Universidade Do Minho
Engenharia Informática
Investigação Operacional
A100533 - António Silva; A100600 - Diogo Barros; A100745 - Pedro Silva

Trabalho Prático 1

25/03/2023

1 - Formulação do Problema

Neste trabalho prático, o problema que se pretende resolver é o de empacotamento de itens de vários comprimentos, em contentores de determinados comprimentos também.

Este tipo de problemas, está envolvido numa classe de problemas, que respeita que os artigos de diferentes tamanhos devem ser embalados num número finito de contentores, cada um com uma determinada capacidade fixa (bin packing problems) e na classe de problemas do corte em stock, que tem o objetivo de minimizar o desperdício de material.

O objetivo deste problema é determinar como empacotar os itens nos contentores de forma a minimizar a quantidade total de contentores utilizados. Cada item deve ser atribuído a um único contentor, e a soma dos comprimentos dos itens em cada contentor não pode exceder a capacidade do mesmo.

O número de estudante do grupo com maior número de inscrição, é o 100745 (xABCDE) e com este número obtemos as tabelas que se podem observar a seguir.

CONTENTORES	
COMPRIMENTO	QUANTIDADE
11	ILIMITADO
10	1
7	5

ITENS	
COMPRIMENTO	QUANTIDADE
1	0
2	15
3	0
4	13
5	5

Fig. 1 - Tabelas resultantes das listas de contentores e de itens

NOTA: Ao longo do relatório, não iremos relatar muito sobre os itens 1 e 3, visto que estes têm quantidade nula.

2 - Modelo

No nosso modelo, temos como principal objetivo obter um resultado em que a soma dos comprimentos dos contentores usados, seja a menor possível. Para isso, usamos principalmente métodos de combinações para conseguirmos atingir esse objetivo.

CONTENTORES DE 11	X1	X2	X3	X4	X5	X6
ITEM DE 2	0	1	3	1	3	5
ITEM DE 4	0	1	0	2	1	0
ITEM DE 5	2	1	1	0	0	0
ESPAÇO QUE SOBROU	1	0	0	1	1	1

CONTENTORES DE 10	X7	X8	X9	X10	X11	X12
ITEM DE 2	0	0	2	1	3	5
ITEM DE 4	0	1	0	2	1	0
ITEM DE 5	2	1	1	0	0	0
ESPAÇO QUE SOBROU	0	1	1	0	0	0

CONTENTORES DE 7	X13	X14	X15
ITEM DE 2	1	1	3
ITEM DE 4	0	1	0
ITEM DE 5	1	0	0
ESPAÇO QUE SOBROU	0	1	1

Fig. 2 - Tabelas das combinações resultantes das listas de contentores e de itens

2.1 - Variáveis de Decisão

i $\in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$;

O xi, representa a combinação que foi criada para um contentor, tendo em conta, que nessa combinação vai utilizar itens que podem ter comprimento 2, 4 e 5.

NOTA: O item de comprimento 1 e 3 não são referenciados, porque têm quantidade nula.

2.2 - Parâmetros

xi : contentor resultado da combinação.

Os parâmetros a respeitar são que os contentores de i = 1,...,6, não podem ultrapassar capacidade de 11, os contentores de i = 7,...,12, que não podem ultrapassar a capacidade de 10 e os contentores de i = 13,...,15, que não podem ultrapassar a capacidade de 7.

2.3 - Função Objetivo

Minimizar a soma dos comprimentos dos contentores usados.

min : $\sum_{i=1}^{15} ti * xi$.

NOTA: ti = tamanho do contentor que corresponde ao xi, como visto nos parâmetros;

2.4 - Restrições

```
min: 11 x1 + 11 x2 + 11 x3 + 11 x4 + 11 x5 + 11 x6 + 10 x7 + 10 x8 + 10 x9 + 10 x10 + 10 x11 + 10 x12 + 7 x13 + 7 x14 + 7 x15;

/* Variable bounds */

R1.RESTRICAO.ITEM.5.CONTENTOR11 : 2 x1 + 1 x2 + 1 x3 <= 5;
R1.RESTRICAO.ITEM.4.CONTENTOR11 : 1 x2 + 2 x4 + 1 x5 <= 13;
R1.RESTRICAO.ITEM.2.CONTENTOR11 : 1 x2 + 3 x3 + 1 x4 + 3 x5 + 5 x6 <= 15;

R2.RESTRICAO.ITEM.5.CONTENTOR10 : 2 x7 + 1 x8 + 1 x9 <= 5;
R2.RESTRICAO.ITEM.4.CONTENTOR10 : 1 x8 + 2 x10 + 1 x11 <= 13;
R2.RESTRICAO.ITEM.2.CONTENTOR10 : 2 x9 + 1 x10 + 3 x11 + 5 x12 <= 15;

R3.RESTRICAO.ITEM.5.CONTENTOR7 : 1 x13 <= 5;
R3.RESTRICAO.ITEM.4.CONTENTOR7 : 1 x14 <= 13;
R3.RESTRICAO.ITEM.2.CONTENTOR7 : 1 x13 + 1 x14 + 3 x15 <= 15;

R4.RESTRICAO.FINAL.ITEM5: 2 x1 + 1 x2 + 1 x3 + 2 x7 + 1 x8 + 1 x9 + 1 x13 = 5;
R4.RESTRICAO.FINAL.ITEM4: 1 x2 + 2 x4 + 1 x5 + 1 x8 + 2 x10 + 1 x11 + 1 x14 = 13;
R4.RESTRICAO.FINAL.ITEM2: 1 x2 + 3 x3 + 1 x4 + 3 x5 + 5 x6 + 2 x9 + 1 x10 + 3 x11 + 5 x12 + 1 x13 + 1 x14 + 3 x15 = 15;

R5.RESTRICAO.CONTENTOR11: 1 x1 + 1 x2 + 1 x3 + 1 x4 + 1 x5 + 1 x6 >= 0;
R5.RESTRICAO.CONTENTOR10: 1 x7 + 1 x8 + 1 x9 + 1 x10 + 1 x11 + 1 x12 <= 1;
R5.RESTRICAO.CONTENTOR7: 1 x13 + 1 x14 + 1 x15 <= 5;

int x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12, x13, x14, x15;
```

Fig. 3 - Ficheiro Input com a função-objetivo e as suas restrições.

- Nas restrições do tipo **R1, R2, R3**, estamos a restringir a quantidade máxima de cada um dos itens a usar, nos diferentes comprimentos de contentores, de maneira a que, o LPSolve, nos obtenha a melhor solução possível.
- Na restrição do tipo **R4**, depois de o programa calcular as soluções das restrições anteriores, as mesmas vão ser aplicadas nas **R4**, para que o programa verifique que as quantidades de cada item vão ser respeitadas.
- Por fim, na restrição do tipo **R5**, com as restrições anteriores bem definidas, o programa vai tentar garantir que as combinações calculadas, com comprimentos de 11, 10 e 7, respeitam as quantidades dos contentores desse comprimento.

3 - Solução Ótima

Variables	MILP ...	MILP ...	result
	116	112	112
x1	1	0	0
x2	0	3	3
x3	1	0	0
x4	6	4	4
x5	0	0	0
x6	1	1	1
x7	1	0	0
x8	0	0	0
x9	0	0	0
x10	0	1	1
x11	0	0	0
x12	0	0	0
x13	0	2	2
x14	1	0	0
x15	0	0	0

Fig. 4 - Output com os resultados da função objetivo.

```
Model name:  'LPSolver' - run #1
Objective:   Minimize(R0)

SUBMITTED
Model size:       15 constraints,      15 variables,           67 non-zeros.
Sets:                                   0 GUB,                  0 SOS.

Using DUAL simplex for phase 1 and PRIMAL simplex for phase 2.
The primal and dual simplex pricing strategy set to 'Devex'.


Relaxed solution              111.2 after          7 iter is B&B base.

Feasible solution               116 after         54 iter,        19 nodes (gap 3.5%)
Improved solution               112 after         62 iter,        27 nodes (gap 0.0%)

Optimal solution                112 after         62 iter,        27 nodes (gap 0.0%).

Relative numeric accuracy ||*|| = 0

 MEMO: lp_solve version 5.5.2.11 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.
      In the total iteration count 62, 0 (0.0%) were bound flips.
      There were 12 refactorizations, 0 triggered by time and 0 by density.
       ... on average 5.2 major pivots per refactorization.
      The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 38 NZ entries, 1.0x largest basis.
      The maximum B&B level was 11, 0.4x MIP order, 7 at the optimal solution.
      The constraint matrix inf-norm is 5, with a dynamic range of 5.
      Time to load data was 0.006 seconds, presolve used 0.004 seconds,
       ... 0.023 seconds in simplex solver, in total 0.033 seconds.
```

Fig. 5 - Output do terminal do LPSolve.

Depois de introduzirmos o nosso modelo, no LPSolve, com a ajuda das restrições que criámos, a função obteve as soluções da **Figura 4**.

O LPSolve determinou, que as combinações calculadas, mais favoráveis para a solução ótima seriam então, 3 combinações de x2, 4 combinações de x4, 1 combinação de x6, 1 combinação de x10 e 2 combinações de x13.

Empacotamento das combinações obtidas:

- A combinação de **x2** representa um contentor de comprimento 11, que no seu interior contém 1 item de comprimento 2, 1 item de comprimento 4 e 1 item de comprimento 5, ocupando por completo esse contentor.
- A combinação de **x4** representa um contentor de comprimento 11, que no seu interior contém 1 item de comprimento 2 e 2 itens de comprimento 4, sobrando apenas um espaço de comprimento 1.
- A combinação de **x6** representa um contentor de comprimento 11, que no seu interior contém 5 itens de comprimento 2, sobrando apenas um espaço de comprimento 1..
- A combinação de **x10** representa um contentor de comprimento 10, que no seu interior contém 1 item de comprimento 2 e 2 itens de comprimento 4, ocupando por completo esse contentor.
- A combinação de **x13** representa um contentor de comprimento 7, que no seu interior contém 1 item de comprimento 2 e 1 item de comprimento 5, ocupando por completo esse contentor.

Por fim, a solução ótima das **Figuras 4 e 5**, é obtida pela seguinte fórmula:

- **(11 x 3) + (11 x 4) + (11 x 1) + (10 x 1) + (7 x 2) = 112.**

NOTA: As tabelas das combinações estão representadas na Figura 2.

4 - Validação do Modelo

COMBINAÇÕES DA SOLUÇÃO ÓTIMA	X2	X4	X6	X10	X13	TOTAIS
ITEM DE 2	1	1	5	1	1	15
ITEM DE 4	1	2	0	2	0	13
ITEM DE 5	1	0	0	0	1	5
ESPAÇO A OCUPAR	11	11	11	10	7	50
ESPAÇO OCUPADO	11	10	10	10	7	48
NÚMERO DE COMBINAÇÕES USADAS	3	4	1	1	2	11

Fig. 6 - Tabela de valores de nº de itens e contentores usados e de espaços a ocupar e ocupados.

Com ajuda da tabela, vamos seguir então com a validação do projeto:

- **Quantidades de itens usadas:** inicialmente tínhamos de empacotar 15 itens de comprimento 2, 13 de itens de comprimento 4 e 5 itens de comprimento 5, com recurso na tabela é possível demonstrar que foram cumpridas as quantidades a usar.
  DEMONSTRAÇÃO:
  Nº de itens de compr. 2: (3 x 1) + (4 x 1) + (1 x 5) + (1 x 1) + (2 x 1) = 15;
  Nº de itens de compr. 4: (3 x 1) + (4 x 2) + (1 x 0) + (1 x 2) + (2 x 0) = 13;
  Nº de itens de compr. 5: (3 x 1) + (4 x 0) + (1 x 0) + (1 x 0) + (2 x 0) = 5;
- **Quantidades de contentores usados:** inicialmente tínhamos para empacotar, contentores de comprimento 11 ilimitados, 1 contentor de comprimento 10 e 5 contentores de comprimento de 7, com recurso na tabela é possível demonstrar que foram cumpridas as quantidades a usar.
  DEMONSTRAÇÃO:
  Nº de contentores. de compr. 11 (x2,x4,x6): 3 + 4 + 1 = 8 (ilimitados);
  Nº de contentores. de compr. 10 (x10): 1 = 1 (esgotou);
  Nº de contentores. de compr. 7 (x13): 1 + 2 = 3 (sobraram 2);

- **Espaço usado:** inicialmente tínhamos contentores de comprimento 11, comprimento 10 e de comprimento de 7, com recurso na tabela é possível demonstrar que o espaço usado não superou os comprimentos dos contentores a usar.
  DEMONSTRAÇÃO:
  Combinação de compr. 11 (x2): (1 x 2) + (1 x 4) + (1 x 5) = 11 = 11;
  Combinação de compr. 11 (x4): (1 x 2) + (2 x 4) + (0 x 5) = 10 (menor que 11);
  Combinação de compr. 11 (x6): (5 x 2) + (0 x 4) + (0 x 5) = 10 (menor que 11);
  Combinação de compr. 10 (x10): (1 x 2) + (2 x 4) + (0 x 5) = 10 = 10;
  Combinação de compr. 7 (x13): (1 x 2) + (0 x 4) + (1 x 5) = 7 = 7;

NOTA: Sempre que usamos a palavra combinação, estamos a querer referir contentor (COMBINAÇÃO == CONTENTOR).