Integraler - Uppgifter

Antonio Prgomet
https://www.linkedin.com/in/antonioprgomet

Bakgrund

Uppgifterna är kopplade till teorin från kapitlet ”Integraler” från hemsidan: `https://www.matteboken.se/lektioner/matte-3#!/`
Dessa uppgifter ger möjlighet för extra träning och repetition, dessutom så kommer några av uppgifterna komma på den examinerande kunskapskontrollen.

Jag har även skrivit ett avsnitt där vi avhandlar summa symbolen.

1 Primitiv Funktion

Fråga 1. En primitiv funktion till $f(x)$ kan betecknas $F(X)$ eller $\int f(x)dx$. Detta innebär att $F(x) = \int f(x)dx$.

a) Hur kan vi kontrollera om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$?

b) Vad är den primitiva funktionen till $f''(x)$?

c) Hur många primitiva funktioner har funktionen $f(x) = x^2 + 4$?

d) Bestäm *en* primitiv funktion till $f(x) = x^2 + e^{4x} + 2$

e) Bestäm den primitiva funktionen till $f(x) = x^2 + e^{4x} + 2$ som uppfyller villkoret $F(0) = 1$

Fråga 2. Hitta den primitiva funktionen $F(x)$ i följande fall:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = 0$

c) $f(x) = x^{7.5} + 10x + 38 + e^{3x}$

d) $f(x) = x^{7.2} + x\sqrt{x} + \sqrt{x} + e^{-x} + e + 10$

Fråga 3. Priset P på en produkt ökar med hastigheten $P'(t) = 12 \cdot e^{0.2t}$ där t = antal år efter år 2010.

a) Bestäm funktionen P(t) då man vet att priset var 74 kr år 2010.

b) Bestäm priset år 2017, avrunda till hela kr.

2 Summation

I detta avsnitt skall vi lära oss om hur kan vi kan skriva summor på ett kompakt sett med hjälp av sigma notationen. Sigma, $\sum$, är en bokstav från det grekiska alfabetet.

Kolla följande video som går igenom summa symbolen: `https://www.youtube.com/watch?v=KbvD6FlIJGU&t=42s`

En summa är en följd av tal som adderas. Exempelvis, summan $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 100$ kan skrivas som $\sum\limits_{i=1}^{50} 2i$. Skriver vi ut denna summan så får vi: $\sum\limits_{i=1}^{50} 2i = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2 \cdot 50$.

Vanligtvis så används bokstäverna i, k, j som index men det har formellt sett ingen betydelse vad du använder. Därför är t.ex. $\sum\limits_{i=1}^{50} 2i = \sum\limits_{k=1}^{50} 2k$.

Inom AI, Statistik och programmerings litteraturen kommer du ofta se summa symbolen. Exempelvis inom statistik beräknar man ofta medelvärde, och det kan enkelt skrivas enligt följande $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Exempel.

a) $\sum\limits_{j=1}^{4} j(j+1) = 1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+3\cdot(3+1)+4\cdot(4+1) = 2+6+12+20 = 40$.

b) $\sum\limits_{i=3}^{5} 2^i = 2^3 + 2^4 + 2^5 = 8 + 16 + 32 = 56$.

Exempel. Antag att vi vill beräkna den totala inkomsten i Sverige, då kan vi beteckna inkomsten för person i som y_i och då blir summan av alla personers inkomst i Sverige $= \sum\limits_{i} y_i$. I detta exemplet så ser du att vi inte explicit skrivt ut den övre index begränsningen, n, vilket då innebär att man tar alla möjliga index. En annan variation du kommer se är $= \sum y_i$ där det då är underförstått att man skall summera över alla möjliga index.

Summation är en linjär operation:

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i$$

där α, β är två reella konstanter. Du kan prova bevisa ovanstående genom att skriva ut summan för båda led och därefter visa att de är lika.

Fråga 1. Skriv ut och beräkna följande summor.

a) $\sum\limits_{k=0}^{5} (2k + 1)$

b) $\sum\limits_{j=0}^{4} 3^j$

c) $\sum_{j=3}^{7} 4$

d) $\sum_{i=0}^{3} (i(i+1) \cdot 3i + 1)$

Fråga 2. Skriv följande summor med ett summatecken.

a) $3 + 6 + 9 + 12 + 15$.

b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

3 Definition av integraler

Fråga 1. Arean under en funktion kan approximeras med sambandet $\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$ där x_k är varje intervalls mittpunkt. Om vi låter n gå mot oändligheten så kommer vi få oändligt många rektanglar och får då den exakta arean under en funktion. I det fallet så betecknas Arean $= \int_a^b f(x)dx$ och det är vad vi kallar integralen.

a) Rita upp en bild och ge en förklaring till hur uttrycket: $\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$ används för att approximera arean under en funktion.

b) Ge en intuitiv förklaring till varför arean under en funktion har följande notation: $\int_a^b f(x)dx$.

c) Skriv ned integralkalkylens fundamentalsats.

4 Beräkning av integraler

Fråga 1.
a) Kalle påstår att integraler beräknar areor, Julia påstår att det inte stämmer eftersom en integral kan ge ett negativt värde medan areor inte kan vara negativa. Vem har rätt? Motivera ditt svar.

b) Beräkna integralen $\int_{-1}^{1}(-x^2-4)dx$ och visualisera vad som beräknas i en bild.

c) Beräkna integralen $\int_{-1}^{1}(x^2+4)dx$ och visualisera vad som beräknas i en bild.

d) Beräkna integralen $\int_{-1}^{1} xdx$ och visualisera vad som beräknas i en bild. Vad blir svaret och varför?

e) Hur hade du gått tillväga för att få arean för de ”två trianglarna” i d) uppgiften?

Fråga 2. Integraler är en linjär operation vilket innebär att de uppfyller följande regel:

$$\int (af(x) + bg(x))\, dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx$$

där a, b är reella tal.

Beräkna följande integraler direkt och därefter genom att "bryta upp" integralen genom att använda dess linjära egenskap. Får du samma svar?

a) $\int_1^2 (2x + 7)dx$

b) $\int_1^2 (3x^2 + 4x)dx$

c) $\int_{-1}^2 (e^x + 6x^2)dx$

Fråga 3. Beräkna följande integraler:

a) $\int_0^1 \frac{e^{3x}+e^{5x}}{e^{2x}} dx$

b) $\int_4^9 x\sqrt{x}dx$

c) $\int_{-1}^2 (x + 3)^2 dx$

Fråga 4.

a) Rita upp funktionen $x + 3$ och beräkna arean under grafen mellan gränserna $0 \leq x \leq 2$. Du skall inte använda integraler utan göra det "manuellt" genom att räkna ut arean från bilden du ritat upp.

b) Bestäm arean i a) uppgiften genom att nyttja integraler.

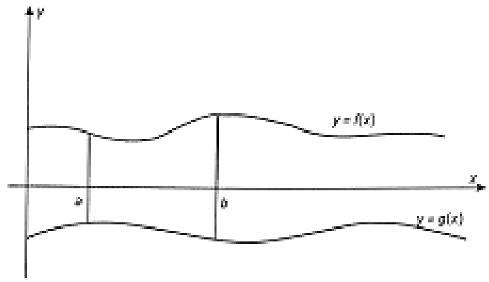
5 Arean mellan två kurvor

Fråga 1.
a) Integralen $\int_{-1}^1 -x^2 - 4dx$ blir negativ eftersom den är under x-axeln. Om vi vill beräkna arean (d.v.s. så att integralen får ett positivt värde) så hade vi kunnat använda en överfunktion för att uppnå detta, vilken?

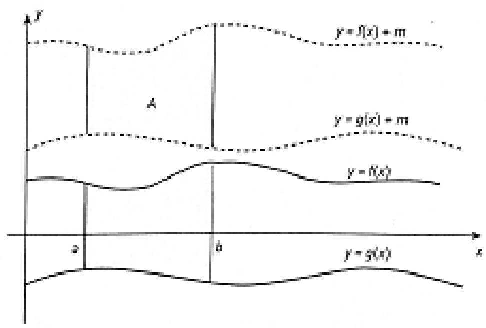
b) När man beräknar integralen mellan två funktioner så får man arean, oavsett om funktionerna ligger under x-axeln. Ett exempel på detta är: $\int_0^1(-3-(-4))dx$, vad blir integralen? Rita upp arean du beräknat.

Se en bild nedan som förklarar det djupare.

Vad händer om graferna ligger under x-axeln?
Titta på figuren nedan där $y = g(x)$ ligger under x-axeln.



Om vi adderar en konstant m till de båda funktionerna, kan vi "lyfta" dessa så att även $y = g(x)$ kommer ovanför x-axeln. Lägg märke till att arean mellan kurvorna är densamma som förut.



Vi beräknar nu arean av området A:

$$A = \int_a^b \left((f(x)+m) - (g(x)+m) \right) dx = \int_a^b \left(f(x) + m - g(x) - m \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

SLUTSATS:

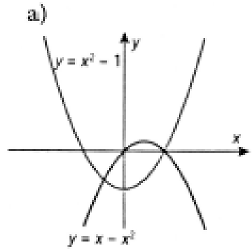
Formeln $\int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$ gäller även då graferna ligger under x-axeln.

Fråga 2. Gör uppgifterna i bilden nedan.

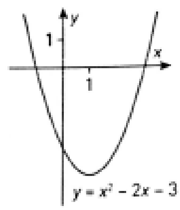
4303 Hur stor area har området som begränsas av kurvorna $f(x) = 5e^{-0,5x}$ och $g(x) = 3e^{-0,5x}$ samt y-axeln och linjen $x = 2$? Svara med 3 värdesiffror.

4304 Beräkna arean av det markerade området.

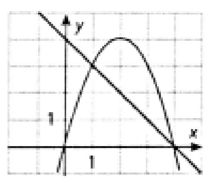
a)



b)



4305 Beräkna arean av det markerade området i figuren. Kurvan har ekvationen $y = 4x - x^2$ och linjen är $y = 4 - x$.



4306 Skissa kurvan $y = x^2 - 4$ och linjen $y = 3$ i samma koordinatsystem. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan, linjen och linjerna $x = 1$ och $x = 2$.

4307 Skissa grafen till funktionen $y = x^2 + 2x$. Beräkna arean av det område som begränsas av grafen och x-axeln.

4308 Bestäm arean av området som begränsas av grafen till $f(x) = \sqrt{x}$ och linjerna $x = 1$, $x = 9$ samt $y = 3$. Svara exakt.

6 Några mer utmanande uppgifter

Dessa uppgifter är för dem som har tid över.

Fråga 1. Funktionen F är primitiv funktion till f. Grafen till $F(x)$ går genom punkterna $(1, 1)$ och $(5, 4)$. Beräkna $\int_1^5 f(x)dx$.

Fråga 2. Bestäm $k > 0$ så att integralen $\int_0^k (k - x^3)dx$ får ett så stort värde som möjligt.