

**ΤΗΛ 415 - Στατιστική Επεξεργασία Σήματος για Τηλ/νίες
Εαρινό Εξάμηνο 2020**

**Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Πολυτεχνείο Κρήτης**

**Εργασία 3
25 Μαΐου 2020**

Αριθμός Ομάδας Εργασίας: LAB41544983

Επώνυμο: ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ

Όνομα: ΑΝΤΩΝΙΟΣ

ΑΜ: 2013030059

Επώνυμο: ΜΑΤΣΑΤΣΟΣ

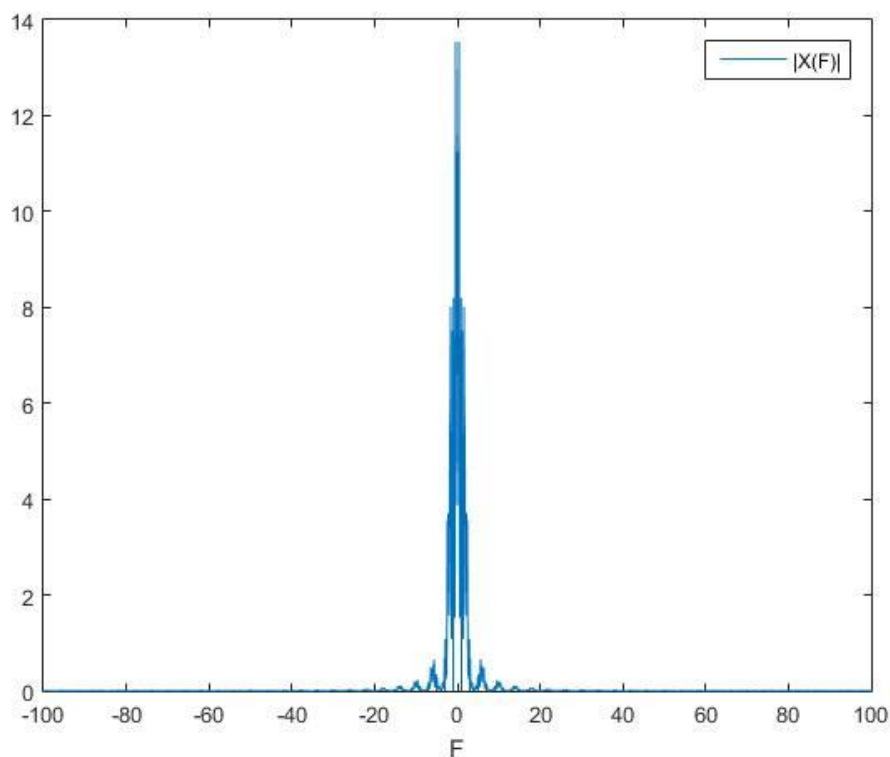
Όνομα: ΙΩΑΝΝΗΣ

ΑΜ: 2013030148

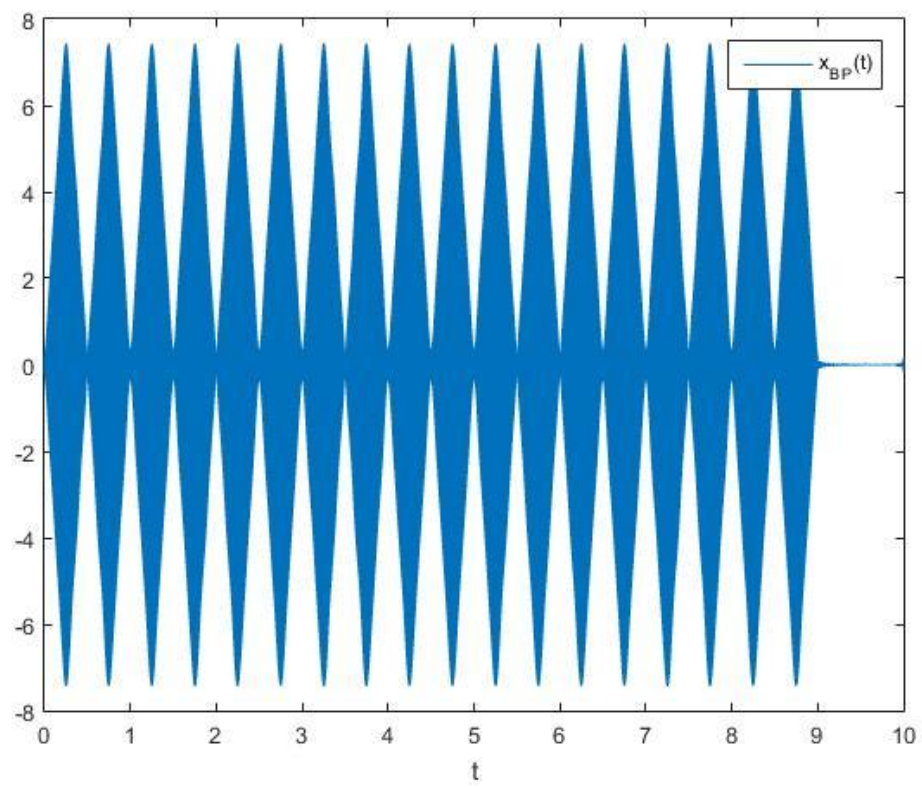
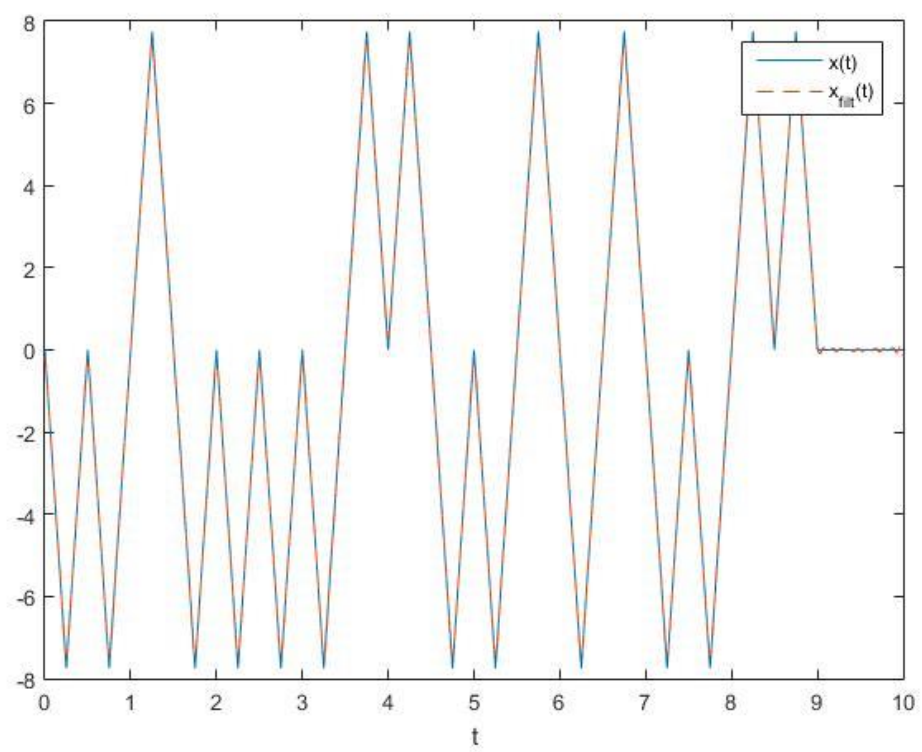
Άσκηση 1

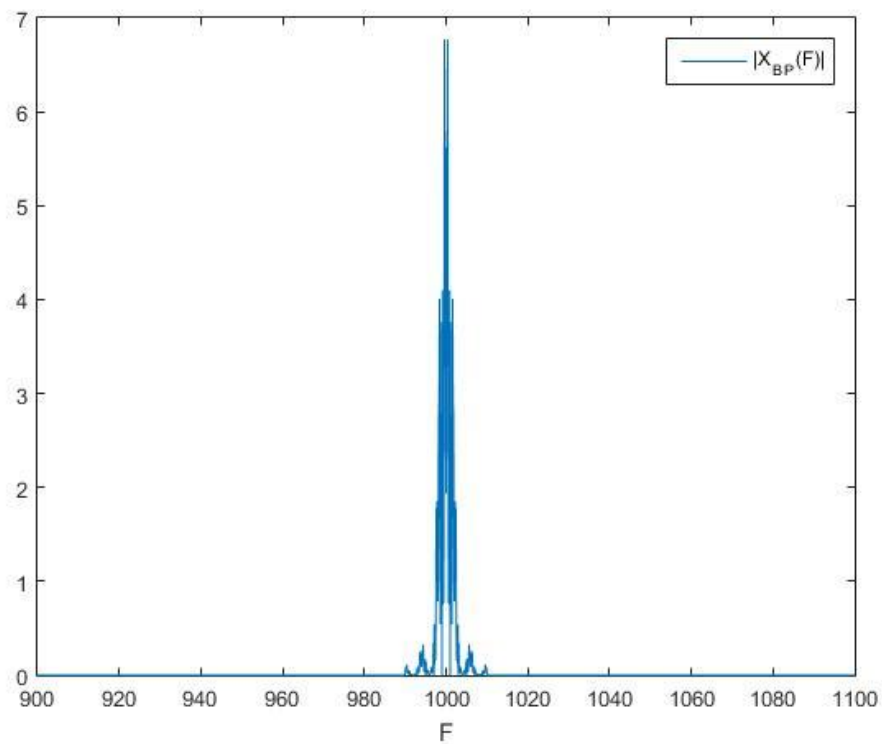
α) Αρχικά για τον τριγωνικό παλμό $p(t)$, πρέπει να υπολογίσουμε την παράμετρο A . Σύμφωνα με την εξίσωση (1) και δεδομένου ότι η ενέργεια του παλμού θέλουμε να είναι ίση με 1, χρησιμοποιώντας τον τύπο με τον οποίο υπολογίζεται η ενέργεια, βρίσκουμε ότι $A = 9,798$.

$$\begin{aligned} E_p &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)^2 dt = \int_0^{T=0,5} p(t)^2 dt \quad (=) \\ 1 &= \int_0^{0,25} (At)^2 dt + \int_{0,25}^{0,5} (A(T-t))^2 dt \quad \left(\begin{array}{l} \text{λόγω συμμετρίας} \\ \text{τριγωνικού παλμού} \end{array} \right) \\ 1 &= 2 \cdot \int_0^{0,25} A^2 \cdot t^2 dt \quad (=) \quad \frac{1}{A^2} = 2 \cdot \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{0,25} \quad (=) \\ \frac{1}{A^2} &= 2 \cdot \frac{0,25^3}{3} \quad (=) \quad A = \pm \sqrt{\frac{3}{2 \cdot 0,25^3}} \quad \Leftrightarrow \quad A = +9,798 \quad A > 0 \end{aligned}$$

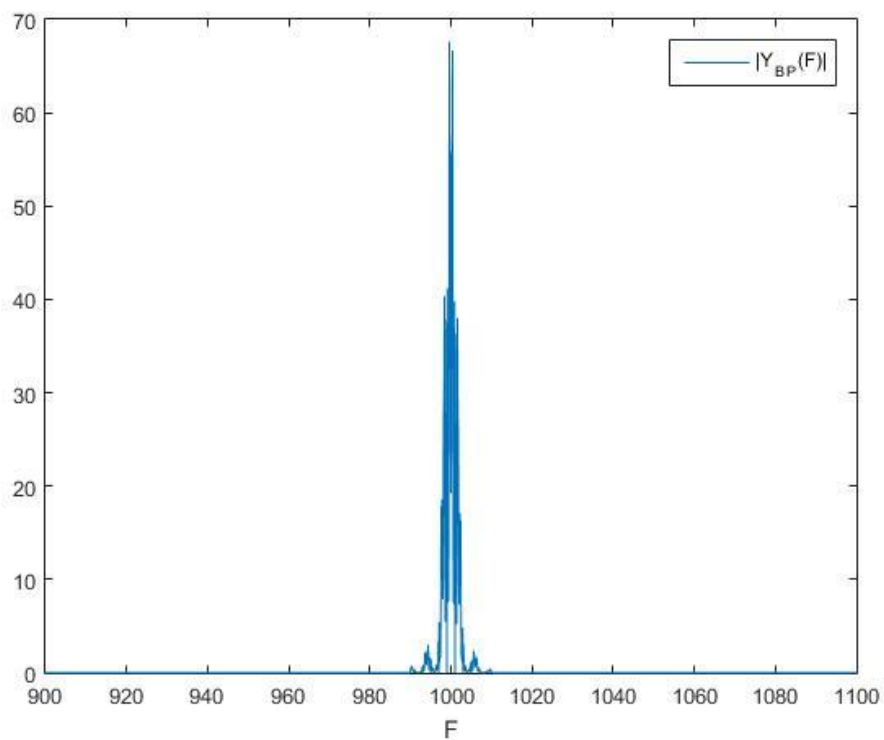


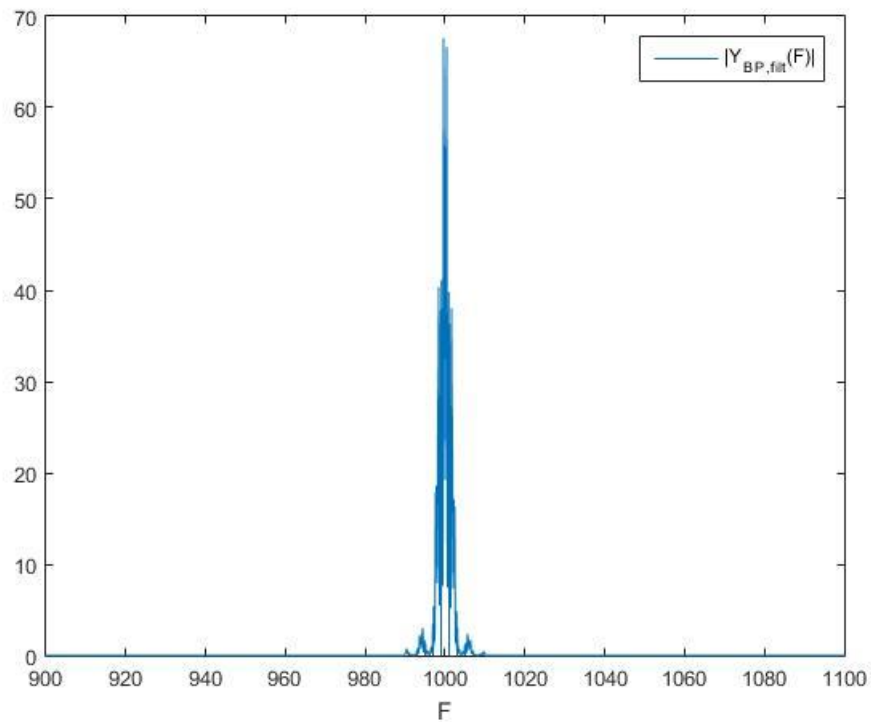
β) Για το κατωπερατό φίλτρο υλοποιήσαμε 2 μεθόδους. Η μια με for-loops, η οποία είναι πολύ αργή και η δεύτερη, την οποία τελικά χρησιμοποιήσαμε, όπου μετατρέπουμε το διάστημα των 20Hz που μας ενδιαφέρουν σε points του διανύσματος. Τα points που αντιστοιχούν στις σωστές συχνότητες τα γεμίζουμε 1 και τα υπόλοιπα 0. Έτσι με έναν απλό πολλαπλασιασμό 1-1 παίρνουμε το φιλτραρισμένο X .



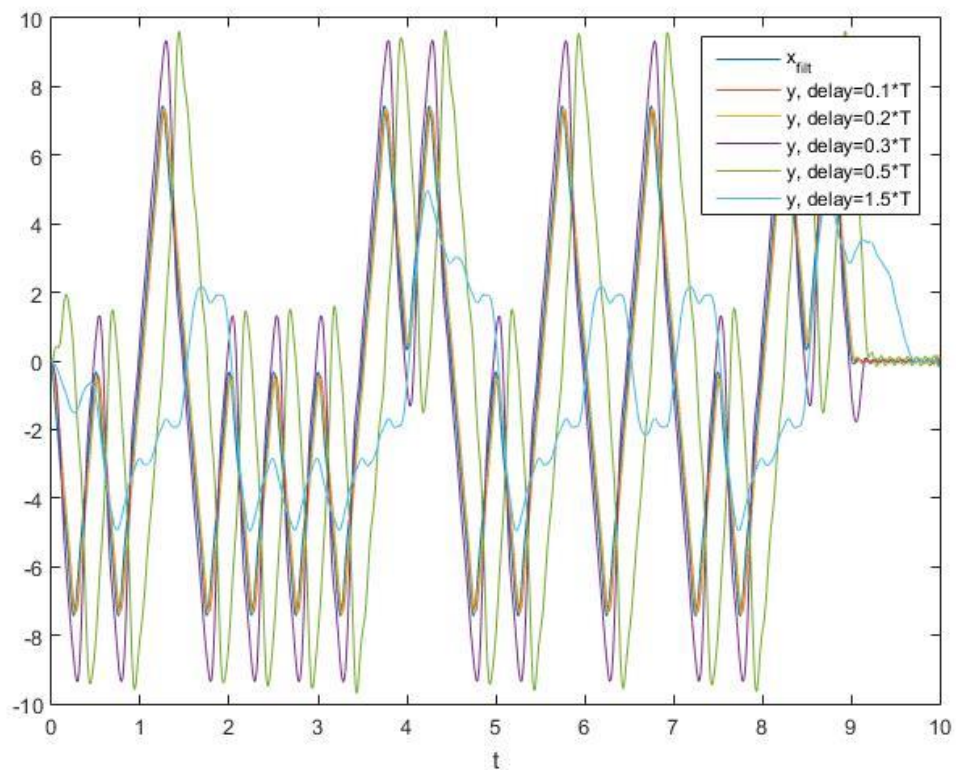


γ) Για το bandpass φίλτρο κινηθήκαμε με την ίδια λογική του κατωπερατού. Μετατρέψαμε τις 2 περιοχές συχνοτήτων που μας ενδιαφέρουν σε αντίστοιχα points στο διάνυσμα λαμβάνοντας υπόψιν την συχνότητα δειγματοληψίας.

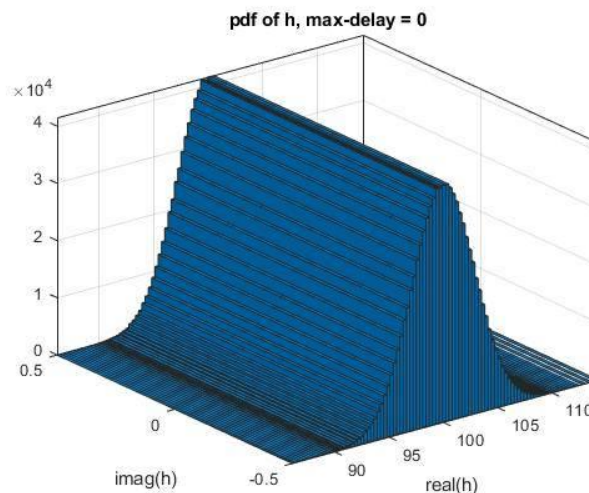
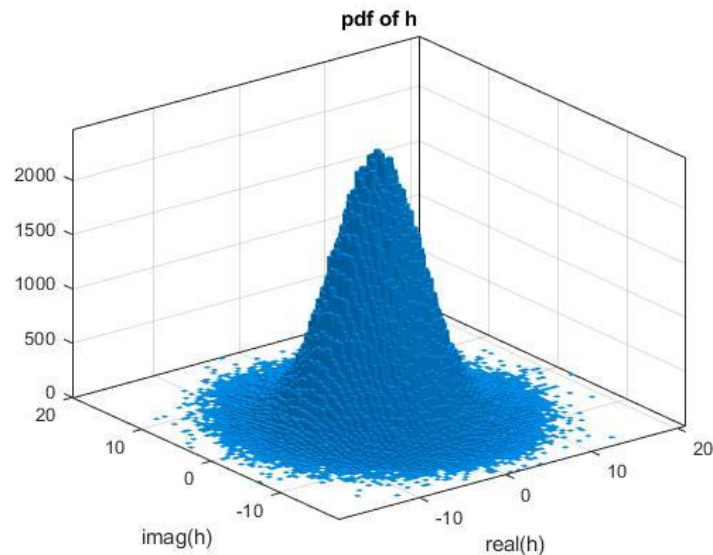




δ) Παρατηρούμε ότι όσο έχουμε delay μικρότερο της περιόδου T , μπορούμε να πούμε ότι το $y(t)$ είναι το $x_{\text{filt}}(t)$ πολλαπλασιασμένο με έναν αριθμό h . Αυτό σταματάει να συμβαίνει όμως όταν το delay γίνεται αρκετά μεγάλο, όπως φαίνεται με την γαλανή κυματομορφή.



ε) Βλέπουμε ότι για $\max_delay = 0.1 * T$, η pdf της h είναι complex Gaussian κεντραρισμένη στο 0 και έχει τη μορφή της γκαουσιανής καμπάνας στον χώρο. Όταν όμως το \max_delay γίνει ίσο με το μηδέν τότε παρατηρούμε ότι έχουμε την πραγματική «φέτα» της h επαναλαμβανόμενη.



Άσκηση 2

Στην άσκηση αυτή, εξοικειωθήκαμε με την διάσπαση πινάκων με χρήση 2 διαφορετικών μεθόδων, την eigen-decomposition και την Cholesky. Σκοπός ήταν να κατανοήσουμε, πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα generator ενός διανύσματος Gaussian με συγκεκριμένη μέση τιμή και πίνακα covariance. Δημιουργήσαμε μια συνάρτηση `real_colored_noise` και μια συνάρτηση `complex_colored_noise`, με παραμέτρους m (ένα διάνυσμα που δηλώνει τη μέση τιμή του gauss random vector που επιθυμούμε να δημιουργήσουμε),

C (covariance matrix του random vector), N (αριθμός ανεξάρτητων διανυσμάτων) και method (για επιλογή μεθόδου διάσπασης). Για την 1^η μέθοδο, χρησιμοποιήσαμε την συνάρτηση eig() και παίρνουμε τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές του πίνακα C και τις αποθηκεύουμε στους Q και L. Έπειτα, ορίζουμε ένα πίνακα $F = Q*(L^{1/2})$ διότι $F*F' = C$ και επιστρέφουμε τον F στη μεταβλητή res. Ομοίως για την 2^η μέθοδο, χρησιμοποιούμε την συνάρτηση chol() και μας δίνει τον πίνακα L, τον οποίο επιστρέφουμε στη μεταβλητή res. Αυτή η επιστροφή γίνεται για μπορούμε με ασφάλεια να υπολογίζουμε τον Z. Δηλαδή $Z = res*Y$, όπου Y είναι ένας πίνακας τυχαίων διανυσμάτων. Τέλος, ο πίνακας που μας ενδιαφέρει να έχουμε στο τέλος, είναι ο $X = Z + m*ones$ (πολλαπλασιάζουμε το m με ones, επειδή θέλουμε να το προσθέσουμε σε κάθε στήλη του Z). Στην αρχή, πριν ξεκινήσει η διαδικασία, εκτυπώνεται ένα μήνυμα για εισαγωγή της μεθόδου. Στο τέλος εμφανίζονται τα mean και ο πίνακας C των παραγόμενων διανυσμάτων για σύγκριση με τα αρχικά.

α) Για το υποερώτημα αυτό, χρησιμοποιήσαμε την real_colored_noise πάνω σε πραγματικά δεδομένα, κάνοντας load το αρχείο real_data και επιβεβαιώσαμε ότι δουλεύει συγκρίνοντας τις τιμές mean και τον C matrix των παραγόμενων διανυσμάτων με τις αρχικές.

β) Στο υποερώτημα αυτό, χρησιμοποιήσαμε την complex_colored_noise πάνω σε μιγαδικά δεδομένα, κάνοντας load το αρχείο complex_data και επιβεβαιώσαμε ότι δουλεύει συγκρίνοντας τις τιμές mean και τον C matrix των παραγόμενων διανυσμάτων με τις αρχικές.

Άσκηση 3

α) Παρακάτω φαίνονται χειρόγραφα οι υπολογισμοί σε κλειστή μορφή των στατιστικών των διανυσμάτων x και z .

$$m_b = 0, m_s = 0, E\{n\} = 0, \text{ αφού } b \text{ uniform στο } [-1, 1] \text{ και } s \text{ uniform στο } \left[-\frac{1}{\sqrt{m}}, +\frac{1}{\sqrt{m}}\right]$$
$$x = \sum_{k=1}^n \sqrt{P_k} \cdot b_k \cdot s_k + n$$
$$E\{x\} = \sum_{k=1}^n (E\{\sqrt{P_k} \cdot b_k \cdot s_k\}) + E\{n\} = \sqrt{P_k} \cdot \sum_{k=1}^n (E\{b_k \cdot s_k\}) + 0$$
$$= \sqrt{P_k} \cdot \sum_{k=1}^n (E\{b_k\} \cdot E\{s_k\}) = \sqrt{P_k} \cdot \sum_{k=1}^n (m_b \cdot m_s) = 0$$

⊗ \vec{b}_k, \vec{s}_k ανεξάρτητα, αφού το ένα είναι α bit του χρήστη και το άλλο η υποχρησι. Παράγοντα, τυχαία και δεν επηρεάζει το ένα το άλλο.

$$z = \sum_{k=2}^n \sqrt{P_k} \cdot b_k \cdot s_k + n$$

άρα ομοίως $E\{z\} = 0$

$$\begin{aligned}
 R_x &= E\{x \cdot x^T\} = E\{(\sqrt{P_1} \cdot b_1 \cdot s_1 + \sqrt{P_2} \cdot b_2 \cdot s_2 + \dots + \sqrt{P_K} \cdot b_K \cdot s_K + n) \cdot (\sqrt{P_1} \cdot b_1 \cdot s_1^T + \dots + \sqrt{P_K} \cdot b_K \cdot s_K^T + n^T)\} = \\
 &= E\{P_1 b_1^2 s_1 s_1^T + \sqrt{P_1} b_1 s_1 \sqrt{P_2} b_2 s_2^T + \dots + \sqrt{P_1} b_1 s_1 \sqrt{P_K} b_K s_K^T + \sqrt{P_1} b_1 s_1 n^T + \\
 &\quad + \sqrt{P_2} b_2 s_2 \sqrt{P_1} b_1 s_1^T + P_2 b_2^2 s_2 s_2^T + \dots + \sqrt{P_2} b_2 s_2 \sqrt{P_K} b_K s_K^T + \sqrt{P_2} b_2 s_2 n^T + \dots + \\
 &\quad + n \cdot \sqrt{P_1} b_1 s_1^T + \dots + n \cdot \sqrt{P_K} b_K s_K^T + n \cdot n^T\} = \\
 &\stackrel{(*)}{=} P_1 \cdot s_1 \cdot s_1^T \cdot E\{b_1^2\} + \sqrt{P_1} \cdot P_2 s_1 s_2^T \cdot E\{b_1 \cdot b_2\} + \dots + \sqrt{P_1} \cdot s_1 \cdot E\{b_1\} \cdot E\{n^T\} + \\
 &\quad + \dots + E\{n \cdot n^T\} = \\
 &= P_1 s_1 s_1^T \sigma_{b_1}^2 + \dots + P_K s_K s_K^T \sigma_{b_K}^2 + \sigma_n^2 \cdot I_{(m \times m)} = \\
 &= P_1 \cdot s_1 \cdot s_1^T + \dots + P_K \cdot s_K \cdot s_K^T + \sigma_n^2 \cdot I = \sum_{k=1}^n P_k \cdot s_k \cdot s_k^T + \sigma_n^2 \cdot I_{(m \times m)} \\
 &\stackrel{(**)}{=} \sum_{m \times n} \begin{bmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_n \end{bmatrix} \cdot \sum_{n \times m}^T + \sigma_n^2 \cdot I_{(m \times m)}, \quad \sigma_n^2 = 1 = \text{var}
 \end{aligned}$$

Ομοίως: $R_z = \sum_{k=2}^n P_k \cdot s_k \cdot s_k^T + \sigma_n^2 \cdot I_{(m \times m)}$

$$R_z = \sum_{m \times (n-1)}^n \begin{bmatrix} P_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_n \end{bmatrix} \cdot \sum_{(n-1) \times m}^T + \sigma_n^2 \cdot I_{(m \times m)}$$

\downarrow $2:n$ \downarrow $2:n$

$(*)$, $s_1 \cdot s_1^T$ scalar χρησιμοποιησιακό, άρα $E\{s_1 s_1^T\} = s_1 s_1^T$
 $(**)$, $\sqrt{P_1} \cdot \sqrt{P_2} s_1 s_2^T E\{b_1 \cdot b_2\} \rightarrow r_{b_1, b_2} = 0$, αν έσάρωσα b_1, b_2

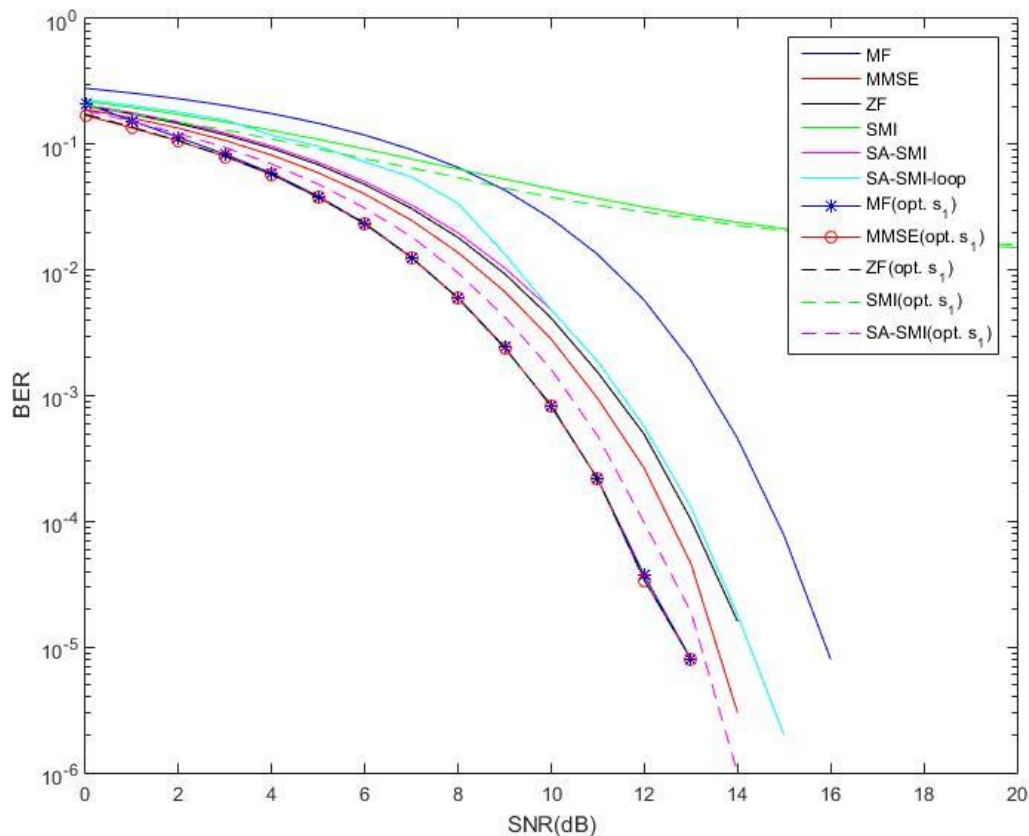
β) Χρησιμοποιήσαμε το αρχείο 'signatures.mat' για τις υπογραφές των χρηστών ώστε να έχουμε συγκρίσιμα αποτελέσματα. Ισχύς θορύβου 0dB σημαίνει $\text{var}=1$. Για τα φίλτρα MF, MMSE/MVDR και ZF παρατηρούμε ότι το MMSE είναι το καλύτερο, ακολουθεί το ZF και την μεγαλύτερη πιθανότητα σφάλματος δίνει το MF.

γ) Για τα φίλτρα SMI και SA-SMI χρησιμοποιήσαμε τις πρώτες 200 μεταδόσεις για εκτίμηση των R_x και R_z . Το SMI είναι το χειρότερο φίλτρο με διαφορά, για SNR μεγαλύτερα του 2 dB. Το SA-SMI απέδωσε πολύ καλύτερα.

δ) Για το SA-SMI loop, αρχικά φιλτράρουμε χρησιμοποιώντας την εκτίμηση της R_x (από 200 δείγματα) (ομοίως με το φίλτρο SMI δηλαδή) και αποφασίζουμε πάνω στα bits. Έπειτα χρησιμοποιώντας 200

δείγματα εκτιμούμε το z , με αυτό το Rz και κατασκευάζουμε ένα SA-SMI φίλτρο. Φιλτράρουμε και αποφασίζουμε πάνω στα bits. Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνετε έως ότου 2 διαδοχικές αποφάσεις πάνω στα bits είναι ίδιες. Το SA-SMI loop αποδίδει πολύ καλύτερα από το SMI, πλησιάζοντας τις επιδόσεις άλλων φίλτρων και ξεπερνάει το MF. Βλέπουμε λοιπόν ότι η παραπάνω διαδικασία βελτιώνει πολύ το SMI φίλτρο.

ε) Για να βελτιώσουμε την υπογραφή του χρήστη 1 έπρεπε αρχικά να υπολογίσουμε τον H matrix. Δεν είμαστε σίγουροι αν η ιδέα μας ήταν σωστή αλλά ουσιαστικά διαιρέσαμε των Rx με την νόρμα του s^*s' . Μετά κάνουμε eigen decomposition στον πίνακα $(H' * Rz^{-1} * H)$ και παίρνουμε ως υπογραφή του χρήστη 1 το ιδιοδιάνυσμα (στήλη) που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή. Με την βέλτιστη υπογραφή παρατηρούμε βελτιώσεις σε όλα τα φίλτρα.



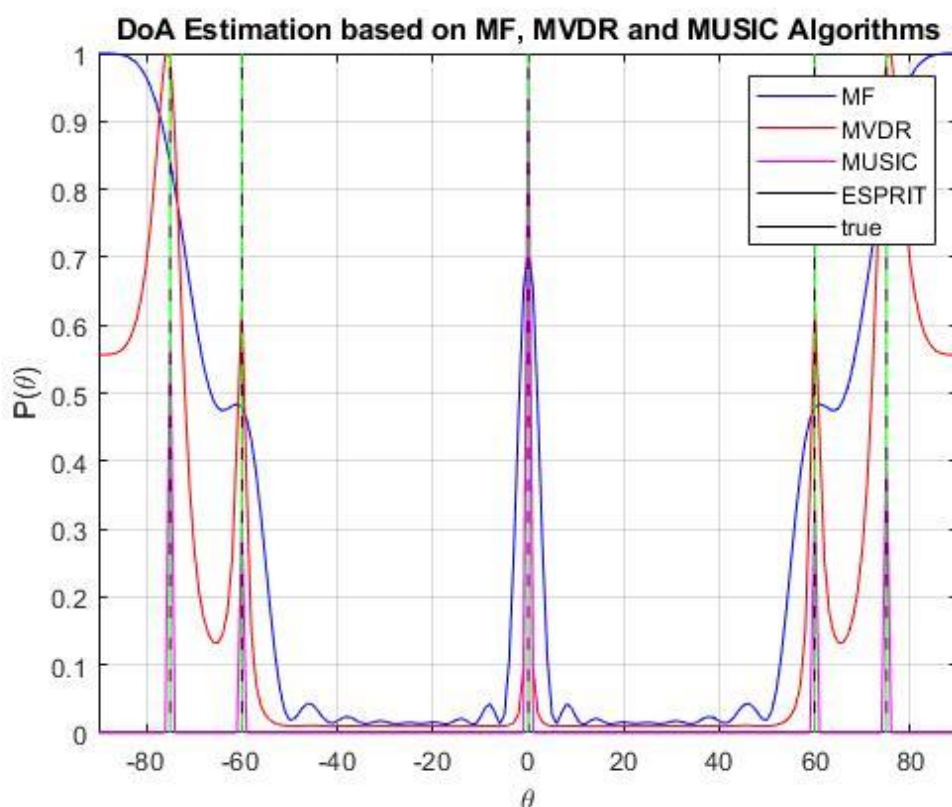
Άσκηση 4

Σκοπός της άσκησης, είναι η εκτίμηση των γωνιών 5 πηγών με χρήση των αλγορίθμων-φίλτρων MF/MMSE-MVDR/ROOT MUSIC/ESPRIT. Δεδομένου ενός γραμμικού ομοιόμορφου antenna array, υπολογίσαμε το διάνυσμα απόκρισης “a” ως προς τη γωνία θ σύμφωνα με τον τύπο:

$\exp(-1i*2*\pi*i*d/\lambda*\sin(\deg2rad(\theta)))$, όπου μας δόθηκε ότι $d = \lambda/2$, άρα $d/\lambda = 1/2$ και όπου θ αντικαταστήσαμε την γωνία στην οποία βρίσκεται η κάθε πηγή. Επίσης, μετατρέψαμε τις δεδομένες ισχύς από dB σε watt.

Για το 1^η ερώτημα, υπολογίσαμε τον πίνακα R του y ως εξής: πολλαπλασιάσαμε κάθε διάνυσμα απόκρισης, με το ερμιτιανό του και τον πίνακα αυτόν με την αντίστοιχη τιμή ισχύος σε watt και τα αθροίσαμε όλα, παίρνοντας τελικά τον R:

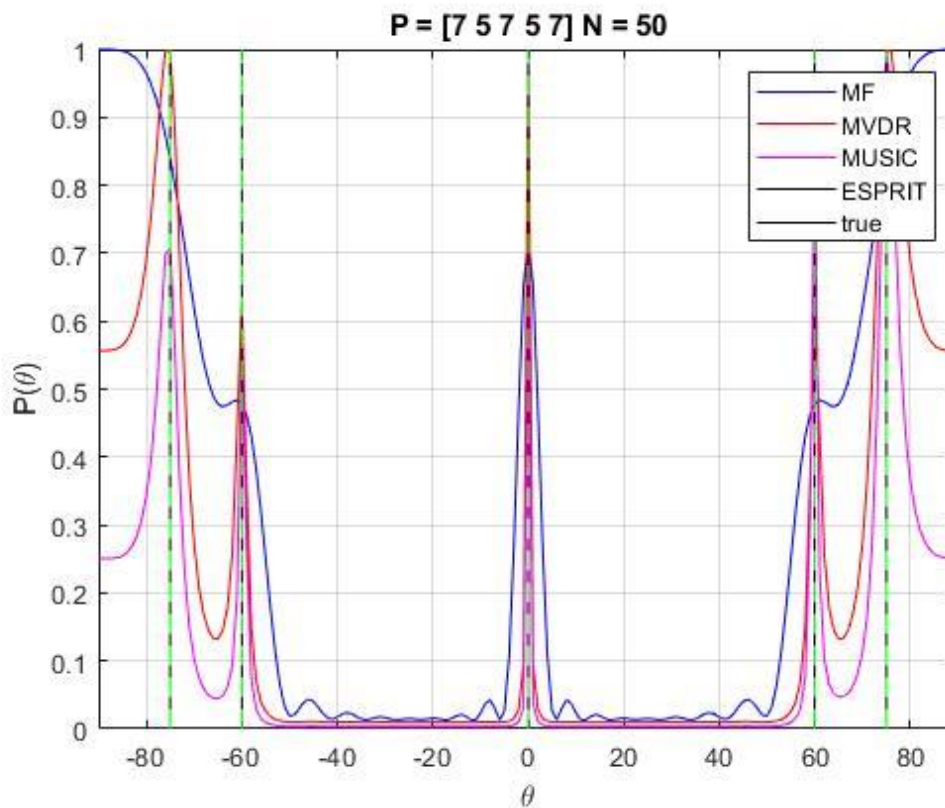
$R = \sum(P(i)*(a(i)*a(i)'))$. Στη συνέχεια, κάνουμε διάσπαση στον πίνακα αυτόν και παίρνουμε τον Q_n , τον οποίο χρησιμοποιούμε μετέπειτα στους υπολογισμούς, για την εφαρμογή των αλγορίθμων (θα μπορούσαμε να πάρουμε και τον Q_s). Στο κύριο μέρος, υπολογίζουμε τα διανύσματα angles για τους εκτιμητές μας και υλοποιούμε τους εκτιμητές, σύμφωνα με τις εξισώσεις που μας διδάχθηκαν στο μάθημα. Η υλοποίηση του ESPRIT μας δυσκόλεψε πιο πολύ και με βοήθεια από το διαδίκτυο υλοποιήθηκε. Τέλος, για την απεικόνιση των αποτελεσμάτων, κανονικοποιήθηκαν τα power spectrum των εκτιμητών από 0 έως 1. Το γράφημα:



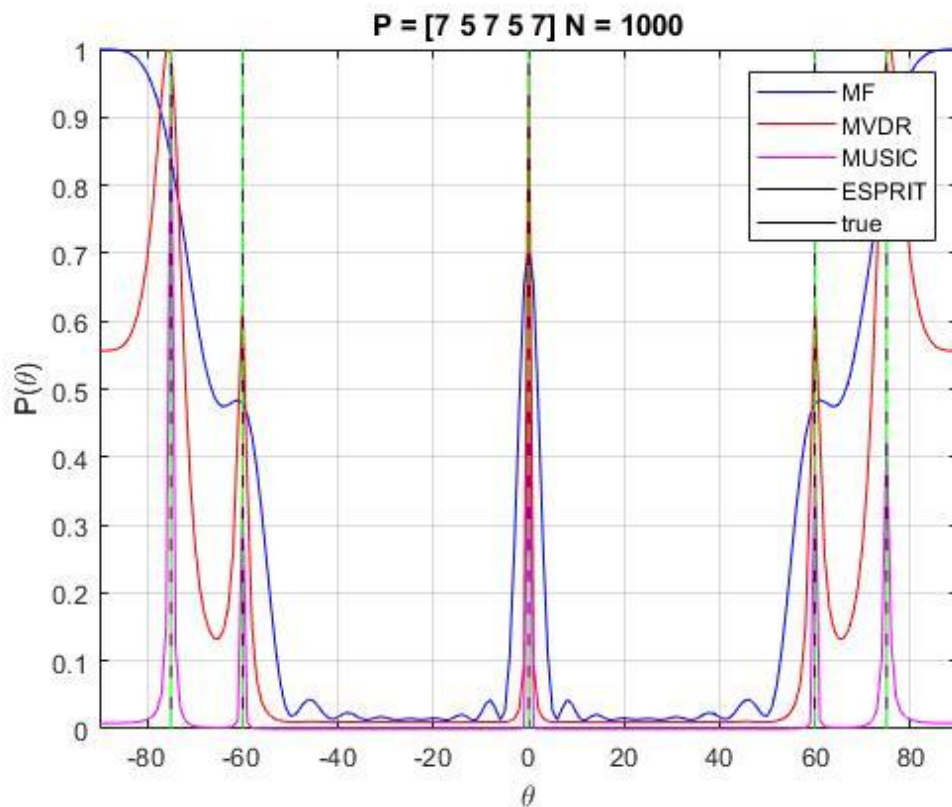
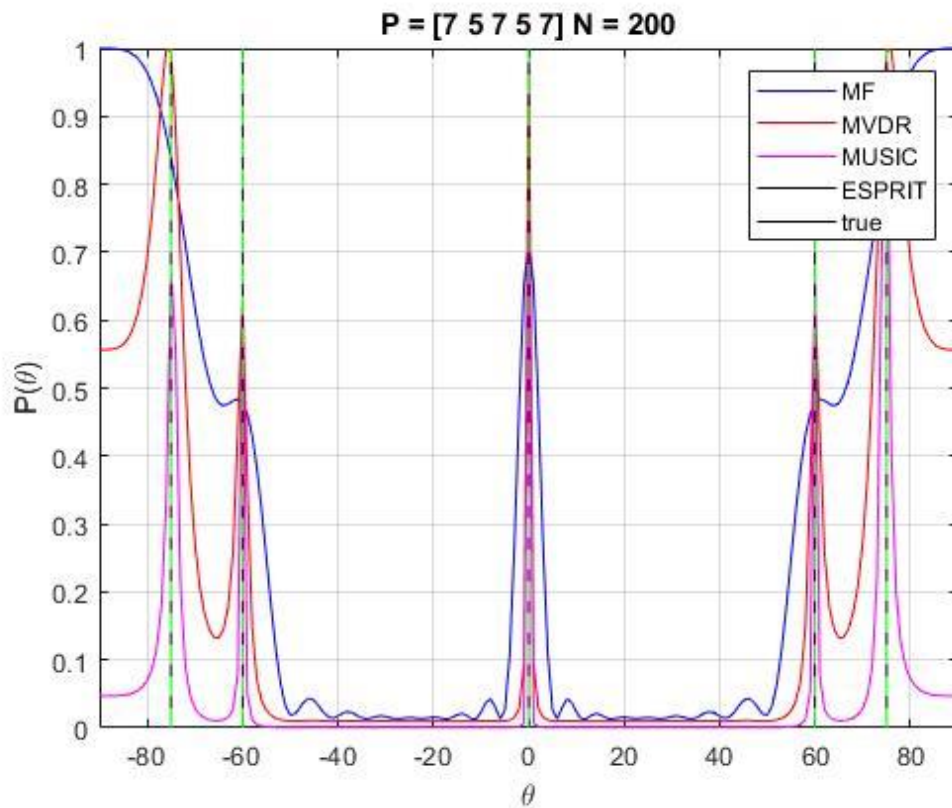
Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος ESPRIT, συμπίπτει με τις πραγματικές γωνίες. Ο MF ξεκινάει από κάποια μέγιστη τιμή, για γωνίες μικρότερες από -80 μοίρες και φθίνει, παρουσιάζοντας μια καμπυλότητα στις -60 μοίρες. Στο σημείο αυτό, φαίνεται να «πιάνει» κάποιο μέγιστο γύρω στο 0.5. Συνεχίζει να φθίνει, φθάνοντας προς το μηδέν και εκτινάσσεται σε κάποιο μέγιστο πάλι, κοντά στις μηδέν μοίρες. Καθώς απομακρύνεται προς τις 60 μοίρες αρχίζει να παρουσιάζει ανάποδη πορεία από αυτή που είχε κάτω απ' τις -60. Ο MVDR ξεκινάει κι αυτός από κάποια τιμή αυξάνει εκθετικά στις γωνίες που μας ενδιαφέρει και στις υπόλοιπες φθίνει. Ο MUSIC παρατηρούμε, ότι μόνο γύρω από τις γωνίες που μας ενδιαφέρουν, παρουσιάζει εκτινάξεις και ξανά φθίνει στο μηδέν οπουδήποτε αλλού.

Για το 1^B, επαναλάβουμε ό,τι και στο προηγούμενο ερώτημα. Η διαφορά είναι, ότι χρησιμοποιήσαμε έναν εκτιμητή του πίνακα R του Y με N = 50 ληφθέντα διανύσματα και επίσης υπολογίσαμε το Y σύμφωνα με τη σχέση που μας δόθηκε στην εκφώνηση:

$$y = \sum_{i=1}^n \sqrt{P_i} a(\theta_i) b_i + w$$

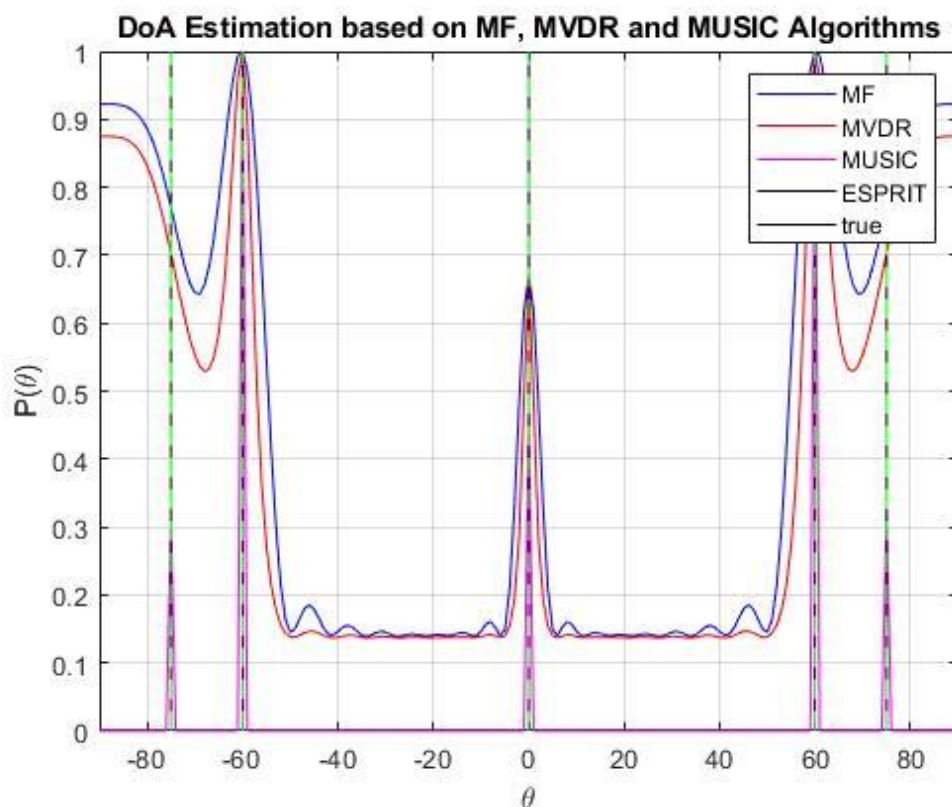


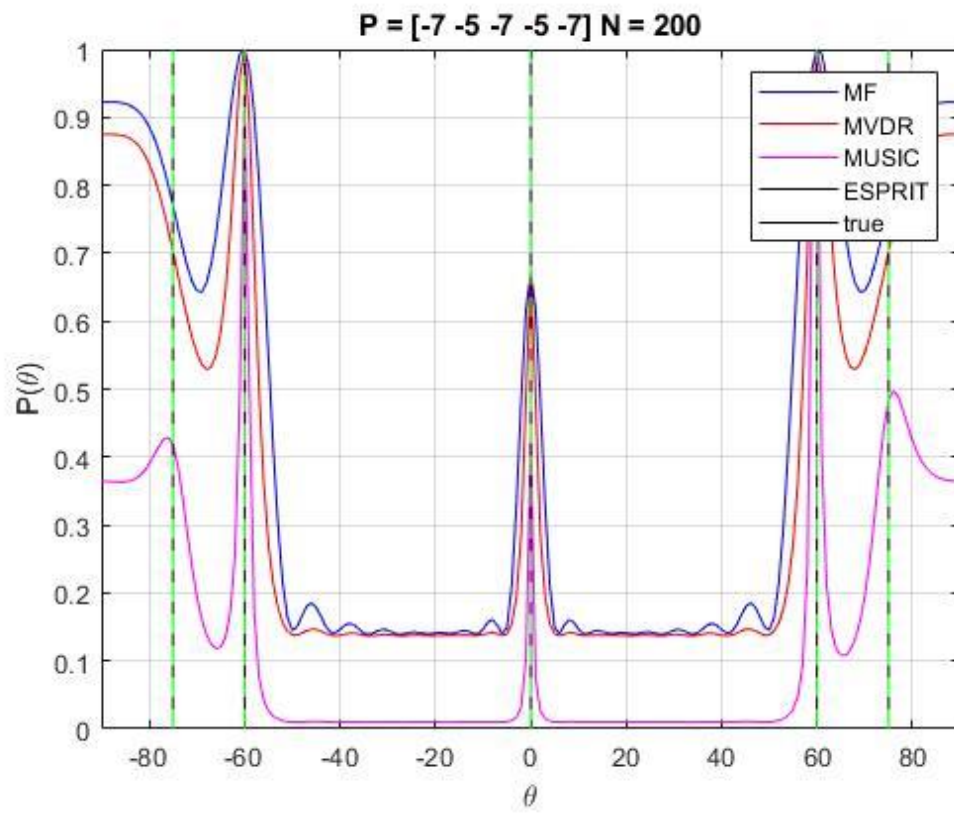
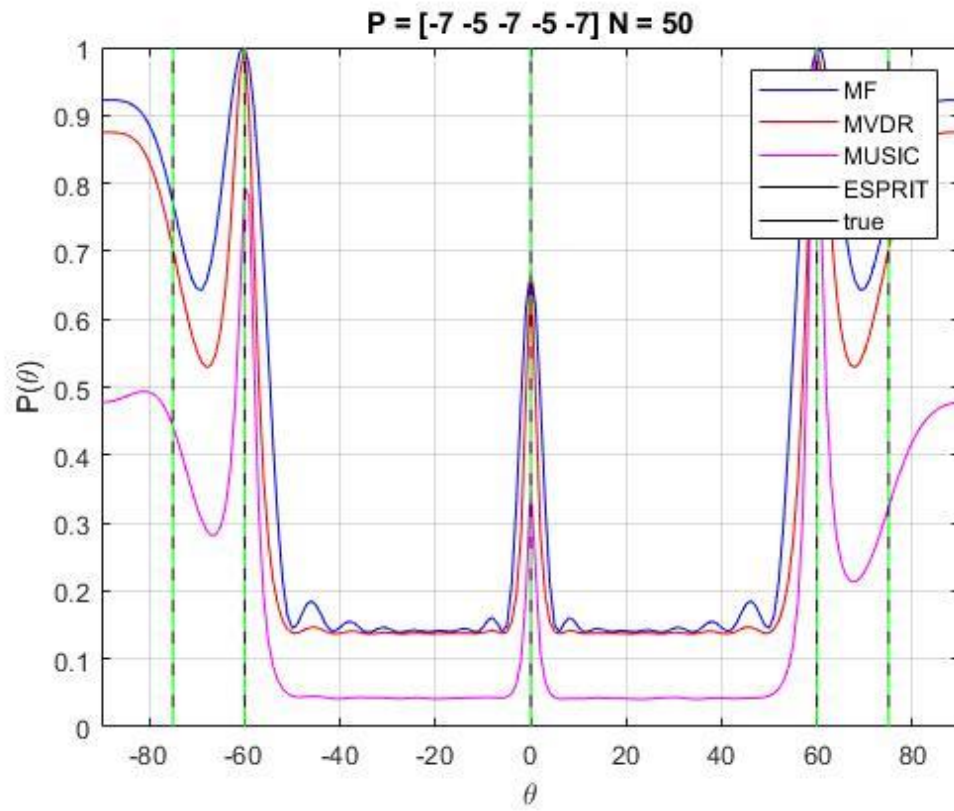
Για το 1^Γ και 1^Δ ακολουθήσαμε την ίδια διαδικασία με το προηγούμενο και αλλάξαμε μόνο το N από 50 σε 200 και 1000 αντίστοιχα. Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα:

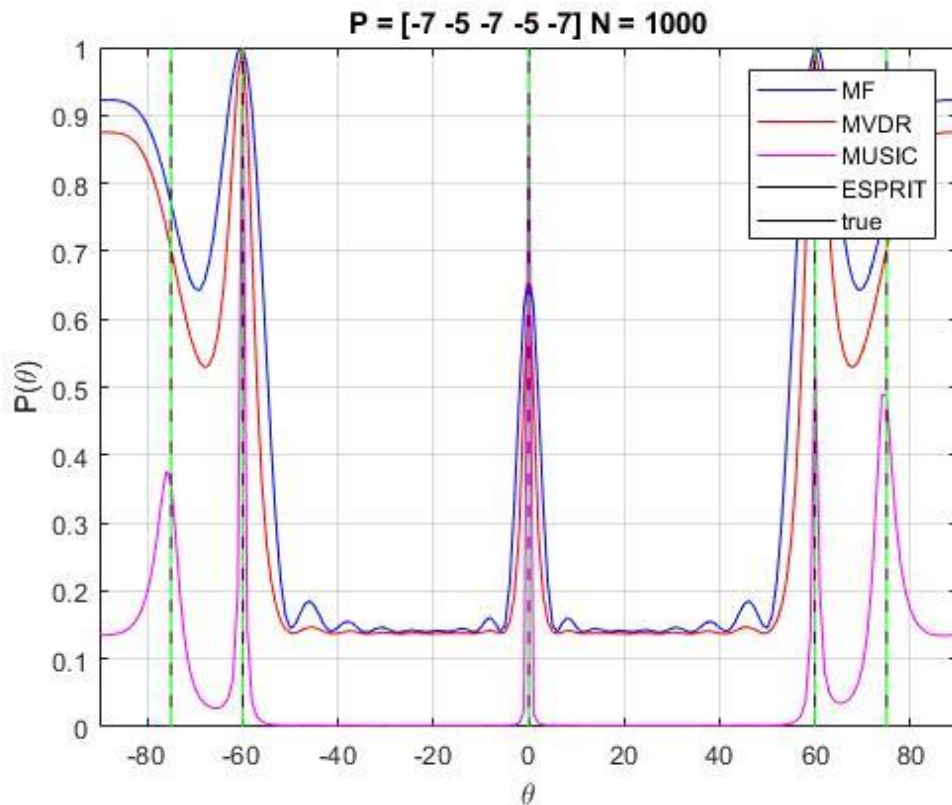


Ο αλγόριθμος MUSIC φαίνεται να ξεκινάει από μια συγκεκριμένη τιμή κάτω από τις -80 και πάνω από τις 80 μοίρες, ενώ έχει εκτινάξεις στις γωνίες που μας δόθηκαν να μελετήσουμε. Όσο μεγαλώνει το N όμως, φαίνεται να αλλάζει συμπεριφορά και να μοιάζει όπως το A ερώτημα. Ο MVDR φαίνεται να έχει ακραίες εκτινάξεις, στα σημεία όπου έχουμε τις πηγές με τις αντίστοιχες γωνίες, ενώ έχει μηδενική τιμή σε οποιαδήποτε άλλη. Άρα έχει ίδια συμπεριφορά με το A ερώτημα, για οποιαδήποτε τιμή του N . Τέλος, ο MF ξεκινάει από κάποια μέγιστη τιμή για γωνίες μικρότερες από -80 μοίρες και φθίνει, παρουσιάζοντας μια καμπυλότητα στις -60 μοίρες. Έχει ακριβώς την ίδια συμπεριφορά με το A ερώτημα. Παρατηρούμε δηλαδή ότι παραμένει σταθερό το γράφημά του για οποιαδήποτε τιμή του N . Στο διάστημα $[-60, 60]$ μοίρες, όλοι οι αλγόριθμοι τείνουν να έχουν μηδενική τιμή, εκτός γύρω από το μηδέν.

Στο 2^ο ερώτημα της άσκησης, επαναλάβαμε όλα τα ερωτήματα του 1^{ου} για ισχύ $-7, -5, -7, -5, -7$ αντίστοιχα. Έτσι έχουμε:







Παρατηρούμε διαφορά στην καμπύλη του αλγόριθμου MF και MVDR όταν είναι κάτω από -60 και πάνω από 60 μοίρες. Δηλαδή, περίπου στις -65 μοίρες δε συνεχίσει να φθίνει, αλλά αυξάνει έως ένα μέγιστο στο που αφορά τις -60 μοίρες. Ομοίως και για τις 60 και 65 μοίρες, παρουσιάζει μέγιστο στις 60 μοίρες, έπειτα φθίνει προς τις 65 μοίρες και έπειτα αυξάνει. Οι αλγόριθμοι είναι μετατοπισμένοι ως προς τον οριζόντιο άξονα, προς τα πάνω. Δηλαδή δεν έχουν μηδενική τιμή. Μόνο ο αλγόριθμος MUSIC φαίνεται να επηρεάζεται σημαντικά από την τιμή του N , δηλαδή στο διάστημα $[-60, 60]$ μοίρες καθώς το N αυξάνεται, «πέφτει» προς το μηδέν.