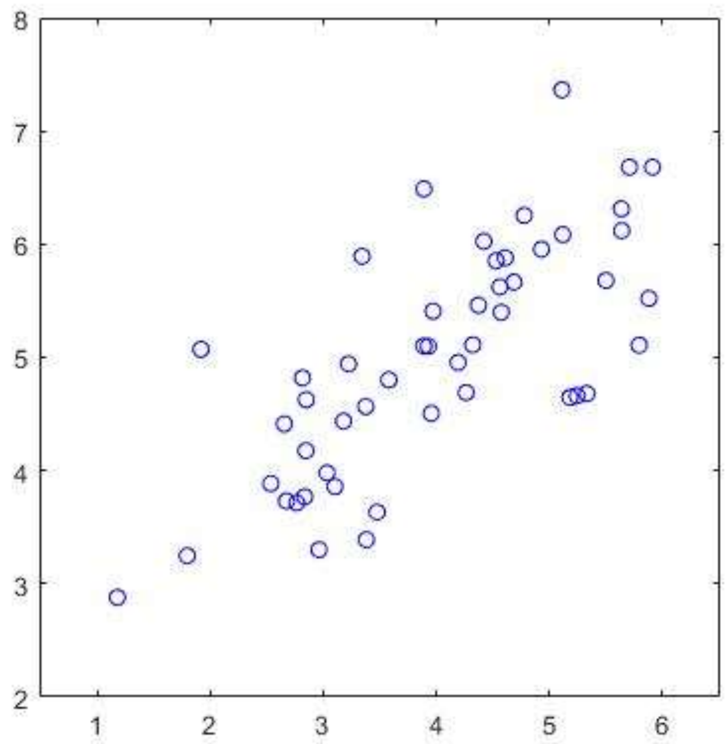
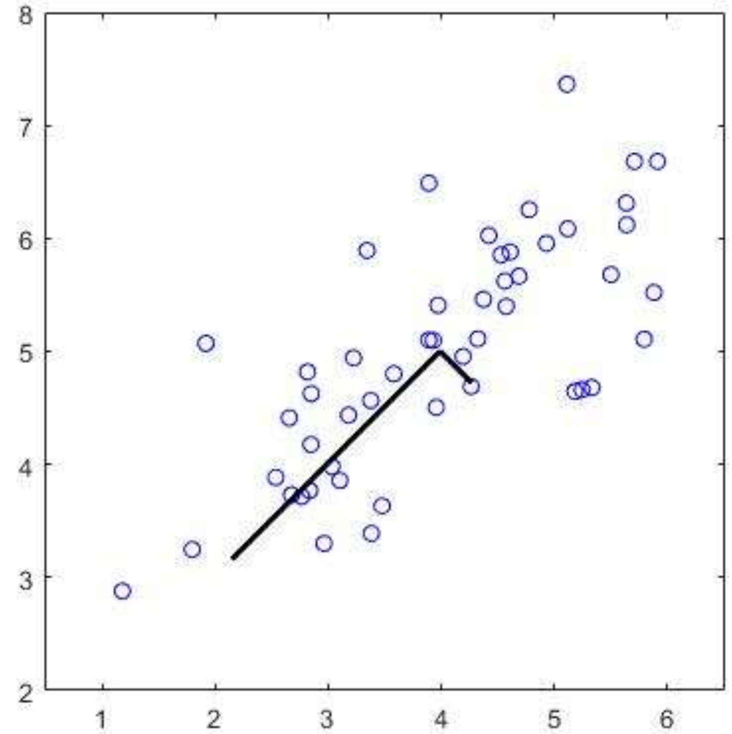
Στατιστική Μοντελοποίηση και Αναγνώριση Προτύπων (ΤΗΛ311)
Αναφορά 1ης Σειράς Ασκήσεων

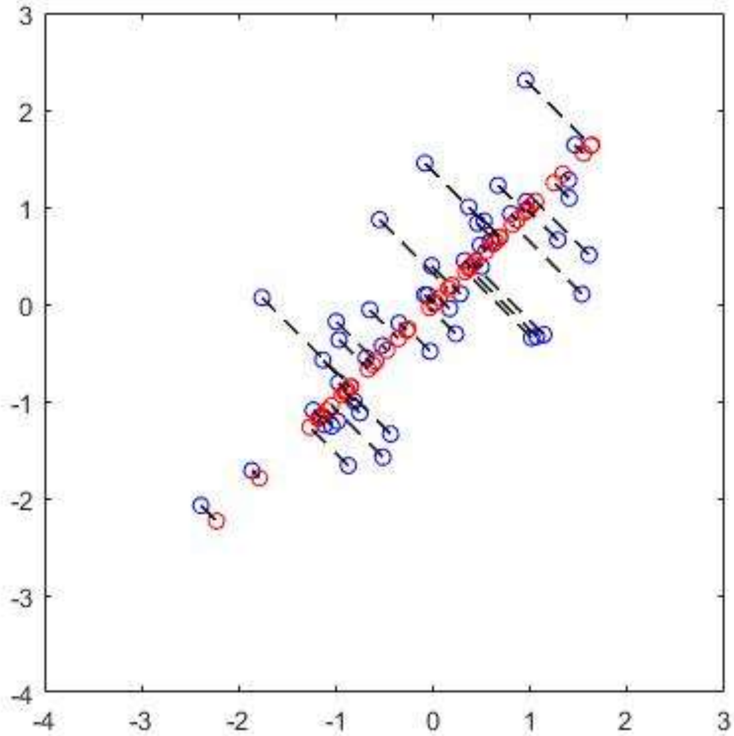
Ανδρεαδάκης Αντώνης 2013030059

1. Για το 1ο μέρος χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Principal Component Analysis σε ένα dataset έτσι, ώστε να γίνει εξοικείωση με τη μέθοδο αλλά και η χρήση του matlab για τέτοια προβλήματα. Πρώτα γίνεται εισαγωγή (μέσω της εντολής load) και απεικόνιση του dataset στον 2-D χώρο.



Στη συνέχεια, με κανονικοποίηση (standardization) με μέση τιμή μηδέν και διασπορά 1, στα αρχικά δείγματα παίρνουμε τη νέα κατανομή των δειγμάτων. Έπειτα εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο PCA και υπολογίζεται ο πίνακας συνδιασποράς των κανονικοποιημένων δεδομένων με χρήση του τύπου $\sum = \frac{1}{m} * X^T * X$. Τέλος, επιστρέφουμε τους πίνακες ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων που υπολογίστηκαν με χρήση της εντολής eig() του matlab :





Έτσι, υπολογίζεται η η συνεισφορά της κάθε συνιστώσας στην ολική διακύμανση και με προβολή και ανάκτηση των δειγμάτων, λαμβάνουμε το νέο αποτέλεσμα σε μικρότερη διάσταση.

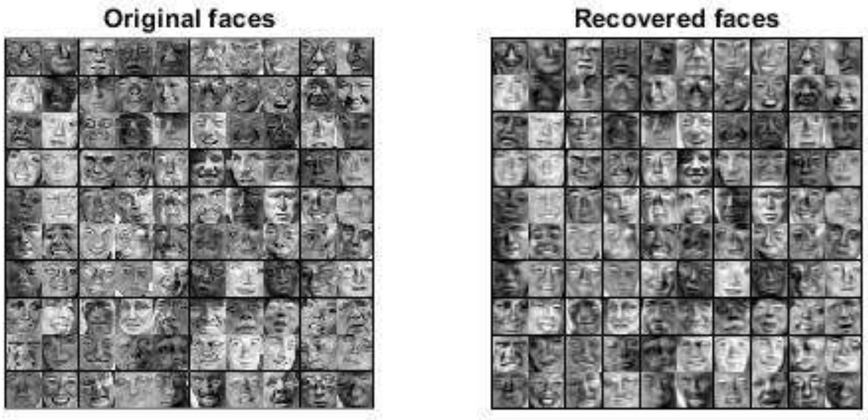
Για το 2ο μέρος εφαρμόστηκε ο αλγόριθμος PCA σε ένα πραγματικό dataset με εικόνες προσώπων. Αρχικά, κάνοντας εισαγωγή και προβολή των εικόνων χρησιμοποιήσαμε τις συναρτήσεις feature_normalize κι έπειτα myPCA. Από την απεικόνιση των δειγμάτων, παρατηρείται σημαντική απώλεια πληροφορίας, δηλαδή μια θόλωση.

K = 10:

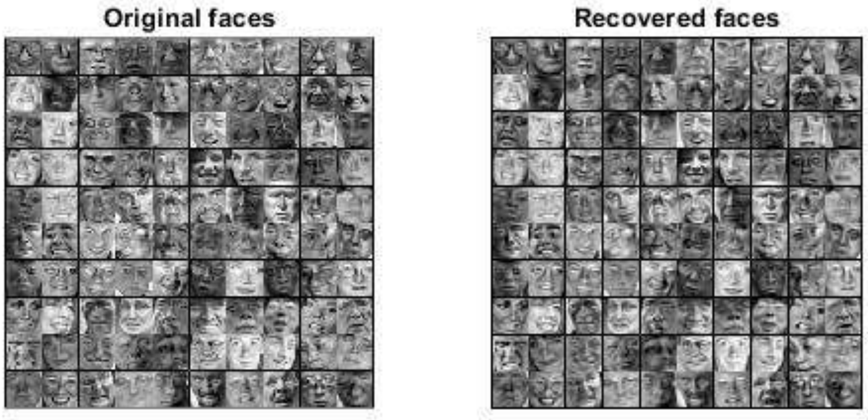
Original faces

Recovered faces

K = 100:



K = 200:



Για να γίνει ορατή η μείωση των διαστάσεων, οι εικόνες προβάλλονται στον ίδιο χώρο με χρήση 10, 50, 200 ιδιοδιανυσμάτων. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των συνιστωσών τόσο πιο ξεκάθαρο είναι το αποτέλεσμα οπτικά. Δηλαδή, όσο η παράμετρος K αυξάνεται τόσο καλύτερη είναι η ανάκτηση των εικόνων, όπως φαίνεται και στις παραπάνω εικόνες.

2. Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε: $\mu_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mu_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}$, $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$, $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Οπότε $(\mu_1 - \mu_2) = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -10 \end{bmatrix}$. Γνωρίζουμε ότι $S_w = \frac{1}{2} * (\Sigma_1 + \Sigma_2)$, δηλαδή $S_w = \frac{1}{2} * \begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 9 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix}$. Σύμφωνα με την υπόδειξη, ο αντίστροφος του S_w θα είναι:

$$S_w^{-1} = \left(\begin{bmatrix} \frac{13}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{13}{2}*\frac{13}{2}\right)-\left(\frac{9}{2}*\frac{9}{2}\right)} * \begin{bmatrix} \frac{13}{2} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{169}{4}\right)-\left(\frac{81}{4}\right)} * \begin{bmatrix} \frac{13}{2} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{68}{4}} * \begin{bmatrix} \frac{13}{2} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{17} * \begin{bmatrix} \frac{13}{2} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{34} & -\frac{9}{34} \\ -\frac{9}{34} & \frac{13}{34} \end{bmatrix}.$$

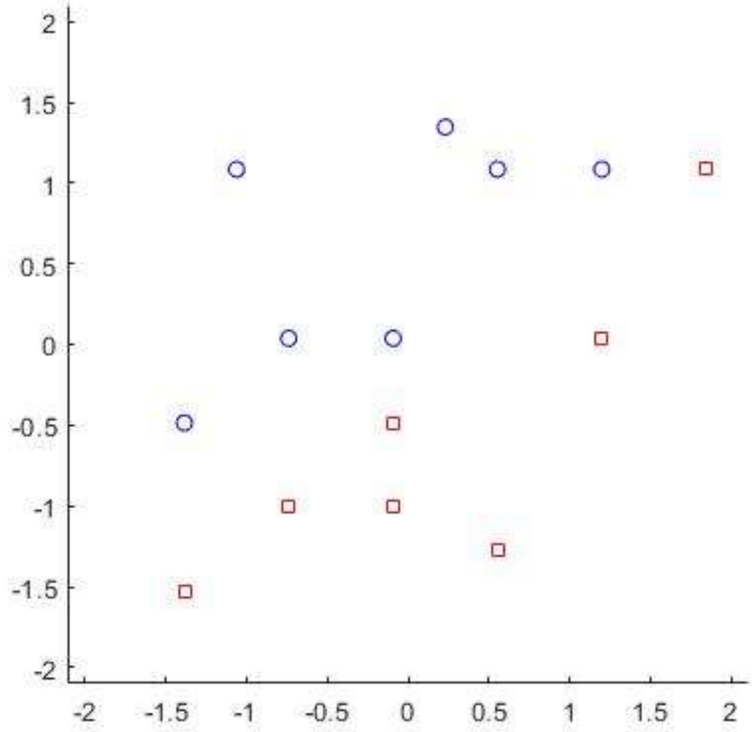
Άρα

$$w = S_w^{-1} * (\mu_1 - \mu_2) = \begin{bmatrix} \frac{13}{34} & -\frac{9}{34} \\ -\frac{9}{34} & \frac{13}{34} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -15 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13*(-15)+13*(-10)}{34} & -\frac{9*(-15)+9*(-10)}{34} \\ -\frac{9*(-15)+9*(-10)}{34} & \frac{13*(-15)+13*(-10)}{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-195-130}{34} & -\frac{-135-90}{34} \\ -\frac{-135-90}{34} & \frac{-195-130}{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-325}{34} & -\frac{-225}{34} \\ -\frac{-225}{34} & \frac{-325}{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{325}{34} & \frac{225}{34} \\ \frac{225}{34} & -\frac{325}{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9{,}559 & 6{,}618 \\ 6{,}618 & -9{,}559 \end{bmatrix}.$$

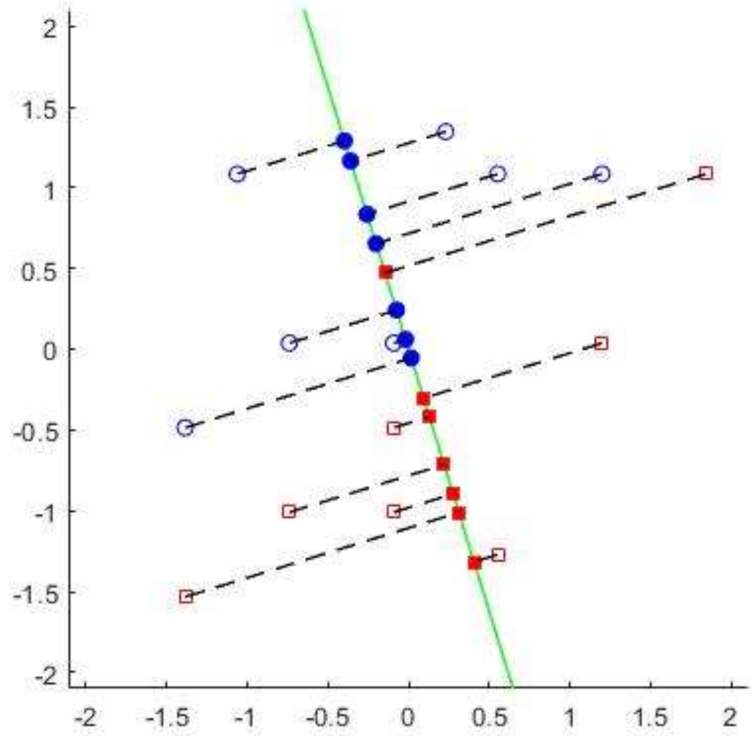
Υλοποίησα και σε matlab την άσκηση και έδωσε διαφορετικό αποτέλεσμα: $w = \begin{bmatrix} -2.3864 \\ 0.1136 \end{bmatrix}$. Κώδικας:

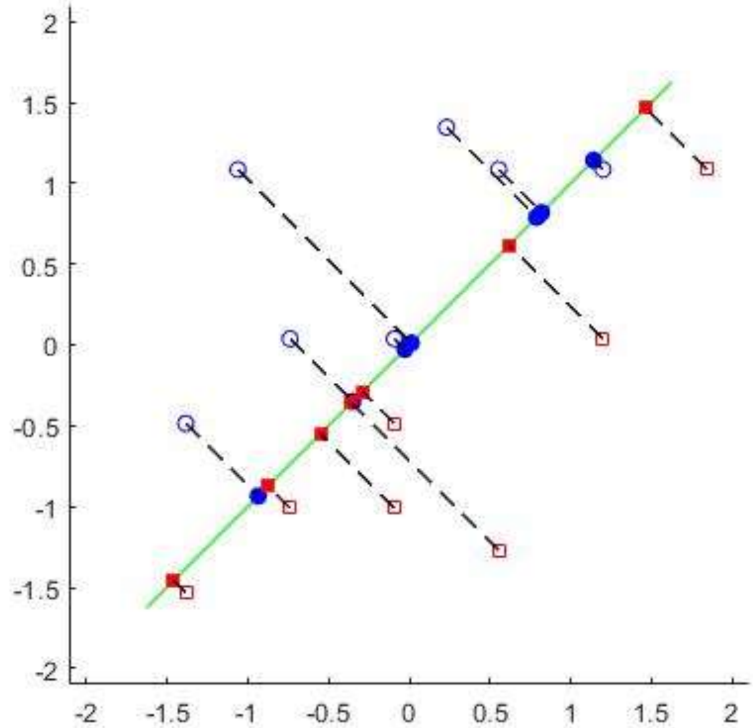
```
clc; clear all; close all;
m1 = [-5; 5];
m2 = [10; 15];
d = m1 - m2;
S1 = [11 9; 9 11];
S2 = [2 0; 0 2];
Sw = (1/2)*(S1 + S2);
w = (inv(Sw))*d;
```

3. Για το $1^{ο}$ μέρος εφαρμόσαμε τον αλγόριθμο LDA σε ένα σύνολο από τεχνητά δεδομένα και απεικονίζονται παρακάτω:



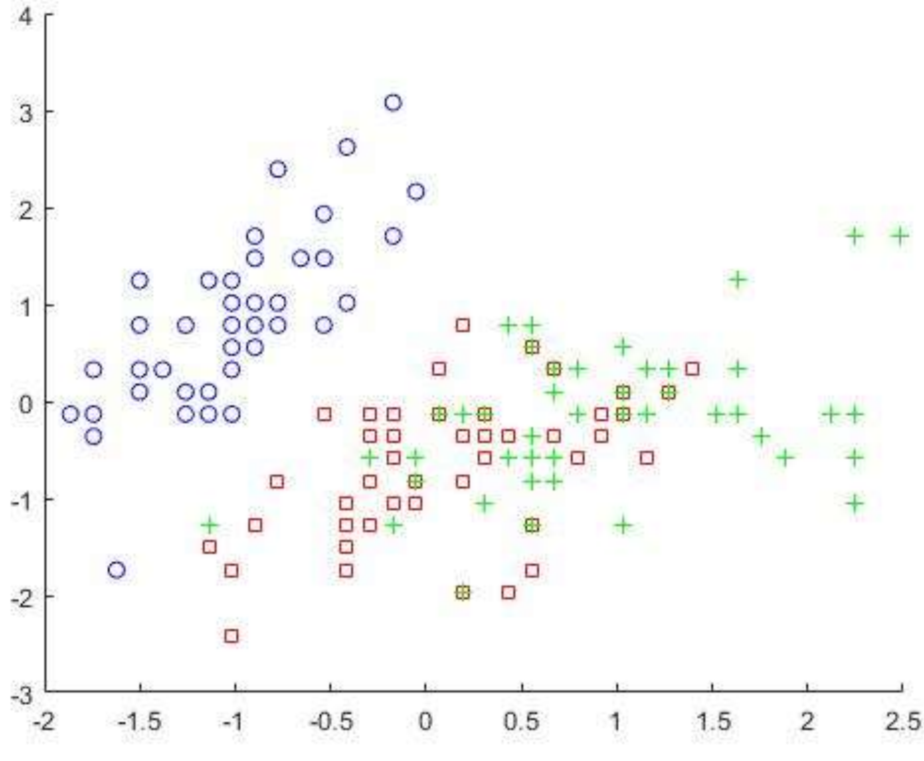
Μετά, εφαρμόσαμε τον αλγόριθμο του fisher Linear Discriminant, με σκοπό τη μείωση των διαστάσεων και την εύκολη διάκρισή τους σε 2 κατηγορίες. Όπως και στην $1^{η}$ άσκηση, στο διάνυσμα που βρέθηκε από τον αλγόριθμο προβάλλουμε και ανακτούμε τα δεδομένα πάνω σε αυτό το διάνυσμα.



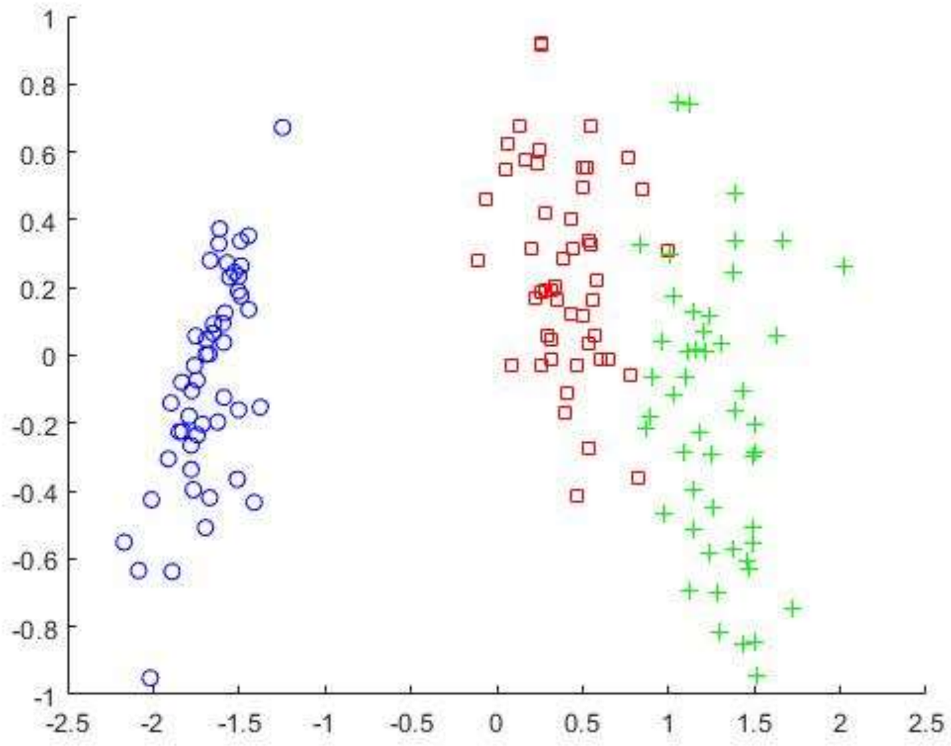


Με τη χρήση του LDA, η διάκριση των δεδομένων στη μειωμένη διάσταση είναι πιο «εύκολη». Αντιθέτως, με χρήση του PCA η διάκριση δεν είναι δυνατή, παρότι μειώνεται η διάσταση.

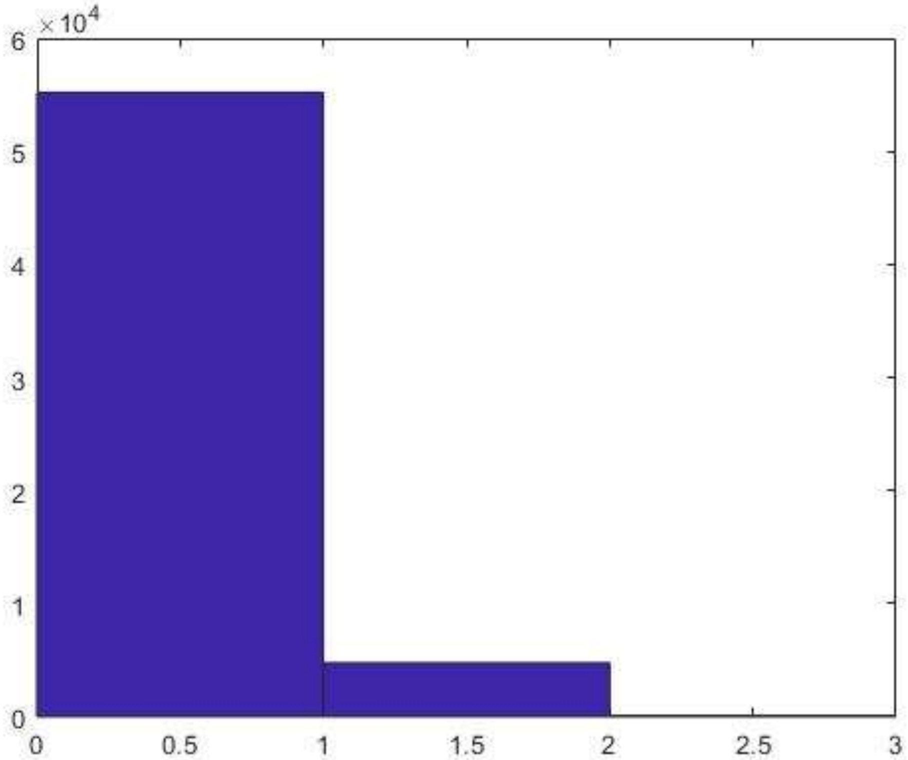
Στο 2^o μέρος εφαρμόσαμε multiclass LDA πάνω στο IRIS dataset, το οποίο περιλαμβάνει 50 δείγματα από 3 διαφορετικά είδη λουλουδιών. Σκοπός είναι η μείωση των διαστάσεων, όπως παραπάνω. Εισάγουμε και προβάλλουμε τα δείγματα από τις 3 κλάσεις και εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο LDA. Έτσι έχουμε:

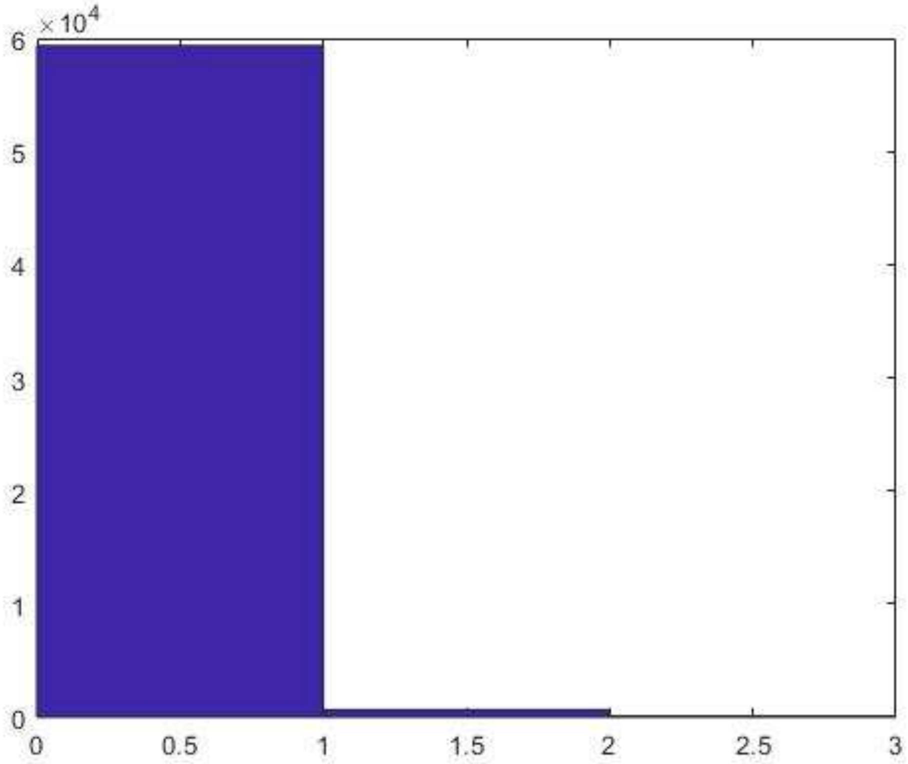


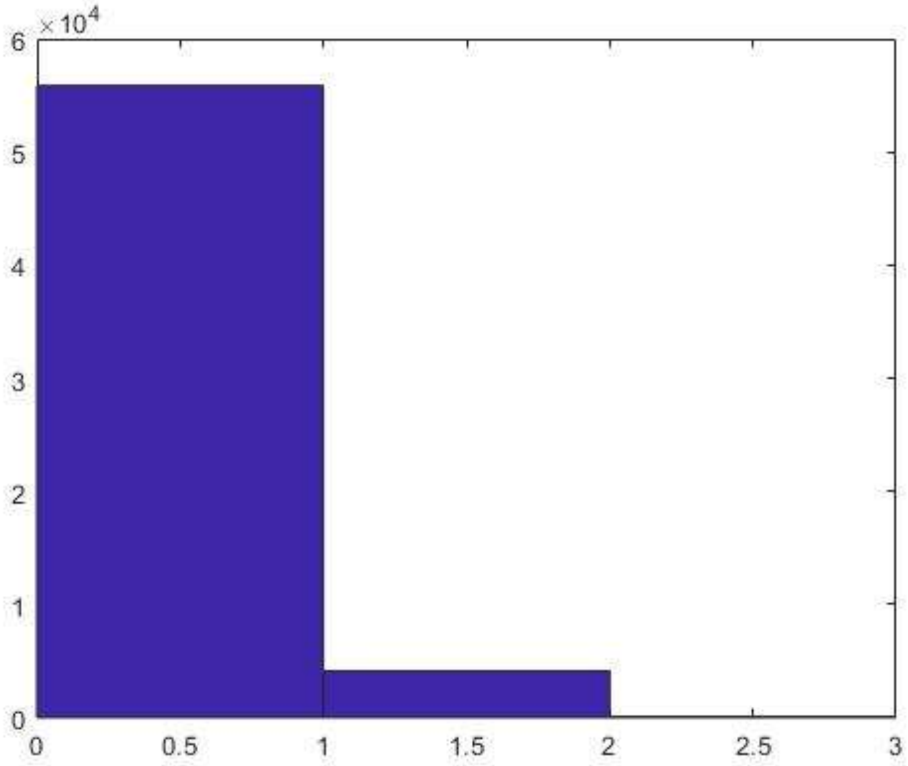
Η διάκριση των κλάσεων δεν είναι εύκολη. Με εφαρμογή του αλγορίθμου LDA, οι 3 κλάσεις γίνονται εύκολα διακριτές.



4. Σκοπός της άσκησης είναι η δημιουργία ενός δειγματοχώρου και ο υπολογισμός κάποιων πιθανοτήτων με χρήση του θεωρήματος Bayes. Υπολογίσαμε το aspect ratio κάθε εικόνας, το οποίο ορίζεται από το ελάχιστο ορθογώνιο που περικλείει έναν χειρόγραφο αριθμό στο mnist dataset. Δηλαδή ο λόγος width/height. Συγκεκριμένα έγινε επεξεργασία μόνο των ψηφίων 1 και 2 για την κλάση 1 και 2 αντίστοιχα. Μετά τον υπολογισμό του aspect ratio αυτών των κλάσεων, δημιουργήσαμε ένα διάστημα τιμών με εύρος [minAspectRatio, maxAspectRatio] και από τις 2 κλάσεις. Στη συνέχεια, χωρίσαμε αυτό το διάστημα σε 3 ίσα υποδιαστήματα και έγινε ταξινόμηση κάθε εικόνας σε καθένα από αυτά, ανάλογα το aspect ratio της κάθε εικόνας. Τα αποτελέσματα που πήραμε από τις γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω:


×10^4
6
5
4
3
2
1
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


×10^4
6
5
4
3
2
1
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3



Οι πιθανότητες που υπολογίσαμε είναι οι εξής:

Prior Probabilities
PC1 = 1

PC2 = 0.9999

Likelihoods
PgivenC1 =

0.1016

0.0107

0.0001

PgivenC2 =

0.0305

0.0686

0.0002

Evidence
Pevidence =

0.1321

0.0792

0.0004

Posterior Probabilities
PC1givenL = 0.7691

PC2givenL = 0.2309

5. Η 1η γραφική που φαίνεται παρακάτω, απαντά στα ερωτήματα b και c της άσκησης, ενώ η 2η αφορά το e.