ΤΗΛ 415 - Στατιστική Επεξεργασία Σήματος για Τηλ/νίες
Εαρινό Εξάμηνο 2020

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Πολυτεχνείο Κρήτης

Εργασία 2

25 Απριλίου 2020

Αριθμός Ομάδας Εργασίας:

Επώνυμο:

Όνομα:

ΑΜ:

Επώνυμο:

Όνομα:

ΑΜ:

1. Κατασκευάστε στο matlab τη συνάρτητη [Q,R]=QR(A) η οποία επιστρέφει τους πίνακες $\mathbf{Q}_{m\times r}$ και $\mathbf{R}_{r\times n}$ της διάσπασης QR του πίνακα $\mathbf{A}_{m\times n}$. Δηλαδή, $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ όπου ο $\mathbf{R}$ είναι άνω τριγωνικός και $\mathbf{Q}^H\mathbf{Q} = \mathbf{I}_r$.

2. Έστω $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{B}, \mathbf{W} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, και $\mathbf{b}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$.
α) Δείξτε ότι

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{X}} \operatorname{tr}\big(\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}\big) &= \big(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\big)\,\mathbf{X},\\ \nabla_{\mathbf{X}} \operatorname{tr}\big(\mathbf{X}^T\mathbf{B}\big) &= \mathbf{B},\\ \nabla_{\mathbf{X}} \operatorname{tr}\big(\mathbf{B}^T\mathbf{X}\big) &= \mathbf{B}.\end{aligned}$$

β) Δείξτε ότι

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{w}}\, \mathbf{w}^H\mathbf{A}\mathbf{w} &= 2\mathbf{A}\mathbf{w},\\ \nabla_{\mathbf{w}}\, \mathbf{w}^H\mathbf{b} &= 2\mathbf{b},\\ \nabla_{\mathbf{w}}\, \mathbf{b}^H\mathbf{w} &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

γ) Δείξτε ότι

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{W}} \operatorname{tr}\big(\mathbf{W}^H\mathbf{A}\mathbf{W}\big) &= 2\mathbf{A}\mathbf{W},\\ \nabla_{\mathbf{W}} \operatorname{tr}\big(\mathbf{W}^H\mathbf{B}\big) &= 2\mathbf{B},\\ \nabla_{\mathbf{W}} \operatorname{tr}\big(\mathbf{B}^H\mathbf{W}\big) &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

3. Δίνονται οι ανεξάρτητες πραγματικές τυχαίες μεταβλητές B, X, και Y, όπου $P(B = 1) = P(B = -1) = \frac{1}{2}$, $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, και $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $W = BX$. Αρχικά, δείξτε ότι $W \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Κατόπιν, για κάθε μία από τις παρακάτω μιγαδικές τυχαίες μεταβλητές Z, ελέγξτε αν τα $\mathcal{R}(Z)$ και $\mathcal{I}(Z)$ είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους (επιβεβαιώστε στο matlab), αν είναι από-κοινού πραγματικές γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές, αν το άθροισμά τους είναι πραγματική γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή (επιβεβαιώστε στο matlab), και αν η Z είναι μιγαδική γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή. Στην περίπτωση που είναι, ελέγξτε αν η Z είναι proper ή όχι και γράψτε την pdf της.

α) $Z = X + jX$,

β) $Z = X + jY$,

γ) $Z = X + j2Y$,

δ) $Z = X + jW$.

4. Το πραγματικό τυχαίο $n \times 1$ διάνυσμα $\mathbf{Y}$ δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{Y} = X_1\mathbf{a}_1 + X_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{N}$$

όπου $X_1 \sim (0, \sigma^2_{X_1})$ και $X_2 \sim (0, \sigma^2_{X_2})$ είναι πραγματικές τυχαίες μεταβλητές και $\mathbf{N} \sim (\mathbf{0}, \sigma^2_N\mathbf{I})$ είναι πραγματικό τυχαίο $n \times 1$ διάνυσμα, όπου $r_{X_1,X_2} = 0$, $r_{X_1,N} = \mathbf{0}_{1\times n}$, και $r_{X_2,N} = \mathbf{0}_{1\times n}$, και $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ντετερμινιστικά $n \times 1$ διανύσματα. Δίνεται ότι $\sigma^2_{X_1} \geq 0$, $\sigma^2_{X_2} \geq 0$, και $\sigma^2_N > 0$.

α) Εκφράστε τον $\mathbf{R}_Y$ ως συνάρτηση των $\sigma^2_{X_1}$, $\sigma^2_{X_2}$, σ^2_N, $\mathbf{a}_1$, και $\mathbf{a}_2$.

β) Δείξτε ότι $\mathbf{x}^T\mathbf{R}_Y\mathbf{x} \geq \sigma_N^2\|\mathbf{x}\|^2$, για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

γ) Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές του $\mathbf{R}_Y$ είναι πραγματικές και θετικές.

δ) Δείξτε ότι οι $n-2$ μικρότερες ιδιοτιμές του $\mathbf{R}_Y$ είναι ίσες με σ_N^2.

ε) Δείξτε ότι ο $\mathbf{R}_Y$ είναι μη ιδιάζων.

στ) Εκφράστε τον $\mathbf{R}_Y$ ως γινόμενο τριών πινάκων συν έναν διαγώνιο πίνακα.

ζ) Για την εκτίμηση του $\mathbf{R}_Y$, χρησιμοποιούμε K ανεξάρτητα δείγματα (διανύσματα) $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2$, $\ldots$, $\mathbf{Y}_K$ και κατασκευάζουμε τον $\hat{\mathbf{R}}_Y = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_i^T$. Εκφράστε τον $\hat{\mathbf{R}}_Y$ ως συνάρτηση του πίνακα δεδομένων $\bar{\mathbf{Y}} = [\mathbf{Y}_1\ \mathbf{Y}_2\ \ldots\ \mathbf{Y}_K]$.

η) Αν $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ είναι η αποσύνθεση SVD του $\bar{\mathbf{Y}}$, όπου ο διαγώνιος $\mathbf{\Sigma}$ έχει διάσταση $n \times K$ και τα διαγώνια στοιχεία του είναι σ_1, σ_2, $\ldots$, $\sigma_{\min(n,K)}$, με $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ και $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \ldots = \sigma_{\min(n,K)} = 0$, δείξτε ότι τα ιδιοδιανύσματα του $\hat{\mathbf{R}}_Y$ είναι οι στήλες του $\mathbf{U}$ και οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές του $\hat{\mathbf{R}}_Y$ είναι $\lambda_i = \frac{\sigma_i^2}{K^2}$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

ϑ) Δείξτε ότι η ορίζουσα του $\hat{\mathbf{R}}_Y$ είναι

$$|\hat{\mathbf{R}}_Y| = \begin{cases} 0, & K < n, \\ \frac{(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n)^2}{K^{2n}}, & K \geq n. \end{cases}$$

Επιβεβαιώστε όλα τα παραπάνω ερωτήματα στο matlab.

5.

α) Για τη μιγαδική τυχαία μεταβλητή $Z = X + jY$, όπου X και Y είναι πραγματικές τυχαίες μεταβλητές, δείξτε ότι

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2 &= E\{|Z|^2\} - |\mu_Z|^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2, \\ \tilde{\sigma}_Z^2 &= E\{Z^2\} - \mu_Z^2. \end{aligned}$$

β) Για τον μιγαδικό τυχαίο πίνακα $\mathbf{Z}$ και τους ντετερμινιστικούς πίνακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$, δείξτε ότι

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{Z}^T\} &= E\{\mathbf{Z}\}^T, \\ E\{\mathbf{Z}^*\} &= E\{\mathbf{Z}\}^*, \\ E\{\mathbf{A}\mathbf{Z}\mathbf{B}\} &= \mathbf{A}E\{\mathbf{Z}\}\mathbf{B}. \end{aligned}$$

γ) Για τα μιγαδικά τυχαία διανύσματα $\mathbf{Z}_1$ και $\mathbf{Z}_2$, δείξτε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{Z_1} &\geq 0, \\ \mathbf{C}_{Z_1} &\geq 0, \\ \mathbf{C}_{Z_1,Z_2} &= E\{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2^H\} - \mu_{Z_1}\mu_{Z_2}^H, \\ \mathbf{C}_{Z_2,Z_1} &= \mathbf{C}_{Z_1,Z_2}^H, \\ \tilde{\mathbf{C}}_{Z_1,Z_2} &= E\{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2^T\} - \mu_{Z_1}\mu_{Z_2}^T, \\ \tilde{\mathbf{C}}_{Z_2,Z_1} &= \mathbf{C}_{Z_1,Z_2}^T. \end{aligned}$$