Actividad 10, 11 y 12 de Física Computacional 1

José Antonio Sanabria Vázquez
Departamento de Física
Universidad de Sonora

May 3, 2021

0.1 Introducción

En el siguiente texto vamos a darnos a la idea de todos los métodos que utilizamos para poder abordar los problemas vistos en la sección 10, 11 y 12, y una breve descripción de que fue lo que se utilizo, tales como los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales, también los diferentes tipos de condiciones iniciales y el método que más utilizamos que es el diferencias finitas.

0.2 Parabólica, Hiperbólicas y Elípticas

- **Parabólica**

  Las ecuaciones parabólicas corresponden a flujos en los que aparecen mecanismos disipativos debidos, por ejemplo, a efectos viscosos o de conducción térmica; en estos problemas la solución presenta distribuciones suaves de magnitudes, y los gradientes tienden a reducirse con el tiempo si las condiciones de contorno son estacionarias. Un ejemplo típico de problemas parabólicos de este tipo es el de la conducción no estacionaria de calor, que en el caso unidimensional está descrito por una ecuación de la forma

  $$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}.$$

- **Hiperbólica**

  Como ya se ha indicado, si no existen mecanismos disipativos, la solución permanece con amplitud constante en el tiempo si las ecuaciones son lineales, pudiendo incluso crecer si las ecuaciones son no lineales. Este tipo de solución es típica en flujos descritos por ecuaciones hiperbólicas. El ejemplo más sencillo de este tipo de problemas es la propagación de ondas descrita por una ecuación lineal de la forma

  $$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}.$$

  Las ecuaciones que describen flujos no viscosos y no estacionarios son también de tipo hiperbólico no lineales. También es hiperbólica la ecuación lineal de convección pura siguiente:

  $$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0,$$

- **Elípticas** En mecánica de fluidos las ecuaciones elípticas corresponden siempre a problemas estacionarios. El ejemplo más simple es el de la ecuación de Laplace

  $$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0,$$

que describe el flujo potencial incompresible o la transmisión de calor por conducción en ausencia de fuentes de calor (Φ sería la temperatura en este caso).

0.3 Dirichlet, Neumann y Robin (mixto).

- **Dirichlet** En matemáticas, la condición de frontera de Dirichlet (o de primer tipo) es un tipo de condición de frontera o contorno, cuando en una ecuación diferencial ordinaria o una en derivadas parciales, se le especifican los valores de la solución que necesita la frontera del dominio. La cuestión de hallar las soluciones a esas ecuaciones con esta condición se le conoce como problema de Dirichlet.

  Los siguientes ejemplos pueden considerarse como condiciones de frontera de Dirichlet:

  - En ingeniería mecánica y civil (curva elástica), donde un extremo de una viga está fija en el espacio.

  - En termodinámica, donde una superficie tiene una temperatura fija.

  - En electrostática, donde un nodo de un circuito tiene un voltaje fijo o constante.

  - En fluidodinámica, la condición de no deslizamiento para fluidos viscosos establece que en una frontera sólida, el fluido tendrá velocidad relativa nula.

- **Neumann**

  En matemáticas, la condición de frontera de Neumann (o de segundo tipo) es un tipo de condición de frontera o contorno, se presenta cuando a una ecuación diferencial ordinaria o en derivadas parciales, se le especifican los valores de la derivada de una solución tomada sobre la frontera o contorno del dominio.

- **Robin**

  En matemáticas, la condición de frontera de Robin (o de tercer tipo) es un tipo de condición de frontera o contorno, cuando en una ecuación diferencial ordinaria o en una derivadas parciales, se le específica una combinación lineal de los valores de una función y y los valores de su derivada sobre la frontera del dominio.

  Las condiciones de frontera de Robin son una combinación ponderada de las condiciones de Dirichlet y Neumann. Es el contraste de la condiciones de frontera mixtas, las cuales son condiciones de frontera de diferentes tipos especificadas en diferentes subconjuntos de la frontera. Las condiciones de frontera de Robin también se denominan condiciones de frontera de impedancia, por su aplicación en problemas electromagnéticos.

0.4 Método de Diferencias Finitas

El Método de diferencias finitas es un método de carácter general que permite la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales definidas en recintos finitos. Es de una gran sencillez conceptual y constituye un procedimiento muy adecuado para la resolución de una ecuación bidimensional como la que hemos planteado en las actividades 10,11 y 12.

La ecuación en diferencias finitas proporciona una descripción fundamental del sistema DSP al que representa. Si embargo , a veces, se necesita cierta información adicional denominadas condiciones iniciales, auxiliares o de contorno que son las que utilizamos como las de Dirichlet, Neumann y Robin

Otro aspecto importante es que las diferencias finitas aproximan cocientes diferenciales a medida que h se acerca a cero. Así que se pueden usar diferencias finitas para aproximar derivadas. Esta técnica se emplea a menudo en análisis numérico, especialmente en ecuaciones diferenciales numéricas ordinarias, ecuaciones en diferencias y ecuación en derivadas parciales. Los métodos resultantes reciben el nombre de métodos de diferencias finitas.

0.5 Solución de la Ecuación del Calor (Actividad 10)

En el trabajo de la actividad 10 utilizamos la ecuacion de calor tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

donde la constante κ es el coeficiente de difusividad

La Ecuación del Calor describe el flujo de calor en una región mediante los cambios de la Temperatura $u(x,t)$.

En un medio unidimensional x, la ecuación se simplifica a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

Entonces con el método de diferencias finitas utilizando serie de Taylor para la resolución del ecuaciones diferenciales llegamos a una diferencia finita centrada de orden superior

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^3)$$

Entonces, a partir de esta ecuación y utilizando condiciones de frontera tipo Neumann llegamos a la solución de 2 ejercicios diferentes, con dos condiciones iniciales diferentes.

Github con la resolución y el codigo de los 2 ejercicios antes mencionados. `https://github.com/AntonioSanabria26/FisicaComputacional1/blob/master/Actividad_10/Actividad10.ipynb`

0.6 Solución de la Ecuación de Onda (Actividad 11)

Para la solución de la ecuación de onda con la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t)$$

donde c^2 es la velocidad de propagación de la información. La función $u(x, y, z, t)$ representa la presión en una onda acústica, la intensidad de un campo electromagnético, el desplazamiento respecto a un nivel de referencia como lo puede ser la amplitud de una onda superficial en la superficie del agua o el desplazamiento respecto a la horizontal de una cuerda vibrante.

En una dimensión, por ejemplo el caso de una cuerda vibrante, la Ecuación de Onda se simplifica a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + f(x, t) \qquad x \in (0, L], t \in (0, T]$$

Requerimos definir 4 condiciones: 2 iniciales (derivada de segundo orden en t) y 2 a la frontera (segundo orden en el espacio), para encontrar la solución.

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= I(x) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) &= 0 \\ u(0, t) &= 0 \\ u(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

Se requiere también especificar el valor de la constante c y la función $I(x)$.

Entonces resolviendo la ecuación de onda con el método de diferencias finitas tenemos que

$$u_j^1 = u_j^0 + \frac{C^2}{2}(u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0)$$

Entonces con esta información en el trabajo de la actividad 11, resolvimos 6 ejercicios, donde la resolución del problema y todos los códigos junto con sus condiciones de frontera iniciales quedan en el siguiente Github

`https://github.com/AntonioSanabria26/FisicaComputacional1/blob/master/Actividad_11/Actividad11.ipynb`

0.7 Solución de la Ecuación de Poisson(Actividad 12)

Lo ultimo que utilizamos, en la actividad 12 , fue la resolución de la ecuación de Poisson donde es de tipo Elíptico

La solución de la Ecuación de Poisson

$$-\nabla^2 u(x, y, z) = f(x, y, z)$$

codigo Condiciones de Dirichlet (especificando valores de la función u) Condiciones de Neumann (especificando valores de la derivada de la función u perpendicular a la frontera $\partial u/\partial n$). La Ecuación de Poisson aparece en problemas de campos gravitatorios, campos eléctricos y otros problemas en la Física.

La Ecuación de Poisson es la generalización de la Ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 u = 0$$

Al final en esta actividad lo que fue, es copiar un código que ya existía en el repositorio de alguna persona, y fue utilizarlo con diferentes tipos de condiciones, como por ejemplo las de Dirichlet, las de Neumann y hasta las de Robin.

Por lo que el código que utilizamos y la resolución de todo los problemas dejados por el profesor están en el siguiente apartado en de Github

`https://github.com/AntonioSanabria26/FisicaComputacional1/blob/master/Actividad_12/Actividad12.ipynb`

0.8 Resumen y conclusiones

En conclución podemos decir que todos estos tipos de trabajos estan hechos para poder fomentar el desarrollo de nuestra capacidad para la resolución de las funciones de ecuaciones diferenciales que a su vez son aplicadas a la programación, Obviamente no nos podemos quedar con que solo estan en la programación ya que como vimos estamos resolviendo problemas cotidianos tales como una ecuación de calor, que se puede utilizar en la modulación de sistemas como la tierra, también en el segundo caso vimos la ecuaciones de onda, que en el caso de esta vimos como se resolvia la ecuacion de Schrodinger y al final la ecuación de Poisson la cual tambien tarde o temprano vamos a llegar tener que usarla para un problema fisico. Por lo que repito y reitero, aprender a programar este tipo de ecuaciones diferenciales en Python será de gran ayuda en el futuro de mi formación