Behörighetsförberedande Kurs - Matematik 2

Antonio Prgomet
André Emgård
YH Utbildarna

Förord

Denna boken täcker de centrala koncepten i Matematik 2 från gymnasiet med syfte att de som inte har läst det skall bli behöriga för att bli antagna till ett yrkeshögskoleprogram. Boken prioriterar bredd framför specialisering vilket märks genom att uppgifterna i boken är av standardkaraktär snarare än komplex problemlösning. Detta möjliggör oss att gå igenom tämligen mycket på kort tid.

Studieteknik är något som har en stark påverkan på resultat, både under studier och senare under arbetslivet då man på många arbetsplatser kontinuerligt lär sig nya saker. Vi rekomenderar starkt att kolla igenom dessa videos om studieteknik från Björn Liljeqvist för att skapa en bra grund i hur man skall studera:
https://www.youtube.com/watch?v=gSbpRjxYq24list=PLA09CC1B5671827AD.

Normalt sett så läser man denna kursen under fyra veckor, ett förslag på planering kan då vara:

1. Vecka 1 göra:
2. Vecka 2 göra:
3. Vecka 3 göra:
4. Vecka 4 göra:

Där du skummar igenom boken innan du kollar på de inspelade videorna för att därefter läsa boken och göra uppgifterna. De inspelade videorna finns tillgängliga i kapitel 1.

För de som behöver repetera något från tidigare så kan man självklart kolla upp specifika saker på till exempel internet och en bra källa är:
https://www.matteboken.se/

Matematik är ett fantastiskt ämne och vi hoppas du skall tycka kursen är lika rolig att läsa som vi tyckt det är att skapa den.

Lycka till önskar författarna,
Antonio Prgomet: https://www.linkedin.com/in/antonioprgomet/
André Emgård

påminnellse till Antonio

Skriv att fokus på procedur och allmänna begrepp, ty kursen är 4 veckor lång.

1. 4 veckor x 10h/veckan blir upp till cirka 60 sidor???
2. Hur referera till t.ex. uppgift 2.1 a) i svaren, eller bara skapa separata uppgifter?
3. Ha en GitHub mapp med lösningar till samtliga uppgifter.
4. Inkludera några extra utmanande uppgifter i "Blandade" kapitlet i varje kapitel för de som önskar det?

Innehållsförteckning

1. Inspelade Videos

Varje avsnitt i boken har inspelade videos med genomgångar och exempel. Videorna är numrerade på samma sätt som kapitlen i boken och finns tillgängliga här:
https://www.youtube.com/playlist?list=PLgzaMbMPEHEwkc-XVv3gpprOk7y2IHWLJ.

2. Repetition av Matematik 1

I detta kapitel kommer vi repetera några koncept från Matematik 1 som vi kommer ha nytta av i resten av denna bok. Repetitionen är inte heltäckande och om det till exempel var många år sedan du studerade matematik eller gick på gymnasiet så kan du behöva repetera vissa koncept. En sida som kan vara till hjälp är då: https://www.matteboken.se/.

2.1 Axiom, Definition, Sats och Bevis

Inom matematiken så är begreppen ”axiom”, ”defintion”, ”sats” och ”bevis” centrala.

Axiom är grundantagande som antas vara sanna och går inte att bevisa. Här kommer några grundläggande axiom som finns i matematiken där vi antar att a och b är tal:

1. Additiv kommutativitet: $a + b = b + a$
2. Additiv associativitet: $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. Additiv identitet: $0 + a = a$
4. Additiv invers: Det existerar ett tal $-a$ så att $a + (-a) = 0$
5. Multiplikativ identitet: $1 \times a = a \times 1 = a$
6. Multiplikativ associativitet: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
7. Distributiva lagen från vänster: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
8. Distributiva lagen från höger: $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$

Dessa axiom är väldigt naturliga. Om vi antar att $a = 4$ och $b = 3$ så säger första axiomet att det inte spelar någon roll i vilken ordning man adderar tal. Exempelvis: $4+3 = 3+4 = 7$. Detta överensstämmer med sunt förnuft, om du först sparar fyra kronor och därefter tre kronor så har du totalt sparat sju kronor. Om du däremot först sparar tre kronor och därefter fyra kronor så har du återigen sparat totalt sju kronor.

Det andra axiomet säger att det inte spelar någon roll i vilken ordning du adderar tal, det tredje att det finns ett tal som vi kallar 0 som har egenskapen att om du exempelvis tar $0 + 4$ så blir det 4.

Det femte axiomet säger att det finns ett tal 1 som uppfyller villkoret att om du exempelvis tar 1×4 så blir det 4, det sjätte axiomet säger att det inte spelar någon roll i vilken ordning du multiplicerar tal. Det sjunde och åttonde axiomet säger att om du har ett tal a som multipliceras med summan av två andra tal b och c, så kan du istället distribuera multiplikationen över varje term i parentesen.

Definitioner Innebär att man entydigt berättar vad ett begrepp innebär.

Nedan kommer vi definiera de vanligast förekommande talen.

Definition 2.1. De naturliga talen betecknas $\mathbb{N}$ och består av de positiva heltalen och talet 0. $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots\}$

Exempel 2.2. De naturliga talen används ofta för att räkna. Exempel kan vara att räkna antalete anställda på ett företag eller hur mycket äpplen man har i kylskåpet. De naturliga talen är något du dagligen använder men kanske inte direkt har tänkt på. I den bemärkelsen är de väldigt "naturliga".

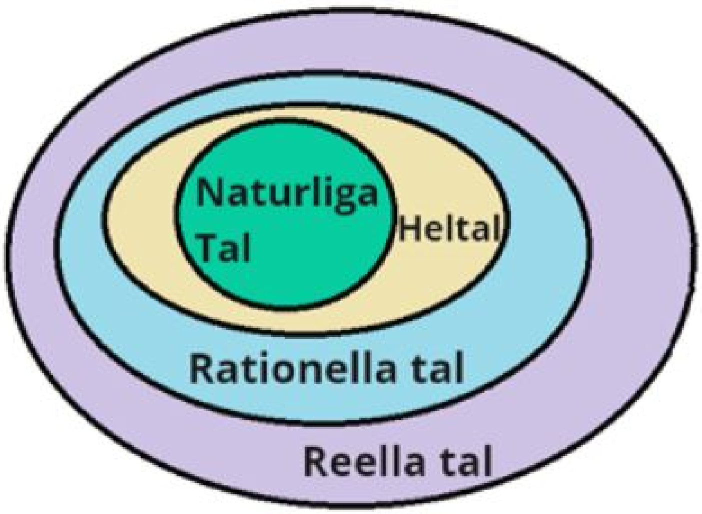
Definition 2.3. Heltalen betecknas $\mathbb{Z}$ och består av de naturliga talen och deras negativa motsvarigheter.
$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Definition 2.4. De rationella talen (kallas också bråktal) betecknas $\mathbb{Q}$ består av alla tal som kan skrivas som kvoten mellan två heltal.
$\mathbb{Q} =$ alla tal $\frac{a}{b}$ där a och b är hela tal och $b \neq 0$.

Definition 2.5. Vissa tal går inte att skriva som kvoten av två heltal, exempel på sådana är $\sqrt{2}$ och π. Dessa kal kallas för irrationella tal.

Definition 2.6. De reella talen betecknas $\mathbb{R}$ och består av de rationella och irrationella talen vilket är alla tal på tallinjen.

De olika talmängderna vi nu definierat har ett förhållande. De naturliga talen $\mathbb{N}$ är en delmängd av heltalen $\mathbb{Z}$, som i sin tur är en delmängd av de rationella talen $\mathbb{Q}$, som i sin tur är en delmängd av de reella talen $\mathbb{R}$. Vi kan visualisera detta, se figur 2.1.



Figur 2.1: Förhållande mellan talmängderna.

Exempel 2.7. Heltalen är en delmängd av de rationella talen vilket är uppenbart eftersom till exempel $10 = \frac{10}{1}$. Detta gäller för alla heltal.

Genom att använda axiom och definitioner så kan man formulera matematiska påståenden vilket kallas för **satser**. Matematiska satser behöver **bevisas** generellt för att vara giltiga. För att visa att ett matematiskt bevis är slutfört så kan man skriva "vilket skulle bevisas" som kan förkortas v.s.b. eller den latinska varianten Q.E.D. (quod erat demonstrandum). Ett tredje sätt, som är det vi kommer använda i denna boken är att man skriver ut en kvadrat $\square$ efter att beviset är slutfört.

Nedan kommer vi presentera några satser som du kanske minns från grundskolan samt hur de bevisas. Det är inget som kommer examineras och kan skummas igenom ifall du inte är intresserad. Men det är kul att förstå varför reglerna som man "kommer ihåg" är som de är. Bevisen görs genom att använda axiomen vi definierade.

Om man tar minus ett negativt tal, exempelvis $-(-4)$ så får vi 4. Nu skriver vi det allmänt i en sats och bevisar det.

Sats 2.8. Låt a vara ett godtyckligt tal. Då gäller det att $-(-a) = a$.

Bevis.

$$
\begin{aligned}
a &= a + 0 && \text{(Axiom 3 och 1)}\\
a &= a + (-a + (-(-a))) && \text{(Axiom 4 för } -a)\\
a &= (a + (-a)) + (-(-a)) && \text{(Axiom 2)}\\
a &= 0 + (-(-a)) && \text{(Axiom 4)}\\
a &= -(-a) && \text{(Axiom 3)}
\end{aligned}
$$

□

□ visar att vi har avslutat beviset. Varför använder vi två axiom på första raden i beviset? Det beror på att axiom 3 säger att $0 + a = a$, för att kunna skriva $a + 0$ så använder vi den kommutativa egenskapen som säger att $a + 0 = 0 + a$ som är axiom 1.

Nästa sats är något som många kommer ihåg från grundskolan, *"allting gånger noll är noll"*, men varför är det så?

Sats 2.9. Låt a vara ett godtyckligt tal. Då gäller det att $0 \times a = 0$.

Bevis.

$$
\begin{aligned}
0 &= a + (-a) && \text{(Axiom 4)}\\
0 &= (0 + 1) \cdot a + (-a) && \text{(Axiom 3 och 5)}\\
0 &= 0 \cdot a + 1 \cdot a + (-a) && \text{(Axiom 8)}\\
0 &= 0 \cdot a + (a + (-a)) && \text{(Axiom 5 och 2)}\\
0 &= 0 \cdot a + 0 && \text{(Axiom 4)}\\
0 &= 0 \cdot a && \text{(Axiom 3 och 1)}
\end{aligned}
$$

□

Vi vet från grundskolan att exempelvis $(-1) \times 4 = -4$. Nu skriver vi det allmänt i en sats och bevisar det. Denna satsen använder vi primärt som en hjälpsats när vi bevisar sats 2.11.

Sats 2.10. Låt a vara ett godtyckligt tal. Då gäller det att $(-1) \times a = -a$.

Bevis.

$$\begin{aligned}
-a &= -a + 0 \cdot a && \text{(Sats 2.9 och axiom 3)}\\
-a &= -a + (1 + (-1)) \cdot a && \text{(Axiom 4)}\\
-a &= -a + 1 \cdot a + (-1) \cdot a && \text{(Axiom 8)}\\
-a &= (-a + a) + (-1) \cdot a && \text{(Axiom 5 and Axiom 2)}\\
-a &= 0 + (-1) \cdot a && \text{(Axiom 4)}\\
-a &= 0 + (-1) \cdot a && \text{(Axiom 3)}
\end{aligned}$$

□

Den sista satsen vi kommer bevisa i detta avsnitt säger att multiplikation av två negativa tal blir positivt. Exempelvis $(-4) \times (-3) = 12$.

Sats 2.11. Låt a och b vara två godtyckliga tal. Då gäller det att $(-a) \times (-b) = ab$.

Bevis.

$$\begin{aligned}
(-a) \cdot (-b) &= (a \cdot (-1)) \cdot (-b) && \text{(Sats 2.10)}\\
(-a) \cdot (-b) &= a \cdot ((-1) \cdot (-b)) && \text{(Axiom 6)}\\
(-a) \cdot (-b) &= a \cdot (-(-b)) && \text{(Sats 2.10)}\\
(-a) \cdot (-b) &= a \cdot b && \text{(Sats 2.8)}
\end{aligned}$$

□

När en sats är bevisad så kan man använda den i all framtid utan att behöva göra om bevisen.

Exempel 2.12. $(-1)(4) + (-2)(-3) + 1 = -4 + 6 + 1 = 3$.

Exempel 2.13. $10 + (-5)(-2) - (-4) + 2 = 10 + 10 + 4 + 2 = 26$.

Övningsuppgifter

Uppgift 2.1.1. De naturliga talen kan användas för att till exempel beräkna antalet anställda på ett företag. Har du något exempel på vad negativa tal såsom -5 kan användas till i verkligheten?

Uppgift 2.1.2. Beräkna följande uttryck:
$-10 - (-20) =$

Uppgift 2.1.3. Beräkna följande uttryck:
$5 + 12(-4)(-2) + 1 =$

Uppgift 2.1.4. Beräkna följande uttryck:
$5(-4)(-2)(-3) \times 0 =$

Uppgift 2.1.5. Beräkna följande uttryck:
$(-4)(-2) \times 0 =$

Uppgift 2.1.6. Beräkna följande uttryck:
$10(4 - 2) + 4(-1) + 3 =$

Uppgift 2.1.7. Varför är heltalen en delmängd av de rationella talen?

2.2 Implikation och Ekvivalens

Implikation och ekvivalens är två begrepp som används inom matematiken och i det vardagliga språket.

Definition 2.14. Implikation betecknas med en enkelriktad pil som ser ut på följande sätt: $\Rightarrow$ och utläses *"medför att"*.

Exempel 2.15. Om en figur är en kvadrat så medför det att det också är en fyrhörning. Vi kan enkelt skriva detta som:
"figuren är en kvadrat" $\Rightarrow$ "figuren är en fyrhörning".

Den omvända implikationen gäller inte. Om en figur är en fyrhörning så medför det inte nödvändigtvis att det är en kvadrat eftersom det exempelvis kan vara en rektangel också. Vi kan enkelt skriva detta som:
"figuren är en kvadrat" $\not\Leftarrow$ "figuren är en fyrhörning".

Byter vi plats på påståendena så kan vi använda en struken högerpil om vi hellre föredrar det.
"figuren är en fyrhörning" $\not\Rightarrow$ "figuren är en kvadrat".

Exempel 2.16. Ett vardagligt exempel på implikation är:
"Julia bor i Stockholm" $\Rightarrow$ "Julia bor i Sverige".

Den omvända implikationen gäller inte. Att man bor i Sverige medför inte nödvändigtvis att man bor i Stockholm, man kan till exempel bo i Malmö.

Definition 2.17. Ekvivalens betecknas med en dubbelpil som ser ut på följande sätt: $\Leftrightarrow$ och betyder att det finns implikation åt båda hållen.

Exempel 2.18. Om vi vet att $x = 3$ så är det ekvivalent med att $x + 2 = 5$. Vi kan se detta i två steg.
Eftersom $x = 3 \Rightarrow x+2 = 5$ och $x+2 = 5 \Rightarrow x = 3$ så finns det en implikation åt båda hållen. Vi skriver det enkelt som $x = 3 \Leftrightarrow x + 2 = 5$.

Vi kollar på några sista exempel.

Exempel 2.19. "Vi adderar två tal" $\Rightarrow$ "vi beräknar en summa".
Den omvända implikationen gäller inte eftersom en summa kan bestå av att man till exempel adderar tre tal.

Exempel 2.20. $x < 2 \Leftrightarrow 2 > x$.
Om en variabel, x, är mindre än två så är det ekvivalent med att två är större än variabeln x.

Exempel 2.21. $x = 9 \Rightarrow x > 7$.
Om en variabel x är lika med nio så medför det att variabeln är större än sju.

Övningsuppgifter

Uppgift 2.2.1. Avgör om följande påståenden är antingen sanna eller falska.

(a) ”Kalle gillar att cykla” $\Rightarrow$ ”Kalle äger en cykel”.

(b) $x = 12 \Leftrightarrow x + 5 = 17$.

(c) ”Kim bor i Norge” $\Leftrightarrow$ ”Kim bor i Norden”.

2.3 Primtal och Primtalsfaktorisering

Primtal och primtalsfaktorisering kommer vi ha nytta av när vi förkortar bråk. Följande sats definierar vad ett primtal är.

Definition 2.22. Primtal kallas de positiva heltal som är större än 1 och endast är delbara med 1 och sig själva.

Att ett tal är delbart med ett annat heltal innebär att divisionen ”går jämnt” ut och inte skapar någon rest.

Exempel 2.23. 10 är delbart med 2 eftersom $\frac{10}{2} = 5$ går jämnt ut.

Exempel 2.24. 10 är inte delbart med 3 eftersom $\frac{10}{3} \approx 3.33$ inte går jämnt ut.

De första primtalen är $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$. Det går att bevisa att det finns oändligt många primtal.

Varför är primtal intressanta och viktiga? Det förklarar följande sats:

Sats 2.25 (Aritmetikens fundamentalsats). Varje positivt heltal större än 1 kan skrivas som en produkt av primtal på ett och endast ett sätt.

Bevis. Bevisas ej. □

Exempel 2.26. Det positiva heltalet 30 kan faktoriseras med hjälp av primtalen $2, 3, 5$. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Exempel 2.27. Det positiva heltalet 18 kan faktoriseras med hjälp av primtalen $2, 3$. $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Exempel 2.28. Det positiva heltalet 11 är ett primtal och ”är redan faktoriserat” i primtal $13 = 13$.

När vi vill dela upp ett tal i primtalsfaktorer så underlättar det att känna till delbarhetsreglerna från nedanstående sats.

Sats 2.29 (Några delbarhetsregler). Denna sats visar fyra stycken delbarhetsregler.

- Om talet är jämnt, innebärande att talet slutar på $0, 2, 4, 6$ eller 8, så är talet delbart med 2.
- Om talets siffersumma är delbar med 3 så är talet delbart med 3.
- Om talet som de två sista siffrorna bildar är delbart med 4 så är hela talet delbart med 4.
- Om talet slutar på 0 eller 5 så är talet delbart med 5.

Bevis. Bevisas ej. □

Nu exemplifierar vi satsen.

Exempel 2.30. Talet 14 slutar på 4 som är ett jämnt tal. Vi kan därför dividera talet med 2. $\frac{14}{2} = 7$.
Detta kan också skrivas som $14 = 2 \cdot 7$ där vi multiplicerat upp 2 från nämnaren.

Exempel 2.31. Talet 87 har siffersumman $8 + 7 = 15$ som är delbart med 3 vilket medför att talet 87 är delbart med 3. $87 = 3 \cdot 29$.

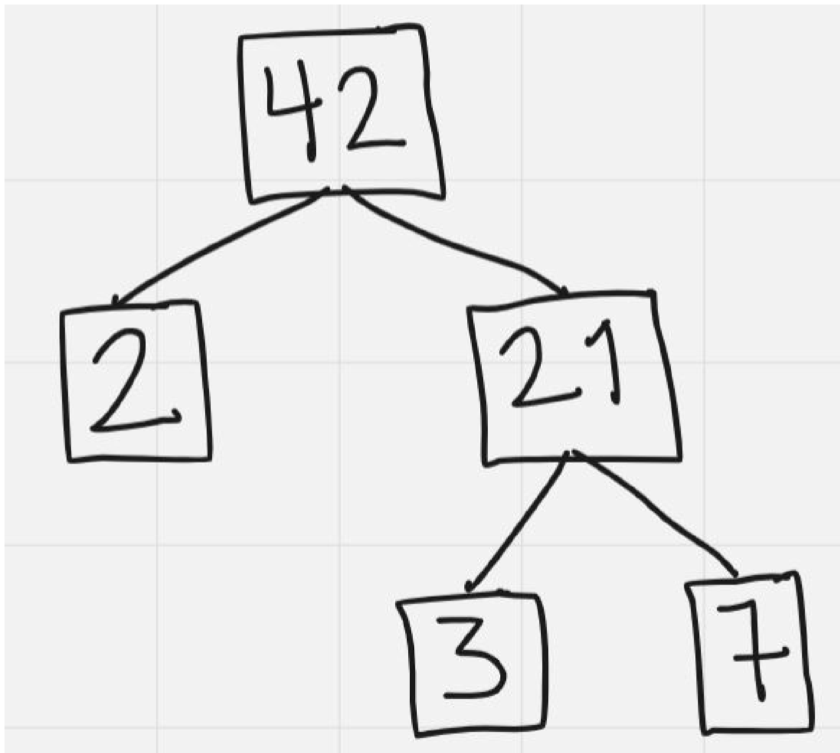
Exempel 2.32. Talet 516 har de två sista siffrorna 16 som är delbara med 4 vilket medför att talet är delbart med 4. $516 = 4 \cdot 129$.

Exempel 2.33. Talet 1045 slutar på siffran 5 vilket medför att det är delbart med 5. $1045 = 5 \cdot 209$.

Nu skall vi primtalsfaktorisera några tal.

Exempel 2.34. Talet 42 kan primtalfaktoriseras enligt följande:
$42 = 2 \cdot 21 = 2 \cdot 3 \cdot 7$.
se figur 2.2 för hur ett faktorträd kan göras. Det kan underlätta primtalsfaktoriseringen.

Exempel 2.35. Talet 1152 kan primtalfaktoriseras enligt följande:
$1152 = 4 \cdot 288 = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.
se figur 2.3 för hur ett faktorträd kan göras. Det kan underlätta primtalsfaktoriseringen.



Figur 2.2: Faktorträd för talet 42. Primtalsfaktoriseringen av talet 42 är $2 \cdot 3 \cdot 7$ som är "trädets löv". Talen $2, 3, 7$ kan inte brytas ned i fler faktorer då de är primtal.

Exempel 2.36. Är talet 401 ett primtal?

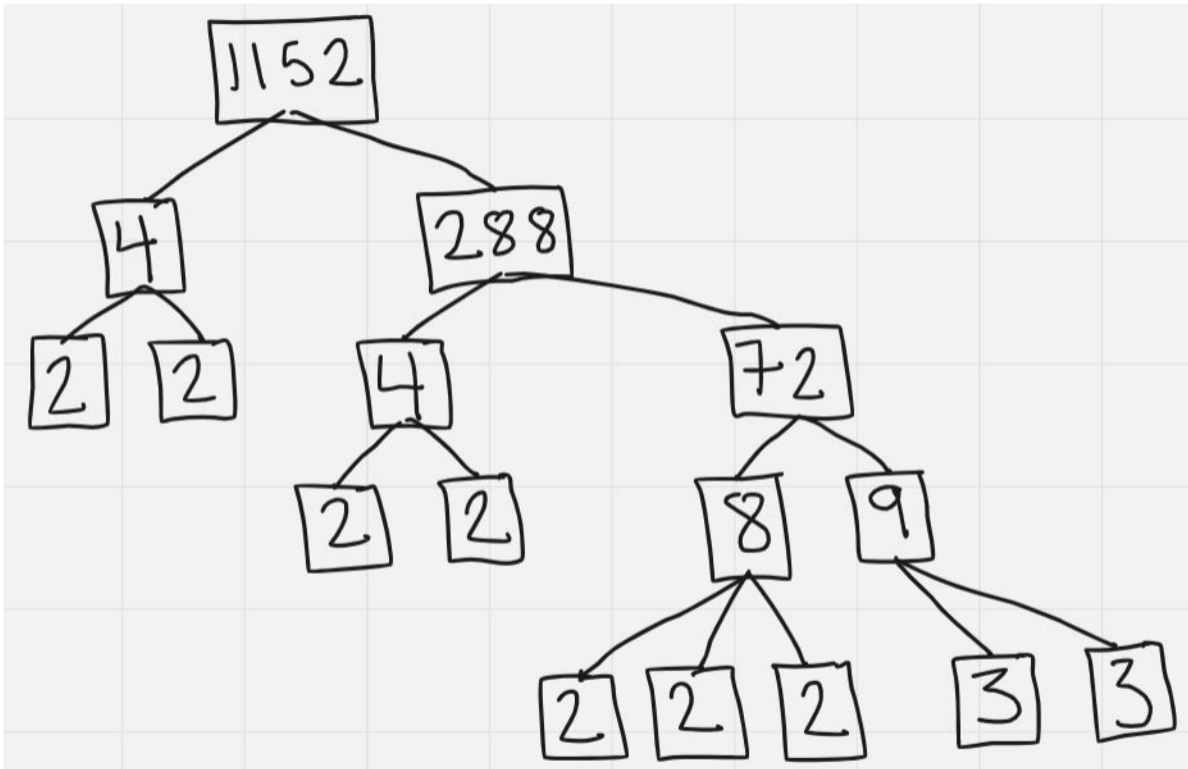
Kollar vi på sats 2.29 så ser vi att talet inte är delbart med 2, 3, 4 eller 5. Provar vi med nästkommande primtal (vi använder miniräknare) så får vi:
$\frac{401}{7} \approx 57.3$

$\frac{401}{11} \approx 36.5$

$\frac{401}{13} \approx 30.8$

$\frac{401}{17} \approx 23.6$

$\frac{401}{19} \approx 21.1$



Figur 2.3: Faktorträd för talet 1152. Primtalsfaktoriseringen av talet 1152 är $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ som är "trädets löv". Talen 2 och 3 kan inte brytas ned i fler faktorer då de är primtal.

$\frac{401}{23} \approx 17.4$

Vi vet redan nu att 401 är ett primtal och vi behöver inte prova fler primtal såsom $31, 37, 41, \ldots$. Anledningen är att ifall det gick att primtalsfaktorisera talet så skulle nästa primtalsfaktor behöva vara 23 eller större eftersom vi redan undersökt alla primtal mindre än det. Då $23^2 = 529$ som är större än 401 så kan talet inte ha några primtalsfaktorer och måste självt vara ett primtal. Det resonemanget ger oss också den allmänna regeln att när vi vill undersöka ifall något är ett primtal så räcker det att prova dividera med alla primtal fram till $\sqrt{\text{det tal vi vill faktorisera}}$, i vårt fall $\sqrt{401} \approx 20.02$.

Övningsuppgifter

Uppgift 2.3.1. Vad menas med ett primtal?

Uppgift 2.3.2. Vad innebär det att primtalsfaktorisera ett tal?

Uppgift 2.3.3. Skriv ned alla primtal mellan 0 och 45.

Uppgift 2.3.4. Vilka av talen 105, 110, 236, 400 och 1023 är delbara med 2?

Uppgift 2.3.5. Vilka av talen 105, 110, 236, 400 och 1023 är delbara med 3?

Uppgift 2.3.6. Vilka av talen 105, 110, 236, 400 och 1023 är delbara med 4?

Uppgift 2.3.7. Vilka av talen 105, 110, 236, 400 och 1023 är delbara med 5?

Uppgift 2.3.8. Primtalsfaktorisera talet 12.

Uppgift 2.3.9. Primtalsfaktorisera talet 32.

Uppgift 2.3.10. Primtalsfaktorisera talet 99.

Uppgift 2.3.11. Primtalsfaktorisera talet 2310.

Uppgift 2.3.12. Primtalsfaktorisera talet 420.

Uppgift 2.3.13. Är talet 967 ett primtal?

2.4 Bråk

Definition 2.37. Bråk kan skrivas som $\frac{a}{b}$, där a kallas för täljare och b för nämnare, där $b \neq 0$, då division med 0 i nämnaren ej är definierat.

Följande regler gäller för bråk:

1. *Förlängning av bråk:* Täljaren och nämnaren multipliceras med samma tal. Med andra ord multipliceras bråket med ett bråk som motsvarar 1, $\frac{a}{a}$. Detta förändrar inte bråkets värde utan endast utseendet på bråket.

   Exempel 2.38.

   $$\frac{4}{3} = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{8}{6}.$$

2. *Förkortning av bråk:* Liknande procedur som vid förlängning av bråk men här divideras täljaren och nämnaren med samma tal. När det inte längre går att förkorta ett bråk med ett naturligt tal innebär det att bråket är i "enklaste form".

   Exempel 2.39.

   $$\frac{5}{10} = \frac{5/5}{10/5} = \frac{1}{2}.$$

3. *Addition/subtraktion av bråk:* För att addera eller subtrahera bråk med varandra måste de har samma nämnare.
   Detta kan ske genom följande två steg.
   Steg 1: Primtalsfaktorisera täljare och nämnare för att sedan förlänga/förkorta termerna (bråken) så att de har minsta gemensamma nämnare.
   Steg 2: Addera/subtrahera täljarna med varandra.

   Exempel 2.40.

   $$Steg1: \frac{4}{3} - \frac{5}{10} = \frac{2 \cdot 2}{3} - \frac{5}{2 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 2}{3} - \frac{\cancel{5}}{2 \cdot \cancel{5}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}. = \frac{8}{6} - \frac{3}{6}.$$

   $$Steg2: \frac{8}{6} - \frac{3}{6} = \frac{8 - 3}{6} = \frac{5}{6}.$$

4. *Multiplikation av bråk:* Täljarna multipliceras för sig och nämnarna multipliceras för sig. Här kan man sedan primtalsfaktorisera och därefter förkorta.

   Exempel 2.41.

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{10} = \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 10} = \frac{20}{30} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{5}}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{5}} = \frac{2}{3}.$$

5. *Division av bråk:* För att skapa ett enklare uttryck multipliceras täljare och nämnare med ett bråk som får nämnaren att bli 1. I exemplet nedan sker en multiplikation med $\frac{10}{5}$ för att nämnaren ska bli 1.

   Exempel 2.42.

$$\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{10}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{10}} \cdot \frac{\frac{10}{5}}{\frac{10}{5}} = \frac{\frac{4 \cdot 10}{3 \cdot 5}}{1} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}.$$

Övningsuppgifter

Uppgift 2.4.1. Förenkla följande uttryck.

(a) $\dfrac{3}{5}+\dfrac{6}{5}$

(b) $\dfrac{3}{8}-\dfrac{7}{8}+\dfrac{5}{8}$

(c) $\dfrac{10}{11}+\dfrac{3}{11}-\dfrac{15}{11}$

Uppgift 2.4.2. Förenkla följande uttryck.

(a) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{12}$

(b) $\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{10}$

(c) $\dfrac{4}{3}+\dfrac{7}{5}$

Uppgift 2.4.3. Förenkla följande uttryck.

(a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$

(b) $\dfrac{2}{5}-\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{6}$

(c) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{8}$

Uppgift 2.4.4. André och Antonio har klippt var sin del av gräsmattan. André har klippt $\frac{2}{7}$ och Antonio har klippt $\frac{5}{8}$ av gräsmattan.

(a) Hur stor del av gräsmattan har blivit klippt?

(b) Hur stor del av gräsmattan är kvar att klippa?

Uppgift 2.4.5. Beräkna och svara i enklaste form.

(a) $9\cdot\dfrac{2}{18}$

(b) $6 \cdot \frac{2}{3}$

(c) $\frac{5}{4} \cdot 3$

Uppgift 2.4.6. Beräkna och svara i enklaste form.

(a) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}$

(b) $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{4}$

(c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$

Uppgift 2.4.7. Beräkna och svara i enklaste form.

(a) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$

(b) $\frac{\frac{12}{5}}{\frac{10}{3}}$

(c) $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}}$

Uppgift 2.4.8. Beräkna och svara i enklaste form.

$\frac{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}}{\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}}$ Går det att göra snyggare? Eller ska man inte har med ett sådan uppgift?

Uppgift 2.4.9. Beräkna

(a) Hälften av en tiondel.

(b) Två tredjedelar av fem timmar, uttryckt i minuter.

(c) Antal åttondelar som går på tre fjärdedelar.

2.5 Potenser

Definition 2.43. Potenser kan skrivas som ett uttryck a^b där a kallas *bas* och b kallas *exponent*, vilket utläses ”a upphöjt till b”.

Exponenten visar hur många gånger som basen multipliceras med sig själv. Man kan säga att potenser har samma samband med multiplikation som multiplikation har med addition. Multiplikationen kan ses som en upprepad addition och på samma sätt kan potensräkning ses som upprepad multiplikation.

Exempel 2.44.

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$$

Vid räkning med potenser så gäller följande potenslagar som är viktiga att förstå:

1. **Multiplikation av potenser med samma bas:** Om vi har två potenser med samma bas som ska multipliceras kan detta skrivas på följande sätt:

   $$3^2 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6.$$

   Detta kan även skrivas

   $$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6.$$

   En generalisering är

   $$x^m \cdot x^n = x^{m+n}.$$

2. **Division av potenser med samma bas:** I det här fallet kommer vi kunna skriva divisionen med potenser på följande sätt:

$$\frac{3^5}{3^3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \frac{3 \cdot 3}{1} = 3^2.$$

Detta kan även skrivas:

$$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2.$$

En generalisering är:

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \text{ där } x \neq 0.$$

3. **Potens av en potens:** Här kommer vi att använda regeln om multiplikation av potenser och kan skrivas på följande sätt:

$$(5^3)^4 = 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 = 5^{3+3+3+3} = 5^{12}.$$

Detta kan även skrivas:

$$(5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4} = 5^{12}.$$

En generalisering är:

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}.$$

4. **Potens av en produkt:** Vid mer komplicerade baser, där basen utgörs av en produkt, kan detta skrivas på följande sätt:

$$(4 \cdot x)^3 = (4 \cdot x) \cdot (4 \cdot x) \cdot (4 \cdot x) = (4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (x \cdot x \cdot x) = 4^3 \cdot x^3 = 64 \cdot x^3.$$

En generalisering är:

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n.$$

5. **Potens av ett bråk:** Likt förra lagen, potens av en produkt, ska hela parentesen multipliceras med sig självt lika många gånger som potensen visar. Detta kan skrivas på följande sätt:

$$\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{4^3}{7^3}.$$

En generalisering är:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}.$$

6. **Potens med negativ exponent:** Potensen med en negativ exponent kan skrivas om till ett bråk där potensen skrivs med positiv exponent i nämnaren. Detta kan förstås på följande sätt:

$$\frac{5^2}{5^5} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{5}}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^3}.$$

   Om vi istället använder divisionsreglerna så har vi:

$$\frac{5^2}{5^5} = 5^{2-5} = 5^{-3}$$

   Båda uttrycken har samma VL, alltså gäller:

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3}$$

   En generalisering är:

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}, \text{ där } x \neq 0.$$

7. **Potens med exponenten noll:** Att ha 0 som exponent innebär inga större problem. Nedan visas en snarlik uträkning som i förra lagen, där potensen får 0 som exponent. Detta kan förstås på följande sätt:

$$\frac{4^3}{4^3} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}} = 1$$

$$\frac{4^3}{4^3} = 4^{3-3} = 4^0 = 1.$$

   Då tidigare beräkningar blev 1 måste $4^0 = 1$

   En generaliserig är:

$$x^0 = 1, \text{ där } x \neq 0.$$

2.5.1 Potens med bråk i exponenten

Potenser kan ha bråk på exponentplatsen och de vanligaste är då båket har en täljare som är 1, det vill säga $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, osv. Den vanligaste är när exponenten är $\frac{1}{2}$. Istället för att skriva $a^{\frac{1}{2}}$ så skriver man ofta $\sqrt{a}$. Detta läses som *kvadratroten ur* eller *roten ur*.

Kvadratroten ur ett tal a är ett tal som upphöjt med 2 är lika med a.

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$
$$\text{där } a \geq 0 \text{ och } \sqrt{a} \geq 0.$$

Exempel 2.45. Vad är $\sqrt{9}$?
Vi vet att 9 kan skrivas som 3^2, eftersom $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$.

Att beräkna kvadratroten ur talet 9 innebär att vi söker ett tal, x vars kvadrat är 9, $x^2 = 9$.

Vi teckar det som $\sqrt{9} = 3$.

Exempel 2.46. Vad är $\sqrt{4}$, $\sqrt{x^2}$ och $\sqrt{4x^2}$?

$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$

$\sqrt{x^2} = x$

$\sqrt{4x^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2} = 2 \cdot x$. Här tar man roten ur på både 4:an och x^2.

Rötter av högre grad
Allmänt gäller att

$$\sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}}.$$

Exempel 2.47. Vad är $\sqrt[3]{8}$ och $\sqrt[4]{10000}$?

Om vi börjar att titta på $\sqrt[3]{8}$ så kan vi börja med att titta på hur vi kan skriva om 8 som en produkt av tre lika stora faktorer, det vill säga $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Det innebär att $\sqrt[3]{8} = 2$.

Om vi tittar på $\sqrt[4]{10000}$, behöver vi skriva om 10000 till formen $a \cdot a \cdot a \cdot a = 10000$. Vi kommer att då få att $10^4 = 10000$.

Det innebär att $\sqrt[4]{10000} = 10$.

Exponent med täljare större än 1
När det kommer till potenser vars exponenter är bråk med täljare som inte är 1, exempelvis $5^{\frac{3}{2}}$, kan man hantera på olika sätt. Nedanför kommer två sätt att visas.

Exempel 2.48. Hur kan man tolka $5^{\frac{3}{2}}$?

Vi kan använda oss av potenslagen för multiplikation av potenser för att skriva om detta.

$$5^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}} = 5^1 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5}.$$

Vi kan även skriva om det med potenslagen för potens av potens.

$$5^{\frac{3}{2}} = 5^{3 \cdot \frac{1}{2}} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (\sqrt{5})^3 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}.$$

Övningsuppgifter

Uppgift 2.5.1. Skriv i potensform.

(a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

(b) $(2x) \cdot (2x) \cdot (2x)$

(c) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

Uppgift 2.5.2. Skriv som en potens i basen 3.

(a) 27

(b) 81

(c) 729

Uppgift 2.5.3. Förenkla följande uttryck.

(a) $4^3 \cdot 4^5$

(b) $5^6 \cdot 5^5 + 3^3 \cdot 3^5$

(c) $7^7 \cdot 7^4 - 4^9 \cdot 4^6$

Uppgift 2.5.4. Förenkla följande uttryck.

(a) $\dfrac{9^9}{9^5}$

(b) $\dfrac{3^4}{3^2} + \dfrac{5^7}{5^3}$

(c) $\dfrac{8^6}{8^5} - \dfrac{2^4}{2^6}$

Uppgift 2.5.5. Förenkla följande uttryck.

(a) $\dfrac{7^8}{7^4} \cdot 7^2$

(b) $\dfrac{3^6}{3^8} \cdot 3^{-4}$

(c) $\dfrac{5^2}{5^6} \cdot 5^2$

Uppgift 2.5.6. Förenkla följande uttryck.

(a) $(5^3)^4$

(b) $(7^4)^4$

(c) $(14^{-2})^4 \cdot 14^2$

Uppgift 2.5.7. Förenkla följande uttryck.

(a) $(4x)^3$

(b) $\left(\dfrac{x^2}{3^3}\right)^4$

(c) $(11x^2)^{-3}$

Uppgift 2.5.8. Skriv som en potens.

(a) $3^4 \cdot 27$

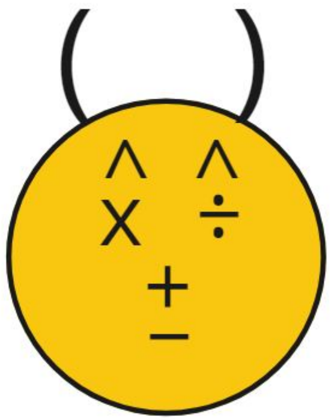
(b) $(5^2)^7 \cdot 125$

(c) $\dfrac{2 \cdot 32 \cdot 4^2}{8}$

2.6 Räkneordning

Räkneordningen beskriver i vilken ordning som olika operationer utförs vid förenkling av ett uttryck. Denna ordning måste följas för att uträkningarna ska bli rätt. Parenteser har alltid högsta prioritet medan addition och subtraktion har lägst prioritet. Ordningen går till på följande sätt:

$$Parenteser \rightarrow Potenser \rightarrow Multiplikation/division \rightarrow Addition/subtraktion$$



Figur 2.4: Mattetjuren är en minnesregel på räkneordningen där ”hornen” är parenteserna, ”ögonbrynen” är potenserna, ”ögon” är multiplikation och division och ”munnen och näsan” är addition och subtraktion.

Exempel 2.49. Vid uttryck med multiplikation och addition:

$$4 \ \cdot \ 4 + 2 = 16 \ + \ 2 = 18.$$

Vi började med multiplikationen $4 \cdot 4$ och adderade 2 till det. Därför fick vi $16 + 2$ som är 18.

Exempel 2.50. Vid uttryck med multiplikation och parentes:

$$4 \cdot (4 + 2) = 4 \ \cdot \ 6 = 24.$$

Vi började med additionen i parentesen $(4+2)$ och multiplicerade sedan med 4. Därför fick vi $4 \cdot 6$ som är 24.

Exempel 2.51. Vid uttryck med alla olika operationer:

$$4 - \frac{(4+2)^2}{3} = 4 - \frac{6^2}{3} = 4 - \frac{36}{3} = 4 - 12 = -8.$$

Vi började med additionen i parentesen $(4+2)$, sedan beräknades potensen 6^2 och därefter beräknades divisionen $\frac{36}{3}$ som sedan subtraherades från 4. Därför fick vi $4 - 12$ som är -8.

Parenteser i uttryck
Enligt prioriteringsreglerna ska det som står i parenteser beräknas först men vid algebraiska uttryck, parenteser som innehåller variabler, går dessa oftast inte att förenkla. Exempelvis $2b + (2 - 3b)$ går ej att förenkla på annat sätt än att man först tar bort parentesen. Eftersom det är ett plustecken framför parentesen kan parentesen tas bort utan att det förändrar något. Om det däremot hade varit ett minustecken framför parentesen, exempelvis $2b - (2 - 3b)$, ändras tecknen i parentesen när den ska tas bort.

Exempel 2.52. Plustecken före parentes.

$$2b + (2 - 3b) = 2b + 2 - 3b = 2 - b$$

Exempel 2.53. Minustecken före parentes.

$$2b - (2 - 3b) = 2b - 2 - (-3b) = 2b - 2 + 3b = 5b - 2$$

Exempel 2.54. Flera termer i parentesen.

$$5 - (3 + 2a - 2b - c) = 5 - 3 - 2a - (-2b) - (-c) = 5 - 3 - 2a + 2b + c = 2 - 2a + 2b + c$$

Multiplicera in i parentes
Ett tal som är multiplicerat med en parentes, exempelvis $2(3 + x)$, ska talet som står utanför parentesen multipliceras med alla termer som står i parentesen. Man kan säga att alla termer måste få ta del av multiplikationen. I exemplet ovan ska 2:an multipliceras både med 3 och x. Detta blir $2(3 + x) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot x = 6 + 2x$

Exempel 2.55.

$$5(3 + 7) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 15 + 35 = 50$$

I detta fall finns det inga problem med att addera ihop termerna i parentesen först och sen utföra multiplikationen.

$$5(3 + 7) = 5(10) = 5 \cdot 10 = 50$$

Övningsuppgifter

Uppgift 2.6.1. Beräkna.

(a) $6 + 4 \cdot 3$

(b) $9 \cdot 4 - 12 \cdot 3$

(c) $7 \cdot (3 + 12) - \dfrac{12}{6}$

(d) $5 \cdot 7 - (24 - 17 - 8)$

Uppgift 2.6.2. Beräkna.

(a) $32 \cdot \dfrac{5}{2^3}$

(b) $\dfrac{9^3}{14 - 5}$

Uppgift 2.6.3. Beräkna.

(a) $(5 \cdot 4 - 3 \cdot 6) \cdot 8$

(b) $(5^2 - 3 \cdot 6 + 1) \cdot 8$

(c) $2^5 - 4 \cdot (11 \cdot 3 - 6 \cdot 5)^2$

Uppgift 2.6.4. Vilket tal ska stå på den tomma platsen för att likheten ska stämma?

(a) $(9 - [\ ?\ ]) \cdot (5 \cdot 2) = 35$

(b) $[\ ?\ ]^2 - (3 \cdot 4 + 13) = 0$

(c) $14 + 3 \cdot 5 - (4 \cdot [\ ?\ ] - 5 = 26$

Uppgift 2.6.5. Sätt ut parentes så att likheten stämmer.

(a) $4 \cdot 6 - 5 = 4$

(b) $4 + 5 - 6 \cdot 7 = -3$

(c) $\dfrac{36}{4} \cdot 7 - 3 + 2 \cdot 8 = 23$

2.7 Faktorisering

Faktorisering innebär att man skapar en produkt av ett uttryck som innehåller flera termer som är adderade eller subtraherade med varandra. Genom faktorisering försöker man göra ett uttryck lättare att läsa, lösa eller se samband genom.

Exempel 2.56.

$$4x + 4x^2 - 4x^3 = 4x(1 + x - x^2)$$

Vid faktorisering använder vi oss av den distribuiva lagen: $ab+ac = a(b+c)$. Här ser vi två termer, ab och ac som har den gemensamma faktorn a som man kan "bryta ut".

Exempel 2.57.

$$3x + 12 \quad = \quad 3 \cdot x \; - \; 3 \cdot 4 \quad = \quad 3(x + 4).$$

I exempel 2.49 kan vi se att båda termerna i första ledet innehåller en faktor av 3. Då bryts 3:an ut och bildar sedan en produkt av 3 och en parentes som innehåller $x + 4$.

Exempel 2.58.

$$3x^2 - 6x \quad = \quad 3x \cdot x \; - \; 3x \cdot 3 \quad = \quad 3x(x - 3).$$

I exempel 2.50 kan vi se att $3x$ är den största gemensamma faktorn och bryter därför ut denne från resterande uttryck. Detta blir sedan en produkt av $3x$ och en parentes innehållande $x - 3$.

Övningsuppgifter

Uppgift 2.7.1. Vad menas med att faktorisera ett uttryck?

Uppgift 2.7.2. Vad ska stå på de tomma platserna?

(a) $3x + 12 = [\ ?\ ](x + 4)$

(b) $6x^2 - 4x = [\ ?\ ](3x - 2)$

(c) $8x - 20 = 4([\ ?\ ] - [\ ?\ ])$

Uppgift 2.7.3. Bryt ut faktorn 8x ur uttrycken.

(a) $8x + 24x^2$

(b) $16x^2 - 32xy$

(c) $40x - 8x^3$

Uppgift 2.7.4. Bryt ut den största möjliga faktorn.

(a) $15m^3 - 25m^5$

(b) $17ac + 15ac^2$

(c) $24a^3b + 18a^2b^2$

(d) $6x^2 + 14x - 30xy$

Uppgift 2.7.5. Förenkla uttrycken genom att först bryta ut faktorn $2a$.

(a) $\dfrac{16a^3 + 8a^2}{6a}$

(b) $\dfrac{20ab - 2ab^2}{10a^2}$

Uppgift 2.7.6. Arean av en rektangel beskrivs av uttrycket $8a + 4a^2\ cm^2$. Ange uttryck för den okända sidan om den ena sidan är:

(a) $4\ cm$

(b) $2 + a\ cm$

2.8 Ekvationer

Definition 2.59. Ekvationer består av två led, vänsterled (VL) och högerled (HL), som står på vardera sida om ett likhetstecken, "=". I en ekvation finns det dessutom alltid ett okänt värde (variabel) som vanligtvis betcknas med x. Detta är ingen regel så rent logiskt kan man använda vilken symbol man vill, t.ex. y om vi hade önskat det.

Att hitta lösningar till en ekvation är samma sak som att hitta vilket tal som kan stå istället för variabeln för att ekvation ska vara sann. Beroende på vilken typ av ekvation det är kan det finnas 1, 2, eller upp till oändligt många lösningar. I detta kapitel ska vi endast titta på ekvationer som har en lösning. För att hitta lösningen till ekvationen vill man lösa ut x så att det står ensamt. För att uppnå det kan man behöva flytta runt på termerna mellan uttrycken genom att göra olika operationer. En operation måste göras i både "vänster led" och "höger led".

Exempel 2.60.

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 5 \\ 2x + 3 - 3 &= 5 - 3 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{2}{2} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Exempel 2.61.

$$\begin{aligned} \frac{x}{5} - 3 &= 2(x-2) \\ \frac{x}{5} - 3 {\color{red}+3} &= 2x - 4 {\color{red}+3} \\ \frac{x}{5} {\color{red}-2x} &= 2x {\color{red}-2x} - 1 \\ \frac{x}{5} - \frac{10x}{5} &= -1 \\ -\frac{4x}{5} &= -1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Övningsuppgifter

Uppgift 2.8.1. Är x=4 en lösning?

(a) $7x + 5 = 81$

(b) $\frac{x}{2} - 8 = -6$

(c) $32 - 6x = 12$

(d) $\frac{11x}{2} = 27$

Uppgift 2.8.2. Lös ekvationen.

(a) $6x - 7 = 3x + 26$

(b) $6a + 3 + 5a = 14a - 18$

(c) $4y + 5 = -6y + 43$

Uppgift 2.8.3. Lös ekvationen.

(a) $2 - (12y + 15) = y + (31 - 5y)$

(b) $7(2x - 4) = 2 - (30 - x)$

Uppgift 2.8.4. Lös ekvationen.

(a) $\frac{3(2a + 6)}{3} = 24$

(b) $35z + 4(7z - 42) = 18(2z - 3) - (z - 172)$

Uppgift 2.8.5. Hitta lösningen.

(a) $\frac{20}{x} = 50$

(b) $3,6 = \frac{9}{2x}$

Uppgift 2.8.6. Hitta lösningen.

(a) $\frac{1}{5} - \frac{1}{2x} = \frac{9}{10x}$

(b) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{3}$

(c) $\dfrac{4}{z} + \dfrac{3}{2z} = \dfrac{1}{3}$

Uppgift 2.8.7. (a)

(b)

(c)

Uppgift 2.8.8. (a)

(b)

(c)

Uppgift 2.8.9. (a)

(b)

(c)

2.9 Olikheter

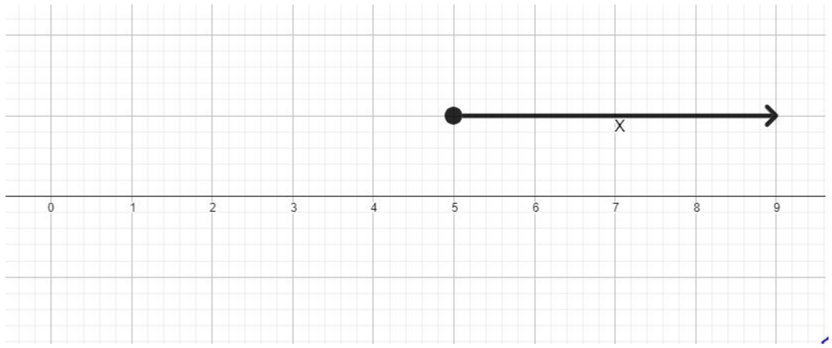
En olikhet skrivs på liknande sätt som en ekvation med undantaget att man använder olikhetstecken istället för likhetstecken. Olikheter används för att beskriva förhållandet mellan två uttryck eller tal, där det ena är större/mindre eller att det ena är större än eller lika med / mindre än eller lika med. Detta visas med följande symboler, $>$, $<$, $\geq$ och $\leq$, där öppningen riktas mot det större uttrycket/talet. Exempelvis "10 är mindre än 100" och skrivs $10 < 100$ eller "10x är större än eller lika med 100" och skrivs $10x \leq 100$ där x är större än eller lika med 10 ($x \leq 10$).

Man löser en olikhet på samma sätt som en ekvation. Lösningen till olikheter är detsamma som att hitta vilka värden på variabeln som uppfyller olikheten. För att hitta lösningen till en olikhet kan operationer utföras, på liknande sätt som för ekvationer. Lösningen är oftast inom ett intervall.

Exempel 2.62. Att åka med ett taxibolag kostar 40kr i startavgift och 12 kr/km. Hur många km kan man åka taxi för att det ska kosta mindre än 100 kr?

Kostnaden kan betecknas med $40 + 12x$ där vi vill att den totalt skall vara mindre än 100, därför kan vi skriva följande olikhet: $40 + 12x \leq 100$.

$$\begin{aligned} 40 + 12x - 40 &\geq 100 - 40 \\ \frac{12x}{12} &\geq \frac{60}{12} \\ x &\geq 5. \end{aligned}$$



Figur 2.5: En visualisering av olikheten $x \geq 5$.

Vända på olikhetstecknet
Som nämnts innna så löser man olikheter på samma sätt som ekvationr, men med en viktig skillnad: Om man multiplicerar eller dividerar med ett negativt tal så måste man vända på olikhetstecknet. Ett förklarande exemepel är att vi vet att $2 < 3$. Om vi multiplicerar eller dividerar båda leden med -1 så får vi $-2 < -3$, vilket är falskt.

Exempel 2.63.

$$\begin{aligned} 2 - x - 2 &< 5 - 2 \\ -x \cdot -1 &> 3 \cdot -1 \\ x &> -3 \end{aligned}$$

Absolutbelopp

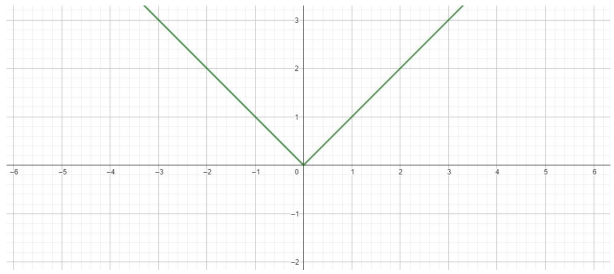
Definition 2.64. Absolutbeloppet skrivs $|x|$, och ger alltid ett positivt värde oavsett om talet x är positivt eller negativt.

$$\begin{cases} |x| = x, \text{om}\, x \geq 0 \\ |x| = -x, \text{om}\, x < 0 \end{cases}$$

Exempel 2.65. 11 och -11 är samma om de sätts in i ett absolutbelopp.

$$|11| = 11$$

$$|-11| = 11.$$



Figur 2.6: Absolutbelopp

Exempel 2.66. Absolutbelopp i en olikhet.

$$|x| < 5$$
$$-5 < x < 5$$

Övningsuppgifter

Uppgift 2.9.1. Lös olikheten.

(a) $3 + x \geq -2$

(b) $4x - 2 < 4$

(c) $5 \geq 3x - 1$

(d) $4 < 2 - 5x$

Uppgift 2.9.2. Lös olikheten.

(a) $3(x + 2) \leq 6(x - 1)$

(b) $2(x - 3) - 4(7 + 2x) > 2(x - 1)$

(c) $\dfrac{5y}{-2} < 2y + 3$

Uppgift 2.9.3. En rektangel har en area som är mindre än 156 cm^2. Sidorna är 12 cm och $(x - 2)$ cm.

(a) Teckna ett uttryck för olikheten.

(b) Lös olikheten.

Uppgift 2.9.4. Lös olikheten.

(a) $0,2x \leq 1 + \dfrac{5x + 1}{100}$

(b) $-\dfrac{2x - 1}{3} < \dfrac{x - 2}{5} - 1$

Uppgift 2.9.5. Lös olikheten.

(a) $|x| \leq 10$

(b) $|x + 3| \leq 15$

(c) $|x^2| < 25$

2.10 Procent

Ordet procent betyder hundradel och skrivs 1%. Det betyder att 100% motsvarar det hela. 50% motsvarar hälften och 25% en fjärdedel av det hela.

Procent kan uttryckas både i decimal- och bråkform. Det kan skrivas som:
$1 = 100\%$.
$\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$.
$\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$.

Om man vill omvandla ett bråk som inte har hundra i nämnaren till procentform, är det lättast att först göra om det till decimalform.

Exempel 2.67.

$$\frac{12}{15} = 0,8 = 80\%.$$

Andelen, delen och det hela
På en yrkeshögskola finns det 350 anställda, varav 200 av dessa är lärare. Hur stor andel av de anställda är lärare?

För att beräkna andelen måste man veta två saker, delen och det hela. Andel lärare ges av förhållandet mellan antal lärare (delen) och det totala antalet anställda (det hela).

Andelen lärare $= \frac{200}{350} \approx 0,57$.

Bland alla anställda på yrkeshögskolan arbetar cirka 57% som lärare.

En generell beräkning av andelen är:

$$Andelen = \frac{Delen}{Det\ \ hela}$$

Förändringsfaktor
Förändringar uttrycks ofta i procent. Det kan vara en prisökning, minskning av valröster eller en värdeminskning på en bil. Vid procentuella förändringar jämför man det ”nya värdet” med det ”ursprungliga värdet”.

Exempel 2.68. Om priset på en dator sjunker från 8000kr till 6000kr, så kan prissänkningen beräknas på två olika sätt.

1. Med hjälp av andelen:

   $$Prissänkningen(kr) : 8000 - 6000 = 2000.$$

   $$Prissänkning(\%) : \frac{prissänkning}{det\ gamla\ priset} = \frac{2000}{8000} = 0,25 = 25\%.$$

2. Med hjälp av förändringsfaktorn:

   $$\frac{nya\ priset}{gamla\ priset} = \frac{6000}{8000} = 75\%.$$

   Det nya priset är 75% av det gamla priset.

   Prissänkning (%): $100\% - 75\% = 25\%$

Övningsuppgifter

Uppgift 2.10.1. Vad betyder procent?

Uppgift 2.10.2. Skriv i procentform.

(a) $0,43$

(b) $0,8$

(c) $1,15$

Uppgift 2.10.3. Skriv i decimalform och procentform. Avrunda till två decimaler och hela procent.

(a) $\frac{1}{7}$

(b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{13}{11}$

Uppgift 2.10.4. Ordna talen i storleksordning, från minst till störst.

(a) $0,38 \quad \frac{6}{16} \quad 4\%$

(b) $0,3 \quad \frac{1}{3} \quad 33\%$

Uppgift 2.10.5. För att klara ett matteprov krävs 60% rätt. Markus fick 47 av 78 poäng. Klarade Markus testet?

Uppgift 2.10.6. Antonio erbjöds köpa en ny båt för 285 000 kr. Försäljaren påstår att det är 85% av ordinarie pris.

(a) Vilket är båtens ordinarie pris enligt försäljaren?

(b) Antonio prutar och får båten för 260 000 kr. Hur många procent prutade han? Avrunda till hela procent.

Uppgift 2.10.7. Enligt en undersökning är 13% av alla svenska elever på mellanstadiet inte simkunniga. I en mellanstadieskola gick 435 elever.

(a) Hur många av dem kan man förvänta sig vara icke-simkunniga?

(b) Efter att alla klasser fått simma på idrottslektionen kunde man observera att 87 elever inte var simkunniga. Hur många procent av skolans elever var inte simkunniga?

Uppgift 2.10.8. Ett träd ökar i längd med 8 dm på ett år. Det motsvarar 25%. Hur högt är trädet när året har gått?

Uppgift 2.10.9. Vilken förändringsfaktor svarar mot

(a) en ökning med 13%?

(b) en minskning med 7%?

(c) en ökning med 1,5%?

Uppgift 2.10.10. En solsemester kostade 15 600 kr. Ett år senare kostar den 17 628 kr. Med hur många procent har priset ökat?

2.11 Blandade Uppgifter - Träning inför Kunskapskontroll

Ha flervalsfrågor som på kunskapskontrollen????

Uppgift 2.11.1. Vad är meningen med livet?

Mer utmanande uppgifter - För de som har tid över och intresse

Uppgift 2.11.2. Vad är meningen med livet 2.0?

3. Algebra

I detta kapitel kommer vi titta på algebraiska uttryck, funktioner och grafer som visualiserar funktionerna. Det som gås igenom i detta kapitel kommer vi använda i kommande två kapitel.

Två begrepp som är bra att känna till är polynom och binom.

Definition 3.1. Ett polynom är ett matematiskt uttryck bestående av icke-negativa (≥ 0) heltalspotenser av variabler och konstanter kombinerade genom enbart addition, subtraktion och multiplikation. Uttryckets högsta heltalspotens är polynomets gradtal.

Exempel 3.2. $x^3 + x^2 - x + 3$ och $x^7 + x^5 - 3$ är polynom där det första är av tredje graden och det andra är av sjunde graden.

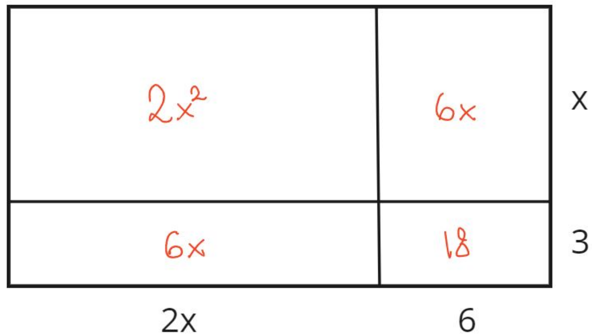
Definition 3.3. Ett binom är ett polynom men med endast **två** termer.

Exempel 3.4. $x^3 - 3$ och $x + 6$ är binom.

3.1 Algebraiska uttryck

3.1.1 Multiplikation av uttryck inom parenteser

Multiplikation av uttryck inom parenteser
I kapitlet 2.7 om faktorisering gick vi igenom hur man multiplicerade in en faktor i en parentes. Nu ska vi multiplicera två parenteser med varandra. Om vi utför multiplikationen $(x+3)(2x+6)$ kan detta visualiseras med hjälp av rektangeln nedanför.



Figur 3.1: Rektangel vars sidor är $(x + 3)(2x + 6)$

Rektangelns area kan beskrivas med en produkt av basen och höjden.

$A = (x + 3)(2x + 6)$

Rektangelns area kan även beskrivas som en summa av de fyra mindre rektanglarnas areor.

$A = 2x^2 + 6x + 6x + 18$

Alltså är $(x + 3)(2x + 6) = 2x^2 + 6x + 6x + 18$

$$(x + 3)(2x + 6) = 2x^2 + 6x + 6x + 18$$

Figur 3.2: Vi får samma resultat om vi multiplicerar varje term i den ena parentesen med varje term i den andra parentesen.

Exempel 3.5. Beräkna arean av en rektangel med sidorna $(4x + 2)$ och

$(x-3)$, där $x > 3$.

$$\begin{aligned}(4x + 2)(x-3) &= \\ &= 4x \cdot x - 4x \cdot 3 + 2 \cdot x - 2 \cdot 3 \\ &= 4x^2 - 12x + 2x - 6 \\ &= 4x^2 - 10x - 6\end{aligned}$$

Multiplikation av parenteser som innehåller flera termer fungerar på samma sätt, exempelvis $(2+x)(x^3+x^2+x+1)$ som blir

$$\begin{aligned}(2 + x)(x^3 + x^2 + x + 1) &= 2(x^3 + x^2 + x + 1) + x(x^3 + x^2 + x + 1) \\ &= (2 \cdot x^3) + (2 \cdot x^2) + (2 \cdot x) + (2 \cdot 1) + (x \cdot x^3) + (x \cdot x^2) + (x \cdot x) + (x \cdot 1 \\ &= x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1\end{aligned}$$

Övningsuppgifter

Uppgift 3.1.1. Multiplicera och förenkla uttrycken.

(a) $(x+3)(2x+7)$

(b) $(3x-1)(9-x)$

(c) $(a+2)(a-5)$

Uppgift 3.1.2. Multiplicera och förenkla uttrycken.

(a) $(a+b)(2a-3b)$

(b) $(3x-4y)(2x+8)$

(c) $(7a-4b)(3a-5b)$

Uppgift 3.1.3. En rektangel har sidorna $2x-1$ och $x+4$.

(a) Tekna ett uttryck för arean.

(b) Förenkla uttrycket så långt som möjligt.

Uppgift 3.1.4. Lös ekvationerna.

(a) $(3y-1)(2+y) = y(2+3y)$

(b) $(6x+3)(2+2x) = (3x-4)(4x+4)$

Uppgift 3.1.5. Fyll i den tomma platsen, så att likheten stämmer.

(a) $(x+3)(x+|\ ?\ |) = x^2+4x+3$

(b) $(x+8)(x-|\ ?\ |) = x^2-2x-|\ ?\ |$

(c) $(|\ ?\ |+|\ ?\ |)(2x-3) = 6x^2-5x-6$

Uppgift 3.1.6. Förenkla så långt som möjligt.

(a) $\dfrac{(2x-1,5)(4x+8)}{2} - \dfrac{(4-5x)(3x+9)}{3}$

(b)

Uppgift 3.1.7. Lös ekvationen.

(a) $(2x+6)(0,5x+4) - 17 = 39 - (x-1)(8-x)$

(b)

3.1.2 Kvadreringsreglerna

Vid multiplikation av två identiska parenteser som innehåller binom, $(a+b)^2$, kan man använda sig av kvadreringsreglerna för att på ett snabbare sätt hitta produkten. Det finns två kvadreringsregler, "första" och "andra".

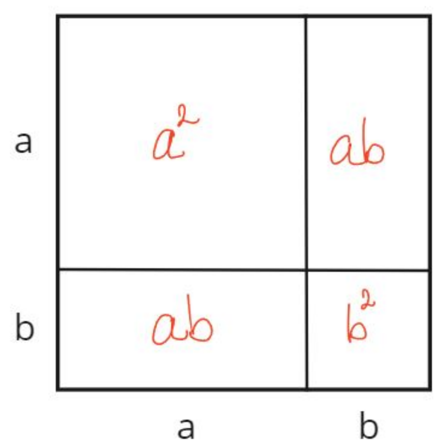
Första kvadreringsregeln används när man ska kvadrera en parentes med ett binom som har additionstecken mellan sig.

Sats 3.6. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Bevis.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a(a+b) + b(a+b)\\ &= (a \cdot a) + (a \cdot b) + (b \cdot a) + (b \cdot b)\\ &= a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

□



Figur 3.3: Vid $(a+b)^2$ får vi första termen i kvadrat (a^2), plus dubbla produkten $(2ab)$ och sedan den andra termen i kvadrat (b^2).

Exempel 3.7.

$$(x+4)(x+4) = x^2 + 4x + 4x + 16 = x^2 + 8x + 16$$

Andra kvadreringsregeln används när man ska kvadrera en parentes ett binom som har subtraktionsstecken mellan sig, dvs $(a-b)^2$.

Sats 3.8. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Bevis. Bevisas ej. □

I sats 3.8 ser vi att vi får den första termen i kvadrat, a^2, minus dubbla produkten, $-2ab$, och sen den andra termen i kvadrat, b^2.

Exempel 3.9.

$$(x-4)(x-4) = x^2 - 4x - 4x + 16 = x^2 - 8x + 16$$

Kvadreringsreglerna

1. Första kvadreringsregeln $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Andra kvadreringsregeln $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exempel 3.10. Utveckla $(x+5)^2$ med hjälp av första kvadreringsregeln

$$(x+5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$

Exempel 3.11. Utveckla $(3x-4)^2$ med hjälp av andra kvadreringsregeln

$$(3x-4)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 = 9x^2 - 24x + 16$$

Övningsuppgifter

Uppgift 3.1.8. Utveckla uttrycket.

(a) $(x+3)^2$

(b) $(6+x)^2$

(c) $(x+10)^2$

(d) $(3x+2)^2$

Uppgift 3.1.9. Utveckla uttrycket.

(a) $(x-5)^2$

(b) $(x-1)^2$

(c) $(10-x)^2$

(d) $(2x-3)^2$

Uppgift 3.1.10. Skriv ett bevis för andra kvadreringsregeln.

Uppgift 3.1.11. Fyll i de tomma rutorna så att likheten stämmer.

(a) $(x+|\ ?\ |)^2 = x^2+6x+9$

(b) $(z-|\ ?\ |)^2 = z^2-10z+25$

Uppgift 3.1.12. Utveckla uttrycket.

(a) $(x-\dfrac{1}{2})^2$

(b) $(5x+5y)^2$

(c) $(9a-3x)^2$

(d) $(10b-0,1a)^2$

Uppgift 3.1.13. Fyll i de tomma rutorna så att likheten stämmer.

(a) $(|\ ?\ |+5)^2 = 4y^2+|\ ?\ |+25$

(b) $(|\ ?\ |-3)^2 = 16a^2-24a+9$

Uppgift 3.1.14. Beräkna utan räknare och med hjälp av kvadreringsreglerna. Använd a-uppgiften för att lista ut ett bra sätt att beräkna resterande uppgifter.

(a) $(50+2)^2$

(b) 63^2

(c) 36^2

(d) 99^2

Uppgift 3.1.15. Förenkla så långt som möjligt.

(a) $(a+2b)^2-(2b+3a)^2$

(b) $(2m-n)^2-(m-2n)^2$

Uppgift 3.1.16. Lös ekvationerna.

(a) $(x+5)^2=x^2-15$

(b) $(2x-3)^2=(2x+2)^2$

Konjugatregeln

Konjugatregeln påminner om kvadreringsreglerna. Konjugatregeln hjälper oss att beräkna specialfall av multiplikation av binom som liknar det fall som fick oss att härleda kvadreringsreglerna.

De specialfall som vi letar efter är när vi multiplicerar två parentesuttryck som innehåller binom. Den enda skillnaden mellan de båda parentesuttrycken är att det står ett plustecken mellan termerna i den ena parentesen och ett minustecken mellan termerna i den andra. Det vill säga:

$$(a + b) \cdot (a - b)$$

Sådanna uttryck kallas för varandras konjugat. Det vill säga $(a + b)$ är konjugat till $(a - b)$ och tvärtom.

Sats 3.12. $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Bevis.

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a(a-b) + b(a-b) \\ &= (a \cdot a) + (a \cdot (-b)) + (b \cdot a) + (b \cdot (-b)) \\ &= a^2 + (-ab) + ab - b^2 \\ &= a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

□

Om vi undersöker produkten så kan vi se att vi får den första termen i kvadrat, (a^2), minus den andra termen i kvadrat, $(-b^2)$

Exempel 3.13. Utveckla parenteserna.

$$(x+2)(x-2) = x^2 - 2x + 2x - 2^2 = x^2 - 4$$

Exempel 3.14. Använd konjugatregeln för att utveckla parenteserna.

$$(2y+3)(2y-3) = (2y)^2 - (3)^2 = 4y^2 - 9$$

De tre reglerna, kvadreringsreglerna och konjugatregeln hjälper oss att snabbare utföra en multiplikation. En annan viktig anledning till att kunna och behärska reglerna är för att de kan användas till att faktorisera uttryck. Detta kommer vi göra i nästa kapitel då vi ska lösa andragradsekvationer.

3.1.3 Övningsuppgifter

Uppgift 3.1.17. Utveckla uttrycket.

(a) $(x+5)(x-5)$

(b) $(7a+9)(7a-9)$

(c) $(6x+3y)(6x-3y)$

(d) $(2z-5)(5+2z)$

Uppgift 3.1.18. En rektangel har en sida som är(3x+4). Rektangelns area är $9x^2-16$ cm^2. Teckna ett uttryck för den andra sidan.

Uppgift 3.1.19. Lös ekvationerna.

(a) $(x-1)^2=(x-7)(x+7)$

(b) $(2a+5)(2a-5)=(2a+2)^2$

Uppgift 3.1.20. Fyll i de tomma rutorna så att likheten stämmer.

(a) $(a+|\ ?\ |)(a-|\ ?\ |)=|\ ?\ |-36$

(b) $(|\ ?\ |+|\ ?\ |)(3b-|\ ?\ |)=9b^2-1$

Uppgift 3.1.21. Förenkla uttrycken så långt som möjligt.

(a) $(a+4)^2+(a-4)^2$

(b) $(b-2)^2-(b+2)(b-2)$

3.1.4 Faktorisering av uttryck

I kapitel 2 faktoriserade vi uttryck och bröt ut en faktor.
Exempelvis $3x + 6 = 3(x + 2)$.

Nu ska vi testa att faktorisera ett uttryck med hjälp av kvadreringsreglerna och konjugatregeln. Istället för att utveckla produkten av två binom ska vi gå från ett uttryck och skapa en produkt av två binom.

Exempel 3.15. Användning av första kvadreringsregeln.

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = (x + 4)^2.$$

I föregående exempel ser vi att alla termer är adderade med varandra samt att när vi delar upp termerna så liknar den form som första kvadreringsregeln följer.

Exempel 3.16. Användning av konjugatregeln.

$$\begin{aligned} {\color{red}x^2} - {\color{blue}16} = & \\ &= {\color{red}\sqrt{x^2}} \cdot {\color{red}\sqrt{x^2}} - {\color{blue}\sqrt{16}} \cdot {\color{blue}\sqrt{16}} \\ &= ({\color{red}\sqrt{x^2}} + {\color{blue}\sqrt{16}})({\color{red}\sqrt{x^2}} - {\color{blue}\sqrt{16}}) \\ &= ({\color{red}x} + {\color{blue}4})({\color{red}x} - {\color{blue}4}). \end{aligned}$$

I detta exempel ser vi att vi har en två termer som är subtraherade med varandra. Om vi använder kvadratroten på vardera term kan vi använda konjugatregeln.

Övningsuppgifter

Uppgift 3.1.22. Faktorisera med hjälp av första kvadreringsregeln.

(a) $a^2 + 4a + 4$

(b) $x^2 + 6x + 9$

(c) $s^2 + 6st + 9t^2$

(d) $y^2 + 14y + 49$

Uppgift 3.1.23. Faktorisera med hjälp av konjugatregeln.

(a) $y^2 - 25$

(b) $4x^2 - 1$

(c) $a^2 - 9b^2$

Uppgift 3.1.24. Faktorisera med hjälp av andra kvadreringsregeln.

(a) $a^2 - 6a + 9$

(b) $4x^2 - 4x + 1$

(c) $9s^2 - 6st + t^2$

Uppgift 3.1.25. Faktorisera och förkorta så långt det går.

(a) $\dfrac{a^2 - 36}{a - 6}$

(b) $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{x - 5}$

(c) $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$

Uppgift 3.1.26. Om man vill faktorisera $2x^2+8x+8$, så kan man inleda med att bryta ut den gemensamma faktorn 2. Uttrycket skrivs då $2(x^2+4x+4)$. men kan faktoriseras ytterligare. Slutför faktoriseringngne av uttrycket.

Uppgift 3.1.27. Faktorisera uttrycken.

(a) $2x^2 + 48x + 288$

(b) $4y^2 - 16$

(c) $-z^2 + 6z - 9$

Uppgift 3.1.28. Faktorisera uttrycket $0,25x^2 - 0,5xy + 0,25y^2$

Uppgift 3.1.29. Ett uttryck för arean av en kvadrat är $(a^2 - 22a + 121)$ dm^2. Ange ett uttryck för kvadratens sida.

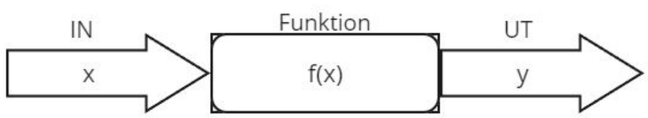
3.2 Funktioner och grafer

3.2.1 Funktioner

Funktioner beskriver samband mellan två variabler. Funktioner kan representeras på olika sätt, antingen genom algebraiska uttryck, tabeller eller grafer. Funktioner består av en relation mellan definitionsmängd och värdemängd som visar vilka värden som får sättas in i en funktion och vilka värden som produceras.

Definition 3.17. En funktion är en regel som till varje tillåtet x-värde ger precis ett y-värde. Då är y en funktion av x.

Definition 3.18. Om y är en funktion av x så är *definitionsmängden* alla tillåtna x-värden. Varje tillåtet värde på x-axeln motsvarar ett specifikt värde på y-axeln. Alla möjliga värden som y kan anta kallas för funktionens *värdemängd*.



Figur 3.4: Funktioner kan jämföras med en maskin som producerar något beroende på det man stoppar in i maskinen. För varje x-värde vi stoppar in i funktionen får vi endast ett y-värde som också kallas för funktionsvärde.

Om man har en funktion f och ingångsvärde som betecknas som x skriver vi det som $f(x)$, som läses: "f av x".

Exempel 3.19. Funktion $f(x)$ beskriver sambandet mellan lönen och antal skolår efter grundskolan som en vuxen personen har gått.

$$f(x) = 1100x + 18000$$

Om vi vill beräkna lönen efter 3 år av studier kan vi sätta in 3 i funktionen och beräknar $f(3)$.

$$f(3) = 1100 \cdot 3 + 18000 = 3300 + 18000 = 21300$$

I tabellen visas x-värden till vänster och y-värden till höger.

x	$f(x) = 1100x + 18000$
0	18000
1	19100
2	20200
3	21300
4	22400
...	...

I exemplet ovan har vi en definitionsmängd som består av alla naturliga tal (0, 1, 2, 3 etc.) eftersom vi endast beräknar hela skolår. Värdemängden i funktionen är de värden som $1100x + 18000$ blir när vi sätter in de naturliga talen. I ett verkligt scenario finns det en övre gräns, både för definitions- och värdemängden, eftersom människor inte kan leva för alltid och på det sättet inte gå i skolan hur länge som helst.

Exempel 3.20. En area på en kvadrat är högst 25 cm^2 och funktionen är $f(x) = x^2$, där x är sidan på kvadraten.

(a) Teckna ett uttryck för definitionsmängden.

(b) Teckna ett uttryck för värdemängden.

(c) Skapa en tabell där ingångsvärdena är heltal.

Lösning

(a) Eftersom en längd inte kan vara negativ kommer definitionsmängden endast innehålla positiva tal: $0 \leq x \leq 5$

(b) Värdemängd: $0 \leq y \leq 25$

(c)

x	$f(x) = x^2$
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Övningsuppgifter

Uppgift 3.2.1. En rektangel med sidorna x och $x + 5$ har en största area på 66 dm^2.

(a) Skriv definitionsmängden som en olikhet.

(b) Skriv värdemängden som en olikhet.

Uppgift 3.2.2. En fotbollsturnering har plats för 10 lag som innehåller 7 spelare per lag. För att det ska bli en turnering måste minst 4 lag anmäla sig. Antalet spelare i turneringen kan beskrivas med följande funktion: $f(x) = 5x$.

(a) Skriv definitionsmängden som en olikhet och berätta vad definitionsmängden beskriver.

(b) Skriv värdemängden som en olikhet och berätta vad värdemängden beskriver.

Uppgift 3.2.3. Funktionen g(t) = 5x+5.

(a) Beräkna funktionsvärdet om $t = 4$.

(b) Beräkna funktionsvärdet om $t = \frac{1}{5}$.

(c) Vilket ingångsvärde har man lagt in i funktionen om funktionsvärdet är 65?

Uppgift 3.2.4. Funktionen $f(x) = -10x + 5$.

(a) Bestäm $f(0)$

(b) Bestäm $f(-2)$

(c) Bestäm $f(x) = 0$

Uppgift 3.2.5. Funktionen $g(x) = 2^x - 3x$.

(a) Bestäm $g(4)$

(b) Bestäm $g(-1)$

(c) Bestäm $g(3b)$

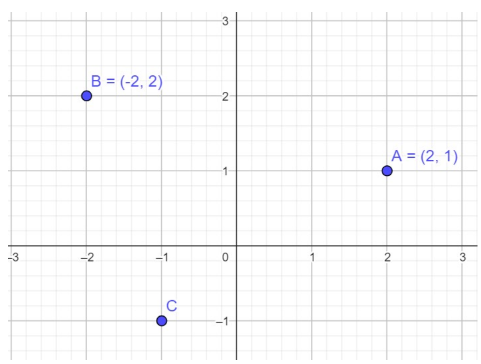
3.2.2 Grafer

Grafer används för att visualisera och analysera data och matematiska samband. Detta visas i ett koordinatsystem och en punkt i koordinatsystemet kallas för koordinat.

Definition 3.21. Ett koordinatsystem består av två axlar, som enligt konvention benämns som x-axel (vågrät) och y-axel (lodrät). På x-axeln brukar ingångsvärdena visas och på y-axeln visas utgångsvärdet. Axlarna bildar ett rutsystem som med andra ord kallas för koordinatsystem.

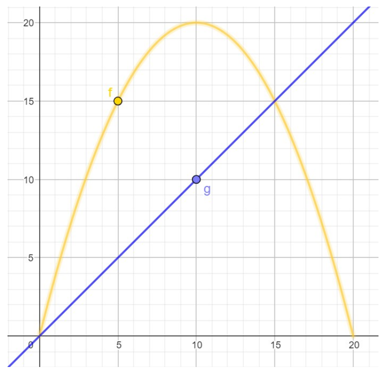
Definition 3.22. En koordinat är en beskrivning om vart en datapunkt befinner sig i ett koordinatsystem. En koordinat har således två värden, ett värde på x-axeln och ett värde på y-axlen. x-värdet skrivs alltid först och sedan skrivs y-värdet på följande sätt: (x, y).

Exempel 3.23.



Figur 3.5: De blå punkterna i kordinatsystemet har koordinater för att visa vart de befinner sig i systemet. Punkt A befinner sig där $x = 2$ och $y = 1$, Punkt B är där $x = -2$ och $y = 2$. Punkt C som inte har några utskrivna koordinater har platsen $x = -1$ och $y = -1$.

När datapunkterna sitter ihop och bildar en linje eller en kurva kallas de för kontinuerliga grafer. Två exempel på kontinuerliga kurvor ser ni i figur 3.6.



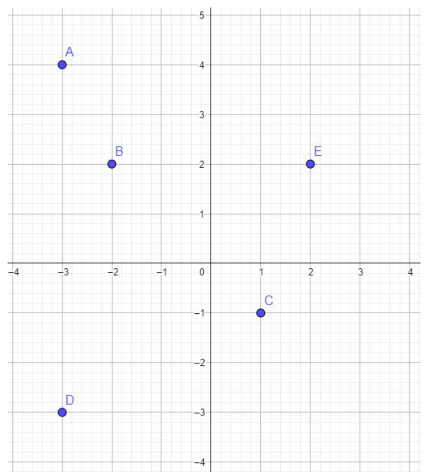
Figur 3.6: Den gula kurvan existerar endast då $0 \leq x \leq 20$ (= definitionsmängd) och $0 \leq y \leq 20$ (= värdemängd). Den blåa linjen ser vi inte hur långt den sträcker sig. Därför kommer definitionsmängden skrivas $-\infty < x < \infty$ och värdemängden $-\infty < y < \infty$.

Övningsuppgifter

Uppgift 3.2.6. Beskriv definitionsmängd.

Uppgift 3.2.7. Beskriv värdemängd.

Uppgift 3.2.8. Titta på datapunkterna A-E och svara på följande frågor.



Figur 3.7: Bild

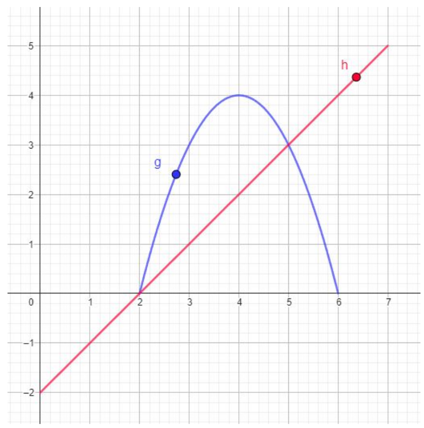
(a) Vilka koordinater har vardera punkt?

(b) Vad är definitionsmängden för alla punkter?

(c) Vad är värdemängden för alla punkter?

(d) Om punkt A flyttas 3 steg till höger i x-led och 1 steg nedåt i y-led, vad blir dess nya koordinater?

Uppgift 3.2.9. Titta på graferna g (blå) och h (röd) och svara på frågorna nedanför.



(a) Vad är det högsta värdet för graf g och h?

(b) Vad är definitionsmängden för vardera graf?

(c) Vad är värdemängden för vardera graf?

(d) Vilka koordinater har skärningspunkterna mellan graferna (där graferna har samma x- och y-värde)?

Uppgift 3.2.10. Titta på graferna i föregående uppgift.

(a) Bestäm $g(4)$

(b) Bestäm $h(2)$

(c) $g(x) = 4$

(d) $h(x) = -2$

Övningsuppgifter

Uppgift 3.2.11. Vad är meningen med livet?

Svar: *Matematik*

4. Andragradsekvationer

I förra kapitlet gick vi igenom polynom samt funktioner. En andragradsfunktion kan skrivas som $f(x) = ax^2 + bx + c$, där a, b och c är konstanter medan x är variabeln. Dessa innehåller en term där variabeln är upphöjd i två. I detta kapitel ska vi titta på andragradsekvationer och hur dessa kan lösas med hjälp av olika algebraiska metoder.

Lösningar till en andragradsekvation kallas för nollställen eller rötter och innebär att man vill hitta de x-värden där en andragradsfunktion har y-värdet 0.

Ett tips för att hitta vilken metod som lämpar sig bäst vid lösning av en andragradsekvation är att få ekvationen till formen $ax^2 + bx + c = 0$.

Exempel 4.1.

$$\begin{aligned} x^2 + 3x^2 - x + 2x + 10 &= 5 \\ (x^2 + 3x^2) + (2x - x) + (10 - 5) &= 0 \\ 4x^2 + x + 5 &= 0 \end{aligned}$$

4.1 Enkla andragradsekvationer

Definition 4.2. Enkla andragradsekvationer skrivs på $ax^2 + bx + c = 0$, där a, b och c är konstanter medan x är en variabel.

I detta delkapitel kommer vi använda oss av den matematik vi hittils har gått igenom. Vi kommer att använda oss av kvadratroten, faktorisering och kvadratreglerna för att lösa andragradsekvationer.

4.1.1 Ekvationer av typen $x^2 = a$

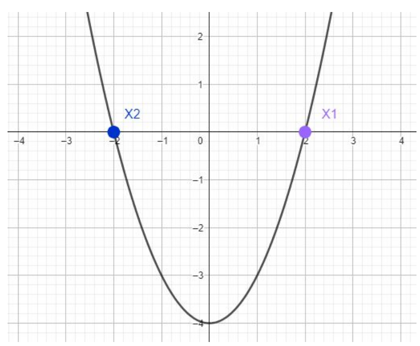
Tidigare i kapitel 2 löste vi enklare andragradsekvationer med hjälp av kvadratroten. När det kommer till andragradsekvationer som är skrivna på formen $x^2 = a$ så kan vi använda kvadratroten för att få x ensamt.

Exempel 4.3. $x^2 = 4$

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ \sqrt{x^2} &= \pm\sqrt{4} \\ x_1 &= 2, \quad x_2 = -2. \end{aligned}$$

När vi använder kvadratroten på en x^2-term kommer vi alltid ges två tal, x och $-x$, därför att $x^2 = (-x)^2$.

Om det tidigare exemplet hade visat sig som en funktion $f(x) = x^2 - 4$ hade det sett ut enligt figur 4.1. Här får vi lösningarna genom att titta vart grafen skär x-axeln, det vill säga när $f(x) = 0$.



Figur 4.1: Grafens nollställen är $x_1 = 2$ och $x_2 = -2$.

Exempel 4.4. $6x^2 - 54 = 0$

$$\begin{aligned} 6x^2 - 54 + 54 &= 0 + 54 \\ \frac{6x^2}{6} &= \frac{54}{6} \\ x^2 &= 9 \\ \sqrt{x^2} &= \pm\sqrt{9} \\ x_1 &= 3, \quad x_2 = -3 \end{aligned}$$

Övningsuppgifter

Uppgift 4.1.1. Lös andragradsekvationerna.

(a) $x^2 = 81$

(b) $x^2 = 121$

(c) $2x^2 = 200$

Uppgift 4.1.2. Bestäm sidan till en kvadrat med arean

(a) $64\ cm^2$

(b) $0.09\ dm^2$

(c) $6.25\ m^2$

Uppgift 4.1.3. Lös andragradsekvationerna.

(a) $9 = x^2 - 16$

(b) $4 - x^2 = 3$

Uppgift 4.1.4. En kvadrat har arean 144 cm^2. Bestäm kvadratens omkrets.

Uppgift 4.1.5. Lös andragradsekvationerna och svara exakt.

(a) $6b^2 = 35 - b^2$

(b) $14 - 9a^2 = -16 - 4a^2$

(c) $7t^2 + 4 = 3x^2 - 12$

Uppgift 4.1.6. Lös andragradsekvationerna.

(a) $x(x + 5) = 49 + 5x$

(b) $x(4 + 2x) = (x + 35) - 3(x^2 - x)$

Uppgift 4.1.7. .

(a)

(b)

(c)

(d)

4.1.2 Faktorisering som lösningsmetod

I ekvationerna $2x(x-5)=0$ och $(x+3)(x-7)=0$ är vänstra ledet skrivet i faktorform. När vi har ett led som står i faktorform och det andra ledet är 0 kan vi använda oss av nollproduktsmetoden för att hitta lösningarna till ekvationen.

Definition 4.5. Nollproduktsmetoden innebär att om en produkt innehåller en faktor som är 0, kommer produkten alltid vara 0.
$a \cdot 0 = 0$.

Exempel 4.6.

$$25 \cdot 0 = 0.$$

Om vi applicerar nollproduktsmetoden på $2x \cdot (x-5)$ finns två scenarier. Antingen är $2x = 0$ eller $x - 5 = 0$. Det ger att lösningarna till ekvationen är $x_1 = 0$ och $x_2 = 5$.

Exempel 4.7. Lös $(x+24)(x-2)$.

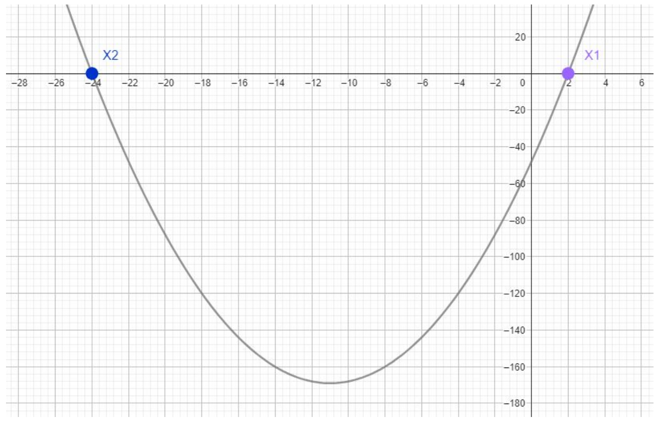
Minst en av faktorerna $x+24$ eller $x-2$ måste vara 0 för att produkten ska bli 0.

$$\begin{aligned} x_1 + 24 &= 0 \\ x_1 &= -24. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 - 2 &= 0 \\ x_2 &= 2. \end{aligned}$$

$$\text{Svar: } x_1 = -24 \text{ och } x_2 = 2.$$

En grafisk lösning till förra exemplet hade varit enligt figur 4.2.



Figur 4.2: Grafens nollställen är $x_1 = -24$ och $x_2 = 2$.

Exempel 4.8. Lös $9x^2 = -15x$
Först kan vi få ekvationen till formen $ax^2 + bx + c = 0$, vi samlar alla termer i vänster led. Notera, i detta fall ser vi att $c = 0$.

$$\begin{aligned} 9x^2 &= -15x \\ 9x^2 + 15x &= 0 \end{aligned}$$

Nu ser vi att vi kan faktorisera genom att bryta ut x.

$$x(9x + 15) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$\begin{aligned} 9x + 15 &= 0 \\ 9x_2 &= -15 \\ \frac{\cancel{9}x_2}{\cancel{9}} &= -\frac{15}{9} \\ x_2 &= -\frac{15/3}{9/3} \\ x_2 &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Svar: $x_1 = 0$ och $x_2 = -\frac{5}{3}$.

Övningsuppgifter

Uppgift 4.1.8. Lös ekvationerna.

(a) $x(x+8)=0$

(b) $x(x-13)=0$

(c) $4x(x-36)=0$

Uppgift 4.1.9. Lös ekvationerna.

(a) $(x-12)(x-4)=0$

(b) $(x-10)(6+x)=0$

(c) $(3x-9)(5-2x)=0$

Uppgift 4.1.10. Lös ekvationerna.

(a) $x^2+8x=0$

(b) $x^2-21x=0$

(c) $2x^2+x=0$

Uppgift 4.1.11. Ange en andragradsekvation med rötterna

(a) $x_1=0$ och $x_2=9$

(b) $x_1=0$ och $x_2=-5$

(c) $x_1=2$ och $x_2=-3$

Uppgift 4.1.12. Lös ekvationerna.

(a) $3x^2-12x=0$

(b) $4x^2=2x$

(c) $14x^2+8x=2x^2+4x$

4.1.3 Andragradsekvationer och kvadreringsreglerna

Ekvationen $(x-6)^2 = 16$ kan vi lösa på samma sätt som ekvationen $x^2 = 16$. Vi tar kvadratroten på båda leden som ger: $(x-6) = \pm 4$.

$(x-6) = 4$ ger lösningen $x = 10$.
$(x-6) = -4$ ger lösningen $x = 2$.

Anledningen till varför vi kunde lösa ekvationen $(x-6)^2 = 16$ på detta sätt är på grund av att VL är skrivet som en kvadrat (upphöjt med 2).

Vid ekvationen $x^2 - 10x + 25 = 9$ kan denna lösas med samma metod om vi först skriver om VL med hjälp av kvadreringsregeln.

$$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$$

Utifrån faktoriseringen kan vi skriva om $x^2 - 10x + 25 = 9$, så att vi får formen.

$$(x-5)^2 = 9$$

$$(x-5) = \pm 3$$

$$(x-5) = 3 \Rightarrow x_1 = 8$$
$$(x-5) = -3 \Rightarrow x_2 = 2$$

Exempel 4.9. $x^2 + 18x + 81 = 64$
VL går att faktorisera med hjälp av första kvadreringsregeln.

$$x^2 + 18x + 81 = (x+9)(x+9) = (x+9)^2$$

$$(x+9)^2 = 64$$
$$x + 9 = \pm 8$$

$$x_1 = 8 - 9 = -1 \quad x_2 = -8 - 9 = -17$$

$$x_1 = -1 \text{ och } x_2 = -17$$

Övningsuppgifter

Uppgift 4.1.13. Lös andragradsekvationerna.

(a) $(x-3)^2 = 16$

(b) $(x+2)^2 = 49$

(c) $(x-2)^2 = 1$

Uppgift 4.1.14. Lös andragradsekvationerna.

(a) $(x-2)^2 + 3 = 12$

(b) $(x+3)^2 - 30 = 6$

Uppgift 4.1.15. Lös andragradsekvationerna.

(a) $(x-1)^2 = 0$

(b) $(2x+3)^2 = 9$

Uppgift 4.1.16. Vilket tal ska adderas till båda leden för att VL ska gå att faktorisera med kvadreringsreglerna.

(a) $x^2 + 4x = 12$

(b) $x^2 - 2x = -4$

Uppgift 4.1.17. Lös andragradsekvationerna.

(a) $x^2 - 2x + 1 = 0$

(b) $x^2 + 8x + 16 = 1$

(c) $x^2 - 6x + 9 = 25$

Uppgift 4.1.18. En del andragradsekvationer kan lösas genom faktorisering med hjälp av konjugatregeln.

(a) Faktorisera ekvationen $x^2 - 16 = 0$ med hjälp av konjugatregeln.

(b) Vilka är ekvationens lösningar?

(c) Lös $(x+1)^2 - 9 = 0$ med hjälp av konjugatregeln.

4.2 Fullständiga andragradsekvationer

4.2.1 pq-formeln

En vanlig metod för att lösa andragradsekvationerna är att använda sig av den så kallade pq-formeln. Med denna formel kan vi lösa alla andragradsekvationer. Som vi tidigare har sett kan andragradsekvationer allmänt skrivas på formen $ax^2 + bx + c = 0$.

För att kunna använda pq-formeln behöver vi skriva om den allmänna ekvationen så att andragradsekvationen står på formen $x^2+px+q = 0$. Detta kan vi göra genom att dividera alla termer med koefficienten a. Koefficienterna p och q beskrivs alltså med en relation till koefficienterna a, b och c i den allämna ekvationen.

$$p = \frac{b}{a} \;\; och \;\; q = \frac{c}{a}.$$

Man har helt enkelt dividerat koefficienterna a, b och c med a, så att x^2-termen får koefficienten 1.

Sats 4.10.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Bevis. Här kommer pq-formeln härledas med det som kallas kvadratkomplettering. Vid ökad förståelse för kvadratkomplettering kan du besöka matteboken.se

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + px = -q \qquad \text{(-q)}$$

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad \left(+\left(\tfrac{p}{2}\right)^2\text{, kvadratkomplettering}\right)$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad \text{(Första kvadreringsregeln)}$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad (\sqrt{\ }\text{ i båda leden})$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad (\text{-}\tfrac{p}{2})$$

□

En andragradsekvationen som står på formen $x^2+px+q = 0$ har lösningarna

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Exempel 4.11. Lös ekvationen $4x^2 + 32x + 28 = 0$.
Först måste vi göra om ekvationen till pq-form. Detta görs genom att dividera med 4.

$$\frac{4x^2}{4} + \frac{32x}{4} + \frac{28}{4} = \frac{0}{4}$$

$$x^2 + 8x + 7 = 0.$$

Nu går vi vidare med att använda pq-formeln. Först identifierar vi våra p- och q-värden som kan avläsas i vår ekvation.
$p = 8$ och $q = 7$.

Dessa kan vi sätta in i pq-formeln.

$$x = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 7}$$
$$x = -4 \pm \sqrt{16 - 7}$$
$$x = -4 \pm \sqrt{9}$$
$$x = -4 \pm 3$$

$$x_1 = -4 + 3 = -1$$
$$x_2 = -4 - 3 = -7$$

Vi kan verifiera att lösningen stämmer genom att sätta in x_1 och x_2 i den ursprungliga ekvationen.

$x_1 = -1$

$$\begin{aligned} 4(-1)^2 + 32(-1) + 28 &= 0 \\ 4 - 32 + 28 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

$x_2 = -7$

$$\begin{aligned} 4(-7)^2 + 32(-7) + 28 &= 0 \\ 196 - 224 + 28 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Exempel 4.12. Lös $x^2 = 11 - 10x$.

Vi börjar med att skriva om ekvationen till den allmänna ekvationen och flyttar över 11 och $-10x$ till VL.

$$\begin{aligned} x^2 &= 11 - 10x \\ x^2 + 10x - 11 &= 0 \end{aligned}$$

Vi ser att koefficienten framför x^2-termen är 1 och kräver ingen division. Vi kan då ta ut våra p- och q-värden som är: $p = 10$ och $q = -11$.

$$\begin{aligned} x &= -\frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - (-11)} \\ x &= -5 \pm \sqrt{5^2 + 11} \\ x &= -5 \pm \sqrt{36} \\ x &= -5 \pm 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -5 + 6 = 1 \\ x_2 &= -5 - 6 = -11 \end{aligned}$$

Vi verifierar lösningen genom att sätta in x_1 och x_2 i den ursprungliga ekvationen.

$x_1 = 1$

$$\begin{aligned} 1^2 &= 11 - 10 \cdot 1 \\ 1 &= 1. \end{aligned}$$

$x_2 = -11$

$$\begin{aligned} (-11)^2 &= 11 - 10 \cdot (-11) \\ 121 &= 11 - (-110) \\ 121 &= 121. \end{aligned}$$

Övningsuppgifter

Uppgift 4.2.1. Lös ekvationerna.

(a) $x^2 + 4x - 21 = 0$

(b) $x^2 - 6x - 55 = 0$

(c) $x^2 - 14x + 13 = 0$

Uppgift 4.2.2. Lös ekvationerna.

(a) $a^2 + 7a + 6 = 0$

(b) $b^2 + b - 12 = 0$

(c) $c^2 - 3c - 4 = 0$

Uppgift 4.2.3. Lös ekvationerna och svara exakt.

(a) $x^2 = 8x + 20$

(b) $2x^2 + 24x - 266 = 0$

(c) $3x^2 - 12x - 24 = 0$

Uppgift 4.2.4. Lös ekvationerna och svara exakt.

(a) $k^2 - 10y + 23 = 0$

(b) $2m^2 - 10m + 10 = 0$

(c) $3n + 4 = n^2$

Uppgift 4.2.5. En boll kastas från ett torn. Höjden $h(t)$ meter över marken t sekunder efter kastet ges av $h(t) = 155 - 15t - 5t^2$.

(a) Från vilken höjd kastades bollen?

(b) Vilket är värdet på h när bollen slår i marken?

(c) Hur lång tid tar det för bollen att nå marken?

Uppgift 4.2.6. Lös ekvationerna.

(a) $(x - 2)(x - 1) = 12$

(b) $\dfrac{x^2}{3} = 4x - 9$

(c) $4x^2 + 15 = x^2 + 18x$

4.2.2 Antal lösningar till en andragradsekvation

Vi har sett att en andragradsekvation $x^2 + px + q = 0$ har lösningarna:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Uttrycket $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ under rottecknet i pq-formeln kallas ekvationens **diskriminant**. Med hjälp av diskriminantens värde kan man se om en andragradsekvation har två reella lösningar. en reell lösning eller om reella lösningar saknas.

Två lösningar

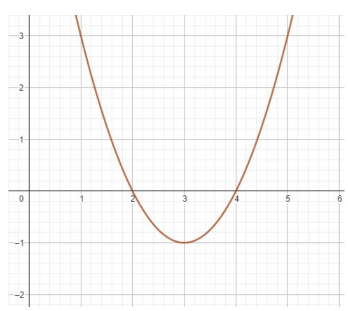
Regel 4.13. Gäller alltid när diskriminanten är positiv, dvs när $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ har ekvationen två reella lösningar.

Exempel 4.14. $x^2 - 6x + 8$ har lösningarna

$$x = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 8}$$

Diskriminanten är här $\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 8 = 1 > 0$ vilket innebär att ekvationen har två reella lösningar.

Figur 4.3 visar hur $f(x) = x^2 - 6x + 8$ ser ut. Vi ser att grafen skär x-axeln på två ställen ($x = 2$ och $x = 4$) som är lösningarna till ekvationen ovanför.



Figur 4.3: Grafen till $x^2 - 6x + 8$ med nollställena då $x = 2$ och $x = 4$.

En lösning

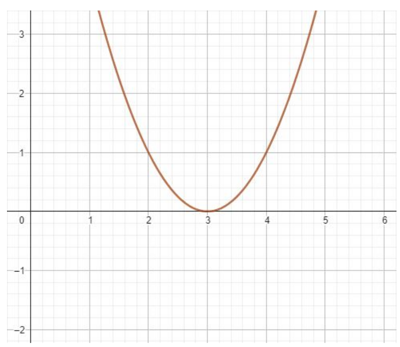
Regel 4.15. Gäller alltid när diskriminanten är 0, dvs när $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ har ekvationen en reell lösningar.

Exempel 4.16. $x^2 - 6x + 9$ har lösningarna

$$x = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 9}$$

Diskriminanten är här $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 0$ vilket innebär att ekvationen har en reell lösning.

Figur 4.4 visar hur grafen till andragradsfunktion $f(x) = x^2 - 6x + 9$ ser ut. Vi ser att grafen nuddar x-axeln på ett ställe (x=3) vilket är lösningen till ekvationen ovanför.



Figur 4.4: Grafen till $x^2 - 6x + 9$ med enda nollställe vid $x = 3$.

Ingen reell lösning

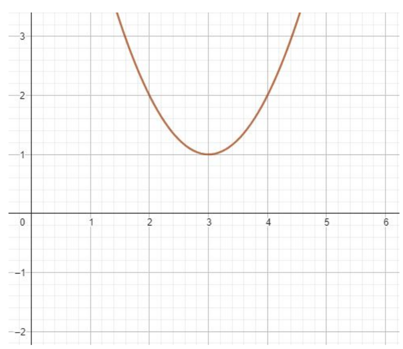
Regel 4.17. Gäller alltid när diskriminanten är negativ, dvs när $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ har ekvationen inga reella lösningar.

Exempel 4.18. $x^2 - 6x + 10$ har lösningarna

$$x = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 10}$$

Diskriminanten är här $\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 10 = -1 < 0$ vilket innebär att ekvationen saknar reella lösningar. Lösningar till en sådan ekvation kallas för komplexa tal och kommer inte tas upp i denna bok.

Figuren 4.5 visar hur grafen till $f(x) = x^2 - 6x + 10$ ser ut. Vi ser att grafen aldrig skär eller nuddar x-axeln vilket innebär att funktionen inte har något reellt nollställe.



Figur 4.5: Grafen till $x^2 - 6x + 10$ som saknar reellt nollställe.

Övningsuppgifter

Uppgift 4.2.7. Beskriv hur man kan avgöra antalet lösningar till en andragradsekvaiton genom att titta på diskriminanten.

Uppgift 4.2.8. Beräkna diskriminanten och avgör hur många lösningar ekvationerna har.

(a) $x^2 + 18x + 40 = 0$

(b) $x^2 + 2x + 1$

(c) $x^2 - 4x + 14$

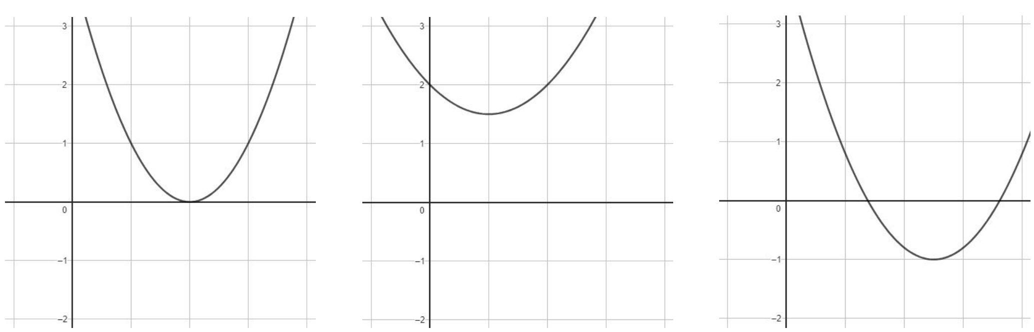
Uppgift 4.2.9. För vilka värden på q har ekvationen $x^2 + 6x + q = 0$

(a) två reella lösningar?

(b) en reell lösning?

(c) inga reella lösningar?

Exempel 4.19. Koppla ihop ekvationerna med rätt graf utifrån diskriminanterna.
(1) $0.5x^2 - x + 2 = 0$
(2) $x^2 - 4x + 4 = 0$
(3) $x^2 - 4x + 4x = 0$.



(a) (b) (c)

Uppgift 4.2.10. För vilka värden på a har ekvationen $x^2 + ax + 10 = 0$

(a) två reella lösningar?

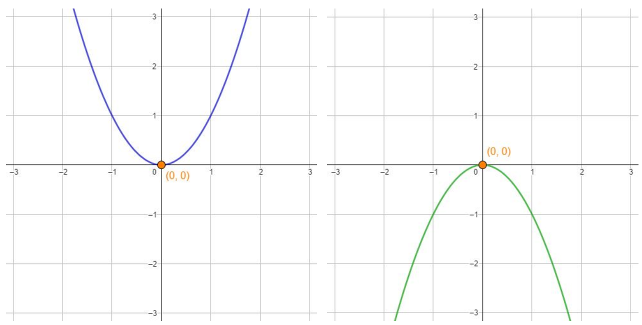
(b) en reell lösning?

(c) inga reella lösningar?

4.2.3 Andragradsfunktionen och grafen

Nu ska vi titta på några egenskaper hos andragradsfunktioner.

Alla andragradsfunktioner har en geometrisk ”form” som kallas parabel. Den enklaste andragradsfunktionen f ges av $f(x) = x^2$ och syns i figur 4.7a.



(a) $f(x) = x^2$ (b) $g(x) = -x^2$

Figur 4.7: Andragradsfunktion med minimi- och maximipunkt.

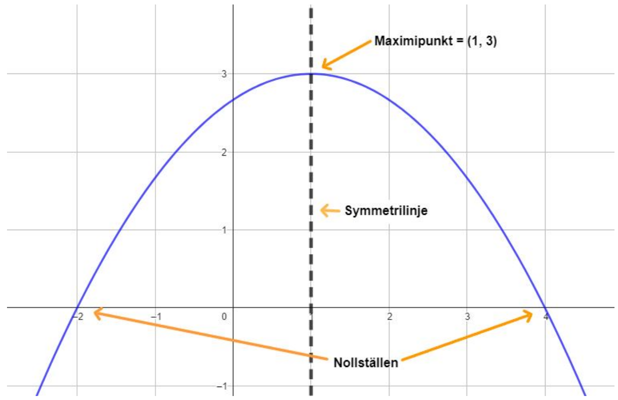
Minimipunkt & maximipunkt: Vi ser att grafen till $f(x)$ sträcker sig ner och vänder i origo, (0, 0). Denna punkt kallas för funktionens minimipunkt vilket innebär att funktionen har ett minsta värde då $x = 0$. Funktionsvärdet för $f(x) = x^2$ blir aldrig negativt och det beror på att $x^2 \geq 0$ för alla x-värden. Grafen i figur 4.7b har istället en maximipunkt i origo.

Symmetri: Graferna i figur 4.7 är symmetriska kring y-axeln, det vill säga att grafens högra halva är en spegelbild av den vänstra. Funktionsvärdet blir detsamma för $x = a$ som $x = -a$, oavsett värde på a.

Exempel 4.20. $f(x) = x^2$.

$$f(2) = 2^2 = 4$$
$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

Symmetrilinje: En graf till en andragradsfunktion är alltid symmetrisk kring en lodrät linje som är parallell med y-axeln. Den linjen kallas för symmetrilinjen. Grafens minimi- eller maximipunkt ligger på symmetrilinjen.



Figur 4.8: Maximipunkt, symmetrilinje och nollställen.

Extrempunkt: Ett samlingsnamn för minimi- och maximipunkter är extrempunkter. I extrempunkten antar andragradsfunktionen antingen sitt största eller sitt minsta värde. Destinationen för en extrempunkt skrivs alltid som en koordinat. Exempelvis har $g(x) = -x^2$ sin maximipunkt i (0, 0).

Största/minsta värde: Koefficienten framför x^2-termen avgör om grafen har en minimi- eller maximipunkt. Om koefficienten är positiv, som i figur 4.7a, så har funktionen ett minsta värde. Om den är negativ, som i figur 4.7b, så har den ett största värde. En minnesregel är att om koefficienten är positiv så är det en glad mun, vilket ger en minimipunkt, och är koefficienten negativ så är det en ledsen mun, vilket ger en maximipunkt.

Att bestämma symmetrilinjen: Eftersom grafen till en andragradsekvation är symmetrisk kring en parallell linje med y-axeln, så kommer symmetrilinjen att ligga mitt emellan eventuella nollställen till funktionen.

Exempel 4.21. Bestäm symmetrilinjen till $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Lösningen till $x^2 + 2x - 3 = 0$ ger funktionens nollställen med hjälp av pq-formeln:

$$x = -1 \pm \sqrt{1^2 + 3} = -1 \pm 2$$

$$x_1 = -3 \text{ och } x_2 = 1$$

Mitt emellan nollställena x_1 och x_2 hittar vi symmetrilinjen $x_{symmetri}$

$$x_{symmetri} = \frac{x_1 + x_1}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = -1$$

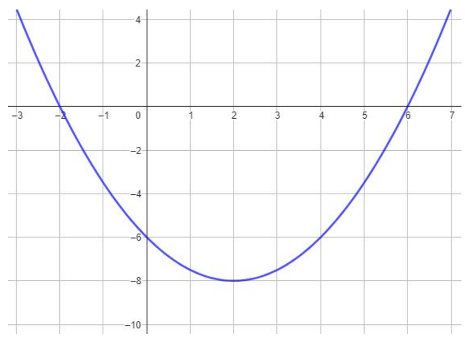
Här kan vi se att $x_{symmetri} = -\frac{p}{2}$, som är första termen i pq-formeln.

Exempel 4.22. Figuren 4.8 visar grafen till en andragradsfunktion. Bestäm

(a) funktionens nollställen.

(b) grafens extrempunkt och dess karaktär.

(c) grafens symmetrilinje.



Figur 4.9

Lösning

(a) Funktionens nollställen ges av lösningarna till ekvationen $f(x) = 0$, det vill säga grafens skärningspunkter med x-axeln. Avläsning av grafen ger nollställena $x_1 = -2$ och $x_2 = 6$.

(b) Avläsning ger att grafens minimipunkt har koordinaterna $(2, -8)$.

(c) Symmetrilinjen är en lodrät linje som går igenom andragradsfunktionens extrempunkt. Alltså går symmetrilinjen genom $x = 2$.

Exempel 4.23. Bestäm symmetrilinjen, extrempunkten och extrempunktens karaktär till funktionen som ges av $f(x) = x^2 - 4x - 3$.

Lösning
Eftersom koefficienten framför x^2-termen är positiv har funktionen en minimipunkt.

Vi bestämmer först funktionens nollställen eftersom symmetrilinjen ligger mitt emellan nollställena.

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$
$$x = 2 \pm \sqrt{2^2 + 3} = 2 \pm \sqrt{7}$$

Symmetrilinjen ligger mitt emellan $x_1 = 2 + \sqrt{7}$ och $x_2 = 2 - \sqrt{7}$
Det innebär att $x_{symmetri} = 2$.

Vi vet att extrempunkten ligger på symmetrilinjen. Vi kan då använda $x_{symmetri} = 2$ för att beräkna y-värdet.

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 3 - 3 = 4 - 12 - 3 = -11$$

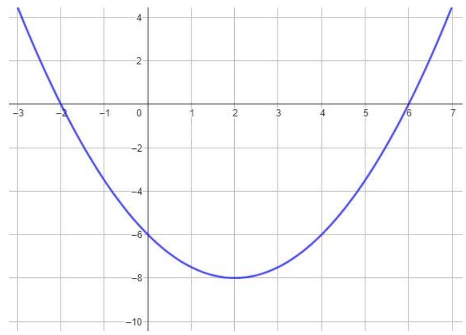
Detta ger oss att extrempunkten har koordinaten $(2, -11)$.

För att ta reda på extrempunktens karaktär tittar vi på x^2-termen och ser att den är positiv, vilket innebär att funktionen har en **minimipunkt**.

Sammanfattningsvis har vi symmetrilinjen då $x = 2$ och funktionens minimipunkt befinner sig i punkten $(2, -11)$.

Övningsuppgifter

Uppgift 4.2.11. Figuren visar grafen till en andragradsfunktion.



Bestäm följande genom att titta på grafen:

(a) $f(2)$.

(b) koordinaterna för grafens extrempunkt.

(c) funktionens nollställen.

(d) funktionens symmetrilinje.

Uppgift 4.2.12. Avgör om grafens extrempunkt är en minimi- eller maximipunkt.

(a) $f(x) = 3x^2 + 8$.

(b) $f(x) = 7 - x^2$.

(c) $f(x) = -2 - 3x^2$.

Uppgift 4.2.13. Avgör om funktionerna f, g och h har ett största eller minsta värde och ange det.

(a) $f(x) = x^2 - 4$.

(b) $g(x) = 2x^2$.

(c) $h(x) = 3 - x^2$.

Uppgift 4.2.14. Bestäm symmetrilinjerna för funktionerna.

(a) $f(x) = 2x^2 + 7x + 1$.

(b) $f(x) = -x^2 - 6x + 5$.

(c) $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Uppgift 4.2.15. För en andragradsfunktion f gäller att $f(2) = f(4) = 4$ och att det minsta värdet är 3. Skissa grafen.

Uppgift 4.2.16. En nyårsraket har en rörelsebana som beskrivs av funktionsuttrycket $h(t) = -4^2 + 24t + 1$, där $h(t)$ är höjden i meter efter t sekunder. Vilken blir raketens högsta höjd?

5. Linjära ekvationer

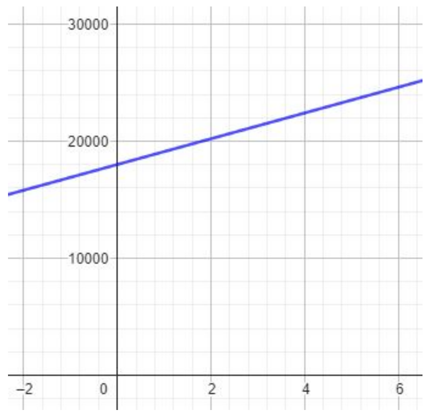
I detta kapitel ska vi titta närmare på ekvationer av första graden, det vill säga att variabeltermen har exponenten 1. Dessa ekvationer skrivs på formen $y = ax + b$ där a och b är konstanter.

5.1 Räta linjens ekvation

5.1.1 Från graf till ekvation

I kaptitel 3 använde vi ekvationen $y = 1100x + 18000$ för att beskriva sambandet mellan lönen och antalet skolår. Den totala lönen består av en grundlön på 18000 kr som sedan ökar med 1100 kr/år som en person går i skolan.

Ekvationen står i formen $y = kx + m$ där k och m är konstanter (förändras inte). Grafen till en sådan ekvation beskriver en rät linje. Ekvationen kallas för *räta linjens ekvation*.



Figur 5.1: $y = 1100x + 18000$

m-värde: Om vi tittar på figur 5.10 ser vi att grafen skär y-axeln vid 18000. y-värdet i denna punkt är det som vi kallar för m-värdet i $y = kx + m$. I detta fall är $m = 18000$. Grafen skär y-axeln när $x = 0$, och sätter man in $x = 0$ så får man m.

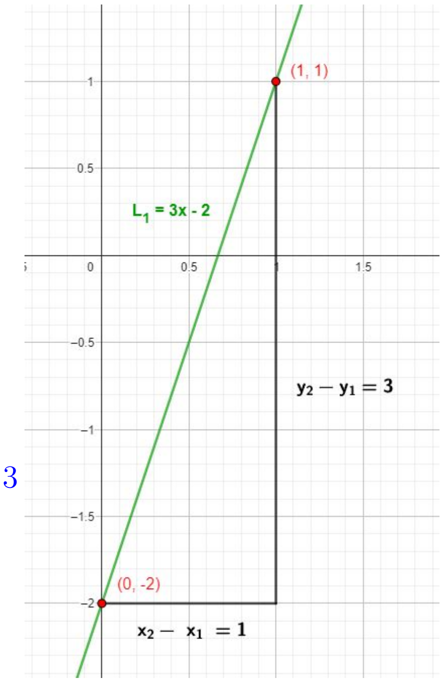
Riktningskoefficient: Lutningen på en rät linje bestäms av riktningskoefficienten. Riktningskoefficienten är k-värdet i $y = kx + m$

$$\text{Riktningskoefficient (k-värde)} = \frac{\text{förändring i y-led}}{\text{förändring i x-led}} = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Symbolen $\triangle$ kallas för *delta* och är en matematisk förkortning på en förändring.

Vi kallar linjen till ekvationen $y = 3x - 2$ för L_1. Om vi utgår från en punkt, exempelvis $(x_1, y_1) = (0, -2)$ som ligger på L_1 och går ett steg åt höger i x-led, så måste vi ta tre steg uppåt i y-led för att komma tillbaka till linjen. Då hamnar vi på punkten $(x_2, y_2) = (1, 1)$.

$$\text{Riktningskoefficient (k)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-2)}{1 - 0} = \frac{3}{1} = 3$$

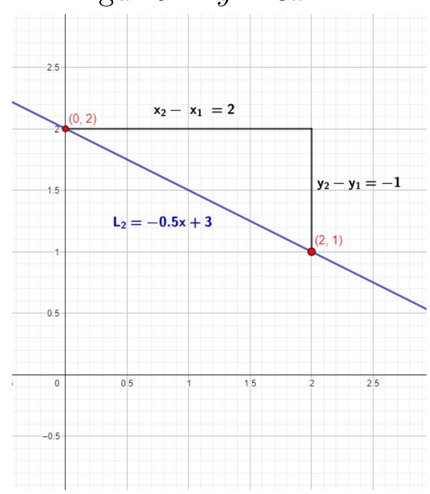


Figur 5.2: $y = 3x - 2$

Vi kallar linjen till ekvationen $y = -0.5x + 3$ för L_2.

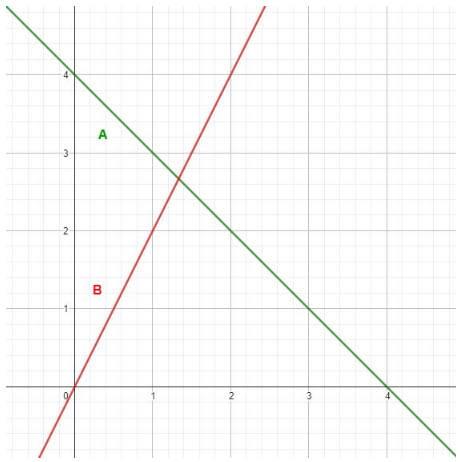
Vi hittar riktningskoefficienten på liknande sätt som för linjen L_1 och utgår från en punkt som ligger på L_2, exempelvis $(0, 2)$. Om vi går två steg åt höger i x-led så måste vi gå ett steg ner i y-led för att återgå till L_2. Vi kommer då till punkten $(2, 1)$.

$$\text{Riktningskoefficient (k)} = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{-2} = -0.5$$



Figur 5.3: $y = -0.5x + 2$

Exempel 5.1. Linjerna A och B är räta linjer. Bestäm linjernas k- och m-värden och skriv sedan ekvationen till linjerna.



Linje A: Vi kan bestämma m-värdet genom att titta på vart linjen skär y-axeln. Då får vi att

$$m = 4$$

k-värdet kan vi bestämmma genom att ta två punkter som ligger på linjen, exempelvis $(1, 3)$ och $(2, 2)$ och därefter göra följande beräkningar:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 3}{2 - 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

Nu har vi både m- och k-värdet och kan kan skriva ekvationen på formen $y = kx + m$. Ekvationen blir då

$$y = -1x + 7 = -x + 7$$

Linje B: Vi bestämmer linjens m-värde genom att titta på vart linjerna skär y-axeln. Vi får

$$m = 0$$

k-värdet bestäms på samma sätt som för linje A fast med punkterna $(0, 0)$ och $(1, 2)$.

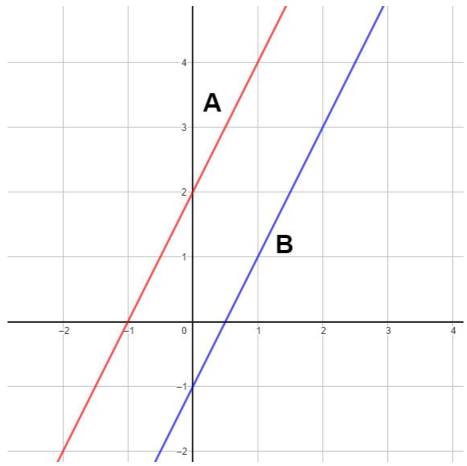
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = \frac{2}{1} = 2$$

Nu kan vi även skriva ekvationen till B som blir

$$y = 2x + 0 = 2x$$

Övningsuppgifter

Exempel 5.2. Figuren visar två linjer med ekvationen $y = 2x + m$. Bestäm värdet på m för de två linjerna.



Uppgift 5.1.1. Ekvationerna $y_1 = -2x + 7$ och $y_2 = 3x - 2$ motsvarar två räta linjer i ett koordinatsystem.

(a) Var skär linjerna y-axeln?

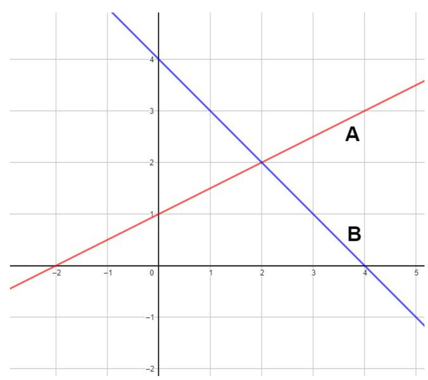
(b) Vilken riktningskoefficient har linjerna?

Uppgift 5.1.2. I figuren är två linjer ritade. Bestäm

(a) linjernas riktningskoefficienter.

(b) koordinater för den punkt där respektive linje skär y-axeln.

(c) linjernas ekvationer.



Figur 5.4

Uppgift 5.1.3. Ange ekvationen för den räta linje som går genom punkten (2,4) och har riktningskoefficienten -1.

Uppgift 5.1.4. Ange ekvationen för den räta linje som går genom punkten (-2,2) och har riktningskoefficienten 3.

Uppgift 5.1.5. Rita av följande ekvationer i ett koordinatsystem.

(a) $y = -2x + 3$.

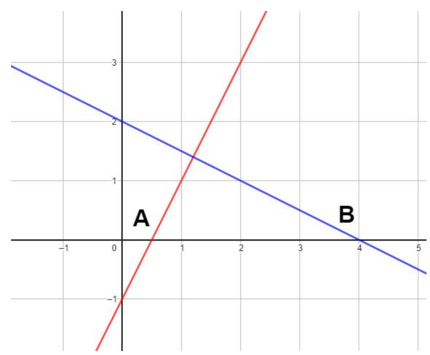
(b) $y = 0.5x + 1$.

(c) $y = \dfrac{5}{2}x - 4$.

Uppgift 5.1.6. Följande värdetabell hör till en ekvation av formen $y = kx + m$. Bestäm ekvaitonen.

x	-1	0	1	2
y	0	2	4	6

Uppgift 5.1.7. Ange ekvationerna för de linjer som är ritade i koordinatsystemet.



Figur 5.5

5.1.2 Räta linjens ekvation på k-form

Om vi känner till koordinaterna för två punkter på en rät linje har vi tillräckligt med information för att skriva linjens ekvationen på formen $y = kx + m$.

Vill vi bestämma ekvationen för den räta linjen som går genom punkterna med koordinaterna $(x_1, y_1) = (-1, -5)$ och $(x_2, y_2) = (1, 3)$ börjar vi med att beräkna riktningskoefficienten k. Det spelar ingen roll i vilken ordning man tar punkterna,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-5)}{1 - (-1)} = \frac{8}{2} = 4$$

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-5 - 3}{-1 - 1} = \frac{-8}{-2} = 4$$

För att bestämma m i $y = kx + m$ sätter vi in $k = 2$ och koordinaterna för en av av de givna punkterna som ligger på linjen i ekvationen:

$$\begin{aligned} y &= kx + m \\ 3 &= 2 \cdot 1 + m \longleftarrow \text{ Vi väljer punkten med koordinaterna (1, 3)} \\ 3 &= 2 + m \\ m &= 1 \end{aligned}$$

Då vet vi både k och m och den räta linjen som går genom punkterna $(-1, -5)$ och $(1, 3)$ är alltså $y = 4x + 1$.

Exempel 5.3. En rät linje med riktningskoefficienten k = 0.5 går genom punkten med koordinaterna $(2, 6)$. Bestäm linjens ekvation.

Lösning: Med hjälp av $k = 0.5$ och koordinaterna $(2, 6)$ kan vi bestämma värdet av m.

$$\begin{aligned} y &= kx + m \\ 6 &= 0.5 \cdot 2 + m \\ 6 &= 1 + m \\ m &= 5 \end{aligned}$$

$k = 0.5$ och $m = 5$ ger $y = 0.5x + 5$

Exempel 5.4. Bestäm ekvationen för den räta linjen som går genom punkterna med koordinaterna $(2, -4)$ och $(-1, 2)$.

Lösning: Vi börjar beräkna riktningskoefficienten k med hjälp av koordinaterna för punkterna.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-4)}{-1 - 2} = \frac{6}{-3} = -2$$

Nu när vi har k-värdet vill vi ta reda på m-värdet. Det kan vi göra genom att använda oss av riktningskoefficienten k=-2 och en av punkterna som vi har, till exempel $(-1, 2)$.

$$\begin{aligned} y &= kx + m \\ 2 &= (-2) \cdot (-1) + m \\ 2 &= 2 + m \\ m &= 0 \end{aligned}$$

$k = -2$ och $m = 0$ ger $y = -2x$

Svar: Linjens ekvation är $y = -2x$

Exempel 5.5. Priset för att åka taxi kan beskrivas med en rät linje. För att åka 5 km kostar det 150 kr och för att åka 20 km kostar det 450 kr. Beskriv priset för att åka taxi med hjälp av räta linjens ekvation.

Lösning: Om vi tänker att antalet km beskrivs med x och kostnaden betecknas med y, då kan vi skapa två koordinater, $(5, 150)$ och $(20, 450)$. Nu när vi har punkter kan vi bestämma riktningskoefficienten k.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{450 - 150}{20 - 5} = \frac{300}{15} = 20$$

Nu när vi vet att riktningskoefficienten k=20 kan vi bestämma m med hjälp av en av punkterna som vi skapat, exempelvis (5, 150).

$$\begin{aligned} y &= kx + m \\ 150 &= 20 \cdot 5 + m \\ 150 &= 100 + m \\ m &= 50 \end{aligned}$$

$k = 20$ och $m = 50$ ger $y = 20x + 50$

Svar: Kostnaden för att åka taxi kan beskrivas med $y = 20x + 50$.

Övningsuppgifter

Uppgift 5.1.8. Beräkna riktningskoefficienten k för den linjen som går genom punkterna med koordinaterna

(a) (8,6) och (2,3)

(b) (-2,3) och (0,5)

(c) (5,-3) och (3,-1)

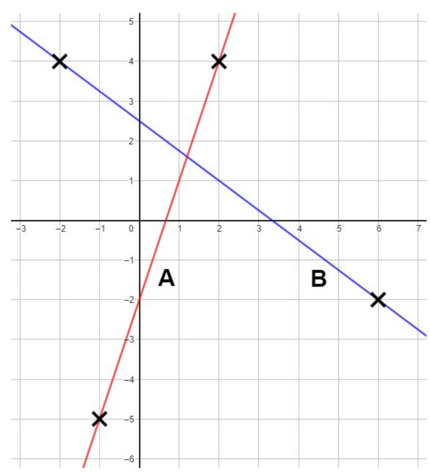
(d) (7,-1) och (2, 1)

Uppgift 5.1.9. Beräkna riktningskoefficienten k för den räta linje som går genom punkterna. Svara exakt.

(a) (-5,-3) och (2,5).

(b) (2,-7) och (-8,-4).

Uppgift 5.1.10. Bestäm riktningskoefficienterna till de räta linjerna. Ta hjälp av de marekerade punkterna.



Figur 5.6

Uppgift 5.1.11. En rät linje går genom punkterna med koordinaterna (1,2) och (3,10). En annan rät linje går genom punkterna med koordinaterna (2,10) och (4,18). Avgör om linjerna är parallella (har samma k-värde).

Uppgift 5.1.12. Bestäm talet a så att linjen genom punkterna med koordinaterna (1, a) och (2, $2a$) får lutningen 3.

5.2 Ekvationssystem

I ett koordinatsystem kan det finnas flera räta linjer samtidigt. I detta delkapitel ska vi titta på hur man kan hitta den punkt där två räta linjer skär varandra. Detta gör vi genom att lösa ett ekvationssystem.

Definition 5.6. Ekvationssystem är en uppsättning av två eller flera ekvationer som ska gälla samtidigt. En lösning till ekvationssystemet innebär att lösningen gäller för alla ekvationer som finns med i ekvationssystemet.

Om ett ekvationssystem har två ekvationer så skrivs det på följande sätt:

$$\begin{cases} y = k_1x + m_1 \\ y = k_2x + m_2 \end{cases}$$

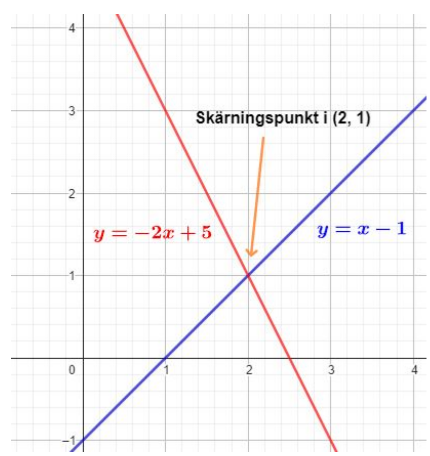
Hade det varit fler ekvationer så hade vi lagt till de ekvationerna. Man kan lösa ett ekvationssystem på några olika sätt och vi börjar med att gi igenom hur man löser ett linjärt ekvationssystem grafiskt.

5.2.1 Grafisk lösning av ett ekvationssystem

Man kan tolka lösningen av ett linjärt ekvationssystem som den punkt i ett koordinatsystem där ekvationernas linjer skär varandra. Denna punkt kallas för en skärningspunkt.

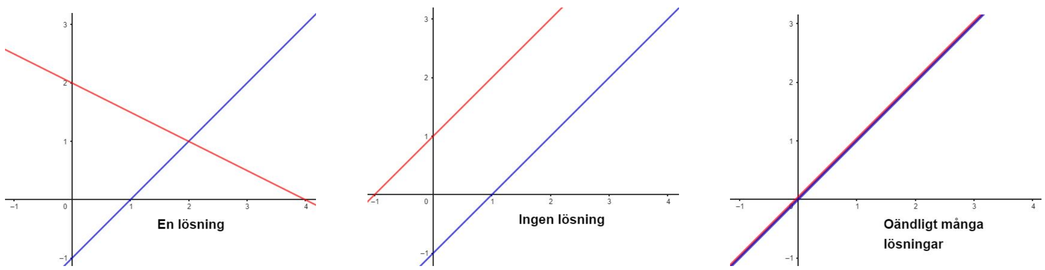
Om vi har ett ekvationssystem med ekvationerna $y = x-1$ och $y = -2x+5$ så kan vi rita in ekvationerna i samma koordinatsystem (se figur 5.7).

Vi ser att skärningspunkten mellan de två linjerna befinner sig i (2, 1). Det innebär att lösningen till ekvationssystemet är när $x = 2$ och $y = 1$.



Figur 5.7

Antal lösningar: Ritar man in två linjer i ett koordinatsystem så kommer linjerna antingen skära varandra i en punkt, vara parallella eller ha alla punkter gemensamma. I figurerna nedanför visas hur dessa olika antal lösningar kan se ut.



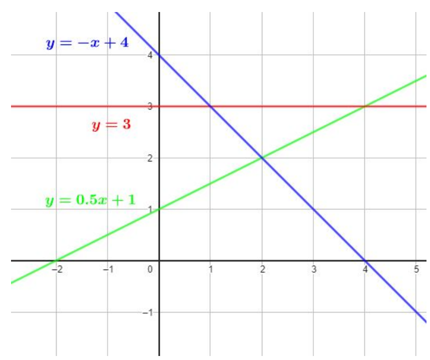
Figur 5.8: Antal lösningar som ekvationssystem kan ha.

Exempel 5.7. Lös följande ekvationssystem med hjälp av figur 5.6.

I ekvationssystemet har vi ekvationerna $y = x + 1$ (grön) och $y = -x + 4$ (blå) och det är dessa ekvationer vi ska titta på i figuren och avläsa vart linjerna till ekvationerna skär varandra. Vi ska därför ignorera linjen till $y = 3$.

Vi kan se i figuren att skärningspunkten är i (2, 2).

Alltså är lösningen till ekvationssystemet: $x = 2$ och $y = 2$.



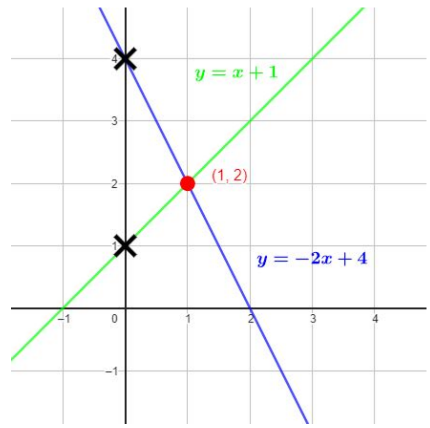
Figur 5.9: Koordinatsystem med ekvationerna: $y = -x+4$, $y = 3$ och $y = 0,5x + 1$

Exempel 5.8. Lös ekvationssystemet grafiskt.

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

Vi ritar de två linjerna som är på formen $y = kx + m$. Ekvationen $y = x + 1$ har $m = 1$ och skär y-axeln vid (0, 1), som vi kan markera. Riktningskoefficienten är $k = 1$, vilket innebär att om vi börjar i (0,1) kommer vi gå upp ett steg i y-led varje gång vi går till höger ett steg i x-led.

Gör på samma sätt med ekvationen $y = -2x + 4$. Markera punkten (0, 4) och för varje steg du går till höger så går du ner två steg.



Figur 5.10

Nu kan vi avläsa skärningspunkten till $x = 1$ och $y = 2$.

Vi kan kontrollera lösningen genom att sätta in x- och y-värdet i våra två ekvationer:

$y = x + 1 \quad VL = 2$ och $HL = 1 + 1 = 2$, $VL = HL$

$y = -2x + 4 \quad VL = 2$ och $HL = -2 \cdot 1 + 4 = 2$, $VL = HL$

Alltså är $x = 1$ och $y = 2$ en lösning till ekvationssystemet.

Övningsuppgifter

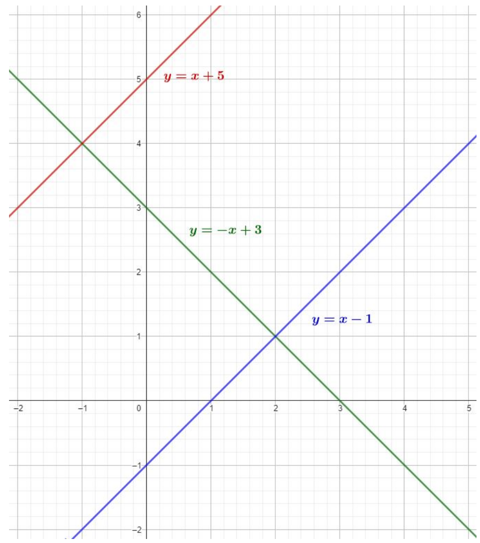
Uppgift 5.2.1. Lös följande ekvationssystem med hjälp av figuren.

(a)

$$\begin{cases} y = x + 5 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x - 1 \end{cases}$$



Figur 5.11

Uppgift 5.2.2. Lös ekvationssystemen grafiskt.

(a)

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$$

Uppgift 5.2.3. Bestäm antalet lösningar till följande ekvationssystem.

(a)

$$\begin{cases} 2y - 4x - 6 = 0 \\ 3y - 6x + 3 = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 3x - 3y - 3 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

Uppgift 5.2.4. Lös följande ekvationssystem med hjälp av figuren.

(a)

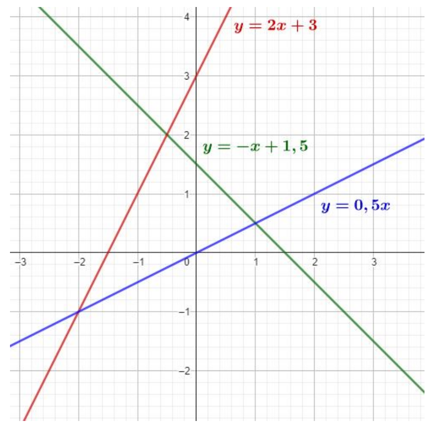
$$\begin{cases} x = -x + 1,5 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x = -x + 1,5 \\ y = 0,5x \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x = 2x + 3 \\ y = 0,5x \end{cases}$$



Figur 5.12

Uppgift 5.2.5. Ange värden på konstanterna a och b så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} 6y = ax + 6 \\ 4y = 6x + b \end{cases}$$

(a) får en lösning.

(b) får ingen lösning.

(c) får oändligt många lösningar.

5.2.2 Substitutionsmetoden

I det förra avsnittet presenterade vi en grafisk lösning till ett ekvationssystem. Nu ska vi titta på hur man löser ett ekvationssystem algebraiskt. Ibland kan grafer vara svåra att avläsa exakt och då kan det vara bra att kunna lösa ekvationssystem med en algebraisk metod. Vi kommer att börja med att beskriva *substitutionsmetoden* och i nästa avsnitt tar vi upp *additionsmetoden*.

När man använder substitutionsmetoden så löser man ut en variabel ur någon av ekvationerna och sätter sedan in den i den andra ekvationen. På det sättet får man en ekvation som endast innehåller en variabel.

Exempel 5.9. Lös ekvationssystemet algebraiskt.

$$\begin{cases} x = 2y \\ y = 2x - 9 \end{cases}$$

Lösning: Det kan vara praktiskt att numerera ekvationerna.

$$\begin{cases} x = 2y & (1) \\ y = 2x - 9 & (2) \end{cases}$$

Eftersom vi har att $x = 2y$ i ekvation (1), så kan vi ersätta x i ekvation (2) med $2y$:

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot 2y - 9 \\ y &= 4y - 9 \\ 9 &= 3y \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Nu har vi bestämt att $y = 3$. För att bestämma x sätter vi in $y = 3$ i en av ekvationerna. Här väljer vi ekvationen (1) $x = 2y$:

$$x = 2 \cdot 3 = 6$$

Ekvationssystemet har alltså lösningen $x = 6$ och $y = 3$.

Vi kan verifiera lösningen genom att sätta in lösningen i ekvationerna.

$$\begin{aligned} x = 2y: \quad & 6 = 2 \cdot 3 \\ & 6 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = 2x - 9: \quad & 3 = 2 \cdot 6 - 9 \\ & 3 = 3 \end{aligned}$$

Genom verifikation är lösningen korrekt.

Exempel 5.10. Lös ekvationssystemet.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 18 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$$

Lösning: Vi börjar med att lösa ut x ur den första ekvationen. Detta gör vi genom att subtrahera båda leden med $4y$ och sedan dividera med 2.

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 4y &= 18 - 4y \\ \frac{2x}{2} &= \frac{18 - 4y}{2} \\ x &= 9 - 2y \end{aligned}$$

Vårt nya ekvationssystem ser då ut på följande sätt:

$$\begin{cases} x = 9 - 2y & (1) \\ 3x - 2y = 3 & (2) \end{cases}$$

Uttrycket $9 - 2y$ ersätter x i ekvation (2). På så sätt kan vi bestämma y.

$$\begin{aligned} 3(9 - 2y) - 2y &= 3 \\ 27 - 6y - 2y &= 3 \\ 24 &= 8y \\ 3 &= y \end{aligned}$$

Sätt in $y = 3$ i någon av ekvationerna, till exempel ekvation (1).

$$x = 9 - 2 \cdot 3 = 3$$

Ekvationssystemet har alltså lösningen $x = 3$ och $y = 3$.

Vi verifierar lösningen genom att sätta in lösningen i de ursprungliga ekvationerna.

$$\begin{aligned} 2x + 4y = 18: \qquad 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 &= 18 \\ 18 &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y = 3: \qquad 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 &= 3 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Genom verifikation är lösningen korrekt.

Övningsuppgifter

Uppgift 5.2.6. Lös ekvationssystemen.

(a)

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -2x - 5 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x = 3y \\ y = 5x + 28 \end{cases}$$

Uppgift 5.2.7. Lös ekvationssystemen.

(a)

$$\begin{cases} y = 2x + 7 \\ y = 7x - 8 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 3y - 4x = 0 \\ \quad\quad y = 2x - 2 \end{cases}$$

Uppgift 5.2.8. Summan av två tal är 101 och differensen är 35. Ställ upp ett ekvationssystem och lös vilka de två talen är.

Uppgift 5.2.9. Lös ekvationssystemen.

(a)

$$\begin{cases} 2x + 5y = 6 \\ \;\; 4x - y = 1 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x + 2(y - 6) = 0 \\ \quad\quad 3x + 2y = 30 \end{cases}$$

Uppgift 5.2.10. Lös ekvationssystemen.

(a)

$$\begin{cases} 2x + 4y = 18 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 2x + 4y = 18 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$$

Uppgift 5.2.11. Ett pizzeria har luncherbjudande och säljer pizzor för 100 kr och kebabrullar för 85 kr. Under en lunch såldes sammanlagt 37 måltider vilket gav 3520 kr. Hur många pizzor och kebabrullar sålde pizzerian?

5.2.3 Additionsmetoden

På ett liknande sätt som med substitutionsmetoden kan additionsmetoden användas för att lösa ekvationssystem. Med hjälp av additionsmetoden kan man skriva om ett ekvationssystem till en ekvation med endast en variabel. Titta på ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \ \ (1) \\ x - 2y = 1 \ \ (2) \end{cases}$$

Här ser vi att y-termen är nästan likadana i båda ekvationerna förutom att de har olika tecken framför, $+$ och $-$. Om vi adderar de två ekvationerna med varandra, det vill säga att att vi adderar höger led med varandra och vänster led med varandra, så kommer y-termerna att ta ut varandra. Så med hjälp av additionsmetoden blir den nya ekvationen:

$$\begin{aligned} VL &= x + 2y + x + (-2y) = 2x \\ HL &= 5 + 1 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Om vi sätter in $x = 3$ i exempelvis ekvation (1), så kan vi bestämma y.

$$\begin{aligned} 3 + 2y &= 5 \\ 2y &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Vi har då fått att lösningen till ekvationssystemet är $x = 3$ och $y = 1$. Genom att sätta in dessa värden i respektive ekvation så kan du verifiera att lösningen är korrekt.

Exempel 5.11. Lös ekvationssystemet.

$$\begin{cases} 7y - 23x = 44 \quad (1) \\ 13y + 23x = 16 \ \ (2) \end{cases}$$

Lösning: Vi ser även att ekvation (1) har $-23x$ och (2) har $+23x$. Om vi adderar ekvationerna med varandra är summan av x-termerna 0.

$$\begin{aligned} VL &= 7y - 23x + 13y + 23x = 20y \\ HL &= 44 + 16 = 60 \end{aligned}$$

Nu får vi:

$$\begin{aligned} 20y &= 60 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Om vi sätter in $y = 3$ i exempelvis ekvation (2), så kan vi bestämma x.

$$\begin{aligned} 13 \cdot 3 + 23x &= 16 \\ 39 + 23x &= 16 \\ 23x &= -23 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Vi har då fått att lösningen till ekvationssystemet är $x = -1$ och $y = 3$

Exempel 5.12. Lös ekvationssystemet.

$$\begin{cases} 2y + 5x = 11 & (1) \\ 4y + 3x = 1 & (2) \end{cases}$$

Lösning: Om vi vill använda oss av additionsmetoden måste vi göra en operation för att antingen x- eller y termerna ska vara lika stora och ha olika tecken framför sig. Detta kan vi få om vi multiplicerar ekvation (1) med -2. Då får vi:

$$\begin{cases} -2(2y + 5x) = -2 \cdot 11 \\ \quad 4y + 3x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4y - 10x = -22 \\ \quad 4y + 3x = 1 \end{cases}$$

Om vi adderar dessa ekvationer med varandra kommer y-termerna att ta ut varandra.

$$VL = -4y - 10x + 4y + 3x = -7x$$
$$HL = -22 + 1 = -21$$

$$-7x = -21$$
$$x = 3$$

Vi sätter in $x = 3$ i någon av ekvationerna för att få ut y.

$$4y + 3 \cdot 3 = 1$$
$$4y = -8$$
$$y = -2$$

Detta ger oss lösningen $x = 3$ och $y = -2$ till ekvationssystemet.

$$\begin{cases} 2x + y & = 5 \\ 3x - 2y & = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + 4b & = 8 \\ 5a - 2b & = 10 \end{cases}$$

Övningsuppgifter

Uppgift 5.2.12. Lös ekvationssystemen med hjälp av additionsmetoden.

(a)
$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ 2y - 3x + 7 = 0 \end{cases}$$

Uppgift 5.2.13. Du har följande ekvationssystem.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 18 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$$

(a) Vilket tal ska man multiplicera den övre ekvationen med för att kunna lösa ekvationssystemet med hjälp av additionsmetoden?

(b) Lös ekvationssystemet med hjälp av additionsmetoden.

Uppgift 5.2.14. Lös ekvationssystemen.

(a)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} 4x - y = 7 \\ 2y - 3x = 1 \end{cases}$$

Uppgift 5.2.15. Lös ekvationssystemen.

(a)

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 3x - 2y + 12 = 0 \\ 6x + 5y - 3 = 0 \end{cases}$$

Uppgift 5.2.16. Alexandra säljer hamburgare och läsk vid en fotbollsmatch. Hamburgarna kostar 60 kr och läsken 20 kr. När matchen är slut har hon 11800 kr i kassan. Alexandra tjänar 30 kr på varje hamburgare och 8 kr på varje läsk. Hennes totala vinst blir 5560 kr. Hur många hamburgare och läsk såldes?

Uppgift 5.2.17. Lös ekvationssystemen.

(a)

$$\begin{cases} -0,5x - 3y = -12 \\ 1,5x + 2y = 15 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \frac{5}{3}y - 2,3x = 14,6 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$$

6. Exponentialekvationer och logaritmer

Tidigare har vi tittat på linjära funktioner och andragradsfunktioner, där vi har haft variabeln x i basen av en potens. I detta kapitel kommer vi titta på hur man kan lösa exponentialekvationer, både genom grafisk lösning och genom logaritmer.

6.1 Exponentialfunktioner

Definition 6.1. En exponentialfunktion är en funktion där variabeln, vanligtvis betecknad x, befinner sig i exponenten till en potens.

En exponentialfunktion skrivs på den allmäna formen:

$$f(x) = C \cdot a^x$$

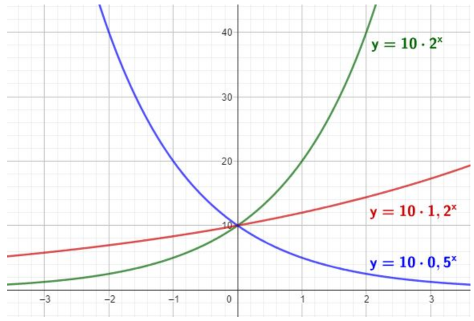
där C och a är konstanter ($a > 0$).

Exempel 6.2.

$$g(x) = 3 \cdot 10^x$$

I ett verkligt scenario brukar man använda exponentialfunktioner när något ökar eller minskar över en viss tid. Exempelvis att antalet invånare i en kommun ökar exponentiellt eller värdeminskningen på en bil kan förklaras med en exponentialfunktion. C beskriver startvärdet och a är förändringsfaktorn.

Beroende på om $a > 1$ så sker det en ökning medan om $a < 1$ minskar funktionen ju större x blir.



Figur 6.1: Figuren visar exponentialfunktioner med olika värden på a.

6.1.1 Exponentialfunktion och exponentialekvation

I en modell för värdeminskningen av en nyinköpt bil antar man att den årliga värdeminksningen är 20%. Det ger förändringsfaktorn:

$$100\% - 20\% = 80\% = 0,80.$$

Om bilen kostar 500 000 kr som ny, så kan värdet av bilen x år efter inköpet beskrivas med funktionsuttrycket, där $C = 500\,000$ och $a = 0,80$:

$$v(x) = 500\,000 \cdot 0,80^x.$$

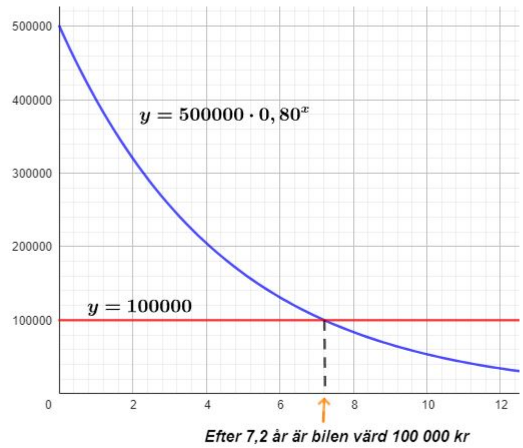
Med hjälp av funktionen v kan vi exempelvis beräkna bilens värde efter 3 år.

$$v(3) = 500\,000 \cdot 0,80^3 = 256\,000$$

Bilens värde efter 3 år är 256 000 kr.

Om man vill bestämma hur lång tid det tar tills värdet av bilen är 100 000 kr, så kan man ställa upp och lösa en ekvationen $500\,000 \cdot 0,80^x = 100\,000$.

Ekvationen kan man lösa grafiskt genom att rita $y = 500\,000 \cdot 0,80^x$ och $y = 100\,000$ i samma koordinatsystem. Lösningen till ekvationen är x-koordinaten för skärningspunkten mellan kurvorna.



Figur 6.2

Exempel 6.3. Det ökande antalet invånare i en kommun kan beskrivas med exponentialfunktionen N där $N(t) = 80\,000 \cdot 1,05^t$ och t är antalet år räknat från år 2024.

(a) Vad betyder 1,05 i funktionsuttrycket?

(b) Hur många invånare fanns det i kommunen år 2024?

(c) Hur många invånare finns det enligt modellen år 2030? Alltså 6 år efter 2024.

Lösning:

(a) Förändringsfaktorn är 1,05 vilket betyder att antalet invånare ökar med 5% per år.

(b) $N(0) = 80\,000 \cdot 1,05^0 = 80\,000$
Det fanns 80 000 invånare år 2024.

(c) $N(6) = 80\,000 \cdot 1,05^6 \approx 107\,200$
Det fanns 107 200 invånare år 2024.

Övningsuppgifter

Uppgift 6.1.1. Antalet bakterier $N(t)$ i en bakterikultur ökar med tiden t timmar enligt $N(t) = 4300 \cdot 1,045^t$.

(a) Hur stor är den procentuella ökningen per timme?

(b) Hur många bakterier fanns det vid försökets början?

(c) Hur många bakterier finns det efter 2 timmar?

(d) Beräkna hur lång tid det tar för antalet bakterier att öka till 10 000.

Uppgift 6.1.2. Andreas placerade 12 000 kr i en fond som handlar med aktier. Den förväntade tillväxten var 6% per år.

(a) Vilken förändringsfaktor beskriver värdeökningen?

(b) Bestäm funktionsuttrycket $v(x)$ som beskriver hur värdet på investeringen förändras med tiden x år.

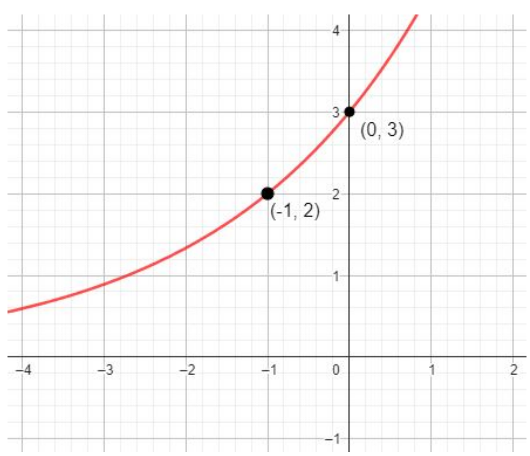
(c) Hur länge dröjer det tills värdet av Andreas investering har vuxit till 18 000 kr.

Uppgift 6.1.3. Anja investerade 30 000 kr i aktier. Efter 3 år var aktiernas värde 15 000 kr. Hur stor var den årliga minskningen i procent?

Uppgift 6.1.4. Du sätter in dina sparade pengar på ett bankkonto med en årsränta på 3%. Hur lång tid tar det för att pengarna ska fördubblas?

Uppgift 6.1.5.

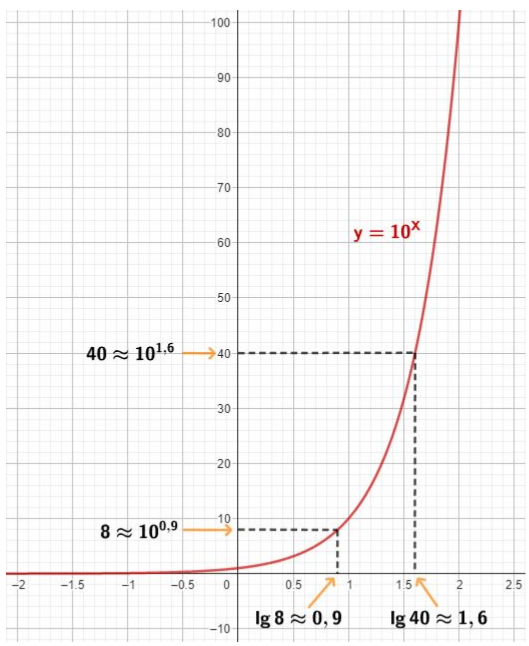
Ange funktionsuttrycket till exponentialfunktionen som är ritad i figuren.



6.2 Tiologaritmer

I detta avsnitt kommer vi undersöka hur vi kan lösa exponentialekvationer algebraiskt, genom att vi använder oss av logaritmer. För att lösa exponentialekvationer algebraiskt kan man använda en miniräknare. Många räknare har en färdig programfunktion som brukar betecknas "log" eller "lg".

I figuren 6.3 ser vi att exponentialfunktionen $f(x) = 10^x$ är ritad. Sen innan vet vi att $10^0 = 1$, $10^1 = 10$ och $10^2 = 100$, men här visar exponentialfunktionen att alla positiva heltal kan skrivas som en potens med basen 10. Figuren visar att talen 8 och 40 kan skrivas som potenser av basen 10. Vi kan avläsa i figuren att $8 \approx 10^{0,9}$ och $40 \approx 10^{1,6}$.



Figur 6.3: $f(x) = 10^x$.

Den exponent x som 10 måste upphöjas till för att man ska få det positiva talet y kallas tiologaritmen för y. Det betyder exempelvis att tiologaritmen av 100 är 2 eftersom $10^2 = 100$ och att tiologaritmen för 40 är ca 1,6 eftersom $10^{1,6} \approx 40$. Kortare kan detta skrivas som $\lg(100) = 2$ och $\lg(40) \approx 1,6$.

Exempel 6.4. Lös $11 = 10^x$. Här kan man använda räknaren för att beräkna lg(11).

$$x = \lg(11) \approx 1,04$$

Detta innebär att $10^{1,04} \approx 11$.

Definition 6.5. Tiologaritmen för ett positivt tal y är exponenten x när talet skrivs som en potens med basen 10.

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg(y) \quad (y > 0)$$

Alla positiva tal kan på det viset skrivas om på basen 10, eftersom $y = 10^{lg(y)}$.

Exempel 6.6. Skriv om 10 000, 7 och 22 000 som potenser med basen 10.

$$\begin{aligned} 10\,000 &= 10^4 \\ 7 &= 10^{\lg(7)} \\ 22\,000 &= 10^{\lg(22\,000)} \end{aligned}$$

Exempel 6.7. Bestäm utan att använda räknare.

(a) $\lg(1000)$ (b) $\lg(1000)$ (c) $\lg(1000)$ (d) $10^{\lg(3)}$

Lösning:

(a) $\lg(1000) = \lg(10^3) = 3$

(b) $\lg(10) = \lg(10^1) = 1$

(c) $\lg(1) = \lg(10^0) = 0$

(d) $10^{\lg(3)} = 3$

Lösning av exponentialekvation med hjälp av tiologaritmer
Tidigare i avnitt 6.1.1 beräknade vi grafiskt den tid det skulle ta för en ny bil att sjunka från 500 000 kr till 100 000 kr. Nu ska vi lösa samma upgift algebraiskt med hjälp av tiologaritmen.

Exempel 6.8. Exponentialekvationen för värdeminskningen:
$500\,000 \cdot 0,80^x = 100\,000$.

Att lösa denna ekvation innebär att vi hittar ett värde på x, som betecknar hur många år vi kan köra med bilen förrän värdet på bilen har sjunkit till 100 000 kr.

$$\frac{500\,000 \cdot 0,80^x}{500\,000} = \frac{100\,000}{500\,000}$$
$$0,80^x = 0,2$$

Nu skriver vi om leden med hjälp av definitionen av tiologaritmen, så att vi får uttryck som är skrivna med basen 10. Vi skriver först om 0,80 och 0,2 så att de står skrivna med basen 10.

$$0,80 = 10^{\lg(0,80)}$$
$$0,2 = 10^{\lg(0,2)}$$

Vi sätter in våra omskrivna tal i exponentialekvationen:

$$(10^{\lg(0,80)})^x = 10^{\lg(0,2)}$$

Med hjälp av potenslagarna kan vi skriva om det vänstra ledet.

$$10^{x\cdot\lg(0,80)} = 10^{\lg(0,2)}$$

Eftersom de båda leden i vår ekvation ska vara lika och är skrivna med samma bas, så måste deras exponenter vara lika stora. Då får vi:

$$x \cdot \lg(0,80) = \lg(0,2)$$
$$x = \frac{\lg(0,2)}{\lg(0,80)}$$
$$x \approx 7,2$$

Det tar ungefär 7,2 år för bilen att få ett värde på 100 000 kr.

Övningsuppgifter

Uppgift 6.2.1. Skriv som en potens med basen 10.

(a) 100 000

(b) 1 000 000

(c) 0,001

(d) 1

Uppgift 6.2.2. Lös ekvationerna.

(a) $10^x = 10000$

(b) $10^x = 0,001$

(c) $10^x = 1000$

Uppgift 6.2.3. Skriv följande tal som en potens med basen 10.

(a) 20

(b) 8

(c) 74

Uppgift 6.2.4. Bestäm

(a) $lg(100)$

(b) $lg(0,001)$

(c) $lg(10^{88})$

Uppgift 6.2.5. Ordna talen i storleksordning med det minsta först.

$lg(98)$ $\quad 10^{lg(2,1)}$ $\quad 2$ $\quad lg(982)$ $\quad 2,2$

Uppgift 6.2.6. (a) Skriv talet 25 som en potens med basen 10

(b) Lös ekvationen $10^x = 25$

Uppgift 6.2.7. Lös ekvationerna

(a) $10^x = 4,5$

(b) $10^x = 0,7$

(c) $2 \cdot 10^x = 6,4$

(d) $10^{3x} = 53$

Uppgift 6.2.8. Lös ekvationerna

(a) $lg(10^x) = 8$

(b) $lg(x) = 0,5$

(c) $lg(x) = 3,2$

(d) $lg(10^{2x}) = 1$

Uppgift 6.2.9. Lös ekvationerna och svara med en decimals noggrannhet.

(a) $5^x = 12$

(b) $3 \cdot 2^x = 15$

(c) $-3 \cdot 5^x = -6$

Uppgift 6.2.10. Lös ekvationerna och svara med en decimals noggrannhet.

(a) $20\,000 \cdot 1,06^x = 50\,000$

(b) $45\,000 \cdot 0,97^x = 15\,000$

(c) $4 \cdot 10^6 \cdot 1,03^x = 8 \cdot 10^x$

(d) $10^{3x} = 53$

Uppgift 6.2.11. Alexandra sätter in 5 000 kr på banken till 2,9% årsränta. Hur lång tid tar det innan han har 6 000 kr på banken?

6.2.1 Räkneregler för logaritmer

Likt potenslagarna, finns det lagar för logaritmer. Dessa lagar är viktiga att lära sig för att göra det enklare när vi ska lösa exponentialekvationer. Det finns tre stycken logaritmlagar som vi kan härleda utifrån potenslagarna och definitionen av tiologaritmen. Här nedan presenteras logaritmlagarna och deras härledning.

Första logaritmlagen

Sats 6.9.

$$\lg(x) + \lg(y) = \lg(x \cdot y)$$

Bevis.

$$x \cdot y = \begin{cases} 10^{\lg(x \cdot y)} \\ 10^{\lg(x)} \cdot 10^{\lg(y)} = 10^{\lg(x)+\lg(y)} \end{cases}$$

Detta ger ekvationen:

$$10^{\lg(x \cdot y)} = 10^{\lg(x)+\lg(y)} \quad \Leftrightarrow \quad \lg(x \cdot y) = \lg(x) + \lg(y)$$

□

Exempel 6.10. Beräkna $\lg(20) + \lg(5)$

$$\lg(20) + \lg(5) = \lg(20 \cdot 5) = \lg(100) = 2$$

Andra logaritmlagen

Sats 6.11.

$$\lg(x) - \lg(y) = \lg(\frac{x}{y})$$

Bevis.

$$\frac{x}{y} = \begin{cases} 10^{\lg(\frac{x}{y})} \\ \frac{10^{\lg(x)}}{10^{\lg(y)}} = 10^{\lg(x)-\lg(y)} \end{cases}$$

Detta ger ekvationen:

$$10^{\lg(\frac{x}{y})} = 10^{\lg(x)-\lg(y)} \quad \Leftrightarrow \quad \lg(\frac{x}{y})) = \lg(x) - \lg(y)$$

□

Exempel 6.12. Beräkna $\lg(30) - \lg(3)$

$$\lg(30) - \lg(3) = \lg(\frac{30}{3}) = \lg(10) = 1$$

Tredje logaritmlagen

Sats 6.13.

$$\lg(x)^y = y \cdot \lg(x)$$

Bevis.

$$x^y = \begin{cases} (10^{\lg(x^y)} \\ \left(10^{\lg(x)}\right)^y = 10^{y \cdot \lg(x)} \end{cases}$$

Detta ger ekvationen:

$$(10^{\lg(x^y)} = 10^{y \cdot \lg(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \lg(x^y) = y \cdot \lg(x)$$

□

Exempel 6.14. Beräkna $\lg(100^5)$

$$\lg(100^5) = 5 \cdot \lg(100) = 5 \cdot 2 = 10$$

Exempel 6.15. Förenkla uttrycket $\lg(a) - \lg(ab) + 2\lg(b)$

Lösning:
$$\begin{aligned} \lg(a) - \lg(ab) + 2\lg(b) &= \lg(a) - (\lg(a) + \lg(b)) + 2\lg(b) \\ &= \lg(a) - \lg(a) + \lg(b) + 2\lg(b) \\ &= \lg(b) \end{aligned}$$

Exempel 6.16. Lös ekvationerna

(a) $3^x = 5$ (b) $\lg(x) + \lg(4) = \lg(8)$

Lösning:

(a) Vi logaritmerar båda leden och använder sedan logaritmlagarna. Eftersom $3^x = 5$ så är också $\lg(3^x) = \lg(5)$.

$$\begin{aligned} 3^x &= 5 \\ \lg(3^x) &= \lg(5) \\ x\lg(3) &= \lg(5) \\ x &= \frac{\lg(5)}{\lg(3)} \\ x &\approx 1,5. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \lg(x) + \lg(4) &= \lg(8) \\ \lg(x) &= \lg(8) - \lg(4) \\ \lg(x) &= \lg\left(\frac{8}{4}\right) \\ \lg(x) &= \lg(2) \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Övningsuppgifter

Uppgift 6.2.12. Beräkna utan att använda räknare.

(a) $\lg(2) + \lg(5)$

(b) $\lg(750) - \lg(75)$

(c) $\lg(2) - \lg(20)$

(d) $\lg(6) + \lg(5) - \lg(2)$

Uppgift 6.2.13. Lös ekvationerna.

(a) $5^x = 7$

(b) $2 \cdot 3^x = 17$

(c) $1 - 2 \cdot 6^x = -4$

Uppgift 6.2.14. Lös ekvationerna.

(a) $3 \cdot 5^{1{,}09x} = 14$

(b) $5 - 2 \cdot 14^{3{,}2x} = 4$

(c) $12 \cdot 3^{5{,}2x} - 2 = 18$

Uppgift 6.2.15. Lös ekvationerna med hjälp av logaritmlagarna.

(a) $\lg(x) = \lg(3) + \lg(4)$

(b) $3\lg(x) = \lg(24) - \lg(3)$

(c) $\lg(5) = \lg(10) - \lg(2x)$

Uppgift 6.2.16. Funktionen $y = 14\,050 \cdot 1{,}02^x$ visar folkmängden i Höganäs, där y är antalet invånare t år efter 1980. När har folkmängden fördubblats?

Uppgift 6.2.17. Visa att $2(\lg(20) - \lg(5)) = \lg(2) + \lg(8)$

7. Statistik

I detta kapitel kommer vi gå igenom olika lägesmått, spridningsmått och diagram som kan användas för att sammanställa och presentera data.

7.1 Lägesmått

För att beskriva, jämföra och analysera statistiskt material används ofta olika lägesmått. De vanligaste lägesmåtten i media och i vetenskapliga rapporter är *medelvärde*, *median* och *typvärde*.

Månadslönerna för 8 slumpmässigt utvalda personer i Sverige är:
25 300, 31 700, 39 300, 27 100, 31 700, 457 000, 28 500, 33 400, 28 000

Medelvärde Medelvärde används för att representera ett genomsnitt för en mängd observationer. Om spridningen är stor kan medelvärdet vara missvisande.

Definition 7.1. Summan av alla värden dividerat med antalet värden.

$$\text{medelvärde} = \frac{\text{summan av observationer}}{\text{antalet observationer}}$$

Exempel 7.2. Medellönen för 9 personer i Sverige.

$$\begin{aligned}\text{medelvärde} &= \frac{25\,300 + 31\,700 + 39\,300 + 27\,100 + 31\,700 + 457\,000 + 28\,500 + 33\,400 + 28\,000}{9} \\ &= \frac{702\,000}{9} = 78\,000 kr\end{aligned}$$

Detta ger oss att personerna hade en medelinkomst på 78 000 kr.

Exemplet ovan visar på hur missvisande medelvärdet kan vara då majoriteten inte tjänade 78 000 men påverkades av att en person tjänade mycket mer än alla andra och på så sätt drog upp medelvärdet. Om man inte vill att extremvärden ska påverka mer än de andra värdena kan man använda sig av medianen.

Median
Medianen är ofta bättre lägesmått än medelvärdet när spridningen av observationerna är stor. Medianen påverkas inte av enstaka värden som är mycket stora eller mycket små.

Definition 7.3. Om alla observationer är i storleksordning så är medianen det värdet som står i mitten av ordningen. Om det skulle vara ett jämnt antal värden tar man medelvärdet på de två värdena i mitten.

Exempel 7.4. Vi sorterar alla löner från lägst till störst:
25 300, 27 100, 28 000, 28 500, 31 700, 31 700, 33 400, 39 300, 457 000

Detta ger oss en medianlön på 31 700 kr.

Typvärde
Typvärdet är det observationsvärde som förekommer flest antal gånger.

I vårt tidigare exempel är typvärdet 31 700 kr, eftersom observationsvärdet 31 700 förekom två gånger medan alla andra observationsvärden endast förekom en gång.

Exempel 7.5. Vid en släktmiddag närvarade 13 personer. Åldern på de närvarande är 1, 4, 3, 15, 72, 30, 27, 72, 42, 45, 23, 53, 58.

Beräkna personernas
(a) medelålder (b) median (c) typvärde.

Lösning:

(a)

$$\text{medelvärde} = \frac{\text{summan av observationer}}{\text{antalet observationer}}$$

$$= \frac{1+4+3+15+72+30+27+72+42+45+23+53+58}{13} \approx 34,2$$

Medelåldern på släktmiddagen är 34,2 år.

(b) Vi börjar med att rada upp åldrarna från yngst till äldst och sedan tittar på vilkenn ålder som är i mitten av ordningen.

1, 3, 4, 15, 23, 27, 30, 42, 45, 53, 58, 72, 72

Av 13 stycken personer så tittar vi på den sjunde personen i ordningen då denne har lika många personer som är yngre och som är äldre. Detta ger oss att medianåldern är 30 år

(c) Typvärdet beräknar vi genom att titta på antalet personer som har samma ålder. I detta fall kan vi se att det är två personer som är 72 år och resterande personer har olika åldrar.

Detta ger oss att typvärdet för åldern på släktmiddagen är 72 år.

Övningsuppgifter

Uppgift 7.1.1.

(a) Beräkna medelvärdet och median av följande fem tal: 8, 4, 13, 10, 7.

(b) Hur ändras medelvärdet och median om man byter ut talet 10 mot talet 16.

Uppgift 7.1.2. En grupp på 40 elever tillfrågades hur många böcker de hade läst under sommarlovet. Resultatet sammanställdes i en frekvenstabell.

Antal böcker	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Frekvens	1	12	8	9	5	1	2	1	1

(a) Beräkna medelvärdet.

(b) Vilket är typvärdet?

Uppgift 7.1.3. Medelåldern i en familj är 18 år. Vilken är medelåldern i familjen om 4 år?

Uppgift 7.1.4. Du kastar en tärning några gånger och får följande resultat:
2, 5, 4, 4, 5, 4
Vilket är störst: medelvärdet, medianen eller typvärdet?

Uppgift 7.1.5. Tre klasser tävlar i luftgevärsskytte med fem representanter från varje klass. Resultaten blev:

Klass A	62	94	95	98	98
Klass B	62	63	98	98	99
Klass C	58	62	95	99	99

Ta reda på vilken klass som lyckats bäst baserat på om man tittar på medelvärdet, medianen eller typvärdet.

7.2 Spridningsmått

Lägesmått ger oss en snabb överblick över statistisk material men ibland räcker det inte att endast använda lägesmått när vi vill analysera statistiskt material eller jämföra olika material med varandra. För att kunna jämföra olika serier av observationsvärden kan det vara intressant att veta hur stor spridning det är bland observationsvärdena. På samma sätt som det finns olika lägesmått finns det olika spridningsmått.

Två grupper skrev ett prov i fysik där en person maximalt kunde få 24 poäng. Läraren var intresserad av att analysera de två grupperna mellan varandra och beräknade deras medelvärde för respektive grupp samt medianen.

$$\text{Grupp 1: } 11, 11, 13, 13, 14, 15, 15, 15, 17, 19, 20, 20, 20$$
$$\text{Medelvärde} = 15,6$$
$$\text{Median} = 15$$

$$\text{Grupp 2: } 4, 8, 11, 13, 15, 15, 18, 19, 20, 20, 21, 24$$
$$\text{Medelvärde} = 15,6$$
$$\text{Median} = 15$$

Vi ser här att båda grupperna har samma medelvärde och median även om resultaten i de olika grupperna är olika. För att få en ännu bättre analys av

gruppernas resultat kan läraren använda sig av olika spridningsmått.

Variationsbredd
Ett enkelt mått på spridning i en serie av observationsvärden är variationsbredd, som beräknas genom att ta skillnaden (differensen) mellan det största och det minsta observationsvärdet. Variationsbredden i vardera grupp är

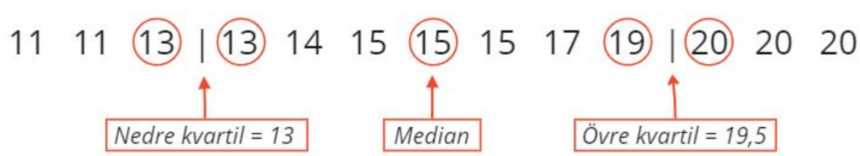
$$\text{Grupp 1:} 20 - 11 = 9$$

$$\text{Grupp 2:} 24 - 4 = 20$$

Variationsbredden visar oss att grupp 1 har en mindre skillnad mellan det största och lägsta resultatet och är därför mer samlat runt medianen.

Variationsbredden är enkel att räkna ut, men detta mått har nackdelen att det inte tar hänsyn till alla observationsvärden, utan enbart det största och det minsta värdet. För att få en bättre bild av spridningen kan man använda andra spridningsmått.

Kvartiler
Ett bättre sätt att beskriva spridningen runt medianen är att dela in observationsvärdena i flera delar. Här kan vi använda oss av kvartiler. Kvartil betyder fjärdedel och fås genom att vi delar in våra storleksordnade observationsvärden i fyra lika stora grupper. Här använder vi oss av medianen som delar in observationsvärdena i två lika stora delar. Genom att beräkna och markera mitten av den nedre respektive övre halvan. Nu har vi fått tre kvartiler: *nedre kvartil*, *median* och *övre kvartil*.

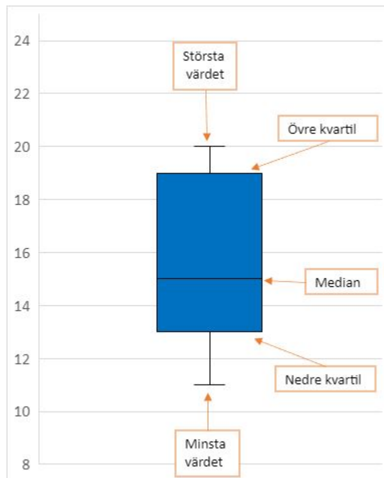


Skillnaden mellan den övre och undre kvartilen kallas för kvartilavståndet. Detta motsvarar den variationsbredd för de 50% av värdena som befinner sig i mitten av serien av observationsvärden.

Exempel 7.6. Vi beräknar kvartilavståndet på grupp 1 som skrev prov i fysik.

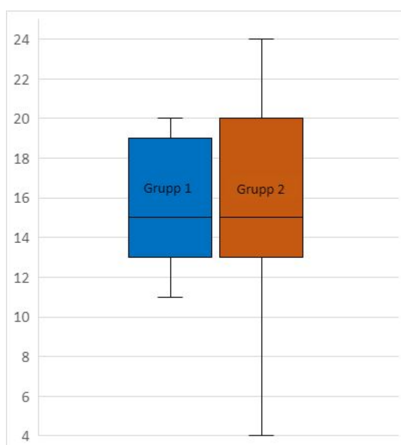
$$\text{Övre kvartil:} \frac{20+19}{2} = 19,5$$
$$\text{Nedre kvartil:} \frac{13+13}{2} = 13$$
$$\text{Kvartilavstånd} = \text{Övre kvartil} - \text{Nedre kvartil} = 19,5 - 13 = 6,5$$

Lådagram: För att visa spridningen kring medianen kan man med hjälp av kvartilerna rita ett lådagram.



Figur 7.1: Lådagram

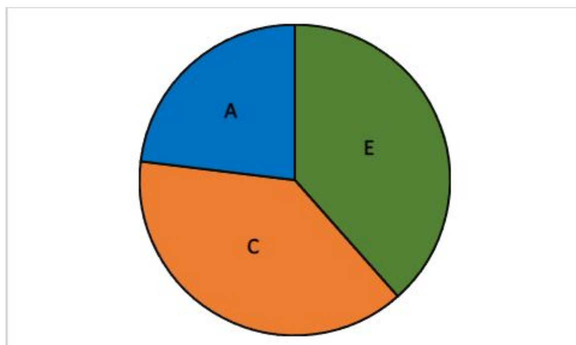
Om man vill jämföra två serier av observationsvärden kan man lägga flera lådagram bredvid varandra.



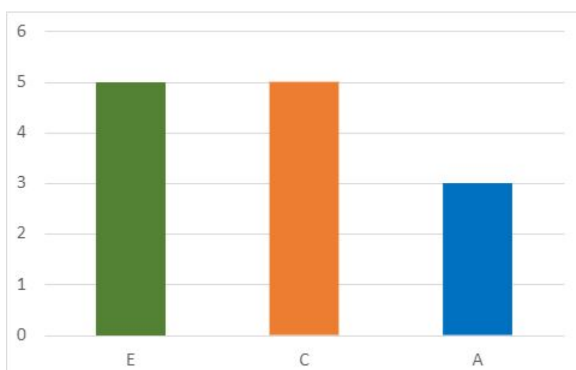
Figur 7.2: Lådagram för grupperna 1 och 2

Percentiler: Vid tillfällen då man har ett stort material och vill ge en ännu nogrannare beskrivning av spridningen så kan man dela in observationsvärdena i percentiler. Man delar alltså in värdet i hundra lika stora delar och gränserna mellan delarna kan betecknas p_1, p_2, $p_3, ...,$ p_{99}. Den tionde percentilen p_{10} är det värde som delar observationsvärdena så att 10% är mindre än p_{10} och 90% är större än p_{10}. På liknande sätt är de 10% av de största observationsvärdena befinner sig över p_{90}. Den femtionde percentilen p_{50} är detsamma som medianen.

Andra vanligt förekommande diagram är: cirkeldiagram och stapeldiagram. Se hur sådana kan se ut i figurerna nedanför.



Figur 7.3: Cirkeldiagram



Figur 7.4: Stapeldiagram

Övningsuppgifter

Uppgift 7.2.1. En bonde vägde sina balar med hö och fick fram följande resultat:
300 kg 325 kg 364 kg 314 kg 298 kg
Bestäm variationsbredden.

Uppgift 7.2.2. Titta på följande lådagram och bestäm:

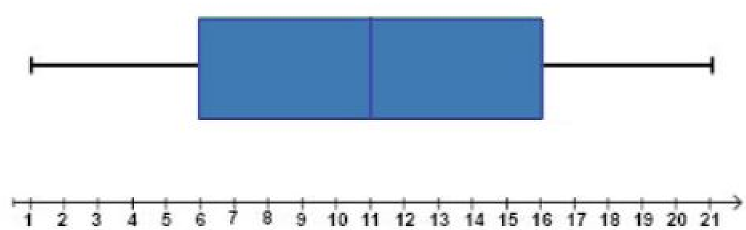
(a) Övre kvartil.

(b) Median.

(c) Undre kvartil.

(d) Variationsbredd

(e) Bestäm kvartilavståndet.



Uppgift 7.2.3. I föregående uppgift ser vi ett lådagram som beskriver längderna på 8 växter i centimeter.

(a) Hur stor andel av växterna är över 6 cm?

(b) Hur många växter var kortare än medianen?

Uppgift 7.2.4. En maskin vid ett bageri som bakar pajer som ska väga 500 g. Någon gång per dag tar man ett stickprov på 10 pajer och kontrollväger dem. Vid ett tillfälle såg resultatet ut på följande sätt uttryckt i gram:
501 296 500 503 499
497 502 504 498 500

(a) Bestäm variationsbredden.

(b) Bestäm de tre kvartilerna.

(c) Bestäm kvartilavståndet.

8. Övningsuppgifter - Repetition på hela Boken

A. Formelsamling som får användas till kunskapskontrollen???

Inkludera t.ex. PQ-formeln.

Svar till övningsuppgifter

Uppgift 2.1.1 För att beräkna hur mycket pengar man är skyldig någon.
Uppgift 2.1.2 10.
Uppgift 2.1.3 102.
Uppgift 2.1.4 0. Multiplikation med 0 blir 0.
Uppgift 2.1.5 0. Multiplikation med 0 blir 0.
Uppgift 2.1.6 19.
Uppgift 2.1.7 För att ett godtyckligt heltal k kan skrivas som $\frac{k}{1}$.
Uppgift 2.2.1

(a) Falskt. Att du gillar att cykla medför inte nödvändigtvis att du äger en cykel.

(b) Sant.

(c) Falskt. Bor man i Norge så medför det att man bor i Norden. Men bor man i Norden så medför det inte nödvändigtvis att man bor i Norge, man kan till exempel bo i Danmark.

Uppgift 2.3.1 Positiva heltal som ar större an 1 och endast ar delbara med 1 och sig sjalvt.
Uppgift 2.3.2 Man skriver ett tal som en produkt av primtal.
Uppgift 2.3.3 $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43$.
Uppgift 2.3.4 $110, 236, 400$.
Uppgift 2.3.5 $105, 1023$.
Uppgift 2.3.6 $236, 400$.
Uppgift 2.3.7 $105, 110, 400$.
Uppgift 2.3.8 $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.
Uppgift 2.3.9 $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.
Uppgift 2.3.10 $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$.
Uppgift 2.3.11 $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.
Uppgift 2.3.12 $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.
Uppgift 2.3.12 $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.
Uppgift 2.3.13 Ja.
Uppgift 2.4.1

(a) $\dfrac{9}{5}$

(b) $\dfrac{1}{8}$

(c) $-\dfrac{2}{11}$

Uppgift 2.4.2

(a) $\dfrac{2}{3}$

(b) $\dfrac{11}{10}$

(c) $\dfrac{41}{15}$

Uppgift 2.4.3

(a) $\dfrac{13}{12}$

(b) $-\dfrac{3}{40}$

(c) $\dfrac{16}{8} = 2$

Uppgift 2.4.4

(a) $\dfrac{51}{56}$

(b) $\dfrac{5}{56}$

Uppgift 2.4.5

(a) 1

(b) 4

(c) $\dfrac{15}{4}$

Uppgift 2.4.6

(a) $\dfrac{15}{24}$

(b) $\dfrac{5}{7}$

(c) $\frac{1}{12}$

Uppgift 2.4.7

(a) 2

(b) $\frac{18}{25}$

(c) $\frac{2}{3}$

Uppgift 2.4.9

(a) $\frac{1}{20}$

(b) $200min$

(c) 6

Uppgift 2.5.1

(a) 7^6

(b) $(2x)^3 = 2^3x^3$

(c) $(-1)^5$

Uppgift 2.5.2

(a) 3^3

(b) 3^4

(c) 3^6

Uppgift 2.5.3

(a) 4^8

(b) $5^{11} + 3^8$

(c) $7^{11} - 4^{15}$

Uppgift 2.5.4

(a) 9^4

(b) $3^2 + 5^4$

(c) $8 - 2^{-2}$

Uppgift 2.5.5

(a) 7^6

(b) 3^{-6}

(c) 5^{-2}

Uppgift 2.5.6

(a) 5^{12}

(b) 7^{16}

(c) 14^{-6}

Uppgift 2.5.7

(a) $4^3 x^3$

(b) $\dfrac{x^8}{3^{12}}$

(c) $11^{-3} x^{-6}$

Uppgift 2.5.8

(a) 3^7

(b) $5^1 7$

(c) 2^7

Uppgift 2.6.1

(a) 18

(b) 0

(c) 103

(d) 36

Uppgift 2.6.2

(a) 20

(b) 81

Uppgift 2.6.3

(a) 16

(b) 64

(c) -4

Uppgift 2.6.4

(a) 4

(b) 5

(c) 2

Uppgift 2.6.5

(a) $4 \cdot (6 \cdot 5) = 4$

(b) $4 + (5 - 6) \cdot 7 = -3$

(c) $\frac{36}{4} \cdot 7 - (3 + 2) \cdot 8 = 23$

Upppgift 2.7.1 Att bryta ut en faktor och sedan skapa en produkt av uttrycket.
Uppgift 2.7.2

(a) 3

(b) $2x$

(c) $(2x - 5)$

Uppgift 2.7.3

(a) $8x(1+3x)$

(b) $8x(2x+4y)$

(c) $8x(5-x^2)$

Uppgift 2.7.4

(a) $5m^3(3-5m^2)$

(b) $ac(17+15c)$

(c) $6a^2b(4a+3b)$

(d) $2x(3x+7-15y)$

Uppgift 2.7.5

(a) $\dfrac{8a^2+4a}{3}$

(b) $\dfrac{10b-b^2}{5a}$

Uppgift 2.7.6

(a) $2a+a^2$

(b) $4a$

Uppgift 2.8.1

(a) Nej

(b) Ja

(c) Nej

(d) Nej

Uppgift 2.8.2

(a) $x=11$

(b) $a = 7$

(c) $y = \frac{19}{5}$

Uppgift 2.8.3

(a) $y = -5, 5$

(b) $x = 0$

Uppgift 2.8.4

(a) $a = 5$

(b) $z = 21$

Uppgift 2.8.5

(a) $x = \frac{2}{5}$

(b) $x = \frac{5}{4}$

Uppgift 2.8.6

(a) $x = 7$

(b) $x = 6$

(c) $z = 16, 5$

Uppgift 2.9.1

(a) $x \geq -5$

(b) $x < \frac{3}{2}$

(c) $x \leq 2$

(d) $x < -\frac{2}{5}$

Uppgift 2.9.2

(a) $x \geq 4$

(b) $x < -4$

(c) $y > -\frac{2}{3}$

Uppgift 2.9.3

(a) $12(x-2) < 156$

(b) $x < 15$

Uppgift 2.9.4

(a) $x \leq \frac{101}{15}$

(b) $x > 2$

Uppgift 2.9.5

(a) $-10 \leq x \leq 10$

(b) $-18 \leq x \leq 12$

(c) $-5 < x < 5$

Uppgift 2.10.1 Hundradel
Uppgift 2.10.2

(a) 43%

(b) 80%

(c) 115%

Uppgift 2.10.3

(a) $0,14 = 14\%$

(b) $0,33 = 33\%$

(c) $1,18 = 118\%$

Uppgift 2.10.4

(a) 4% $\quad \frac{6}{16} \quad 0,38$

(b) $0,3 \quad 33\% \quad \frac{1}{3}$

Uppgift 2.10.5 Ja, Markus klarade provet ($\approx 60,3\%$)
Uppgift 2.10.6

(a) 335000 kr

(b) 9%

Uppgift 2.10.7

(a) 57 elever.

(b) 20%

Uppgift 2.10.8 4 meter
Uppgift 2.10.9

(a) $1,13$

(b) $0,93$

(c) $1,015$

Uppgift 2.10.10 13%
Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)

Uppgift (c)

(a)

(b)

(c)