

Empacotamento de árvores em grafos completos

Renzo Gonzalo Gómez Diaz
Orientadora: Yoshiko Wakabayashi

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

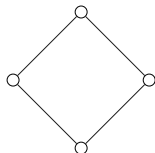
8 de novembro de 2015

Agenda

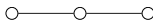
- 1 Introdução
- 2 Conjectura de Gyárfás & Lehel
 - Restringindo a classe das árvores
 - Limitando o tamanho da sequência
- 3 Variantes da conjectura de Gyárfás & Lehel
 - Grafos bipartidos completos
 - Grafos k -cromáticos
- 4 Considerações finais

Empacotamento

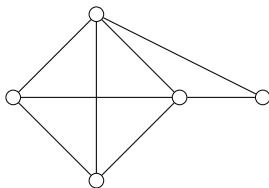
Queremos **empacotar** C_4 e P_3 em G .



(a) C_4



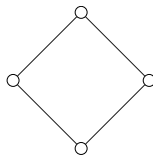
(b) P_3



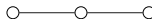
(c) G

Empacotamento

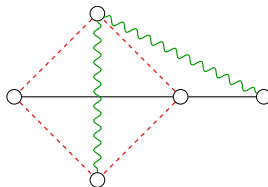
Queremos **empacotar** C_4 e P_3 em G .



(a) C_4



(b) P_3



(c) G

Figura: Um empacotamento de C_4 e P_3 em G .

A conjectura

O problema que estudamos foi

Conjectura (Gyárfás & Lehel, 1976)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_n pode ser empacotada no K_n .

A conjectura

O problema que estudamos foi

Conjectura (Gyárfás & Lehel, 1976)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_n pode ser empacotada no K_n .

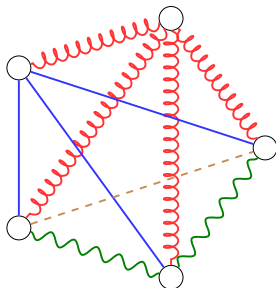


Figura: Empacotamento de estrelas no K_5 .

A conjectura

Conjectura (Gyárfás & Lehel, 1976)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_n pode ser empacotada no K_n .

- Problema ainda em aberto.

A conjectura

Conjectura (Gyárfás & Lehel, 1976)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_n pode ser empacotada no K_n .

- Problema ainda em aberto.
- Técnicas usadas para encontrar respostas afirmativas.

A conjectura

Conjectura (Gyárfás & Lehel, 1976)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_n pode ser empacotada no K_n .

- Problema ainda em aberto.
- Técnicas usadas para encontrar respostas afirmativas.
 - Restringir as classes das árvores.

A conjectura

Conjectura (Gyárfás & Lehel, 1976)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_n pode ser empacotada no K_n .

- Problema ainda em aberto.
- Técnicas usadas para encontrar respostas afirmativas.
 - Restringir as classes das árvores.
 - Restringir o tamanho da sequência.

Conjectura de Gyárfás & Lehel

- 1 Introdução
- 2 Conjectura de Gyárfás & Lehel
 - Restringindo a classe das árvores
 - Limitando o tamanho da sequência
- 3 Variantes da conjectura de Gyárfás & Lehel
 - Grafos bipartidos completos
 - Grafos k -cromáticos
- 4 Considerações finais

Resultados conhecidos

Quando restringimos as classes das árvores.

- Sequências com no máximo 2 árvores diferentes de estrela.
(Gyárfás & Lehel, 1976)

Resultados conhecidos

Quando restringimos as classes das árvores.

- Sequências com no máximo 2 árvores diferentes de estrela. (Gyárfás & Lehel, 1976)
- Estrelas e caminhos. (Gyárfás & Lehel e Zaks & Liu, 1976)

Resultados conhecidos

Quando restringimos as classes das árvores.

- Sequências com no máximo 2 árvores diferentes de estrela. (Gyárfás & Lehel, 1976)
- Estrelas e caminhos. (Gyárfás & Lehel e Zaks & Liu, 1976)
- Subclasse de lagartas e aranhas. (Fishburn, 1983)

Resultados conhecidos

Quando restringimos as classes das árvores.

- Sequências com no máximo 2 árvores diferentes de estrela. (Gyárfás & Lehel, 1976)
- Estrelas e caminhos. (Gyárfás & Lehel e Zaks & Liu, 1976)
- Subclasse de lagartas e aranhas. (Fishburn, 1983)
- Estrelas e biestrelas. (Hobbs et al., 1987)

Resultados conhecidos

Quando restringimos as classes das árvores.

- Sequências com no máximo 2 árvores diferentes de estrela. (Gyárfás & Lehel, 1976)
- Estrelas e caminhos. (Gyárfás & Lehel e Zaks & Liu, 1976)
- Subclasse de lagartas e aranhas. (Fishburn, 1983)
- Estrelas e biestrelas. (Hobbs et al., 1987)
- Quase-estrelas. (Dobson, 1997)

Estrelas

Dado um empacotamento de T_1, \dots, T_{n-1} no K_{n-1} , como empacotar T_n ?

Estrelas

Dado um empacotamento de T_1, \dots, T_{n-1} no K_{n-1} , como empacotar T_n ?

Adicionamos um novo vértice.

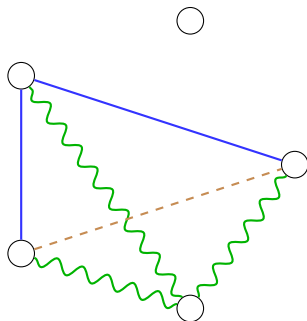


Figura: Empacotamento de T_1, \dots, T_4 no K_4

Estrelas

Dado um empacotamento de T_1, \dots, T_{n-1} no K_{n-1} , como empacotar T_n ?

Ligamos o novo vértice a K_{n-1} .

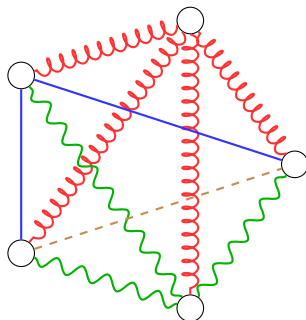


Figura: Empacotamento de T_1, \dots, T_5 no K_5

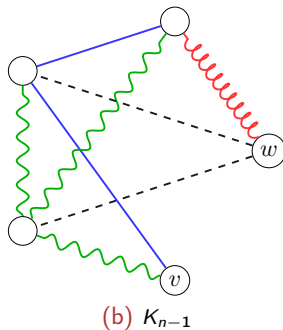
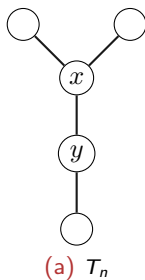
Biestrelas

Dado um empacotamento de T_1, \dots, T_{n-1} no K_{n-1} , como empacotar T_n ?

Biestrelas

Dado um empacotamento de T_1, \dots, T_{n-1} no K_{n-1} , como empacotar T_n ?

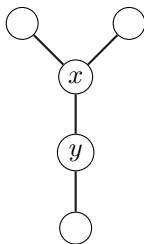
Mapeamos x em w



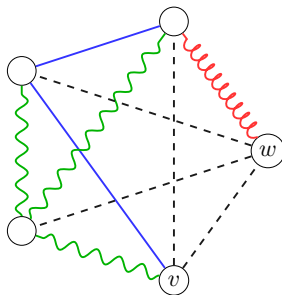
Biestrelas

Dado um empacotamento de T_1, \dots, T_{n-1} no K_{n-1} , como empacotar T_n ?

Mapeamos x em w e y em v .



(a) T_n



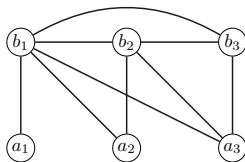
(b) K_n

Subclasse de lagartas e aranhas

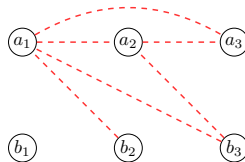
- H_n grafo com sequência de graus $(n-1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor, \dots, 1)$.
- H_n e H_{n-1} constituem uma decomposição do K_n .

Subclasse de lagartas e aranhas

- H_n grafo com sequência de graus $(n-1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor, \dots, 1)$.
- H_n e H_{n-1} constituem uma decomposição do K_n .



(a) H_6



(b) H_5

Subclasse de lagartas e aranhas

- H_n grafo com sequência de graus $(n, n-1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor, \dots, 1)$.
- H_n e H_{n-1} constituem uma decomposição do K_n .

Teorema (Fishburn, 1983)

T_n e H_{n-2} podem ser empacotados em H_n se T_n é uma estrela, ou uma biestrela, ou uma triestrela unimodal, ou um caminho, ou uma lagarta 3-interior ou um escorpião.

Ideia: Se n par, empacotar T_2, T_4, \dots, T_n em H_n , e T_1, T_3, \dots, T_{n-1} em H_{n-1} .

Caminhos

Se T_n é um caminho, como empacotar T_n em H_n ?

Caminhos

Se T_n é um caminho, como empacotar T_n em H_n ?

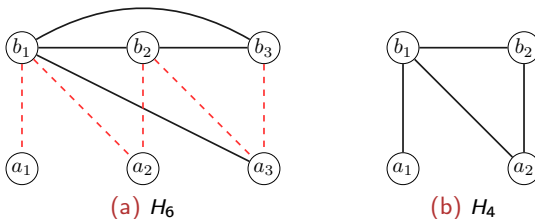


Figura: Empacotamento de P_6 em H_6

Escorpião

- Um único vértice de grau maior a 2 (junção).
- No max. uma perna de comprimento maior a 2.

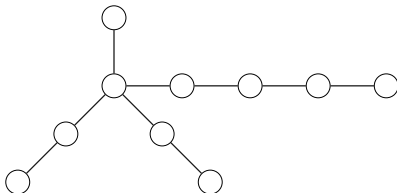
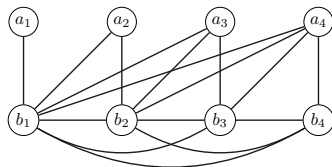


Figura: Escorpião de ordem 10.

Escorpião



(a) H_8

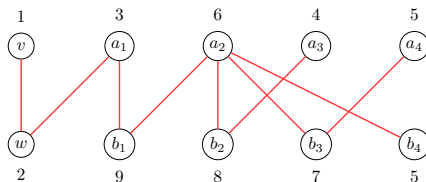


Figura: Empacotamento de escorpião no H_{10}

Conjectura de Gyárfás & Lehel

- 1 Introdução
- 2 Conjectura de Gyárfás & Lehel
 - Restringindo a classe das árvores
 - Limitando o tamanho da sequência
- 3 Variantes da conjectura de Gyárfás & Lehel
 - Grafos bipartidos completos
 - Grafos k -cromáticos
- 4 Considerações finais

Limitando el tamanho da sequência

Qual é o maior $s < n$ tal que T_1, \dots, T_s pode ser empacotado no K_n ?

Limitando el tamanho da sequência

Qual é o maior $s < n$ tal que T_1, \dots, T_s pode ser empacotado no K_n ?

Teorema (Bollobás, 1983)

Se $s \leq n/\sqrt{2} (\approx 0.7n)$, então T_1, \dots, T_s pode ser empacotado no K_n .

Limitando el tamanho da sequência

Qual é o maior $s < n$ tal que T_1, \dots, T_s pode ser empacotado no K_n ?

Teorema (Bollobás, 1983)

Se $s \leq n/\sqrt{2} (\approx 0.7n)$, então T_1, \dots, T_s pode ser empacotado no K_n .

Dado um empacotamento de T_{k+1}, \dots, T_s , como empacotar T_k ?

Limitando o tamanho da sequência

Dado um empacotamento de T_{k+1}, \dots, T_s , como empacotar T_k ?

Se $G = K_n - \cup_{i=k+1}^n E(T_i)$,

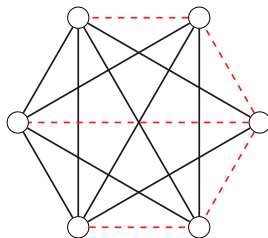
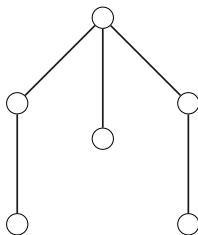
Ideia: Encontrar $H \subseteq G$ tal que $\delta(H) \geq k - 1$.

Limitando o tamanho da sequência

Dado um empacotamento de T_{k+1}, \dots, T_s , como empacotar T_k ?

Se $G = K_n - \cup_{i=k+1}^n E(T_i)$,

Ideia: Encontrar $H \subseteq G$ tal que $\delta(H) \geq k - 1$.



Limitando o tamanho da sequência

Proposição

Se $|E(G)| > \binom{k-1}{2} + (k-2)(n-k+1)$, então existe $H \subset G$ tal que $\delta(H) \geq k-1$.

Se $s \leq n/\sqrt{2}$ e $G = K_n - \cup_{i=k+1}^s E(T_i)$

$\Rightarrow |E(G)| > \binom{k-1}{2} + (k-2)(n-k+1)$.

Podemos melhorar o resultado?

Limitando o tamanho da sequência

Proposição

Se $|E(G)| > \binom{k-1}{2} + (k-2)(n-k+1)$, então existe $H \subset G$ tal que $\delta(H) \geq k-1$.

Se $s \leq n/\sqrt{2}$ e $G = K_n - \cup_{i=k+1}^s E(T_i)$

$\Rightarrow |E(G)| > \binom{k-1}{2} + (k-2)(n-k+1)$.

Podemos melhorar o resultado?

Conjectura (Erdős & Sós, 1963)

Se $|E(G)| > (k-2)n/2$, então G contém qualquer árvore de ordem k .

Limitando o tamanho da sequência

Conjectura (Erdős & Sós, 1963)

Se $|E(G)| > (k-2)n/2$, então G contém qualquer árvore de ordem k .

Supondo a validade da conjectura anterior, obtemos que

Se $s \leq \sqrt{3}n/2 \approx 0.86n \Rightarrow$ podemos empacotar T_1, \dots, T_s no K_n .

Variantes da conjectura de Gyárfás & Lehel

- 1 Introdução
- 2 Conjectura de Gyárfás & Lehel
 - Restringindo a classe das árvores
 - Limitando o tamanho da sequência
- 3 Variantes da conjectura de Gyárfás & Lehel
 - Grafos bipartidos completos
 - Grafos k -cromáticos
- 4 Considerações finais

Variantes da conjectura

Conjectura (Hobbs et al., 1987)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_n pode ser empacotada no $K_{n/2, n-1}$ se n é par.

Variantes da conjectura

Conjectura (Hobbs et al., 1987)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_n pode ser empacotada no $K_{n/2, n-1}$ se n é par.

Conjectura (Gerbner et al., 2012)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_k pode ser empacotada num grafo k -cromático.

Variantes da conjectura

Conjectura (Hobbs et al., 1987)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_n pode ser empacotada no $K_{n/2, n-1}$ se n é par.

Conjectura (Gerbner et al., 2012)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_k pode ser empacotada num grafo k -cromático.

Conjectura (Hollingsworth, 2013)

Uma sequência de árvores balanceadas $\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_n$ pode ser empacotada no $K_{n, n}$.

Variantes da conjectura de Gyárfás & Lehel

- 1 Introdução
- 2 Conjectura de Gyárfás & Lehel
 - Restringindo a classe das árvores
 - Limitando o tamanho da sequência
- 3 Variantes da conjectura de Gyárfás & Lehel
 - Grafos bipartidos completos
 - Grafos k -cromáticos
- 4 Considerações finais

Resultados conhecidos

Conjectura (Hobbs et al., 1987)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_n pode ser empacotada no $K_{n/2, n-1}$ se n é par.

Restringimos a classe das árvores

- Estrelas e caminhos. (Zaks & Liu, 1976)

Resultados conhecidos

Conjectura (Hobbs et al., 1987)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_n pode ser empacotada no $K_{n/2, n-1}$ se n é par.

Restringimos a classe das árvores

- Estrelas e caminhos. (Zaks & Liu, 1976)

Limitando o tamanho da sequência

Podemos empacotar a sequência T_1, \dots, T_s no K_n

- Se $s \leq (\sqrt{13} - 3)n/2 \approx 0.3n$ (Caro & Roditty, 1990).
- Se $s \leq \sqrt{5/8}n \approx 0.79n$ (Yuster, 1997).

Empacotamento em grafos k -cromáticos

Conjectura (Gerbner et al., 2012)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_k pode ser empacotada num grafo k -cromático.

Empacotamento em grafos k -cromáticos

Conjectura (Gerbner et al., 2012)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_k pode ser empacotada num grafo k -cromático.

A validade dessa afirmação implica a conjectura de Gyárfás & Lehel.

Empacotamento em grafos k -cromáticos

Conjectura (Gerbner et al., 2012)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_k pode ser empacotada num grafo k -cromático.

A validade dessa afirmação implica a conjectura de Gyárfás & Lehel.

Teorema (Gerbner et al., 2012)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_k pode ser empacotada num grafo k -cromático se no máximo 3 delas são diferentes de estrelas.

Empacotamento em grafos k -cromáticos

Teorema (Gerbner et al., 2012)

Uma sequência de árvores T_1, \dots, T_k pode ser empacotada num grafo k -cromático se no máximo 3 delas são diferentes de estrelas.

Faremos a prova para quando no máximo 2 das árvores não são estrelas.
Suponha que

- G é grafo k -cromático minimal ($\delta(G) \geq k - 1$).
- Classes C_1, \dots, C_k .
- $\forall v \in C_i$ existe $u \in C_j$ tq $uv \in E(G)$ ($j < i$).
- G_i é induzido por $C_k \cup C_{k-1} \cup \dots \cup C_{k-i+1}$.

Empacotamento em grafos k -cromáticos

Se T_k ou T_{k-1} é uma estrela, podemos fazer o empacotamento como no caso do K_n .

Empacotamento em grafos k -cromáticos

Se T_k ou T_{k-1} é uma estrela, podemos fazer o empacotamento como no caso do K_n .

Suponha que T_k e T_{k-1} não são estrelas, e T_{k-2} e T_{k-3} são estrelas.

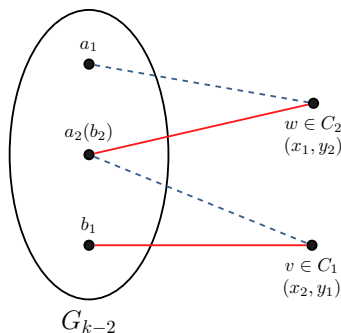
Sejam $T'_k = T_k - \{x_1, x_2\}$ e $T'_{k-1} = T_{k-1} - \{y_1, y_2\}$.

Empacotamento em grafos k -cromáticos

Se T_k ou T_{k-1} é uma estrela, podemos fazer o empacotamento como no caso do K_n .

Suponha que T_k e T_{k-1} não são estrelas, e T_{k-2} e T_{k-3} são estrelas.

Sejam $T'_k = T_k - \{x_1, x_2\}$ e $T'_{k-1} = T_{k-1} - \{y_1, y_2\}$.



Empacotamento em grafos k -cromáticos

Para o caso em que 3 árvores não são estrelas, a seguinte asserção limita a estrutura de T_k .

Asserção

Se T_k contém uma estrela pendurada de ordem s e T_{k-s} é uma estrela, podemos empacotar T_1, \dots, T_k , em G .

Empacotamento em grafos k -cromáticos

Para o caso em que 3 árvores não são estrelas, a seguinte asserção limita a estrutura de T_k .

Asserção

Se T_k contém uma estrela pendurada de ordem s e T_{k-s} é uma estrela, podemos empacotar T_1, \dots, T_k , em G .

Só falta considerar os casos onde T_{k-2} ou T_{k-3} não é uma estrela e T_k tem estrelas penduradas de ordem no max. 3.

A prova se divide em muitos casos dependendo da estrutura de T_k , T_{k-1} e T_{k-2} ou T_{k-3} .

Considerações finais

- 1 Introdução
- 2 Conjectura de Gyárfás & Lehel
 - Restringindo a classe das árvores
 - Limitando o tamanho da sequência
- 3 Variantes da conjectura de Gyárfás & Lehel
 - Grafos bipartidos completos
 - Grafos k -cromáticos
- 4 Considerações finais

Considerações finais

- A técnica usada por Bollobás ajudou a obter resultados em variantes da conjectura original.
- Quando restringimos as classes das árvores, as técnicas usadas não fornecem caminho claro para atacar a conjectura em sua forma mais geral.

Obrigado!!
Gracias!!