ΤΗΛ 415 - Στατιστική Επεξεργασία Σήματος για Τηλ/νίες
Εαρινό Εξάμηνο 2020

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών
Υπολογιστών
Πολυτεχνείο Κρήτης

Εργασία 1
30 Μαρτίου 2020

Αριθμός Ομάδας Εργασίας: LAB41544983

Επώνυμο: ΜΑΤΣΑΤΣΟΣ

Όνομα: ΙΩΑΝΝΗΣ

AM: 2013030148

Επώνυμο: ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ

Όνομα: ΑΝΤΩΝΗΣ

AM: 2013030059

1)

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$B = \left[\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$(m \times n)(n \times k)$ rule to choose partitions!

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 B_1 + A_2 B_2 \\ A_3 B_1 + A_4 B_2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -18 \\ -9 & -18 \end{bmatrix}$$

$$A_3 B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -10 & -19 \\ -10 & -19 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2)

(α)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1\cdot 2 - 1\cdot 1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 1(-1) & 1\cdot 2 + 2(-1) \\ 1\cdot 2 + 2(-1) & 1(-1) + 2\cdot 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2\times 2}$$

(β)

$$B = \begin{bmatrix} c & c \\ c & 2c \end{bmatrix}$$

Έστω $B^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix}$

Ο C είναι αντιστρέψιμος. Τότε έχουμε:

$$B \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C & C \\ C & 2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Από την παραπάνω σχέση παίρνουμε τα δύο συστήματα δύο εξισώσεων:

$11 \rightarrow \quad C \cdot X + CZ = I \Rightarrow C(X+Z) = I \Rightarrow X + Z = I \cdot C^{-1} \Rightarrow$
$X + Z = C^{-1}$

$21 \rightarrow \quad C \cdot X + 2C \cdot Z = 0 \Rightarrow C(X + 2Z) = 0 \Rightarrow X + 2Z = 0 \Rightarrow$
$Z = \frac{-X}{2}$

Λόγω της 21, η 11:
$X - \frac{X}{2} = C^{-1} \Rightarrow \frac{X}{2} = C^{-1} \Rightarrow \boxed{X = 2C^{-1}}$

Άρα: $2C^{-1} + Z = C^{-1} \Rightarrow \boxed{Z = -C^{-1}}$

$12 \rightarrow \quad C \cdot Y + C \cdot V = 0 \Rightarrow C(Y + V) = 0 \Rightarrow Y + V = 0 \Rightarrow$
$Y = -V$

$22 \rightarrow \quad C \cdot Y + 2C \cdot V = I \Rightarrow C(Y + 2V) = I \overset{(12)}{\Rightarrow} C(-V + 2V) = I \Rightarrow$
$C \cdot V = I \Rightarrow V = I \cdot C^{-1} \Rightarrow \boxed{V = C^{-1}}$

Λόγω της 12:
$\boxed{Y = -C^{-1}}$

Τελικά:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2C^{-1} & -C^{-1} \\ -C^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$$

3) $\boxed{A(A+B)^{-1}B} = \left(\left(A(A+B)^{-1}B\right)^{-1}\right)^{-1} =$

$= \left(B^{-1}(A+B)A^{-1}\right)^{-1} =$

$= \left((B^{-1}A + B^{-1}B)A^{-1}\right)^{-1} =$

$= \left((B^{-1}A + I)A^{-1}\right)^{-1} =$

$= \left(B^{-1}A\cdot A^{-1} + I\,A^{-1}\right)^{-1} =$

$= \left(B^{-1}\cdot I + A^{-1}\right)^{-1} =$

$= \boxed{\left(A^{-1} + B^{-1}\right)^{-1}}$

$\boxed{B(A+B)^{-1}A} = \left(\left(B(A+B)^{-1}A\right)^{-1}\right)^{-1} =$

$= \left(A^{-1}(A+B)B^{-1}\right)^{-1} =$

$= \left((A^{-1}A + A^{-1}B)B^{-1}\right)^{-1} =$

$= \left(A^{-1}AB^{-1} + A^{-1}BB^{-1}\right)^{-1} =$

$= \left(I\cdot B^{-1} + A^{-1}I\right)^{-1} =$

$= \boxed{\left(A^{-1} + B^{-1}\right)^{-1}}$

4) Έστω $u = (\alpha'_{ij} - \alpha_{ij})e_i$ και $v = e_j$, με e_i, e_j $n\times 1$

Τότε:

$$B^{-1} = (A + u\cdot v^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\cdot u\cdot v^T\cdot A^{-1}}{1 + v^T\cdot A^{-1}u} \qquad (1)$$

Υπολογίζω τον αριθμητή:

$$A^{-1}u\cdot v^T\cdot A^{-1} = (\alpha'_{ij} - \alpha_{ij})\underbrace{\underset{n\times n}{A^{-1}}\ \underset{n\times 1}{e_i}}_{n\times 1}\cdot\underbrace{\underset{1\times n}{e_j^T}\ \underset{n\times n}{A^{-1}}}_{1\times n} = \boxed{(\alpha'_{ij} - \alpha_{ij})A^{-1}_{:,i}\cdot A^{-1}_{j,:}}$$

Υπολογίζω τον παρονομαστή:

$$1 + e_j^T\cdot A^{-1}(\alpha'_{ij} - \alpha_{ij})e_i = 1 + A^{-1}_{j,:}(\alpha'_{ij} - \alpha_{ij})e_i =$$

$$= 1 + (\alpha'_{ij} - \alpha_{ij})\underbrace{\underset{1\times n}{A^{-1}_{j,:}}\ \underset{n\times 1}{e_i}}_{1\times 1} = \boxed{1 + (\alpha'_{ij} - \alpha_{ij})A^{-1}_{j,i}}$$

Αντικαθιστώντας στην (1):

$$\boxed{B^{-1} = A^{-1} - \frac{(\alpha'_{ij} - \alpha_{ij})A^{-1}_{:,i}\cdot A^{-1}_{j,:}}{1 + (\alpha'_{ij} - \alpha_{ij})A^{-1}_{j,i}}}$$

5) $\operatorname{rank}(A) = 1 \Rightarrow A = u \cdot v^T$

Η εικόνα του A είναι μονοδιάστατη και υπάρχει κάποιο μη μηδενικό u που τη δημιουργεί. Επιπλέον, για οποιοδήποτε άλλο v, μπορούμε να γράψουμε $Av = \lambda(v) u$ για κάποιο $\lambda(v)$ που εξαρτάται γραμμικά από το v, λόγω του ότι ο A είναι γραμμικός και το u είναι η βάση της εικόνας του A. Αυτό καθορίζει μια μη μηδενική σχέση $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που πρέπει να δοθεί παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με κάποιο v_0, δηλαδή:

$$\lambda(v) = \langle v_0, v \rangle \Rightarrow A(v) = \langle v_0, v \rangle u \quad \forall v, \text{ δηλαδή:}$$
$$A = u v^T$$

$A = u v^T \Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 1$

Έστω $A = u v^T$. Αν $w \in \mathbb{R}^n$ τότε $Aw = u \cdot v^T w = (w \cdot v) u$. Αυτό σημαίνει ότι ο A συνδέει κάθε διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ σε ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο του u. Άρα $\operatorname{rank}(A) = \dim(R(A))$ $\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 1$

6) Έστω $C_A = \operatorname{span}(A)$, $C_B = \operatorname{span}(B)$ (για τις στήλες), $R_A = \dim(A)$, $R_B = \dim(B)$ (για τις γραμμές) και $c = \dim(C_A \cap C_B)$, $d = \dim(R_A \cap R_B)$ ισχύει ότι:

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - c - d \leq \operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - \max(c, d)$$

Όμως $A = u_1 v_1^T$, $B = u_2 v_2^T$ και επειδή από την εκφώνηση έχουμε ότι u_1, u_2 καθώς και v_1, v_2 γραμμικά ανεξάρτητα, τότε θα είναι $c = d = 0$ και $\max(c, d) = 0$. Άρα θα έχουμε:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq \text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \Rightarrow$$
$$\text{rank}(A+B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

Τέλος, εφόσον ισχύει ότι η rank είναι προσθετική για ένα σύνολο πινάκων τότε θα είναι και για τα σύνολα πινάκων που σχηματίζονται προσθέτωντας διακριτούς πίνακες από αυτό το σύνολο. Άρα ο μέγιστος αριθμός που μπορούμε να προσθέσουμε έτσι ώστε να διατηρείται η ισότητα, είναι $\binom{m}{n}$.