

**ΤΗΛ 415 - Στατιστική Επεξεργασία Σήματος για Τηλ/νίες
Εαρινό Εξάμηνο 2020**

**Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Πολυτεχνείο Κρήτης**

Εργασία 3
25 Μαΐου 2020

Αριθμός Ομάδας Εργασίας:

Επώνυμο:

Όνομα:

ΑΜ:

Επώνυμο:

Όνομα:

ΑΜ:

1. α) Σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα με μία κεραία στον πομπό και μία στον δέκτη, ο πομπός χρησιμοποιεί έναν τριγωνικό παλμό $p(t)$ διάρκειας $T = 0.5$ sec για να μεταδώσει μία ακολουθία από $N = 18$ bits $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{N-1} \in \{\pm 1\}$. Ο παλμός $p(t)$ περιγράφεται από την εξίσωση

$$p(t) = \begin{cases} At, & 0 \leq t < \frac{T}{2}, \\ A(T-t), & \frac{T}{2} \leq t < T, \end{cases} \quad (1)$$

όπου το $A > 0$ είναι τέτοιο ώστε η ενέργεια του $p(t)$ να είναι 1.

Δημιουργήστε το σήμα βασικής ζώνης $x(t)$ διάρκειας $(N+2)T$ sec (στις πρώτες N περιόδους μεταδίδονται τα N σύμβολα, στις δύο τελευταίες περιόδους το σήμα είναι μηδενικό) που δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{E} s_n p(t-nT), & 0 \leq t < NT, \\ 0, & NT \leq t < (N+2)T, \end{cases} \quad (2)$$

όπου $E = 10$ είναι η ενέργεια ανά bit. Χρησιμοποιήστε περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 10^{-5}$ sec. Σχεδιάστε το σήμα $x(t)$ ως προς t και το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier (M.F.) $X(F)$ του σήματος ως προς F . Για το M.F. μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη σχέση $X = \text{fftshift}(\text{fft}(x)) * T_s$ και να σχεδιάσετε το μέτρο του X ως προς $F = [-K/2 : K/2 - 1] * F_s / K$ όπου K είναι το μήκος του διανύσματος x και $F_s = \frac{1}{T_s}$ είναι η συχνότητα δειγματολήψιας.

β) Φιλτράρετε το $X(F)$ με ένα κατωπερατό φίλτρο που επιτρέπει τις συχνότητες $|F| \leq B$, με $B = 10$ Hz ώστε να προκύψει ο φιλτραρισμένος M.F. $X_{\text{filt}}(F)$ και υπολογίστε το αντίστοιχο σήμα στον χρόνο $x_{\text{filt}}(t)$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη σχέση $x_{\text{filt}} = \text{ifft}(\text{fftshift}(X_{\text{filt}})) * F_s$. Σχεδιάστε το σήμα $x_{\text{filt}}(t)$ ως προς t . Τέλος, διαμορφώστε το $x_{\text{filt}}(t)$ με συχνότητα φορέα $F_c = 1000$ Hz ώστε να προκύψει το bandpass σήμα

$$x_{\text{BP}}(t) = x_{\text{filt}}(t) \cos(2\pi F_c t). \quad (3)$$

γ) Θεωρήστε $L = 100$ ακτίνες μεταξύ πομπού και δέκτη και υπολογίστε το ληφθέν bandpass σήμα

$$y_{\text{BP}}(t) = \sum_{l=1}^L a_l x_{\text{BP}}(t - \tau_l) \quad (4)$$

όπου το a_l είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο διάστημα $[0, 1]$ και το τ_l είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο διάστημα $[0, \text{max_delay}]$ με $\text{max_delay} = 0.1T$, $l = 1, 2, \dots, L$. Φιλτράρετε το $y_{\text{BP}}(t)$ με ένα ζωνοπερατό φίλτρο που επιτρέπει τις συχνότητες $|F - F_c| \leq B$ και $|F + F_c| \leq B$ ώστε να προκύψει το σήμα $y_{\text{BP,filt}}(t)$ με M.F. το σήμα $Y_{\text{BP,filt}}(F)$. Σχεδιάστε στην ίδια γραφική τους M.F. των $x_{\text{BP}}(t)$, $y_{\text{BP}}(t)$, και $y_{\text{BP,filt}}(t)$.

δ) Μεταφέρετε το συχνοτικό περιεχόμενο θετικών συχνοτήτων του $Y_{\text{BP,filt}}(F)$ στην περιοχή $[-B, B]$ ώστε να προκύψει ο M.F. $Y(F)$ του ληφθέντος σήματος βασικής ζώνης $y(t)$. Σύμφωνα με τη θεωρία, για μικρό max_delay , τα μεταδιδόμενα και λαμβανόμενα σήματα βασικής ζώνης θα πρέπει να συνδέονται με τη σχέση

$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{l=1}^L a_l e^{-j2\pi F_c \tau_l}}_h x_{\text{filt}}(t). \quad (5)$$

Επιβεβαιώστε την παραπάνω σχέση, συγκρίνοντας στην ίδια γραφική το $x_{\text{filt}}(t)$ και το πραγματικό μέρος της διαίρεσης $y(t)/h$. Επαναλάβετε για $\text{max_delay} = 0.2T, 0.3T, 0.5T, 1.5T$. Τι παρατηρείτε; (Προαιρετικά, μπορείτε να επιχειρήσετε και αυτόματο συγχρονισμό (μέσω συνέλιξης) του πραγματικού μέρους του σήματος $y(t)/h$ με το $x_{\text{filt}}(t)$, ώστε να φαίνονται συγχρονισμένα στη γραφική και να μπορούν να συγκριθούν ευκολότερα).

ε) Σχεδιάστε την pdf του h για τις παραπάνω παραμέτρους, με $\text{max_delay} = 0.1T$ και $L = 400$. Όλες οι άλλες παράμετροι μένουν ως έχουν. Για την εκτίμηση της pdf, χρησιμοποιήστε 10^6 πειράματα. Θα πρέπει να προκύπτει γραφικά ότι $h \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$.

Επαναλάβετε για $\text{max_delay} = 0$. Τι παρατηρείτε;

2. α) Υλοποιήστε τη συνάρτηση `real_colored_noise.m` που έχει τις εξής εισόδους.

- `m`: Διάνυσμα διάστασης $n \times 1$ που δηλώνει τη μέση τιμή $\mu \in \mathbb{R}^n$ του Γκαουσιανού τυχαίου διανύσματος που θέλουμε να δημιουργήσουμε.
- `C`: Συμμετρικός πίνακας διάστασης $n \times n$ που δηλώνει τον πίνακα συνδιασποράς (covariance) $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ του τυχαίου διανύσματος που θέλουμε να δημιουργήσουμε.
- `N`: Αριθμός ανεξάρτητων διανυσμάτων που παράγονται.
- `method`: Δείκτης επιλογής της μεθόδου διάσπασης που ακολουθείται (η τιμή 1 αντιστοιχεί στη διάσπαση ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων (eigendecomposition) ενώ η τιμή 2 αντιστοιχεί στη διάσπαση Cholesky).

Η έξοδος της συνάρτησης θα είναι ένας πίνακας διάστασης $n \times N$ που περιέχει τα N ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα ως στήλες. Καλέστε τη συνάρτηση με τις παραμέτρους `m` και `C` που περιέχονται στο αρχείο `real_data.mat` για να βεβαιωθείτε ενδεικτικά ότι δουλεύει.

β) Υλοποιήστε τη συνάρτηση `complex_colored_noise.m` που παράγει N ανεξάρτητα proper μιγαδικά Γκαουσιανά διανύσματα μέσης τιμής $\mu \in \mathbb{C}^n$ και πίνακα συνδιασποράς $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Καλέστε τη συνάρτηση με τις παραμέτρους `m` και `C` που περιέχονται στο αρχείο `complex_data.mat` για να βεβαιωθείτε ενδεικτικά ότι δουλεύει.

3. Θεωρήστε ένα σύστημα CDMA όπου n χρήστες μεταδίδουν συγχρόνως τα σήματά τους προς ένα σταθμό βάσης. Κάθε χρήστης χρησιμοποιεί έναν ξεχωριστό κώδικα (υπογραφή) μήκους m . Σε κάθε περίοδο, κάθε χρήστης μεταδίδει ένα bit πληροφορίας. Το σήμα που λαμβάνει ο σταθμός βάσης κατά την i -οστή μετάδοση είναι το

$$\mathbf{x}[i] = \sum_{k=1}^n \sqrt{P_k} b_k[i] \mathbf{s}_k + \mathbf{n}[i] = \sqrt{P_1} b_1[i] \mathbf{s}_1 + \sum_{k=2}^n \sqrt{P_k} b_k[i] \mathbf{s}_k + \mathbf{n}[i], \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

όπου N είναι ο συνολικός αριθμός μεταδόσεων, $P_k, b_k[i] \in \{\pm 1\}$, και $\mathbf{s}_k \in \{\pm \frac{1}{\sqrt{m}}\}^m$ είναι η μεταδιδόμενη ισχύς, το i -οστό μεταδιδόμενο bit (που είναι ομοιόμορφα κατανομημένο), και η υπογραφή, αντίστοιχα, του χρήστη k , και $\mathbf{n}[i]$ είναι το i -οστό διάνυσμα λευκού προσθετικού θορύβου. Θεωρούμε ότι ο χρήστης που μας ενδιαφέρει είναι ο χρήστης 1 και το διάνυσμα θορύβου έχει μέση τιμή $E\{\mathbf{n}[i]\} = \mathbf{0}$ και πίνακα αυτοσυσχέτισης $E\{\mathbf{n}[i]\mathbf{n}^T[i]\} = \sigma^2 \mathbf{I}$. Τα bits πληροφορίας και ο θόρυβος είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

1. Υπολογίστε σε κλειστή μορφή τα στατιστικά (δηλ. τη μέση τιμή και τον πίνακα αυτοσυσχέτισης) των διανυσμάτων $\mathbf{x}[i]$ και $\mathbf{z}[i]$, όπου $\mathbf{z}[i]$ είναι το ληφθέν διάνυσμα χωρίς το σήμα του χρήστη 1.

2. Για $m = 31$ και $n = 10$, δημιουργήστε τυχαία τις υπογραφές και χρησιμοποιήστε τις για να μεταδώσετε μία ακολουθία από $N = 10^6$ ανά χρήστη. Για τους χρήστες 2 έως και 10, δώστε ισχύ 5dB στους πρώτους 3 χρήστες, 10dB στους επόμενους 3, και 15dB στους τελευταίους 3. Επίσης, θεωρήστε ότι η ισχύς του θορύβου είναι 0dB. Μεταβάλετε την ισχύ του χρήστη 1 από 0dB έως 20dB και σχεδιάστε την πιθανότητα σφάλματος (bit error rate - BER) των φίλτρων MF, MMSE/MVDR, και ZF. Το BER εκτιμήστε το μέσω των $N = 10^6$ μεταδόσεων. Τι παρατηρείτε;

3. Επαναλάβετε για τα φίλτρα SMI και SA-SMI που χρησιμοποιούν εκτιμήσεις των \mathbf{R}_x και \mathbf{R}_z , αντίστοιχα, οι οποίες βασίζονται σε $K = 200$ δείγματα. Τι παρατηρείτε;

4. Θεωρήστε ότι δεν είναι διαθέσιμη μία εκτίμηση του \mathbf{R}_z . Για να βελτιώσετε την εκτίμηση του SMI, χρησιμοποιήστε το για να ανιχνεύσετε τα $K = 200$ bits πληροφορίας και χρησιμοποιήστε τα ανιχνευμένα bits για να εκτιμήσετε τα διανύσματα αθροιστικού θορύβου $\mathbf{z}[i]$, $i = 1, 2, \dots, K$. Κατόπιν, χρησιμοποιήστε τα τελευταία για να εκτιμήσετε τον πίνακα \mathbf{R}_z και, με αυτόν τον τρόπο, υπολογίστε προσεγγιστικά το SA-SMI. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε το SA-SMI για να ξανα-ανιχνεύσετε τα K bits και επαναλάβετε τη διαδικασία μέχρι να συγκλίνει. Τι παρατηρείτε;

5. Κρατώντας τις υπογραφές των χρηστών 2 έως n ίδιες με πριν, υπολογίστε τη βέλτιστη υπογραφή του χρήστη 1. Η υπογραφή αυτή δεν θα είναι υποχρεωτικά δυαδική (θα είναι πραγματική), αλλά θα πρέπει να έχει νόρμα ίση με 1. Κατόπιν, επαναλάβετε τα παραπάνω Ερωτήματα 1 έως 3, με τις ίδιες παραμέτρους.

4. Ένα γραμμικό ομοιόμορφο antenna array αποτελείται από $m = 20$ στοιχεία. Πέντε πηγές είναι σε γωνίες $\theta_1 = -75^\circ$, $\theta_2 = -60^\circ$, $\theta_3 = 0^\circ$, $\theta_4 = 60^\circ$, και $\theta_5 = 75^\circ$ σε σχέση με το array και μεταδίδουν ανεξάρτητα και ομοιόμορφα σύμβολα BPSK προς αυτό. Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών στοιχείων του array είναι $d = \frac{\lambda}{2}$ όπου λ είναι το μήκος κύματος. Επομένως, το διάνυσμα απόκρισης του array ως προς τη γωνία θ είναι

$$\mathbf{a}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\pi \sin \theta} \\ e^{-j2\pi \sin \theta} \\ \vdots \\ e^{-j(m-1)\pi \sin \theta} \end{bmatrix}.$$

Το σήμα βασικής ζώνης στο array είναι

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \sqrt{P_i} \mathbf{a}(\theta_i) b_i + \mathbf{w}$$

όπου $n = 5$ και, για την πηγή i , P_i είναι η μεταδιδόμενη ισχύς και $b_i \in \{\pm 1\}$ είναι το ομοιόμορφα κατανεμημένο μεταδιδόμενο bit. Το διάνυσμα προσθετικού θορύβου \mathbf{w} είναι λευκό μιγαδικό Γκαουσιανό με διασπορά 1.

1. Θεωρήστε ότι οι χρησιμοποιούμενες ισχύεις είναι $P_1 = P_3 = P_5 = 7\text{dB}$ και $P_2 = P_4 = 5\text{dB}$.

(α') Θεωρήστε ότι ο πίνακας αυτοσυσχέτισης \mathbf{R} του \mathbf{y} είναι γνωστός και υπολογίστε και σχεδιάστε ως προς το $\theta \in (-90^\circ, 90^\circ)$ το φάσμα ισχύος power spectrum των εκτιμητών MF, MVDR, και MUSIC. Σε όλες τις γραφικές, κανονικοποιήστε το κάθε φάσμα έτσι ώστε η σχεδιαζόμενη τιμή κάθε φάσματος να κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1. Συμπεριλάβετε τις εκτιμήσεις των θ_i , $i = 1, \dots, n$, χρησιμοποιώντας τον εκτιμητή ESPRIT (σημειώστε ότι η μέθοδος ESPRIT επιστρέφει άμεσες εκτιμήσεις των γωνιών πρόσπτωσης: ένας τρόπος να τις οπτικοποιήσουμε είναι μέσω της σχεδίασης μίας κάθετης γραμμής σε κάθε εκτιμώμενη γωνία). Για να αξιολογήσετε την ποιότητα των παραπάνω εκτιμητών, σχεδιάστε διακεκομμένες κάθετες γραμμές στις αληθείς γωνίες και αναφέρετε τις παρατηρήσεις σας.

(β') Επαναλάβετε το Ερώτημα (1α'), χρησιμοποιώντας έναν εκτιμητή του πίνακα αυτοσυσχέτισης \mathbf{R} του \mathbf{y} από $N = 50$ ληφθέντα διανύσματα.

(γ') Επαναλάβετε το Ερώτημα (1β'), για $N = 200$.

(δ') Επαναλάβετε το Ερώτημα (1β'), για $N = 1000$.

2. Επαναλάβετε τα παραπάνω ερωτήματα για ισχύεις $P_1 = P_3 = P_5 = -7\text{dB}$ και $P_2 = P_4 = -5\text{dB}$.

5. Σε ένα σύστημα ψηφιακής επικοινωνίας, το άθροισμα δύο μιγαδικών εκθετικών σημάτων καταλήγει στον δέκτη, παρουσία προσθετικού λευκού μιγαδικού Γκαουσιανού θορύβου μέσης τιμής μηδέν. Μετά τη δειγματοληψία, το ληφθέν σήμα είναι

$$x_k = A_1 e^{j(\omega_1 k + \phi_1)} + A_2 e^{j(\omega_2 k + \phi_2)} + w_k, \quad k = 0, 1, \dots, K-1,$$

όπου K είναι ο συνολικός αριθμός ληφθέντων δειγμάτων, $\{w_k\}_{k=0}^{K-1}$ είναι δείγματα από μία διαδικασία λευκού μιγαδικού Γκαουσιανού θορύβου μέσης τιμής μηδέν και διασποράς 1, και, σχετικά με το σήμα i , $A_i > 0$ είναι το ληφθέν πλάτος, $\omega_i \in (-\pi, \pi]$ είναι η γωνιακή συχνότητα, και $\phi_i \in (-\pi, \pi]$ είναι η αντίστοιχη φάση. Θεωρήστε ότι τα A_i και ϕ_i είναι το πλάτος και η φάση μίας proper μιγαδικής Γκαουσιανής τυχαίας μεταβλητής με μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ_i^2 , $i = 1, 2$.

Στο πείραμά μας, τα ω_1 και ω_2 ισούνται με -0.1 και 0.05 , αντίστοιχα. Επίσης, τα σ_1^2 και σ_2^2 ισούνται με 10dB. Ο αριθμός των διαθέσιμων δειγμάτων είναι $K = 50$.

Υπολογίστε και σχεδιάστε ως προς το $\omega \in (-\pi, \pi]$ (με βήμα $d\omega = 0.001$) την κανονικοποιημένη (μεταξύ 0 και 1) φασματική ισχύ του conventional DFT-based εκτιμητή. Συμπεριλάβετε την κανονικοποιημένη φασματική ισχύ των εκτιμητών MVDR και MUSIC, θεωρώντας ένα κινούμενο παράθυρο των $L = 20$ δειγμάτων. Τέλος, υπολογίστε και συμπεριλάβετε τις εκτιμήσεις των ω_1 και ω_2 χρησιμοποιώντας τον εκτιμητή ESPRIT (σημειώστε ότι η μέθοδος ESPRIT προσφέρει άμεσες εκτιμήσεις των γωνιών· ένας τρόπος οπτικοποίησής τους είναι ο σχεδιασμός κάθετων γραμμών στις εκτιμημένες γωνίες). Για τον πίνακα \mathbf{R} της αυτοσυσχέτισης του περιορισμένου διανύσματος \mathbf{x}_k (ο οποίος απαιτείται για τις μεθόδους MVDR, MUSIC, και ESPRIT), χρησιμοποιήστε μία εκτίμησή του μέσω των διαθέσιμων $K - L + 1$ περιορισμένων διανυσμάτων που διαθέτουμε μέσω της μεθόδου του κινούμενου παραθύρου. Για να αξιολογήσετε την ποιότητα των παραπάνω εκτιμητών, χρησιμοποιήστε κάθετες γραμμές στις πραγματικές γωνίες και αναφέρετε τις παρατηρήσεις σας.

Από τις παρατηρήσεις σας, ποιο από τα παραπάνω σχήματα θα επιλέγατε για συγχρονισμό συχνότητας σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα;