

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

TRABALHO DE FORMATURA

Teoria dos Números e Computação: Uma abordagem utilizando problemas de competições de programação

Autor:

Antonio R. de Campos Junior

Supervisor:

Dr. Carlos Eduardo Ferreira

*Tese apresentada em cumprimento dos requisitos para o curso
Bacharel em Ciência da Computação*

Instituto de Matemática e Estatística

21 de outubro de 2015

“To raise new questions, new possibilities, to regard old problems from a new angle, requires creative imagination and marks real advance in science.”

Albert Einstein

Resumo

Teoria dos Números é um vasto ramo da matemática que estuda números inteiros. Números primos, fatorização de números inteiros, funções aritméticas, são alguns dos tópicos mais estudados e também importantes para resolução de problemas computacionais.

Hoje em dia a importância da Teoria dos Números na Computação é inquestionável, e desse modo, esse trabalho vem ilustrar como a teoria pode ser aplicada na criação de algoritmos para resolução de problemas computacionais, em especial problemas de competições de programação.

Equações diofantinas, Congruência Modular, Números de Fibonacci, são alguns dos assuntos que serão abordados nesse trabalho. Após a devida demonstração da teoria serão exibidos alguns problemas de competições de programação que aplicam essa teoria, seguido da implementação e análise do algoritmo que resolve o problema abordado.

Agradecimientos

I like to acknowledge ...

Sumário

1	Divisibilidade	1
1.1	Introdução	1
1.2	Números Primos	2
1.3	Máximo Divisor Comum	2
1.3.1	Algoritmo de Euclides	3
1.3.2	Teorema de Bézout	3
1.4	Crivo de Erastóteles	4
1.5	Problemas Propostos	4
1.5.1	UVA-10407	4
2	Aritmética Modular	7
2.1	Congruência	7
2.2	Congruência Linear	7
2.3	Teoremas de Fermat e do Resto Chinês	8
2.3.1	Teorema de Fermat	8
2.3.2	Teorema do Resto Chinês	8
2.4	Problemas Propostos	8
2.4.1	UVA-10090	8
2.4.2	CodeChef-IITK2P10	9
3	Funções Aritméticas	11
3.1	Φ de Euler	11
3.1.1	Teorema de Euler	12
3.2	Sequência de Fibonacci	12
3.3	Problemas Propostos	14
3.3.1	UVA-11424	14
3.3.2	TJU-3506	15
3.3.3	CodeChef-IITK2P05	15
3.3.4	CodeChef-MODEFB	17
3.3.5	UVA-10311	17
3.3.6	Codeforces-227E	17
4	Conclusão	19
A	Curiosidades da ACM-ICPC	21
B	Juízes Online (Online Judges)	23
B.1	UVa	23
B.2	Topcoder	23
B.3	Codeforces	23
B.4	CodeChef	23
	Bibliografia	25

Lista de Figuras

A.1 Crescimento do número de participantes por ano.	21
---	----

Lista de Tabelas

For/Dedicated to/To my...

Capítulo 1

Divisibilidade

1.1 Introdução

A noção de divisibilidade dos números inteiros é fundamental na **Teoria dos Números**. Nesse seção vamos descrever algumas definições e propriedades que serão utilizados ao longo desse trabalho.

Definição 1 A notação $d|n$ ("*d divide n*"), significa que existe um inteiro q , tal que, $n = dq$. Se $d|n$ dizemos que n é múltiplo de d . Caso n não seja múltiplo de d (ou seja, d não divide n), escrevemos $d \nmid n$.

Corolário 1 $d|n, d|m \Rightarrow d|(n + m)$

Demonstração: Se $d|n$ e $d|m$, então existe inteiros q e k , tal que, $n = qd$ e $m = kd$. Desse modo temos:

$$(n + m) = qd + kd = (q + k)d \Rightarrow d|(n + m) \quad \square$$

Corolário 2 $d|(\frac{n}{m}) \Rightarrow dm|n$

Demonstração:

$$\begin{aligned} d|(\frac{n}{m}) &\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \mid \frac{n}{m} = qd \\ d|(\frac{n}{m}) &\Rightarrow n = q(dm) \Rightarrow dm|n \quad \square \end{aligned}$$

Corolário 3 Dado um subconjunto dos inteiros $S = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_n\}$ ordenado crescentemente, e um número inteiro d , tal que, $d|(S_i - S_{i-1})$, $2 \leq i \leq n$, temos que:

$$d|(S_i - S_j), \forall S_i, S_j \in S.$$

Demonstração: Tome $S_i, S_j \in S$ quaisquer, e sem perda de generalidade assumamos que $S_i \geq S_j$ (ie, $i \geq j$, pois S está ordenado crescentemente).

Como $i \geq j$, tome $r \in \mathbb{N}$ como sendo a diferença entre i e j : $i = j + r$.

Vamos agora provar por indução que $d|(S_{j+r} - S_j)$.

Para $r = 0$ ou $r = 1$ a demonstração segue trivialmente.

Assumamos que o corolário funciona para $(r - 1)$, ie, $d|(S_{j+r-1} - S_j)$.

Temos então que:

$$\begin{aligned} d|(S_{j+r} - S_{j+r-1}) &\Rightarrow d|(S_{j+r} - S_{j+r-1}) + (S_{j+r-1} - S_j) \quad (\triangleright \text{Corolário 1}) \\ d|(S_{j+r} - S_{j+r-1}) &\Rightarrow d|(S_{j+r} - S_j) \quad \square \end{aligned}$$

Corolário 4 O **Corolário 3** funciona mesmo se o conjunto S não estiver ordenado.

Demonstração: Deixaremos a demonstração a cargo do leitor.

Teorema 1 (Teorema da divisão) Para todo número inteiro a e qualquer número inteiro positivo n , existe inteiros únicos q e r , tal que:

$$a = qn + r, 0 \leq r < n$$

O valor q ($q = \lfloor \frac{a}{n} \rfloor$) é chamado de **quociente** da divisão, e o valor r ($r = a \bmod n$) é chamado de **resto** (ou **resíduo**) da divisão.

Demonstração: Suponha que q e r não sejam únicos, ie, que exista q^* e r^* tal que:
 $a = q^*n + r^*, 0 \leq r^* < n$.

$$a = qn + r = q^*n + r^* \Rightarrow (r - r^*) = (q^* - q)n \Rightarrow (r - r^*) \equiv (q^* - q)n \equiv 0 \pmod{n}$$

Porém, como $r \neq r^*$, e tanto r quanto r^* são menores que n , temos que:

$$r \not\equiv r^* \pmod{n} \Rightarrow (r - r^*) \not\equiv 0 \pmod{n}$$

Chegando numa contradição, e assim q e r são únicos \square

Corolário 5 $d|n, d|m \Rightarrow d|(n \bmod m)$

Demonstração:

$$d|n \Rightarrow n = k_1d, k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$d|m \Rightarrow m = k_2d, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$n = qm + (n \bmod m) \Rightarrow (n \bmod m) = n - qm \text{ (} \triangleright \text{ Teorema 1)}$$

$$(n \bmod m) = k_1d - qk_2d = (k_1 - qk_2)d \Rightarrow d|(n \bmod m) \square$$

Corolário 6 $d|m, d|(n \bmod m) \Rightarrow d|n$

Demonstração:

$$d|m \Rightarrow m = k_1d, k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$d|(n \bmod m) \Rightarrow (n \bmod m) = k_2d, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$n = qm + (n \bmod m) \Rightarrow n = qk_1d + k_2d \text{ (} \triangleright \text{ Teorema 1)}$$

$$n = (qk_1 + k_2)d \Rightarrow d|n \square$$

1.2 Números Primos

Definição 2 Todo número inteiro n ($n > 1$) que têm apenas dois divisores distintos (1 e n) é chamado de número primo. Se n ($n > 1$) não for primo, dizemos que n é número composto.

Teorema 2 (Fatoração Única) Um número natural qualquer n , pode ser escrito unicamente como um produto da forma: $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, onde os p_i são números primos, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$, e os números a_i são inteiros positivos.

Demonstração: Deixaremos a demonstração a cargo do leitor. **Dica:** Use o fato de que o conjunto dos primos que divide um número inteiro é único, e fato de que se qualquer potência a_i for alterado o valor de n será alterado.

1.3 Máximo Divisor Comum

Definição 3 O Máximo Divisor Comum de dois inteiros quaisquer a e b (com a ou b diferente de zero), denotado por $MDC(a, b)$, é o maior inteiro que divide ambos a e b . Se $MDC(a, b) = 1$ dizemos que a e b são primos entre si.

Corolário 7 Para números inteiros quaisquer a e b , $MDC(a, b) = MDC(b, a \bmod b)$

Demonstração: Pelo **Corolário 5** e **6**, temos:

$$d|a, d|b \Leftrightarrow d|b, d|(a \bmod b)$$

Assim, qualquer divisor de a e b é também divisor de b e $(a \bmod b)$ (e vice versa). Implicando que o **Máximo Divisor Comum** de a e b é igual ao **Máximo Divisor Comum** de b e $(a \bmod b)$. \square

Corolário 8 $MDC(a, b) = d \Rightarrow MDC(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$

Demonstração: Suponha que $MDC(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = r > 1$. Assim temos:

$$r|\frac{a}{d} \Rightarrow dr|a \text{ (}\triangleright \text{Corolário 2)}$$

$$r|\frac{b}{d} \Rightarrow dr|b \text{ (}\triangleright \text{Corolário 2)}$$

$$r > 1 \Rightarrow dr > d \Rightarrow dr > MDC(a, b)$$

Chegamos então numa contradição, pois dr é divisor comum de a e b , e dr é maior que o **Máximo Divisor Comum** de a e b . \square

Corolário 9 Para números inteiros quaisquer a e b , $MDC(a, b) = MDC(a, a \pm b)$

Demonstração: A prova dessa expressão vem do fato de que qualquer divisor de a e b , é também divisor de $(a \pm b)$.

Corolário 10 Para números inteiros quaisquer a e b , temos:

$$MDC(a, b) = 1 \Rightarrow MDC(a, bk) = MDC(a, k), \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Demonstração: A prova dessa expressão vem do fato de que qualquer divisor d de a e b , é também divisor de k , pois d não divide b ($MDC(a, b) = 1$).

1.3.1 Algoritmo de Euclides

A ideia principal do **Algoritmo de Euclides** é calcular recursivamente o **Máximo Divisor Comum** de dois números baseando-se no **Corolário 7**.

Pseudocódigo:

Algorithm 1 Algoritmo de Euclides

```

1: procedure  $MDC(a, b)$ 
2:   if  $b = 0$  then
3:     return  $a$ 
4:   else
5:     return  $MDC(b, a \bmod b)$ 

```

1.3.2 Teorema de Bézout

Corolário 11 Dado o conjunto de combinações lineares positivas $S := \{x \in \mathbb{Z}, x > 0 \mid x = ma + nb, m, n \in \mathbb{Z}\}$, onde os números a e b são inteiros, e pelo menos um desses números é diferente de zero. Temos então que $S \neq \emptyset$.

Demonstração: As combinações possíveis para a e b são:

$$a > 0 \Rightarrow |a| = 1.a + 0.b$$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = (-1).a + 0.b$$

$$b > 0 \Rightarrow |b| = 0.a + 1.b$$

$$b < 0 \Rightarrow |b| = 0.a + (-1).b$$

Como não temos ambos a e b iguais à zero, então S deve conter pelo menos $|a|$ ou $|b|$, e assim $S \neq \emptyset$ \square

Corolário 12 Dado o conjunto de combinações lineares positivas $S := \{x \in \mathbb{Z}, x > 0 \mid x = ma + nb, m, n \in \mathbb{Z}\}$, onde os números a e b são inteiros, e pelo menos um desses números é diferente de zero. Temos então que o menor número $d \in S$ divide todos elementos de S .

Demonstração: Como $d \in S$, $\exists m, n \in \mathbb{Z} \mid d = ma + nb$.

Tome $x \in S$ qualquer. Pelo **Teorema 1** $x = qd + r$, $0 \leq r < d$.

Suponha que $d \nmid x$, ie, $x \neq qd$ e $0 < r$. Como $x \in S$, $\exists m^*, n^* \in \mathbb{Z} \mid x = m^*a + n^*b$, e assim:

$$x = m^*a + n^*b, x = qd + r \Rightarrow r = m^*a + n^*b - qd = m^*a + n^*b - q(ma + nb)$$

$$\Rightarrow r = (m^* - qm)a + (n^* - qn)b \Rightarrow r \in S, \text{ pois } r > 0$$

Chegando numa contrdição, pois $r \in S$, $d \in S$, $r < d$ e d é o menor elemento em S .

Desse modo, temos que d divide todos os elementos de S . \square

Teorema 3 (Teorema de Bézout) $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ (com pelo menos um dos dois números diferente de zero), $\exists x, y \in \mathbb{Z} \mid ax + by = \text{mdc}(a, b)$.

Demonstração: Tome o conjunto das combinações lineares de a e b :

$$S := \{x \in \mathbb{Z}, x > 0 \mid x = ma + nb, m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Pelo **Corolário 11** sabemos que $S \neq \emptyset$. Como S contém somente números positivos e não é vazio, S está limitado inferiormente por zero e assim, S tem um elemento mínimo que chamaremos de d .

Como $d \in S$, então existe $u, v \in \mathbb{Z}$, tal que, $d = ua + vb$. Pelo **Corolário 12**, sabemos que d divide todos elementos em S , em particular:

$$d \text{ divide } |a| \text{ e } |b| \Rightarrow d \mid \text{MDC}(a, b) \Rightarrow 0 < d \leq \text{MDC}(a, b)$$

Por outro lado, $\text{MDC}(a, b)$ também divide a e b :

$$\text{MDC}(a, b) \mid a \text{ e } \text{MDC}(a, b) \mid b \Rightarrow \text{MDC}(a, b) \mid (ua + vb)$$

$$\Rightarrow \text{MDC}(a, b) \mid d \Rightarrow \text{MDC}(a, b) \leq d$$

$$\text{MDC}(a, b) \leq d \text{ e } d \leq \text{MDC}(a, b) \Rightarrow \text{MDC}(a, b) = d \Rightarrow \text{MDC}(a, b) \in S \square$$

1.4 Crivo de Erastóteles

O *Crivo de Erastóteles* é um algoritmo criado pelo matemático **Erastóteles** (a.C. 285-194 a.C.) para o cálculo de números primos até um certo valor limite N . O algoritmo mantém uma tabela com N elementos, e para cada primo, começando pelo número 2, marca na tabelo os números compostos múltiplos desses primos. Desse modo, ao final do algoritmo, os elementos não marcados são números primos.

Pseudocódigo:

Análise: TODO

1.5 Problemas Propostos

1.5.1 UVA-10407

10407 - Simple Division

Algorithm 2 Crivo de Erastótenes para o cálculo de números primos

```

1: procedure CRIVOERASTÓTENES (N)
2:    $isPrime[] \leftarrow \text{new Array}[N]$   $\triangleright isPrime[]$  é um vetor booleano
3:   for ( $p = 2; p \leq N; p++$ ) do
4:      $isPrime[p] \leftarrow true$ 
5:   for ( $p = 2; p^2 \leq N; p++$ ) do
6:     if  $isPrime[p] = false$  then
7:       continue
8:     for ( $n = p^2; n \leq N; n = n + p$ ) do
9:        $isPrime[n] \leftarrow false$ 
10:  return  $isPrime[]$ 

```

Resumo: Tome $P(S) := \{x \in \mathbb{Z} \mid \forall a, b \in S, a \equiv b \pmod{x}\}$ em que $S \subset \mathbb{Z}$.

O problema consiste em encontrar o valor máximo de $P(S)$ dado um conjunto S .

Solução: Seja $S = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_n\}$, com $n = |S|$, o conjunto dado pelo problema (assumiremos que os valores de S estão ordenados crescentemente).

Tome um número qualquer $d \in P(S)$. Por definição temos que $\forall S_i, S_j \in S, S_i \equiv S_j \pmod{d} \Rightarrow (S_i - S_j) \equiv 0 \pmod{d} \Rightarrow d \mid (S_i - S_j)$.

Pelo **Corolário 3** sabemos que:

$$d \mid (S_i - S_{i-1}), \forall i \in \mathbb{N}, 2 \leq i \leq n \Rightarrow d \mid (S_i - S_j), \forall S_i, S_j \in S \Rightarrow d \in P(S).$$

E desse modo, para calcular o valor máximo de $P(S)$ só precisamos calcular o Máximo Divisor Comum das diferenças $(S_i - S_{i-1})$ com i variando de 2 à n \square .

Pseudocódigo:**Algorithm 3** Simple Division

```

1: procedure GETMAXIMUMVALUE (S)
2:    $S \leftarrow \text{sort}(S)$   $\triangleright \text{sort}(X)$  retorna o conjunto X ordenado.
3:    $maxValue \leftarrow 0$ 
4:   for  $i := 2$  to  $|S|$  do
5:      $maxValue \leftarrow MDC(maxValue, S_i - S_{i-1})$ 
6:   return  $maxValue$ 

```

Capítulo 2

Aritmética Modular

2.1 Congruência

Definição 4 Para a e b inteiros, dizemos que a é congruente à b módulo m ($a \equiv b \pmod{m}$), $m > 0$) se a e b produzem o mesmo resto na divisão por m (ie, $m|(a - b)$). Caso contrário ($m \nmid (a - b)$), dizemos que a não é congruente à b módulo m ($a \not\equiv b \pmod{m}$).

Definição 5 Dizemos que o conjunto de inteiros $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ é um sistema completo de resíduos módulo n se:

1. $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists! s_i \in S \mid a \equiv s_i \pmod{n}$
2. $s_i \not\equiv s_j \pmod{n}$ para $i \neq j$

Teorema 4 TODO reescrever theorem Se k inteiros r_1, r_2, \dots, r_k formam um sistema completo de resíduos módulo m ; então $k=m$

Demonstração: TODO

Teorema 5 Dados inteiros n, m com $MDC(m, n) = 1$, temos que os elementos $r, m+r, 2m+r, \dots, (n-1)m+r$ formam um sistema completo de resíduos módulo n .

Demonstração: TODO

2.2 Congruência Linear

Definição 6 Congruências da forma $ax \equiv b \pmod{m}$, onde a, b e m são inteiros e x é uma incógnita, são chamadas de Congruências Lineares.

Corolário 13 $ax \equiv b \pmod{m}$ tem solução $\Rightarrow MDC(a, m) | b$

Demonstração: Suponha que $\exists x \in \mathbb{Z}$, tal que $ax \equiv b \pmod{m}$, assim temos:

$$\begin{aligned} ax \equiv b \pmod{m} &\Rightarrow m|(b - ax) \Rightarrow \exists! r \in \mathbb{Z} \text{ tal que } (b - ax) = mr \\ &\Rightarrow b = mr + ax \Rightarrow MDC(a, m) | b, \text{ pois } MDC(a, m) \text{ divide tanto } a \text{ como } m. \quad \square \end{aligned}$$

Corolário 14 $ax \equiv b \pmod{m}$ tem solução $\Leftrightarrow MDC(a, m) | b$

Demonstração:

$$\begin{aligned} MDC(a, m) | b &\Rightarrow (ax + my) | b \quad (\triangleright \text{Teorema 3}) \\ &\Rightarrow \exists! r \in \mathbb{Z} \text{ tal que, } b = (ax + my)r \Rightarrow b = (xr)a + (yr)m \\ &\Rightarrow b \equiv xra + yrm \pmod{m} \Rightarrow b \equiv xra \pmod{m} \\ &\text{E assim, a Congruência Linear } az \equiv b \pmod{m}, \text{ tem solução } z = xr. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 6 $ax \equiv b \pmod{m}$ tem solução $\Leftrightarrow MDC(a, m) | b$

Demonstração: Segue trivialmente dos Corolários 13 e 14

2.3 Teoremas de Fermat e do Resto Chinês

2.3.1 Teorema de Fermat

Teorema 7 (Pequeno Teorema de Fermat) *Dado um número primo qualquer p , temos que:*
 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \forall a \in \mathbb{Z} \mid \text{MDC}(a, p) = 1$

Demonstração: Deixaremos a demonstração a cargo do leitor.

Teorema 8 *Dados os inteiros quaisquer a, b, c e um número primo p , com $\text{MDC}(a, p) = 1$, temos que:*

$$a^{b^c} \equiv a^{b^c \bmod (p-1)} \pmod{p}$$

Demonstração: Deixaremos a demonstração a cargo do leitor.

2.3.2 Teorema do Resto Chinês

Teorema 9 (Teorema do Resto Chinês) *Tome o sistema de congruências lineares:*

$$a_1x \equiv c_1 \pmod{m_1}$$

$$a_2x \equiv c_2 \pmod{m_2}$$

$$a_3x \equiv c_3 \pmod{m_3}$$

...

$$a_nx \equiv c_n \pmod{m_n}$$

Em que $c_i \in \mathbb{Z}$, $\text{MDC}(a_i, m_i) = 1$, e $\text{MDC}(m_i, m_j) = 1$ para $i \neq j$. Nessas condições o sistema acima tem solução única módulo M , em que $M = m_1m_2m_3\dots m_n$.

Demonstração: Deixaremos a demonstração a cargo do leitor.

2.4 Problemas Propostos

2.4.1 UVA-10090

10090 - Marbles

Resumo: É dado um número inteiro n ($0 < n \leq 10^8$). O problema consiste em verificar se n pode, ou não pode, ser escrito como a soma de dois números primos. E em caso afirmativo encontrar o valor desses dois primos.

Solução:

Pseudocódigo:

Algorithm 4 Marbles

1: **procedure** FINDTWOPRIMESUM (N)

Análise:

2.4.2 CodeChef-IITK2P10

IITK2P10 - Chef and Pattern

Resumo: Tome a seguinte função $f_K : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}$:

$$f_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ K & \text{se } x = 2 \\ \prod_{i=1}^{x-1} f_K(i) & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

São dados dois número inteiro N, K ($1 \leq N \leq 10^9, 1 \leq K \leq 10^5$). O problema consiste em calcular a expressão: $f_K(N) \bmod p$, em que $p = (10^9 + 7)$.

Solução: Escrevendo os valores dos primeiros termos que a função assume, temos: $f(1) = 1, f(2) = K, f(3) = K, f(4) = K^2, f(5) = K^4, f(6) = K^8, f(7) = K^{16}$.

Provaremos, por indução, que $f_K(N) = K^{2^{N-3}}, N \geq 3$.

Para os primeiros termos essa expressão é trivialmente verificada.

Assuma que a expressão funciona para algum número natural qualquer $(R-1) \geq 3$ ($f_K(R-1) = K^{2^{R-4}}$).

Nessas condições temos que:

$$f_K(R) = \prod_{i=1}^{R-1} f_K(i) = 1 \cdot K \cdot \prod_{i=3}^{R-1} f_K(i) = K \prod_{i=3}^{R-1} K^{2^{i-3}} = K \prod_{j=0}^{R-4} K^{2^j}$$

$$f_K(R) = K K^{\sum_{j=0}^{R-4} 2^j} = K K^{2^{R-3}-1} = K^{2^{R-3}} \quad \square$$

Para calcular o valor de $f_K(N) \bmod p$, podemos aplicar o **Teorema 8**, já que p é um número primo e $\text{MDC}(p, K) = 1$:

$$f_K(N) \bmod p = K^{2^{N-3}} \bmod p = K^{2^{N-3} \bmod (p-1)} \bmod p$$

Reduzindo o problema, dessa maneira, em calcular: $K^{2^{N-3} \bmod (10^9 + 7)}$.

Pseudocódigo:

Algorithm 5 Chef and Pattern

```

1: procedure F (N, K)
2:    $p \leftarrow (10^9 + 7)$ 
3:    $exp \leftarrow \text{EXPMOD}(2, N - 3, p - 1)$   $\triangleright exp = 2^{N-3} \bmod (p - 1)$ 
4:    $solution \leftarrow \text{EXPMOD}(K, exp, p)$   $\triangleright solution = K^{2^{N-3} \bmod (p-1)} \bmod p$ 
5:   return solution

```

Análise: Como vimos anteriormente, as linhas 3 e 4 do algoritmo consomem tempo proporcional à $O(n \log n)$, e assim a complexidade total é $O(n \log n)$.

Capítulo 3

Funções Aritméticas

3.1 Φ de Euler

Definição 7 A Função Totiente de Euler, denotada por $\Phi(n)$, é a função aritmética que conta o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são primos entre si com n .

$$\Phi(n) := |\{x \in \mathbb{N}^* \mid \text{MDC}(x, n) = 1\}|$$

Teorema 10 $\Phi(n)$ é função multiplicativa, ie, $\Phi(mn) = \Phi(m)\Phi(n)$ para $\text{MDC}(m, n) = 1$.

Demonstração: A demonstração asseguir foi retirada livro: OLIVEIRA SANTOS, José Plínio de. *Introdução à Teoria dos Números*. IMPA, 1998. 72 p.

Vamos dispor os números de 1 até mn da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & (m+1) & (2m+1) & \dots & (n-1)m+1 \\ 2 & (m+2) & (2m+2) & \dots & (n-1)m+2 \\ 3 & (m+3) & (2m+3) & \dots & (n-1)m+3 \\ \vdots & & & & \\ m & 2m & 3m & \dots & nm \end{array}$$

Se na linha r , onde estão os termos $r, m+r, 2m+r, \dots, (n-1)m+r$, tivermos $\text{MDC}(m, r) = d > 1$, então nenhum termo nesta linha será primo com mn , uma vez que estes termos, sendo da forma $km+r, 0 \leq k \leq n-1$, são todos divisíveis por d que é o **Máximo Divisor Comum** de m e r . Logo, para encontrarmos os inteiros desta tabela que são primos com mn , devemos olhar na linha r somente se $\text{MDC}(m, r) = 1$. Portanto temos $\Phi(m)$ linhas onde todos os elementos são primos com m .

Devemos, pois, procurar em cada uma dessas $\Phi(m)$ linhas, quantos elementos são primos com n , uma vez que todos são primos com m . Como $\text{MDC}(m, n) = 1$ os elementos $r, m+r, 2m+r, \dots, (n-1)m+r$ formam um sistema completo de resíduos módulo n (**Teorema 5**). Logo, cada uma destas linhas possui $\Phi(n)$ elementos primos com n e, portanto, como eles são primos com m , eles são primos com mn . Isto nos garante que $\Phi(mn) = \Phi(m)\Phi(n)$. \square

Teorema 11 $\Phi(p^k) = (p^k - p^{k-1})$, para p primo e k inteiro positivo.

Demonstração: Como p é um número primo, para qualquer inteiro n , os únicos valores possíveis para $\text{MDC}(p^k, n)$ são: $1, p, p^2, \dots, p^k$, e desse modo, se $\text{MDC}(p^k, n) \neq 1$ temos que $p|n$ (n é múltiplo de p). Assim, o quantidade de números não-primos e menores do que p^k é p^{k-1} .

Logo, temos que: $\Phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ \square

Teorema 12 (Fórmula Produto de Euler) $\Phi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p}) = n \prod_{p|n} (\frac{p-1}{p})$

Demonstração:

$$\Phi(n) = \Phi(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}) \quad (\triangleright \text{Teorema 2})$$

$$\Phi(n) = \Phi(p_1^{a_1}) \Phi(p_2^{a_2}) \dots \Phi(p_k^{a_k}) \quad (\triangleright \text{Teorema 10})$$

$$\Phi(n) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1})(p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}) \dots (p_k^{a_k} - p_k^{a_k-1}) \quad (\triangleright \text{Teorema 11})$$

$$\Phi(n) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} (1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2) \dots (1 - 1/p_k)$$

$$\Phi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p}) \quad \square$$

Pseudocódigo:

Algorithm 6 Calcula os primeiros N termos da função Φ

```

1: procedure PHI(N)
2:    $\Phi[] \leftarrow \text{newArray}[N]$ 
3:   for ( $p = 1; p \leq N; p++$ ) do
4:      $\Phi[p] \leftarrow p$ 
5:   for ( $p = 2; p \leq N; p++$ ) do
6:     if  $\Phi[p] \neq p$  then                                      $\triangleright \Phi[p] \neq p \Leftrightarrow p$  não é primo
7:       continue
8:     for ( $n = p; n \leq N; n = n + p$ ) do
9:        $\Phi[n] \leftarrow \Phi[n] (\frac{p-1}{p})$ 
10:  return  $\Phi[]$ 

```

Corolário 15 $\Phi(n^k) = n^{k-1} \Phi(n)$, para inteiros positivos n e k .

Demonstração:**3.1.1 Teorema de Euler**

Teorema 13 (Teorema de Euler) Dados números inteiros a e n primos entre si, temos que:

$$a^{\Phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Demonstração: TODO usa residuos completo mod m

3.2 Sequência de Fibonacci

Definição 8 A sequência de Fibonacci Fib_n é uma sequência de números inteiros positivos em que cada termo subsequente corresponde a soma dos dois termos anteriores.

$$Fib_n := \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ Fib_{n-1} + Fib_{n-2} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Corolário 16 $MDC(Fib_n, Fib_{n-1}) = 1$, para $n \geq 2$

Demonstração: Tome os primeiros termos da sequência de fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, Claramente a expressão acima funciona para os primeiros termos. Assuma que a expressão funciona para um inteiro qualquer $(k-1) > 2$ ($MDC(Fib_{k-1}, Fib_{k-2}) = 1$).

Provaremos por indução que a expressão sempre funciona.

$$MDC(Fib_k, Fib_{k-1}) = MDC(Fib_{k-1} + Fib_{k-2}, Fib_{k-1})$$

$$MDC(Fib_{k-1} + Fib_{k-2}, Fib_{k-1}) = MDC(Fib_{k-2}, Fib_{k-1}) \text{ (}\triangleright \text{ Pelo Corolário 9)}$$

Logo, temos que:

$$MDC(Fib_k, Fib_{k-1}) = MDC(Fib_{k-2}, Fib_{k-1}) = 1 \quad \square$$

Corolário 17 $Fib_{m+n} = Fib_m Fib_{n+1} + Fib_{m-1} Fib_n$

Demonstração: Provaremos esse corolário por indução no índice n .

A base da indução será, $n = 2$:

$$Fib_{m+2} = Fib_m + Fib_{m+1} = Fib_m + Fib_m + Fib_{m-1}$$

$$Fib_{m+2} = 2Fib_m + 1Fib_{m-1} = Fib_m Fib_3 + Fib_{m-1} Fib_2$$

Assumindo que a expressão funciona para todos os valores menores que n , temos:

$$Fib_{m+n} = Fib_{m+n-2} + Fib_{m+n-1}$$

$$Fib_{m+n} = (Fib_m Fib_{n-1} + Fib_{m-1} Fib_{n-2}) + (Fib_m Fib_n + Fib_{m-1} Fib_{n-1})$$

$$Fib_{m+n} = Fib_m (Fib_{n-1} + Fib_n) + Fib_{m-1} (Fib_{n-2} + Fib_{n-1})$$

$$Fib_{m+n} = Fib_m Fib_{n+1} + Fib_{m-1} Fib_n \quad \square$$

Teorema 14 $MDC(Fib_m, Fib_n) = Fib_{MDC(m,n)}, \forall m, n \in \mathbb{Z}$

Demonstração:

$$MDC(Fib_m, Fib_n) = MDC(Fib_m, Fib_{qm+r}) \text{ (}\triangleright \text{ Teorema 1, } n = qm + r, 0 \leq r < n)$$

$$MDC(Fib_m, Fib_n) = MDC(Fib_m, Fib_{qm} Fib_{r+1} + Fib_{qm-1} Fib_r) \text{ (}\triangleright \text{ Corolário 17).}$$

$$MDC(Fib_m, Fib_n) = MDC(Fib_m, Fib_{qm-1} Fib_r)$$

Pelo **Corolário 10** e sabendo que $MDC(Fib_m, Fib_{qm-1}) = 1$, temos:

$$MDC(Fib_m, Fib_n) = MDC(Fib_m, Fib_r)$$

$$MDC(Fib_m, Fib_n) = MDC(Fib_m, Fib_{n \bmod m})$$

Se tirarmos o símbolo funcional Fib , a última equação forma um passo do **Algoritmo de Euclides** ($MDC(m, n) = MDC(m, n \bmod m)$).

Podemos continuar esse processo até que o resto r se torne 0. O último resto não-nulo será exatamente o Máximo Divisor Comum dos dois números originais.

Desse modo, se aplicar-mos o **Algoritmo de Euclides** em Fib_m e Fib_n funciona da mesma maneira que se aplicar-mos aos índices m e n . E assim, ao chegarmos na base da recursão, $MDC(m, n) = MDC(s, 0) = s$, teremos também: $MDC(Fib_m, Fib_n) = MDC(Fib_s, 0) = Fib_s = Fib_{MDC(m,n)} \quad \square$.

Teorema 15 $Fib_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$

Demonstração:

A demonstração asseguir foi baseada no livro: OLIVEIRA SANTOS, José Plínio de. *Introdução à Teoria dos Números*. IMPA, 1998. 85 p.

$$Fib_{n+1} = Fib_n + Fib_{n-1}$$

$$Fib_{n+1} - k Fib_n = Fib_n + Fib_{n-1} - k Fib_n$$

$$Fib_{n+1} - k Fib_n = Fib_n + Fib_{n-1} - k Fib_n + (k Fib_{n-1} - k Fib_{n-1}) + (k^2 Fib_{n-1} - k^2 Fib_{n-1})$$

$$Fib_{n+1} - k Fib_n = (1 - k)(Fib_n - k Fib_{n-1}) + (1 + k - k^2) Fib_{n-1}$$

Se denotarmos as raízes de $k^2 - k - 1 = 0$ por k_1 e k_2 , teremos que $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$$Fib_{n+1} - k_1 Fib_n = k_2 (Fib_n - k_1 Fib_{n-1})$$

$$Fib_{n+1} - k_2 Fib_n = k_1 (Fib_n - k_2 Fib_{n-1})$$

Por iterações sucessivas dessas duas equações teremos que:

$$Fib_{n+1} - k_1 Fib_n = k_2^n (Fib_1 - k_1 Fib_0) = k_2^n$$

$$Fib_{n+1} - k_2 Fib_n = k_1^n (Fib_1 - k_2 Fib_0) = k_1^n$$

Subtraindo membro à membro nos dá:

$$Fib_n(k_2 - k_1) = k_2^n - k_1^n$$

$$Fib_n = \frac{k_2^n - k_1^n}{k_2 - k_1}$$

$$Fib_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$Fib_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) \square$$

3.3 Problemas Propostos

3.3.1 UVA-11424

11424 - GCD - Extreme (I)

Resumo: É dado um inteiro positivo N ($1 < N < 200001$). O problema consiste em calcular o mais rápido possível a expressão:

$$G(N) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N MDC(i, j).$$

Solução: Trivialmente a expressão acima pode ser calculada em tempo proporcional à $O(n^2 \log(N))$, porém essa solução consome muito tempo e não será aceita no Judge Online. Vamos então mostrar uma solução mais eficiente.

Primeiramente reescrevemos a expressão acima da seguinte maneira:

$$G(N) = \sum_{j=2}^N \sum_{i=1}^{j-1} MDC(i, j) \quad (\triangleright \text{Observe que as expressões são equivalentes}).$$

$$\text{Tome agora a função } F(M) = \sum_{i=1}^{M-1} MDC(i, M) \Rightarrow G(N) = \sum_{j=2}^N F(j).$$

Sabemos que todos os valores resultantes do método $MDC(i, M)$ calculados em $F(M)$ são divisores de M . Desse modo, podemos reescrever $F(M)$ da seguinte maneira:

$$F(M) = \sum_{i=1}^{M-1} MDC(i, M) = \sum_{l=1}^n \lambda_l d_l, \text{ em que, } d_1, d_2, \dots, d_n \text{ são os divisores de } M, \lambda_l \text{ é o número de vezes que o divisor } d_l \text{ aparece na somatória } \sum_{i=1}^{M-1} MDC(i, M), \text{ e } n \text{ é o número de divisores de } M.$$

Pelo Corolário 8 temos que: $MDC(i, M) = d_l \Rightarrow MDC(i/d_l, M/d_l) = 1$. Logo o número de vezes que o divisor d_l aparece na somatória, será igual ao número de primos entre si com (M/d_l) , ie, $\lambda_l = \Phi(M/d_l)$.

Reescrevendo novamente $F(M)$, temos:

$$F(M) = \sum_{i=1}^{M-1} MDC(i, M) = \sum_{l=1}^n \lambda_l d_l = \sum_{l=1}^n \Phi(M/d_l) d_l.$$

$$G(N) = \sum_{j=2}^N \sum_{l=1}^n \Phi(j/d_l) d_l \square.$$

Pseudocódigo:

Análise: O método $PHI(N)$ na linha 2 consome tempo proporcional à $O(N\sqrt{N})$.

O número de divisores de j é proporcional à $O(\sqrt{N})$, já que $j \leq N$.

Assim a complexidade das linhas 4, 5, 6 do algoritmo é $O(N\sqrt{N})$.

Complexidade final do algoritmo: $O(N\sqrt{N})$.

OBS.: Para resolver o problema no Judge Online será preciso armazenar as soluções usando **Programação Dinâmica**.

Algorithm 7 GCD - Etreme(I)

```

1: procedure G (N)
2:    $\Phi[] \leftarrow PHI(N)$ 
3:    $solution \leftarrow 0$ 
4:   for  $j := 2$  to  $N$  do
5:     for each divisor  $d$  de  $j$  do
6:        $solution \leftarrow solution + \Phi[j/d]d$ 
7:   return  $solution$ 

```

3.3.2 TJU-3506**3506 - Euler Function**

Resumo: São dados três números positivos n, m ($1 < n < 10^7, 1 < m < 10^9$) e $d = 201004$. O problema consiste em calcular a expressão: $\Phi(n^m) \bmod d$.

Solução: Pelo **Corolário 15**, temos:

$$\Phi(n^m) \bmod d = (n^{m-1} \Phi(n)) \bmod d$$

$$\Phi(n^m) \bmod d = ((n^{m-1} \bmod d)(\Phi(n)) \bmod d) \bmod d$$

Desse modo, podemos calcular a primeiro fator do produto ($n^{m-1} \bmod d$) usando $EXPMOD()$ e a segundo fator com o método $PHI()$.

Pseudocódigo:

Algorithm 8 Euler Functions

```

1: procedure PhiEulerPotential( $n, m, d$ )
2:    $\Phi[] \leftarrow PHI(n)$ 
3:    $exp \leftarrow EXPMOD(n, m - 1, d)$ 
4:    $solution \leftarrow (exp \Phi[n]) \bmod d$ 
5:   return  $solution$ 

```

Análise: As linhas 3 e 4 do algoritmo consomem tempo proporcional à $O(\log m)$ e $O(1)$ respectivamente. Se precalcular-mos o vetor $\Phi[]$, temos que a complexidade total para calcular cada instância do problema será: $O(\log m)$

3.3.3 CodeChef-IITK2P05**IITK2P05 - Factorization**

Resumo: É dado um inteiro N ($2 \leq N \leq 10^{18}$) e o valor de $\Phi(N)$. O problema consiste em fatorizar N .

Solução: A solução trivial para fatorar N consome tempo proporcional à $O(\sqrt{N})$ (veja X), porém para uma entrada na ordem de 10^{18} precisamos de um algoritmo mais eficiente.

Se N for primo, ie, $\Phi(N) = N - 1$, já temos a solução.

Assuma então que N é um número composto. Primeiro vamos iterar nos primeiros $\sqrt[3]{N}$ inteiros e remover todos os fatores primos de N nesse intervalo. Tome M como sendo o valor resultante.

Imagine que M tenha três ou mais fatores primos. Sabemos que M não tem nenhum fator primo menor que $\sqrt[3]{N}$, temos que: $M > (\sqrt[3]{N})^3 \Rightarrow M > N$ (contradição). Desse modo, temos que M tem no máximo dois fatores primos, e esses valores são maiores que $\sqrt[3]{N}$.

- **Caso 1:** M tem só um fator primo, ie, M é primo: Basta checar se $\Phi(M) = M - 1$
- **Caso 2:** M tem dois fatores primos iguais, $M = p^2$: Basta verificar se M é um quadrado perfeito. Pode ser feito facilmente com busca binária.
- **Caso 3:** M tem dois fatores primos distintos, $M = pq$: Se $M = pq$ então $\Phi(M) = (p - 1)(q - 1)$. Temos então um sistema com duas equações e duas incógnitas. Se resolvermos o sistema encontraremos a fatoração de M e assim a fatoração de N .

O único problema agora é calcular $\Phi(M)$ a partir de $\Phi(N)$. Assuma que $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} M$, com $k \geq 0$ e p_i os fatores primos distintos de N removidos na primeira etapa do algoritmo. Temos então:

$$\begin{aligned}
 N &= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} M \Rightarrow \Phi(N) = \Phi(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} M) \\
 N &= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} M \Rightarrow \Phi(N) = \Phi(p_1^{a_1}) \Phi(p_2^{a_2}) \dots \Phi(p_k^{a_k}) \Phi(M) \quad (\triangleright \text{Teorema 10}) \\
 \Rightarrow \Phi(N) &= (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1})(p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}) \dots (p_k^{a_k} - p_k^{a_k-1}) \Phi(M) \quad (\triangleright \text{Teorema 11}) \\
 \Rightarrow \Phi(M) &= \frac{\Phi(N)}{(p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1})(p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}) \dots (p_k^{a_k} - p_k^{a_k-1})}
 \end{aligned}$$

Pseudocódigo:

Algorithm 9 Fatoração de N

```

1: procedure Factorization( $N, \Phi_N$ )
2:    $S \leftarrow \emptyset$   $\triangleright S$  contém os fatores primos de  $N$ 
3:    $M \leftarrow N$ 
4:    $\Phi_M \leftarrow \Phi_N$ 
5:
6:   if  $\Phi_N = N - 1$  then  $\triangleright$  Se  $N$  for primo
7:      $S \leftarrow S \cup \{N\}$ 
8:     return  $S$ 
9:
10:  for each  $p$  primo menor igual à  $\sqrt[3]{N}$  do
11:    while  $M \equiv 0(\text{mod } p)$  do
12:       $M \leftarrow \frac{M}{p}$ 
13:       $S \leftarrow S \cup \{p\}$ 
14:
15:  for each  $p \in S$  do
16:     $\Phi_M \leftarrow \frac{\Phi_M}{p^a - p^{a-1}}$   $\triangleright a :=$  número de vezes que o primo  $p$  é inserido em  $S$ 
17:
18:  if  $\Phi_M = M - 1$  then  $\triangleright$  Se  $M$  for primo
19:     $S \leftarrow S \cup \{M\}$ 
20:    return  $S$ 
21:
22:   $(p, q) \leftarrow \text{System}(M, \Phi_M)$   $\triangleright$  Resolve o sistema de 2 equações e 2 incógnitas
23:   $S \leftarrow S \cup \{p, q\}$ 
24:  return  $S$ 

```

Análise: O laço da linha 10 consome tempo proporcional à $O(\sqrt[3]{N})$. Já o laço da linha 11 consome tempo proporcional à $O(\log_p N)$, pois tem no máximo a iterações (a é o número de vezes que o fator primo p aparece em N) e assim, $p^a < N \Rightarrow a < \log_p N$.

As linhas 15-16 rodam em $O(\log_p N)$, já que o número máximo de elementos distintos em S é $\log_p N$ (p é o menor primo que divide N). E as linhas 18-23 rodam em $O(1)$.

Assim, o algoritmo total consome tempo proporcional à $O(\sqrt[3]{N} \log N)$. Observe que esse algoritmo é bem mais eficiente que o algoritmo trivial para fatoração $O(\sqrt{N})$.

3.3.4 CodeChef-MODEFB

71544 - Another Fibonacci

Resumo: São dados dois números inteiros N, K ($1 \leq N \leq 50000, 1 \leq K \leq N$) e um conjunto $S \subset \mathbb{N}$ com N elementos, tal que, $\forall s \in S, 1 \leq s \leq 10^9$.

Tome a seguinte função:

$$F(S) = \sum_{A \subset S \text{ e } |A|=K} \text{Fib}(\text{sum}(A)), \text{ onde } \text{sum}(A) = \sum_{a \in A} a.$$

O problema consiste em calcular a expressão: $F(S) \bmod 99991$

Solução:

Pseudocódigo:

Algorithm 10 Another Fibonacci

1: **procedure** F (S)

Análise:

3.3.5 UVA-10311

10311 - Goldbach and Euler

Resumo: É dado um número inteiro n ($0 < n \leq 10^8$). O problema consiste em verificar se n pode, ou não pode, ser escrito como a soma de dois números primos. E em caso afirmativo encontrar o valor desses dois primos.

Solução:

Pseudocódigo:

Algorithm 11 Goldbach and Euler

1: **procedure** FINDTWOPRIMESUM (N)

Análise:

3.3.6 Codeforces-227E

227E - Anniversary

Resumo:

Solução:

Pseudocódigo:

Algorithm 12 Anniversary

1: **procedure** FINDTWOPRIMESUM (N)

Análise:

Capítulo 4

Conclusão

...

Apêndice A

Curiosidades da ACM-ICPC

ACM-ICPC (International Collegiate Programming Contest) é uma competição de programação de várias etapas e baseada em equipe. O principal objetivo é encontrar algoritmos eficientes, que resolvem os problemas abordados pela competição, o mais rápido possível.

Nos últimos anos a ACM-ICPC teve um crescimento significativo. Se compararmos o número de competidores, temos que de 1997 (ano em que começou o patrocínio da IBM) até 2014 houve um aumento maior que 1500%, totalizando 38160 competidores de 2534 universidades em 101 países ao redor do mundo.

Para mais informações sobre as competições passadas acesse icpc.baylor.edu.

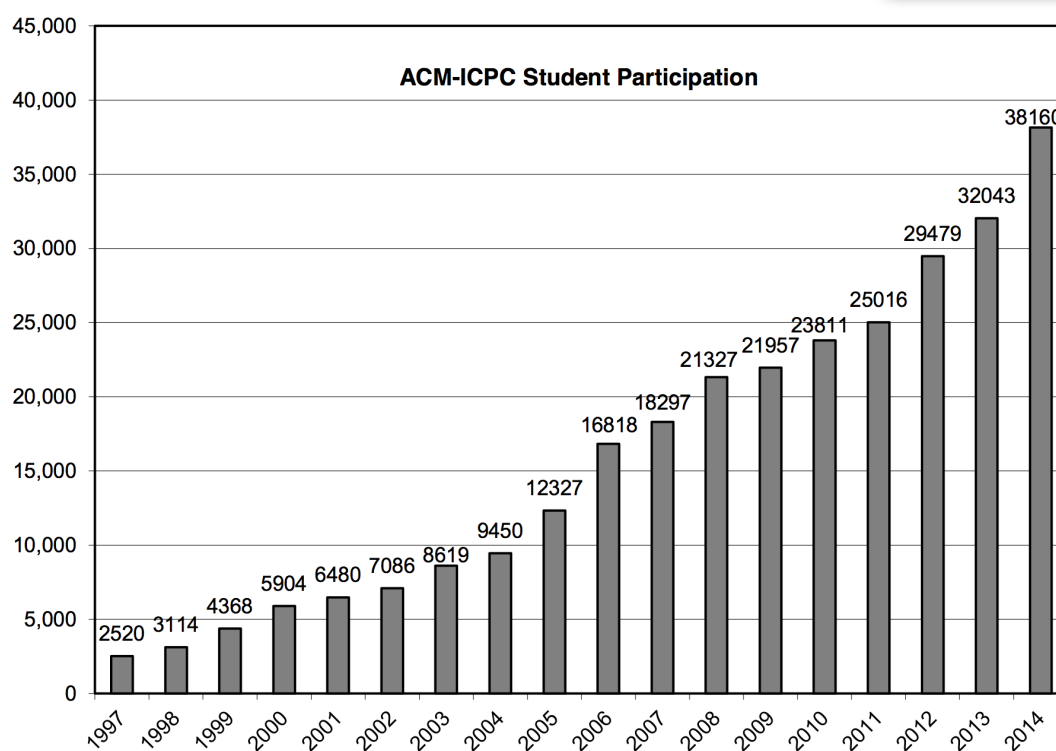


FIGURA A.1: Crescimento do número de participantes por ano.

Apêndice B

Juízes Online (Online Judges)

Online Judges são plataformas online que contam com um banco de dados com diversos tipos de problemas de competições de programação, e com um sistema de correção online.

Para afirmar que sua solução está correta, basta enviar o código fonte da sua solução (em geral escrito em C++ ou JAVA) para uma dessas plataformas.

Alguns desses Online Judges são citados em seguida.

B.1 UVa

Criado em 1995 pelo matemático Miguel Ángel Revilla, é atualmente um dos Online Judges mais famoso entre os participantes da ACM-ICPC.

É hospedado pela [Universidade de Valladolid](https://uva.onlinejudge.org/) e conta com mais de 100000 usuários registrados.

Site: <https://uva.onlinejudge.org/>

B.2 Topcoder

Empresa que administra competições de programação nas linguagens Java, C++ e C#.

É responsável também por aplicar competições de design e desenvolvimento de software.

Site: <https://www.topcoder.com/>

B.3 Codeforces

Site Russo dedicado competições de programação.

Em 2013, Codeforces superou Topcoder com relação ao número de usuários ativos, apesar de ter sido criado quase 10 anos depois.

O estilo de problemas que esse site aplica é similar aos problemas encontrados na ACM-ICPC.

Site: <http://codeforces.com/>

B.4 CodeChef

Iniciativa educacional sem fins lucrativos lançada em 2009 pela [Direct](https://www.codechef.com/).

É uma plataforma de programação competitiva que suporta mais de 35 linguagens de programação.

Site: <https://www.codechef.com/>

Bibliografia

- Arnold, A. S. et al. (1998). "A Simple Extended-Cavity Diode Laser". Em: *Review of Scientific Instruments* 69.3, pp. 1236–1239. URL: <http://link.aip.org/link/?RSI/69/1236/1>.
- Hawthorn, C. J., K. P. Weber e R. E. Scholten (2001). "Littrow Configuration Tunable External Cavity Diode Laser with Fixed Direction Output Beam". Em: *Review of Scientific Instruments* 72.12, pp. 4477–4479. URL: <http://link.aip.org/link/?RSI/72/4477/1>.
- Wieman, Carl E. e Leo Hollberg (1991). "Using Diode Lasers for Atomic Physics". Em: *Review of Scientific Instruments* 62.1, pp. 1–20. URL: <http://link.aip.org/link/?RSI/62/1/1>.