Drumuri minime între toate perechile de vârfuri. Algoritmul Floyd-Warshall

Problema drumurilor minime între toate perechile de vârfuri

Se dă:

- un graf orientat ponderat G= (V, E, w)

Pentru oricare două vârfuri x și y al lui G să se determine distanța de la x la y și un drum minim de la x la y

Ponderile pot fi și negative dar NU există circuite cu cost negativ în G

Soluția 1

Se aplică algoritmul lui Dijkstra pentru fiecare vârf x

!!!funcționează dacă ponderile sunt pozitive

Soluția 1

Se aplică algoritmul lui Dijkstra pentru fiecare vârf x

Complexitate = n * complexitate Dijkstra

- **Soluția 2**

Algoritmul Floyd-Warshall

Floyd–Warshall

- Fie W= $(w_{ij})_{i,j=1..n}$ **matricea costurilor** grafului G:

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ daca } i = j \\ w(i,j), \text{ daca } ij \in E \\ \infty, \text{ daca } ij \notin E \end{cases}$$

Floyd–Warshall

- Vrem să calculăm **matricea distanţelor**

  $D = (d_{ij})_{i,j=1..n}$:

$$\mathbf{d_{ij} = d(i, j)}$$

Floyd-Warshall

- Dacă luăm în considerare doar drumuri fără vârfuri intermediare (cu cel mult un arc) -> matricea de distanțe este chiar matricea costurilor

Ideea algoritmului Floyd-Warshall:

Pentru k = 1, 2, …, n calculăm pentru oricare două vârfuri i, j:

costul minim al unui drum de la i la j care are ca vârfuri intermediare doar vârfuri din mulțimea {1, 2, …, k}

Ideea algoritmului Floyd-Warshall:

Astfel, pentru k = 1, 2, ..., n calculăm **matricea**

$D^{(k)} = (d^{k}_{ij})_{i,j=1..n}$:

$\mathbf{d^{k}_{ij}}$ = costul minim al unui drum de la i la j care are vârfurile intermediare în {1, 2,..., k}

Ideea algoritmului Floyd-Warshall:

Astfel, pentru $k = 1, 2, \ldots, n$ calculăm **matricea**

$D^{(k)} = (d^{k}_{ij})_{i,j=1..n}$:

$\mathbf{d}^{k}_{ij}$ = costul minim al unui drum de la i la j care are vârfurile intermediare în $\{1, 2, \ldots, k\}$

- **Iniţializare: $D^{(0)} = W$**

Care este matricea distanțelor?

Ideea algoritmului Floyd-Warshall:

Astfel, pentru k = 1, 2, …, n calculăm **matricea**

$D^{(k)} = (d^{k}_{ij})_{i,j=1..n}$:

$\mathbf{d^{k}_{ij}}$ = costul minim al unui drum de la i la j care are vârfurile intermediare în {1, 2,…, k}

- **Inițializare: $D^{(0)} = W$**
- **Avem $D^{(n)} = D$**

Ideea algoritmului Floyd-Warshall:

Pentru a **reține și un drum minim** – matrice de predecesori $P^{(k)} = (p^k_{ij})_{i,j=1..n}$:

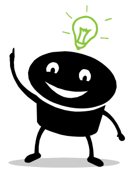
p^k_{ij} = predecesorul lui j pe drumul minim curent găsit de la i la j care are vârfurile intermediare în {1, 2,…, k}

Floyd-Warshall

- **Cum calculăm elementele matricei** $D^{(k)}$?

Floyd-Warshall

- Cum calculăm elementele matricei $D^{(k)}$?



Relație de recurență

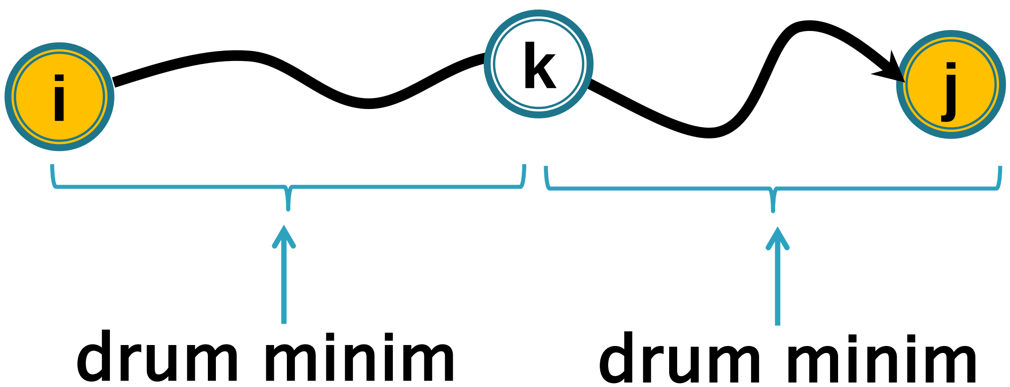
- **Ideea** de calcul al matricei D^k:

Fie P un drum de cost minim de la i la j cu vârfurile intermediare în mulțimea {1,2,..., k}

- **Ideea** de calcul al matricei D^k:

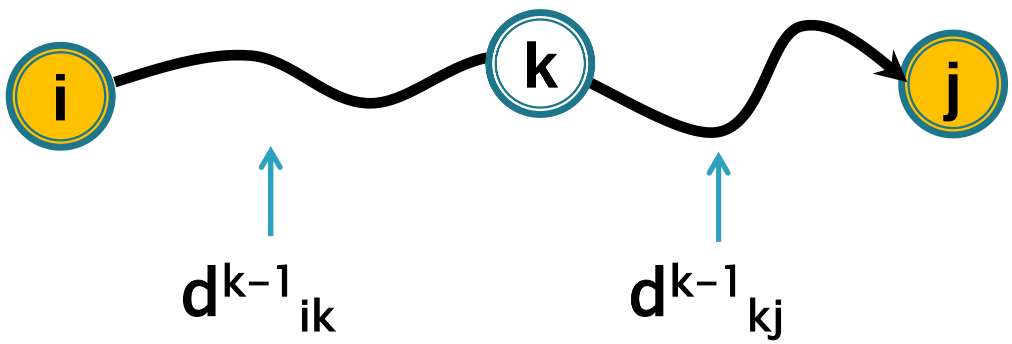
Fie P un drum de cost minim de la i la j cu vârfurile intermediare în mulțimea {1,2,..., k}

- Dacă vârful k este vârf intermediar al lui P



- Se obține relația

$$d^{k}_{ij} = \min\{d^{k-1}_{ij}, d^{k-1}_{ik} + d^{k-1}_{kj}\}$$



- **Se obține relația**

$$d^k_{ij} = \min\{d^{k-1}_{ij}, d^{k-1}_{ik} + d^{k-1}_{kj}\}$$

- **Observații**
    - Avem

$$d^k_{ik} = d^{k-1}_{ik}$$

$$d^k_{kj} = d^{k-1}_{kj}$$

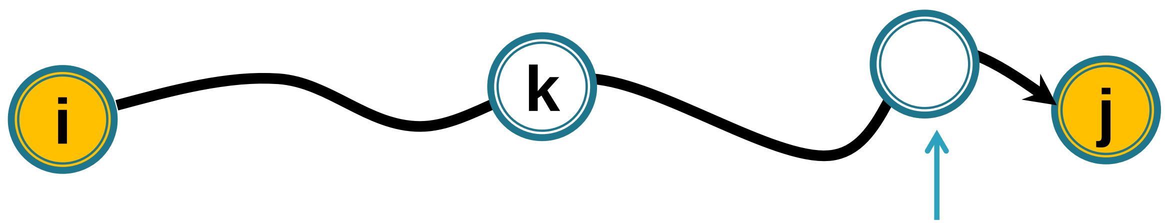
De aceea în implementarea algoritmului putem folosi o singură matrice

- Se obține relația

$$d^k_{ij} = \min\{d^{k-1}_{ij}, d^{k-1}_{ik} + d^{k-1}_{kj}\}$$

- Observații
  - Când de actualizează $d^k_{ij} = d^{k-1}_{ik} + d^{k-1}_{kj}$ trebuie actualizat și p^k_{ij}

$$p^k_{ij} = p^{k-1}_{kj}$$



p^{k-1}_{kj}

Implementare

- Conform observaţiilor anterioare, putem folosi o unică matrice D
- **Iniţializare**

d[i][j] =

p[i][j]=

- Conform observaţiilor anterioare, putem folosi o unică matrice D
- **Iniţializare**

d[i][j] = w(i,j) – costul arcului (i,j)

$$p[i][j]=\begin{cases} i, \text{ daca } ij \in E \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$$

Floyd(G, w)

```
for(i=1;i<=n;i++)  //initial d = matricea costurilor
    for(j=1;j<=n;j++){
        d[i][j]=w[i][j];
         if(w[i][j]== ∞)
            p[i][j]=0;
        else
            p[i][j]=i;
    }
```

Floyd(G, w)

```
for(i=1;i<=n;i++)
    for(j=1;j<=n;j++){
        d[i][j]=w[i][j];
         if(w[i][j]== ∞)
            p[i][j]=0;
        else
            p[i][j]=i;
    }
for(k=1;k<=n;k++)//varfuri intermediare
```

Floyd(G, w)

```
for(i=1;i<=n;i++)
    for(j=1;j<=n;j++){
        d[i][j]=w[i][j];
         if(w[i][j]== ∞)
            p[i][j]=0;
        else
            p[i][j]=i;
    }
for(k=1;k<=n;k++)
    for(i=1;i<=n;i++)
        for(j=1;j<=n;j++)
```

Floyd(G, w)

```
for(i=1;i<=n;i++)
    for(j=1;j<=n;j++){
        d[i][j]=w[i][j];
         if(w[i][j]== ∞)
            p[i][j]=0;
        else
            p[i][j]=i;
    }
for(k=1;k<=n;k++)
    for(i=1;i<=n;i++)
        for(j=1;j<=n;j++)
                if(d[i][j]>d[i][k]+d[k][j]){
                        d[i][j]=d[i][k]+d[k][j];
                        p[i][j]=p[k][j];
                }
```

- **Ieșire:** matricea d = **matricea distanțelor minime**

- **Ieșire:** matricea d = **matricea distanțelor minime**

- Afișarea unui drum de la i la j, **daca d[i][j]<∞**, se face folosind matricea p

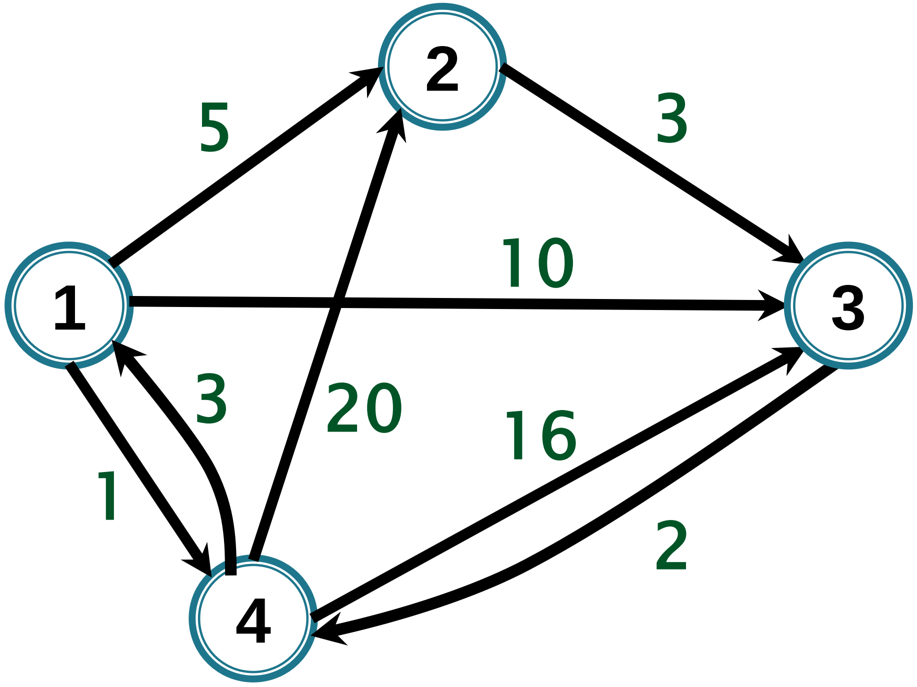
- **Ieșire:** matricea d = **matricea distanțelor minime**

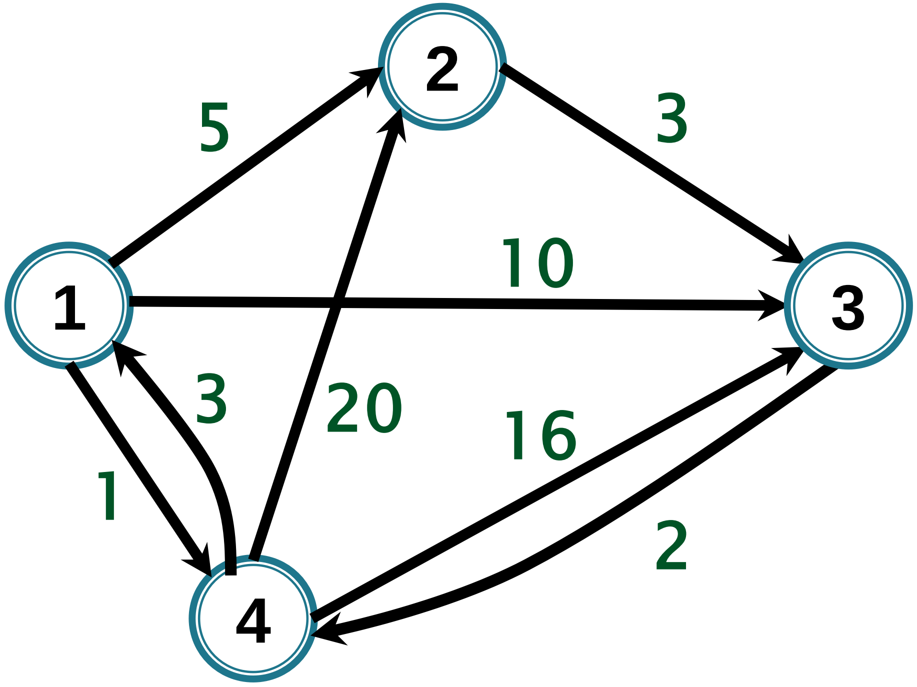
- Afișarea unui drum de la i la j, **daca d[i][j]<∞**, se face folosind matricea p

```
void drum(int i,int j){
      if(i!=j)
            drum(i,p[i][j]);
      cout<<j<<" ";
 }
```

Floyd-Warshall

Complexitate – $O(n^3)$


1
2
3
4
5
3
10
3
20
16
1
2

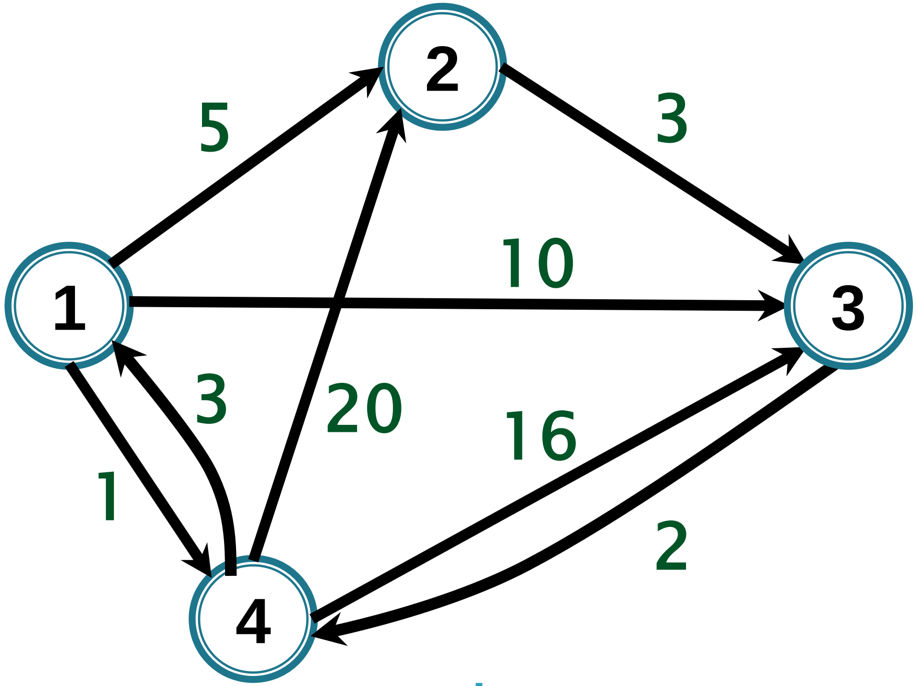


W=d=

0	5	10	1
∞	0	3	∞
∞	∞	0	2
3	20	16	0

p=

0	1	1	1
0	0	2	0
0	0	0	3
4	4	4	0



W=d=

0	5	10	1
∞	0	3	∞
∞	∞	0	2
3	20	16	0

p=

0	1	1	1
0	0	2	0
0	0	0	3
4	4	4	0

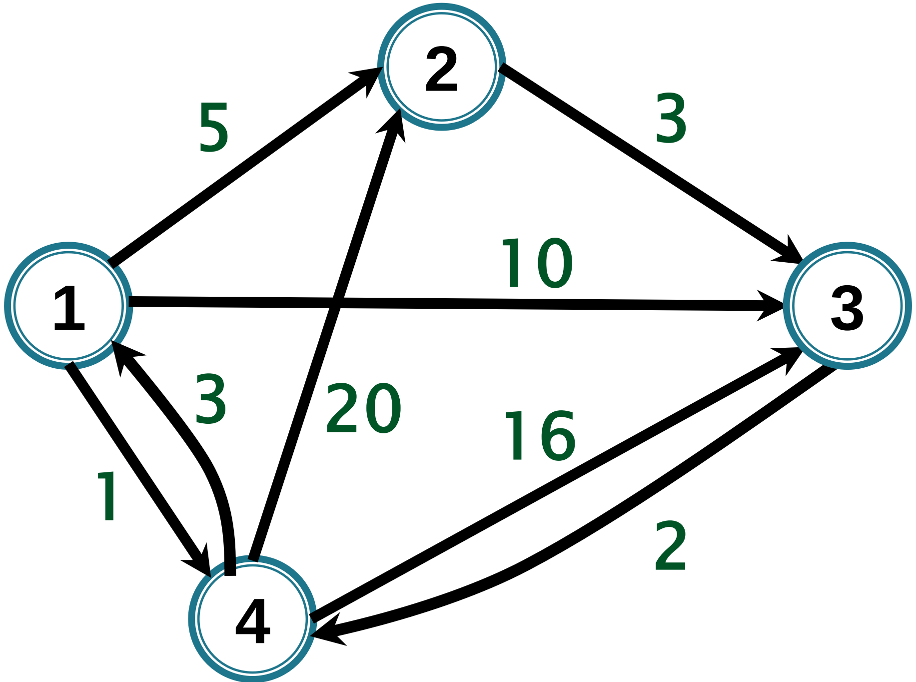
k=1

d=

0	5	10	1
∞	0	3	∞
∞	∞	0	2
3	8	13	0

p=

0	1	1	1
0	0	2	0
0	0	0	3
4	1	1	0



W=d=

0	5	10	1
∞	0	3	∞
∞	∞	0	2
3	20	16	0

p=

0	1	1	1
0	0	2	0
0	0	0	3
4	4	4	0

k=1

d=

0	5	10	1
∞	0	3	∞
∞	∞	0	2
3	8	13	0

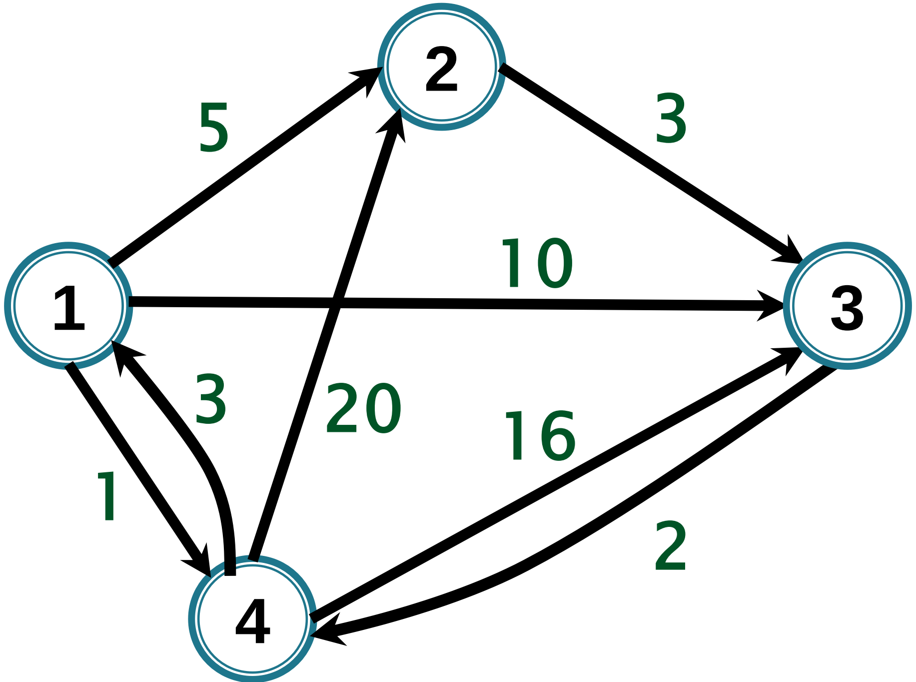
p=

0	1	1	1
0	0	2	0
0	0	0	3
4	1	1	0

k=2

0	5	8	1
∞	0	3	∞
∞	∞	0	2
3	8	11	0

0	1	2	1
0	0	2	0
0	0	0	3
4	1	2	0



W=d=

0	5	10	1
∞	0	3	∞
∞	∞	0	2
3	20	16	0

p=

0	1	1	1
0	0	2	0
0	0	0	3
4	4	4	0

k=1

d=

0	5	10	1
∞	0	3	∞
∞	∞	0	2
3	8	13	0

p=

0	1	1	1
0	0	2	0
0	0	0	3
4	1	1	0

k=2

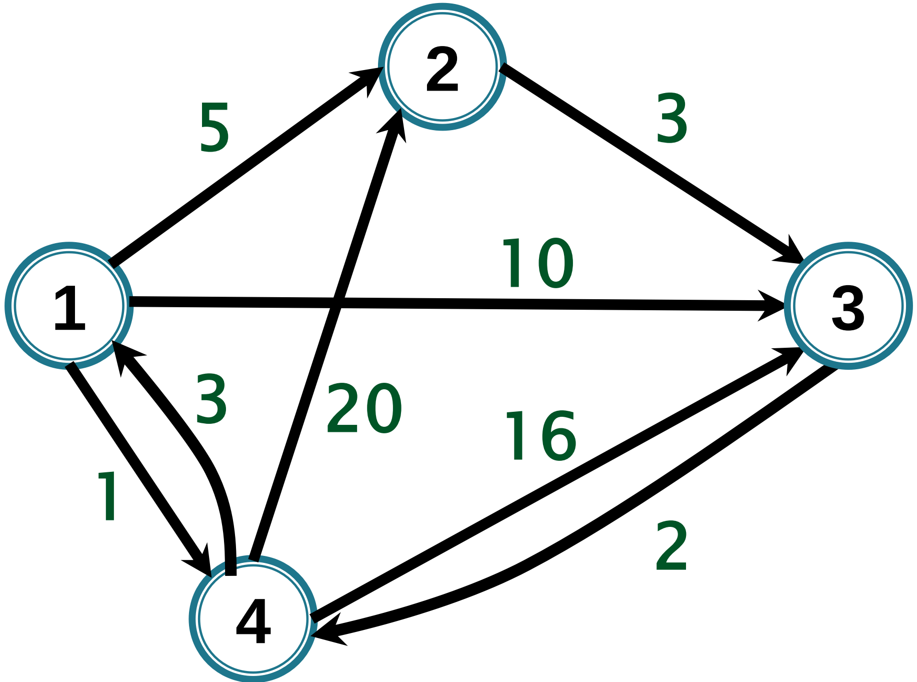
0	5	8	1
∞	0	3	∞
∞	∞	0	2
3	8	11	0

0	1	2	1
0	0	2	0
0	0	0	3
4	1	2	0

k=3

0	5	8	1
∞	0	3	5
∞	∞	0	2
3	8	11	0

0	1	2	1
0	0	2	3
0	0	0	3
4	1	2	0



W=d=

0	5	10	1
∞	0	3	∞
∞	∞	0	2
3	20	16	0

p=

0	1	1	1
0	0	2	0
0	0	0	3
4	4	4	0

k=1

d=

0	5	10	1
∞	0	3	∞
∞	∞	0	2
3	8	13	0

p=

0	1	1	1
0	0	2	0
0	0	0	3
4	1	1	0

k=2

0	5	8	1
∞	0	3	∞
∞	∞	0	2
3	8	11	0

0	1	2	1
0	0	2	0
0	0	0	3
4	1	2	0

k=3

0	5	8	1
∞	0	3	5
∞	∞	0	2
3	8	11	0

0	1	2	1
0	0	2	3
0	0	0	3
4	1	2	0

k=4

0	5	8	1
8	0	3	5
5	10	0	2
3	8	11	0

0	1	2	1
4	0	2	3
4	1	0	3
4	1	2	0

Floyd-Warshall

- **Algoritmul funcționează corect chiar dacă arcele au și costuri negative (dar graful nu are circuite negative)**

- **Cum putem detecta pe parcursul algoritmului existența unui circuit negativ (⇒ datele de intrare nu sunt corecte)** ?

Aplicație
Închiderea tranzitivă a unui graf orientat
Algoritmul Roy-Warhsall

Roy-Warshall

- **Aplicație:** **Închiderea tranzitivă** a unui graf orientat $G=(V, E)$ (!!!neponderat):

  $G^* = (V, E^*)$, unde

  $E^* = \{(i, j) \mid$ **există drum nevid** de la i la j în G$\}$

drum nevid = de lungime > 0

Roy-Warshall

- **Aplicație:** **Închiderea tranzitivă** a unui graf orientat $G=(V, E)$ (!!!neponderat):

  $G^* = (V, E^*)$, unde

  $E^* = \{(i, j) \mid$ **există drum** nevid de la i la j în $G\}$

- **Utilitate:**

  – **grupări de obiecte aflate în relație (directă sau indirectă):** optimizări în baze de date, analize în rețele, logică

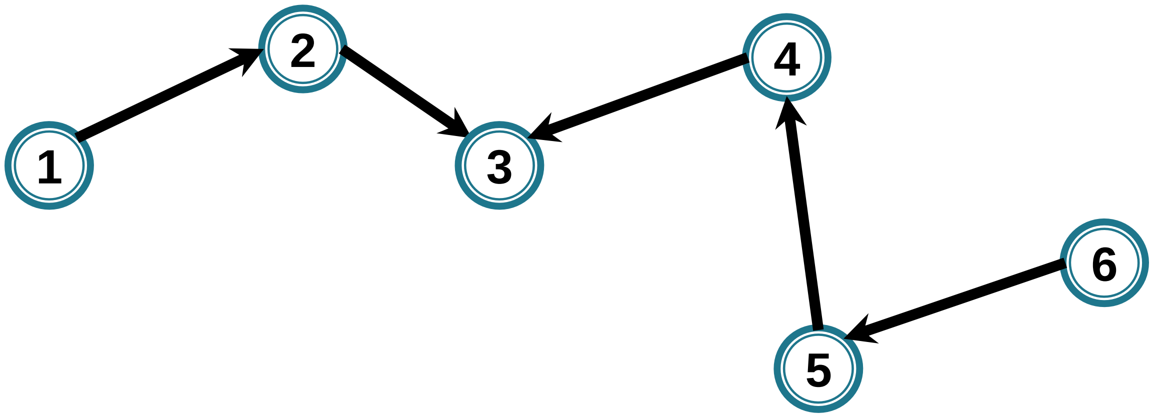
Roy-Warshall

- **Închiderea tranzitivă** ⇔ calculăm **matricea existenței drumurilor** (matricea de adiacență a închiderii tranzitive)

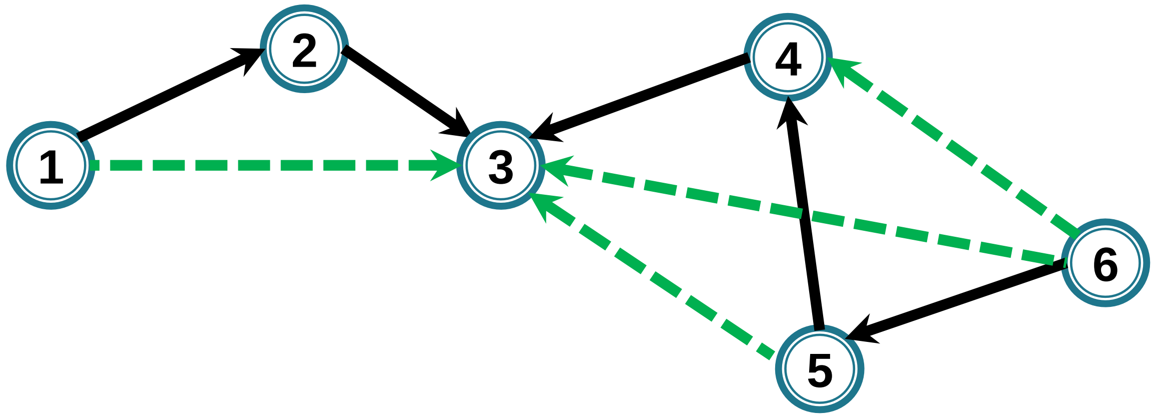
  $D = (d_{ij})_{i,j=1..n}$:

  $$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă există drum nevid de la i la j} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

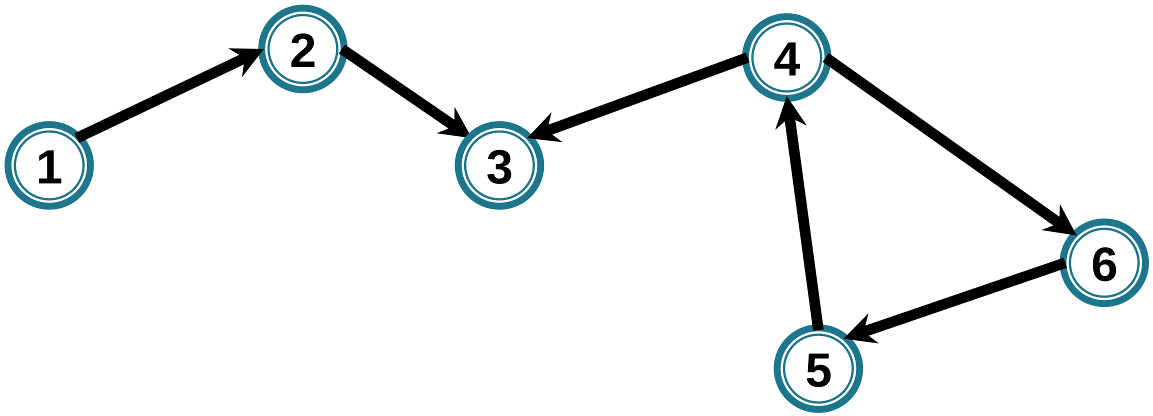
Roy-Warshall



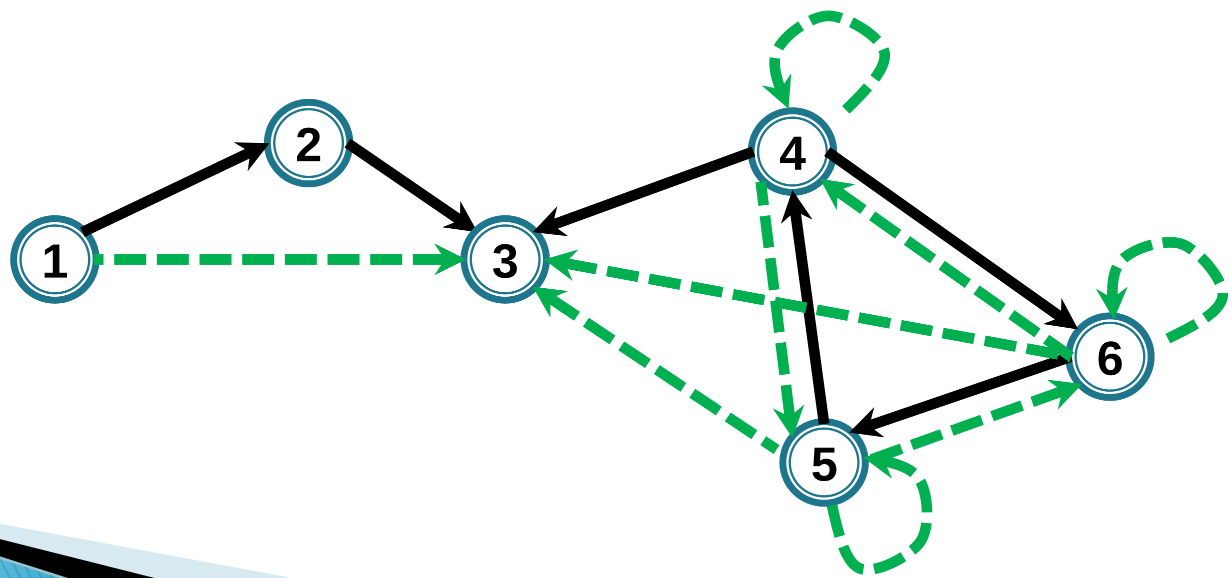
Închiderea tranzitivă



Roy–Warshall



Închiderea tranzitivă



Roy-Warshall

```
initial d = matricea de adiacenta

for(k=1;k<=n;k++)
   for(i=1;i<=n;i++)
      for(j=1;j<=n;j++)
        d[i][j] = d[i][j] ∨ (d[i][k] ∧ d[k][j]);
                        SAU           SI
```

Roy-Warshall

- **Observație**

  Dacă A este matricea de adiacență a unui graf și

  $\mathbf{A}^k = (a^k_{ij})_{i,j=1..n}$: **puterea k a matricei** (k<n)

  atunci $\mathbf{a^k_{ij}}$ = **numărul de drumuri distincte** de lungime k de la i la j (!nu neapărat elementare)

Roy-Warshall

- **Observație**

Dacă A este matricea de adiacență a unui graf și

$\mathbf{A}^k = (a^k_{ij})_{i,j=1..n}$: puterea k a matricei ($k<n$)

atunci $\mathbf{a}^k_{\mathbf{ij}}$ = **numărul de drumuri distincte** de lungime k de la i la j (!nu neapărat elementare)

Demonstrație - Inducție. Temă

Roy-Warshall

- **Observație**

  Dacă A este matricea de adiacență a unui graf și

  $\mathbf{A^k} = (a^k_{ij})_{i,j=1..n}$: puterea k a matricei (k<n)

  atunci $\mathbf{a^k_{ij}}$ = **numărul de drumuri distincte** de lungime k de la i la j (!nu neapărat elementare)

  - **Consecință**

    $$\mathbf{D = A \vee A^2 \vee \ldots \vee A^{n-1}}$$

    unde o valoare diferită de 0 se interpretează ca true