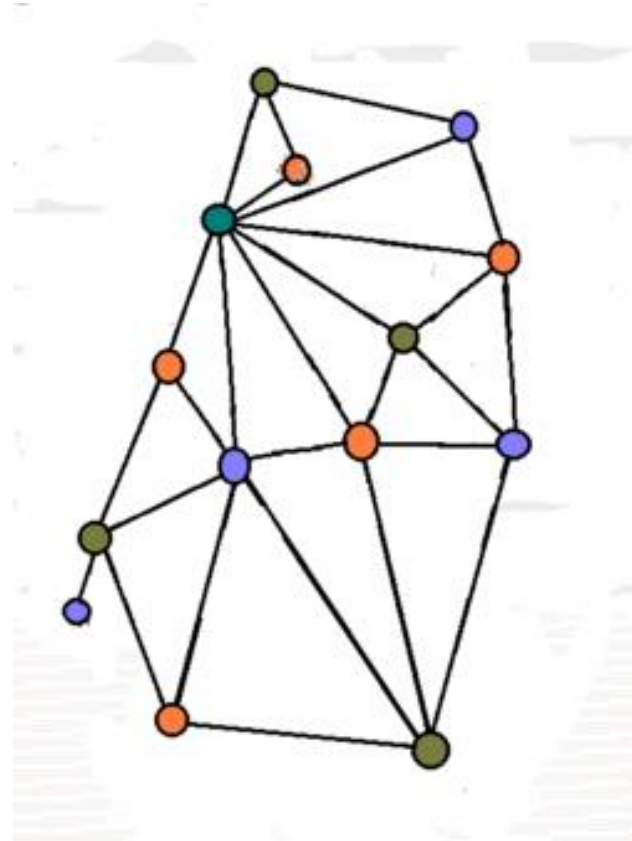
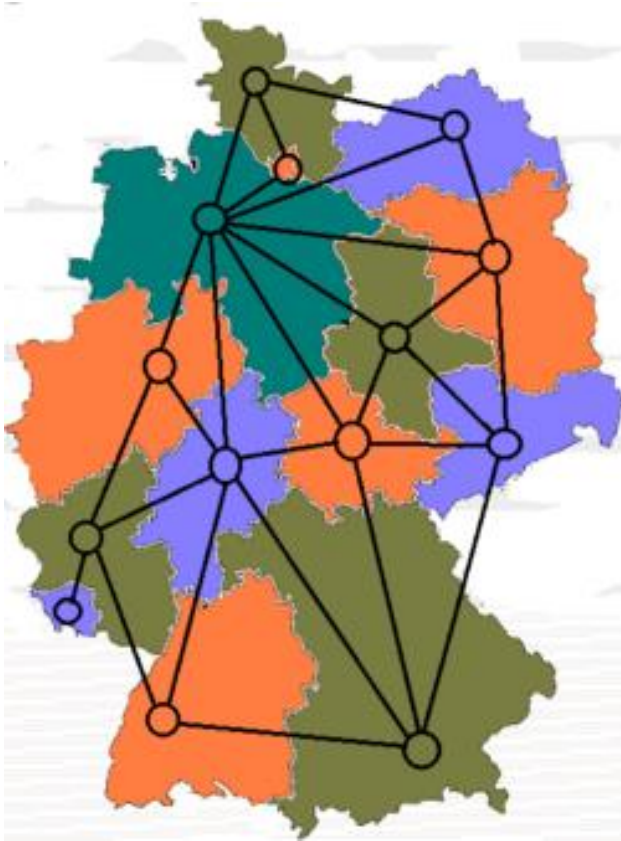
- ▶ Problema celor 4 culori – De Morgan 1852



Se poate colora o hartă cu patru culori astfel încât orice două țări, care au frontieră comună și care **nu se reduce la un punct**, să aibă culori diferite?







- ▶ **Problema celor 4 culori – Appel și Haken răspuns afirmativ în 1976 cu ajutorul calculatorului**