

ΤΗΛ 415 - Στατιστική Επεξεργασία Σήματος για Τηλ/νίες
Εαρινό Εξάμηνο 2020

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών
Υπολογιστών
Πολυτεχνείο Κρήτης

Εργασία 1
30 Μαρτίου 2020

Αριθμός Ομάδας Εργασίας:

Επώνυμο:

Όνομα:

ΑΜ:

Επώνυμο:

Όνομα:

ΑΜ:

1. Υπολογίστε γρήγορα το γινόμενο \mathbf{AB} όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Επιβεβαιώστε στο matlab το αποτέλεσμα.

2.

α) Δίνεται ο πίνακας $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Βρείτε τον αντίστροφο του και επιβεβαιώστε ότι $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ θεωρητικά και στο matlab.

β) Δίνεται ο πίνακας $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C} & 2\mathbf{C} \end{bmatrix}$ όπου ο \mathbf{C} είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Προσπαθήστε να βρείτε τον αντίστροφο του και επιβεβαιώστε ότι $\mathbf{BB}^{-1} = \mathbf{I}$ θεωρητικά και στο matlab.

3. Αν οι πίνακες \mathbf{A} , \mathbf{B} , και $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ είναι αντιστρέψιμοι, δείξτε ότι

$$\mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1}.$$

Επιβεβαιώστε το παραπάνω στο matlab.

4. Έστω αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας \mathbf{A} με γνωστό αντίστροφο πίνακα \mathbf{A}^{-1} . “Πειράζουμε” το (i, j) στοιχείο του \mathbf{A} και το μεταβάλλουμε σε $A'_{ij} \neq A_{ij}$. Έστω \mathbf{B} ο νέος πίνακας που προκύπτει. Να υπολογιστεί ο \mathbf{B}^{-1} ως συνάρτηση του \mathbf{A}^{-1} και των στοιχείων A_{ij} και A'_{ij} . Επιβεβαιώστε στο matlab.

5. Έστω $m \times n$ πίνακας \mathbf{A} . Δείξτε ότι $\text{rank}(\mathbf{A}) = 1$ αν και μόνο αν υπάρχουν μη-μηδενικά διανύσματα $\mathbf{u}_{m \times 1}$ και $\mathbf{v}_{n \times 1}$ τέτοια ώστε $\mathbf{A} = \mathbf{uv}^T$.

6. Έστω $m \times n$ πίνακες $\mathbf{A} = \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T$ και $\mathbf{B} = \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T$. Τα $m \times 1$ διανύσματα \mathbf{u}_1 και \mathbf{u}_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ομοίως, γραμμικά ανεξάρτητα είναι και τα $n \times 1$ διανύσματα \mathbf{v}_1 και \mathbf{v}_2 . Δείξτε ότι η ανισότητα $\text{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \text{rank}(\mathbf{A}) + \text{rank}(\mathbf{B})$ επιτυγχάνεται με ισότητα. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός τέτοιων πινάκων που μπορούμε να προσθέσουμε έτσι ώστε η ισότητα να διατηρείται; Επιβεβαιώστε στο matlab.

7. Δίνεται ο πίνακας $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Βρείτε στο matlab όλες τις πιθανές λύσεις της $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

και της $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ και επιβεβαιώστε για κάποιες από αυτές, όταν α) $\mathbf{b} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, β) $\mathbf{b} = [2 \ 0 \ 2 \ 0]^T$, γ) $\mathbf{b} = [0 \ 2 \ 2 \ 0]^T$.

8. Σας δίνονται πειραματικές μετρήσεις $x(t)$, $t \in \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$, και θέλετε να τις μοντελοποιήσετε βάσει της $x(t) = at^2 + bt + c + n(t)$, όπου το $n(t)$ αναπαριστά θόρυβο μέτρησης.

α) Εκφράστε το πρόβλημα της εκτίμησης των a , b , και c ως ένα πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων (least-squares / LS) της μορφής $\min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{x} - \mathbf{Af}\|$ όπου $\mathbf{f} = [a \ b \ c]^T$ είναι το διάνυσμα των

άγνωστων παραμέτρων.

β) Γράψτε τον τύπο που περιγράφει όλες τις λύσεις LS.

γ) Γράψτε κώδικα MATLAB που υπολογίζει μία λύση LS.

δ) Γράψτε κώδικα MATLAB που παράγει τυχαία μία λύση LS βάσει αυτής που υπολογίσατε στο (γ) και του τύπου στο (β).

ε) Επιβεβαιώστε ότι οι λύσεις στα (γ) και (δ) οδηγούν στο ίδιο τετραγωνικό σφάλμα.

στ) Πότε η λύση στο (γ) είναι μοναδική;