Ισιοτυτε. $-Z$ Z_2

22/10/19

Μικτες Ισορ

~~Μικτες Στρατηγικες~~

		Παικτης 1	
		Κ	Γ
Παικτης 2	Κ	-1 , 1	1 , -1
	Γ	1 , -1	-1 , 1

$P_1(K) = 0.7$

$P_2(K) = 0.9$

$P(KK) = 0.7 \times 0.9 = 0.63$

$P(\Gamma K) = 0.3 \times 0.9 = 0.27$

$P(K\Gamma) = 0.7 \times 0.1 = 0.07$

$P(\Gamma\Gamma) = 0.3 \times 0.1 = 0.03$

$$P_1(P_1,P_2) = P(KK)\,1 + P(K\Gamma)(-1) + P(\Gamma K)(-1) + P(\Gamma\Gamma)\cdot 1$$
$$= 0.63\cdot 1 + 0.27(-1) + 0.07(-1) + 0.03(1)$$
$$= 0.66 - 0.34 = 0.32$$

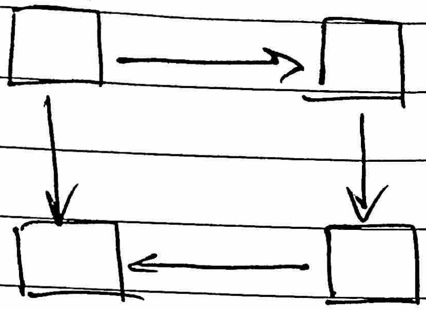
Μικτη στρατηγικη:

$$- \underbrace{P_1(K) = p \,/\, P_1(\Gamma) = 1-p}_{\text{Παικτης 1}} \,/\, \overbrace{P_2(K) = q \,/\, P_2(\Gamma) = 1-q}^{\text{Παικτης 2}}$$

$P(KK) = pq \,/\, P(K\Gamma) = p(1-q) \,/\, P(\Gamma K) = (1-p)q \,/\, P(\Gamma\Gamma) = (1-p)(1-q)$

$P_1(p,q) = p(4q-2) - 2q + 1$ και $P_2(p,q) = q(2-4p) + 2p - 1$

παραγοντας μεγιστοποιησης κερδους



Θέμα

Υπαρχει τετοιο παιχνιδι που να εχει αυτο το Nash dinamic graph?

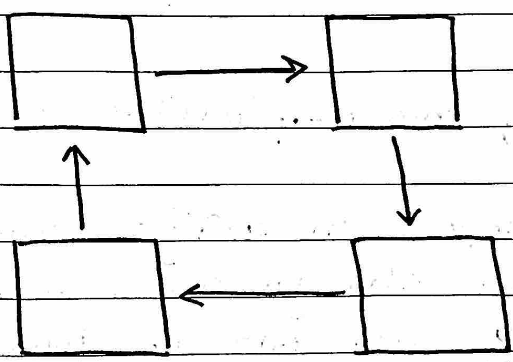
Εχασα Μαθημα τα εχω σε φωτο 5.11.19.

5/11/19.

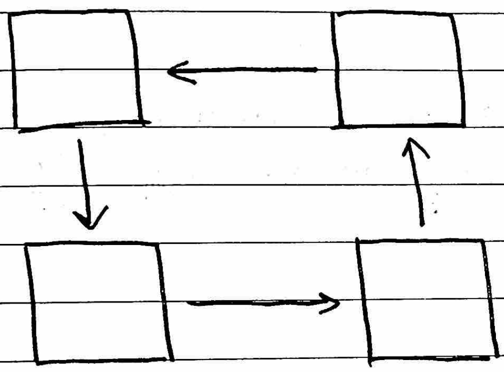
SOS

Κατασκευάστε παιχνίδι με 2 παίκτες + 2 στρατηγικές ανά παίκτη που δεν έχει αμιγή ισορροπία κ' έχει μοναδική μικτή ισορροπία κατά Nash την $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{10}\right)$

	p	$1-p$
q	a, β	γ, δ
$1-q$	ε, ζ	η, θ



$\delta > \beta$
$\eta > \gamma$
$\zeta > \theta$
$a > \varepsilon$



$$k_1(p,q) = \beta pq + \delta(1-p)q + \zeta p(1-q) + \theta(1-p)(1-q)$$
$$= p(\beta q - \delta q + \zeta - \zeta q - \theta + \theta q) + \delta q + \theta - \theta q$$
$$= p((\beta - \delta - \zeta)q - \theta + \zeta) + \delta q + \theta - \theta q$$

	p	$1-p$
q	β, 0	0, 1
$1-q$	0, a	1, 0

$a>0$
$\beta>0$

$$k_1(p,q) = 1(1-p)q + ap(1-q)$$
$$= p(-q + a - aq) + q$$
$$= p\left(\underline{a - q(a+1)}\right) + q$$

$$k_2(p,q) = \beta \cdot pq + 1(1-p)(1-q)$$
$$= q(\beta p - 1 + p) + 1 - p$$
$$= q((\beta+1)p - 1) + 1 - p.$$

(*) γιατί τοποθετώ έτσι τα a, β?

1) Αν $q > \frac{a}{a+1}$ τότε $a - q(a+1) < 0$ κ' $k_1(p,q)$ φθίνουσα προς p.

Άρα, ο παίκτης 1 επιλέγει $p=0$. Τότε $(\beta+1)p - 1 < 0$ κ' η $k_2(0,q)$ είναι φθίνουσα ως προς q. Άρα ο παίκτης 2 επιλέγει $q=0$. Άτοπο!

2) Αν $q < \frac{a}{a+1}$ τοτε $a-q(a+1) > 0$ και $K_1(p,q)$ αυξουσα ως προς p

Αρα, ο παικτης 1 επιλεγει $p=1$. Τοτε $(\beta+1)p-1 > 0$ κ' $K_2(p,q)$ είναι αυξουσα ως προς q. Αρα ο παικτης 2 επιλεγει $p=1$. Ατοπο!

3) Αν $q = \frac{a}{a+1}$ τοτε $a-q(a+1) = 0$ κ' $K_1(p,q)$ είναι σταθερη. Ο παικτης 1 θα μπορουσε να επιλεξει οποιαδήποτε τιμη για το p. Ομως η μοναδικη τιμη για την οποια η $K_2(p,q)$ μεγιστοποιειται για $q = \frac{a}{a+1}$ είναι αυτη που μηδενιζει την ποσοτητα $(\beta+1)p-1$

(ωστε η K_2 να είναι σταθερη)

Εχουμε βρει την μοναδικη μικτη ισορροπια κατα Nash $p = \frac{1}{\beta+1}$, $q = \frac{a}{a+1}$. Θετω $\beta=4$ κ' $a=\frac{7}{3}$ κ' εχω $(p,q) = \left(\frac{1}{5}, \frac{7}{10}\right)$

(*)

	p	$1-p$
q	6, 0	0, 1
$1-q$	0, 1	α, 0

$$\kappa_1(p,q) = 1(1-p)q + 1p(1-q) = p(-q+1-q)+q$$
$$= p(1-2q)+q$$

Άσκηση

Κατασκευάστε παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος με 2 παίκτες κ' 2 στρατηγικές ανά παίκτη που δεν έχει αμιγή ισορροπία κ' έχει μοναδική μικτή ισορροπία κατά Nash $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

	p	$1-p$
q	0, 0	-1, 1
$1-q$	$-a$, a	0, 0

$$\kappa_1(p,q) = 1(1-p)q + a\,p(1-q) = p(-q+a-aq)+q$$

$$\kappa_2(p,q) = -1(1-p)q - ap(1-p) = q(-1+p+ap)-ap$$

1) $q > \frac{a}{a+1} \Rightarrow \kappa_1(p,q)$ φθίνουσα $\Rightarrow p = 0 \Rightarrow \kappa_2$ φθίνουσα άρα

$q = 0$, άτοπο!

2) $q < \frac{a}{a+1} \Rightarrow \kappa_1(p,q)$ αύξουσα $\Rightarrow p=1 \Rightarrow \kappa_2$ αύξουσα άρα

$q = 1$. Άτοπο!

3) $q = \frac{a}{a+1}$, ... $p = \frac{1}{a+1}$

Παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος
2 παίκτες + 2 στρατηγικές
δεν έχει αμιγή ισορροπία
$\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

	p	1-p
q	1 / -1	a / -a
1-q	b / -b	0 / 0

$a>1$
$-a<0 \Rightarrow a>0$
$b>0$
$-1>-b \Rightarrow b>1$

$$K_1(p,q) = 1 - pq + a(1-p)q + bp(1-q)$$
$$= p(q - aq + b - bq) + aq$$
$$= p(\underline{b} - q\,\underline{(a+b-1)}) + aq$$

$$K_2(p,q) = -1\,p\cdot q - a(1-p)q - bp(1-q)$$
$$= q(-p - a + ap - bp) - bp$$
$$= q((a+b-1)p - a) - bp$$

1) $q < \frac{b}{a+b-1} \Rightarrow K_1(p,q)$ αύξουσα $\rightarrow p=1 \Rightarrow K_2(1,q)$ αύξουσα $\Rightarrow q=1$
Άτοπο!

2) $q > \frac{b}{a+b-1} \Rightarrow K_1(p,q)$ φθίνουσα $\Rightarrow p=0 \Rightarrow K_2(0,q)$ φθίνουσα $\Rightarrow q=0$
Άτοπο!

3) $q = \frac{b}{a+b-1}$ $\quad p = \frac{a}{a+b-1}$ $\quad \frac{3}{5} = \frac{a}{a+b-1}$ $\quad \frac{4}{5} = \frac{b}{a+b-1}$

$3a+3b-3 = 5a$
$3b-2a-3=0$
$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} 12a-12-2a-3=0$
$\Rightarrow 10a-15=0$
$\Rightarrow a = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

$4a+4b-4=5b$
$b = 4a-4 \quad (1)$
$\boxed{b=2}$

12/11/19

Παιχνίδια Συμφόρησης. (Congestion games)

▶ Δικτύου

• Σύνολο N με n παίκτες, σύνολο E με m πόρους.
• Ο πόρος e έχει μια συνάρτηση καθυστέρησης $f_e : N \to R^+$
  - Μη φθίνουσα, δείχνει πόση καθυστέρηση προκαλεί ο πόρος στους παίκτες που τον χρησιμοποιούν.
• Ο παίκτης i έχει ένα σύνολο στρατηγικών S_i
  - Κάθε στρατηγική έχει ένα σύνολο πόρων, δηλώνει ποιους πόρους χρησιμοποιεί ο παίκτης.
• Κατάσταση

• Φορτίο $n_e(S)$ του πόρου e στην κατάσταση S:
  - αριθμός παικτών που χρησιμοποιούν τον πόρο e στην κατάσταση S.

• $f_e(n_e(S))$ δείχνει πόσο επιβαρύνει ο πόρος e τους παίκτες που τον χρησιμοποιούν
• Κόστος:

$$cost_i(S) = \sum_{e \in S_i} f_e(n_e(S))$$

$$S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$$

▶ Εξισορρόπησης Φορτίου

• Κάθε παίκτης έχει μια εργασία και θέλει να την αναθέσει σε κάποια μηχανή ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος ολοκλήρωσής της
• m παράλληλες μηχανές
  - μηχανή j έχει ταχύτητα σ_j
  - Αν στη μηχανή j ανατεθούν x δουλειές, το κόστος που βλέπει κάθε ένας από τους παίκτες - ιδιοκτήτες αυτών των δουλειών είναι x/σ_j

Συναρτησεις Δυναμικου (Potential functions)

Ορισμος:

- Μια συναρτηση $\Phi: S \to R$ ονομαζεται συναρτηση δυναμικου αν για οποιεσδηποτε δυο καταστ. S_1 και S_2 που διαφερουν στη στρατηγικη ενος παικτη i οι διαφορες $\Phi(S_1)-\Phi(S_2)$ και $cost_i(S_1) - cost_i(S_2)$ εχουν το ιδιο προσημο.

- Θεωρημα: Ενα παιχνιδι που εχει συν. δυν., εχει τουλαχιστον μια αμιγη ισορροπια κατα Nash (γιατι;)

δεν υπαρχει κυκλος.

$$\begin{tikzcd} \boxed{35} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{20} \arrow[d] \\ \boxed{30} \arrow[r] & \boxed{15} \end{tikzcd}$$

Συναρτηση Δυναμικου του Rosenthal

- Θεωρημα: Η συναρτηση

$$\Phi(S) = \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^{n_e(S)} f_e(j)$$

ειναι συναρτηση δυναμικου για καθε παιχνιδι συμφορησης

- Ιδεα αποδειξης:

- Θα δειξουμε οτι για δυο καταστασεις S_1 κ' S_2 που διαφερουν στη στρατηγικη του παικτη i και ισχυει $\Phi(S_1) - \Phi(S_2) = cost_i(S_1) - cost_i(S_2)$.

Θ: Η συναρτηση του Rosenthal $\Phi(S) = \sum_{e\in E}\sum_{j=1}^{n_e(S)} f_e(j)$ ειναι συναρτηση δυναμικου. Ειδικοτερα,
$\Phi(S_1) - \Phi(S_2) = cost_i(S_1) - cost_i(S_2)$ για οποιεσδηποτε δυο καταστασεις S_1 κ' S_2 που διαφερουν μονο στη στρατηγικη του παικτη i.

Αποδειξη.

$$\Phi(S_1) - \Phi(S_2) = \sum_{e\in E}\sum_{j=1}^{n_e(S_1)} f_e(j) - \sum_{e\in E}\sum_{j=1}^{n_e(S_2)} f_e(j)$$

$$= \sum_{e\in E}\left(\sum_{j=1}^{n_e(S_1)} f_e(j) - \sum_{j=1}^{n_e(S_2)} f_e(j)\right)$$

$$= \sum_{e\in S_i\cap S_i'}\left(\sum_{j=1}^{n_e(S_1)} f_e(j) - \sum_{j=1}^{n_e(S_2)} f_e(j)\right)$$

$$+ \sum_{e\in S_i\setminus S_i'}\left(\sum_{j=1}^{n_e(S_1)} f_e(j) - \sum_{j=1}^{n_e(S_2)} f_e(j)\right)$$

$$+ \sum_{e\in S_i'\setminus S_i}\left(\sum_{j=1}^{n_e(S_1)} f_e(j) - \sum^{n_e(S_2)} f_e(j)\right)$$

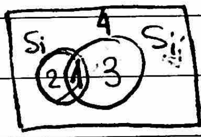
$$+ \sum_{e\notin S_i\cup S_i'}\left(\sum_{j=1}^{n_e(S_1)} f_e(j) - \sum^{n_e(S_2)} f_e(j)\right) =$$

Διακρινουμε περιπτωσεις:

$S_1 = (S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots, S_n)$

$S_2 = (S_1, S_2, \ldots, S_i', \ldots S_n)$

1) $e\in S_i\cap S_i'$



2) $e\in S_i\setminus S_i'$

3) $e\in S_i'\setminus S_i$

4) $e\notin S_i\cup S_i'$

1) $n_e(S_1) = n_e(S_2)$

2) $n_e(S_1) = n_e(S_2)+1$

3) $n_e(S_2) = n_e(S_1)+1$

4) $n_e(S_1) = n_e(S_2)$

$$= \sum_{e\in S_i\cap S_i'}\left(f_e(n_e(S_1)) - f_e(n_e(S_2))\right) + \sum_{e\in S_i\setminus S_i'}\left(f_e(n_e(S_1))\right)$$

$$+ \sum_{e\in S_i'\setminus S_i}\left(f_e(n_e(S_2))\right) + 0 \quad = \sum_{e\in S_i} f_e(n_e(S_1)) - \sum_{e\in S_i'} f_e(n_e(S_2))$$

$$= cost_i(S_1) - cost_i(S_2)$$

Κοστος ευσταθειας και αναρχιας.

- Η εννοια του κοινωνικου κοστους (social cost)
  - Εκτιμηση της αποδοσης ενος συστηματος που μοντελοποιειται απο ενα παιχνιδι.
    - Το συνολικο κοστος των παικτων $SC(s)=\sum_i cost_i(s)$
  - Η κατασταση που ελαχιστοποιειται το κοινωνικο κοστος δεν ειναι απαραιτητα ισορροπια.
  - Το συστημα δεν ειναι οσο αποδοτικο θα μπορουσε να ειναι οταν ειναι σε ισορροπια.

- Κοστος ευσταθειας (Price of stability)

$$PoS = \min_{s \in NE} \frac{SC(s)}{SC(s_{opt})}$$

$SC(s_{opt}) \rightarrow$ βελτιστο κοινωνικο κοστος.

- Κοστος αναρχιας (Price of anarchy)

$$PoA = \max_{s \in NE} \frac{SC(s)}{SC(s_{opt})}$$

19/11/19

Γραμμικα παιχνιδια συμφόρησης:

- Συνολο N με n παικτες, συνολο E με m πορους
- Συναρτηση καθυστερησης (latency function)
  $f_e(x) = a_e x + b_e$
- Ο παικτης i εχει συνολο στρατηγικων S_i
  - Καθε στρατηγικη ειναι ενα συνολο πορων.
- Κοστος παικτη i στην κατασταση S.
  $cost_i(S) = \sum_{e \in S_i} (a_e n_e(S) + b_e)$

Λημμα: Για οποιαδηποτε κατασταση S, το κοινωνικο κοστος ενος γραμμικου παιχνιδιου συμφορισης και η συναρτηση δυναμικου του Rosenthal συνδεονται με τη σχεση $SC(S)/2 \le \Phi(S) \le SC(S)$

Θεωρημα: Σε γραμμικα παιχνιδια συμφορισης $PoS \le 2$.

Αποδειξη

$$SC(S) = \sum_{i \in N} cost_i(S) = \sum_{i \in N} \sum_{e \in S_i} f_e(n_e(S)) = \sum_{i \in N} \sum_{e \in S_i} (a_e n_e(S) + b_e)$$

$$= \sum_{e \in E} \sum_{i \in N: e \in S_i} (a_e n_e(S) + b_e) = \sum_{e \in E} \left(a_e \sum_{i \in N: e \in S_i} n_e(S) + \sum_{\substack{i \in N:\\ e \in S_i}} b_e\right)$$

$$= \sum_{e \in E} \left[a_e n_e(S)^2 + b_e n_e(S)\right]$$

Αποδειξη Λημματος:

Rosenthal : $\Phi(S) = \sum_{e\in E} \sum_{j=1}^{n_e(S)} f_e(j) = \sum_{e\in E} \sum_{j=1}^{n_e(S)} (d_e j + b_e)$

$= \sum_{e\in E} \left(a_e \sum_{j=1}^{n_e(S)} j + \sum_{j=1}^{n_e(S)} b_e \right) = \sum_{e\in E} \left(a_e \frac{n_e(S)^2 + n_e(S)}{2} + b_e n_e(S) \right)$ $\quad \Big| \; \sum_{j=1}^{n_e(S)} j = \frac{n_e(S)^2 + n_e(S)}{2}$

$$\Phi(S) = \sum_{e\in E} \left(a_e \frac{n_e(S)^2 + n_e(S)}{2} + b_e n_e(S) \right) \le \underbrace{\sum_{e\in E} \left(a_e n_e(S)^2 + b_e n_e(S) \right)}_{= SC(S)}$$

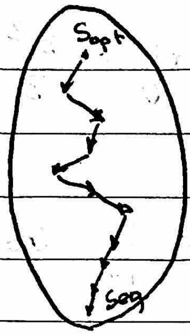
$$\sum_{e\in E} \left(a_e \frac{n_e(S)^2 + n_e(S)}{2} + b_e n_e(S) \right) \le SC(S)$$

$$\Phi(S) = \sum_{e\in E} \left(a_e \frac{n_e(S)^2 + n_e(S)}{2} + b_e n_e(S) \right) \ge \sum_{e\in E} \left(a_e \frac{n_e(S)^2}{2} + \frac{n_e(S)}{2} \right)$$

$$= \sum_{e\in E} \left(a_e \frac{n_e(S)^2 + n_e(S)}{2} + b_e n_e(S) \right) \le \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{e\in E} \left(a_e n_e(S)^2 + b_e n_e(S) \right)}_{= SC(S)/2}$$

$$= \sum_{e\in E} \left(a_e \frac{n_e(S)^2 + n_e(S)}{2} + b_e n_e(S) \right) \le \frac{SC(S)}{2}$$

$$PoS = \min_{S \in NE} \frac{SC(S)}{SC(S_{opt})}$$



Απόδειξη: ($PoS \le 2$)

Ξεκινάω από την κατάσταση S_{opt}. Αν είναι ισορροπία τότε $PoS \le 1$. Αλλιώς, αφήνω το ν παίκτες να παίξουν ώστε να βελτιώνουν τη στρατηγική τους μέχρι αυτό να μην είναι δυνατό (μέχρι να φτάσουν κάποια ισορροπία S_{eq}). Θα δείξω ότι $SC(S_{eq}) \le 2SC(S_{opt})$ κ' $PoS \le 2$

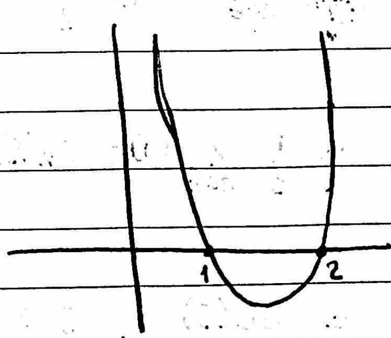
$$SC(S_{opt}) \ge \Phi(S_{opt}) > \Phi(S_{eq}) \ge \frac{SC(S_{eq})}{2}$$

Κάτω φράγμα για το κόστος της αναρχίας.

$\forall$ ακέραιο $x, y \ge 0$ ισχύει ότι $xy + y \le \frac{x^2}{3} + \frac{5y^2}{3}$

$y=0$: $0 \le \frac{x^2}{3}$ ✓

$y=1$: $x+1 \le \frac{x^2}{3} + \frac{5}{3} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \ge 0$
$(x-1)(x-2) \ge 0$ ✓



$y \ge 2$ $\frac{5y^2}{3} - y \ge \frac{7y^2}{6} \Leftrightarrow 10y^2 - 6y \ge 7y^2$

$\Rightarrow 3y^2 - 6y \ge 0 \Leftrightarrow 3y(y-2) \ge 0$. ✓

Αν δείξω

$$xy \le \frac{x^2}{3} + \frac{7y^2}{6} \Rightarrow xy + y \le \frac{x^2}{3} + \frac{5y^2}{3}$$ ✓

$\Delta < 0 \Rightarrow$ παντού θετική

$\forall$ ακεραιο x, y θετικο ισχυει $xy + y \le \frac{x^2}{3} + \frac{5y^2}{3}$.

$PoA \le 5/2$

Εστω S ισορροπια τοτε $SC(S) = \sum_{i \in N} cost_i(S)$ κ' $S_{opt} = (S_1^*, S_2^*, S_3^*, \dots S_n^*)$ η βελτιστη κατασταση.

$$SC(S) = \sum_{i \in N} cost_i(S) \le \sum_{i \in N} \underbrace{cost_i(S_{-i}, S_i^*)}_{\text{όλοι οι παικτες παιζουν ότι στην κατασταση } S \text{ ο παικτης } i \text{ παιζει } S_i^*} =$$

$$= \sum_{i \in N} \sum_{e \in S_i^*} (a_e \, n_e(S_{-i}, S_i^*) + b_e) \le \sum_{i \in N} \sum_{e \in S_i^*} (a_e (n_e(S) + 1) + b_e)$$

$$= \sum_{i \in N} \sum_{\substack{i \in N \\ e \in S_i^*}} (a_e (n_e(S) + 1) + b_e) = \sum_{e \in E} \left(a_e \left(n_e(S) \sum_{\substack{i \in N \\ e \in S_i^*}} 1 + \sum_{\substack{i \in N \\ e \in S_i^*}} 1 \right) + b_e \sum_{\substack{i \in N \\ e \in S_i^*}} 1 \right)$$

$$= \sum_{e \in E} \left(a_e \left(n_e(S) n_e(S_{opt}) + b_e n_e(S_{opt}) \right) + b_e n_e(S_{opt}) \right) \le$$

$$\le \sum_{e \in E} a_e \left(\frac{n_e(S)^2}{3} + \frac{5 n_e(S)^2}{3} \right) + b_e n_e(S_{opt}) \le$$

$$\le \frac{1}{3} \sum_{e \in E} (a_e n_e(S)^2 + b_e n_e) + \frac{5}{3} \sum_{e \in E} \left(a_e n_e(S_{opt})^2 + b_e n_e(S_{opt}) \right)$$

$$= \frac{SC(S)}{3} + \frac{5 \, SC(S_{opt})}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} SC(S) \le \frac{5}{3} SC(S_{opt})$$

$$\Rightarrow SC(S) \le \frac{5}{2} SC(S_{opt})$$

26/11/19

1

	L	R
U	4, 1	1, 2
D	3, 4	2, 3

2

$P_{LU} + P_{LD} + P_{RU} + P_{RD} = 1$ (1)

$P_{..} \geq 0$

1: $P_{LU} \cdot 1 + P_{LD} \cdot 4 \geq P_{RU} \cdot 2 + P_{LD} \cdot 3$

(ο παικτης 1 δεν εχει κινητρο να αλλαξει τη στρατηγικη του απο L στο R)

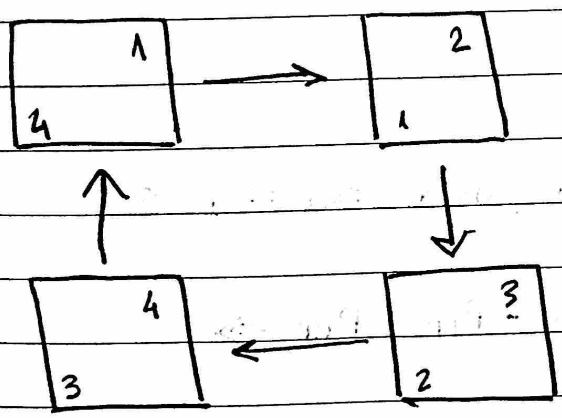
$\Longrightarrow P_{LD} \geq P_{LU}$ (2)

1: $R \not\to L$: $P_{RU} \cdot 2 + P_{RD} \cdot 3 \geq P_{RU} \cdot 1 + P_{RD} \cdot 4 \Rightarrow P_{RU} \geq P_{RD}$ (3)

2: $U \not\to D$: $P_{LU}\, 4 + P_{RU}\, 1 \geq P_{LU} \cdot 3 + P_{RU} \cdot 2 \Rightarrow P_{LU} \geq P_{RU}$ (4)

2: $D \not\to U$: $P_{LD}\, 3 + P_{RD} \cdot 2 \geq P_{LD} \cdot 4 + P_{RD} \cdot 1 \Rightarrow P_{RD} \geq P_{LD}$ (5)

$\underline{\underline{P_{LD}}} \geq P_{LU} \geq P_{RU} \geq P_{RD} \geq \underline{\underline{P_{LD}}} \Longrightarrow P_{LD} = P_{LU} = P_{RU} = P_{RD} = \frac{1}{4}$



(1)

(2)	L	R
u	2, 1	4, 2
D	3, 4	1, 3

$P_{LU} + P_{LD} + P_{RU} + P_{RD} = 1$ (1)

$P_{..} \ge 0$

(1) $L \not> R$: $P_{LU} \cdot 1 + P_{LD} \cdot 4 \ge P_{LU} \cdot 2 + P_{LD} \cdot 3 \Rightarrow P_{LD} \ge P_{LU}$ (2)

(1) $R \not> L$: $P_{RU} \cdot 2 + P_{RD} \cdot 3 \ge P_{RU} \cdot 1 + P_{RD} \cdot 4 \Rightarrow P_{RU} \ge P_{RD}$ (3)

(2) $u \not> D$: $P_{LU} \cdot 2 + P_{RU} \cdot 4 \ge P_{LU}\, 3 + P_{RU} \cdot 1 \Rightarrow 3P_{RU} \ge P_{LU}$ (4)

(2) $D \not> u$: $P_{LD}\, 3 + P_{RD}\, 1 \ge P_{LD} \cdot 2 + P_{RD}\, 4 \Rightarrow P_{LD} \ge 3P_{RD}$ (5)

$$\boxed{\begin{array}{l} P_{RU} = P_{LD} = \frac{1}{2} \\ P_{LU} = P_{RD} = 0 \end{array}}$$

SOS

Συσχετιζόμενη ισορροπία που δεν είναι ούτε αμιγής ούτε μικτή.

Συμμετρική συσχετιζόμενη ισορροπία, δηλ. $P_{RU} = P_{LD}$ (6)

$P_{LU} = 1 - P_{LD} - P_{RU} - P_{RD} = 1 - P_{LD} - P_{LD} - P_{RD} \Rightarrow$

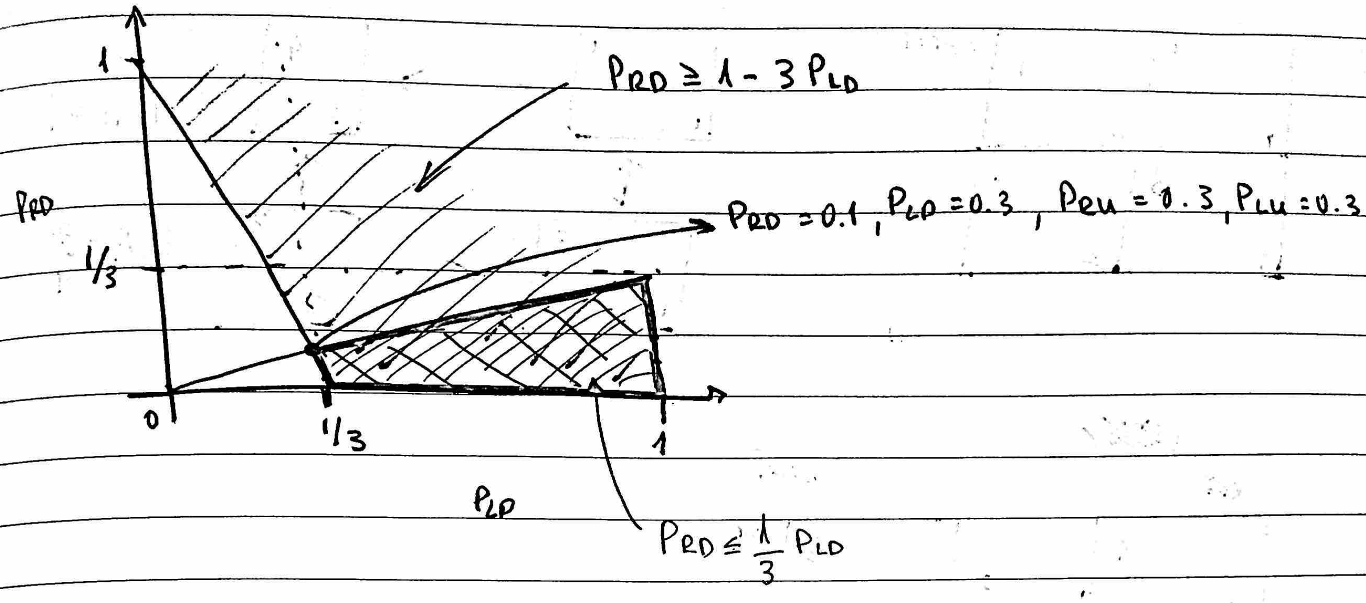
$\boxed{P_{LU} = 1 - 2P_{LD} - P_{RD}}$

(2) $\Rightarrow P_{LD} \ge 1 - 2P_{LD} - P_{RD} \Rightarrow \boxed{P_{RD} \ge 1 - 3P_{LD}}$

(3) $\Rightarrow P_{LD} \ge P_{RD} \Rightarrow$ .... $\boxed{P_{RD} \le P_{LD}}$

(4) $\Rightarrow 3P_{LD} \ge 1 - 2P_{LD} - P_{RD} \Rightarrow \boxed{P_{RD} \ge 1 - 5P_{LD}}$

(5) $\Rightarrow P_{LD} \ge 3P_{RD} \Rightarrow \boxed{P_{RD} \le \frac{1}{3} P_{LD}}$

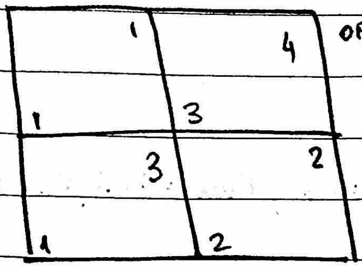


$$1 - 3P_{LD} = \frac{1}{3} P_{LD}$$

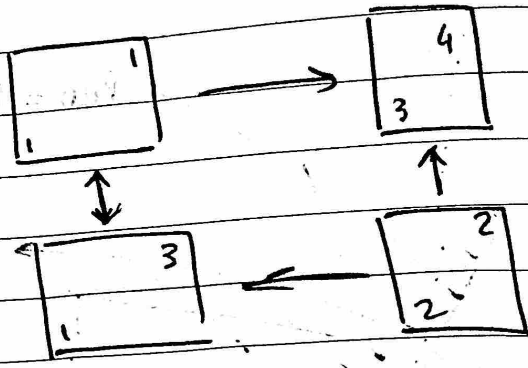
$$\boxed{P_{LD} = 0.3}$$

Κατασκευαστε παιχνιδι με 2 παικτες και 2 στρατηγικες ανα παικτη (δινοντας τον πινακα κερδους του με θετικα κερδη) που εχει κοστος αναρχιας $PoA = 3$ και κοστος ευσταθειας $PoS = 2$. Χρησιμοποιηστε ως κοινωνικο κερδος μιας καταστασης το αθροισμα των κερδων των παικτων)

$PoS = \min_{s \in Eq} \frac{SC(s)}{SC(s^*)}$	$PoS = \min_{s \in Eq} \frac{SW(s^*)}{SW(s)}$
$PoA = \max_{s \in Eq} \frac{SC(s)}{SC(s^*)}$	$PoA = \max_{s \in Eq} \frac{SW(s^*)}{SW(s)}$
οταν τα ~~κερδη~~ κινητρα των παικτων οριζονται με βαση το κοστος	οταν τα κινητρα των παικτων οριζονται με βαση το κερδος

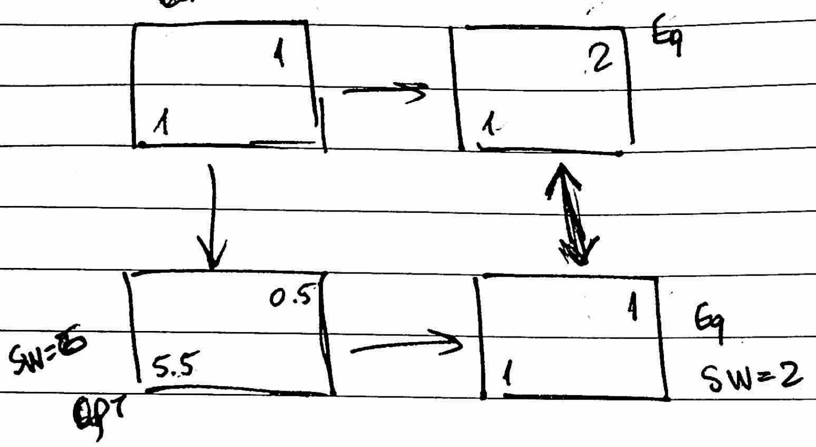


OPT=7.



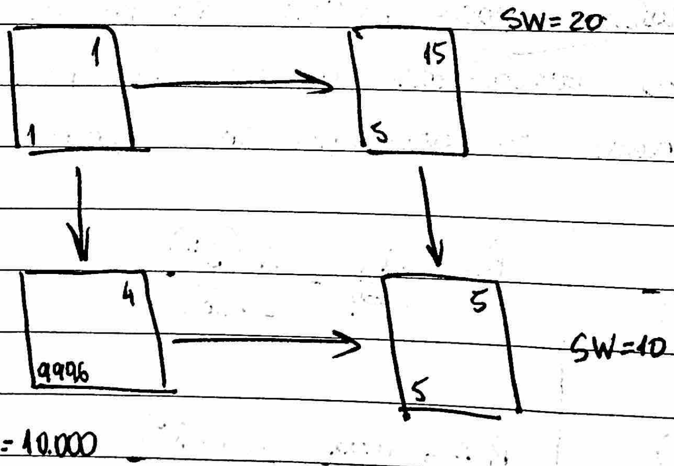
$P_oS = 1$

$P_oA = \frac{7}{4}$



$P_oS = 500$

$P_oA = 1000$



Παιχνιδια τομης. (Cut games)

- Γραφημα $G=(V,E)$ με βαρος w_e σε καθε ακμη $e\in E$
- Καθε κομβος αντιστοιχει σε εναν παικτη.
- Δυο στρατηγικες για τον παικτη/κομβο v:
  - να τοποθετηθει τον v δεξια η αριστερα της τομης

- Cut(S)

  Το συνολο των ακμων που εχουν το ενα ακρο τους αριστερα και το αλλο δεξια σε μια κατασταση S.

$$payoff_i(S) = \sum_{e\in Cut(S)\cap N_i} w_e$$

Λημμα: $\Phi(S) = \sum_{e\in Cut(S)} w_e$

Ν.δ.ο. $\Phi(S) - \Phi(S') = payoff_i(S) - payoff_i(S')$

Η Αποδειξη στις διαφανειες.

- Κοινωνικο κερδος (social welfare):
  - Συνολικο κερδος ολων των παικτων σε μια κατασταση S.

    $SW(S) = \sum_i payoff_i(S)$

- Παρατηρω: $SW(S) = 2\Phi(S)$ (2 κομβοι, 1 ακμη $\rightarrow$ ακμη *2)

- Αρα το κοστος της ευσταθειας ειναι 1.

Εχασα 2 μαθηματα.

17/12/19

Θεωρια Κοινωνικης Επιλογης.

Προφιλ προτιμησεων

- Συνολο ψηφοφορων (voters) $N=\{1,2,\dots,n\}$
- Συνολο m υποψηφιων (alternatives) $A=\{a,b,c,\dots\}$
- Καθε ψηφοφορος συγκρινει τους υποψηφιους και καταληγει σε μια διαταξη προτιμησης = ψηφος.
- Προφιλ: συγκροτημα με μια ψηφο ανα ψηφοφορου

Π.χ. $N=\{1,2,3\}$, $A=\{a,b,c,d\}$

Εισοδος: προφιλ προτιμησεων
Εξοδος: συνολικη προτιμηση

- Κανονες κοινωνικης επιλογης (social choice functions)
  - παραγουν ως εξοδο ενας υποψηφιο, το νικητη.
- Κανονες κοινωνικων σχεσεων (social welfare functions)
  - παραγουν ως εξοδος μια τελικη διαταξη των υποψηφιων.

Κανονας της πλειοψηφιας (Plurality)

Ορισμος:

- Καθε ψηφοφορος δινει εναν ποντο στον υποψηφιο που προτιμα και κανενας ποντο στους υπολοιπους υποψηφιους
- Νικητης ο υποψηφιος με τους περισσοτερους ποντους.
- Τελικη διαταξη

π.χ

· Προφίλ:

ψηφοφόρος	ψήφος
1	$d >_1 b >_1 a >_1 c$
2	$b >_2 c >_2 a >_2 d$
3	$b >_3 d >_3 a >_3 c$
4	$a >_4 b >_4 b >_4 c$
5	$b >_5 c >_5 d >_5 a$

μεγαλύτερη προτίμηση   μικρότερη προτίμηση

Κανόνας: πλειοψηφία

Τελ. διάταξη: $b > a > d > c$ ή $b > d > a > c$

Ο κανόνας του βέτο (Veto, antiplurality)

Ορισμός:

- Κάθε υποψήφιος δίνει έναν πόντο σε όλους τους υποψήφιους εκτός από αυτόν που προτιμά λιγότερο.

π.χ το ίδιο.

Κανόνας: βέτο.

Τελ. διάταξη: $b > a > d > c$ ή $b > d > a > c$

⊛ Ο κανόνας βέτο είναι ο ίδιος με της πλειοψηφίας απλά κοιτάμε αυτόν που δεν θέλουμε.

Ο κανόνας του Borda.

Ορισμός: - Οι προτιμήσεις κάθε ψηφοφόρου βαθμολογούνται ως εξής: ο πρώτος παίρνει m-1 πόντους, ο δεύτερος m-2, ..., ο τελευταίος παίρνει 0 πόντους.

- Νικητής είναι ο υποψήφιος με τους περισσότερους πόντους.

Π.χ το ίδιο με πριν.

Κανονας: Borda.
Σκορ: a:6 / b:13 / c:4 / d:7.
Τελ. διαταξη: b > d > a > c.

Ο κανονας της δικτατοριας.

Ορισμος:
- Υπαρχει ενας συγκεκριμενος ψηφοφορος ο οποιος καλειται δικτακτορας και καθοριζει το αποτελεσμα.
- Οτιδηποτε και αν ψηφισουν οι ψηφοφοροι, το αποτελεσμα καθοριζεται απο τον δικτατορα.

Π.χ το ίδιο με πριν.

Κανονας: Δικτατορια του ψηφοφορου 4.
Τελ. διαταξη: a > b > d > c

Επιθυμητες ιδιοτητες:

Ομοφωνια (unanimity):
- Οταν ολοι οι ψηφοφοροι εχουν ακριβως την ιδια προτιμηση αυτη πρεπει να ειναι το τελικο αποτελεσμα.

- Ανεξαρτησια απο ασχετους υποψηφιους (independence of irrelevant alternatives - IIA):
Η σχετικη διαταξη των υποψηφιων a κ b στο τελικο αποτελ. δεν εξαρταται απο καποιον αλλο υποψηφιο.

$\overline{z_1 - z_2}$ $z \neq 0$

...διαδοχικές

SOS Δείξτε ότι ο Borda δεν έχει IIA.

π.χ. ~~1. $a >_1 b >_1 c >_1 d$~~

2.

3.

1'. $a >_1 c >_1 d >_1 b$

SOS Κατασκευάστε ένα προφίλ προτιμήσεων όπου το αποτέλεσμα των κανόνων ψηφοφορίας της πλειοψηφίας, του Borda, κ' του veto είναι μοναδικό κ' διαφορετικό.

3 υποψήφιοι Plurality: a

Veto: b

Borda: c.

1. $a >_1 b >_1 c$
2. $a >_2 b >_2 c$
3. $b >_3 c >_3 a$
4. $c >_4 b >_4 a$

a	c	b
a	c	b
a	c	b
a	b	c
a	b	c
b	a	c
b	a	c
b	c	a
b	c	a
c	b	a
c	b	a
c	b	a
c	b	a

?

Arrow's impossibility theorem.

- Οποιοσδηποτε κανονας ψηφοφοριας (κοινωνικων σχεσεων) μεταξυ τουλαχιστον τριων υποψηφιων που ικανοποιει τις ιδιοτητες ομοφωνια και IIA ειναι δικτατορια
- Πορεια αποδειξης: (SOS) * Δυσκολη
  - Π.1.: αν $a >_i b$ $\forall$ ψηφοφορο i, τοτε $a > b$ (ομοφωνια + IIA)
  - Π.2.: καθε ζευγαρι υποψηφιων αντιμετοπιζεται με τον ιδιο τροπο (ότι $a > b$ και $c > d$ σε αλλους ~~ψηφοφορους~~ προφιλ.)
  - Π.3.: υπαρχει ενας pivotal ψηφοφορος, i^*
  - Π.4.: ο pivotal ψηφοφορος i^* ειναι ο δικτακτορας.

07/01/2020

Χειραγωγηση κανονων ψηφοφοριας

__Ορισμος:__ - Ενας ψηφοφορος i χειραγωγει τον κανονα ψηφοφοριας f οταν ισχυει $f(>_1 \dots, >_i, \dots >_n) = a$ και υπαρχει μια ψηφος $>_i'$ τ.ω. $f(>_1, \dots, >_i', \dots >_n) = b$ και $b >_i a$
(αλλαζει την ψηφο __προς οφελος του__)

- __Π.χ__ (Borda)

voter	vote
1-6	$d >_1 c >_1 a > b$
7-10	$c >_7 d >_7 a >_7 b$
11	$a >_{11} b >_{11} c >_{11} d$

Πραγματικο προφιλ.

$a = 13$
$b = 2$
$c = 25$
$d = 26$

voter	vote
1-6	$d \succeq_1 c \succeq_1 a \succeq_1 b$
7-10	$c \succeq_7 d \succeq_7 a \succeq_7 b$
11	$c \succ'_{11} a \succ'_{11} b \succeq_{11} d$

$a=12$
$b=1$
$c=27$
$d=26$

Χειραγωγηση απο τον ψηφ. 11.

Φιλαληθεια και μονοτονια (Truthfulness/Monotonicity)

Ορισμος: Ενας κανονας ψηφοφ. λεγεται φιλαληθης οταν δεν μπορει να χειραγωγηθει

Ορισμος: Ενας κανονας ψηφοφ. ειναι μονοτονος οταν ισχυει:
αν $f(\succeq_1, \dots, \succ_i, \dots, \succeq_n) = a$ και $f(\succeq'_1, \dots, \succeq'_i, \dots, \succeq'_n) = b \neq a$
τοτε $a \succeq_i b$ και $b \succeq'_i a$

Παρατηρηση: Ενας κανονας ψηφοφοριας ειναι φιλαληθης αν και μονο αν ειναι μονοτονος.

Ερωτησεις:

1. Ειναι ο κανονας της πλειοψηφιας με δυο υποψηφιους μονοτονος;
   Ναι

2. Τι συμβαινει για κανονες με τουλαχιστον τρεις υποψηφιους;

Θεωρημα Gibbard και Satterwaite

Εστω f ενας κανονας κοινωνικης επιλογης που ειναι φιλαληθης και επι του συνολου των τουλαχιστον τριων υποψηφιων. Τοτε, ο f ειναι δικτατορια.

Πολύ δύσκολη.

Διαφάνειες.

- Χρήσιμος συμβολισμός για την απόδειξη.
  - Έστω μια διάταξη > των υποψηφίων του A και S ένα υποσύνολο του A.
  - Συμβολίζουμε με $>^S$ τη νέα διάταξη που προκύπτει από την > βάζοντας τους υποψήφιους του S στην αρχή χωρίς να αλλάξουν οι σχετικές προτιμήσεις τους.

Λύσεις για τη χειραγώγηση:

- Περιορισμένες προτιμήσεις
  - Π.χ., single picked: σε ποια θερμοκρασία να βάλω τον κλιματισμό.

- Χρήματα:
  - Ανάλογα με το τι ψηφίζεις, πληρώνεις!
  - Π.χ, δημοπρασίες.

10/01/2020

SOS Δώστε προφίλ όπου ο νικητής κατά Borda, πλειοψηφία και Veto είναι διαφορετικός κ' μοναδικός.

Plurality : a.

a > c > b
a > c > b
a > b > c
a > b > c
a > b > c
a > b > c
b > > a
b > > a
b > > a
b > > a
c > > a
c > > a
c > > a
c > > a

Απάντηση

2x a > c > b
3x a > b > c
4x c > b > a
2x b > c > a

ply: a
veto: b
Borda: a: 10
b: 11
c: 12

Δώστε προφ. με 5 ψηφ. κ' 3 υποψηφ. έτσι ώστε οι νικητές ως προς πλειοψηφία κ' βέτο να είναι μον. κ' διαφορετικοί.

voter	vote
1.	$a > b > c$
2.	$a > b > c$
3.	$a > b > c$
4.	$b > c > a$
5.	$c > b > a$

Πλειοψηφία + Borda.

$a > b > c$
$a > b > c$
$a > b > c$
$b > c > a$
$b > c > a$

Δικτατορία + Πλειοψηφία.

$b > c > a$
$a > c > b$
$a > b > c$
$a > b > c$

βάζω ό,τι θέλω.

2 υποψηφίους: Πλειοψ. + βέτο. (a, b) $\Longrightarrow$ πλειοψηφία = βέτο = Borda

$\downarrow$

προφ. με a,b

Δικτ. 1 + Πλειοψ.

$b > a$
$a > b$
$a > b$
$a > b$
$a > b$

Φλεβαρης 2019 → Θεμα 3b.

γ) Προφ. 3 υποψηφιους ~~ψηφοφορους~~ ετσι ωστε οι τελικες διαταξεις με βαση τους κανονες της δικτατοριας του πρωτου ψηφοφορου, της πλειοψηφ. κ' του Borda $a>b>c$, $b>c>a$ κ' $c>a>b$, αντιστοιχα.

δικτατ. 1. : $a>b>c$
πλειοψηφια : $b>c>a$
Borda : $c>a>b$.

$\longrightarrow$ $a>b>c$

6:
$b>c>a$
$b>c>a$
$b>c>a$
$b>c>a$
$b>\alpha>c$
$b>\alpha>c$

οπου $b>c$

$\alpha: 15$
$b: 13$.
$c: 17$.

5:
$c>\alpha>b$
$c>a>b$
$c>a>b$
$c>a>b$
$c>a>b$.

4:
$\alpha>c>b$
$\alpha>c>b$
$\alpha>c>b$

Για διαβασμα επιλεγω και υλοποιω 3αδες κανονων:
Δικτ. Πλειοψ. Borda Veto.

Θεωρηστε τον κανονα ψηφοφοριας για υποψηφιους a, b, c. συμφωνα με τον οποιο αν υπαρχει υποψηφιος που αποτελει το μοναδικο νικητη με βαση τον κανονα της πλειοψ. είναι ο νικητης. Αλλιως, νικητης ειναι η πρωτη προτιμηση του ψηφοφορου 1. Δωστε π.χ. που να αποδεικνυει οτι αυτος ο κανονας δεν ειναι μονοτονος.

$a > b > c \longrightarrow b > a > c$

$b > c > a$

$b > a > c$

$c > a > b$

$c > a > b$

$c > b > a$

~~Πραγματικη~~ προτιμηση — χειραγωγηση (ψευτικη προτ.)

1. $a > b > c$
2. $b > c > a \longrightarrow c > b > a$

$b > a > c$ — ή

$c > a > b$

5. $c > b > a \longrightarrow b > c > a$

Σεπτεμβρης 2014.

Θεμα 1

Π $c > b > a \longrightarrow b > c > a$

Μ $a > \ldots$

Μ $a > \ldots$

Μ $a > \ldots$

1) ∄ υποψ. με 75% ⟹ προεδρος χαρουμενος.
∃ υποψ. με 75% που τον ψηφιζει ο προεδρος ⟹ προεδρος χαρουμενος.
∃ υποψ. με 75% που δεν τον ψηφιζει ο προεδρος ⟹ δεν μπορει να αλλαξει το αποτελ. του κανονα ~~εις~~ ψηφοφοριας

Π $\;\; c > b > a$
2. Μ $\;\; b > a > c \longrightarrow a > b > c$.
Μ $\;\; a > \ldots$
Μ $\;\; a > \ldots$

Σεπτεμβρης 2018 Θεμα 3β.

μ.Σ.
1. b
2. a
3. $c > b > a \longrightarrow b > c > a$

Μετοχ. 4. →α $\;\; a$

ή

$b > a > c$

SOS Χειραγωγηση

ΠΑ → ιδιοτητα για κανονες κοινωνικων σχεσεων (που επιστρεφουν διαταξεις)

Δειξτε οτι ο κανονας της πλειοψηφιας δεν εχει την ιδιοτητα ΠΑ

ΠΑ ⇔ το αποτελ. της συγκρισης των a κ' b δεν εξαρτεται απο αλλους υποψηφιους.

$a > b > c$ $\qquad\qquad$ $c > a > b$

$a > b > c$ $\longrightarrow$ $c > a > b$

$b > c > a$ $\qquad\qquad$ $b > c > a$

$\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\downarrow$

$a > b$ $\qquad\qquad\qquad\quad$ $b > a$

~~a>b>c~~

~~a>b>c~~

~~b>c>a~~

Η Δικτατορια εχει την ιδιοτητα IIA

Οικονομική Θεωρία και Αλγόριθμοι

Εξέταση Φεβρουαρίου 2020 – Δ

ΘΕΜΑ 1.

α. (20%) Κατασκευάστε παιχνίδι (δηλαδή, ορίστε έναν πίνακα κέρδους με μη-αρνητικά κέρδη) με δύο παίκτες και δύο στρατηγικές ανά παίκτη τέτοιο ώστε το κόστος της ευστάθειας να είναι 3 και το κόστος της αναρχίας να είναι 8. Ως κοινωνικό κέρδος σε μία κατάσταση θεωρήστε το άθροισμα των κερδών των δύο παικτών.

β. (10%) Κατασκευάστε παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος δυο παικτών με δυο στρατηγικές A, B ανά παίκτη το οποίο έχει μοναδική μικτή ισορροπία την $(p, q) = (3/4, 1/4)$ και καμιά αμιγή ισορροπία. **Υπενθύμιση:** p και q είναι οι πιθανότητες ο παίκτης στήλης και ο παίκτης γραμμής να επιλέξουν τη στρατηγική A, αντίστοιχα.

ΘΕΜΑ 2.

Θεωρήστε ένα παιχνίδι δύο παικτών με δύο στρατηγικές ανά παίκτη το οποίο αναπαριστάται από τον εξής πίνακα κέρδους:

	A	B
A	3 0	0 1
B	2 2	2 0

α. (10%) Βρείτε όλες τις αμιγείς ισορροπίες του παιχνιδιού.

β. (20%) Βρείτε όλες τις μικτές ισορροπίες του παιχνιδιού (εκτός από τις αμιγείς).

ΘΕΜΑ 3.

α. (20%) Οι αποφάσεις μιας εταιρίας τεχνολογίας λαμβάνονται από ένα τριμελές διοικητικό συμβούλιο. Ο κανόνας ψηφοφορίας που χρησιμοποιείται μεταξύ διαφορετικών υποψήφιων επιλογών είναι ο εξής. Αν υπάρχει επιλογή που έχει την ομοφωνία στο συμβούλιο, τότε αυτή είναι και η τελική απόφαση. Αλλιώς, η τελική απόφαση λαμβάνεται με κάποιον κανόνα ψηφοφορίας από τους μετόχους. Δώστε παράδειγμα που δείχνει ότι αυτός ο κανόνας μπορεί να χειραγωγηθεί από τα μέλη του διοικητικού συμβουλίου, ανεξάρτητα από τον κανόνα ψηφοφορίας που χρησιμοποιούν οι μέτοχοι.

β. (10%) Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι ο κανόνας της πλειοψηφίας (ως κανόνας κοινωνικών σχέσεων) δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της ανεξαρτησίας από άσχετους υποψηφίους (IIA).

γ. (20%) Δώστε προφίλ προτιμήσεων με 3 υποψήφιους ~~ψηφοφόρους~~ έτσι ώστε οι τελικές διατάξεις με βάση τους κανόνες της δικτατορίας του πρώτου ψηφοφόρου, του Borda, και του Βέτο να είναι $b \succ a \succ c$, $a \succ b \succ c$, και $c \succ b \succ a$, αντίστοιχα.

Καλή επιτυχία!