Sintesi di un controllore di tipo dead-beat considerato un riferimento a gradino e per un plant con poli e zeri non tutti all'interno del cerchio unitario

Si assegnato il sistema di controllo digitale descritto dalla seguente fdt:

$$G(z) = \frac{z+2}{(z+1)(z+0.5)}$$

Si tratta di un sistema del secondo ordine (denominatore di grado $n = 2$) e caratterizzato da un ritardo intrinseco di un passo di campionamento ($n - m = 1$, con m grado del numeratore).

Per tale sistema, si intende effettuare la sintesi di un controllore digitale $D(z)$ che garantisca, per un ingresso a gradino, un **tempo di assestamento finito** (la risposta deve assestarsi in un numero finito di campioni) **nel minor tempo possibile** (nel numero minimo di intervalli di campionamento compatibile con i vincoli che è necessario imporre), ed un **errore di posizione nullo**. Il metodo di sintesi illustrato di seguito è generale e può essere impiegato per qualsiasi sistema, indipendentemente dalla posizione di poli e zeri.

Il controllore che garantisce le specifiche assegnate è di tipo dead-beat. La funzione di trasferimento in anello chiuso risultante sarà del tipo $G_0(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}$. I primi vincoli da rispettare derivano dall'ordine e dal ritardo intrinseco del sistema, e influiscono semplicemente sul numero di termini che compaiono nell'espressione di $G_0(z)$. Occorre imporre:

- $N \geq 2$, essendo $n = 2$
- $h \geq 1$, essendo $n - m = 1$, con h numero dei primi termini nulli nell'espressione di $G_0(z)$

Due ulteriori vincoli derivano dalla presenza di un polo sul cerchio unitario e di uno zero fuori dal cerchio unitario in $G(z)$; entrambi non devono essere cancellati da zeri o poli della funzione di trasferimento del controllore $D(z)$. Poiché vale l'uguaglianza:

$$D(z)G(z) = \frac{G_0(z)}{1 - G_0(z)}$$

i due vincoli implicano che il polinomio $G_0(z)$ deve contenere lo zero di $G(z)$ fuori dal cerchio unitario (se così non fosse sarebbe stato cancellato da un polo di $D(z)$) e che il polinomio $1 - G_0(z)$ deve contenere il polo di $G(z)$ sul cerchio unitario (se così non fosse sarebbe stato cancellato da uno zero di $D(z)$). L'ultimo vincolo riguarda l'errore di posizione nullo a regime, ed implica che $1 - G_0(z)$ deve contenere $(1 - z^{-1})$.

Poiché complessivamente dobbiamo imporre tre vincoli sulla $G_0(z)$, questa deve contenere almeno 3 coefficienti da poter fissare in modo da soddisfare i vincoli. Di conseguenza, il numero minimo di passi di campionamento in cui può assestarsi la risposta è $N = 3$, e l'espressione finale della f.d.t. in anello chiuso sarà:

$$G_0(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}$$

Si tratta ora di individuare i coefficienti a_i che permettono di soddisfare i vincoli. Una volta ricavata la $G_0(z)$, sarà possibile calcolare $D(z)$ come

$$D(z) = \frac{G_0(z)}{G(z)[1 - G_0(z)]}$$

Occorre scrivere un sistema di tre equazioni, derivate direttamente imponendo i tre vincoli, nelle tre incognite a_1, a_2, a_3. Conviene preliminarmente riscrivere la f.d.t. $G(z)$ come rapporto di polinomi in z^{-1}:

$$G(z) = \frac{z^{-1}(1+2z^{-1})}{(1+z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$$

Vediamo ora in cosa si traducono i tre vincoli.

- $G_0(z)$ deve contenere $(1+2z^{-1})$. Essendo $G_0(z)$ un polinomio in z^{-1} di terzo grado, deve essere possibile riscriverlo in forma fattorizzata $G_0(z) = (1+2z^{-1})(g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2})$, avendo già tenuto conto del fatto che il primo coefficiente è nullo in ragione di un ritardo intrinseco di un intervallo di campionamento. Imponendo l'uguaglianza dei coefficienti a primo e secondo membro della seguente espressione:

  $$a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} = g_1 z^{-1} + (2g_1 + g_2) z^{-2} + 2g_2 z^{-3}$$

  si ottengono le tre relazioni: $g_1 = a_1$, $2g_1 + g_2 = a_2$, $2g_2 = a_3$. Combinando tali relazioni si ottiene la prima equazione da mettere a sistema per ricavare le tre incognite a_i:

  1. $2a_1 - a_2 + \frac{1}{2}a_3 = 0$

- $1 - G_0(z)$ deve contenere $(1+z^{-1})$ per il vincolo sul polo di $G(z)$ sul cerchio unitario e deve contenere $(1-z^{-1})$ per il vincolo sull'errore di posizione a regime. Il polinomio $1 - G_0(z)$ è, come $G_0(z)$, un polinomio in z^{-1} di terzo grado, quindi può essere scritto in forma fattorizzata come:

  $$1 - G_0(z) = (1+z^{-1})(1-z^{-1})N(z) = (1-z^{-2})N(z)$$

  con $N(z)$ polinomio in z^{-1} di primo grado. Poiché $1 - G_0(z)$ deve contenere $1 - z^{-2}$, effettuando la divisione tra i due polinomi si deve ottenere un resto nullo con il quoto $N(z)$. Queste due condizioni ci permettono di ottenere le ulteriori due equazioni nelle incognite a_i.

  Dalla divisione lunga tra $1 - a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}$ e $1 - z^{-2}$ si ottiene il quoto $N(z) = 1 - a_1 z^{-1}$ ed il resto $(1-a_2)z^{-2} - (a_1 + a_3)z^{-3}$. Poiché quest'ultimo deve essere nullo, altrimenti $1 - G_0(z)$ non sarebbe divisibile per $1 - z^{-2}$, i due coefficienti $(1-a_2)$ e (a_1+a_3) devono essere nulli anch'essi, il che ci permette di scrivere le due equazioni per il sistema nelle incognite a_i:

  2. $1 - a_2 = 0$
  3. $a_1 + a_3 = 0$

Risolvendo il sistema di tre equazioni nelle tre incognite:

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 + \frac{1}{2}a_3 = 0 \\ 1 - a_2 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{cases}$$

si ricavano i coefficienti $a_1 = 2/3$, $a_2 = 1$, $a_3 = -2/3$. Si noti che la somma dei tre coefficienti è pari ad 1; questa è una condizione necessaria affinché il sistema in anello chiuso abbia un comportamento di tipo dead-beat. A questo punto, risulta banale scrivere le espressioni di $G_0(z)$ e di $1 - G_0(z)$, necessarie per ricavare la f.d.t. del controllore:

$$G_0(z) = \frac{2}{3}z^{-1} + z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-3} = G_0(z) = \frac{2}{3}z^{-1}(1+2z^{-1})(1-0.5z^{-1})$$

$$1 - G_0(z) = \frac{2}{3}z^{-1} + z^{-2} - \frac{2}{3}z^{-3} = (1+z^{-1})(1-z^{-1})\left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right)$$

Il controllore dead-beat $D(z)$ risultante è quindi:

$$D(z) = \frac{G_0(z)}{G(z)[1 - G_0(z)]} = \frac{(1+z^{-1})\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{z^{-1}(1+2z^{-1})} \frac{\frac{2}{3}z^{-1}(1+2z^{-1})\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)}$$

Effettuando le necessarie cancellazioni si perviene all'espressione finale della f.d.t. $D(z)$:

$$D(z) = \frac{2}{3}\frac{(1+0.5z^{-1})\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{(1-z^{-1})\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)}$$

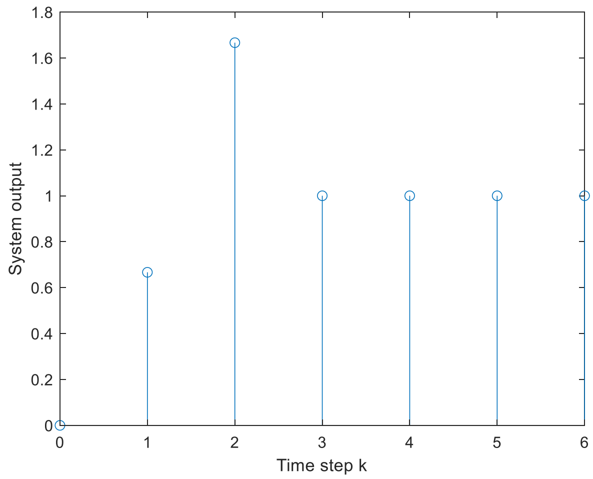
Si noti che il controllore $D(z)$ introduce un polo in $z = 1$, cosicché la f.d.t. del ramo diretto risulta di tipo 1 in modo da ottenere un errore di posizione nullo. Si noti anche che la $D(z)$ cancella il polo stabile di $G(z)$.

E' possibile calcolare il valore a regime dell'azione di controllo nel modo seguente. Dato il riferimento a gradino $V(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$, la trasformata-Z dell'azione di controllo risulta:

$$U(z) = \frac{G_0(z)}{G(z)}V(z) = \frac{(1+z^{-1})(1+0.5z^{-1})(1-0.5z^{-1})}{1-z^{-1}}$$

$$u(\infty) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{T}U(z) = 1.5$$

La risposta del sistema in anello chiuso al gradino unitario è riportata di seguito:



Osservando la figura risulta evidente che l'uscita del sistema si manifesta a partire dall'istante di campionamento $k = 1$ (ritardo intrinseco di un passo), e che l'uscita si assesta al valore di riferimento in 3 passi di campionamento.