Teoria dos Números e Computação: Uma abordagem utilizando problemas de competições de programação

Antonio Roberto de Campos Junior
Supervisor: Carlos Eduardo Ferreira

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

15 de novembro de 2015

Agenda

Objetivos

- Estudar tópicos específicos relacionados à Teoria dos Números

Objetivos

- Estudar tópicos específicos relacionados à Teoria dos Números
- Criar um material que mostre a aplicação direta dessa teoria na solução de problemas de competições de programação

Objetivos

- Estudar tópicos específicos relacionados à Teoria dos Números
- Criar um material que mostre a aplicação direta dessa teoria na solução de problemas de competições de programação
- Demonstração da teoria e implementação dos algoritmos que resolvem os problemas que serão abordados

Motivação

- Experiência nesse tipo de competição

Motivação

- Experiência nesse tipo de competição
- Falta de um bom material didático nesse molde

A conjectura

Conjectura (Gyárfás & Lehel, 1976)

Uma sequência de árvores $T_1, \ldots, T_n$ pode ser empacotada no K_n.

- Problema ainda em aberto.

A conjectura

Conjectura (Gyárfás & Lehel, 1976)

Uma sequência de árvores $T_1, \ldots, T_n$ pode ser empacotada no K_n.

- Problema ainda em aberto.
- Técnicas usadas para encontrar respostas afirmativas.

A conjectura

Conjectura (Gyárfás & Lehel, 1976)

Uma sequência de árvores $T_1, \ldots, T_n$ pode ser empacotada no K_n.

- Problema ainda em aberto.
- Técnicas usadas para encontrar respostas afirmativas.
  - Restringir as classes das árvores.

A conjectura

Conjectura (Gyárfás & Lehel, 1976)

Uma sequência de árvores $T_1, \ldots, T_n$ pode ser empacotada no K_n.

- Problema ainda em aberto.
- Técnicas usadas para encontrar respostas afirmativas.
  - Restringir as classes das árvores.
  - Restringir o tamanho da sequência.

Conjectura de Gyárfás & Lehel

Resultados conhecidos

Quando restringimos as classes das árvores.

- Sequências com no máximo 2 árvores diferentes de estrela. (Gyárfás & Lehel, 1976)

Resultados conhecidos

Quando restringimos as classes das árvores.

- Sequências com no máximo 2 árvores diferentes de estrela. (Gyárfás & Lehel, 1976)
- Estrelas e caminhos. (Gyárfás & Lehel e Zaks & Liu, 1976)

Resultados conhecidos

Quando restringimos as classes das árvores.

- Sequências com no máximo 2 árvores diferentes de estrela. (Gyárfás & Lehel, 1976)
- Estrelas e caminhos. (Gyárfás & Lehel e Zaks & Liu, 1976)
- Subclasse de lagartas e aranhas. (Fishburn, 1983)

Resultados conhecidos

Quando restringimos as classes das árvores.

- Sequências com no máximo 2 árvores diferentes de estrela. (Gyárfás & Lehel, 1976)
- Estrelas e caminhos. (Gyárfás & Lehel e Zaks & Liu, 1976)
- Subclasse de lagartas e aranhas. (Fishburn, 1983)
- Estrelas e biestrelas. (Hobbs et al., 1987)

Resultados conhecidos

Quando restringimos as classes das árvores.

- Sequências com no máximo 2 árvores diferentes de estrela. (Gyárfás & Lehel, 1976)
- Estrelas e caminhos. (Gyárfás & Lehel e Zaks & Liu, 1976)
- Subclasse de lagartas e aranhas. (Fishburn, 1983)
- Estrelas e biestrelas. (Hobbs et al., 1987)
- Quase-estrelas. (Dobson, 1997)

Estrelas

Dado um empacotamento de $T_1, \ldots, T_{n-1}$ no K_{n-1}, como empacotar T_n?

Estrelas

Dado um empacotamento de $T_1, \ldots, T_{n-1}$ no K_{n-1}, como empacotar T_n?
Adicionamos um novo vértice.

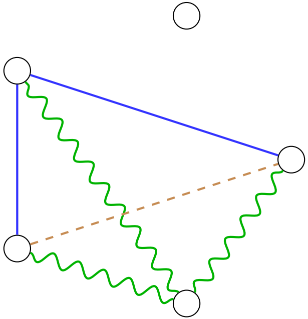


Figura: Empacotamento de $T_1, \ldots, T_4$ no K_4

Estrelas

Dado um empacotamento de $T_1, \ldots, T_{n-1}$ no K_{n-1}, como empacotar T_n?
Ligamos o novo vértice a K_{n-1}.

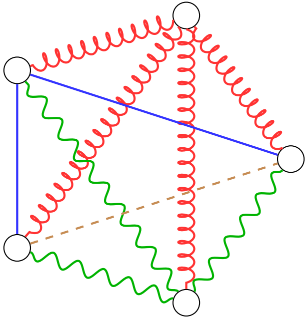


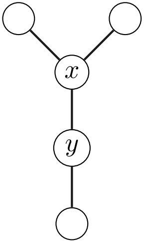
Figura: Empacotamento de $T_1, \ldots, T_5$ no K_5

Biestrelas

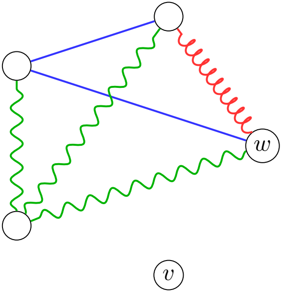
Dado um empacotamento de $T_1, \ldots, T_{n-1}$ no K_{n-1}, como empacotar T_n?

Biestrelas

Dado um empacotamento de $T_1, \ldots, T_{n-1}$ no K_{n-1}, como empacotar T_n?



(a) T_n

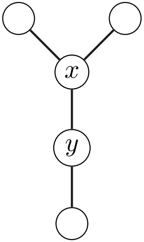


(b) K_{n-1}

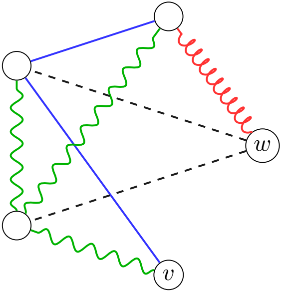
Biestrelas

Dado um empacotamento de $T_1, \ldots, T_{n-1}$ no K_{n-1}, como empacotar T_n?

Mapeamos x em w



(a) T_n

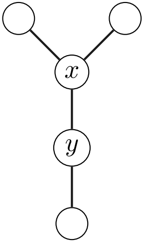


(b) K_{n-1}

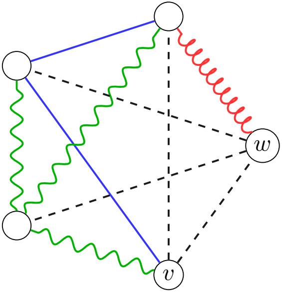
Biestrelas

Dado um empacotamento de $T_1, \ldots, T_{n-1}$ no K_{n-1}, como empacotar T_n?

Mapeamos x em w e y em v.



(a) T_n



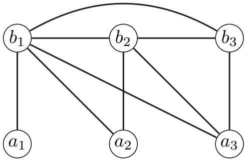
(b) K_n

Subclasse de lagartas e aranhas

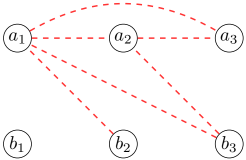
- H_n grafo com sequência de graus $(n-1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor, \ldots, 1)$.
- H_n e H_{n-1} constituem uma decomposição do K_n.

Subclasse de lagartas e aranhas

- H_n grafo com sequência de graus $(n-1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor, \ldots, 1)$.
- H_n e H_{n-1} constituem uma decomposição do K_n.



(a) H_6



(b) H_5

Subclasse de lagartas e aranhas

- H_n grafo com sequência de graus $(n, n-1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor, \ldots, 1)$.
- H_n e H_{n-1} constituem uma decomposição do K_n.

Teorema (Fishburn, 1983)

T_n e H_{n-2} podem ser empacotados em H_n se T_n é uma estrela, ou uma biestrela, ou uma triestrela unimodal, ou um caminho, ou uma lagarta 3-interior ou um escorpião.

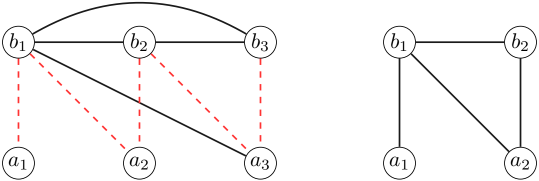
Ideia: Se n par, empacotar $T_2, T_4, \ldots, T_n$ em H_n, e $T_1, T_3, \ldots, T_{n-1}$ em H_{n-1}.

Caminhos

Se T_n é um camino, como empacotar T_n em H_n?

Caminhos

Se T_n é um camino, como empacotar T_n em H_n?



(a) H_6 (b) H_4

Figura: Empacotamento de P_6 em H_6

Escorpião

- Um único vértice de grau maior a 2 (junção).
- No max. uma perna de comprimento maior a 2.

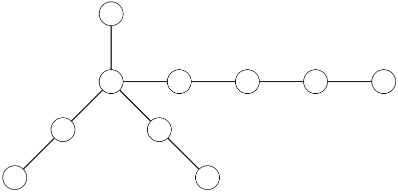
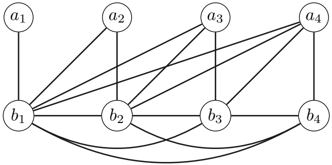


Figura: Escorpião de ordem 10.

Escorpião



(a) H_8

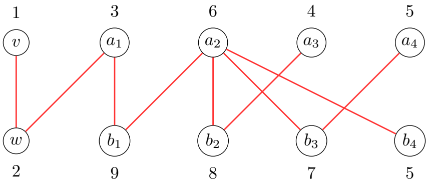


Figura: Empacotamento de escorpião no H_{10}

Conjectura de Gyárfás & Lehel

Limitando el tamanho da sequência

Qual é o maior $s < n$ tal que $T_1, \ldots, T_s$ pode ser empacotado no K_n?

Limitando el tamanho da sequência

Qual é o maior $s < n$ tal que $T_1, \ldots, T_s$ pode ser empacotado no K_n?

Teorema (Bollobás,1983)

Se $s \leq n/\sqrt{2}(\approx 0.7n)$, então $T_1, \ldots, T_s$ pode ser empacotado no K_n.

Limitando el tamanho da sequência

Qual é o maior $s < n$ tal que $T_1, \dots, T_s$ pode ser empacotado no K_n?

Teorema (Bollobás,1983)

Se $s \leq n/\sqrt{2}(\approx 0.7n)$, então $T_1, \dots, T_s$ pode ser empacotado no K_n.

Dado um empacotamento de $T_{k+1}, \dots, T_s$, como empacotar T_k?

Limitando o tamanho da sequência

Dado um empacotamento de $T_{k+1}, \ldots, T_s$, como empacotar T_k?

Se $G = K_n - \cup_{i=k+1}^{n} E(T_i)$,

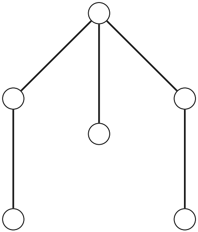
Ideia: Encontrar $H \subseteq G$ tal que $\delta(H) \geq k - 1$.

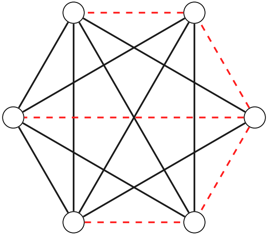
Limitando o tamanho da sequência

Dado um empacotamento de $T_{k+1}, \ldots, T_s$, como empacotar T_k?

Se $G = K_n - \cup_{i=k+1}^{n} E(T_i)$,

Ideia: Encontrar $H \subseteq G$ tal que $\delta(H) \geq k - 1$.





Limitando o tamanho da sequência

Proposição

Se $|E(G)| > \binom{k-1}{2} + (k-2)(n-k+1)$*, então existe* $H \subset G$ *tal que* $\delta(H) \geq k-1$.

Se $s \leq n/\sqrt{2}$ e $G = K_n - \cup_{i=k+1}^{s} E(T_i)$

$\Rightarrow |E(G)| > \binom{k-1}{2} + (k-2)(n-k+1)$.

Podemos melhorar o resultado?

Limitando o tamanho da sequência

Proposição

Se $|E(G)| > \binom{k-1}{2} + (k-2)(n-k+1)$*, então existe* $H \subset G$ *tal que* $\delta(H) \geq k-1$.

Se $s \leq n/\sqrt{2}$ e $G = K_n - \cup_{i=k+1}^{s} E(T_i)$

$\Rightarrow |E(G)| > \binom{k-1}{2} + (k-2)(n-k+1)$.

Podemos melhorar o resultado?

Conjectura (Erdős & Sós, 1963)

Se $|E(G)| > (k-2)n/2$*, então* G *contém qualquer árvore de ordem* k.

Limitando o tamanho da sequência

Conjectura (Erdős & Sós, 1963)

Se $|E(G)| > (k-2)n/2$, então G contém qualquer árvore de ordem k.

Supondo a validez da conjectura anterior, obtemos que

Se $s \leq \sqrt{3}n/2 \approx 0.86n \Rightarrow$ podemos empacotar $T_1, \ldots, T_s$ no K_n.

Variantes da conjectura de Gyárfás & Lehel

Variantes da conjectura

Conjectura (Hobbs et al., 1987)

Uma sequência de árvores $T_1, \ldots, T_n$ pode ser empacotada no $K_{n/2,n-1}$ se n é par.

Variantes da conjectura

Conjectura (Hobbs et al., 1987)

Uma sequência de árvores $T_1, \ldots, T_n$ pode ser empacotada no $K_{n/2,n-1}$ se n é par.

Conjectura (Gerbner et al., 2012)

Uma sequência de árvores $T_1, \ldots, T_k$ pode ser empacotada num grafo k-cromático.

Variantes da conjectura

Conjectura (Hobbs et al., 1987)

Uma sequência de árvores $T_1, \ldots, T_n$ pode ser empacotada no $K_{n/2,n-1}$ se n é par.

Conjectura (Gerbner et al., 2012)

Uma sequência de árvores $T_1, \ldots, T_k$ pode ser empacotada num grafo k-cromático.

Conjectura (Hollingsworth, 2013)

Uma sequência de árvores balanceadas $\hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_n$ pode ser empacotada no $K_{n,n}$.

Variantes da conjectura de Gyárfás & Lehel

Resultados conhecidos

Conjectura (Hobbs et al., 1987)

Uma sequência de árvores $T_1, \ldots, T_n$ pode ser empacotada no $K_{n/2,n-1}$ se n é par.

Restringimos a classe das árvores

- Estrelas e caminhos. (Zaks & Liu, 1976)

Resultados conhecidos

Conjectura (Hobbs et al., 1987)

Uma sequência de árvores $T_1, \ldots, T_n$ pode ser empacotada no $K_{n/2,n-1}$ se n é par.

Restringimos a classe das árvores

- Estrelas e caminhos. (Zaks & Liu, 1976)

Limitando o tamanho da sequência

Podemos empacotar a sequência $T_1, \ldots, T_s$ no K_n

- Se $s \leq (\sqrt{13} - 3)n/2 \approx 0.3n$ (Caro & Roditty, 1990).
- Se $s \leq \sqrt{5/8}n \approx 0.79n$ (Yuster, 1997).

Empacotamento em grafos k-cromáticos

Conjectura (Gerbner et al., 2012)

Uma sequência de árvores $T_1, \ldots, T_k$ pode ser empacotada num grafo k-cromático.

Empacotamento em grafos k-cromáticos

Conjectura (Gerbner et al., 2012)

Uma sequência de árvores $T_1, \ldots, T_k$ pode ser empacotada num grafo k-cromático.

A validez dessa afirmação implica a conjectura de Gyárfás & Lehel.

Empacotamento em grafos k-cromáticos

Conjectura (Gerbner et al., 2012)

Uma sequência de árvores $T_1, \ldots, T_k$ pode ser empacotada num grafo k-cromático.

A validez dessa afirmação implica a conjectura de Gyárfás & Lehel.

Teorema (Gerbner et al., 2012)

Uma sequência de árvores $T_1, \ldots, T_k$ pode ser empacotada num grafo k-cromático se no máximo 3 delas são diferentes de estrelas.

Empacotamento em grafos k-cromáticos

Teorema (Gerbner et al., 2012)

Uma sequência de árvores $T_1, \ldots, T_k$ pode ser empacotada num grafo k-cromático se no máximo 3 delas são diferentes de estrelas.

Faremos a prova para quando no máximo 2 das árvores não são estrelas. Suponha que

- G é grafo k-cromático minimal ($\delta(G) \geq k-1$).
- Classes $C_1, \ldots, C_k$.
- $\forall v \in C_i$ existe $u \in C_j$ tq $uv \in E(G)$ ($j < i$).
- G_i é induzido por $C_k \cup C_{k-1} \cup \ldots \cup C_{k-i+1}$.

Empacotamento em grafos k-cromáticos

Se T_k ou T_{k-1} é uma estrela, podemos fazer o empacotamento como no caso do K_n.

Empacotamento em grafos k-cromáticos

Se T_k ou T_{k-1} é uma estrela, podemos fazer o empacotamento como no caso do K_n.

Suponha que T_k e T_{k-1} não são estrelas, e T_{k-2} e T_{k-3} são estrelas.

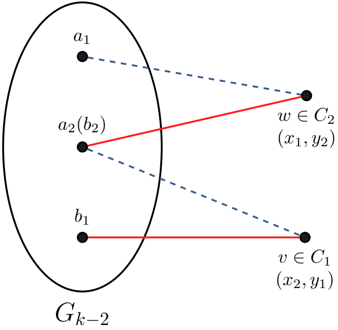
Sejam $T'_k = T_k - \{x_1, x_2\}$ e $T'_{k-1} = T_{k-1} - \{y_1, y_2\}$.

Empacotamento em grafos k-cromáticos

Se T_k ou T_{k-1} é uma estrela, podemos fazer o empacotamento como no caso do K_n.

Suponha que T_k e T_{k-1} não são estrelas, e T_{k-2} e T_{k-3} são estrelas.

Sejam $T'_k = T_k - \{x_1, x_2\}$ e $T'_{k-1} = T_{k-1} - \{y_1, y_2\}$.



Empacotamento em grafos k-cromáticos

Para o caso em que 3 árvores não são estrelas, a seguinte asserção limita a estrutura de T_k.

Asserção

Se T_k contém uma estrela pendurada de ordem s e T_{k-s} é uma estrela, podemos empacotar $T_1, \ldots, T_k$, em G.

Empacotamento em grafos k-cromáticos

Para o caso em que 3 árvores não são estrelas, a seguinte asserção limita a estrutura de T_k.

Asserção

Se T_k contém uma estrela pendurada de ordem s e T_{k-s} é uma estrela, podemos empacotar $T_1, \ldots, T_k$, em G.

Só falta considerar os casos onde T_{k-2} ou T_{k-3} não é uma estrela e T_k tem estrelas penduradas de ordem no max. 3.

A prova se divide em muitos casos dependendo da estrutura de T_k, T_{k-1} e T_{k-2} ou T_{k-3}.

Considerações finais

Considerações finais

- A técnica usada por Bollobás ajudou a obter resultados em variantes da conjectura original.

- Quando restringimos as classes das árvores, as técnicas usadas não fornecem caminho claro para atacar a conjectura em sua forma mais geral.

Obrigado!!

Gracias!!