8/1/2019

Θεματική: Παιχνίδια

· Θεωρήστε παιχνίδι 2 παικτών με 2 στρατηγικές A και B ανά παίκτη το οποίο αναπαρίσταται με τον εξής πίνακα κέρδους:

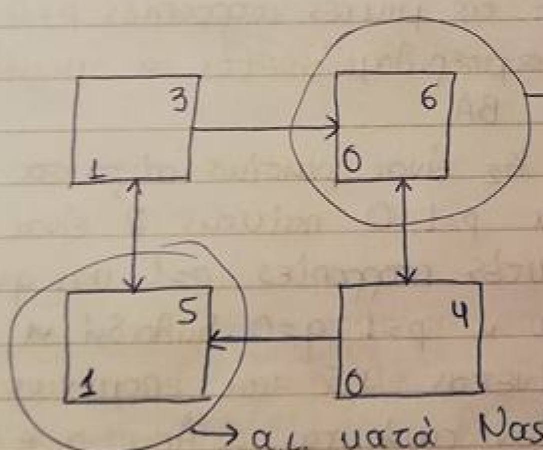
		1: A	1: B
2	A	1, 3	0, 6
	B	1, 5	0, 4

α) Βρείτε όλες τις αμιγείς ισορροπίες κατά Nash.

β) Βρείτε όλες τις μικτές ισορροπίες

ΛΥΣΗ

α) Φτιάχνουμε το Nash dynamics graph



→ αμιγής ισορροπία κατά Nash

→ α.ι. κατά Nash γιατί έχουν μόνο βελάκια προς τα μέσα.

β) Θέτουμε τις πιθανότητες

		p: A	1-p: B
q	A	1, 3	0, 6
1-q	B	1, 5	0, 4

Υπολογίζω το κέρδος του παίκτη που χειρίζεται τις στήλες ως

$K_\Sigma(p,q) = p \cdot q \cdot 3 + p \cdot (1-q) \cdot 5 + (1-p) \cdot q \cdot 6 + (1-p)(1-q) \cdot 4 = 3pq + 5p - 5pq + 6q - 6pq + 4 - 4p - 4q + 4pq = -4qp + p + 2q + 4 = p(-4q+1) + 2q + 4$

Αντίστοιχα για τον παίκτη γραμμών είναι

$K_\Gamma(p,q) = pq\cdot 1 + (1-p)\cdot q\cdot 0 + p\cdot(1-q)\cdot 1 + (1-p)(1-q)\cdot 0 =$
$= pq + p - pq = p$ Άρα το κέρδος του παίκτη γραμμών είναι σταθερό για ότι παίξει ο παίκτης στηλών.
(Η γραμμή κέρδους είναι ευθεία παράλληλη στον $x'x$).

Άρα, τα μέσα κέρδη είναι $K_\Sigma(p,q) = p(1-4q) + 2q + 4$ και
$K_\Gamma(p,q) = p$ (μιλάμε για σετ μικτών ισορροπιών)

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- αν $q > \frac{1}{4}$ τότε $1-4q<0$ και η K_Σ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς q. Τότε ο παίκτης στήλης επιλέγει $p=0$. Ο παίκτης 2 (που χειρίζεται τις γραμμές) είναι αδιάφορος (και έχει πάντα το ίδιο μέσο κέρδος) και επομένως έχουμε τις μικτές ισορροπίες $p=0$ και $q > \frac{1}{4}$. Σημειώνουμε ότι σε αυτές συμπεριλαμβάνεται η αμιγής ισορροπία $p=0$ και $q=1$ δηλαδή ΒΑ
- αν $q<\frac{1}{4}$ τότε $1-4q>0$ και η K_Σ είναι γνησίως αύξουσα ... άρα ο παίκτης στήλης επιλέγει $p=1$. Ο παίκτης 2 είναι αδιάφορος). Επομένως έχουμε τις μικτές ισορροπίες $p=1$ και $q<\frac{1}{4}$. Σε αυτές συμπεριλαμβάνεται και η $p=1$, $q=0$ δηλαδή η ΑΒ.
- $q=\frac{1}{4}$ τότε η συνάρτηση K_Σ γίνεται 4,5 και επομένως ο παίκτης 1 είναι αδιάφορος για την τιμή του p. Άρα $p \in [0,1)$, $q = 1/4$ είναι μικτές ισορροπίες.

Άρα, το σύνολο μικτών ισορροπιών είναι το

$$\left\{ \begin{array}{l} p=0,\ q>\frac{1}{4} \\ p=1,\ q<\frac{1}{4} \\ p\in[0,1),\ q=\frac{1}{4} \end{array} \right\}$$

Κόστος ευστάθειας και Κόστος αναρχίας

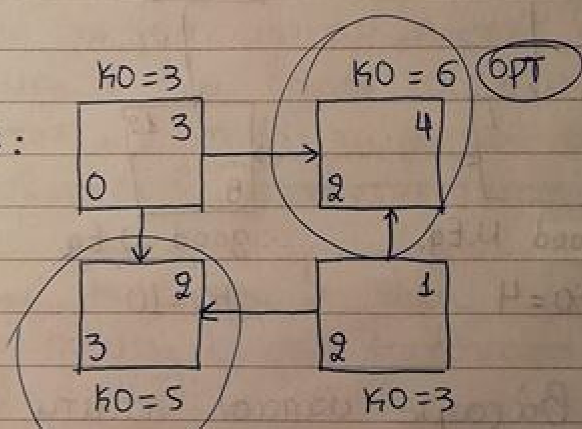
χρησιμοποιούμε τον όρο κοινωνικό όφελος

κοινωνικό όφελος κατάστασης = Σ(κέρδη παικτών)

Έστω το παρακάτω παιχνίδι

0, 3	2, 4
3, 2	2, 1

Φτιάχνω το Nash dynamics:



πόσο άσχημα μπορούν να είναι τα πράγματα

$$PoA = \max_{NEq\, S} \left(\frac{KO(S^*)}{KO(S)}\right)$$

$$PoS = \min_{NEq\, S} \left(\frac{KO(S^*)}{KO(S)}\right)$$

πόσο καλά μπορούν να είναι τα πράγματα

S^*: βέλτιστη κατάσταση ως προς το Κ.Ο.

Neq: Nash Equilibrium.

Εδώ, $PoA = \frac{6}{5}$ και $PoS = 1$

Τα max και τα min απευθύνονται στα κλάσματα.
Όταν μιλάμε για κόστος τα max και τα min αλλάζουν.
Τότε το PoA είναι $\max_{NEq\, S} \frac{KK(S)}{KK(S^*)}$ και $PoS = \min_{Neq\, S} \frac{KK(S)}{KK(S^*)}$

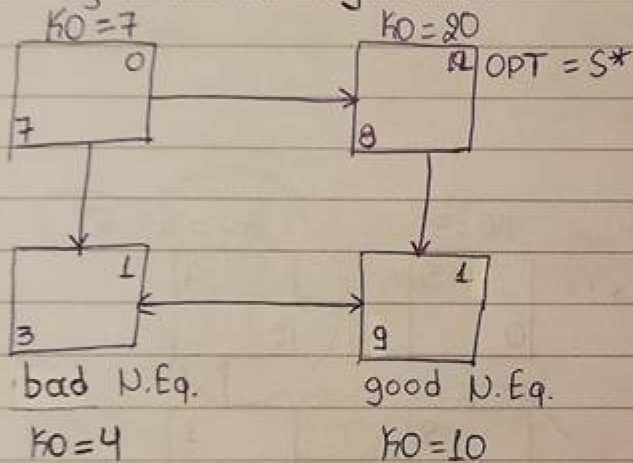
· Κατασκευάστε παιχνίδι με $PoS = 2$ και $PoA = 5$ ως προς το κοινωνικό όφελος. Με θετικά κέρδη στον πίνακα κέρδους.

ΛΥΣΗ

Έστω ο πίνακας κέρδους

	7, 0	8, 12
	3, 1	9, 1

με το εξής Nash dynamics

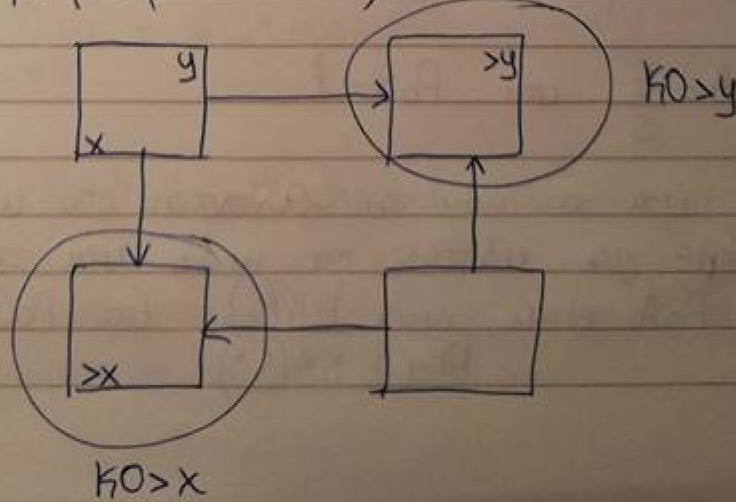


Εδώ ισχύουν τα ζητούμενα $PoS = \frac{20}{10} = 2$ και $PoA = \frac{20}{4} = 5$

Tip: Βάζουμε κάποιον παίκτη να είναι αδιάφορος

· Δείξτε ότι οποιοδήποτε παιχνίδι με το παρακάτω Nash Dynamics graph (2 παίκτες και 2 στρατηγικές ανά παίκτη) έχει PoS αυστηρά μικρότερο από 2, $PoS < 2$.

	A	B
A		
B		



Έστω ότι η πάνω αριστερά είναι (x,y)

- Άσκηση με δυναμικά. Δείξτε ότι μια συνάρτηση είναι συνάρτηση δυναμικού.

Θέμα 4 / Φεβρ. '15 → να το κοιτάξουμε

Θέμα 3 / Ιούνιος '14

Θεωρήστε παιχνίδι ανάθεσης ενός συνόλου εργασιών S σε ένα σύνολο μηχανών M. Κάθε παίκτης έχει τον έλεγχο μιας εργασίας την οποία μπορεί να αναθέσει σε μία απ' τις μηχανές που είναι διαθέσιμες. Η δουλειά του παίκτη i έχει βάρος w_i. Η μηχανή j έχει ταχύτητα τ_j. Συμβολίζοντας με $m_i(S)$ τη μηχανή που επιλέγει ο παίκτης i στην κατάσταση S, ~~το κόστος του παίκτη i είναι ίσο με $cost_i(S)$~~

Το φορτίο της μηχανής j στην κατάσταση S είναι $L_j(S) = \frac{1}{\tau_j} \sum_{\substack{i \in S \\ m_i(S)=j}} w_i$. Το κόστος του παίκτη i στην κατάσταση S είναι $cost_i(S) = L_{m_i(S)}(S)$.

Ως κοινωνικό κόστος ορίζω $SC(S) = \sum_{j \in M} \tau_j L_j(S)^2$ → πρόβλημα δρομολόγησης.

Δείξτε ότι η συνάρτηση $\Phi(S) = \sum_{j \in M} \tau_j L_j(S)^2 + \sum \frac{w_i^2}{\tau_{m}(S)}$ είναι συνάρτηση δυναμικού.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιούμε τον ορισμό: Η συνάρτηση Φ από τις καταστάσεις του παιχνιδιού στους θετικούς πραγματικούς είναι ακριβώς συνάρτηση δυναμικού αν για οποιεσδήποτε 2 καταστάσεις S και S' που διαφέρουν μόνο στην στρατηγική του παίκτη i, ισχύει ότι τα $\Phi(S) - \Phi(S')$ και $cost_i(S) - cost_i(S')$ έχουν ίδιο πρόσημο.

Έχω $\phi(S) - \phi(S') = \sum_{j\in M} \tau_j L_j(S)^2 + \sum_{i\in S} \frac{w_i^2}{\tau_{m_i(S)}} - \sum_{j\in M} \tau_j L_j(S')^2 - \sum_{i\in S} \frac{w_i^2}{\tau_{m_i(S')}}$

Τα S, S' διαφέρουν μόνο στα $m_i^*(S)$, $m_i^*(S')$.

Θα κρατήσω μόνο τις μηχανές $m_i^*(S)$ και $m_i^*(S')$ άρα γίνεται

$$\phi(S) - \phi(S') = \sum_{\substack{j\in m_i^*(S) \\ m_i^*(S')}} \tau_j \left(L_j(S)^2 - L_j(S')^2\right) + \frac{w_{i^*}^2}{\tau_{m_{i^*}(S)}} - \frac{w_{i^*}^2}{\tau_{m_{i^*}(S')}} =$$

$$\cancel{= \tau_{j_1} L_{j_1}(S')} = \tau_{j_1} \cdot \left[\left(\frac{1}{\tau_{j_1}} \cdot \sum_{\substack{i\in S \\ m_i(S)=j_1}} w_i \right)^2 - \left(\frac{1}{\tau_{j_1}} \sum_{\substack{i\in S \\ m_i(S)=j_1}} w_i \right)^2 \right] +$$

$$\tau_{j_2} \left[\cdots \right] + \frac{w_i^{*2}}{\tau_{m_i^*(S)}} - \frac{w_i^{*2}}{\tau_{m_i^*(S')}} =$$

$$= \frac{1}{\tau_{j_1}} \left[\left(\sum_{\substack{i\in S \\ m_i(S)=j_1}} w_i \right)^2 - \left(\sum_{\substack{i\in S \\ m_i(S')=j_1}} w_i \right)^2 \right] + \frac{1}{\tau_{j_2}} \left[\cdots \right] + \frac{w_i^{*2}}{\tau_{m_i^*(S)}} - \frac{w_i^{*2}}{\tau_{m_i^*(S')}} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\tau_{j_1}} w_i^* \left(2 \sum_{\substack{i\in S \\ m_i(S)=j_1}} w_i - w_i^* \right) + \frac{w_i^{*2}}{\tau_{m_i^*(S)}}}_{\frac{2w_i^*}{\tau_{j_1}} \sum_{i\in S} w_i \,=\, 2w^* cost_i(S)} - \frac{1}{\tau_{j_2}} \left[\cdots \right] - \frac{w_i^{*2}}{\tau_{m_i^*(S')}}$$

Έχουμε δείξει ότι $\phi(S) - \phi(S') = 2w_i^*(cost_{i^*}(S) - cost_{i^*}(S'))$

Άρα, τα $\phi(S) - \phi(S')$ και $cost_{i^*}(S) - cost_{i^*}(S')$ έχουν όντως ίδιο πρόσημο και η Φ είναι συνάρτηση δυναμικού.