Flervariabelsfunktioner och Partialderivatan

Antonio Prgomet
https://www.linkedin.com/in/antonioprgomet

Bakgrund

Jag har skrivit ett avsnitt kopplat till funktioner av fler variabler samt partialderivatan och inkluderat uppgifter.

Innehållet i detta arbetsblad kommer examineras i kunskapskontrollen.

1 Funktioner av fler variabler

Hittintils har vi arbetat med funktioner av en variabel. Exempelvis, $y = 2x + 1$ är en funktion som beror på variabeln x. Om $x = 3$ så är $y = 2 \cdot 3 + 1 = 7$. Rent formellt så är en funktion *en regel som för varje tillåtet x-värde ger precis ett y-värde.* Alla tillåtna x-värden kallas definitionsmängden medan alla värden som y kan anta kallas värdemängden.

Exempel
I a) respektive b) nedan så är funktions regeln densamma medan definitionsmängden skiljer sig åt. Därför är det två olika funktioner.

a) $y = 2x + 1$ där x begränsas till området $1 \leq x \leq 4$.

b) $y = 2x + 1$ där x begränsas till området $0 \leq x \leq 10$.

Senare i utbildningen kommer vi skapa modeller, t.ex. för att prediktera en persons inkomst eller för att prediktera sannolikheten att en sjukhuspatient dör.

Om vi tänker på exemplet där vi vill prediktera en persons inkomst, så hade vi kunnat skapa en (väldigt) enkel modell som har formen $f(x) = x$ där x betecknar ålder. Det är en enkel modell men den fångar ändå det generella mönstret att en persons inkomst normalt ökar med åldern. Vanligtvis gäller det upp till en viss ålder (t.ex. fram till pensionen) men som sagt, nu håller vi det enkelt. Tänker vi vidare på detta exemplet så är det ganska naturligt att en persons inkomst även beror på utbildningsnivå, hur skall vi modellera detta? Vi skapar en funktion som beror på flera variabler!

Vi hade kunnat skapa en modell $z = f(x, y)$ där z betecknar en persons inkomst, x är personens ålder och y är personens utbildningsnivå i år. Exempelvis hade funktionen kunnat se ut enligt följande: $f(x, y) = x + 1.5y + 4$.

En person som är 30 år gammal och har studerat i 3 år hade då, enligt vår modell, haft en inkomst på $f(30, 3) = 30 + 1.5 \cdot 3 + 4 = 30 + 4.5 + 4 = 38.5$.

Exempel Vi har funktionen $f(x, y) = x^2 + 4xy + 2$. Nedan evaluerar vi den för olika värden:

a) $f(2, 3) = 2^2 + 4 \cdot 2 \cdot 3 + 2 = 4 + 24 + 2 = 30$

b) $f(0, 0) = 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 0 + 2 = 0 + 0 + 2 = 2$

c) $f(10, 1) = 10^2 + 4 \cdot 10 \cdot 1 + 2 = 100 + 40 + 2 = 142$

Vi kan enkelt generalisera till funktioner av fler variabler.

Exempel Vi har funktionen $f(x, y, z) = x + 2y + 0.5z$.
Då blir t.ex. $f(2, 1, 6) = 2 + 2 \cdot 1 + 0.5 \cdot 6 = 2 + 2 + 3 = 7$.

Ovan hade vi en funktion av tre variabler, har man fler variabler så är det praktiskt att använda *index* eftersom det finns ett begränsat antal bokstäver vi kan använda. Så exempelvis, har vi en funktion av 5 variabler så hade vi kunnat skriva vår funktion som: $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2 + 2x_2 + 10x_3 + x_4 + 0.1x_5$. Här är varje x_i en separat variabel, t.ex. hade x_1 kunnat beteckna ålder, x_2 utbildningsnivå, x_3 kön, x_4 antal barn, x_5 gift/ogift.

1.1 Funktioner av fler variabler - Uppgifter

Fråga 1 Vi har funktionen: $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy + 1$, bestäm följande funktionsvärden:

a) $f(1, -2)$

b) $f(-2, 1)$

c) $f(1, 1)$

Fråga 2 Vi har funktionen: $f(x, y, z) = x + 2y + z^2 + xy + 1$, bestäm följande funktionsvärden:

a) $f(1, 2, 2)$

b) $f(0, 0, 1)$

2 Partialderivata

Vi har lärt oss om derivatan av en variabel. Har vi fler variabler så kan man beräkna det som kallas partialderivatan, då kollar man på hur funktionsvärdet ändras om vi ändrar endast en variabel och håller de andra konstanta. Nedan följer ett exempel som vi kommer återkomma till när vi går igenom partialderivatan.

Exempel Antag att vi har funktionen $f(x, y) = x^2 + 1.5y + 4$.

Om vi som utgångsläge antar att $x = 25$ och $y = 3$ så blir funktionsvärdet $f(25, 3) = 25^2 + 1.5 \cdot 3 + 4 = 633.5$ Hur mycket ökar funktionen om x ökar en enhet till $x = 26$ men y behålls oförändrad $y = 3$? Då blir funktionsvärdet $f(26, 3) = 26^2 + 1.5 \cdot 3 + 4 = 684.5$. Vi har därför fått en ökning på $684.5 - 633.5 = 51$. Vi kommer se senare att detta exemplet relaterar till partialderivatan i termer av att vi här analyserat vad som händer när x ökar med *en* enhet och y behålls oförändrad medans partialderivatan beräknar motsvarande sak fast i en specifik punkt när x ändras marginellt (d.v.s. oändligt litet).

Med hjälp av partialderivatan så kan vi beräkna förändringen i en *specifik* punkt. Om en funktion f har två variabler x, y så har den en partiell derivata med avseende på x som betecknas $\frac{\partial f}{\partial x}$ eller $f'_x(x, y)$
och en partiell derivata med avseende på y som betecknas $\frac{\partial f}{\partial y}$ eller $f'_y(x, y)$.

Har vi *en* variabel så betecknas derivatan $\frac{df}{dx}$ eller $f'(x)$. Notera skillnaden mellan $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{df}{dx}$.

Här är den formella definitionen på partial derivatan:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Vi kommer inte ägna oss åt den formella definition utan kommer fokusera på hur vi kan beräkna och tolka partial derivatan. Som vi kommer se, när man beräknar partialderivatan, t.ex. med avseende på x så hålls alla andra variabler konstanta och betraktas som just det, konstanter.

Kollar vi på vår tidigare funktion $f(x, y) = x^2 + 1.5y + 4$ så gör vi följande uträkning för partialderivatan:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 1.5y + 4)$$

Vi deriverar varje term med avseende på x:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(1.5y) + \frac{\partial}{\partial x}(4)$$

Eftersom vi deriverar med avseende på x så hålls det som inte innehåller x konstant och kom ihåg att derivatan av en konstant är 0. Därför får vi:

$$2x + 0 + 0 = 2x$$

Vi har alltså att partialderivatan med avseende på x, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, och i föregående exempel så var vårt utgångsläge $x = 25$, därför får vi att partial derivatan med avseende på x i punkten $x = 25$ är lika med $2 \cdot 25 = 50$. Detta kan skrivas med följande notation:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=25} = 2 \cdot 25 = 50$$

Går du tillbaka till föregående exempel så ser vi att funktionsvärdet ökade med $684.5 - 633.5 = 51$ när x ökade från 25 till 26 medans vår partialderivata är 50 vid punkten $x = 25$. Att det skiljer sig beror på att partialderivatan beräknar lutningen med avseende på en variabel i *en* punkt. Med andra ord, partial derivatan med avseende på x talar om hur mycket funktionsvärdet $f(x, y)$ ändras när x ändras marginellt medans vi i exemplet ökade x med en enhet från 25 till 26, därav skillnaden.

Exempel Antag att vi har funktionen $f(x, y) = 2x + x^2y^2$

a) Vi beräknar nu $\frac{\partial f}{\partial x}$ och därför betraktar vi y som konstant, för att göra det super tydligt, sätt $y^2 = k$. Då har vi: $f(x, y) = 2x + k \cdot x^2$ och partialderivatan $\frac{\partial f}{\partial x}$ blir $2 + 2kx$ och substituerar vi tillbaka y^2 så får vi $2 + 2xy^2$.

b) $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + x^2 2y^{2-1} = 2x^2y$.

Exempel Kolla igenom följande video:
`https://www.youtube.com/watch?v=xnhz1Ngr4w8`

Exempel Antag att vi har funktionen $f(x, y, z) = 2x^3 + y + 10z + xy + xyz + 10$. Beräkna partialderivatorerna:

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 0 + 0 + y + yz + 0 = 6x^2 + y + yz$.

b) $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 1 + 0 + x + xz + 0 = 1 + x + xz$.

c) $\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + 0 + 10 + 0 + xy + 0 = 10 + xy$.

2.1 Partialderivata - Uppgifter

Fråga 1 Beräkna partialderivatorerna $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ för funktionerna:

a) $f(x, y) = 20 + 4x - 5y$

b) $f(x, y) = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{2y}{3}$

c) $f(x, y) = (x^2 - y)(1 - xy)$

d) $f(x, y) = 2xy + x^2 + 3$

e) $f(x, y) = 4x + 3 - 5xy - y^2$

Fråga 2 Vi har funktionen $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_1x_2 + 5$.

a) Beräkna och tolka resultatet: $\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{(x_1=2, x_2=5)}$

b) Beräkna och tolka resultatet: $\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{(x_1=9, x_2=3)}$

Fråga 3 Vi har funktionen $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^4 + x_2 + x_3^{-5} + 5x_1x_2x_3 + x_1x_4$.

a) Hur många partialderivatorer finns det?

b) Beräkna samtliga partialderivatorer och evaluera dem i en valfri punkt, hur tolkas resultatet?