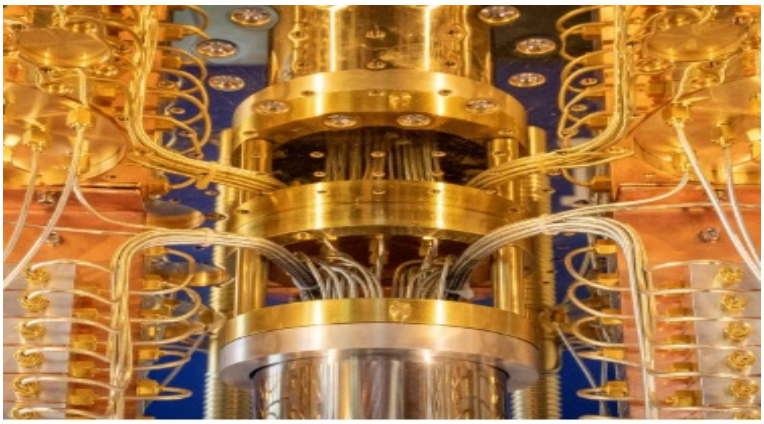
Criptografía post-cuántica basada en retículos

Lección 3: Minicurso Mar del Plata, Noviembre 2025

Syllabus

- **Criptografía post-cuántica (PQC)**
- **Ordenador cuantico: Qubits y registro**
- **Algoritmo de Shor**
- **Factorización**



Índice

3.5 Criptografia post-cuantica **3**
3.5.1 Ordenador Cuantico 4
3.5.1.1 Registro de n Qubit: Notación de Dirac, Bra-Ket, de la mecanica cuantica 7
3.5.1.2 Operaciones y programas cuanticos 8

3.6 Algoritmo de Shor : funciones periodicas y transformada de Fourier **9**
3.6.0.1 Transformada de Fourier 9
3.6.1 Como utilizarlo para factorizar numeros 11

Referencias **12**

3.5 Criptografia post-cuantica

Se trata de algoritmos ejecutables en computadoras clasicas que logran desbalancear la complejidad incluso asumiendo que el atacante poseea una computadora cuantica.

Es decir, esquemas criptograficos ejecutables en maquinas clasicas resistentes al ataque de un enemigo que poseea un maquina cuantica (y maquinas clasicas tambien).

3.5.1 Ordenador Cuantico

Similarmente a un ordenador clasico el ordenador cuantico posee una memoria (registros), operaciones que permiten cambiar el estado de los registros y programas compuestos de dichas operaciones.

La diferencia esencial, o quizas el cambio de paradigma, con el ordenador clasico consiste en:

- el registro, o los registros, contiene una distribucion de probabilidad,
- las operaciones cambian dichas distribuciones de probabilidad,
- el resultado de la lectura del registro sigue la distribucion de probabilidad contenida en el registro,
- despues de la lectura del registro, la distribucion en el registro cambia y se concentra en el estado del resultado de la lectura

Di modo analogo a un registro clasico formado de Flip-Flops el registro cuantico esta formado de Qubits.

3.5.1.1 Registro de un solo qubit

El registro contiene vectores unitarios (versores) $\mathbf{v}$ de un espacio vectorial complejo V de dimension dos.

Dos versores (perpendiculares) de una base de V, **cero** y **uno**, representan las dos posibles lecturas del registro,

Si leo el registro que contiene $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ entonces el resultado de la lectura es :

$$\textbf{cero} \text{ con probabilidad } p^2$$

$$\textbf{uno} \text{ con probabilidad } q^2$$

donde p, q son las coordenadas de $\mathbf{v}$ respecto a la base **cero**,**uno**, i.e.

$$\mathbf{v} = p \cdot \textbf{cero} + q \cdot \textbf{uno}$$

Si el resulta de la lectura es **cero** el nuevo contenido del registro es una distribucion concentrada en **cero** en caso contrario leo **uno** y el estado del registro pasa a ser la distribucion concentrada en **uno**.

NOTE 3.5.1.2

Si el registro contiene el vector

$$\mathbf{v} = p \cdot \textbf{cero} + q \cdot \textbf{uno}$$

se dice que describe la fisica de la **superposicion** (superposition) de los dos estados **cero** y **uno**.

3.5.1.3 Registro de dos qubits

El registro contiene vectores unitarios (versores) $\mathbf{v}$ del producto tensorial $\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}$ de dimension cuatro.

Los dos vectores **cero** y **uno** de V crean los cuatro posibles lecturas del registro:

$$\mathbf{cero} \otimes \mathbf{cero}, \mathbf{cero} \otimes \mathbf{uno}, \mathbf{uno} \otimes \mathbf{cero}, \mathbf{uno} \otimes \mathbf{uno}$$

Si leo el registro que contiene $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ entonces el resultado de la lectura es :

$$\mathbf{cero} \otimes \mathbf{cero} \text{ con probabilidad } p_1^2$$

$$\mathbf{cero} \otimes \mathbf{uno} \text{ con probabilidad } p_2^2$$

$$\mathbf{uno} \otimes \mathbf{cero} \text{ con probabilidad } p_3^2$$

$$\mathbf{uno} \otimes \mathbf{uno} \text{ con probabilidad } p_4^2$$

donde p_1, p_2, p_3, p_4 son las coordenadas de $\mathbf{v}$ respecto a la base de productos tensoriales, i.e.

$$\mathbf{v} = p_1 \cdot \mathbf{cero} \otimes \mathbf{cero} + p_2 \cdot \mathbf{cero} \otimes \mathbf{uno} + p_3 \cdot \mathbf{uno} \otimes \mathbf{cero} + p_4 \cdot \mathbf{uno} \otimes \mathbf{uno}$$

Si el resultado de la lectura es $\mathbf{cero} \otimes \mathbf{cero}$ el nuevo contenido del registro es la distribucion concentrada en $\mathbf{cero} \otimes \mathbf{cero}$ y analogamente en el caso de las otras posibles lecturas.

NOTE 3.5.1.4

El producto tensorial $\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}$ captura la fisica del **entrelazamiento** (entanglement) fisico de dos qubits. El estado $\mathbf{v}$ del registro representa un entrelazamiento de los dos qubits cuando no se puede factorizar $\mathbf{v} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ en dos estados $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathrm{V}$.

3.5.1.1 Registro de n Qubit: Notación de Dirac, Bra-Ket, de la mecanica cuantica

Para simplificar la generalización a un registro con n qubits en la literatura se utiliza la notación de Dirac:

- **un Ket es un vector**: e.g. $|\mathbf{v}\rangle = \mathbf{v}$ o

  $$|0\rangle = \textbf{cero}\,,\ |1\rangle = \textbf{uno}$$

  para los dos estados de la base de V.

- **Producto tensorial**:

  $$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1\psi_2\rangle$$

  o en el caso de $\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}$:

  $$|00\rangle = \textbf{cero} \otimes \textbf{cero}$$
  $$|01\rangle = \textbf{cero} \otimes \textbf{uno}$$
  $$|10\rangle = \textbf{uno} \otimes \textbf{cero}$$
  $$|11\rangle = \textbf{uno} \otimes \textbf{uno}$$

El estado de un registro de n qubits es un vector $|\mathbf{v}\rangle$ del producto tensorial

$$\mathrm{V}^{\otimes n} = \underbrace{\mathrm{V} \otimes \mathrm{V} \otimes \cdots \otimes \mathrm{V}}_{n \text{ veces}}\,.$$

El resultado de la lectura del registro sera entonces uno de los 2^n vectores de la base:

$$|00\cdots00\rangle\ ,\ |00\cdots00\rangle\ ,\ \cdots\ ,\ |11\cdots10\rangle\ ,\ |11\cdots11\rangle$$

NOTE 3.5.1.5

Un estado del registro es entonces una combinación lineal de los vectores de esta base.

3.5.1.2 Operaciones y programas cuanticos

Una operación, tambien conocida como *gate o puerta cuantica* que cambia el estado del registro, es un operador lineal unitario $\mathbf{U}$ del espacio $\mathrm{V}^{\otimes n}$. Es decir, una matriz $\mathbf{U}$ unitaria.

Un programa es un secuencia de operaciones i.e. $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2\cdots\mathbf{U}_k$ aplicadas a un estado inicial del registro, combinadas con lecturas.

3.5.1.6 Operador de Hadamard

El operador de Hadamard (H) en forma matricial se define como:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicando el operador de Hadamard al estado inicial $|v\rangle = |0\rangle$ se logra poner en el registro el estado en superposicion:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |1\rangle$$

La importancia del operador de Hadamard es que permite poner el registro en un estado de superposicion donde todas las lecturas son equiprobables.

NOTE 3.5.1.7

Tensorizando $H^{\otimes n} := H \otimes H \otimes \cdots \otimes H$ se obtiene un operador de Hadamard de $\mathrm{V}^{\otimes n}$ que permite poner el registro en un estado de superposicion y entralazamiento donde todas las lecturas son equiprobables.

3.6 Algoritmo de Shor : funciones periodicas y transformada de Fourier

3.6.0.1 Transformada de Fourier

Un periodo p de una función $f : G \to A$, por definición, satisface

$$f(x+p) = f(x)$$

para todos los valores de x.

El algoritmo de Shor [Sho94] implementa una version de transformada de Fourier $\widehat{f}$ debido a una propiedad fundamental de $\widehat{f}$ que relaciona su soporte con los periodos de f.

Gracias a esta relacion *periodos de f-soporte de $\widehat{f}$* el calculo de los periodos de f sera eficientemente.

El registro cuantico contendra el grafico $(x, f(x))$ de la funcion f del siguiente modo:

En el producto tensorial $\mathrm{V}^{\otimes n} \otimes \mathrm{V}^{\otimes n}$ los argumentos x van a estar en el primer factor $\mathrm{V}^{\otimes n}$ y los valores $f(x)$ en el segundo $\mathrm{V}^{\otimes n}$.

Utilizando las operaciones cuanticas transformaremos el grafico $(x, f(x))$ en el grafico de su transformada $(x, \widehat{f}(x))$ y al final se efectuara la lectura del primer registro.

Aqui el pseudocodigo :

3.6.0.1 Shor's Algorithm

$|v\rangle \leftarrow |00\cdots00\rangle \otimes |00\cdots00\rangle$ ▷ *(estado inicial del registro cuantico)*

$|v\rangle \leftarrow \sum_{x\in G} \frac{1}{\sqrt{|G|}} \cdot x \otimes |00\cdots00\rangle$ ▷ *(Operador de Hadamard)*

$|v\rangle \leftarrow \sum_{x\in G} \frac{1}{\sqrt{|G|}} \cdot x \otimes f(x)$ ▷ *(Operador adecuado)*

$|v\rangle \leftarrow \sum_{x\in G} \frac{1}{\sqrt{|G|}} \cdot x \otimes \widehat{f}(x)$ ▷ *(Operador transformada-Fourier)*

$|v\rangle \leftarrow x_0$ ▷ *(lectura del primer factor del registro)*

La probabilidad de leer x_0, antes de la lectura en el ultimo paso, era

dada

$$\frac{|\widehat{f}(x_0)|}{\sqrt{|G|}}$$

y es distinta de cero solo si x_0 pertence al soporte de $\widehat{f}$.

NOTE 3.6.0.2

Es un hecho del analisis harmonico commutativo que la transformada de Fourier $\widehat{f}(x)$ es cero en x si x no es un multiplo entero de la frequencia $\frac{1}{p}$ de f. Aqui doy unos detalles de este calculo:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \int_{g\in G} e^{\mathrm{i}2\pi\cdot x\cdot g}\cdot f(g)\ \mathrm{d}g = \\
&= \int_{\widetilde{g}\in G} e^{\mathrm{i}2\pi\cdot x\cdot(\widetilde{g}+p)}\cdot f(\widetilde{g}+p)\ \mathrm{d}\widetilde{g} = \qquad \text{(cambio di variable } g=\widetilde{g}+p\text{)} \\
&= \int_{\widetilde{g}\in G} e^{\mathrm{i}2\pi\cdot x\cdot\widetilde{g}}\cdot e^{\mathrm{i}2\pi\cdot x\cdot p}\cdot f(\widetilde{g})\ \mathrm{d}\widetilde{g} = \\
&= e^{\mathrm{i}2\pi\cdot x\cdot p}\cdot\hat{f}(x)
\end{aligned}$$

de donde se conclude que si x no es un multiplo entero de la frequencia $\frac{1}{p}$ de f entonces

$$\hat{f}(x) = 0\ .$$

Es decir, la lectura x_0 permitira calcular la frequencia $\frac{1}{p}$ y por lo tanto el periodo p de f.

3.6.1 Como utilizarlo para factorizar numeros

En esta seccion explico como utilizar el calculo eficiente de periodos para factorizar un numero N. Antes de empezar subrayo que esto era conocido por Gauss quien dedico el famoso trabajo, Disquisitiones Arithmeticae, a la aritmetica definiendo los anillos modulares $\mathbb{Z}_N$ y demostrando varios teoremas fundamentales.

La observación clave para factorizar N es obtener una solucion w no trivial de la ecuación :

$$x^2 = 1 \pmod N$$

no trivial significa que $w \neq 1, -1 \pmod N$.

Dada una w, no trivial, para calcular un factor de N basta calcular el $d = \text{m.c.d}(w-1, N)$.

Efectivamente si $d = 1$ entonces N tendria que dividir a $w+1$ lo que implicaria que

$$w = -1 \pmod N$$

y w seria trivial. De modo analogo si $d = N$ entonces $w = 1 \pmod N$ y de nuevo w seria trivial.

Supponemos entonces que tenemos una computadora cuantica que calcula velozmente el periodo r de una función $f(x)$. Para factorizar N vamos a considerar la función periodica $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_N$ definida como

$$f(x) := a^x \pmod N$$

Usando r calcularemos una solucion no trivial w de $x^2 = 1 \pmod N$.

Tener presente que si r es el periodo de f entonces $a^r = 1 \pmod N$.

3.6.1.1 Factorizando N

$a \xleftarrow{\$} \mathbb{Z}_N$

$r \leftarrow$ **QuaComPeriodo**(a, N) ▷ *Calcula el periodo de* $f(x) = a^x$

Si r es par continuar sino repetir ▷ *busca una* $f(x) = a^x$ *cuyo perido sea par*

$k \leftarrow \frac{r}{2}$

$w \leftarrow a^k \pmod N$ ▷ *w resto de* a^k *dividido N*

$d \leftarrow \text{m.c.d}(w-1, N)$

return d ▷ *Con alta probabilidad un factor no trivial de N*

Referencias

[FS21] Francesco Stocco, *A theoretical approach to ShorŠs Algorithm and Quantum Bits* https://www.youtube.com/watch?v=-k5B0QPsFdA

[Di23] Antonio J. Di Scala, *Quantum Computers' Role in Shor's Algorithm* https://qubip.eu/the-role-of-quantum-computers-in-shors-algorithm/

[Sho94] P.W. Shor, *Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring.* In Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pages 124–134, 1994.

[QUBIP23] QUBIP: *Transition to Post-Quantum Cryptography*
QUBIP project is co-funded by the European Union under the Horizon Europe framework programme [grant agreement no. 101119746].
https://qubip.eu/
https://github.com/QUBIP
http://www.youtube.com/@qubip_eu