Algoritmos Numéricos DI/CT/UFES

Roteiro da aula de Laboratório/Exercício sobre métodos de Euler,Taylor e Runge Kutta para resolver EDOs

Objetivo: o objetivo é guiar o estudo sobre os métodos de Euler, de Taylor de 2^a ordem e de Runge Kutta de de 2^a ordem, métodos que resolvem, numericamente, EDOs de 1^a ordem, com valor inicial (PVI), do tipo abaixo:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = y(x_0) = y_a \end{cases}$$

em $D = [a, b]$.

Parte 1:

1. Ler as notas de aulas e ver os slides sobre os métodos e fazer o exercício abaixo. O exercício deve ser feitos à mão (se quiserem podem, é claro, usar os códigos disponibilizados para conferir os resultados). Fazer o exercício abaixo (fazer no papel, à mão). Obs: este é o exemplo que está nos slides mas nos slides usei outra partição (outra discretização do domínio).

   Dado o PVI abaixo

   $$\begin{cases} y' = -x/y \\ y(1.0) = 4.0 \end{cases}$$

   (a) Resolva por Euler em $I = [1.0, 2.2]$ dando $m = 2$ passos (2 subdivisões do domínio, ou seja, $h = (2.2 - 1.0)/2 = 0.6$.

   (b) Resolva pelo método baseado na série de Taylor de 2^a ordem, em $I = [1.0, 2.2]$ dando $m = 2$ passos (2 subdivisões do domínio).

   Veja que como $f(x, y) = y' = -\frac{x}{y} = -xy^{-1}$ é uma função que depende de x e de y então para obter y''=f' deve se empregar a seguinte regra:

   $$y'' = f' = (\frac{df}{dx}) = (\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx}) + (\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx})$$

   Assim, obtendo as derivadas:
   A derivada de f em relação à variavel x : $\frac{\partial f}{\partial x} = -y^{-1}$, $\frac{dx}{dx} = 1.0$
   A derivada de f em relação à variavel y : $\frac{\partial f}{\partial y} = -x(-1)y^{-2}$, $\frac{dy}{dx} = -xy^{-1}$
   Portanto, com as duas contribuições

   $$f' = -y^{-1}(1.0) + (-x(-1)y^{-2})(-xy^{-1})$$

   $$f' = -y^{-1} + (xy^{-2})(-xy^{-1})$$

   $$f' = \frac{-1}{y} - \frac{x^2}{y^3}$$

   Fazendo algumas simplificações algébricas, tem-se

   $$y'' = f' = \frac{x^2 + y^2}{-y^3}$$

   Parte 2 :

2. Com as implementações dos métodos de Euler e de Taylor de 2^a ordem fornecidas (códigos Euler.m e Taylor.m) determinar a solução do PVI de 1^a ordem abaixo, em $I = [1.0, 2.2]$

   $$\begin{cases} y' = -x/y \\ y(1.0) = 4.0 \end{cases}$$

(a) via Euler com $m = 3$ e com $m = 6$.

(b) via o método baseado na série de Taylor de 2^a ordem, com $m = 3$ e $m = 6$.

Observe que no método de Euler implementado, os dados de entrada são, nessa ordem: a, b, y_a, m e f. A f é um argumento de entrada e deve ser definida previamente à chamada do método implementado. Para isso, basta definir a f na janela de comandos usando a sintaxe já vista. Relembrando...
Para definir uma expressão para um função matemática usar a seguinte sintaxe:

```
Sintaxe:
nomefunçao =  @(lista de variáveis)   expressao
Exemplos:
>> q  =    @(x)   x^2
>> h  =    @(x,y) x^5*sen(y)
```

Assim, por exemplo, a chamada do médoto de Euler, na linha de comando no octave, para o PVI acima, com $m = 3$, pode ser feita via:

```
>> f = @(x,y) -x/y;
>> [X,YEuler]= Euler (1.0, 2.2, 4.0, 3, f)
```

ou, de forma simliar:

```
>> f = @(x,y) -x/y;
>> a = 1.0
>> b = 2.2
>> ya= 4.0
>> m= 3
>> [X,YEuler]  = Euler (a, b, ya, m, f)
```

Observe, também, que no método de Taylor os dados de entrada são, nessa ordem: são: a,b, y_a, m, f e f' onde f' é derivada de f. Assim, por exemplo, a chamada para o problema acima, com $m = 3$, por Taylor, pode ser feita via:

```
>> f  = @(x,y) -x/y;
>> df = @(x,y) -1.0*( x.^2 + y.^2)/(y.^3);
>> a = 1.0
>> b = 2.2
>> ya= 4.0
>> m = 3
>> [X,YTaylor]  = Taylor(a, b, ya, m, f, df);
```

3. Com as implementações dos métodos de Euler e de Taylor de 2^a ordem fornecidas (códigos Euler.m e Taylor.m) determinar a solução do PVI de 1^a ordem abaixo, em $D = [0.0; 1.0]$

$$\begin{cases} y' = f(x,y) = -x * y \\ y(a = 0) = y_0 = 1.0 \end{cases}$$

(a) via Euler com $m = 10$
(b) via o método baseado na série de Taylor de 2^a ordem, com $m = 10$.

Lembre que, no método de Euler implementado, os dados de entrada estão, nessa ordem: a, b, y_a, m e f, onde m é o tamanho da partição do domínio. Assim, a chamada da função, para o problema acima, com $m = 10$, por Euler, pode ser feita via:

```
>> f = @(x,y) -x*y;
>> m = 10
>> [X,YEuler]  = Euler (0.0, 1.0, 1.0, m ,f)
```

4. Sabendo que a solução exata do problema acima é:

$$y_{ex}(x) = e^{-(x^2/2)}$$

(a) Calcule o erro verdadeiro da solução obtida por Euler em cada ponto x_i da discretização, com $m = 10$.
Calcule o erro verdadeiro via:

$$Erro(x_i) = |y_{ex}(x_i) - y_{Euler}(x_i)|$$

Dica: um possível caminho é definir a função solução exata - a funcão $y(x)$- e calculá-la nos pontos x_i da discretização, isto é, nos pontos $x = a + h, x = a + 2h, ..., x = b)$, gravando as imagens - $y(x_i)$ - em um vetor (por exemplo, chamado de Yexato). Como a saída da implementação de Euler é um vetor (na verdade, são dois vetores, tanto o X e quanto o YEuler), compare os valores de Yexato com YEuler.

```
>> f = @(x,y) -x*y;
>> [X,YEuler]  = Euler (0.0, 1.0, 1.0, m ,f)
>> y = @(x)  e.^((-1)*((x.^2)/2) ) ;
>> Yexato= y(X)
```

(b) Calcule o erro verdadeiro da solução obtida pelo método de Taylor de 2^a ordem em cada ponto x_i da discretização. Calcule o erro verdadeiro via:

$$Erro(x_i) = |y_{ex}(x_i) - y_{Taylor}(x_i)|$$

Faça isso usando $m = 10$.

5. Implemente um novo método, o método descrito abaixo, para obter a solução do seguinte PVI (mesmo problema do exercício anterior).

$$\begin{cases} y' = f(x, y) = -x * y \\ y(a = 0) = y_0 = 1.0 \end{cases}$$

em $D = [0.0; 1.0]$ com $m = 10$

Descrição do método
O método de Runge-Kutta de 2^a ordem.
Há uma outra classe de métodos, conhecidos como métodos de Runge-Kutta, que resolvem numericamente EDOs mas que não necessitam do cálculo das derivadas de $f(x, y)$.

Nos métodos de Runge-Kutta, para calcular a aproximação y_{i+1}, a aproximação da solução em x_{i+1}, a ideia é fazer várias estimativas da inclinação, isto é, calcular $f(x, y)$ em vários pontos, no passo. Os métodos de Runge-Kutta de 2^a ordem, por exemplo, calculam duas inclinações (comumente denominadas de k_1 e k_2) para efetuar o passo. Nesse método, em uma parte do passo, se usa uma inclinação k_1, que é a inclinação da função $y(x)$ no ponto de "partida"' (x_i, y_i) e na outra parte do passo, emprega-se outra inclinação k_2.
As inclinações, no método mais clássico, são dadas por:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1)$$

e o valor de y_{i+1} é calculado, por

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}k_1 + \frac{h}{2}k_2$$

Compare a solução obtida pelo Runge-Kutta de 2^a ordem, com a solução obtida pelo método baseado na série de Taylor de 2^a ordem, com $m = 10$.

6. Seja um circuito simples, do tipo RL. A equação diferencial que descreve a corrente $i(t)$ é dada por:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \frac{V - R*i}{L} \\ i(t=0) = 0 \end{cases}$$

em $D = [0.0; 1.0]$ com $m = 10$

onde i é a corrente, L a indutância, R a resistência e V a tensão.

Sabendo que $i(t = 0) = 0$ e considerando que $L = 0.5$ Henrys, $R = 10.0$ Ohms e $V = 12$ Volts (a) Obtenha os valores de $i(t)$, resolvendo o problema via o método de Runge Kutta de 2^a ordem, com m=20, de forma a obter a solução em vários instantes de tempo t em $D = [0.0, 0.5]$.
(b) Trace o grafico de $i(t)$ em função de t, em D.

Observe que, para este problema:
(i) a variável independente é a variável t (que corresponde ao x nas expressões dos métodos já exibidos e também nas implementações fornecidas).
(ii) a derivada conhecida $i' = f(t, i)$ é a expressão $f(t, i) = \frac{V - R*i}{L}$ e que, neste caso, a variável t não aparece explicitamente na função f.