Algoritmos Numéricos DI/CT/UFES

Roteiro da Aula de Laboratório sobre EDOs
O método Euler para resolução de um sistema de duas equações diferencias ordinárias de 1^a ordem

O objetivo é implementar o método de Euler para resolver um sistema de EDOs de 1^a ordem.

Sistemas de EDOs de 1^a ordem

Sistemas de EDO de 1^a ordem aparecem, com frequência, nas ciências exatas pois são "ferramentas" adequadas para modelar diversos fenômenos do nosso mundo real. Os sistemas mais simples são aqueles formados por duas equações de 1^a ordem.

Seja o sistema de duas equações diferencias, com valores iniciais, tal como o definido abaixo:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(a) = y_{1a} \\ y_2(a) = y_{2a} \end{cases}$$

A solução analítica, em um domínio $D = [a, b]$, é o par de funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ que satisfaz às equações diferenciais e às condições iniciais $y_1(a) = y_{1a}$e $y_2(a) = y_{2a}$ em $D = [a, b]$.

A obtenção da solução (solução exata) é, muita vezes, difícil de ser determinada analiticamente mas existem diversos métodos que podem ser usados para obter a solução de forma numérica.

Métodos conhecidos como métodos de Runge Kutta são bastante empregados na prática. Neste estudo será usado um dos métodos mais simples: o método de Euler (que é também um método Runge Kutta, porém de 1^a ordem).

O método de Euler para duas equações

Quando há duas equacões, as aproximações numéricas para $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são calculadas, sincronizadamente, para $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

Nos métodos de passo simples, a cada passo da discretização do domínio, calcula-se as aproximações para $y_1(x(i+1))$ e para $y_2(x(i+1))$ - ou seja, os valores $y_{1,i+1}$ e $y_{2,i+1}$- a partir dos valores numéricos em x_i, isto é, a partir de $y_{1,i}$ e $y_{2,i}$.

O método de Euler é dado por

$$y_{1,i+1} = y_{1,i} + hf_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i})$$

$$y_{2,i+1} = y_{2,i} + hf_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i})$$

Que pode ser escrito, também, via:

$$\begin{aligned} y_1(i+1) = y_1(i) + h * f_1 \\ y_2(i+1) = y_2(i) + h * f_2 \end{aligned}$$

onde

$f_1 = f_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i})$ é a inclinação da função y_1 em x_i;
$f_2 = f_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i})$ é a inclinação da função y_2 em x_i;
$h = (b - a)/m$;
m é a partição do domínio.

Implementação

Implementar o método Euler (escrevendo uma rotina/script tipo "function") própria para resolver um sistema de duas equações. Os dados de entrada do código da function (com a implementação de Euler) devem ser: a, b, y_{1a}, y_{2a}, f_1, f_2 e m, onde m é o tamanho da partição do domínio. As funções $f_1(x, y_1, y_2)$ e $f_2(x, y_1, y_2)$ devem estar definidas diretamente no programa principal (vide script modelo RodaSistemasEDOS.m).

Os valores das soluções numéricas (ou seja, referentes às funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$) devem ser gravados em vetores, um vetor para cada função.

Resolver os seguintes problemas:

1. Determinar a solução do PVI abaixo (exemplo dos slides)

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) = y_1 + y_2 + 3x \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) = 2y_1 - y_2 - x \\ y_1(0.0) = 1.0 \\ y_2(0.0) = -1.0 \end{cases}$$

em $D = [0.0, 1.0]$.

2. Seja um circuito RLC em paralelo, com a configuração da figura em anexo:

Vide figura em anexo. Créditos: feita por ex alunos meus da Eng. Elétrica.

onde I_1 e I_2 são as correntes (medidas em ampéres) observadas no circuito da esquerda e direita, respectivamente.
V é a tensão da fonte de alimentação e vale $V = 12$ Volts.
R_1 e R_2 são as resistências (medidas em Ohms) e valem $R_1 = 4$ e $R_2 = 6$
L é a indutância do indutor (medida em Henrys) e vale $L = 1$
C é a capacitância do capacitor (medida em Farad) e vale $C = 0.25$.

Utilizando a lei da tensão de Kirchoff, é possível descrever as correntes $I_1(t)$ e $I_2(t)$ via o seguinte modelo matemático:

$$\begin{cases} I_1' = 12 - 4I_1 + 4I_2 \\ I_2' = 4.8 - 1.6I_1 + 1.2I_2 \end{cases}$$

Supondo que todas as cargas e correntes são nulas quando o *switch* é fechado no instante $t = 0$, obter os correntes (valores de $I_1(t)$ e $I_2(t)$) para t em $I = [0, t_{final} = 6min]$, com passos de tamanho $h = 0.1s$.