Trabajo Final de Licenciatura en Ciencias de la Computación

Antonio Mondejar

17 de junio de 2025

1. Marco Teórico: Lógica 'Knowing How' multi-agente

Durante toda la sección, consideraremos a Prop como un conjunto no vacío de variables proposicionables con cardinalidad contable y a Agt como un conjunto no vacío de agentes con cardinalidad contable.

Definición 1.1 El lenguaje $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$está compuesto por las fórmulas dadas por la gramática:

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}(\varphi, \varphi),$$

donde $p \in \mathsf{Prop}$ e $i \in \mathsf{Agt}$. Las constantes booleanas son definidas de la forma usual. Las fórmulas de la pinta $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}(\psi, \varphi)$ deben ser leídas como "cuando vale ψ, el agente i sabe cómo hacer que φ valga". ⊣

A las fórmulas de $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$ las interpretaremos sobre grafos dirigidos etiquetados (o digo sistemas de transiciones etiquetados?), en donde las aristas representarán las acciones disponibles para los agentes.

Definición 1.2 (Acciones y planes) Sea Act un conjunto enumerable de nombres de acciones, y sea Act^* el conjunto de secuencias finitas de elementos de Act. A los elementos de Act^* los llamaremos planes, siendo ϵ el plan vacío. Sea $\sigma \in \mathsf{Act}^*$, denotaremos $|\sigma|$ al largo de σ (notar $|\epsilon| = 0$). Para un plan σ y $0 \leq k \leq |\sigma|$, el plan σ_k es el prefijo de σ hasta la $k-$ésima posición inclusive. Para $0 < k \leq |\sigma|$, la acción $\sigma[k]$ es la que se encuentra en la $k-$ésima posición de σ. ⊣

Esta definición revisar que entra en conflicto con la demo de contracción por bisimulación, porque uso $\sigma_1, ..., \sigma_k$ para enumerar un conjunto de planes.

Todavía no defino bien bien lo que son los modelos.

Definición 1.3 Sea $\{\mathrm{R}_a \subseteq \mathrm{W} \times \mathrm{W} \mid a \in A$, para algún $A \subseteq \mathsf{Act}\}$ una colección de relaciones binarias sobre W. Definimos $\mathrm{R}_\epsilon := \{(w, w) \mid w \in \mathrm{W}\}$ y, para $\sigma \in \mathsf{Act}^*$ y $a \in \mathsf{Act}$, $\mathrm{R}_{\sigma a} := \{(w, v) \in \mathrm{W} \times \mathrm{W} \mid$ existe $u \in \mathrm{W}$ tal que $(w, u) \in \mathrm{R}_\sigma$ y $(u, v) \in \mathrm{R}_a\}$. Luego sea $u \in \mathrm{W}$ y $\sigma \in \mathsf{Act}^*$, definimos $\mathrm{R}_\sigma(u) := \{v \in \mathrm{W} \mid (u, v) \in \mathrm{R}_\sigma\}$, y para $U \subseteq \mathrm{W}$ definimos $\mathrm{R}_\sigma(U) := \bigcup_{u \in U} \mathrm{R}_\sigma(u)$ ⊣

2. Contracción por Bisimulación para Lógica 'Knowing How'

Lema 1 *Sea* $\mathcal{M} = \langle \mathrm{W}, \mathrm{R}, \{\mathrm{S}_i\}_{i\in\mathsf{Agt}}, \mathrm{V}, \mathsf{Act}\rangle$ *un modelo, y sean* w, $v \in \mathrm{W}$ *tales que* $\mathrm{V}(w) = \mathrm{V}(v)$ *entonces para toda* φ *proposicional se cumple que,*

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \quad \textit{si y sólo si} \quad \mathcal{M}, v \models \varphi \qquad \lhd$$

Demostración. 1 Sea $\mathcal{M} = \langle \mathrm{W}, \mathrm{R}, \{\mathrm{S}_i\}_{i\in\mathsf{Agt}}, \mathrm{V}, \mathsf{Act}\rangle$ y w, $v \in \mathrm{W}$ tales que $\mathrm{V}(w) = \mathrm{V}(v)$. La demostración es por inducción estructural sobre φ. Recordar que φ es una fórmula **proposicional**.

- Caso base: $\varphi = p$ donde $p \in \mathsf{Prop}$.
  Notar que $\mathcal{M}, w \models \varphi$ si y sólo si $p \in \mathrm{V}(w)$.
  Ahora bien, como $\mathrm{V}(w) = \mathrm{V}(v)$, $p \in \mathrm{V}(w)$ si y sólo si $p \in \mathrm{V}(v)$.
  Finalmente, por la definición de $\models$, $p \in \mathrm{V}(v)$ si y sólo si $\mathcal{M}, v \models \varphi$.
- Caso inductivo: La hipótesis inductiva establece que, para ψ una subfórmula de φ, se cumple que $\mathcal{M}, w \models \psi$ si y sólo si $\mathcal{M}, v \models \psi$.
  - Caso $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$.
    Por definición de $\models$, $\mathcal{M}, w \models \psi_1 \vee \psi_2$ si y sólo si $\mathcal{M}, w \models \psi_1$ o $\mathcal{M}, w \models \psi_2$.
    Por hipótesis inductiva, $\mathcal{M}, w \models \psi_1$ o $\mathcal{M}, w \models \psi_2$ si y sólo si $\mathcal{M}, v \models \psi_1$ o $\mathcal{M}, v \models \psi_2$.
    Pero notar que, nuevamente por definición de $\models$, $\mathcal{M}, v \models \psi_1$ o $\mathcal{M}, v \models \psi_2$ si y sólo si $\mathcal{M}, v \models \psi_1 \vee \psi_2$.
  - Caso $\varphi = \neg\psi$.
    La demostración es similar a la del caso analizado anteriormente. ∎

Definición 2.1 Sea $\mathcal{M} = \langle \mathrm{W}, \mathrm{R}, \{\mathrm{S}_i\}_{i\in\mathsf{Agt}}, \mathrm{V}, \mathsf{Act}\rangle$ un modelo entonces se define,

$$A_{\mathcal{M}} := \{(w, v) \in \mathrm{W} \times \mathrm{W} \mid \mathrm{V}(w) = \mathrm{V}(v)\}$$

Notar que $A_{\mathcal{M}}$ es una relación de equivalencia sobre W (hace falta probarlo? es medio directo). Luego se denotará,

$$\rho_{\mathcal{M}} := \{[w] \mid w \in \mathrm{W} \text{ y } [w] \text{ su clase de equivalencia respecto a } A_{\mathcal{M}}\} \qquad \dashv$$

Lema 2 *Sea* $\mathcal{M} = \langle \mathrm{W}, \mathrm{R}, \{\mathrm{S}_i\}_{i\in\mathsf{Agt}}, \mathrm{V}, \mathsf{Act}\rangle$ *un modelo finito y sea* $U \subseteq \mathrm{W}$ *entonces,*

$$\textit{existe } S \in \mathcal{P}(\rho_{\mathcal{M}}) \textit{ finito tal que } (U = \bigcup_{s_i \in S} s_i) \quad \textit{si y sólo si} \quad U \textit{ es proposicionalmente definible.} \qquad \lhd$$

Intuitivamente, lo que nos dice este lema es que todo conjunto proposicionalmente definible viene de tomar una cierta cantidad de clases de equivalencia de $\rho_{\mathcal{M}}$ y unirlas. Y, a su vez, cualquier unión de una cierta cantidad de clases de equivalencia es un conjunto proposicionalmente definible.

Demostración. 2 Se demostrará por separado los casos ($\rightarrow$) y ($\leftarrow$).

Sea $\mathcal{M} = \langle \mathrm{W}, \mathrm{R}, \{\mathrm{S}_i\}_{i \in \mathsf{Agt}}, \mathrm{V}, \mathsf{Act} \rangle$ un modelo finito y sea $U \subseteq \mathrm{W}$. Un primer detalle a tener en cuenta es que, dado que $\mathcal{M}$ es finito, existen un número finito de variables proposicionales $p_1, ..., p_n$ tales que $\{p_1, ..., p_n\}$ es la imagen de V.

- ($\rightarrow$) Notemos primero que si $U = \emptyset$, luego la fórmula $\varphi := \bot$ define a U. Entonces supongamos que $U \neq \emptyset$. (esto se podría analizar por separado o capaz permitir que S sea vacío y que en ese caso φ sea una disyunción de 0 cosas por lo que sería el elemento neutro de la disyunción o sea $\bot$).

  Sea $S = \{s_1, ..., s_m\}$ finito tal que $S \in \mathcal{P}(\rho_{\mathcal{M}})$ y $U = \bigcup_{s_i \in S} s_i$, demostremos que U es proposicionalmente definible.

  Recordar que cada s_i es una clase de equivalencia de la relación $A_{\mathcal{M}}$. A su vez, para cada $w, v \in s_i$ se cumple que $\mathrm{V}(w) = \mathrm{V}(v)$. Se utilizará $\mathrm{V}(s_i)$ para hacer referencia a $\mathrm{V}(w)$ para cada $w \in s_i$.

  Sea $\varphi_i := \bigwedge_{j=1}^{n} l_i(p_j)$ donde $l_i(p_j) = \begin{cases} p_j & \text{si} \quad p_j \in \mathrm{V}(s_i) \\ \neg p_j & \text{si} \quad p_i \notin \mathrm{V}(s_i) \end{cases}$.

  Veamos que por la forma en la que construimos φ_i, se cumple que $\mathcal{M}, w \models \varphi_i$ si y sólo si $w \in s_i$. (*) (esto podría explicarlo/demostrarlo un poco más en profundidad si no es algo claro).

  Demostremos entonces que $\varphi := \bigvee_{i=1}^{m} \varphi_i$ define a U. Primero, notar que sea $w \in \mathrm{W}$, $\mathcal{M}, w \models \varphi$ si y sólo si $\mathcal{M}, w \models \varphi_i$ para algún $i \in \{1, ...m\}$.

  Queremos ver entonces que, $w \in U$ si y sólo si $\mathcal{M}, w \models \varphi$.

  Sea $w \in U$, por hipótesis, existe s_i tal que $w \in s_i$. Ahora bien, por (*), $\mathcal{M}, w \models \varphi_i$, por lo que $\mathcal{M}, w \models \varphi$.

  Sea $w \in \mathrm{W}$ tal que $\mathcal{M}, w \models \varphi$, entonces existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $\mathcal{M}, w \models \varphi_i$. Luego por (*), $w \in s_i$, lo que nos dice que $w \in U$.

  Luego φ define a U.

  Como φ es proposicional, U es proposicionalmente definible.

- ($\leftarrow$) Sea φ la fórmula proposicional que define a U, se quiere demostrar que existe $S = \{s_1, ..., s_m\}$ finito, tal que $S \in \mathcal{P}(\rho_{\mathcal{M}})$ tal que $U = \bigcup_{s_i \in S} s_i$.

  Definamos $U' = \bigcup_{w \in U} [w]$, siendo $[w]$ la clase de equivalencia de w con respecto a $A_{\mathcal{M}}$. Notemos que por la definición de U', existe $S \in \mathcal{P}(\rho_{\mathcal{M}})$ finito tal que $U' = \bigcup_{s_i \in S} s_i$ dado que U' está definido como una unión finita de elementos de $\mathcal{P}(\rho_{\mathcal{M}})$.

  Demostremos ahora que $U' = U$. Es claro que $U \subseteq U'$, dado que $w \in [w]$ para cada $w \in \mathrm{W}$.

  Queda demostrar que $U' \subseteq U$.

  Sea $w' \in U'$, existe $w \in U$ tal que $w' \in [w]$. Ahora bien, como $w \in U$, $\mathcal{M}, w \models \varphi$. Luego, notemos que por Lema 1, $\mathcal{M}, v \models \varphi$ para cada $v \in [w]$, pues $\mathrm{V}(w) = \mathrm{V}(v)$ para cada $v \in [w]$. Pero como $w' \in [w]$ esto nos dice que $\mathcal{M}, w' \models \varphi$. Luego $w' \in U$.

  Finalmente $U' = U$, lo cual demuestra ($\leftarrow$). ■

Corolario 1 *Sea $\mathcal{M} = \langle \mathrm{W}, \mathrm{R}, \{\mathrm{S}_i\}_{i\in \mathsf{Agt}}, \mathrm{V}, \mathsf{Act}\rangle$ un modelo finito y sea $U \subseteq \mathrm{W}$ entonces el problema de decidir si U es proposicionalmente definible está en* P.

Más aún, en caso de ser definible, encontrar una fórmula φ que define a U es realizable en tiempo polinomial en el tamaño de $\mathcal{M}$. ◁

(Este corolario es el problema de $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-definibilidad, porque como dijimos un conjunto es $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-definible si y sólo si es proposicionalmente definible)

Demostración. 3 Queremos encontrar un algoritmo que dado $\mathcal{M} = \langle \mathrm{W}, \mathrm{R}, \{\mathrm{S}_i\}_{i\in \mathsf{Agt}}, \mathrm{V}, \mathsf{Act}\rangle$ un modelo finito y $U \subseteq \mathrm{W}$ decida en tiempo polinomial en el tamaño de $\mathcal{M}$ si U es proposicionalmente definible.

Por Lema 2, sabemos que basta con encontrar $S \in \mathcal{P}(\rho_{\mathcal{M}})$ tal que $U = \bigcup_{s_i \in S} s_i$ o determinar que no existe tal S.

Como $\rho_{\mathcal{M}}$ es la partición de W con respecto a la relación de equivalencia $A_{\mathcal{M}}$, dicho $S \in \mathcal{P}(\rho_{\mathcal{M}})$ existirá si y sólo si ocurre que para cada $s_i \in \rho_{\mathcal{M}}$ se cumple que $s_i \subseteq U$ o $s_i \cap U = \emptyset$. (Puedo desarrollar esto acá o incluso probar un lema más que enuncie esto, pero la idea intuitiva es que como queremos chequear que U es unión de clases de equivalencia, entonces si o si tiene que ocurrir que para cada clase de equivalencia están todos sus nodos en U o ninguno está en U)

Entonces notemos que basta con dar un algoritmo que encuentre las clases de equivalencia de $\rho_{\mathcal{M}}$ y para cada una de ellas chequee que, o todos sus nodos pertenecen a U o ninguno de ellos lo hace.

Luego, en caso de ser U definible, tendremos computado ya el conjunto $S \in \mathcal{P}(\rho_{\mathcal{M}})$ tal que $U = \bigcup_{s_i \in S} s_i$, que estaría formado por las clases de equivalencia que encontramos en el paso anterior que están completamente contenidas en U.

Ahora bien, a partir de dicho conjunto $S = \{s_1, ..., s_m\}$, podemos computar una fórmula que define a U siguiendo la misma estrategia mencionada en la demostración del Lema 2.

Es decir, podemos computar $\varphi := \bigvee_{i=1}^{m} \varphi_i$, con $\varphi_i := \bigwedge_{j=1}^{n} l_i(p_j)$ donde $l_i(p_j) = \begin{cases} p_j & \text{si} \quad p_j \in \mathrm{V}(s_i) \\ \neg p_j & \text{si} \quad p_j \notin \mathrm{V}(s_i) \end{cases}$.

Notar que la cantidad de disyunciones (m) de φ está acotada por la cantidad de elementos de W y por otro lado la cantidad de conjunciones de cada término (n) es la cantidad de variables proposicionales que aparecen en la imagen de V. Juntando estos dos argumentos, podemos deducir que el tamaño de φ es $O(|\mathrm{W}| * |\mathrm{V}|)$, lo cuál es polinomial en el tamaño de $\mathcal{M}$.

Falta escribir el algoritmo y probar su complejidad. ■

Teorema 1 *Sea $\mathcal{M} = \langle \mathrm{W}, \mathrm{R}, \{\mathrm{S}_i\}_{i\in \mathsf{Agt}}, \mathrm{V}, \mathsf{Act}\rangle$ un modelo, entonces se cumple que,*

1. *$A_{\mathcal{M}}$ es una autobisimulación de $\mathcal{M}$.*
2. *Sea $\mathrm{Z} \subseteq \mathrm{W} \times \mathrm{W}$ una autobisimulación de $\mathcal{M}$ entonces $\mathrm{Z} \subseteq A_{\mathcal{M}}$. Es decir, $A_{\mathcal{M}}$ es la máxima autobisimulación de $\mathcal{M}$.* ◁

Demostración. 4 Sea $\mathcal{M} = \langle \mathrm{W}, \mathrm{R}, \{\mathrm{S}_i\}_{i\in \mathsf{Agt}}, \mathrm{V}, \mathsf{Act}\rangle$ un modelo, probaremos (1) y (2) por separado:

1. Queremos ver que $A_{\mathcal{M}}$ es una autobisimulación de $\mathcal{M}$, para ello debemos verificar que:

   - (Atom) Dado $(w, v) \in A_{\mathcal{M}}$, por definición de $A_{\mathcal{M}}$, se cumple que $\mathrm{V}(w) = \mathrm{V}(v)$.
   - (A-Zig) Notemos que $A_{\mathcal{M}}$ es una relación de equivalencia, luego para cada $w \in \mathrm{W}$ se cumple que $(w, w) \in A_{\mathcal{M}}$.
   - (A-zag) Podemos utilizar el mismo argumento que en (A-zig) para demostrar este caso.
   - ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-Zig) Queremos ver que para cada $U \subseteq \mathrm{W}$ proposicionalmente definible, si $U \overset{i}{\Rightarrow} T$ para algún $T \subseteq \mathrm{W}$, entonces existe $T' \subseteq \mathrm{W}$ tal que

     - $A_{\mathcal{M}}(U) \overset{i}{\Rightarrow} T'$,
     - $T' \subseteq A_{\mathcal{M}}(T)$.

     Sean U, T subconjuntos de W tales que $U \overset{i}{\Rightarrow} T$ y U proposicionalmente definible, queremos encontrar $T' \subseteq \mathrm{W}$ que cumpla lo mencionado.
     Como U es proposicionalmente definible, entonces existe φ proposicional tal que $w \in U$ si y sólo si $\mathcal{M}, w \models \varphi$.
     Demostremos por un lado que $U = A_{\mathcal{M}}(U)$:
     ($\subseteq$) Siguiendo el argumento usado en (A-Zig), es claro que para $w \in U$ se cumple que $w \in A_{\mathcal{M}}(U)$, pues $(w, w) \in A_{\mathcal{M}}$ para cada $w \in \mathrm{W}$.
     ($\supseteq$) Sea $v \in A_{\mathcal{M}}(U)$, queremos ver que $v \in U$. Como $v \in A_{\mathcal{M}}(U)$, entonces existe $w \in U$ tal que $(w, v) \in A_{\mathcal{M}}$. Luego, como $(w, v) \in A_{\mathcal{M}}$ entonces $\mathrm{V}(w) = \mathrm{V}(v)$.
     Ahora bien, como $w \in U$ y φ define a U, esto nos dice que $\mathcal{M}, w \models \varphi$. Pero por Lema 1, como $\mathrm{V}(w) = \mathrm{V}(u)$ y φ es proposicional entonces $\mathcal{M}, v \models \varphi$, luego $v \in U$.
     Entonces demostramos que $U = A_{\mathcal{M}}(U)$.
     Ahora bien, notemos que siendo $X \subseteq \mathrm{W}$ entonces $X \subseteq A_{\mathcal{M}}(X)$, pues como analizamos anteriormente $(w, w) \in A_{\mathcal{M}}$ para cada $w \in \mathrm{W}$.
     Juntando lo mencionado, podemos afirmar que $T' = T$ cumple que:

     - $A_{\mathcal{M}}(U) \overset{i}{\Rightarrow} T'$, pues dijimos $A_{\mathcal{M}}(U) = U$, y por hipótesis, $U \overset{i}{\Rightarrow} T = T'$.
     - $T' \subseteq A_{\mathcal{M}}(T')$ pues esto se cumple para todo $X \subseteq \mathrm{W}$.

     Luego queda demostrado que $A_{\mathcal{M}}$ satisface ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-Zig).
   - ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-Zag) Análogo a ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-Zig), pues notemos que como $A_{\mathcal{M}}$ es una relación de equivalencia, es simétrica. ∎

   Luego $A_{\mathcal{M}}$ es una autobisimulación de $\mathcal{M}$.

2. Queremos ver que dada $Z \subseteq \mathrm{W} \times \mathrm{W}$ autobisimulación de $\mathcal{M}$, entonces $Z \subseteq A_{\mathcal{M}}$.

   Supongamos que no es cierto, es decir, existe $\mathrm{Z} \subseteq \mathrm{W} \times \mathrm{W}$ autobisimulación de $\mathcal{M}$ tal que hay $w, v \in \mathrm{W}$ que cumplen que $(w, v) \in \mathrm{Z}$ y $(w, v) \notin A_{\mathcal{M}}$.

   Como Z es una autobisimulación entonces satisface (atom), es decir, $\mathrm{V}(w) = \mathrm{V}(v)$. Pero notemos que por definición de $A_{\mathcal{M}}$, $(w, v) \in A_{\mathcal{M}}$, lo cuál es absurdo, pues dijimos que $(w, v) \notin A_{\mathcal{M}}$.

El absurdo vino de suponer que $Z \not\subseteq A_{\mathcal{M}}$.

Luego queda demostrada la propiedad.

Algo interesante es que hay varias contracciones que no funcionan:

Por ejemplo, dejar las estrategias y las acciones iguales y usar como aristas $\mathrm{R}' = \{(a, [w], [v]) \mid (a, w, v) \in \mathrm{R}\}$. Esta sería la contracción de la lógica modal básica

(Poner gráfico de un contraejemplo).

Otro ejemplo de contracción que no funciona es dejar las estrategias y las acciones iguales y usar como aristas $\mathrm{R} = \{(a, [w], [v]) \mid$ para todo $w' \in [w]$ existe $v' \in [v]$ tal que $(a, w', v') \in \mathrm{R}\}$.

(Poner gráfico de un contraejemplo).

Otro ejemplo sería definir $\mathrm{R} = \{(a, [w], [v]) \mid$ para todo $w' \in [w]$ se cumple que $\mathrm{R}_a(w') \neq \emptyset$ y $(w', v) \in \mathrm{R}_a\}$ y esto tampoco funcionaría.

(Poner gráfico de un contraejemplo).

Todo este resultado se puede hacer con caso infinito, reescribiendo el lema en vez de si y sólo si a implica, porque lo finito solo se necesita para encontrar la fórmula que en realidad no interesa

Definición 2.2 Sea $\mathcal{M} = \langle \mathrm{W}, \mathrm{R}, \{\mathrm{S}_i\}_{i \in \mathsf{Agt}}, \mathrm{V}, \mathsf{Act} \rangle$ un modelo finito. Se define su contracción por bisimulación como el modelo $\mathcal{M}' = \langle \mathrm{W}', \mathrm{R}', \{\mathrm{S}'_i\}_{i \in \mathsf{Agt}'}, \mathrm{V}', \mathsf{Act}' \rangle$ donde

- $\mathrm{W}' := \mathrm{W}/A_{\mathcal{M}}$
- $\mathrm{R}' := \{\mathrm{R}'_{a_\sigma} \subseteq \mathrm{W}' \times \mathrm{W}' \mid a_\sigma \in \mathsf{Act}'\}$ donde $([w], [v]) \in \mathrm{R}'_{a_\sigma}$ si y sólo si
  1. existen $w' \in [w]$ y $v' \in [v]$ tal que $(w', v') \in \mathrm{R}_\sigma$
  2. σ es fuertemente ejecutable para cada $w' \in [w]$.
- $\mathrm{S}'_i := \{\pi' = \{a_{\sigma_1}, ..., a_{\sigma_k}\} \mid$ existe $\pi \in S_i$ tal que $\pi = \{\sigma_1, ..., \sigma_k\}\}$
- $\mathrm{V}'([w]) := \mathrm{V}(w)$
- $\mathsf{Act}' := \{a_\sigma \mid$ existe $\pi \in S_i$ tal que $\sigma \in \pi$ para algún $i \in \mathsf{Agt}\}$ $\dashv$

Teorema 2 *Sea $\mathcal{M} = \langle \mathrm{W}, \mathrm{R}, \{\mathrm{S}_i\}_{i \in \mathsf{Agt}}, \mathrm{V}, \mathsf{Act} \rangle$ un modelo finito y sea $\mathcal{M}'$ su contracción por bisimulación entonces $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ y $\langle \mathcal{M}', [w] \rangle$ son $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimilares para cada $w \in \mathrm{W}$.* $\triangleleft$

Demostración. 5 Sea $\mathcal{M} = \langle \mathrm{W}, \mathrm{R}, \{\mathrm{S}_i\}_{i \in \mathsf{Agt}}, \mathrm{V}, \mathsf{Act} \rangle$ un modelo finito y sea $\mathcal{M}'$ su contracción por bisimulación, basta ver que $Z = \{(w, [w]) \in \mathrm{W} \times \mathrm{W}'\}$ es una $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimulación para demostrar la propiedad.

Dado que W es no vacío entonces es claro que Z es no vacío también.

Por otro lado, notemos que por la definición de V', es claro que Z satisface (Atom).

A su vez, por cómo definimos Z, es fácil ver que también (A-zig) y (A-zag) son satisfechos.

Demostremos entonces que se satisfacen ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zig) y ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zag).

- ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zig) Sean U, T subconjuntos de W tales que $U \overset{i}{\Rightarrow} T$ y U proposicionalmente definible, queremos encontrar $T' \subseteq \mathrm{W}'$ que

- $Z(U) \overset{i}{\Rrightarrow} T'$,
- $T' \subseteq Z(T)$.

Veamos que $T' = \{[w] \mid w \in T\}$ cumple con lo mencionado. Por como definimos Z, es claro que $T' = Z(T)$, por lo que $T' \subseteq Z(T)$. Entonces demostremos $Z(U) \overset{i}{\Rrightarrow} T'$.

Como $U \overset{i}{\Rrightarrow} T$, existe $\pi = \{\sigma_1, ..., \sigma_k\} \in S_i$ tal que cada plan de π es fuertemente ejecutable en cada nodo de U y $\mathrm{R}_\pi(U) \subseteq T$.

Ahora bien, sabemos por la definición de $\mathcal{M}'$ que existe $\pi' = \{a_{\sigma_1}, ..., a_{\sigma_k}\} \in S'_i$. Luego, basta ver que cada a_{σ_i} es fuertemente ejecutable en $Z(U)$ y que además $\mathrm{R}'_{\pi'}(Z(U)) \subseteq T'$, pues, juntando las dos afirmaciones concluiríamos que $Z(U) \overset{i}{\Rrightarrow} T'$.

Notemos que los planes de π' son simplemente de un paso, es decir, deberíamos chequear que para cada elemento de $Z(U)$ existe una arista con cada una de las acciones de π' y que cada arista de $Z(U)$ con alguna de las etiquetas de π' se dirige hacia un nodo de T'.

Por Lema 2, existe $S \in \mathcal{P}(\rho_{\mathcal{M}})$ tal que $U = \bigcup\limits_{s_i \in S} s_i$. Luego, por como está definido Z, notemos que $Z(U) = S$.

Sean entonces $a_{\sigma_i} \in \pi'$ y $s_j \in S$ queremos ver que a_{σ_i} es fuertemente ejecutable en s_j. Como cada nodo de s_j está en U y σ_i es fuertemente ejecutable en todo nodo de U entonces para cada nodo w de s_j existe v tal que $(w, v) \in \mathrm{R}_{\sigma_i}$. A su vez, juntando lo mencionado, se puede ver que por la definición de R' entonces existe $v \in \mathrm{W}$ tal que $(s_j, [v]) \in \mathrm{R}'_{a_{\sigma_i}}$, luego a_{σ_i} es fuertemente ejecutable en s_j. Como a_{σ_i} y s_j eran elementos fijos pero arbitrarios de π' y S respectivamente, vale que π' es fuertemente ejecutable en todo S.

Ya demostramos entonces que π' es fuertemente ejecutable en S, queda demostrar que $\mathrm{R}'_{\pi'}(S) \subseteq T'$.

Sean $s_j \in S$ y $a_{\sigma_i} \in \pi'$ tales que $(s_j, [v]) \in \mathrm{R}'_{a_{\sigma_i}}$ entonces existen $w \in s_j$ y $v' \in [v]$ tales que $(w, v') \in \mathrm{R}'_{\sigma_i}$. Recordemos que $\mathrm{R}_\pi(U) \subseteq T$. Luego, como $w \in U$ y $\sigma_i \in \pi$ entonces $v' \in T$, lo que nos dice que $[v] \in T'$. Entonces queda demostrado que $\mathrm{R}'_{\pi'}(S) \subseteq T'$, dado que s_j y a_{σ_i} son elementos fijos pero arbitrarios de S y π' respectivamente.

Probamos entonces que π' es fuertemente ejecutable en S y que $\mathrm{R}'_{\pi'}(S) \subseteq T'$, luego esto nos dice que $S \overset{i}{\Rrightarrow} T'$. Y como $S = Z(U)$, $Z(U) \overset{i}{\Rrightarrow} T'$.

Queda demostrado entonces $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zig. (MEJORAR ESTA DEMO).

- ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zag) Sean $U, T \in \mathrm{W}'$ tales que $U \overset{i}{\Rrightarrow} T$ con U proposicionalmente definible, queremos encontrar $T' \subseteq \mathrm{W}$ tal que

  - $Z^{-1}(U) \overset{i}{\Rrightarrow} T'$,
  - $T' \subseteq Z^{-1}(T)$.

  Notar que $U = \{[w_1], ..., [w_n] \mid w_i \in \mathrm{W}\}$ y $T = \{[v_1], ..., [v_m] \mid v_i \in \mathrm{W}\}$.

  Veamos que $T' = \bigcup\limits_{[v_i] \in T} [v_i]$ cumple con lo mencionado. Notar que por la definición de Z, es claro que $T' = Z^{-1}(T)$, lo que nos dice que $T' \subseteq Z^{-1}(T)$. Demostremos entonces que $Z^{-1}(U) \overset{i}{\Rrightarrow} T'$.

Como $U \overset{i}{\Rightarrow} T$, entonces existe $\pi' = \{a_{\sigma_1}, ..., a_{\sigma_k}\} \in S'_i$ tal que π' es fuertemente ejecutable en cada elemento de U y $\mathrm{R}'_{\pi'}(U) \subseteq T$.

Luego por como está definido $\mathcal{M}$ entonces existe $\pi = \{\sigma_1, ..., \sigma_k\} \in S_i$. Veamos entonces que π es fuertemente ejecutable en cada nodo de $Z^{-1}(U)$ y a su vez que $\mathrm{R}_\pi(Z^{-1}(U)) \subseteq T'$.

Sean $w \in Z^{-1}(U)$ y $\sigma_i \in \pi$, veamos que σ_i es fuertemente ejecutable en w. Notemos que como $w \in Z^{-1}(U)$ entonces $[w] \in U$ y, a su vez, como a_{σ_i} es fuertemente ejecutable en U, a_{σ_i} también es fuertemente ejecutable en $[w]$. Luego, existe $[v]$ tal que $([w], [v]) \in \mathrm{R}'_{a_{\sigma_i}}$. Ahora bien, notemos que por la definición de R', como existe esa arista entonces se cumple que σ_i es fuertemente ejecutable en todo nodo de $[w]$. En particular, σ_i es fuertemente ejecutable en w. Finalmente, demostramos que π es fuertemente ejecutable en $Z^{-1}(U)$.

Demostremos ahora que $\mathrm{R}_\pi(Z^{-1}(U)) \subseteq T'$.

Sean $w, v \in \mathrm{W}$ tales que $w \in Z^{-1}(U)$ y $(w, v) \in \mathrm{R}_{\sigma_i}$, queremos ver que $v \in T'$. Notemos que como $w \in Z^{-1}(U)$, entonces $[w] \in U$. Ahora bien como a_{σ_i} es fuertemente ejecutable en U, a_{σ_i} también es fuertemente ejecutable en $[w]$.

Como a_{σ_i} es fuertemente ejecutable en $[w]$ entonces existe $[v']$ tal que $([w], [v']) \in \mathrm{R}_{a_{\sigma_i}}$. Ahora bien, como existe dicha arista, por la definición de R', ocurre que σ_i es fuertemente ejecutable en todo nodo de $[w]$. Pero como σ_i es fuertemente ejecutable en todo nodo de $[w]$ y $(w, v) \in \mathrm{R}_{\sigma_i}$ entonces $([w], [v]) \in \mathrm{R}'_{a_{\sigma_i}}$. Pero como $\mathrm{R}'_{\pi'}(U) \subseteq T$, entonces $[v] \in T$, lo que nos dice que $v \in T'$.

Luego demostramos que $\mathrm{R}_{\sigma_i}(Z^{-1}(U)) \subseteq T'$. Como σ_i era un elemento fijo pero arbitrario de π entonces vale para todo π. Luego $\mathrm{R}_\pi(Z^{-1}(U)) \subseteq T'$, lo cual demuestra $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zag. $\blacksquare$

Demostramos entonces que Z es una $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimulación. Luego $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ y $\langle \mathcal{M}', [w] \rangle$ son $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimilares para cada $w \in \mathrm{W}$.

Teorema 3 *La contracción por bisimulación de un modelo finito $\mathcal{M}$ tiene cardinalidad mínima entre los modelos $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimilares a $\mathcal{M}$.* $\triangleleft$

(este no estoy seguro de cómo probarlo pero estaría bueno que sea cierto para demostrar que efectivamente estamos minimizando el modelo).

update de esto: cardinalidad es bastante directo, pero cantidad de aristas debe ser bastante más complicado, por lo que me contaste de cocientar las clases de estrategias.

Teorema 4 *Sea $\mathcal{M}$ un modelo finito, encontrar su contracción por bisimulación $\mathcal{M}'$ es realizable en tiempo polinomial en el tamaño de $\mathcal{M}$.* $\triangleleft$

(la mejor complejidad con la que se podría hacer no estoy seguro, porque tampoco definimos bien cómo va a ser la contracción, pero lo de encontrar los nodos strongly executable de cada camino se me ocurre que puede salir en $O(\sum_i |S_i| * n * (n + m)))$

Esta definición va a ir en los premilinares pero la escribo acá para tenerla a mano al ver esta demo

Definición 2.3 Supongamos Act un conjunto de acciones no vacío enumerable. Sea $\mathcal{M} = \langle W, \{R_a\}_{a \in \mathsf{Act}}, V\rangle$ un modelo de Kripke. Sea $Z_{\mathcal{M}}$ su autobisimulación máxima en Lógica Modal Básica (LMB) entonces definimos su contracción por LMB-bisimulación como $\mathcal{M}_{LMB} = \langle W', \{R'_a\}_{a \in \mathsf{Act}}, V\rangle$ donde

- $W' := W/Z_{\mathcal{M}}$
- $R'_a := \{([w], [v]) \mid \text{existen } w' \in [w] \text{ y } v' \in [v] \text{ tal que } (w', v') \in R_a\}$
- $V'([w]) := V(w)$ $\dashv$

Notar que en el contexto de esta definición, $[w]$ se refiere a la clase de equivalencia de w en la relación de equivalencia dada por $Z_{\mathcal{M}}$.

Lema 3 *Sea $\mathcal{M} = \langle W, \{R_a\}_{a \in \mathsf{Act}}, V\rangle$ un modelo de Kripke, y sea $\mathcal{M}_{LMB} = \langle W', \{R'_a\}_{a \in \mathsf{Act}}, V'\rangle$ su contracción por LMB-bisimulación,*

Si $([w], [v]) \in R'_a$ entonces para cada $w' \in [w]$ existe $v' \in [v]$ tal que $(w', v') \in R_a$ $\lhd$

Demostración. 6 Sea $\mathcal{M} = \langle W, \{R_a\}_{a \in \mathsf{Act}}, V\rangle$ un modelo de Kripke, y sea $\mathcal{M}_{LMB} = \langle W', \{R'_a\}_{a \in \mathsf{Act}}, V'\rangle$ su contracción por LMB-bisimulación. Sea $([w], [v]) \in R'_a$, veamos que para cada $w' \in [w]$ existe $v' \in [v]$ tal que $(w', v') \in R_a$.

Como $([w], [v]) \in R'_a$ existen $w_0 \in [w]$ y $v_0 \in [v]$ tales que $(w_0, v_0) \in R_a$. Ahora bien, sea $w' \in [w]$, por estar ambos w_0 y w' en $[w]$, existe una LMB-bisimulación Z tal que $(w_0, w') \in Z$. Pero notemos que, por (zig) de Z, como $(w_0, v_0) \in R_a$ entonces existe v' tal que $(w', v') \in R_a$ y, a su vez, $(v_0, v') \in Z$, es decir, $v' \in [v]$. Como demostramos esto para un w' arbitrario en $[w]$, vale para todo elemento de $[w]$. ■

Teorema 5 *Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, \{S_i\}_{i \in \mathsf{Agt}}, V, \mathsf{Act}\rangle$ un modelo y sea $\mathcal{M}_{LMB} = \langle W', \{R'_a\}_{a \in \mathsf{Act}}, V'\rangle$ la contracción por LMB-bisimulación del modelo $\langle W, \{R_a\}_{a \in \mathsf{Act}}, V\rangle$, entonces $\langle \mathcal{M}, w\rangle$ y $\langle \mathcal{M}', [w]\rangle$ son $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimilares para cada $w \in W$ siendo $\mathcal{M}' = \langle W', R', \{S_i\}_{i \in \mathsf{Agt}}, V', \mathsf{Act}\rangle$.* $\lhd$

Notar que en este teorema, al fijar $\mathcal{M} = \langle W, R, \{S_i\}_{i \in \mathsf{Agt}}, V, \mathsf{Act}\rangle$ inmediatamente fijamos a Act como el conjunto no vacío enumerable de acciones para la Lógica Modal Básica.

Demostración. 7 Queremos ver que $Z = \{(w, [w]) \mid w \in W\}$ es una $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimulación.

Por definición de la contracción por bisimulación en (LMB) se puede ver que se satisface (atom). Luego, por definición de Z, es fácil ver que (A-zig) y (A-zag) son satisfechas. Demostremos entonces ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zig) y ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zag).

- ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zig). Sean U, T ambos subconjuntos de W tales que U es proposicionalmente definible y $U \overset{i}{\Rightarrow} T$. Queremos ver que existe $T' \subseteq W'$ tal que

  - $Z(U) \overset{i}{\Rightarrow} T'$,
  - $T' \subseteq Z(T)$.

  Veamos que $T' = \{[w] \mid w \in T\}$ cumple con lo mencionado. Notemos que $T' = Z(T)$, por lo que solo debemos demostrar $Z(U) \overset{i}{\Rightarrow} T'$.

  Como $U \overset{i}{\Rightarrow} T$, existe $\pi \in S_i$ tal que π es fuertemente ejecutable en U y a su vez $R_\pi(U) \subseteq T$.

Demostremos que π es fuertemente ejecutable en $Z(U)$ y que $R'_\pi(Z(U)) \subseteq T'$.

Supongamos que π no es fuertemente ejecutable en $Z(U)$. Luego existe $\sigma \in \pi$ y $[w_1], ..., [w_k]$ con $0 \leq k \leq |\sigma|$ tal que $[w_1] \in Z(U)$, $([w_i], [w_{i+1}]) \in R'_{\sigma[i]}$ y $R'_{\sigma[k]}([w_k]) = \emptyset$.

Ahora bien, como $[w_1] \in Z(U)$, existe $w'_1 \in U$ tal que $w'_1 \in [w_1]$. Luego notemos que aplicando sucesivamente el Lema 3 en todo el camino, existen $w'_1, ...w'_k$ tales que $w'_i \in [w_i]$ y $(w'_i, w'_{i+1}) \in R_{\sigma[i]}$.

Pero veamos que esto nos dice que $R_{\sigma[k]}(w'_k) = \emptyset$. Pues, si existiera v tal que $(w'_k, v) \in R_{\sigma[k]}$ entonces ocurriría que $([w_k], [v]) \in R'_{\sigma[k]}$. Luego $\sigma \in \pi$ no es fuertemente ejecutable en $w'_1 \in U$, lo cuál es absurdo, pues dijimos que π es fuertemente ejecutable en todo U.

Esto nos dice que π es fuertemente ejecutable en $Z(U)$.

Veamos ahora que $R'_\pi(Z(U)) \subseteq T'$.

Sea $[v] \in R'_\pi(Z(U))$, entonces existen $\sigma \in \pi$ y $[w_1], ..., [w_{|\sigma|+1}]$ tales que $[w_1] \in Z(U)$, $([w_i], [w_{i+1}]) \in R'_{\sigma[i]}$ y $[w_{|\sigma|+1}] = [v]$.

Ahora bien, como $[w_1] \in Z(U)$, entonces existe $w'_1 \in U$ tal que $w'_1 \in [w_1]$. Luego notemos que aplicando sucesivamente el Lema 3 sobre el camino, existen $w'_1, ..., w'_{|\sigma|+1}$ tales que $w'_i \in [w_i]$ y $(w'_i, w'_{i+1}) \in R_{\sigma[i]}$. Como $R_\pi(U) \subseteq T$ esto nos dice que $w'_{|\sigma|+1} \in T$. Finalmente, por definición de T', $[w_{|\sigma|+1}] \in T'$. Luego como $[v] = [w_{|\sigma|+1}]$, $[v] \in T'$.

Entonces demostramos que π es fuertemente ejecutable en $Z(U)$ y que $R'_\pi(Z(U)) \subseteq T'$. Juntando ambos resultados, concluimos que $Z(U) \overset{i}{\Rrightarrow} T'$, lo cuál demuestra ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zig).

- ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zag) Sean U, T ambos subconjuntos de W' tales que U es proposicionalmente definible y $U \overset{i}{\Rrightarrow} T$. Queremos ver que existe $T' \subseteq W$ tal que

  - $Z^{-1}(U) \overset{i}{\Rrightarrow} T'$,
  - $T' \subseteq Z^{-1}(T)$.

  Veamos que $T' = \{w \mid [w] \in T\}$ cumple con lo mencionado. Notemos que $T' = Z^{-1}(T)$ por lo que solo debemos demostrar $Z^{-1}(U) \overset{i}{\Rrightarrow} T'$.

  Como $U \overset{i}{\Rrightarrow} T$, existe $\pi \in S_i$ tal que π es fuertemente ejecutable en todo U y a su vez $R'_\pi(U) \subseteq T$.

  Veamos que π es fuertemente ejecutable en $Z^{-1}(U)$ y que $R_\pi(Z^{-1}(U)) \subseteq T'$.

  Supongamos que π no es fuertemente ejecutable en $Z^{-1}(U)$. Luego existe $\sigma \in \pi$ y $w_1, ..., w_k$ con $0 \leq k \leq |\sigma|$ tal que $w_1 \in Z^{-1}(U)$, $(w_i, w_{i+1}) \in R_{\sigma[i]}$ y $R_{\sigma[k]}(w_k) = \emptyset$.

  Ahora bien, notemos entonces que por la definición de R', $[w_1], ..., [w_k]$ cumple que $([w_i], [w_{i+1}]) \in R'_{\sigma[i]}$ y, a su vez, que $[w_1] \in U$, pues $w_1 \in Z^{-1}(U)$. Pero notemos que como $R_{\sigma[k]}(w_k) = \emptyset$, por la contrarrecíproca del Lema 3, podemos ver que $R'_{\sigma[k]}([w_k]) = \emptyset$, lo que nos dice que $\sigma \in \pi$ no es fuertemente ejecutable en $[w_1] \in U$. Absurdo, pues dijimos que π es fuertemente ejecutable en todo U.

Esto nos dice que π es fuertemente ejecutable en todo $Z^{-1}(U)$.

Veamos ahora que $R_\pi(Z^{-1}(U)) \subseteq T'$.

Sea $v \in R_\pi(Z^{-1}(U))$, entonces existen $\sigma \in \pi$ y $w_1, ..., w_{|\sigma|+1}$ tales que $w_1 \in Z^{-1}(U)$, $(w_i, w_{i+1}) \in R_{\sigma[i]}$ y $w_{|\sigma|+1} = v$.

Ahora bien, por la definición de R', esto nos dice que $[w_1], ..., [w_{|\sigma|+1}]$ cumple que $([w_i], [w_{i+1}]) \in R'_{\sigma[i]}$ y, a su vez, como $w_1 \in Z^{-1}(U)$ entonces $[w_1] \in U$. Luego notemos que como $R'_\pi(U) \subseteq T$, esto nos dice que $[w_{|\sigma|+1}] \in T$, lo cuál implica que $w_{|\sigma|+1} \in T'$. Como $v = w_{|\sigma|+1}$ entonces $v \in T'$.

Entonces demostramos que π es fuertemente ejecutable en todo $Z^{-1}(U)$ y que $R'_\pi(Z^{-1}(U)) \subseteq T'$. Juntando ambos resultados, concluimos que $Z^{-1}(U) \overset{i}{\Rightarrow} T'$, lo cuál demuestra ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zag). ■

Demostramos entonces que Z es una $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimulación. Luego $\langle \mathcal{M}, w\rangle$ y $\langle \mathcal{M}', [w]\rangle$ son $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimilares para cada $w \in W$.

3. $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-Bisimulación entre dos modelos

Lema 4 *Sean* $\mathcal{M}_1 = \langle W, R, \{S_i\}_{i\in\mathsf{Agt}}, V, \mathsf{Act}\rangle$ *y* $\mathcal{M}_2 = \langle W', R', \{S'_i\}_{i\in\mathsf{Agt}}, V', \mathsf{Act}'\rangle$ *dos modelos tales que existe* $Z \subseteq W \times W'$ $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$*-bisimulación entre ellos, entonces*

$$Z' = \{(w, w') \in W \times W' \mid V(w) = V'(w')\}$$

es una $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$*-bisimulación entre* $\mathcal{M}_1$ *y* $\mathcal{M}_2$. ◁

Notemos que este teorema nos dice que para decidir si existe una $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimulación entre dos modelos $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ basta con verificar que Z' es una $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimulación.

Demostración. 8 Queremos ver que Z' es una $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimulación entre $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, dado que existe $Z \subseteq W \times W'$, $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimulación entre ellos.

Notemos que como Z es una bisimulación, entonces cumple (atom). Luego, notemos que por la definición de Z', $Z \subseteq Z'$, pues Z' contiene todos los pares de $W \times W'$ que satisfacen (atom). Esto nos dice que Z' satisface (A-zig) y (A-zag). A su vez, cómo mencionamos, Z' contiene todos los pares que satisfacen (atom).

Demostremos entonces que Z' cumple ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zig) y ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zag).

- ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zig) Sean $U, T \subseteq W$ tales que U es proposicionalmente definible y $U \overset{i}{\Rightarrow} T$ queremos ver que existe $T' \subseteq W'$ tal que:
  - $Z'(U) \overset{i}{\Rightarrow} T'$,
  - $T' \subseteq Z'(T)$.

  Notemos que como Z es una bisimulación, entonces existe $T'' \subseteq W'$ tal que:
  - $Z(U) \overset{i}{\Rightarrow} T''$,
  - $T'' \subseteq Z(T)$.

  Demostremos que $T' := T''$ cumple con lo mencionado. Es claro que como $Z \subseteq Z'$ y $T'' \subseteq Z(T)$ entonces $T'' \subseteq Z'(T)$. Entonces, nos queda demostrar que $Z'(U) \overset{i}{\Rightarrow} T''$.

Esto lo demostraremos analizando que $Z(U) = Z'(U)$. Nuevamente, como $Z \subseteq Z'$ entonces $Z(U) \subseteq Z'(U)$. Luego, solo queda demostrar que $Z'(U) \subseteq Z(U)$.

Sea $w' \in Z'(U)$, entonces existe $w \in U$ tal que $(w, w') \in Z'$, por lo que $\mathrm{V}(w) = \mathrm{V}'(w')$. Ahora bien, como Z cumple (A-zag), existe $v \in \mathrm{W}$ tal que $(v, w') \in Z$, y cómo Z cumple (atom) entonces $\mathrm{V}(v) = \mathrm{V}'(w')$. Luego $\mathrm{V}(w) = \mathrm{V}(v)$.

Notemos que como U es proposicionalmente definible entonces existe una fórmula φ proposicional que lo define. Como $w \in U$, esto nos dice que $\mathcal{M}, w \models \varphi$. Luego por Lema 1, $\mathcal{M}, v \models \varphi$, por lo que $v \in U$. Como $v \in U$ y $(v, w') \in Z$ entonces $w' \in Z(U)$.

Lo cuál demuestra que $Z(U) = Z'(U)$. Por lo que $Z'(U) \overset{i}{\Rightarrow} T''$. Finalmente, concluimos que Z' cumple ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zig).

- ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zag) Análogo a ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zig).

Queda demostrado que Z' es una $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimulación. ■

Lema 5 *KHi-Bisim* $\in$ *co-NP* ◁

Demostración. 9 Para demostrar que KHi-Bisim $\in$ co-NP debemos dar un algoritmo A y un polinomio p tal que dos modelos $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ son $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimilares si y sólo si para todo $x \in \{0,1\}^*$ con $|x| \leq p(|\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|)$, $A(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, x) = 1$. Esencialmente, a los x los llamaremos "contraejemplos" y sólo nos interesarán los que representen un subconjunto del dominio de $\mathcal{M}_1$ o del dominio de $\mathcal{M}_2$.

Dados que los contraejemplos que nos interesan son subconjuntos de los dominios de ambos modelos, un polinomio que nos sirve para acotar los largos de los contraejemplos es $p(x) = x$.

El algoritmo A que propondremos hará lo siguiente:

Dados $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ y x, verificar que el conjunto Z' mencionado en el lema 4 sea una $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimulación entre los dos modelos recibidos. Notar que podemos verificar polinomialmente que Z' cumple (A-zig) y (A-zag).

Luego el algoritmo verificará que Z' cumpla con ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zig) o ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zag) con respecto al subconjunto x, dependiendo de si x es un subconjunto del dominio de $\mathcal{M}_1$ o del dominio de $\mathcal{M}_2$. Notar que sólo nos interesarán los x que sean proposicionalmente definibles, así que el algoritmo deberá encargarse de chequear que x efectivamente sea un conjunto proposicionalmente definible.

En caso de serlo, simplemente analizará a qué conjunto se puede llegar desde x utilizando cada plan del modelo y para cada uno de ellos, verificar que $Z'(x)$ tenga algún plan con el que cumpla la condición deseada.

(Queda escribir este algoritmo y demostrar más en profundidad el si y sólo si mencionado).

Finalmente KHi-Bisim $\in$ co-NP.

Lema 6 *KHi-Bisim es co-NP-hard.* ◁

Demostración. 10 Demostremos que KHi-Bisim es co-NP-hard.

Para demostrarlo, reduciremos el problema DNF-TAUT a KHi-Bisim. El problema DNF-TAUT está compuesto por las fórmulas φ proposicionales en forma disyuntiva normal que son tautologías. DNF-TAUT es co-NP completo, por lo que si encontramos una reducción computable en tiempo polinomial de DNF-TAUT a KHi-Bisim habremos demostrado que KHi-Bisim es co-NP-hard.

Entonces queremos encontrar una reducción f computable en tiempo polinomial que transforme una φ proposicional en forma disyuntiva normal a un par de modelos $\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \rangle$ tal que $\varphi \in$ DNF-TAUT si y sólo si $\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \rangle \in$ KHi-Bisim.

Describamos a f.

Sea φ una fórmula proposicional en forma disyuntiva normal, entonces es de la forma $\varphi = \varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$. Sean a su vez $p_1, ..., p_n$ las variables proposicionales que aparecen en φ, definimos los siguientes conjuntos:

- $\mathrm{W} := \{p_i \mid i \in \{1, ..., n\}\} \cup \{\varphi_i \mid i \in \{1, ..., m\}\} \cup \{e\}$
- $\mathsf{Act} := \{in_{\varphi_i} \mid i \in \{1, ..., m\}\} \cup \{out_{\varphi_i} \mid i \in \{1, ..., m\}\}$
- $\mathrm{S} := \{\{in_{\varphi_i} out_{\varphi_i}\} \mid i \in \{1, ..., m\}\}$
- $\mathrm{R} := \{(p_i, \varphi_j, in_{\varphi_j}) \mid p_i$ no aparece en forma negativa en $\varphi_j\} \cup \{(\varphi_j, p_i, out_{\varphi_j}) \mid p_i$ aparece en forma positiva en $\varphi_j\} \cup \{(\varphi_j, e, out_{\varphi_j}) \mid \varphi_j$ no tiene variables positivas$\}$
- $\mathrm{V} := \{(p_i, \{q_i\}) \mid i \in \{1, ..., n\}\} \cup \{(\varphi_i, \{q_{i+n}\}) \mid i \in \{1, ..., m\}\} \cup \{(e, \{q_{n+m+1}\})\}$ donde $q_1, ..., q_{n+m+1} \in \mathsf{Prop}$ son $n + m + 1$ variables proposicionales distintas.

Notar que decimos que p_i aparece en forma 'positiva' en φ_j si $\varphi_j = ... \wedge p_i \wedge ...$. A su vez, decimos que p_i aparece en forma 'negativa' en φ_j si $\varphi_j = ... \wedge \neg p_i \wedge ...$.

Ahora, f mapeará φ a $\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \rangle$, con $\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \rangle$ definidos de la siguiente manera:

- En el caso de que φ evalúe a *false* en la asignación que asigna a $p_1, ..., p_n$ el valor *false*:
  - $\mathcal{M}_1 = \langle \{1\}, \{\}, \{\}, \{(1, p)\}, \{a\} \rangle$
  - $\mathcal{M}_2 = \langle \{1\}, \{\}, \{\}, \{(1, q)\}, \{a\} \rangle$

  Notar que estos dos modelos son claramente no $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimilares, dado que no existe relación binaria no vacía que satisfaga (atom). Pero es correcto porque sólo utilizaremos esta definición en uno de los casos donde $\varphi \notin$ DNF-TAUT.

- En el caso de que φ evalúe a *true* en la asignación que asigna a $p_1, ..., p_n$ el valor *false*:
  - $\mathcal{M}_1 = \langle \mathrm{W}, \mathrm{R} \cup \{(p_i, p_i, test) \mid i \in \{1, ...n\}\} \cup \{(p_i, e, test) \mid i \in \{1, ..., n\}\}, \{\mathrm{S} \cup \{\{test\}\}\}, \mathrm{V}, \mathsf{Act} \cup \{test\} \rangle$
  - $\mathcal{M}_2 = \langle \mathrm{W}, \mathrm{R}, \{\mathrm{S}\}, \mathrm{V}, \mathsf{Act} \rangle$

Notar que V está definida de forma tal que cada $w \in \mathrm{W}$ satisface una única variable proposicional distinta, es decir, es inyectiva.

Estos dos párrafos que siguen eran explicativos, pensaba sacarlos pero quizás está bueno dar una explicación más humana antes de la demo más técnica.

La intuición de esta reducción es que queremos usar los conjuntos proposicionalmente definibles de este modelo para considerar cada posible asignación de valores a las variables $p_1, ..., p_n$. Dado un conjunto $U \subseteq \{p_1, ..., p_n\}$, estamos considerando la asignación que asigna *true* a las variables dentro de U y asigna $false$ a las de $\{p_1, ..., p_n\}/U$. Además, notemos que como la función V es inyectiva, entonces U es proposicionalmente definible.

El plan *test* que sólo aparece en $\mathcal{M}_1$ es la clave de la reducción. Lo que provoca es que dada una asignación (un conjunto proposicionalmente definible U), a $\mathcal{M}_2$ le hago buscar algún término φ_i al cuál pueda moverse (ninguna variable de U aparezca negada en φ_i) y a su vez todo variable que aparecía positiva en φ_i estaba en U. (Porque el plan *test* es como que simplemente va de U a $U \cup \{e\}$), el e es como que considera los términos que no tienen ninguna variable positiva (e de empty set). Si $\mathcal{M}_2$ no encuentra ningún término al cuál moverse es que dicho U sirve como contraejemplo para afirmar que φ no es una tautología.

Notemos que ambos modelos son polinomiales en el tamaño de φ.

A su vez, la construcción de los modelos, solo tiene el costo extra computacional de analizar si φ evalúa a *true* en la asignación que asigna $false$ a $p_1, ..., p_n$, lo cuál es claramente computable en tiempo polinomial.

Por lo que es fácil notar que f es computable en tiempo polinomial en el tamaño de φ.

Ahora queremos demostrar que $\varphi \in$ DNF-TAUT si y sólo si $\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \rangle \in$ KHi-Bisim.

- ($\rightarrow$) Sea $\varphi \in$ DNF-TAUT, donde $\varphi = \varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ y $p_1, ..., p_n$ son las variables proposicionales que aparecen en φ, veamos que $\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \rangle \in$ KHi-Bisim.

  Notar que como φ es una tautología, entonces φ evalúa a *true* en la asignación que asigna $false$ a $p_1, ..., p_n$, por lo que consideramos el segundo caso del mapeo f.

  Veamos que $Z := \{(w, w) \mid w \in \mathrm{W}\}$ es una bisimulación entre $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$. Es fácil ver que Z satisface (atom), pues ambos modelos utilizan la misma función de valuación V.

  A su vez, tanto (A-zig) como (A-zag) son claramente satisfechos por Z.

  Analicemos entonces ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zig) y ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zag).

  Primero, cabe resaltar que, por la definición de Z, para cada $X \subseteq \mathrm{W}$ se cumple que $X = Z(X)$.

  Ahora bien, notemos que cada plan de $\mathcal{M}_2$ está también en $\mathcal{M}_1$, y más aún, las aristas con las etiquetas que aparecen en dichos planes son exactamente las mismas en ambos modelos. Juntando lo recién mencionado y el hecho de que $U = Z(U)$, es fácil notar que Z satisface ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zag).

  Luego solo queda ver que Z satisface ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zig).

  Sea $U, T \subseteq \mathrm{W}$ tal que U es proposicionalmente definible y $U \stackrel{i}{\Rightarrow} T$, queremos ver que existe $T' \subseteq \mathrm{W}$ tal que:

- $Z(U) \overset{i}{\Rightarrow} T'$,
- $T' \subseteq Z(T)$.

Notemos primero que si el plan que atestigua $U \overset{i}{\Rightarrow} T$ es de la forma $in_{\varphi_j}out_{\varphi_j}$, entonces T sirve como T' dado que ese mismo plan y las mismas aristas con dichas etiquetas están en $\mathcal{M}_2$, similar al análisis realizado para el caso ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zag).

Entonces consideremos el caso en el que el plan que atestigua $U \overset{i}{\Rightarrow} T$ es *test*. En dicho caso, si analizamos la definición de R, ese plan puede ser fuertemente ejecutable sólo si $U \subseteq \{p_1, ..., p_n\}$ dado que son los únicos nodos que tienen aristas con etiqueta *test*. Así que solo necesitamos considerar los casos donde $U \subseteq \{p_1, ..., p_n\}$.

Notemos que $\mathrm{R}_{test}(U) = U \cup \{e\}$, entonces necesariamente $U \cup \{e\} \subseteq T$.

Consideremos ahora la asignación $\overrightarrow{a}$ que asigna *true* a las variables en U y *false* a las variables en $\{p_1, ..., p_n\}/U$. Como φ es una tautología, entonces existe φ_j que se vuelve verdadero a partir de $\overrightarrow{a}$, es decir, en φ_j las variables que aparecen en forma positiva son algún subconjunto de U y las variables que aparecen en forma negativa son algún subconjunto de $\{p_1, ..., p_n\}/U$.

Como las variables que aparecen en φ_j en forma negativa no están en U, entonces, analizando la definición de R, podemos ver que el plan $in_{\varphi_j}out_{\varphi_j}$ es fuertemente ejecutable en $Z(U) = U$.

En particular, las aristas con etiqueta in_{φ_j} llevarían de cada nodo de U al nodo φ_j.

Ahora bien, notemos que las aristas con etiqueta out_{φ_j} llevan del nodo φ_j a las variables que aparecen en forma positiva en φ_j o al nodo e en caso de no tener variables positivas. Pero, como dijimos, las variables positivas que aparecen en φ_j son un subconjunto, posiblemente vacío, de U. Entonces necesariamente de φ_j las aristas con etiqueta out_{φ_j} van a un conjunto $X \subseteq U \cup \{e\}$, es decir, $\mathrm{R}_{in_{\varphi_j}out_{\varphi_j}}(U) = X \subseteq U \cup \{e\} \subseteq T$. Finalmente, $T' := X$ nos sirve para demostrar que $Z(U) \overset{i}{\Rightarrow} T'$ y, a su vez, $T' \subseteq X \subseteq U \cup \{e\} \subseteq T = Z(T)$.

Lo cual demuestra que Z satisface ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zig).

Juntando los puntos mencionados, demostramos que Z es una bisimulación entre $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$, por lo que $\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \rangle \in$ KHi-Bisim.

- ($\leftarrow$) Para demostrar este caso, veremos que siendo $\varphi \notin$ DNF-TAUT, donde $\varphi = \varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ y $p_1, ..., p_n$ son las variables proposicionales que aparecen en φ, entonces $\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \rangle \notin$ KHi-Bisim.

  Como $\varphi \notin$ DNF-TAUT, existe una asignación $\overrightarrow{a}$ sobre las variables $p_1, ..., p_n$ que hace fallar cada φ_j. Denotemos a U como el conjunto de variables a las que se le asigna *true* en $\overrightarrow{a}$.

  Si $U = \emptyset$, es claro que $\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \rangle \notin$ KHi-Bisim, dado que en este caso se construyen dos modelos concretos que no son $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimilares.

  Así que consideremos el caso donde $U \neq \emptyset$.

  Primero notemos que la fórmula $\psi := \bigvee_{p_i \in U} q_i$ define a U. Pues, recordemos que por la definición de V, $\mathrm{V}(p_i) = \{q_i\}$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. A su vez, como V es inyectiva, solo los elementos de U satisfacerán ψ. Luego, como ψ es proposicional, U es proposicionalmente definible.

Ahora bien, como $U \subseteq \{p_1, ..., p_n\}$ entonces el plan *test* es fuertemente ejecutable en U y $\mathrm{R}_{test}(U) = U \cup \{e\}$, por lo que $U \overset{i}{\Rrightarrow} U \cup \{e\}$.

Veamos que no existe T' tal que:

- $Z(U) \overset{i}{\Rrightarrow} T'$,
- $T' \subseteq Z(U \cup \{e\})$.

Notemos que los planes que tiene a su disposición $Z(U) = U$ son de la forma $in_{\varphi_j} out_{\varphi_j}$.

Sea entonces φ_j, analicemos qué sucede en relación al plan $in_{\varphi_j} out_{\varphi_j}$. Un primer detalle a tener en cuenta es que como $\overrightarrow{a}$ hace fallar a φ_j, entonces, o bien ocurre que existe una variable en U que aparece en forma negativa en φ_j, o existe una variable en $\{p_1, ..., p_n\}/U$ que aparece en forma positiva en φ_j.

Si ocurre que una variable de U aparece en forma negativa en φ_j entonces el plan $in_{\varphi_j} out_{\varphi_j}$ no será fuertemente ejecutable en dicha variable y, por lo tanto, no será fuertemente ejecutable en U. Así que este plan no permitiría encontrar un T' adecuado.

Por otro lado, si ninguna variable de U aparece en forma negativa en φ_j entonces $in_{\varphi_j} out_{\varphi_j}$ es fuertemente ejecutable en U. Sin embargo, notemos que entonces existe una variable p_k en $\{p_1, ..., p_n\}/U$ que aparece en forma positiva en φ_j. Ahora bien, como p_k aparece en forma positiva en φ_j entonces $p_k \in \mathrm{R}_{in_{\varphi_j} out_{\varphi_j}}(U)$. Luego $\mathrm{R}_{in_{\varphi_j} out_{\varphi_j}}(U) \nsubseteq U \cup \{e\} = Z(U \cup \{e\})$, por lo que dicho plan no nos permite encontrar un T' adecuado.

Hemos analizado entonces todos los planes y ninguno permite encontrar un T' que cumpla con lo requerido, luego Z no satisface ($\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-zig).

Hemos demostrado entonces que Z no es una $\mathsf{L}_{\mathsf{Kh}_i}$-bisimulación.

Lo cual demuestra que $\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \rangle \notin$ KHi-Bisim. ■

Finalmente, demostramos que f es una reducción de DNF-TAUT a KHi-Bisim, la cuál puede ser computada en tiempo polinomial. Lo cuál demuestra que KHi-Bisim es co-NP-hard.

Teorema 6 *KHi-Bisim es co-NP-completo.* ◁

Demostración. 11 A partir de los lemas 5 y 6, queda demostrado que KHi-Bisim es co-NP-completo.

4. Ideas sueltas

Teorema 7 *Sea $\mathcal{M}$=$\langle \mathrm{W}, \mathrm{R}, \{\mathrm{S}_i\}_{i \in \mathsf{Agt}}, \mathrm{V}, \mathsf{Act} \rangle$ un modelo, y sea $Z \subseteq \mathrm{W} \times \mathrm{W}$ una relación binaria que satisface (atom) y $Id := \{(w, w) \in \mathrm{W}\} \subseteq Z$, entonces Z es una autobisimulación.* ◁

No se si dice mucho este teorema, pero al menos caracteriza un poco las autobisimulaciones.

Resumen de lo trabajado:

- Primera sección: Contracción por bisimulación

  Conclusiones positivas acerca de las contracciones, nos dicen cosas sobre la expresividad de la lógica, en el sentido de que demostramos que dado un modelo siempre existe otro en el que la función de valuación es inyectiva (no hay dos nodos que satisfagan exactamente el mismo conjunto de variables proposicionales), usa planes de solo un paso y las clases de equivalencia de planes que conoce cada agente son simplemente singletons y aún así la lógica no sabe cómo diferenciarlos (son lógicamente equivalentes).

  También, logramos contraer un modelo a otro donde chequear strong executability se logra en un solo paso, por lo que potencialmente se ahorra cómputo al no necesitar cada paso intermedio de un plan.

  Ambas contracciones son computables en tiempo polinomial en el tamaño del modelo lo cuál es muy bueno.

  Conclusiones negativas, no logramos encontrar una contracción que de verdad minimice el **tamaño** del modelo en cuestión. Si bien, seguro encontramos un modelo lógicamente equivalente que minimiza la cantidad de nodos, puede darse el caso que la contracción aumente considerablemente la cantidad de aristas (sin embargo, hay que considerar el trade-off del ahorro en el chequeo de strong executability).

  Cosas a analizar:

  - Hay una contracción mejor?
  - Puede tener que ver la definición de bisimulación con el hecho de que no encontramos una contracción totalmente convincente (ver teorema de esta sección capaz)?
  - Como dijo Carlos, puede tener que ver con la naturaleza de los modelos donde se interpreta la lógica? En ese caso considerar hacer un análisis desde teoría de modelos.

- Segunda sección: Bisimulación entre dos modelos

  Queda escribir el algoritmo para demostrar membership y revisar la demo de hardness para confirmar que la reducción está efectivamente bien.

  Creo que este problema queda bastante completo una vez hechas esas dos cosas.