

Derivatan - Uppgifter

Antonio Prgomet

<https://www.linkedin.com/in/antonioprgomet>

Bakgrund

Uppgifterna är kopplade till teorin från kapitlet "Derivata" samt "Derivatan och grafen" i Matte 3 kursen från hemsidan: <https://www.matteboken.se/lektioner/matte-3#!/>

Dessa uppgifter ger möjlighet för extra träning och repetition, dessutom så kommer några av uppgifterna komma på den examinerande kunskapskontrollen.

1 Derivatans definition och derivering

Fråga 1. Derivatans definition lyder:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Utifrån definitionen, hur kan vi tolka derivatan? Kan du exemplifiera?

Fråga 2. Derivera följande uttryck, du kan använda formelsamlingen till hjälp.

- a) $f(x) = x^2$
- b) $f(x) = 10$
- c) $f(x) = x^2 + 10$
- d) $f(x) = x^7 + 10x + x^{3.5} + 7$

Fråga 3. Derivera följande uttryck, du kan använda formelsamlingen till hjälp.

- a) $f(x) = \frac{1}{x}$
- b) $f(x) = \frac{1}{x^4}$
- c) $f(x) = \frac{1}{x^5} + \sqrt{x} + 10x^2 + 5x + 81$
- d) $f(x) = 3\sqrt{x}$

Fråga 4. Vi har en enkel modell där vi modellerar inkomst y som en funktion av ålder x och antar sambandet $y = x^2$.

- a) En modell är en förenkling av verkligheten och därför tror vi aldrig att den är "sann" eller "rätt", det viktiga är att den kan användas till det vi vill på ett tillfredsställande sätt. Med det sagt, ser du några begränsningar med modellen?
- b) Vad betyder $f(4)$?
- c) Beräkna $f'(x)$.
- d) Hur kan du tolka $f'(4)$?

Fråga 5. Antalet bakterier i en bakteriekultur ges av $N(t) = 3t^2 + 48t + 510$ där t = antal timmar efter försökets början.

- a) Hur många bakterier fanns vid försökets början?
- b) Efter hur lång tid har antalet bakterier fördubblats?
- c) Bestäm tillväxthastigheten då $t = 4$ timmar.
- d) Hur lång tid efter försökets början är tillväxthastigheten 50 bakterier/timme.

Fråga 6. Vad är derivatan av en konstant? Ge en intuitiv förklaring.

Fråga 7. Antag att du vet vilken enhet som finns på y-axeln och på x-axeln. Formulera en regel för hur du kan bestämma vilken enhet derivatan har.

2 Eulers tal e och den naturliga logartimen \ln

Fråga 1.

- a) Förklara vad som gör konstanten e speciell.
- b) Skriv ut konstanten e med 15 decimaler (googla för att se decimalerna), kan du se ett mönster så du enkelt kan komma ihåg dem?
- c) Hur många decimaler har talet e (googla för att få fram svaret)?
- d) Vad menas med att e är ett irrationellt tal?

Fråga 2. Derivera följande uttryck, du kan använda formelsamlingen till hjälp.

- a) $f(x) = e^x$
- b) $f(x) = e^{2x}$
- c) $f(x) = e^{2x} + x^3 + \sqrt{x} + 10x + 7$

Fråga 3.

- a) Använd e och \ln för att härleda derivatan av a^x .

- b) Derivera uttrycket $f(x) = 4^x$
- c) Derivera uttrycket $f(x) = 55^{7x}$

Fråga 4. Nu skall vi arbeta med den naturliga logaritmen.

- a) Vad är den naturliga logaritmen av e lika med? D.v.s. vad är $\ln(e) = ?$
- b) Vad är tolkningen av \ln ?
- c) Lös ekvationen $10^x = 4$ och dubbelkolla så du har rätt svar.

Fråga 5. Vi har en modell som säger att temperaturen (grader celsius) i en ugn T beror på tiden $x =$ minuter enligt sambandet: $T(x) = 120 \cdot 1,09^x$.

- a) Beräkna $T(15)$ och tolka resultatet.
- b) Beräkna $T'(15)$ och tolka resultatet.

3 Derivatan och Grafen

Fråga 1.

- a) Vad menas med att en funktion är växande på ett intervall? Ge två definitioner.
- b) Vad menas med att en funktion är *strängt* växande på ett intervall? Ge två definitioner.

Fråga 2. Funktionen $f(x) = x^3 + 3x^2$ är begränsad till intervallet $-4 \leq x \leq 2$.

- a) Hitta funktionens extrempunkter (där derivatan är 0) samt extremvärdena för tillhörande extrempunkter.
- b) Hitta funktionens största och minsta värde.
- c) Gör en teckentabell och skissa funktionen.
- d) Är en funktions eventuella maximipunkt det minsta värdet funktionen kan anta?

Fråga 3. Bestäm största och minsta värdet för följande funktioner:

a) $f(x) = 4x - x^2 - 2, 0 \leq x \leq 3$

b) $f(x) = x^2 - 5x, 0 \leq x \leq 3$

Fråga 4. Bestäm största och minsta värdet för följande funktioner:

a) $f(x) = x^3 - 4.5x^2 - 12x, -2 \leq x \leq 1$

b) $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 36x, -4 \leq x \leq 1$

Fråga 5. Andraderivatan betecknas $f''(x)$ och utläses "f bis av x".

a) Vad kan vi använda andraderivatan till?

b) Hur ändras funktionens $f(x) = x^2$ derivata? Vilken implikation har detta för andraderivatan?

c) Om $f'(a) = 0$ och $f''(a) < 0$, är det då en minimupunkt eller maximupunkt? Kan du ge en intuitiv förklaring till det t.ex. genom att använda funktionen $f(x) = -x^2$ som exempel?

d) Om $f'(a) = 0$ och $f''(a) > 0$, är det då en minimupunkt eller maximupunkt? Kan du ge en intuitiv förklaring till det t.ex. genom att använda funktionen $f(x) = x^2$ som exempel?

e) Om $f'(a) = 0$ och $f''(a) = 0$, är det då en minimupunkt eller maximupunkt? Hur kan du avgöra det i detta fallet?

4 Några mer utmanande uppgifter

Dessa uppgifter är för dem som har tid över.

Fråga 1.

a) Rita upp en bild och härled från den derivatans definition som lyder:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

b) Hur kan vi tolka derivatan? Kan du exemplifiera?

c) Använd derivatans definition för att derivera en godtycklig konstant C , vad är svaret och hur kan du intuitivt motivera det?

d) Använd derivatans definition för att derivera funktionen $f(x) = x^2$.

Fråga 2. Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + 50$ har en minimipunkt i $(3, 14)$. Bestäm konstanterna a och b .