

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

TRABALHO DE FORMATURA

Teoria dos Números e Computação: Uma abordagem utilizando problemas de competições de programação

Autor:

Antonio R. de Campos Junior

Supervisor:

Dr. Carlos Eduardo Ferreira

*Tese apresentada em cumprimento dos requisitos para o curso
Bacharel em Ciência da Computação*

Instituto de Matemática e Estatística

24 de outubro de 2015

“To raise new questions, new possibilities, to regard old problems from a new angle, requires creative imagination and marks real advance in science.”

Albert Einstein

Resumo

Teoria dos Números é um vasto ramo da matemática que estuda números inteiros. Números primos, fatorização de números inteiros, funções aritméticas, são alguns dos tópicos mais estudados e também importantes para resolução de problemas computacionais.

Hoje em dia a importância da Teoria dos Números na Computação é inquestionável, e desse modo, esse trabalho vem ilustrar como a teoria pode ser aplicada na criação de algoritmos para resolução de problemas computacionais, em especial problemas de competições de programação.

Equações diofantinas, Congruência Modular, Números de Fibonacci, são alguns dos assuntos que serão abordados nesse trabalho. Após a devida demonstração da teoria serão exibidos alguns problemas de competições de programação que aplicam essa teoria, seguido da implementação e análise do algoritmo que resolve o problema abordado.

Agradecimientos

I like to acknowledge ...

Sumário

1	Divisibilidade	1
1.1	Introdução	1
1.1.1	Divisores	2
1.2	Números Primos	3
1.3	Máximo Divisor Comum	3
1.3.1	Algoritmo de Euclides	4
1.3.2	Teorema de Bézout	4
1.4	Crivo de Erastóteles	5
1.5	Equações Diofantinas	6
1.5.1	Algoritmo de Euclides Extendido	6
1.6	Problemas Propostos	7
1.6.1	CodeChef-GOC203	7
1.6.2	UVA-10407	7
1.6.3	CodeChef-MAANDI	8
1.6.4	UVA-718	8
2	Aritmética Modular	11
2.1	Congruência	11
2.2	Congruência Linear	12
2.3	Teoremas de Fermat e do Resto Chinês	12
2.3.1	Teorema de Fermat	12
2.3.2	Teorema do Resto Chinês	13
2.4	Problemas Propostos	13
2.4.1	UVA-10090	13
2.4.2	CodeChef-IITK2P10	14
3	Funções Aritméticas	15
3.1	Φ de Euler	15
3.1.1	Teorema de Euler	16
3.2	Sequência de Fibonacci	16
3.3	Problemas Propostos	18
3.3.1	UVA-11424	18
3.3.2	TJU-3506	19
3.3.3	CodeChef-IITK2P05	19
3.3.4	CodeChef-PUPPYGCD	21
3.3.5	CodeChef-MODEFB	22
3.3.6	UVA-10311	22
3.3.7	Codeforces-227E	22
4	Conclusão	23
A	Curiosidades da ACM-ICPC	25

B	Juízes Online (Online Judges)	27
B.1	UVa	27
B.2	Topcoder	27
B.3	Codeforces	27
B.4	CodeChef	27
	Bibliografia	29

Lista de Figuras

A.1 Crescimento do número de participantes por ano.	25
---	----

Lista de Tabelas

For/Dedicated to/To my...

Capítulo 1

Divisibilidade

1.1 Introdução

A noção de divisibilidade dos números inteiros é fundamental na **Teoria dos Números**. Nesse seção vamos descrever algumas definições e propriedades que serão utilizados ao longo desse trabalho.

Definição 1 A notação $d|n$ ("*d divide n*"), significa que existe um inteiro q , tal que, $n = dq$. Se $d|n$ dizemos que n é múltiplo de d . Caso n não seja múltiplo de d (ou seja, d não divide n), escrevemos $d \nmid n$.

Corolário 1 $d|n, d|m \Rightarrow d|(n + m)$

Demonstração: Se $d|n$ e $d|m$, então existe inteiros q e k , tal que, $n = qd$ e $m = kd$. Desse modo temos:

$$(n + m) = qd + kd = (q + k)d \Rightarrow d|(n + m) \quad \square$$

Corolário 2 $d|(\frac{n}{m}) \Rightarrow dm|n$

Demonstração:

$$\begin{aligned} d|(\frac{n}{m}) &\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \mid \frac{n}{m} = qd \\ d|(\frac{n}{m}) &\Rightarrow n = q(dm) \Rightarrow dm|n \quad \square \end{aligned}$$

Corolário 3 Dado um subconjunto dos inteiros $S = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_n\}$ ordenado crescentemente, e um número inteiro d , tal que, $d|(S_i - S_{i-1})$, $2 \leq i \leq n$, temos que:

$$d|(S_i - S_j), \forall S_i, S_j \in S.$$

Demonstração: Tome $S_i, S_j \in S$ quaisquer, e sem perda de generalidade assumamos que $S_i \geq S_j$ (ie, $i \geq j$, pois S está ordenado crescentemente).

Como $i \geq j$, tome $r \in \mathbb{N}$ como sendo a diferença entre i e j : $i = j + r$.

Vamos agora provar por indução que $d|(S_{j+r} - S_j)$.

Para $r = 0$ ou $r = 1$ a demonstração segue trivialmente.

Assumamos que o corolário funciona para $(r - 1)$, ie, $d|(S_{j+r-1} - S_j)$.

Temos então que:

$$\begin{aligned} d|(S_{j+r} - S_{j+r-1}) &\Rightarrow d|(S_{j+r} - S_{j+r-1}) + (S_{j+r-1} - S_j) \quad (\triangleright \text{Corolário 1}) \\ d|(S_{j+r} - S_{j+r-1}) &\Rightarrow d|(S_{j+r} - S_j) \quad \square \end{aligned}$$

Corolário 4 O **Corolário 3** funciona mesmo se o conjunto S não estiver ordenado.

Demonstração: Deixaremos a demonstração a cargo do leitor.

Teorema 1 (Teorema da Divisão) Para todo número inteiro a e qualquer número inteiro positivo n , existe inteiros únicos q e r , tal que:

$$a = qn + r, 0 \leq r < n$$

O valor q ($q = \lfloor \frac{a}{n} \rfloor$) é chamado de **quociente** da divisão, e o valor r ($r = a \bmod n$) é chamado de **resto** (ou **resíduo**) da divisão.

Demonstração: Suponha que q e r não sejam únicos, ie, que exista q^* e r^* tal que:
 $a = q^*n + r^*, 0 \leq r^* < n$.

$$a = qn + r = q^*n + r^* \Rightarrow (r - r^*) = (q^* - q)n \Rightarrow (r - r^*) \equiv (q^* - q)n \equiv 0 \pmod{n}$$

Porém, como $r \neq r^*$, e tanto r quanto r^* são menores que n , temos que:

$$r \not\equiv r^* \pmod{n} \Rightarrow (r - r^*) \not\equiv 0 \pmod{n}$$

Chegando numa contradição, e assim q e r são únicos \square

Corolário 5 $d|n, d|m \Rightarrow d|(n \bmod m)$

Demonstração:

$$d|n \Rightarrow n = k_1d, k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$d|m \Rightarrow m = k_2d, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$n = qm + (n \bmod m) \Rightarrow (n \bmod m) = n - qm \text{ (} \triangleright \text{ Teorema 1)}$$

$$(n \bmod m) = k_1d - qk_2d = (k_1 - qk_2)d \Rightarrow d|(n \bmod m) \square$$

Corolário 6 $d|m, d|(n \bmod m) \Rightarrow d|n$

Demonstração:

$$d|m \Rightarrow m = k_1d, k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$d|(n \bmod m) \Rightarrow (n \bmod m) = k_2d, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$n = qm + (n \bmod m) \Rightarrow n = qk_1d + k_2d \text{ (} \triangleright \text{ Teorema 1)}$$

$$n = (qk_1 + k_2)d \Rightarrow d|n \square$$

1.1.1 Divisores

Nessa subseção mostraremos um algoritmo simples para calcular todos os divisores de um determinado número inteiro positivo qualquer.

Teorema 2 O número de divisores de $n \in \mathbb{Z}^+$ é da ordem de $O(\sqrt{n})$.

Demonstração: Tome um divisor d de n qualquer, com $d > \sqrt{n}$. Dessa forma sabemos que existe um inteiro q , com $n = qd$ (observe que q também é divisor de n). Como $d > \sqrt{n}$ então $q < \sqrt{n}$. Assim, para qualquer divisor d de n maior que \sqrt{n} , existe exatamente um divisor q de n menor que \sqrt{n} correspondente ao mesmo. O que implica que só existe no máximo \sqrt{n} divisores maiores que \sqrt{n} . Por outro lado, claramente só existem \sqrt{n} divisores menores que \sqrt{n} . Concluimos então que o número total de divisores de n é da ordem de $O(\sqrt{n})$. \square

Pseudocódigo:

Análise: O laço da linha 3 consome tempo $O(\sqrt{N})$, testando se os números menores que \sqrt{N} são divisores. Na linha 7 são calculados os divisores correspondentes maiores que \sqrt{N} . E a condição da linha 8 garante que se N for quadrado perfeito, então é inserido \sqrt{N} somente uma vez no conjunto D . Assim a complexidade total do algoritmo é $O(\sqrt{N})$.

Algorithm 1 Encontra todos os divisores de N

```

1: procedure FINDDIVISORS ( $N$ )
2:    $D \leftarrow \emptyset$  ▷ Conjunto  $D$  contém os divisores de  $N$ 
3:   for ( $d = 1; d^2 \leq N; d++$ ) do
4:     if  $d \nmid N$  then
5:       continue
6:      $D \leftarrow D \cup \{d\}$ 
7:      $q \leftarrow \frac{N}{d}$ 
8:     if  $q \neq d$  then
9:        $D \leftarrow D \cup \{q\}$ 
10:  return  $D$ 

```

1.2 Números Primos

Definição 2 Todo número inteiro n ($n > 1$) que têm apenas dois divisores distintos (1 e n) é chamado de número primo. Se n ($n > 1$) não for primo, dizemos que n é número composto.

Teorema 3 (Fatoração Única) Um número natural qualquer n , pode ser escrito unicamente como um produto da forma: $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, onde os p_i são números primos, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$, e os números a_i são inteiros positivos.

Demonstração: Deixaremos a demonstração a cargo do leitor. **Dica:** Use o fato de que o conjunto dos primos que divide um número inteiro é único, e fato de que se qualquer potência a_i for alterado o valor de n será alterado.

1.3 Máximo Divisor Comum

Definição 3 O Máximo Divisor Comum de dois inteiros quaisquer a e b (com a ou b diferente de zero), denotado por $MDC(a, b)$, é o maior inteiro que divide ambos a e b . Se $MDC(a, b) = 1$ dizemos que a e b são primos entre si.

Corolário 7 Para números inteiros quaisquer a e b , $MDC(a, b) = MDC(b, a \bmod b)$

Demonstração: Pelo Corolário 5 e 6, temos:

$$d|a, d|b \Leftrightarrow d|b, d|(a \bmod b)$$

Assim, qualquer divisor de a e b é também divisor de b e $(a \bmod b)$ (e vice versa). Implicando que o Máximo Divisor Comum de a e b é igual ao Máximo Divisor Comum de b e $(a \bmod b)$. \square

Corolário 8 $MDC(a, b) = d \Rightarrow MDC(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$

Demonstração: Suponha que $MDC(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = r > 1$. Assim temos:

$$r|\frac{a}{d} \Rightarrow dr|a \text{ (▷ Corolário 2)}$$

$$r|\frac{b}{d} \Rightarrow dr|b \text{ (▷ Corolário 2)}$$

$$r > 1 \Rightarrow dr > d \Rightarrow dr > MDC(a, b)$$

Chegamos então numa contradição, pois dr é divisor comum de a e b , e dr é maior que o Máximo Divisor Comum de a e b . \square

Corolário 9 Para números inteiros quaisquer a e b , $MDC(a, b) = MDC(a, a \pm b)$

Demonstração: A prova dessa expressão vem do fato de que qualquer divisor de a e b , é também divisor de $(a \pm b)$.

Corolário 10 Para números inteiros quaisquer a e b , temos:

$$MDC(a, b) = 1 \Rightarrow MDC(a, bk) = MDC(a, k), \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Demonstração: A prova dessa expressão vem do fato de que qualquer divisor d de a e b , é também divisor de k , pois d não divide b ($MDC(a, b) = 1$).

Corolário 11 $MDC((p-1)!, p) = 1$, para p primo qualquer.

Demonstração: Tome um inteiro positivo $d < p$. Como p é primo, sabemos que $MDC(p, d) = 1$, ie, d não tem nenhum fator primo em comum com p . Assim o produto $(p-1)!$ de todos os inteiros positivos menores que p também não terá nenhum fator primo em comum com p . \square

1.3.1 Algoritmo de Euclides

A ideia principal do **Algoritmo de Euclides** é calcular recursivamente o **Máximo Divisor Comum** de dois números baseando-se no **Corolário 7**.

Pseudocódigo:

Algorithm 2 Algoritmo de Euclides

```

1: procedure  $MDC(a, b)$ 
2:   if  $a = 0$  then
3:     return  $b$ 
4:   return  $MDC(b \bmod a, a)$ 

```

Análise: TODO

1.3.2 Teorema de Bézout

Corolário 12 Dado o conjunto de combinações lineares positivas $S := \{x \in \mathbb{Z}, x > 0 \mid x = ma + nb, m, n \in \mathbb{Z}\}$, onde os números a e b são inteiros, e pelo menos um desses números é diferente de zero. Temos então que $S \neq \emptyset$.

Demonstração: As combinações possíveis para a e b são:

$$\begin{aligned}
 a > 0 &\Rightarrow |a| = 1.a + 0.b \\
 a < 0 &\Rightarrow |a| = (-1).a + 0.b \\
 b > 0 &\Rightarrow |b| = 0.a + 1.b \\
 b < 0 &\Rightarrow |b| = 0.a + (-1).b
 \end{aligned}$$

Como não temos ambos a e b iguais à zero, então S deve conter pelo menos $|a|$ ou $|b|$, e assim $S \neq \emptyset$ \square

Corolário 13 Dado o conjunto de combinações lineares positivas $S := \{x \in \mathbb{Z}, x > 0 \mid x = ma + nb, m, n \in \mathbb{Z}\}$, onde os números a e b são inteiros, e pelo menos um desses números é diferente de zero. Temos então que o menor número $d \in S$ divide todos elementos de S .

Demonstração: Como $d \in S$, $\exists m, n \in \mathbb{Z} \mid d = ma + nb$.

Tome $x \in S$ qualquer. Pelo **Teorema 1** $x = qd + r$, $0 \leq r < d$.

Suponha que $d \nmid x$, ie, $x \neq qd$ e $0 < r$. Como $x \in S$, $\exists m^*, n^* \in \mathbb{Z} \mid x = m^*a + n^*b$, e assim:

$$\begin{aligned} x = m^*a + n^*b, x = qd + r &\Rightarrow r = m^*a + n^*b - qd = m^*a + n^*b - q(ma + nb) \\ &\Rightarrow r = (m^* - qm)a + (n^* - qn)b \Rightarrow r \in S, \text{ pois } r > 0 \end{aligned}$$

Chegando numa contrdição, pois $r \in S$, $d \in S$, $r < d$ e d é o menor elemento em S .

Desse modo, temos que d divide todos os elementos de S . \square

Teorema 4 (Teorema de Bézout) $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ (com pelo menos um dos dois números diferente de zero), $\exists x, y \in \mathbb{Z} \mid ax + by = \text{mdc}(a, b)$.

Demonstração: Tome o conjunto das combinações lineares de a e b :

$$S := \{x \in \mathbb{Z}, x > 0 \mid x = ma + nb, m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Pelo **Corolário 12** sabemos que $S \neq \emptyset$. Como S contém somente números positivos e não é vazio, S está limitado inferiormente por zero e assim, S tem um elemento mínimo que chamaremos de d .

Como $d \in S$, então existe $u, v \in \mathbb{Z}$, tal que, $d = ua + vb$. Pelo **Corolário 13**, sabemos que d divide todos elementos em S , em particular:

$$d \text{ divide } |a| \text{ e } |b| \Rightarrow d \mid \text{MDC}(a, b) \Rightarrow 0 < d \leq \text{MDC}(a, b)$$

Por outro lado, $\text{MDC}(a, b)$ também divide a e b :

$$\text{MDC}(a, b) \mid a \text{ e } \text{MDC}(a, b) \mid b \Rightarrow \text{MDC}(a, b) \mid (ua + vb)$$

$$\Rightarrow \text{MDC}(a, b) \mid d \Rightarrow \text{MDC}(a, b) \leq d$$

$$\text{MDC}(a, b) \leq d \text{ e } d \leq \text{MDC}(a, b) \Rightarrow \text{MDC}(a, b) = d \Rightarrow \text{MDC}(a, b) \in S \quad \square$$

1.4 Crivo de Erastóteles

O *Crivo de Erastóteles* é um algoritmo criado pelo matemático **Erastóteles** (a.C. 285-194 a.C.) para o cálculo de números primos até um certo valor limite N . O algoritmo mantém uma tabela com N elementos, e para cada primo, começando pelo número 2, marca na tabela os números compostos múltiplos desses primos. Desse modo, ao final do algoritmo, os elementos não marcados são números primos.

Pseudocódigo:

Algorithm 3 Crivo de Erastóteles para o cálculo de números primos

```

1: procedure CRIVOERASTÓTENES (N)
2:    $isPrime[] \leftarrow \text{new Array}[N]$   $\triangleright isPrime[]$  é um vetor booleano
3:   for ( $p = 2; p \leq N; p++$ ) do
4:      $isPrime[p] \leftarrow true$ 
5:   for ( $p = 2; p^2 \leq N; p++$ ) do
6:     if  $isPrime[p] = false$  then
7:       continue
8:     for ( $n = p^2; n \leq N; n = n + p$ ) do
9:        $isPrime[n] \leftarrow false$ 
10:  return  $isPrime[]$ 
```

Análise: TODO

1.5 Equações Diofantinas

Equações Diofantinas são equações polinomiais com variáveis inteiras. Alguns exemplos são mostrados a seguir, sendo x, y, z incógnitas, e a, b, n constantes inteiras:

$$ax + by = n \quad (\triangleright \text{Equação Diofantina Linear})$$

$$ax + by = \text{MDC}(a, b) \quad (\triangleright \text{Identidade de Bézout})$$

$$x^n + y^n = z^n \quad (\triangleright \text{Equação base do Último Teorema de Fermat})$$

$$x^2 - ny^2 = \pm 1 \quad (\triangleright \text{Equação de Pell})$$

Nesse trabalho abordaremos somente *Equações Diofantinas Lineares*, da forma:

$$\sum_{i=1}^k a_i x_i = c$$

onde c e a_i são constantes, e x_i variáveis inteiras.

Teorema 5 *Dados inteiros a, b, c , temos que:*

$\text{MDC}(a, b) | c \Leftrightarrow a \text{ Equação Diofantina } ax + by = c, \text{ tem solução inteira.}$

Demonstração: Provaremos primeiro a ida da implicação.

Pelo **Teorema 4** sabemos que existe x^* e y^* , tal que, $ax^* + by^* = \text{MDC}(a, b)$. Logo:
 $\text{MDC}(a, b) | c \Rightarrow \exists !q \in \mathbb{Z} \mid c = \text{MDC}(a, b)q \Rightarrow a(x^*q) + b(y^*q) = \text{MDC}(a, b)q = c \quad \square$

Provaremos agora a volta da implicação.

Sabemos que existe inteiros u e v , tal que, $a = \text{MDC}(a, b)u$ e $b = \text{MDC}(a, b)v$. Logo:

$$ax + by = c, \text{ tem solução inteira} \Rightarrow \text{MDC}(a, b)ux + \text{MDC}(a, b)vy = c$$

$$\Rightarrow \text{MDC}(a, b)(ux + vy) = c \Rightarrow \text{MDC}(a, b) | c. \quad \square$$

1.5.1 Algoritmo de Euclides Extendido

Algoritmo de Euclides Extendido é uma extensão do *Algoritmo de Euclides* que calcula não só o $\text{MDC}(a, b)$, para dados a e b , mas também encontra uma solução para a *Identidade de Bézout* $ax + by = \text{MDC}(a, b)$.

Pseudocódigo:

Algorithm 4 Algoritmo de Euclides Extendido

```

1: procedure ExtendedMDC( $a, b$ )
2:   if  $a = 0$  then
3:     return  $[b, 0, 1]$ 
4:
5:    $[d, x, y] \leftarrow \text{Extended}(b \bmod a, a)$ 
6:    $x^* \leftarrow y - \lfloor \frac{b}{a} \rfloor x$ 
7:    $y^* \leftarrow x$ 
8:   return  $[d, x^*, y^*]$ 
```

Análise: Em vez de retornar um inteiro, $\text{ExtendedMDC}(a, b)$ retorna uma tupla $[d, x, y]$, onde $d = \text{MDC}(a, b)$ e x, y são a solução da equação $ax + by = d = \text{MDC}(a, b)$. Sabemos que $[d, x, y]$ na linha 5 satisfaz a equação, $(b \bmod a)x + ay = d$, assim:

$$(b \bmod a)x + ay = d \Rightarrow (b - \lfloor \frac{b}{a} \rfloor a)x + ay = d$$

$$\Rightarrow a(y - \lfloor \frac{b}{a} \rfloor x) + b(x) = ax^* + by^* = d = \text{MDC}(a, b)$$

Observe que o *Algoritmo de Euclides Extendido* é baseado no *Algoritmo de Euclides*, tendo a mesma complexidade $O(\log(a + b))$.

Corolário 14 Tome $[d, x_0, y_0]$ como sendo a tupla retornada pelo *ExtendedMDC*(a, b), com a, b, c inteiros e $MDC(a, b) | c$. Então temos que todas as soluções da equação $ax + by = c$ são da forma: $x = (x_0 \frac{c}{d} + \frac{bq}{d})$, $y = (y_0 \frac{c}{d} - \frac{aq}{d})$, em que $q \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Pelo *Algoritmo de Euclides Extendido* sabemos que $ax_0 + by_0 = d$. Sabemos também que $d | c$ por definição, ie, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $c = kd$. Assim temos que $x = x_0k$ e $y = y_0k$ é solução, já que $a(x_0k) + b(y_0k) = kd = c$.

Agora tome a solução x^*, y^* qualquer ($ax^* + by^* = c$). Subtraindo as últimas duas equações temos:

$$\begin{aligned} a(x_0k - x^*) + b(y_0k - y^*) &= 0 \Rightarrow a(x_0k - x^*) = b(y^* - y_0k) \Rightarrow a | [b(y^* - y_0k)] \\ &\Rightarrow \frac{a}{MDC(a,b)} | (y^* - y_0k) \Rightarrow \exists! q \in \mathbb{Z}, \text{ tal que } \frac{a}{MDC(a,b)} q = (y^* - y_0k) \\ &\Rightarrow y^* = y_0k + \frac{a}{MDC(a,b)} q \Rightarrow y^* = y_0 \frac{c}{d} - \frac{aq}{d} \end{aligned}$$

Analogamente, temos: $x^* = x_0 \frac{c}{d} + \frac{bq}{d}$

Assim todas as soluções de $ax + by = c$ são da forma: $x = x_0 \frac{c}{d} + \frac{bq}{d}$, $y = y_0 \frac{c}{d} - \frac{aq}{d}$ \square

1.6 Problemas Propostos

1.6.1 CodeChef-GOC203

GOC203 - Fight for Attendance

Resumo: São dados inteiros a, b, c ($1 \leq a, b, c \leq 10^6$) e a equação $ax + by = c$. O problema consiste em determinar quando tal equação tem solução inteira.

Solução: Solução é decorrente do **Teorema 5**, bastando checar se $MDC(a, b) | c$.

Pseudocódigo:

Algorithm 5 Fight for Attendance

```

1: procedure EquationSolution( $a, b, c$ )
2:   if  $MDC(a, b) | c$  then
3:     return true
4:   return false

```

Análise: O algoritmo tem a mesma complexidade do *Algoritmo de Euclides*, $O(\log(a + b))$.

1.6.2 UVA-10407

10407 - Simple Division

Resumo: Tome $P(S) := \{x \in \mathbb{Z} \mid \forall a, b \in S, a \equiv b \pmod{x}\}$ em que $S \subset \mathbb{Z}$.

O problema consiste em encontrar o valor máximo de $P(S)$ dado um conjunto S .

Solução: Seja $S = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_n\}$, com $n = |S|$, o conjunto dado pelo problema (assumiremos que os valores de S estão ordenados crescentemente).

Tome um número qualquer $d \in P(S)$. Por definição temos que $\forall S_i, S_j \in S, S_i \equiv S_j \pmod{d} \Rightarrow (S_i - S_j) \equiv 0 \pmod{d} \Rightarrow d \mid (S_i - S_j)$.

Pelo **Corolário 3** sabemos que:

$$d \mid (S_i - S_{i-1}), \forall i \in \mathbb{N}, 2 \leq i \leq n \Rightarrow d \mid (S_i - S_j), \forall S_i, S_j \in S \Rightarrow d \in P(S).$$

E desse modo, para calcular o valor máximo de $P(S)$ só precisamos calcular o Máximo Divisor Comum das diferenças $(S_i - S_{i-1})$ com i variando de 2 à n . \square .

Pseudocódigo:

Algorithm 6 Simple Division

```

1: procedure GETMAXIMUMVALUE (S)
2:    $S \leftarrow \text{sort}(S)$  ▷  $\text{sort}(X)$  retorna o conjunto  $X$  ordenado.
3:    $\text{maxValue} \leftarrow 0$ 
4:   for  $i := 2$  to  $|S|$  do
5:      $\text{maxValue} \leftarrow \text{MDC}(\text{maxValue}, S_i - S_{i-1})$ 
6:   return  $\text{maxValue}$ 

```

Análise:

1.6.3 CodeChef-MAANDI

MAANDI - Maxim and Dividers

Resumo: Calcular quantos divisores de um número inteiro n ($1 \leq n \leq 10^9$), contém os dígitos 4 e 7 na forma decimal. Por exemplo, para $n = 94$ os únicos divisores que contém tais dígitos são: 47, 94.

Solução: Para esse problema, basta calcular todos os divisores de n , com o **Algoritmo 1**, e depois verificar quais deles contém os dígitos 4 ou 7.

Pseudocódigo:

Análise: O laço da linha 5 roda em tempo $O(\sqrt{n})$, já que o número de elementos em D é da ordem de $O(\sqrt{N})$. O número de dígitos de cada divisor d é da ordem de $O(\log_{10} d)$, ou melhor $O(\log n)$. Assim o laço da linha 8 consome tempo proporcional à $O(\log n)$ e a complexidade total do algoritmo é $O(\sqrt{n} \log n)$.

1.6.4 UVA-718

718 - Skyscraper Floors

Resumo: É dado um prédio com F andares (numerados de 0 até $F - 1$) e E elevadores. Cada elevador i tem um posição inicial Y_i ($Y_i \geq 0$) e uma constante X_i ($X_i > 0$), de tal forma que os únicos andares que esse elevador consegue chegar são da forma, $Y_i + X_i t$, com t inteiro. Cada elevador i não consegue atingir andares menores que Y_i e maiores ou iguais à F , ie, $Y_i \leq Y_i + X_i t \leq F - 1$, ou melhor, $0 \leq t \leq \frac{F-1-Y_i}{X_i}$. Dado os valores F , E , e as constantes Y_i , X_i para cada elevador, o problema consiste em verificar se é possível ir do andar A até o andar B ($0 \leq A, B < F$) usando os E elevadores.

Solução: Primeiro imagine que temos um grafo bidirecionado com E vértices, onde cada vértice representa um elevador e cada aresta (u, v) nos diz que os elevadores u e v

Algorithm 7 Maxim and Dividers

```

1: procedure FINDOVERLUCKIDIVISORS (N)
2:    $D \leftarrow \text{FindDivisors}(n)$ 
3:    $count \leftarrow 0$ 
4:
5:   for each  $d \in D$  do
6:      $hasDigits \leftarrow false$ 
7:
8:     while  $d > 0$  do
9:        $resto \leftarrow d \bmod 10$ 
10:      if  $resto = 4 \mid \mid resto = 7$  then
11:         $hasDigits \leftarrow true$ 
12:         $d \leftarrow \frac{d}{10}$ 
13:
14:      if  $hasDigits$  then
15:         $count \leftarrow count + 1$ 
16:
17:   return  $count$ 

```

▷ **Algoritmo 1**

conseguem chegar em algum andar em comum. Sabemos quais elevadores atingem o andar A , basta verificar se $Y_i + X_i t = A$ tem solução t inteira. Analogamente sabemos quais elevadores atingem o andar B . Então só precisaríamos fazer uma busca (**BFS** ou **DFS**) nesse grafo e verificar se há um caminho de um elevador que atinge o andar A até algum elevador que atinge o andar B .

Porém, para esse problema, não entraremos em detalhe nos algoritmos envolvendo grafos. Nos focaremos na parte matemática do problema, que envolve descobrir quando dois elevadores conseguem chegar em algum andar em comum, nos possibilitando assim, construir o grafo e resolver o problema.

Dois elevadores u e v tem um andar em comum, se existe inteiros t_u ($0 \leq t_u \leq \frac{F-1-Y_u}{X_u}$) e t_v ($0 \leq t_v \leq \frac{F-1-Y_v}{X_v}$), tal que $Y_u + X_u t_u = Y_v + X_v t_v$, o que nos dá a *Equação Diofântica Linear* $X_u t_u + (-X_v) t_v = (Y_v - Y_u)$.

Vamos mostrar agora um método para calcular t_u e t_v , tal que $at_u + bt_v = c$, com $a = X_u$, $b = -X_v$ e $c = (Y_v - Y_u)$. Pelo **Teorema 5**, sabemos que essa equação tem solução, se e somente se, $MDC(a, b) | c$. Observe também que se $Y_u = Y_v$ os elevadores estarão conexos pelo andar Y_u . Checaremos essas restrições no começo do algoritmo, e daqui para frente assumiremos que $MDC(a, b) | c$ e $Y_u \neq Y_v$.

Tome d , t_1 , t_2 como sendo os valores retornados por $ExtendedMDC(a, b)$, temos então pelo **Corolário 14** que todas as soluções da equação $at_u + bt_v = c$, são da forma $t_u = (t_1 \frac{c}{d} + \frac{bq}{d})$ e $t_v = (t_2 \frac{c}{d} - \frac{aq}{d})$, com $q \in \mathbb{Z}$. Logo:

$$t_u = (t_1 \frac{c}{d} + \frac{bq}{d}) \Rightarrow \frac{-t_1 c}{b} \leq q \leq \left[\left(\frac{F-1-Y_u}{X_u} \right) d - t_1 c \right] \frac{1}{b}, \text{ já que } 0 \leq t_u \leq \frac{F-1-Y_u}{X_u}$$

Analogamente temos:

$$t_v = (t_2 \frac{c}{d} - \frac{aq}{d}) \Rightarrow \frac{t_2 c}{a} \geq q \geq \left[t_2 c - \left(\frac{F-1-Y_v}{X_v} \right) d \right] \frac{1}{a}, \text{ já que } 0 \leq t_v \leq \frac{F-1-Y_v}{X_v}$$

Das duas inequações acima, temos:

$$\max\left(\frac{-t_1c}{b}, \left[t_2c - \left(\frac{F-1-Y_v}{X_v}\right)d\right]\frac{1}{a}\right) \leq q \leq \min\left(\frac{t_2c}{a}, \left[\left(\frac{F-1-Y_u}{X_u}\right)d - t_1c\right]\frac{1}{b}\right)$$

Portanto, se a inequação acima tiver solução inteira q , os elevadores u e v serão conectados pelo andar $Y_u + X_u t_u = Y_u + X_u \left[(t_1 + \frac{bq}{d})\frac{c}{d}\right]$.

Pseudocódigo:

Algorithm 8 Verifica se os elevadores u e v estão conexos.

```

1: procedure ElevatorsConected( $X_u, Y_u, X_v, Y_v, F$ )
2:    $a \leftarrow X_u$ 
3:    $b \leftarrow -X_v$ 
4:    $c \leftarrow Y_v - Y_u$ 
5:    $[d, t_1, t_2] \leftarrow \text{ExtendedMDC}(a, b)$ 
6:
7:   if  $Y_u = Y_v$  then
8:     return true
9:
10:  if  $d \nmid c$  then
11:    return false
12:
13:                                     ▷ A partir desse ponto temos:  $c \neq 0$  e  $d|c$ 
14:   $left \leftarrow \max\left(\frac{-t_1c}{b}, \left[t_2c - \left(\frac{F-1-Y_v}{X_v}\right)d\right]\frac{1}{a}\right)$ 
15:   $right \leftarrow \min\left(\frac{t_2c}{a}, \left[\left(\frac{F-1-Y_u}{X_u}\right)d - t_1c\right]\frac{1}{b}\right)$ 
16:
17:  if  $\lceil left \rceil \leq \lfloor right \rfloor$  then
18:    return true
19:
20:  return false

```

Análise: O único trecho do algoritmo que não roda em tempo constante é a chamada $\text{ExtendedMDC}(a, b)$ na linha 5, logo a complexidade total do algoritmo é $O(\log(a+b)) = O(\log |X_u = X_v|)$.

Capítulo 2

Aritmética Modular

2.1 Congruência

Definição 4 Para a e b inteiros, dizemos que a é congruente à b módulo m ($a \equiv b \pmod{m}$), $m > 0$) se a e b produzem o mesmo resto na divisão por m (ie, $m \mid (a - b)$). Caso contrário ($m \nmid (a - b)$), dizemos que a não é congruente à b módulo m ($a \not\equiv b \pmod{m}$).

Definição 5 Dizemos que o conjunto de inteiros $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ é um sistema completo de resíduos módulo n se:

1. $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists! s_i \in S \mid a \equiv s_i \pmod{n}$
2. $s_i \not\equiv s_j \pmod{n}$ para $i \neq j$

Corolário 15 Dados inteiros a, b, c, d com $\text{MDC}(c, d) = 1$, temos que:
 $ac \equiv bc \pmod{d} \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$.

Demonstração:

$$ac \equiv bc \pmod{d} \Rightarrow d \mid (ac - bc) \Rightarrow d \mid c(a - b) \Rightarrow d \mid (a - b), \text{ já que } \text{MDC}(c, d) = 1 \\ \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}. \quad \square$$

Corolário 16 O conjunto $R = \{r_0, r_2, r_3, \dots, r_{n-1}\}$ com $r_i = i$, é um sistema completo de resíduos módulo n .

Demonstração: Pelo **Teorema 1** sabemos que para qualquer inteiro a , existe q, r tal que, $a = qn + r$, $0 \leq r < n$. Assim, $a \equiv r \pmod{n}$, sendo r um dos r_i em R . Sabemos também que, $0 < |r_i - r_j| < (n - 1)$, para $i \neq j$, e assim $r_i \not\equiv r_j \pmod{n}$. Portanto o conjunto R é um sistema completo de resíduos módulo n . \square

Teorema 6 Se o conjunto $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ é um sistema completo de resíduos módulo n , então $k = n$.

Demonstração: Tome o conjunto $R = \{r_0, r_2, r_3, \dots, r_{n-1}\}$ com $r_i = i$. Pelo **Corolário 16** sabemos que R é um sistema completo de resíduos módulo n .

Podemos concluir então, que cada elemento s_i de S é congruente à exatamente um dos elementos r_i em R , o que nos garante $|S| \leq |R|$, ou simplesmente $k \leq n$. Por outro lado, o conjunto S é por definição um sistema completo de resíduos módulo n , e desse modo cada elemento r_i de R é congruente à exatamente um dos elementos s_i em S , o que nos garante $|R| \leq |S|$. Disso temos que, $|R| = |S|$, ou melhor, $k = n$. \square

2.2 Congruência Linear

Definição 6 Congruências da forma $ax \equiv b \pmod{m}$, onde a, b e m são inteiros e x é uma incógnita, são chamadas de Congruências Lineares.

Corolário 17 $ax \equiv b \pmod{m}$ tem solução $\Rightarrow MDC(a, m) | b$

Demonstração: Suponha que $\exists x \in \mathbb{Z}$, tal que $ax \equiv b \pmod{m}$, assim temos:

$$\begin{aligned} ax &\equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | (b - ax) \Rightarrow \exists! r \in \mathbb{Z} \text{ tal que } (b - ax) = mr \\ \Rightarrow b &= mr + ax \Rightarrow MDC(a, m) | b, \text{ pois } MDC(a, m) \text{ divide tanto } a \text{ como } m. \quad \square \end{aligned}$$

Corolário 18 $ax \equiv b \pmod{m}$ tem solução $\Leftarrow MDC(a, m) | b$

Demonstração:

$$\begin{aligned} MDC(a, m) | b &\Rightarrow (ax + my) | b \quad (\triangleright \text{ Teorema 4}) \\ \Rightarrow \exists! r \in \mathbb{Z} \text{ tal que, } b &= (ax + my)r \Rightarrow b = (xr)a + (yr)m \\ \Rightarrow b &\equiv xra + yrm \pmod{m} \Rightarrow b \equiv xra \pmod{m} \\ \text{E assim, a Congruência Linear } ax &\equiv b \pmod{m}, \text{ tem solução } z = xr. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 7 $ax \equiv b \pmod{m}$ tem solução $\Leftrightarrow MDC(a, m) | b$

Demonstração: Segue trivialmente dos Corolários 17 e 18.

Teorema 8 O conjunto $S = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$ com $s_i = im + p$, $m, n, p \in \mathbb{Z}$, e $MDC(m, n) = 1$ é um sistema completo de resíduos módulo n .

Demonstração: Primeiro provaremos que $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists! s_i \in S \mid a \equiv s_i \pmod{n}$.

Tome um inteiro a qualquer e a Congruência Linear: $(a - p) \equiv xm \pmod{n}$. Pelo Teorema 7 sabemos que essa Congruência Linear tem solução, já que $MDC(m, n) = 1$. Assim:

$$\begin{aligned} (a - p) &\equiv xm \pmod{n} \Rightarrow a \equiv xm + p \pmod{n} \Rightarrow a \equiv im + p \pmod{n}, i = x \bmod n \\ \Rightarrow a &\equiv s_i \pmod{n} \end{aligned}$$

Agora provaremos que $s_i \not\equiv s_j \pmod{n}$ para $i \neq j$.

Tome s_i e s_j em S com $i \neq j$, $0 < |i - j| < n$. Claramente $(i - j) \not\equiv 0 \pmod{n}$, já que i e j são distintos e $0 \leq i, j < n$. Portanto $(i - j)m \not\equiv 0 \pmod{n}$, já que $MDC(m, n) = 1$, e assim:

$$\begin{aligned} (i - j)m &\not\equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow im \not\equiv jm \pmod{n} \Rightarrow im + p \not\equiv jm + p \pmod{n} \\ \Rightarrow s_i &\not\equiv s_j \pmod{n}. \end{aligned}$$

Disso seque que S é um sistema completo de resíduos módulo n . \square

2.3 Teoremas de Fermat e do Resto Chinês

2.3.1 Teorema de Fermat

Teorema 9 (Pequeno Teorema de Fermat) Dado um número primo qualquer p , temos que: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \forall a \in \mathbb{Z} \mid MDC(a, p) = 1$

Demonstração: Tome os conjuntos $S = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_{p-1}\}$, com $s_i = ai$, e $T = \{t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{p-1}\}$, com $t_i = i$. Claramente o conjunto T é um Sistema completo de resíduos módulo p . Pelo Teorema TODO sabemos que S também é um Sistema completo de resíduos módulo p , e assim, $\forall s_i \in S, \exists! t_j \in T, 0 \leq t_j \leq (p - 1)$, tal que $s_i \equiv t_j \pmod{p}$. Dessa informação podemos derivar a seguinte congruência modular:

$s_1.s_2.s_3...s_{p-1} \equiv t_1.t_2.t_3...s_{p-1} \pmod{p}$ (\triangleright Observe que o correspondente à s_0 é t_0)
 $\Rightarrow a.2a.3a....(p-1)a \equiv 1.2.3....(p-1) \pmod{p} \Rightarrow a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \pmod{p}$
 E aplicando os **Corolários 11 e 15**, temos:
 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. \square

Teorema 10 Dados os inteiros quaisquer a , b e um número primo p , com $MDC(a, p) = 1$, temos que:

$$a^b \equiv a^{b \bmod (p-1)} \pmod{p}$$

Demonstração: Pelo **Teorema 1** pode escrever $b = q(p-1) + r$, onde $r = b \bmod (p-1)$. Assim temos:

$$a^b = a^{q(p-1)+r} = a^{q(p-1)}a^r = (a^{p-1})^q a^r \Rightarrow a^b \equiv (a^{p-1})^q a^r \pmod{p}$$

Pelo **Teorema 9** temos $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Logo:

$$a^b \equiv (1)^q a^r \equiv a^r \equiv a^{b \bmod (p-1)} \pmod{p}. \square$$

2.3.2 Teorema do Resto Chinês

Teorema 11 (Teorema do Resto Chinês) Tome o sistema de congruências lineares:

$$a_1x \equiv c_1 \pmod{m_1}$$

$$a_2x \equiv c_2 \pmod{m_2}$$

$$a_3x \equiv c_3 \pmod{m_3}$$

...

$$a_nx \equiv c_n \pmod{m_n}$$

Em que $c_i \in \mathbb{Z}$, $MDC(a_i, m_i) = 1$, e $MDC(m_i, m_j) = 1$ para $i \neq j$. Nessas condições o sistema acima tem solução única módulo M , em que $M = m_1m_2m_3...m_n$.

Demonstração: TODO

2.4 Problemas Propostos

2.4.1 UVA-10090

10090 - Marbles

Resumo: É dado um número inteiro n ($0 < n \leq 10^8$). O problema consiste em verificar se n pode, ou não pode, ser escrito como a soma de dois números primos. E em caso afirmativo encontrar o valor desses dois primos.

Solução:

Pseudocódigo:

Algorithm 9 Marbles

1: **procedure** FINDTWOPRIMESUM (N)

Análise:

2.4.2 CodeChef-IITK2P10

IITK2P10 - Chef and Pattern

Resumo: Tome a seguinte função $f_K : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}$:

$$f_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ K & \text{se } x = 2 \\ \prod_{i=1}^{x-1} f_K(i) & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

São dados dois número inteiro N, K ($1 \leq N \leq 10^9, 1 \leq K \leq 10^5$). O problema consiste em calcular a expressão: $f_K(N) \bmod p$, em que $p = (10^9 + 7)$.

Solução: Escrevendo os valores dos primeiros termos que a função assume, temos: $f(1) = 1, f(2) = K, f(3) = K, f(4) = K^2, f(5) = K^4, f(6) = K^8, f(7) = K^{16}$.

Provaremos, por indução, que $f_K(N) = K^{2^{N-3}}, N \geq 3$.

Para os primeiros termos essa expressão é trivialmente verificada.

Assuma que a expressão funciona para algum número natural qualquer $(R-1) \geq 3$ ($f_K(R-1) = K^{2^{R-4}}$).

Nessas condições temos que:

$$f_K(R) = \prod_{i=1}^{R-1} f_K(i) = 1 \cdot K \cdot \prod_{i=3}^{R-1} f_K(i) = K \prod_{i=3}^{R-1} K^{2^{i-3}} = K \prod_{j=0}^{R-4} K^{2^j}$$

$$f_K(R) = K K^{\sum_{j=0}^{R-4} 2^j} = K K^{2^{R-3}-1} = K^{2^{R-3}} \quad \square$$

Para calcular o valor de $f_K(N) \bmod p$, podemos aplicar o **Teorema 10**, já que p é um número primo e $\text{MDC}(p, K) = 1$:

$$f_K(N) \bmod p = K^{2^{N-3}} \bmod p = K^{2^{N-3} \bmod (p-1)} \bmod p$$

Reduzindo o problema, dessa maneira, em calcular: $K^{2^{N-3} \bmod (10^9 + 7)}$.

Pseudocódigo:

Algorithm 10 Chef and Pattern

```

1: procedure F (N, K)
2:    $p \leftarrow (10^9 + 7)$ 
3:    $exp \leftarrow \text{EXPMOD}(2, N - 3, p - 1)$   $\triangleright exp = 2^{N-3} \bmod (p - 1)$ 
4:    $solution \leftarrow \text{EXPMOD}(K, exp, p)$   $\triangleright solution = K^{2^{N-3} \bmod (p-1)} \bmod p$ 
5:   return solution

```

Análise: Como vimos anteriormente, as linhas 3 e 4 do algoritmo consomem tempo proporcional à $O(n \log n)$, e assim a complexidade total é $O(n \log n)$.

Capítulo 3

Funções Aritméticas

3.1 Φ de Euler

Definição 7 A Função Totiente de Euler, denotada por $\Phi(n)$, é a função aritmética que conta o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são primos entre si com n .

$$\Phi(n) := |\{x \in \mathbb{N}^* \mid \text{MDC}(x, n) = 1\}|$$

Teorema 12 $\Phi(n)$ é função multiplicativa, ie, $\Phi(mn) = \Phi(m)\Phi(n)$ para $\text{MDC}(m, n) = 1$.

Demonstração: A demonstração asseguir foi retirada livro: OLIVEIRA SANTOS, José Plínio de. *Introdução à Teoria dos Números*. IMPA, 1998. 72 p.

Vamos dispor os números de 1 até mn da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & (m+1) & (2m+1) & \dots & (n-1)m+1 \\ 2 & (m+2) & (2m+2) & \dots & (n-1)m+2 \\ 3 & (m+3) & (2m+3) & \dots & (n-1)m+3 \\ \vdots & & & & \\ m & 2m & 3m & \dots & nm \end{array}$$

Se na linha r , onde estão os termos $r, m+r, 2m+r, \dots, (n-1)m+r$, tivermos $\text{MDC}(m, r) = d > 1$, então nenhum termo nesta linha será primo com mn , uma vez que estes termos, sendo da forma $km+r, 0 \leq k \leq n-1$, são todos divisíveis por d que é o **Máximo Divisor Comum** de m e r . Logo, para encontrarmos os inteiros desta tabela que são primos com mn , devemos olhar na linha r somente se $\text{MDC}(m, r) = 1$. Portanto temos $\Phi(m)$ linhas onde todos os elementos são primos com m .

Devemos, pois, procurar em cada uma dessas $\Phi(m)$ linhas, quantos elementos são primos com n , uma vez que todos são primos com m . Como $\text{MDC}(m, n) = 1$ os elementos $r, m+r, 2m+r, \dots, (n-1)m+r$ formam um sistema completo de resíduos módulo n (**Teorema 8**). Logo, cada uma destas linhas possui $\Phi(n)$ elementos primos com n e, portanto, como eles são primos com m , eles são primos com mn . Isto nos garante que $\Phi(mn) = \Phi(m)\Phi(n)$. \square

Teorema 13 $\Phi(p^k) = (p^k - p^{k-1})$, para p primo e k inteiro positivo.

Demonstração: Como p é um número primo, para qualquer inteiro n , os únicos valores possíveis para $\text{MDC}(p^k, n)$ são: $1, p, p^2, \dots, p^k$, e desse modo, se $\text{MDC}(p^k, n) \neq 1$ temos que $p|n$ (n é múltiplo de p). Assim, o quantidade de números não-primos e menores do que p^k é p^{k-1} .

Logo, temos que: $\Phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ \square

Teorema 14 (Fórmula Produto de Euler) $\Phi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p}) = n \prod_{p|n} (\frac{p-1}{p})$

Demonstração:

$$\Phi(n) = \Phi(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}) \quad (\triangleright \text{Teorema 3})$$

$$\Phi(n) = \Phi(p_1^{a_1}) \Phi(p_2^{a_2}) \dots \Phi(p_k^{a_k}) \quad (\triangleright \text{Teorema 12})$$

$$\Phi(n) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1})(p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}) \dots (p_k^{a_k} - p_k^{a_k-1}) \quad (\triangleright \text{Teorema 13})$$

$$\Phi(n) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} (1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2) \dots (1 - 1/p_k)$$

$$\Phi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p}) \quad \square$$

Pseudocódigo:

Algorithm 11 Calcula os primeiros N termos da função Φ

```

1: procedure PHI(N)
2:    $\Phi[] \leftarrow \text{newArray}[N]$ 
3:   for ( $p = 1; p \leq N; p++$ ) do
4:      $\Phi[p] \leftarrow p$ 
5:   for ( $p = 2; p \leq N; p++$ ) do
6:     if  $\Phi[p] \neq p$  then                                      $\triangleright \Phi[p] \neq p \Leftrightarrow p$  não é primo
7:       continue
8:     for ( $n = p; n \leq N; n = n + p$ ) do
9:        $\Phi[n] \leftarrow \Phi[n] (\frac{p-1}{p})$ 
10:  return  $\Phi[]$ 

```

Corolário 19 $\Phi(n^k) = n^{k-1} \Phi(n)$, para inteiros positivos n e k .

Demonstração: TODO

3.1.1 Teorema de Euler

Teorema 15 (Teorema de Euler) Dados números inteiros a e n primos entre si, temos que: $a^{\Phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Observe que esse teorema é uma generalização do **Teorema 9**.

Demonstração: TODO usa residuos completo mod m

3.2 Sequência de Fibonacci

Definição 8 A sequência de Fibonacci Fib_n é uma sequência de números inteiros positivos em que cada termo subsequente corresponde a soma dos dois termos anteriores.

$$Fib_n := \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ Fib_{n-1} + Fib_{n-2} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Corolário 20 $MDC(Fib_n, Fib_{n-1}) = 1$, para $n \geq 2$

Demonstração: Tome os primeiros termos da sequência de fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, Claramente a expressão acima funciona para os primeiros termos. Assuma que a expressão funciona para um inteiro qualquer $(k-1) > 2$ ($MDC(Fib_{k-1}, Fib_{k-2}) = 1$).

Provaremos por indução que a expressão sempre funciona.

$$MDC(Fib_k, Fib_{k-1}) = MDC(Fib_{k-1} + Fib_{k-2}, Fib_{k-1})$$

$$MDC(Fib_{k-1} + Fib_{k-2}, Fib_{k-1}) = MDC(Fib_{k-2}, Fib_{k-1}) \text{ (}\triangleright \text{ Pelo Corolário 9)}$$

Logo, temos que:

$$MDC(Fib_k, Fib_{k-1}) = MDC(Fib_{k-2}, Fib_{k-1}) = 1 \quad \square$$

Corolário 21 $Fib_{m+n} = Fib_m Fib_{n+1} + Fib_{m-1} Fib_n$

Demonstração: Provaremos esse corolário por indução no índice n .

A base da indução será, $n = 2$:

$$Fib_{m+2} = Fib_m + Fib_{m+1} = Fib_m + Fib_m + Fib_{m-1}$$

$$Fib_{m+2} = 2Fib_m + 1Fib_{m-1} = Fib_m Fib_3 + Fib_{m-1} Fib_2$$

Assumindo que a expressão funciona para todos os valores menores que n , temos:

$$Fib_{m+n} = Fib_{m+n-2} + Fib_{m+n-1}$$

$$Fib_{m+n} = (Fib_m Fib_{n-1} + Fib_{m-1} Fib_{n-2}) + (Fib_m Fib_n + Fib_{m-1} Fib_{n-1})$$

$$Fib_{m+n} = Fib_m (Fib_{n-1} + Fib_n) + Fib_{m-1} (Fib_{n-2} + Fib_{n-1})$$

$$Fib_{m+n} = Fib_m Fib_{n+1} + Fib_{m-1} Fib_n \quad \square$$

Teorema 16 $MDC(Fib_m, Fib_n) = Fib_{MDC(m,n)}, \forall m, n \in \mathbb{Z}$

Demonstração:

$$MDC(Fib_m, Fib_n) = MDC(Fib_m, Fib_{qm+r}) \text{ (}\triangleright \text{ Teorema 1, } n = qm + r, 0 \leq r < n)$$

$$MDC(Fib_m, Fib_n) = MDC(Fib_m, Fib_{qm} Fib_{r+1} + Fib_{qm-1} Fib_r) \text{ (}\triangleright \text{ Corolário 21).}$$

$$MDC(Fib_m, Fib_n) = MDC(Fib_m, Fib_{qm-1} Fib_r)$$

Pelo **Corolário 10** e sabendo que $MDC(Fib_m, Fib_{qm-1}) = 1$, temos:

$$MDC(Fib_m, Fib_n) = MDC(Fib_m, Fib_r)$$

$$MDC(Fib_m, Fib_n) = MDC(Fib_m, Fib_{n \bmod m})$$

Se tirarmos o símbolo funcional Fib , a última equação forma um passo do **Algoritmo de Euclides** ($MDC(m, n) = MDC(m, n \bmod m)$).

Podemos continuar esse processo até que o resto r se torne 0. O último resto não-nulo será exatamente o Máximo Divisor Comum dos dois números originais.

Desse modo, se aplicar-mos o **Algoritmo de Euclides** em Fib_m e Fib_n funciona da mesma maneira que se aplicar-mos aos índices m e n . E assim, ao chegarmos na base da recursão, $MDC(m, n) = MDC(s, 0) = s$, teremos também: $MDC(Fib_m, Fib_n) = MDC(Fib_s, 0) = Fib_s = Fib_{MDC(m,n)} \quad \square$.

Teorema 17 $Fib_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$

Demonstração:

A demonstração asseguir foi baseada no livro: OLIVEIRA SANTOS, José Plínio de. *Introdução à Teoria dos Números*. IMPA, 1998. 85 p.

$$Fib_{n+1} = Fib_n + Fib_{n-1}$$

$$Fib_{n+1} - k Fib_n = Fib_n + Fib_{n-1} - k Fib_n$$

$$Fib_{n+1} - k Fib_n = Fib_n + Fib_{n-1} - k Fib_n + (k Fib_{n-1} - k Fib_{n-1}) + (k^2 Fib_{n-1} - k^2 Fib_{n-1})$$

$$Fib_{n+1} - k Fib_n = (1 - k)(Fib_n - k Fib_{n-1}) + (1 + k - k^2) Fib_{n-1}$$

Se denotarmos as raízes de $k^2 - k - 1 = 0$ por k_1 e k_2 , teremos que $k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$$Fib_{n+1} - k_1 Fib_n = k_2 (Fib_n - k_1 Fib_{n-1})$$

$$Fib_{n+1} - k_2 Fib_n = k_1 (Fib_n - k_2 Fib_{n-1})$$

Por iterações sucessivas dessas duas equações teremos que:

$$Fib_{n+1} - k_1 Fib_n = k_2^n (Fib_1 - k_1 Fib_0) = k_2^n$$

$$Fib_{n+1} - k_2 Fib_n = k_1^n (Fib_1 - k_2 Fib_0) = k_1^n$$

Subtraindo membro à membro nos dá:

$$Fib_n(k_2 - k_1) = k_2^n - k_1^n$$

$$Fib_n = \frac{k_2^n - k_1^n}{k_2 - k_1}$$

$$Fib_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$Fib_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) \square$$

3.3 Problemas Propostos

3.3.1 UVA-11424

11424 - GCD - Extreme (I)

Resumo: É dado um inteiro positivo N ($1 < N < 200001$). O problema consiste em calcular o mais rápido possível a expressão:

$$G(N) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N MDC(i, j).$$

Solução: Trivialmente a expressão acima pode ser calculada em tempo proporcional à $O(n^2 \log(N))$, porém essa solução consome muito tempo e não será aceita no Judge Online. Vamos então mostrar uma solução mais eficiente.

Primeiramente reescrevemos a expressão acima da seguinte maneira:

$$G(N) = \sum_{j=2}^N \sum_{i=1}^{j-1} MDC(i, j) \quad (\triangleright \text{Observe que as expressões são equivalentes}).$$

$$\text{Tome agora a função } F(M) = \sum_{i=1}^{M-1} MDC(i, M) \Rightarrow G(N) = \sum_{j=2}^N F(j).$$

Sabemos que todos os valores resultantes do método $MDC(i, M)$ calculados em $F(M)$ são divisores de M . Desse modo, podemos reescrever $F(M)$ da seguinte maneira:

$$F(M) = \sum_{i=1}^{M-1} MDC(i, M) = \sum_{l=1}^n \lambda_l d_l, \text{ em que, } d_1, d_2, \dots, d_n \text{ são os divisores de } M, \lambda_l \text{ é o número de vezes que o divisor } d_l \text{ aparece na somatória } \sum_{i=1}^{M-1} MDC(i, M), \text{ e } n \text{ é o número de divisores de } M.$$

Pelo Corolário 8 temos que: $MDC(i, M) = d_l \Rightarrow MDC(i/d_l, M/d_l) = 1$. Logo o número de vezes que o divisor d_l aparece na somatória, será igual ao número de primos entre si com (M/d_l) , ie, $\lambda_l = \Phi(M/d_l)$.

Reescrevendo novamente $F(M)$, temos:

$$F(M) = \sum_{i=1}^{M-1} MDC(i, M) = \sum_{l=1}^n \lambda_l d_l = \sum_{l=1}^n \Phi(M/d_l) d_l.$$

$$G(N) = \sum_{j=2}^N \sum_{l=1}^n \Phi(j/d_l) d_l \square.$$

Pseudocódigo:

Análise: O método $PHI(N)$ na linha 2 consome tempo proporcional à $O(N\sqrt{N})$.

O número de divisores de j é proporcional à $O(\sqrt{N})$, já que $j \leq N$.

Assim a complexidade das linhas 4, 5, 6 do algoritmo é $O(N\sqrt{N})$.

Complexidade final do algoritmo: $O(N\sqrt{N})$.

OBS.: Para resolver o problema no Judge Online será preciso armazenar as soluções usando **Programação Dinâmica**.

Algorithm 12 GCD - Etreme(I)

```

1: procedure G (N)
2:    $\Phi[] \leftarrow PHI(N)$ 
3:    $solution \leftarrow 0$ 
4:   for  $j := 2$  to  $N$  do
5:     for each divisor  $d$  de  $j$  do
6:        $solution \leftarrow solution + \Phi[j/d]d$ 
7:   return  $solution$ 

```

3.3.2 TJU-3506**3506 - Euler Function**

Resumo: São dados três números positivos n, m ($1 < n < 10^7, 1 < m < 10^9$) e $d = 201004$. O problema consiste em calcular a expressão: $\Phi(n^m) \bmod d$.

Solução: Pelo **Corolário 19**, temos:

$$\Phi(n^m) \bmod d = (n^{m-1} \Phi(n)) \bmod d$$

$$\Phi(n^m) \bmod d = ((n^{m-1} \bmod d)(\Phi(n)) \bmod d) \bmod d$$

Desse modo, podemos calcular a primeiro fator do produto ($n^{m-1} \bmod d$) usando $EXPMOD()$ e a segundo fator com o método $PHI()$.

Pseudocódigo:

Algorithm 13 Euler Functions

```

1: procedure PhiEulerPotential( $n, m, d$ )
2:    $\Phi[] \leftarrow PHI(n)$ 
3:    $exp \leftarrow EXPMOD(n, m - 1, d)$ 
4:    $solution \leftarrow (exp \Phi[n]) \bmod d$ 
5:   return  $solution$ 

```

Análise: As linhas 3 e 4 do algoritmo consomem tempo proporcional à $O(\log m)$ e $O(1)$ respectivamente. Se precalcular-mos o vetor $\Phi[]$, temos que a complexidade total para calcular cada instância do problema será: $O(\log m)$

3.3.3 CodeChef-IITK2P05**IITK2P05 - Factorization**

Resumo: É dado um inteiro N ($2 \leq N \leq 10^{18}$) e o valor de $\Phi(N)$. O problema consiste em fatorizar N .

Solução: A solução trivial para fatorar N consome tempo proporcional à $O(\sqrt{N})$, porém para uma entrada na ordem de 10^{18} precisamos de um algoritmo mais eficiente.

Se N for primo, ie, $\Phi(N) = N - 1$, já temos a solução.

Assuma então que N é um número composto. Primeiro vamos iterar nos primeiros $\sqrt[3]{N}$ inteiros e remover todos os fatores primos de N nesse intervalo. Tome M como sendo o valor resultante.

Imagine que M tenha três ou mais fatores primos. Sabemos que M não tem nenhum fator primo menor que $\sqrt[3]{N}$, temos que: $M > (\sqrt[3]{N})^3 \Rightarrow M > N$ (contradição). Desse modo, temos que M tem no máximo dois fatores primos, e esses valores são maiores que $\sqrt[3]{N}$.

- **Caso 1:** M tem só um fator primo, ie, M é primo: Basta checar se $\Phi(M) = M - 1$
- **Caso 2:** M tem dois fatores primos iguais, $M = p^2$: Basta verificar se M é um quadrado perfeito. Pode ser feito facilmente com busca binária.
- **Caso 3:** M tem dois fatores primos distintos, $M = pq$: Se $M = pq$ então $\Phi(M) = (p - 1)(q - 1)$. Temos então um sistema com duas equações e duas incógnitas. Se resolvermos o sistema encontraremos a fatoração de M e assim a fatoração de N .

O único problema agora é calcular $\Phi(M)$ a partir de $\Phi(N)$. Assuma que $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} M$, com $k \geq 0$ e p_i os fatores primos distintos de N removidos na primeira etapa do algoritmo. Temos então:

$$\begin{aligned}
 N &= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} M \Rightarrow \Phi(N) = \Phi(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} M) \\
 N &= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} M \Rightarrow \Phi(N) = \Phi(p_1^{a_1}) \Phi(p_2^{a_2}) \dots \Phi(p_k^{a_k}) \Phi(M) \quad (\triangleright \text{Teorema 12}) \\
 \Rightarrow \Phi(N) &= (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1})(p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}) \dots (p_k^{a_k} - p_k^{a_k-1}) \Phi(M) \quad (\triangleright \text{Teorema 13}) \\
 \Rightarrow \Phi(M) &= \frac{\Phi(N)}{(p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1})(p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}) \dots (p_k^{a_k} - p_k^{a_k-1})}
 \end{aligned}$$

Pseudocódigo:

Algorithm 14 Fatoração de N

```

1: procedure Factorization( $N, \Phi_N$ )
2:    $S \leftarrow \emptyset$  ▷  $S$  contém os fatores primos de  $N$ 
3:    $M \leftarrow N$ 
4:    $\Phi_M \leftarrow \Phi_N$ 
5:
6:   if  $\Phi_N = N - 1$  then ▷ Se  $N$  for primo
7:      $S \leftarrow S \cup \{N\}$ 
8:     return  $S$ 
9:
10:  for each  $p$  primo menor igual à  $\sqrt[3]{N}$  do
11:    while  $M \equiv 0 \pmod{p}$  do
12:       $M \leftarrow \frac{M}{p}$ 
13:       $S \leftarrow S \cup \{p\}$ 
14:
15:  for each  $p \in S$  do
16:     $\Phi_M \leftarrow \frac{\Phi_M}{p^a - p^{a-1}}$  ▷  $a :=$  número de vezes que o primo  $p$  é inserido em  $S$ 
17:
18:  if  $\Phi_M = M - 1$  then ▷ Se  $M$  for primo
19:     $S \leftarrow S \cup \{M\}$ 
20:    return  $S$ 
21:
22:   $(p, q) \leftarrow \text{System}(M, \Phi_M)$  ▷ Resolve o sistema de 2 equações e 2 incógnitas
23:   $S \leftarrow S \cup \{p, q\}$ 
24:  return  $S$ 

```

Análise: O laço da linha 10 consome tempo proporcional à $O(\sqrt[3]{N})$. Já o laço da linha 11 consome tempo proporcional à $O(\log_p N)$, pois tem no máximo a iterações (a é o número de vezes que o fator primo p aparece em N) e assim, $p^a < N \Rightarrow a < \log_p N$.

As linhas 15-16 rodam em $O(\log_p N)$, já que o número máximo de elementos distintos em S é $\log_p N$ (p é o menor primo que divide N). E as linhas 18-23 rodam em $O(1)$.

Assim, o algoritmo total consome tempo proporcional à $O(\sqrt[3]{N} \log N)$. Observe que esse algoritmo é bem mais eficiente que o algoritmo trivial para fatoração $O(\sqrt{N})$.

3.3.4 CodeChef-PUPPYGCD

PUPPYGCD - Puppy and GCD

Resumo: São dados inteiros positivos N e D . O problema consiste em calcular o número de pares não-ordenados $\{A, B\}$, tal que $1 \leq A, B \leq N$ e $MDC(A, B) = D$.

Solução: Claramente se D for maior que N , não há nenhum par que satisfaz as condições. Logo, assumiremos que $D \leq N$.

Pelo **Corolário 8** sabemos que se $MDC(A, B) = D$ então $MDC(\frac{A}{D}, \frac{B}{D}) = 1$. Assim, podemos reduzir o problema em calcular o número de pares não-ordenados $\{A, B\}$, tal que $1 \leq A, B \leq \frac{N}{D}$ e $MDC(A, B) = 1$. Logo o número de pares será igual a somatória de $\Phi(r)$, com $1 \leq r \leq \frac{N}{D}$, já que $\Phi(r)$ nos dá a quantidade de números menores ou iguais a r e primo com entre si com r . Observe que essa somatória nos dá somente a metade do número de pares, já que o problema consiste em calcular pares não-ordenados.

Pseudocódigo:

Algorithm 15 Puppy and GCD

```

1: procedure CalculatePairs( $N, P$ )
2:   if  $D > N$  then
3:     return 0
4:
5:    $\Phi[] \leftarrow PHI(\frac{N}{D})$ 
6:    $count \leftarrow 0$ 
7:
8:   for ( $A = 1; A \leq \frac{N}{D}; A++$ ) do
9:      $count \leftarrow count + \Phi[A]$ 
10:
11:    $count \leftarrow 2 \cdot count - 1$ 
12:   return  $count$ 

```

Análise: Se precalcular $\Phi[]$ teremos que o fator limitando do algoritmo será o laço da linha 8, e a complexidade do algoritmo será $O(\frac{N}{D})$.

Obs.: Quando dobramos o valor de $count$ na linha 11, tem um único $\{1, 1\}$ que é contado duas vezes, e por isso precisamos subtrair 1 do valor final. Esse par corresponde ao par $\{D, D\}$ do problema original.

3.3.5 CodeChef-MODEFB

71544 - Another Fibonacci

Resumo: São dados dois números inteiros N, K ($1 \leq N \leq 50000, 1 \leq K \leq N$) e um conjunto $S \subset \mathbb{N}$ com N elementos, tal que, $\forall s \in S, 1 \leq s \leq 10^9$.

Tome a seguinte função:

$$F(S) = \sum_{A \subset S \text{ e } |A|=K} \text{Fib}(\text{sum}(A)), \text{ onde } \text{sum}(A) = \sum_{a \in A} a.$$

O problema consiste em calcular a expressão: $F(S) \bmod 99991$

Solução:

Pseudocódigo:

Algorithm 16 Another Fibonacci

1: **procedure** F (S)

Análise:

3.3.6 UVA-10311

10311 - Goldbach and Euler

Resumo: É dado um número inteiro n ($0 < n \leq 10^8$). O problema consiste em verificar se n pode, ou não pode, ser escrito como a soma de dois números primos. E em caso afirmativo encontrar o valor desses dois primos.

Solução:

Pseudocódigo:

Algorithm 17 Goldbach and Euler

1: **procedure** FINDTWOPRIMESUM (N)

Análise:

3.3.7 Codeforces-227E

227E - Anniversary

Resumo:

Solução:

Pseudocódigo:

Algorithm 18 Anniversary

1: **procedure** FINDTWOPRIMESUM (N)

Análise:

Capítulo 4

Conclusão

...

Apêndice A

Curiosidades da ACM-ICPC

ACM-ICPC (International Collegiate Programming Contest) é uma competição de programação de várias etapas e baseada em equipe. O principal objetivo é encontrar algoritmos eficientes, que resolvem os problemas abordados pela competição, o mais rápido possível.

Nos últimos anos a ACM-ICPC teve um crescimento significativo. Se compararmos o número de competidores, temos que de 1997 (ano em que começou o patrocínio da IBM) até 2014 houve um aumento maior que 1500%, totalizando 38160 competidores de 2534 universidades em 101 países ao redor do mundo.

Para mais informações sobre as competições passadas acesse icpc.baylor.edu.



FIGURA A.1: Crescimento do número de participantes por ano.

Apêndice B

Juízes Online (Online Judges)

Online Judges são plataformas online que contam com um banco de dados com diversos tipos de problemas de competições de programação, e com um sistema de correção online.

Para afirmar que sua solução está correta, basta enviar o código fonte da sua solução (em geral escrito em C++ ou JAVA) para uma dessas plataformas.

Alguns desses Online Judges são citados em seguida.

B.1 UVa

Criado em 1995 pelo matemático Miguel Ángel Revilla, é atualmente um dos Online Judges mais famoso entre os participantes da ACM-ICPC.

É hospedado pela [Universidade de Valladolid](https://uva.onlinejudge.org/) e conta com mais de 100000 usuários registrados.

Site: <https://uva.onlinejudge.org/>

B.2 Topcoder

Empresa que administra competições de programação nas linguagens Java, C++ e C#.

É responsável também por aplicar competições de design e desenvolvimento de software.

Site: <https://www.topcoder.com/>

B.3 Codeforces

Site Russo dedicado competições de programação.

Em 2013, Codeforces superou Topcoder com relação ao número de usuários ativos, apesar de ter sido criado quase 10 anos depois.

O estilo de problemas que esse site aplica é similar aos problemas encontrados na ACM-ICPC.

Site: <http://codeforces.com/>

B.4 CodeChef

Iniciativa educacional sem fins lucrativos lançada em 2009 pela [Direct](https://www.codechef.com/).

É uma plataforma de programação competitiva que suporta mais de 35 linguagens de programação.

Site: <https://www.codechef.com/>

Bibliografia

- Arnold, A. S. et al. (1998). "A Simple Extended-Cavity Diode Laser". Em: *Review of Scientific Instruments* 69.3, pp. 1236–1239. URL: <http://link.aip.org/link/?RSI/69/1236/1>.
- Hawthorn, C. J., K. P. Weber e R. E. Scholten (2001). "Littrow Configuration Tunable External Cavity Diode Laser with Fixed Direction Output Beam". Em: *Review of Scientific Instruments* 72.12, pp. 4477–4479. URL: <http://link.aip.org/link/?RSI/72/4477/1>.
- Wieman, Carl E. e Leo Hollberg (1991). "Using Diode Lasers for Atomic Physics". Em: *Review of Scientific Instruments* 62.1, pp. 1–20. URL: <http://link.aip.org/link/?RSI/62/1/1>.