ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΑ ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Computer – Ανάλυση

<u>Περιεχόμενα</u>

1 Κεφάλαιο Πρώτο – Εισαγωγή 8

1.1 Ορισμός 8

1.2 Κατηγορίες Σημάτων 8

1.3 Ειδικές Περιπτώσεις Σημάτων 9
1.3.1 Περιοδικά σήματα 9
1.3.2 Ημιτονικά ή Τριγωνομετρικά Σήματα 9
1.3.3 Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα 9
1.3.4 Βηματική Συνάρτηση και Βηματική Ακολουθία 10
1.3.4.1 Βηματική Συνάρτηση 10
1.3.4.2 Βηματική Συνάρτηση με δεξιά ολίσθηση (καθυστέρηση) 10
1.3.4.3 Βηματική Συνάρτηση με αριστερή ολίσθηση (προήγηση) 10
1.3.4.4 Βηματική Ακολουθία 10
1.3.4.5 Βηματική Ακολουθία με δεξιά ολίσθηση 10
1.3.4.6 Βηματική Ακολουθία με αριστερή ολίσθηση 10
1.3.5 Κρουστική Συνάρτηση και Κρουστική Ακολουθία 11
1.3.5.1 Κρουστική Συνάρτηση 11
1.3.5.2 Κρουστική Συνάρτηση με δεξιά ολίσθηση (καθυστέρηση) 11
1.3.5.3 Κρουστική Συνάρτηση με αριστερή ολίσθηση 11
1.3.5.4 Ιδιότητες Κρουστικής Συνάρτησης μέσα σε Ολοκλήρωμα 12
1.3.5.5 Παραδείγματα με Ιδιότητες Κρουστικής Συνάρτησης σε Ολοκλήρωμα 13
1.3.5.6 Κρουστική Ακολουθία ή Ακολουθία Kronecker 14
1.3.5.7 Κρουστική Ακολουθία με Δεξιά Ολίσθηση 14
1.3.5.8 Κρουστική Ακολουθία με Αριστερή Ολίσθηση 14
1.3.6 Συνάρτηση Προσήμου 14
1.3.7 Συνάρτηση Δειγματοληψίας 14

1.4 Κατηγορίες Συστημάτων 15
1.4.1 Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 15
1.4.1.1 Κατηγορίες Συστημάτων Συνεχούς Χρόνου 15

1.5 Συνέλιξη Σημάτων 16
1.5.1 Συνέλιξη Σημάτων Συνεχούς Χρόνου 16
1.5.2 Ιδιότητες Συνέλιξης 16
1.5.3 Παραδείγματα με Ιδιότητες Συνέλιξης 17
1.5.4 Κρουστική και Βηματική Απόκριση 18
1.5.5 Συστήματα Διακριτού Χρόνου 18
1.5.5.1 Κατηγορίες Συστημάτων Διακριτού Χρόνου 18
1.5.6 Συνέλιξη Σημάτων Διακριτού Χρόνου 18

1.6 Ειδική Κατηγορία: Συστήματα Γραμμικά και Χρονικά Αμετάβλητα (ΓΧΑ) 18

1.7 Λύσεις Ασκήσεων 1ου Σετ 20
1.7.1 Άσκηση 1.2 20
1.7.2 Άσκηση 1.3 20
1.7.3 Άσκηση 1.4 21
1.7.4 Άσκηση 1.5 22
1.7.5 Άσκηση 1.6 24
1.7.6 Άσκηση 1.7 25
1.7.7 Άσκηση 1.9 27
1.7.8 Άσκηση 1.10 28

1.8 Θέματα και Ασκήσεις στην Εισαγωγή 29
1.8.1 Θέμα 2β Άτυπη Μάρτιος 2012 29
1.8.2 Θέμα 2β Άτυπη Σεπτέμβριος 2010 29
1.8.3 Θέμα 1 Ιούνιος 2010 και Ιανουάριος 2013 33
1.8.4 Θέμα 1 Σεπτέμβριος 2013 34
1.8.5 Θέμα 1 Φεβρουάριος 2014 35
1.8.6 Θέμα 1β Ιούνιος 2010 36
1.8.7 Άσκηση Φροντιστηρίου 2014 36
1.8.8 Άσκηση με χαρακτηρισμό συστημάτων 37
1.8.9 Άσκηση 1 από Project 2014 37
1.8.10 Άσκηση 7 από Project 2014 38

2 Δεύτερο Κεφάλαιο – Μετασχηματισμός Fourier και Σειρές Fourier ... 40

2.1 Ορισμός μετασχηματισμού Fourier ... 40

2.2 Συμβολισμοί μετασχηματισμού Fourier ... 40

2.3 Ορισμός αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier ... 40

2.4 Παραδείγματα υπολογισμού μετασχηματισμού Fourier Βασικών Σημάτων ... 40

2.5 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier ... 41
2.5.1 Ιδιότητα Γραμμικότητας ... 41
2.5.1.1 1ο Παράδειγμα Γραμμικότητας ... 41
2.5.1.2 2ο Παράδειγμα Γραμμικότητας ... 42
2.5.2 Χρονική Ολίσθηση ... 42
2.5.2.1 1ο Παράδειγμα Χρονικής Ολίσθησης ... 42
2.5.2.2 2ο Παράδειγμα Χρονικής Ολίσθησης ... 42
2.5.3 Ολίσθηση στη Συχνότητα ... 43
2.5.3.1 1ο Παράδειγμα Συχνοτικής Ολίσθησης ... 43
2.5.3.2 2ο Παράδειγμα Συχνοτικής Ολίσθησης ... 43
2.5.4 Διαμόρφωση ... 43
2.5.4.1 Παράδειγμα Διαμόρφωσης ... 44
2.5.5 Κλιμάκωση ... 44
2.5.5.1 Παράδειγμα Κλιμάκωσης ... 45
2.5.6 Δυϊκότητα MF ... 45
2.5.6.1 1ο Παράδειγμα Δυϊκότητας ... 46
2.5.6.2 2ο Παράδειγμα Δυϊκότητας ... 46
2.5.7 Παραγώγιση στο Χρόνο ... 46
2.5.7.1 Παράδειγμα Παραγώγισης στο Χρόνο ... 46
2.5.8 Παραγώγιση στη (Μιγαδική) Συχνότητα ... 46
2.5.8.1 1ο Παράδειγμα Παραγώγισης στη μιγαδική Συχνότητα ... 46
2.5.8.2 2ο Παράδειγμα Παραγώγισης στη Μιγαδική Συχνότητα ... 47
2.5.9 Θεώρημα Συνέλιξης στο Χρόνο ... 47
2.5.9.1 Παράδειγμα Συνέλιξης στο Χρόνο ... 47
2.5.10 Θεώρημα Συνέλιξης στη Συχνότητα ... 47
2.5.10.1 Παράδειγμα Συνέλιξης στη Συχνότητα ... 47

2.6 Γνωστοί Μετασχηματισμοί Fourier ... 49

2.7 Λύσεις Ασκήσεων 2ου Σετ ... 50
2.7.1 Άσκηση 1.1 ... 50
2.7.2 Άσκηση 1.2 ... 51
2.7.3 Άσκηση 1.3 ... 53
2.7.4 Άσκηση 1.4 ... 55
2.7.5 Άσκηση 1.5 ... 56
2.7.6 Άσκηση 1.6 ... 58
2.7.7 Άσκηση 1.7 ... 62

2.8 Υπολογισμός Εξόδου ΓΧΑ Συστημάτων όταν γνωρίζουμε την είσοδο και την Απόκριση Συχνότητας ... 64
2.8.1 Άσκηση 1.8 ... 65
2.8.2 Άσκηση 1.9 ... 67
2.8.3 Άσκηση 1.10 ... 68
2.8.4 Άσκηση 1.11 ... 69

2.9 Γενική Θεωρία για Σειρές Fourier ... 71
2.9.1 Άσκηση 1.13 ... 72
2.9.2 Άσκηση 1.14 ... 75
2.9.3 Άσκηση 1.15 ... 76
2.9.4 Ασκήσεις και Θέματα με Σειρές Fourier ... 82
2.9.4.1 Θέμα 3 Ιούνιος 2007 και Ιούνιος 2009 ... 82
2.9.4.2 Θέμα 2 Φεβρουάριος 2003 και Σεπτέμβριος 2004 ... 84
2.9.4.3 Φροντιστήριο 2012 ... 86
2.9.4.4 Θέμα 3 Ιούνιος 2011 ... 88
2.9.4.5 Άσκηση 8 με σειρά Fourier - Φροντιστήριο 2012 ... 91
2.9.4.6 Άσκηση Βιβλίου με σειρά Fourier ... 92
2.9.4.7 Θέμα 3 Ιούνιος 2005 και Ιούνιος 2009 ... 93
2.9.4.8 Θέμα 2 Ιούνιος 2012 ... 94
2.9.5 Άσκηση με σειρές Fourier Φροντιστήριο 2013 ... 97
2.9.6 Θέμα 2 Σεπτέμβριος 2013 ... 99
2.9.7 Θέμα 3β Ιούνιος 2013 ... 100
2.9.8 Θέμα 1β Φεβρουάριος 2011-Άτυπη ... 102

2.9.9 Θέμα 2 Φεβρουάριος 2015 ... 106

2.10 Ασκήσεις με Φίλτρα ... 109
2.10.1 Θέμα 5 Φεβρουάριος 2004 ... 109
2.10.2 Είσοδος και Έξοδος Φίλτρου ίδιο σήμα ... 110
2.10.3 Θέμα 1 Ιούνιος 2012 ... 111
2.10.4 Άτυπη Φεβρουάριος 2013 ... 114
2.10.5 Θέμα 1 Ιούνιος 2011 ... 116
2.10.6 Άτυπη Μάρτιος 2012 ... 118
2.10.7 Θέμα 1 Μάρτιος 2010 ... 120
2.10.8 Θέμα 1 – Ιούνιος 2013 ... 121
2.10.9 Θέμα 1β – Σεπτέμβριος 2013 ... 122

2.11 Ασκήσεις με Ιδιότητες MF ... 124
2.11.1 Θέμα 2 Σεπτέμβριος 2010 ... 124
2.11.2 Θέμα 1β Σεπτέμβριος 2012 ... 125
2.11.3 Θέμα 2 Ιούνιος 2012 ... 125
2.11.4 Άσκηση με ιδιότητες MF ... 127
2.11.5 Άσκηση με ιδιότητα παραγώγισης MF ... 129
2.11.6 Θέμα 2 Σεπτέμβριος 2002 ... 129
2.11.7 Άσκηση 8 με ιδιότητες MF -Θέμα 2 Ιούνιος 2013 ... 130
2.11.8 Άσκηση 5 στο Project 2014 ... 132
2.11.9 Άσκηση 1 Φροντιστήριο 2013 ... 134
2.11.10 Άσκηση τελευταίου Φροντιστηρίου 2014 ... 134
2.11.11 Θέμα 1 Ιούνιος 2014 ... 135
2.11.12 Θέμα 3 Ιούνιος 2014 ... 137
2.11.13 Θέμα 2 Σεπτέμβριος 2014 ... 139

3 Τρίτο Κεφάλαιο – Μετασχηματισμός Laplace ... 141

3.1 Συμβολισμοί μετασχηματισμού Laplace ... 141

3.2 Περιοχή Σύγκλισης μετασχηματισμού Laplace ... 141

3.3 Διαφορές Μετασχηματισμών Fourier και Laplace ... 142

3.4 Παραδείγματα Υπολογισμού Μετασχηματισμού Laplace Βασικών Σημάτων ... 142

3.5 Χαρακτηριστικά Μετασχηματισμού Laplace ... 143

3.6 Αντιαιτιατά Σήματα ... 144

3.7 Πίνακας Γνωστών Μετασχηματισμών Laplace ... 145

3.8 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace ... 146
3.8.1 Ιδιότητα Γραμμικότητας (Αρχή Υπέρθεσης) ... 146
3.8.1.1 1ο Παράδειγμα Ιδιότητας Γραμμικότητας ... 146
3.8.1.2 2ο Παράδειγμα Ιδιότητας Γραμμικότητας ... 146
3.8.2 Ιδιότητα Χρονικής Ολίσθησης ... 147
3.8.2.1 1ο Παράδειγμα Χρονικής Ολίσθησης ... 147
3.8.2.2 2ο Παράδειγμα Χρονικής Ολίσθησης ... 147
3.8.3 Ολίσθηση στη Συχνότητα ... 147
3.8.3.1 1ο Παράδειγμα Συχνοτικής Ολίσθησης ... 148
3.8.3.2 2ο Παράδειγμα Συχνοτικής Ολίσθησης ... 148
3.8.4 Κλιμάκωση στο Χρόνο ... 148
3.8.5 Παραγώγιση στο Χρόνο ... 148
3.8.5.1 1ο Παράδειγμα Παραγώγισης στο Χρόνο ... 149
3.8.5.2 2ο Παράδειγμα Παραγώγισης στο Χρόνο ... 149
3.8.6 Παραγώγιση στη Μιγαδική Συχνότητα ... 149
3.8.6.1 1ο Παράδειγμα Παραγώγισης στη Μιγαδική Συχνότητα ... 149
3.8.6.2 2ο Παράδειγμα Παραγώγισης στη Μιγαδική Συχνότητα ... 150
3.8.7 Μετασχηματισμός Laplace Ολοκληρώματος ... 150
3.8.8 Θεώρημα Αρχικής τιμής (Θ.Α.Τ.) ... 150
3.8.8.1 1ο Παράδειγμα στο Θεώρημα Αρχικής Τιμής (Θ.Α.Τ.) ... 150
3.8.8.2 2ο Παράδειγμα στο Θεώρημα Αρχικής Τιμής (Θ.Α.Τ.) ... 150
3.8.9 Θεώρημα Τελικής τιμής ... 151
3.8.9.1 Παράδειγμα στο Θεώρημα Τελικής Τιμής (Θ.Τ.Τ.) ... 151
3.8.10 Ιδιότητα Συνέλιξης στο Χρόνο ... 151
3.8.10.1 Παράδειγμα Ιδιότητας Συνέλιξης στο Χρόνο ... 151

3.9 Περιπτώσεις Ανάλυσης σε Απλά Κλάσματα για υπολογισμό Αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace και Fourier ... 152

3.10 Λύσεις Ασκήσεων 3ου Σετ 153
3.10.1 Άσκηση 1.1 153
3.10.2 Άσκηση 1.2 155
3.10.3 Άσκηση 1.3 157
3.10.4 Άσκηση 1.4 159
3.10.5 Άσκηση 1.5 162
3.10.6 Άσκηση 1.6 163
3.10.7 Άσκηση 1.7 165
3.10.8 Άσκηση 1.8 167

3.11 Ασκήσεις και Θέματα με Μετασχηματισμό Laplace 169
3.11.1 Άσκηση με Θεώρημα Συνέλιξης και Ανάλυσης σε απλά κλάσματα 169
3.11.2 Θέμα με μετασχηματισμό Laplace και Περιοχή Σύγκλισης-Θέμα 3 Σεπτέμβριος 2010 170
3.11.3 Θέμα με μετασχηματισμό Laplace και Περιοχή Σύγκλισης-Θέμα 3 Σεπτέμβριος 2013 173
3.11.4 Θέμα με μετασχηματισμό Laplace και μετασχηματισμό Fourier –Ιούνιος 2010 175
3.11.5 Άσκηση με μετασχηματισμό Laplace με σειρά Fourier 178
3.11.6 Άσκηση 2 με μετασχηματισμό Laplace με σειρά Fourier - Θέμα 2 Φεβρουάριος 2014 182
3.11.7 Έξοδος ΓΧΑ συστήματος με είσοδο ιδιοσυναρτήσεις και γνωστή τη συνάρτηση μεταφοράς H(s) 185
3.11.8 Άσκηση με μετασχηματισμό Laplace και ιδιότητες 187
3.11.9 Άσκηση με μετασχηματισμό Laplace και διαφορική 187
3.11.10 Άσκηση με μετασχηματισμό Laplace και περιοχή σύγκλισης 187
3.11.11 Άσκηση με μετασχηματισμό Laplace ολοκληρώματος-Φροντιστήριο 2013 188
3.11.12 Μετατροπή από μετασχηματισμό Laplace σε μετασχηματισμό Fourier και αντίστροφα 189
3.11.12.1 Μετατροπή από Μετασχηματισμό Laplace σε Μετασχηματισμό Fourier 189
3.11.12.2 Άσκηση Φροντιστηρίου 2012 με μετατροπή από μετασχηματισμό Laplace σε μετασχηματισμό Fourier 190
3.11.12.3 Μετατροπή από Μετασχηματισμό Fourier σε Μετασχηματισμό Laplace 191
3.11.12.4 Άσκηση Μετατροπής από μετασχηματισμό Fourier σε μετασχηματισμό Laplace 191
3.11.13 Θέμα 3 Ιούνιος 2012 με μετατροπή από μετασχηματισμό Laplace σε Fourier 191
3.11.14 Θέμα 3-Ιούνιος 2013 193
3.11.15 Άσκηση με Επίλυση Διαφορικής με μετασχηματισμό Laplace 195
3.11.16 Επιπλέον Άσκηση με Επίλυση Διαφορικής σε μετασχηματισμό Laplace 196
3.11.17 Τελευταίο Φροντιστήριο 2013 με ΦΕΦΕ ευστάθεια 197
3.11.18 Έλεγχος ΦΕΦΕ Ευστάθειας σε συνάρτηση μεταφοράς με σταθερό όρο 198
3.11.19 Τελευταίο Φροντιστήριο 2013 με Διαφορική 199
3.11.20 Θέμα 3 –Ιούλιος 2008 και Φροντιστήριο 2013 199
3.11.21 Θέμα με Κύκλωμα 201
3.11.22 Θέμα 2 Ιούνιος 2014 202
3.11.23 Θέμα 1 Σεπτέμβριος 2014 204
3.11.24 Θέμα 1 Φεβρουάριος 2015 205

4 Τέταρτο Κεφάλαιο – Καταστατικές Εξισώσεις 206

4.1 Καταστατικές ή Δυναμικές Εξισώσεις 206

4.2 Βασικά μεγέθη Καταστατικών Εξισώσεων 206

4.3 Μητρώο Ελεγξιμότητας και Παρατηρησιμότητας 210
4.3.1 Παραδείγματα με Μητρώα Ελεγξιμότητας και Παρατηρησιμότητας 210
4.3.1.1 Άσκηση 1 με Μητρώα Ελεγξιμότητας και Παρατηρησιμότητας 210
4.3.1.2 Άσκηση 2 με Μητρώα Ελεγξιμότητας και Παρατηρησιμότητας 210

4.4 Ταυτόχρονη Ελεγξιμότητα και Παρατηρησιμότητα 211
4.4.1 Παραδείγματα στην Ταυτόχρονη Ελεγξιμότητα και Παρατηρησιμότητα 211
4.4.1.1 Άσκηση 1 στην ταυτόχρονη Ελεγξιμότητα και Παρατηρησιμότητα 211

4.5 Ευστάθεια ΓΧΑ Συστημάτων 212
4.5.1 Υπολογισμών Ιδιοτιμών Μητρώου Α 212
4.5.2 Σύγκριση Ασυμπτωτικής και ΦΕΦΕ (BIBO) Ευστάθειας 212
4.5.2.1 Άσκηση 1 σε Ασυμπτωτική Ευστάθεια 213
4.5.2.2 Άσκηση 2 σε Ασυμπτωτική Ευστάθεια 214

4.6 Σταθεροποίηση Δυναμικών Συστημάτων-Ανάδραση 215
4.6.1 Άσκηση 1 σε Σταθεροποίηση Συστήματος 215

4.7 Θέμα 4 Ιούνιος 2009 216

4.8 Θέμα 4 Ιούνιος 2011 και Ιούνιος 2014 222

4.9 Θέμα 4 Ιούνιος 2012 223

4.10 Θέμα 4 Νοέμβριος 2010 Άτυπη 224

4.11 Θέμα 4 Ιούνιος 2010 ... 224
4.12 Θέμα 4 Σεπτέμβριος 2010 ... 226
4.13 Θέμα Άτυπης Μάρτιος 2010 ... 228
4.14 1η Άσκηση με Κύκλωμα ... 229
4.15 2η Άσκηση με Κύκλωμα ... 230
4.16 Θέμα 4 Ιούνιος 2013 ... 231
4.17 Θέμα 4 Σεπτέμβριος 2013 ... 233
4.18 Θέμα 4 Σεπτέμβριος 2009 ... 235
4.19 Θέμα 4 Ιούλιος 2008 ... 237
4.20 Χαρακτηρισμός Εξόδου ... 240
4.21 Θέμα 4 Φεβρουάριος 2014 ... 241
4.22 Θέμα 4 Σεπτέμβριος 2014 ... 242
4.23 Θέμα 3 Φεβρουάριος 2015 ... Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.

5 Πέμπτο Κεφάλαιο – Μετασχηματισμός Z ... 243
5.1 Συμβολισμοί μετασχηματισμού Z ... 243
5.2 Ομοιότητες και Διαφορές Μετασχηματισμών Laplace και Z ... 243
5.3 Περιοχή Σύγκλισης μετασχηματισμού Z ... 243
5.4 Παραδείγματα Υπολογισμού Μετασχηματισμού Z Βασικών Σημάτων ... 246
5.5 Χαρακτηριστικά Μετασχηματισμού Z ... 247
5.6 Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT) ... 248
5.6.1 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου ... 248
5.7 Αντιαιτιατά Σήματα ... 248
5.8 Πίνακας Γνωστών Μετασχηματισμών Z ... 249
5.9 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z ... 250
5.9.1 Γραμμικότητα ... 250
5.9.1.1 Παράδειγμα Γραμμικότητας ... 250
5.9.2 Δεξιά Χρονική Ολίσθηση (Καθυστέρηση) ... 250
5.9.2.1 1ο Παράδειγμα Δεξιάς Χρονικής Ολίσθησης ... 250
5.9.2.2 2ο Παράδειγμα Δεξιάς Χρονικής Ολίσθησης ... 250
5.9.3 Αριστερή Χρονική Ολίσθηση (Προήγηση) ... 251
5.9.3.1 Παράδειγμα Αριστερής Χρονικής Ολίσθησης ... 251
5.9.4 Παραγώγιση στη μιγαδική συχνότητα ... 251
5.9.4.1 1ο Παράδειγμα Παραγώγισης στη μιγαδική συχνότητα ... 251
5.9.4.2 2ο Παράδειγμα Παραγώγισης στη μιγαδική συχνότητα ... 251
5.9.5 Ιδιότητα Συνέλιξης στο Χρόνο ... 252
5.9.5.1 Παράδειγμα Συνέλιξης στο Χρόνο ... 252
5.9.6 Θεώρημα Αρχικής Τιμής ... 252
5.9.7 Θεώρημα Τελικής Τιμής ... 252
5.9.8 Γενικευμένο Θεώρημα Αρχικής Τιμής ... 252
5.10 Λύσεις Ασκήσεων 5ου Σετ ... 253
5.10.1 Άσκηση 1.2 ... 253
5.10.2 Άσκηση 1.3 ... 254
5.10.3 Άσκηση 1.4 ... 255
5.10.4 Άσκηση 1.5 ... 256
5.10.5 Άσκηση 1.6 ... 259
5.10.6 Άσκηση 1.7 ... 259
5.10.7 Άσκηση 1.9 ... 261
5.10.8 Άσκηση 1.10 ... 263
5.10.9 Άσκηση 1.11 ... 265
5.10.10 Άσκηση 1.12 ... 265
5.10.11 Άσκηση 1.13 ... 266
5.10.12 Άσκηση 1.14 ... 267
5.10.13 Έξοδος ΓΧΑ Συστημάτων Διακριτού και Συνεχούς Χρόνου ... 270
5.10.13.1 Έξοδος ΓΧΑ Συστημάτων από την Απόκριση Συχνότητας ... 270

5.10.13.2 Έξοδος ΓΧΑ Συστημάτων από την Συνάρτηση Μεταφοράς 270
5.10.14 Άσκηση 1.16 271
5.10.15 Άσκηση 1.17 271

5.11 Ασκήσεις και Θέματα με Μετασχηματισμό Ζ 273
5.11.1 Άσκηση με Έλεγχο Αιτιατότητας και ΦΕΦΕ Ευστάθειας Συστήματος 273
5.11.2 Άσκηση Υπολογισμού Κρουστικής Απόκρισης από Βηματική Απόκριση 274
5.11.3 Θέμα 2 – Ιούνιος 2011 275
5.11.4 Θέμα 3 Ιούνιος 2012 και Θέμα 3 Φεβρουάριος 2014 276
5.11.5 Θέμα 1γ – Ιούνιος 2010 276
5.11.6 Θέμα 1 – Ιούνιος 2008 280
5.11.7 Θέμα 2 – Ιούνιος 2002 282
5.11.8 Θέμα 3 – Σεπτέμβριος 2004 282
5.11.9 Θέμα 2 – Φεβρουαρίου 2004 285
5.11.10 Θέμα 2 – Σεπτέμβριος 2002 287
5.11.11 Θέμα 2 – Φεβρουάριος 2005 290
5.11.12 Θέμα 1 – Σεπτέμβριος 2009 291
5.11.13 Θέμα 1 –Ιούνιος 2007 και Ιούνιος 2009 292
5.11.14 Άσκηση με ΦΕΦΕ Ευστάθεια και κρουστική απόκριση 293
5.11.15 Θέμα 2 Ιούνιος 2007 294
5.11.16 Θέμα 1β Ιούνιος 2006 294
5.11.17 Θέμα 1-Σεπτέμβριος 2011 295
5.11.18 Τελευταίο Φροντιστήριο 2013 στο μετασχηματισμό Ζ 295
5.11.19 Θέμα 3a Άτυπη Φεβρουάριος 2013 296
5.11.20 Θέμα 3β – Ιούνιος 2013 297
5.11.21 Θέμα 3 Σεπτέμβριος 2014 299

6 Σημειώσεις Μαθήματος και Πιθανές Ερωτήσεις 301

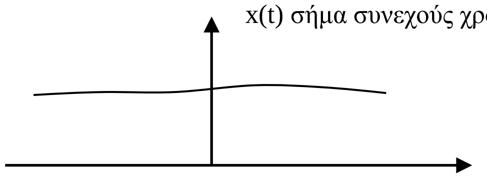
1 Κεφάλαιο Πρώτο – Εισαγωγή

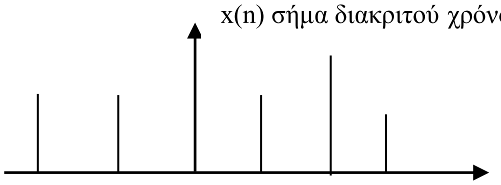
1.1 Ορισμός

Σήμα είναι μια φυσική ποσότητα η οποία μεταβάλλεται στο χρόνο. Πιο συγκεκριμένα ένα σήμα είναι μια συνάρτηση ή ακολουθία μιας ή περισσότερων μεταβλητών (π.χ. χρόνου, χώρου) που περιγράφει τη μεταβολή ενός φυσικού φαινομένου.

1.2 Κατηγορίες Σημάτων

Έχουμε δύο κατηγορίες σημάτων: **Τα αναλογικά ή σήματα συνεχούς χρόνου x(t) που η παράμετρος του χρόνου t λαμβάνει τιμές από το σύνολο R και τα σήματα διακριτού χρόνου ή ψηφιακά σήματα ή ακολουθίες x(n)** που η παράμετρος του χρόνου n λαμβάνει τιμές από το σύνολο N.





ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ	
Περίοδος (σε sec)	T
Κυκλική Συχνότητα (σε rad)	Ω
Γωνιακή Συχνότητα (σε Hz)	f
Σχέση Κυκλικής και Γωνιακής Συχνότητας	Ω=2πf
Σχέση συχνότητας και περιόδου	$f = \frac{1}{T}$ ή $T = \frac{2\pi}{\Omega}$
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ	
Περίοδος (καθαρός αριθμός)	N
Κυκλική Συχνότητα (καθαρός αριθμός)	$\omega \in [-\pi, \pi]$
Γωνιακή Συχνότητα (καθαρός αριθμός)	$\lambda \in [-1/2, 1/2]$
Σχέση Κυκλικής και Γωνιακής Συχνότητας	ω=2πλ
Σχέση συχνότητας και περιόδου	$\lambda = \frac{1}{N}$ ή $N = \frac{2\pi}{\omega}$
ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ	
$\omega = \Omega \bullet T_s$ ή $\omega = \frac{\Omega}{f_s}$ ή $\lambda = \frac{f}{f_s}$	

ΤΥΠΟΙ EULER	
$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \bullet \sin\varphi$	$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$
$e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j \bullet \sin\varphi$	$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$

Βασικοί Τριγωνομετρικοί Τύποι
sin(a)•sin(b)= $\frac{1}{2}$ cos(a-b)- $\frac{1}{2}$ cos(a+b)
cos(a)•cos(b)= $\frac{1}{2}$ cos(a+b)+ $\frac{1}{2}$ cos(a-b)
sin(a)•cos(b)= $\frac{1}{2}$ sin(a+b)+ $\frac{1}{2}$ sin(a-b)
cos(a+b)=cos(a)•cos(b)-sin(a)•sin(b)
cos(a-b)=cos(a)•cos(b)+sin(a)•sin(b)
sin(a+b)=sin(a)•cos(b)+sin(b)•cos(a)
sin(a-b)=sin(a)•cos(b)-sin(b)•cos(a)

Γνωστά cos και sin	
cos(0)=1, cos(2π)=1, cos(2kπ)=1	sin(0)=0, sin(2π)=0, sin(2kπ)=0
cos(π)=-1, cos(3π)=-1	sin(π)=0, sin(3π)=0
cos(π/2)=0, cos(3π/2)=0	sin(π/2)=1, cos(3π/2)=-1
cos(x+2kπ)=cos(x)	sin(x+2kπ)=sin(x)
cos(π-x)=-cos(x), cos(π+x)=-cos(x)	sin(π-x)=sin(x), sin(π+x)=-sin(x)
cos(-x)=cos(x). Το cos είναι άρτια συνάρτηση	sin(-x)=-sin(x). Το sin είναι περιττή συνάρτηση

1.3 Ειδικές Περιπτώσεις Σημάτων

1.3.1 Περιοδικά σήματα

- Ένα σήμα **συνεχούς χρόνου ονομάζεται περιοδικό** αν ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:
  x(t)=x(t+k•T) όπου Τ η περίοδος του σήματος και k = ±1, ±2,…

- Ένα σήμα **διακριτού χρόνου ονομάζεται περιοδικό** αν ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:
  x(n)=x(n+k•N) όπου N η περίοδος του σήματος k = ±1, ±2,…

1.3.2 Ημιτονικά ή Τριγωνομετρικά Σήματα

Ημιτονικά σήματα Συνεχούς Χρόνου	**Ημιτονικά Σήματα Διακριτού Χρόνου**
A•cos(Ω•t) και A•sin(Ω•t)	A•cos(ω•n) και A•sin(ω•n)
A•cos(Ω•t+φ) και A•sin(Ω•t+φ)	A•cos(ω•n+φ) και A•sin(ω•n+φ)
A•cos(2πft) και A•sin(2πft)	A•cos(2πλn) και A•sin(2πλn)
A•cos(2πft+φ) και A•sin(2πft+φ)	A•cos(2πλn+φ) και A•sin(2πλn+φ)

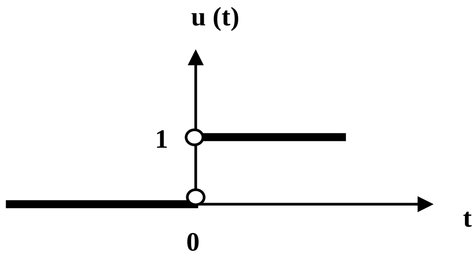
1.3.3 Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα

Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα Συνεχούς χρόνου	**Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα Διακριτού χρόνου**
$A \bullet e^{j\Omega t}$	$A \bullet e^{j\omega n}$
$A \bullet e^{j(\Omega t+\varphi)}$	$A \bullet e^{j(\omega n+\varphi)}$
$A \bullet e^{j2\pi ft}$	$A \bullet e^{j2\pi\lambda n}$
$A \bullet e^{j(2\pi ft+\varphi)}$	$A \bullet e^{j(2\pi\lambda n+\varphi)}$

1.3.4 Βηματική Συνάρτηση και Βηματική Ακολουθία

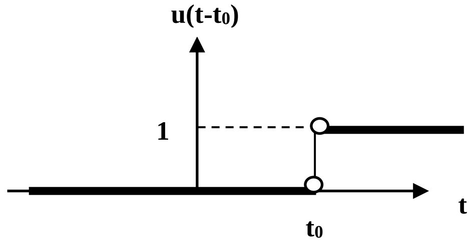
1.3.4.1 Βηματική Συνάρτηση

$$u(t)=\begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \\ \delta\varepsilon\nu\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota & t=0 \end{cases}$$



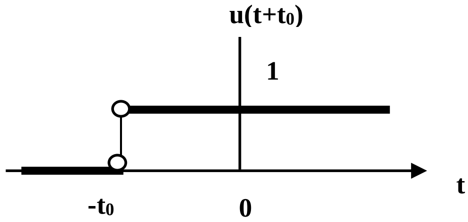
1.3.4.2 Βηματική Συνάρτηση με δεξιά ολίσθηση (καθυστέρηση)

$$u(t-t_0)=\begin{cases} 1 & t>t_0 \\ 0 & t<t_0 \\ \delta\varepsilon\nu\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota & t=t_0 \end{cases}$$



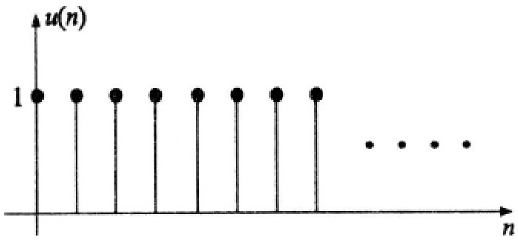
1.3.4.3 Βηματική Συνάρτηση με αριστερή ολίσθηση (προήγηση)

$$u(t+t_0)=\begin{cases} 1 & t>-t_0 \\ 0 & t<-t_0 \\ \delta\varepsilon\nu\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota & t=-t_0 \end{cases}$$



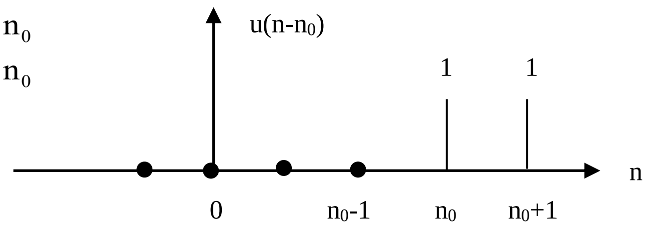
1.3.4.4 Βηματική Ακολουθία

$$u(n)=\begin{cases} 1 & n\geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$$



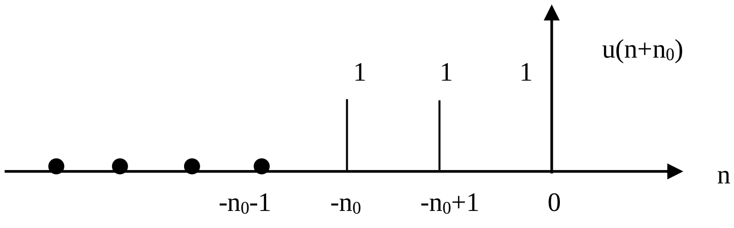
1.3.4.5 Βηματική Ακολουθία με δεξιά ολίσθηση

$$u(n-n_0)=\begin{cases} 1 & n\geq n_0 \\ 0 & n<n_0 \end{cases}$$



1.3.4.6 Βηματική Ακολουθία με αριστερή ολίσθηση

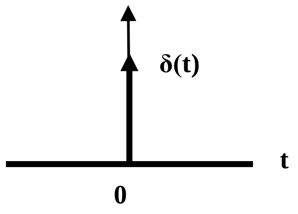
$$u(n+n_0)=\begin{cases} 1 & n\geq -n_0 \\ 0 & n<-n_0 \end{cases}$$



1.3.5 Κρουστική Συνάρτηση και Κρουστική Ακολουθία

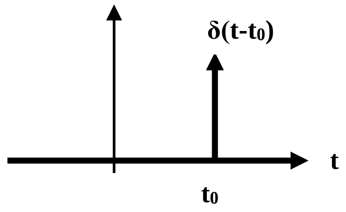
1.3.5.1 Κρουστική Συνάρτηση

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} = \dot{u}(t) = \begin{cases} \uparrow & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



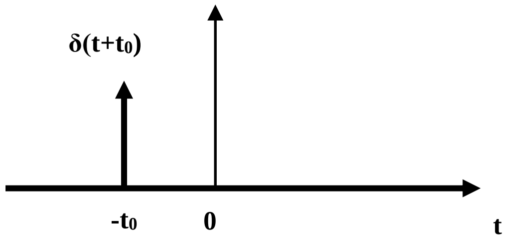
1.3.5.2 Κρουστική Συνάρτηση με δεξιά ολίσθηση (καθυστέρηση)

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \uparrow & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}$$



1.3.5.3 Κρουστική Συνάρτηση με αριστερή ολίσθηση

$$\delta(t + t_0) = \begin{cases} \uparrow & t = -t_0 \\ 0 & t \neq -t_0 \end{cases}$$



1.3.5.4 Ιδιότητες Κρουστικής Συνάρτησης μέσα σε Ολοκλήρωμα

i. $\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}=\dot{u}(t)=u'(t)$. **Η κρουστική συνάρτηση είναι η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης**

ii. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\bullet\varphi(t)\bullet dt=\varphi(t_0)$ →Ιδιότητα **δεξιάς ολίσθησης κατά t_0**

iii. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t+t_0)\bullet\varphi(t)dt=\varphi(-t_0)$ →Ιδιότητα **αριστερής ολίσθησης κατά t_0**

iv. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\bullet\varphi(t)dt=\varphi(0)$ →Ιδιότητα μηδενικής **ολίσθησης**

v. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$ →Ειδική περίπτωση ολίσθησης με φ(t)=1

vi. $\int_{\alpha}^{b}\delta(t-t_0)\bullet\varphi(t)dt=\left\langle\begin{matrix}\varphi(t_0) & t_0\in(\alpha,\beta)\\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{matrix}\right.$ →Ιδιότητα **Αριστερής Ολίσθησης με πεπερασμένα όρια**

vii. $\int_{\alpha}^{b}\delta(t+t_0)\bullet\varphi(t)dt=\left\langle\begin{matrix}\varphi(-t_0) & -t_0\in(\alpha,\beta)\\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{matrix}\right.$ →Ιδιότητα **Δεξιάς Ολίσθησης με πεπερασμένα όρια**

viii. $\int_{\alpha}^{b}\delta(t)\bullet\varphi(t)dt=\left\langle\begin{matrix}\varphi(0) & 0\in(\alpha,\beta)\\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{matrix}\right.$ →Ιδιότητα **Μηδενικής Ολίσθησης με πεπερασμένα όρια**

ix. $\delta(\alpha t)=\frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$ →Ιδιότητα Κλιμάκωσης της δ(t) όταν δεν βρίσκεται μέσα σε ολοκλήρωμα

x. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\alpha t-t_0)\varphi(t)dt=\frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\varphi\left(\frac{t}{\alpha}\right)dt$ → **Ιδιότητα Κλιμάκωσης με δεξιά ολίσθηση**. Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\varphi\left(\frac{t}{\alpha}\right)dt$ υπολογίζεται με **ιδιότητα δεξιάς ολίσθησης κατά t_0**

xi. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\alpha t+t_0)\bullet\varphi(t)\bullet dt=\frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t+t_0)\varphi\left(\frac{t}{\alpha}\right)dt$ →**Ιδιότητα Κλιμάκωσης με αριστερή ολίσθηση**. Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t+t_0)\varphi\left(\frac{t}{\alpha}\right)dt$ υπολογίζεται με ιδιότητα **αριστερής ολίσθησης κατά t_0**

xii. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\alpha t)\bullet\varphi(t)\bullet dt=\frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\varphi\left(\frac{t}{\alpha}\right)dt$ → Ιδιότητα Κλιμάκωσης **χωρίς ολίσθηση**. Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\varphi\left(\frac{t}{\alpha}\right)dt$ υπολογίζεται στη συνέχεια με ολίσθηση μηδέν

xiii. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t-t_0)\bullet\varphi(t)\bullet dt=(-1)^n\bullet\varphi^{(n)}(t_0)$ →Ιδιότητα **παραγώγισης με δεξιά ολίσθηση**. Πρώτα παραγωγίζουμε τη συνάρτηση φ(t) n φορές και μετά θέτουμε όπου t το t_0

xiv. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t+t_0)\bullet\varphi(t)\bullet dt=(-1)^n\bullet\varphi^{(n)}(-t_0)$ →Ιδιότητα **παραγώγισης με αριστερή ολίσθηση**. Πρώτα παραγωγίζουμε τη συνάρτηση φ(t) n φορές και μετά θέτουμε όπου t το $-t_0$

xv. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t)\bullet\varphi(t)\bullet dt=(-1)^n\bullet\varphi^{(n)}(0)$ →**Ιδιότητα παραγώγισης με ολίσθηση μηδέν**. Πρώτα παραγωγίζουμε τη συνάρτηση φ(t) n φορές και μετά θέτουμε όπου t το 0

1.3.5.5 Παραδείγματα με Ιδιότητες Κρουστικής Συνάρτησης σε Ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t-1)\delta(t)dt=-1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^2\delta(t)dt=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(3t-1)\delta(t-2)dt=5$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(3t-1)\delta(t+2)dt=-7$$

$$\int_{1}^{3}(t^2+1)\delta(t-2)dt=5$$

$$\int_{1}^{3}(t^2-1)\delta(t-4)dt=0$$

$$\int_{1}^{3}(t^2+1)\delta(t)dt=0$$

$$\int_{-\infty}^{3}(t^2+1)\delta(t-4)dt=0$$

$$\int_{1}^{\infty}(t^2+1)\delta(t+2)dt=0$$

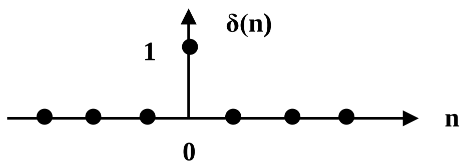
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(3t)(2t-1)dt=\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\left(2\frac{t}{3}-1\right)dt=-\frac{1}{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'\left(t-\frac{1}{2}\right)(2t-1)dt=(-1)^1(2t-1)'\Big|_{t=\frac{1}{2}}=-2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta''\left(t-\frac{1}{2}\right)(2t-1)^2dt=(-1)^2\left((2t-1)^2\right)''\Big|_{t=\frac{1}{2}}=(2(2t-1)2)'\Big|_{t=\frac{1}{2}}=(4(2t-1))'\Big|_{t=\frac{1}{2}}=8$$

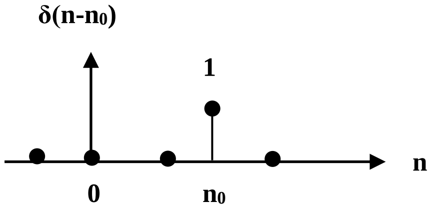
1.3.5.6 Κρουστική Ακολουθία ή Ακολουθία Kronecker

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$



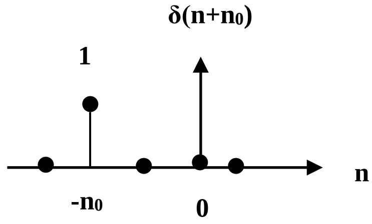
1.3.5.7 Κρουστική Ακολουθία με Δεξιά Ολίσθηση

$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1 & n=n_0\\ 0 & n\neq n_0\end{cases}$$



1.3.5.8 Κρουστική Ακολουθία με Αριστερή Ολίσθηση

$$\delta(n+n_0)=\begin{cases}1 & n=-n_0\\ 0 & n\neq -n_0\end{cases}$$



1.3.6 Συνάρτηση Προσήμου

Η συνάρτηση προσήμου ορίζεται ως εξής:

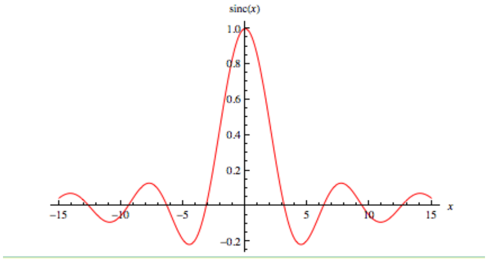
$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\\ 0 & t=0\end{cases}$$

Η σχέση που συνδέει τη συνάρτηση προσήμου sgn(t) με τη βηματική συνάρτηση u(t) είναι η εξής:

$$u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\bullet\operatorname{sgn}(t)$$

1.3.7 Συνάρτηση Δειγματοληψίας

Η συνάρτηση δειγματοληψίας $\operatorname{sinc}(x)$ ορίζεται ως: $\operatorname{sinc}(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$, ονομάζεται συνάρτηση δειγματοληψίας και παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις τηλεπικοινωνίες. Η γραφική της αναπαράσταση δίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

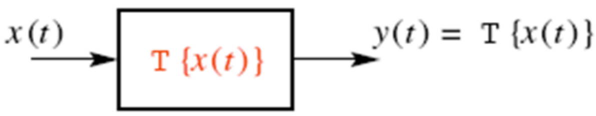


Παρατηρούμε ότι εκτείνεται στο (-∞,∞) (στο σχήμα απεικονίζεται ενδεικτικά μόνο ένα τμήμα της) και έχει μειούμενο πλάτος. **Γι' αυτό το λόγο το σήμα sinc δεν είναι ζωνοπεριορισμένο καθώς δεν έχει μέγιστη συχνότητα και ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΗΘΕΙ.**

1.4 Κατηγορίες Συστημάτων

1.4.1 Συστήματα Συνεχούς Χρόνου

Σύστημα Συνεχούς Χρόνου ονομάζεται μια οντότητα που λαμβάνει ως είσοδο ένα σήμα συνεχούς χρόνου και δίνει ως έξοδο ένα σήμα συνεχούς χρόνου που είναι ένας μετασχηματισμός του σήματος εισόδου όπως φαίνεται στο σχήμα:



1.4.1.1 Κατηγορίες Συστημάτων Συνεχούς Χρόνου

1.4.1.1.1 Στατικά ή Δυναμικά Συστήματα

Ένα σύστημα ονομάζεται **Στατικό ή χωρίς μνήμη** όταν η **έξοδος του τη χρονική στιγμή t εξαρτάται από την είσοδο στην ίδια ακριβώς χρονική στιγμή**. Αν η έξοδος εξαρτάται και από άλλες χρονικές στιγμές ονομάζεται **δυναμικό σύστημα ή σύστημα με μνήμη**. Π.χ. το σύστημα y(t)=x(t)-1 είναι στατικό ενώ το σύστημα y(t)=x(t-1) είναι δυναμικό

1.4.1.1.2 Αιτιατά και μη Αιτιατά Συστήματα

Ένα σύστημα ονομάζεται **Αιτιατό αν το σήμα εξόδου y(t) εξαρτάται από τις τιμές του σήματος εισόδου x(t) στην ίδια ακριβώς χρονική στιγμή t ή/και σε προηγούμενες χρονικές στιγμές. Σε ένα ΜΗ Αιτιατό σύστημα η έξοδος του εξαρτάται και από μελλοντικές τιμές της εισόδου**. Π.χ. το σύστημα y(t)=x(t)-1 είναι αιτιατό, το σύστημα y(t)=x(t-1)-1 είναι επίσης αιτιατό, ενώ το σύστημα y(t)=x(-t)+1 είναι μη αιτιατό όπως είναι και το σύστημα y(t)=x(t+1)+t.

1.4.1.1.3 Γραμμικά και μη Γραμμικά Συστήματα

Ένα σύστημα ονομάζεται **Γραμμικό όταν εφαρμόζοντας ως είσοδο ένα γραμμικό συνδυασμό δύο εισόδων παίρνουμε ως έξοδο τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των εξόδων** τους δηλ. με είσοδο το σήμα $x(t)=a\bullet x_1(t)+b\bullet x_2(t)$ η αντίστοιχη έξοδος είναι $y(t)=a\bullet y_1(t)+b\bullet y_2(t)$. Π.χ. το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση $y(t)=\dfrac{3x(t)}{x(t-1)+1}$ **δεν είναι γραμμικό** διότι $y_a(t)\neq y_b(t)$

όπου: $y_a(t)=\dfrac{3\bullet(ax_1(t)+bx_2(t))}{a\bullet x_1(t-1)+b\bullet x_2(t-1)+1}$ και $y_b(t)=ay_1(t)+by_2(t)=a\bullet\dfrac{3x_1(t)}{x_1(t-1)+1}+b\bullet\dfrac{3x_2(t)}{x_2(t-1)+1}$

Αντίθετα το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση $y(t)=\dfrac{3x(t)}{2t+1}$ είναι γραμμικό διότι $y_a(t)=y_b(t)$ όπου:

$y_a(t)=\dfrac{3\bullet(ax_1(t)+bx_2(t))}{2t+1}$ και $y_b(t)=a\bullet y_1(t)+b\bullet y_2(t)=a\bullet\dfrac{3x_1(t)}{2t+1}+b\bullet\dfrac{3x_2(t)}{2t+1}=\dfrac{3\bullet(ax_1(t)+bx_1(t))}{2t+1}$

1.4.1.1.4 Χρονικά Αμετάβλητα και Μεταβαλλόμενα Συστήματα

Ένα σύστημα ονομάζεται **Χρονικά Αμετάβλητο όταν εφαρμόζοντας χρονική ολίσθηση στην είσοδο του συστήματος παίρνουμε την ίδια χρονική ολίσθηση και στην έξοδο** του δηλ. με είσοδο το σήμα $x(t-t_0)$ παίρνουμε ως έξοδο το σήμα $y(t-t_0)$. Π.χ. το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση $y(t)=\dfrac{3x(t)}{x(t-1)+t}$ δεν είναι χρονικά αμετάβλητο (ή αλλιώς είναι χρονικά μεταβαλλόμενο) διότι $y_a(t)\neq y_b(t)$ όπου: $y_a(t)=\dfrac{3x(t-t_0)}{x(t-t_0-1)+t}$ και $y_b(t)=y(t-t_0)=\dfrac{3x(t-t_0)}{x(t-t_0-1)+t-t_0}$

Αντίθετα το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση $y(t)=\dfrac{3x(t)}{x(t-1)+1}$ είναι χρονικά αμετάβλητο διότι $y_a(t)=y_b(t)$ όπου:

$y_a(t)=\dfrac{3x(t-t_0)}{x(t-t_0-1)+1}$ και $y_b(t)=y(t-t_0)=\dfrac{3x(t-t_0)}{x(t-t_0-1)+1}$

1.4.1.1.5 ΦΕΦΕ (BIBO) Ευσταθές

Ένα σύστημα ονομάζεται ΦΕΦΕ Ευσταθές (Φραγμένη Είσοδος-Φραγμένη Έξοδος) ή BIBO Ευσταθές (Bounded Input-Bounded Output) όταν για φραγμένο σήμα εισόδου έχουμε και φραγμένο σήμα εξόδου δηλ όταν |x(t)|<∞ τότε και το |y(t)|<∞ Για παράδειγμα το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση $y(t)=\dfrac{3x(t)}{x(t-1)-1}$ δεν είναι **ΦΕΦΕ Ευσταθές** διότι με |x(t)|<∞ το y(t)→∞ όταν ο παρονομαστής x(t-1)=1. Ομοίως το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση $y(t)=e^t \bullet (x(t)-1)$ **δεν είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές** διότι με |x(t)|<∞ το y(t)→∞ για t→∞. Τέλος και το σύστημα $y(t)=t \bullet (x(t)+1)$ **δεν είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές** διότι με |x(t)|<∞, το y(t)→∞ για t→∞.

Παρατήρηση
Γενικά τα συστήματα που όρο το t ή το e^t ή έχουν παρονομαστή δεν είναι ΦΕΦΕ Ευσταθή.

1.5 Συνέλιξη Σημάτων

1.5.1 Συνέλιξη Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Η συνέλιξη δύο σημάτων συνεχούς χρόνου εκφράζεται ως εξής:

$$\boxed{x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(r)\bullet y(t-r)\bullet dr=\int_{-\infty}^{\infty} y(r)\bullet x(t-r)\bullet dr}$$

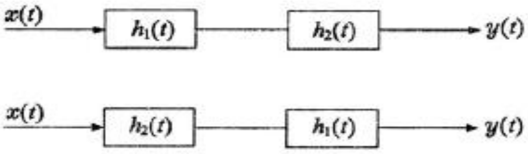
Σημείωση: Στο ένα σήμα της συνέλιξης (συνήθως στο πιο πολύπλοκο) θέτουμε όπου t το r και στο άλλο (συνήθως στο πιο απλό) θέτουμε όπου t το t-r και πολλαπλασιάζουμε τα σήματα μέσα στο ολοκλήρωμα. Τα όρια του ολοκληρώματος πρέπει να είναι πάντα από το -∞ μέχρι το +∞.

1.5.2 Ιδιότητες Συνέλιξης

- ✓ **Αντιμεταθετική→** $x(t)*y(t)=y(t)*x(t)$
- ✓ **Προσεταιριστική→** $(x(t)*y(t))*z(t)=x(t)*(y(t)*z(t))$
- ✓ **Επιμεριστική με Πρόσθεση→** $(x(t)+y(t))*z(t)=x(t)*z(t)+y(t)*z(t)$
- ✓ **Επιμεριστική με Αφαίρεση→** $(x(t)-y(t))*z(t)=x(t)*z(t)-y(t)*z(t)$
- ✓ **Ταυτοτική χωρίς Ολίσθηση→** $x(t)*\delta(t)=x(t)$. Γενικά όταν κάνουμε συνέλιξη ενός οποιουδήποτε σήματος x(t) με την κρουστική συνάρτηση δ(t) τότε παίρνουμε το ίδιο το σήμα
- ✓ **Ταυτοτική με δεξιά ολίσθηση→** $x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$. Γενικά όταν κάνουμε συνέλιξη ενός οποιουδήποτε σήματος x(t) με την κρουστική συνάρτηση $\delta(t-t_0)$ η οποία έχει δεξιά χρονική ολίσθηση, τότε παίρνουμε πάλι το ίδιο το σήμα και η δεξιά ολίσθηση της $\delta(t-t_0)$ μεταφέρεται στο σήμα
- ✓ **Ταυτοτική με αριστερή ολίσθηση→** $x(t)*\delta(t+t_0)=x(t+t_0)$. Γενικά όταν κάνουμε συνέλιξη ενός οποιουδήποτε σήματος x(t) με την κρουστική συνάρτηση $\delta(t+t_0)$ η οποία έχει αριστερή χρονική ολίσθηση, τότε παίρνουμε πάλι το ίδιο το σήμα και η αριστερή ολίσθηση της $\delta(t+t_0)$ μεταφέρεται στο σήμα
- ✓ **Παραγώγιση→** $x(t)*\delta^{(n)}(t)=\delta^{(n)}(t)*x(t)=(-1)^n\bullet x^{(n)}(t)$. Γενικά όταν κάνουμε συνέλιξη ενός οποιουδήποτε σήματος x(t) με την n-οστή παράγωγο της κρουστικής συνάρτησης δ(t) δηλαδή την $\delta^{(n)}(t)$, τότε παίρνουμε πάλι το ίδιο το σήμα και η n-οστή παράγωγος της $\delta^{(n)}(t)$ μεταφέρεται στο σήμα σύμφωνα με την ιδιότητα της γενικευμένης συνάρτησης δ(t) που αναφέρει ότι $x(t)*\delta^{(n)}(t)=(-1)^n\bullet x^{(n)}(t)$

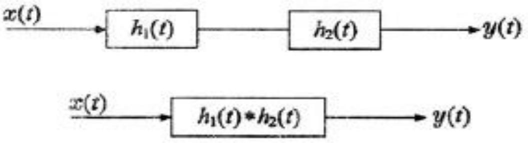
- ✓ **Παραγώγιση και Δεξιά Ολίσθηση→** $x(t)*\delta^{(n)}(t-t_0)=\delta^{(n)}(t-t_0)*x(t)=(-1)^n\bullet x^{(n)}(t-t_0)$. Γενικά όταν κάνουμε συνέλιξη ενός οποιουδήποτε σήματος x(t) με την n-οστή παράγωγο της κρουστικής συνάρτησης δ(t) δηλαδή την $\delta^{(n)}(t)$, τότε παίρνουμε πάλι το ίδιο το σήμα και η n-οστή παράγωγος της $\delta^{(n)}(t)$ μεταφέρεται στο σήμα σύμφωνα με την ιδιότητα της γενικευμένης συνάρτησης δ(t) που αναφέρει ότι $x(t)*\delta^{(n)}(t)=(-1)^n\bullet x^{(n)}(t)$

- ✓ **Παραγώγιση και Αριστερή Ολίσθηση→** $x(t)*\delta^{(n)}(t+t_0)=\delta^{(n)}(t+t_0)*x(t)=(-1)^n\bullet x^{(n)}(t+t_0)$. Γενικά όταν κάνουμε συνέλιξη ενός οποιουδήποτε σήματος x(t) με την n-οστή παράγωγο της κρουστικής συνάρτησης δ(t) δηλαδή την $\delta^{(n)}(t)$, τότε παίρνουμε πάλι το ίδιο το σήμα και η n-οστή παράγωγος της $\delta^{(n)}(t)$ μεταφέρεται στο σήμα σύμφωνα με την ιδιότητα της γενικευμένης συνάρτησης δ(t) που αναφέρει ότι $x(t)*\delta^{(n)}(t)=(-1)^n\bullet x^{(n)}(t)$



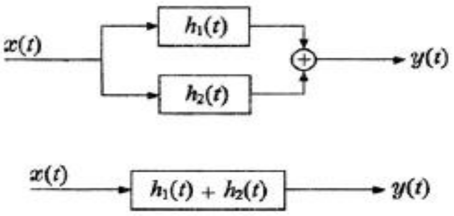
(α)

Αντιμεταθετική Ιδιότητα Συνέλιξης



(β)

Δύο σήματα σε σειρά αντικαθίστανται από ένα σύστημα που η κρουστική του απόκριση είναι η συνέλιξη των 2 κρουστικών αποκρίσεων



(γ)

Δύο σήματα παράλληλα αντικαθίστανται από ένα σύστημα που η κρουστική του απόκριση είναι το άθροισμα των 2 κρουστικών αποκρίσεων

1.5.3 Παραδείγματα με Ιδιότητες Συνέλιξης

- $(t+1)*\delta(t-2)=(t-2)+1=t-1$
- $(t+2)*\delta'(t)=(-1)^1(t+2)'=-1$
- $(t-5)*\delta'(t-2)=(-1)^1((t-2)-5)'=-1$
- $(t^2+3)*\delta''(t-1)=(-1)^2\bullet((t-1)^2+3)''=2(t-1)'=2$
- $u(t)*\delta(t)=u(t)$, $u(t)*\delta'(t)=(-1)^1\bullet u'(t)=-\delta(t)$, $u(t)*\delta''(t)=(-1)^2\bullet u''(t)=\delta'(t)$
- $u(t)*\delta'(t-1)=(-1)u'(t-1)=-\delta(t-1)$
- $u(t-1)*\delta''(t+1)=(-1)^2u''(t+1-1)=\delta'(t)$

1.5.4 Κρουστική και Βηματική Απόκριση

Η **Κρουστική Απόκριση h(t)** είναι η **συνάρτηση που περιγράφει τη συμπεριφορά ενός συστήματος** και είναι η έξοδος του συστήματος με είσοδο την **κρουστική συνάρτηση δ(t)** δηλαδή:

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{Σύστημα}} \longrightarrow h(t)$$

Κρουστική συνάρτηση **Κρουστική Απόκριση**

Η **Βηματική Απόκριση s(t)** είναι η έξοδος ενός συστήματος **με είσοδο τη βηματική συνάρτηση u(t)** δηλαδή:

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{Σύστημα}} \longrightarrow s(t)$$

Βηματική συνάρτηση **Βηματική Απόκριση**

Παρατήρηση: Γενικά ο όρος απόκριση αναφέρεται στην έξοδο ενός συστήματος.

1.5.5 Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Σύστημα διακριτού χρόνου ονομάζεται μια οντότητα που λαμβάνει ως είσοδο ένα σήμα διακριτού χρόνου και δίνει ως έξοδο ένα σήμα διακριτού χρόνου που είναι ένας μετασχηματισμός του σήματος εισόδου όπως φαίνεται στο σχήμα:

$$x(n) \longrightarrow \boxed{T\{x(n)\}} \longrightarrow y(n)=T\{x(n)\}$$

1.5.5.1 Κατηγορίες Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

Υπάρχουν ακριβώς οι ίδιες κατηγορίες συστημάτων και με τα ίδια ακριβώς χαρακτηριστικά όπως και στα συστήματα συνεχούς χρόνου, δηλ. Στατικά (ή Δυναμικά), Αιτιατά (ή μη Αιτιατά), Γραμμικά ή Μη Γραμμικά. Χρονικά Αμετάβλητα (ή Χρονικά Μεταβαλλόμενα), ΦΕΦΕ Ευσταθή (ή μη ΦΕΦΕ Ευσταθή).

1.5.6 Συνέλιξη Σημάτων Διακριτού Χρόνου

Η συνέλιξη δύο σημάτων Διακριτού Χρόνου εκφράζεται ως εξής:

$$\boxed{x(n)*y(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(r)\bullet y(n-r)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}y(r)\bullet x(n-r)}$$

Σημείωση: Στο ένα σήμα της συνέλιξης (συνήθως στο πιο πολύπλοκο) θέτουμε όπου n το r και στο άλλο (συνήθως στο πιο απλό) θέτουμε όπου n το n-r και πολλαπλασιάζουμε τα σήματα μέσα στο άθροισμα. Τα όρια του αθροίσματος πρέπει να είναι πάντα από το -∞ μέχρι το +∞.

1.6 Ειδική Κατηγορία: Συστήματα Γραμμικά και Χρονικά Αμετάβλητα (ΓΧΑ)

Ένα σύστημα είτε συνεχούς είτε διακριτού χρόνου. που είναι ταυτόχρονα Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο (ΓΧΑ) έχει ορισμένες επιπλέον ιδιότητες που είναι οι ακόλουθες:

Ένα Σύστημα είναι Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο (ΓΧΑ) αν και μόνο αν η έξοδος του y(t) ή y(n) είναι η συνέλιξη της εισόδου x(t) ή x(n) αντίστοιχα και της κρουστικής του απόκρισης h(t) ή h(n) αντίστοιχα δηλ.

ΓΧΑ Σύστημα ⇔ y(t)=x(t)*h(t) ή ΓΧΑ Σύστημα ⇔ y(n)=x(n)*h(n)

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)=x(t)*h(t)$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)=x(n)*h(n)$$

Στα ΓΧΑ Συστήματα διατυπώνονται με διαφορετικό τρόπο δύο χαρακτηρισμοί συστημάτων

✓ Ένα **ΓΧΑ Σύστημα είναι αιτιατό όταν h(t)=0 για t<0 ή h(n)=0 για n<0** δηλαδή η κρουστική απόκριση να ορίζεται μόνο σε θετικές χρονικές στιγμές ή στο μηδέν Πριν χαρακτηρίζαμε το σύστημα ως αιτιατό αν η έξοδος του δεν εξαρτιόταν από μελλοντικές τιμές της εισόδου

✓ Ένα **ΓΧΑ σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές** όταν $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$ ή $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$ δηλαδή όταν το ολοκλήρωμα ή το άθροισμα της κρουστικής απόκρισης είναι φραγμένο κατά απόλυτη τιμή. Πριν χαρακτηρίζαμε το σύστημα ως ΦΕΦΕ ευσταθές εάν για φραγμένο σήμα εισόδου είχαμε και φραγμένο σήμα εξόδου

Παρατηρήσεις

- Γενικά ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} e^{f(t)}dt$ γίνεται ως εξής: $\int_{\alpha}^{\beta} e^{f(t)}dt=\frac{1}{f'(t)}\bullet\left[e^{f(t)}\right]_{\alpha}^{\beta}$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΟΥΣ ΣΚΟΛΟΥΘΟΥΣ ΟΡΙΣΜΟΥΣ</u>

ΑΙΤΙΑΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ όταν h(t)=0 για t<0 ή h(n)=0 για n<0	ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ όταν h(t)=0 για t≥0 ή h(n)=0 για n≥0
ΑΙΤΙΑΤΟ ΣΗΜΑ όταν **x(t)=0 για t<0 ή x(n)=0 για n<0**	**ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ ΣΗΜΑ όταν** **x(t)=0 για t≥0 ή x(n)=0 για n≥0**

1.7 Λύσεις Ασκήσεων 1ου Σετ

1.7.1 Άσκηση 1.2

Καθορίστε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιοδικές και αν είναι, υπολογίστε την περίοδο τους

α) $e^{j\pi t-1}$

β) $sin(t)+cos(\sqrt{2}t)$

γ) $2cos(120\pi t+\pi/3)+6cos(377t)$

δ) $cos^2(2t-\frac{\pi}{3})$

Λύση

α)

$x(t)=e^{j\pi\bullet t-1}=e^{j\pi\bullet t-1}\bullet e^{j2\pi}=^{j\pi\bullet t-1+2\pi j}=e^{j\pi\bullet(t+2)-1}=x(t+2)$. Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο Τ=2

Παρατήρηση: $e^{j2\pi}=\cos(2\pi)+j\bullet\sin(2\pi)=1$

β) $x(t)=\sin(t)+\cos(\sqrt{2}t)$

Για να είναι περιοδικό ένα σήμα που εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός δύο σημάτων πρέπει είτε:
1. είτε η μια συχνότητα να είναι πολλαπλάσιο της άλλης
2. είτε οι συχνότητες να είναι πολλαπλάσια μιας βασικής συχνότητας

x(t)=sin(t)+cos(√2t)+)=cos(2π2.5t)+sin(2π6t)

Παρατηρούμε ότι οι 2 συχνότητες είναι Ω1=1 και Ω2=√2. Παρατηρούμε ότι δεν είναι ούτε η μια συχνότητα πολλαπλάσιο της άλλης ούτε οι συχνότητες πολλαπλάσια μιας βασικής συχνότητας

γ) Το σήμα 2cos(120πt+π/3) είναι περιοδικό ανεξάρτητα από το πλάτος και τη φάση του. Επίσης το σήμα 6cos(377t) είναι περιοδικό. Η περίοδος του 2cos(120πt+π/3) είναι $T_1=\frac{2\pi}{\Omega_1}=\frac{2\pi}{120\pi}=\frac{1}{60}$ και η περίοδος του cos(√2t) είναι $T_2=\frac{2\pi}{377}$. Ο λόγος των δύο περιόδων είναι $\frac{T_1}{T_1}=\frac{\frac{1}{60}}{\frac{2\pi}{377}}=\frac{377}{120\pi}$ και είναι άρρητος (λόγω του π), άρα το σήμα x(t)=2cos(120πt+π/3)+6cos(377t) δεν είναι περιοδικό.

δ)Το σήμα x(t) γράφεται ως εξής:

$$x(t)=\cos^2\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)\bullet\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(4t-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\cos(0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(4t-\frac{2\pi}{3}\right)$$

Επειδή περιλαμβάνει μόνο ένα cos συνεχούς χρόνου είναι περιοδικό με περίοδο

$$T=\frac{2\pi}{\Omega}=\frac{\pi}{2}$$

Σημείωση: Ισχύει η τριγωνομετρική ταυτότητα: $\cos(a)\bullet\cos(b)=\frac{1}{2}\cos(a+b)+\frac{1}{2}\cos(a-b)$

1.7.2 Άσκηση 1.3

Υπολογίστε την βασική περίοδο των παρακάτω περιοδικών σημάτων

α) $x(t)=cos(5\pi t)+sin(12\pi t)$

β) $x(t)=cos(4\pi t)sin(3\pi t)$

Λύση

Για να είναι περιοδικό ένα σήμα που εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός δύο σημάτων πρέπει είτε:
1. είτε η μια συχνότητα να είναι πολλαπλάσιο της άλλης

2. είτε οι συχνότητες να είναι πολλαπλάσια μιας βασικής συχνότητας

α)x(t)=cos(5πt)+sin(12πt)=cos(2π2.5t)+sin(2π6t)
Θεωρώντας ως βασική συχνότητα την f_0=1/2Hz παρατηρούμε ότι η συχνότητα των 2.5Hz είναι το 5ο πολλαπλάσιο της f_0 και η συχνότητα των 6Hz είναι το 12ο πολλαπλάσιο της f_0. Άρα το σήμα είναι περιοδικό με βασική συχνότητα f_0=1/2Hz και βασική περίοδο $T_0=1/f_0=2$ sec.

β)x(t)=cos(4πt)•sin(3πt)=cos(2π2t) •sin(2π1.5t)
Θεωρώντας ως βασική συχνότητα και πάλι την f_0=1/2Hz παρατηρούμε ότι η συχνότητα των 2Hz είναι το 4ο πολλαπλάσιο της f_0 και η συχνότητα του 1.5Hz είναι το 3ο πολλαπλάσιο της f_0. Άρα το σήμα είναι περιοδικό με βασική συχνότητα f_0=1/2Hz και βασική περίοδο $T_0=1/f_0=2$ sec.

Σημείωση: Το άθροισμα, η διαφορά και το γινόμενο τριγωνομετρικών σημάτων ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός.

1.7.3 Άσκηση 1.4

Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα

α) $\int_{-\infty}^{\infty}(t-2)^2\delta(t-2)dt$

β) $\int_{0}^{5}cos(2\pi t)\delta(t-1/2)dt$

γ) $\int_{-\infty}^{\infty}t^2\dot{\delta}(t-2)dt$

δ) $\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-5t}+sin(10\pi t))\dot{\delta}(t)$

<u>Λύση</u>

α) $\int_{-\infty}^{\infty}(t-2)^2\delta(t-2)dt=0$

β) $\int_{0}^{5}\cos(2\pi t)\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)dt=\cos(\pi)=-1$ διότι η ολίσθηση $t_0=\frac{1}{2}$ είναι μέσα στα όρια του ολοκληρώματος

γ) $\int_{-\infty}^{\infty}t^2\dot{\delta}(t-2)dt=(-1)^1\bullet(t^2)'\big|_{t=2}=-(2t)\big|_{t=2}=-4$

δ) $\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-5t}+\sin(10\pi t)\right)\dot{\delta}(t)dt=(-1)\bullet\left(e^{-5t}+\sin(10\pi t)\right)'\big|_{t=0}=-\left(-5e^{-5t}+10\pi\cos(10\pi t)\right)\big|_{t=0}=5-10\pi$

Υπενθύμιση

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin'(f(t))=f'(t)\bullet\cos(f(t))\\&\cos'(f(t))=-f'(t)\bullet\sin(f(t))\\&e^{f(t)}=-f'(t)\bullet e^{f(t)}\end{aligned}}$$

1.7.4 Άσκηση 1.5

Μελετήστε τα παρακάτω συστήματα ως προς τις εξής ιδιότητες: στατικότητα, χρονική αμεταβλητότητα, γραμμικότητα, αιτιατότητα και ευστάθεια

α) $y(t) = \dfrac{x(t)}{1 + x(t-1)}$

β) $y(t) = e^t x(-t)$

γ) $y(t) = \dot{x}(t)$

δ) $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$

<u>Λύση</u>

α) $y(t) = \dfrac{x(t)}{1 + x(t-1)}$

- **Δυναμικό διότι η έξοδος εξαρτάται από την είσοδο σε διαφορετική χρονική στιγμή**
- **Αιτιατό διότι η έξοδος δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου**
- **Δεν είναι Γραμμικό διότι:**

  με είσοδο ένα γραμμικό συνδυασμό δύο εισόδων δηλ. $a \bullet x_1(t) + b \bullet x_2(t)$ **η έξοδος που προκύπτει είναι η εξής:**

  $$y_a(t) = \frac{a \bullet x_1(t) + b \bullet x_2(t)}{1 + a \bullet x_1(t-1) + b \bullet x_2(t-1)}$$

  Μετά παίρνουμε το γραμμικό συνδυασμό δύο εξόδων δηλ $a \bullet y_1(t) + b \bullet y_2(t)$ και **προκύπτει η έξοδος:**

  $y_b(t) = a \bullet y_1(t) + b \bullet y_2(t) = \alpha \bullet \dfrac{x_1(t)}{1 + x_1(t-1)} + b \bullet \dfrac{x_2(t)}{1 + x_2(t-1)}$. **Επειδή** $y_a(t) \neq y_b(t)$ το σύστημα δεν είναι γραμμικό

- **Είναι Χρονικά Αμετάβλητο διότι**

  Εφαρμόζουμε πρώτα χρονική ολίσθηση στην είσοδο δηλ $x(t-t_0)$ και προκύπτει η έξοδος $y_a(t) = \dfrac{x(t-t_0)}{1 + x(t-t_0-1)}$

  Μετά εφαρμόζουμε χρονική ολίσθηση στην έξοδο και προκύπτει: $y_b(t) = y(t-t_0) = \dfrac{x(t-t_0)}{1 + x(t-t_0-1)}$

  Επειδή $y_a(t) = y_b(t)$ το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

- **Δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές διότι**

  αν θεωρήσουμε ότι το σύστημα εισόδου είναι φραγμένο δηλ $|x(t)|<\infty$ τότε $x(t-1)=-1$ η έξοδος $y(t)\rightarrow\infty$

β) $y(t) = e^t \bullet x(-t)$

- **Δυναμικό διότι η έξοδος εξαρτάται από την είσοδο σε διαφορετική χρονική στιγμή**
- **Μη αιτιατό διότι η έξοδος εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου**
- **Είναι Γραμμικό διότι:**

  με είσοδο ένα γραμμικό συνδυασμό 2 εισόδων δηλ. $a \bullet x_1(t) + b \bullet x_2(t)$ **προκύπτει ως έξοδος**

  $$y_\alpha(t) = e^t \bullet [a \bullet x_1(-t) + b \bullet x_2(-t)] = \alpha \bullet e^t \bullet x_1(-t) + b \bullet e^t \bullet x_2(-t)$$

  Μετά παίρνουμε το γραμμικό συνδυασμό δύο εξόδων δηλ $a \bullet y_1(t) + b \bullet y_2(t)$ και **προκύπτει ως έξοδος:**

  $y_b(t) = a \bullet y_1(t) + b \bullet y_2(t) = \alpha \bullet e^t \bullet x_1(-t) + b \bullet e^t \bullet x_2(-t)$. Επειδή $y_a(t) = y_b(t)$ το σύστημα είναι γραμμικό

- **ΔΕΝ είναι Χρονικά Αμετάβλητο διότι:**

  Εφαρμόζουμε πρώτα χρονική ολίσθηση στην είσοδο δηλ $x(t-t_0)$ και προκύπτει η έξοδος $y_a(t) = e^t \bullet (x - (t - t_0))$

  Μετά εφαρμόζουμε χρονική ολίσθηση στην έξοδο και προκύπτει: $y_b(t) = y(t-t_0) = e^{(t-t_0)} \bullet (x - (t - t_0))$

  Επειδή $y_a(t) \neq y_b(t)$ το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.

- **Δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές διότι:**
  αν θεωρήσουμε ότι το σύστημα εισόδου είναι φραγμένο δηλ $|x(t)|<\infty$ τότε για $t\rightarrow\infty$ η έξοδος $y(t)\rightarrow\infty$ δηλ. δεν είναι φραγμένο σήμα.

γ)

$$y(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

- **Δυναμικό διότι η έξοδος εξαρτάται από την είσοδο και σε διαφορετική χρονική στιγμή**
- **Αιτιατό διότι η έξοδος δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου**
- **Είναι Γραμμικό διότι:**

  με είσοδο ένα γραμμικό συνδυασμό 2 εισόδων δηλ. $a\bullet x_1(t)+b\bullet x_2(t)$ **προκύπτει ως έξοδος** $y_\alpha(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{a\bullet x_1(t)+b\bullet x_2(t)-\left[a\bullet x_1(t-\Delta t)+b\bullet x_2(t-\Delta t)\right]}{\Delta t}$

  Μετά παίρνουμε το γραμμικό συνδυασμό δύο εξόδων δηλ $a\bullet y_1(t)+b\bullet y_2(t)$ και **προκύπτει ως έξοδος:** $y_b(t)=a\bullet y_1(t)+b\bullet y_2(t)=\alpha\bullet\dfrac{x_1(t)-x_1(t-\Delta t)}{\Delta t}+b\bullet\dfrac{x_2(t)-x_2(t-\Delta t)}{\Delta t}$**.** Επειδή $y_a(t)=y_b(t)$ το σύστημα είναι γραμμικό

- **Είναι Χρονικά Αμετάβλητο διότι:**
  Εφαρμόζουμε πρώτα χρονική ολίσθηση στην είσοδο δηλ $x(t-t_0)$ και προκύπτει η έξοδος $y_a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{x(t-t_0)-x(t-t_0-\Delta t)}{\Delta t}$
  Μετά εφαρμόζουμε χρονική ολίσθηση στην έξοδο και προκύπτει:
  $y_b(t)=y(t-t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{x(t-t_0)-x(t-t_0-\Delta t)}{\Delta t}$

  Επειδή $y_a(t)=y_b(t)$ το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.
- **Το σύστημα δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές διότι όταν $\Delta t\rightarrow 0$ τότε το $y(t)\rightarrow\infty$**

δ) $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(r)\bullet e^{-(t-r)}u(t-r)dr$

Το σύστημα είναι ΓΧΑ διότι η έξοδος του είναι η συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης όπως προκύπτει από το ολο-κλήρωμα:

$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(r)\bullet e^{-(t-r)}u(t-r)dr\Rightarrow y(t)=x(t)*e^{-t}u(t)$ θεωρώντας βέβαια ότι η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι η

$$h(t)=e^{-t}u(t)$$

- ✓ **Αφού το σύστημα είναι ΓΧΑ τότε για να είναι αιτιατό** θα πρέπει $h(t)=0$ για $t<0$. Όμως η $h(t)$ είναι όντως ίση με το μηδέν για $t<0$ λόγω της $u(t)$, **άρα το σύστημα αυτό είναι αιτιατό**
- ✓ **Αφού το σύστημα είναι ΓΧΑ τότε για να είναι ΦΕΦΕ ευσταθές** θα πρέπει $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

  $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt=\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-t}u(t)|dt=\int_{0}^{\infty}e^{-t}dt=\dfrac{1}{-1}\left[e^{-t}\right]_0^\infty=-(0-1)=1$. Συνεπώς το σύστημα αυτό είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.
- ✓ **Το σύστημα είναι δυναμικό διότι η έξοδος τη χρονική στιγμή t εξαρτάται από όλες τις τιμές της εισόδου από $-\infty$ έως ∞**

1.7.5 Άσκηση 1.6

Αποδείξτε ότι τα συστήματα που περιγράφονται από τις παρακάτω σχέσεις εισόδου-εξόδου είναι ΓΧΑ και στη συνέχεια βρείτε την κρουστικής του απόκριση

$$\alpha)\ \ y(t) = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2} x(\tau)d\tau$$

$$\beta)\ \ y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t-\tau)x(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x(t-t_i)$$

<u>**Λύση**</u>

<u>**Βασική Παρατήρηση**</u>:

Υπάρχουν 3 τρόποι για να δείξουμε ότι ένα σύστημα είναι ΓΧΑ
α) Να δείξουμε ότι η έξοδος του είναι η συνέλιξη της εισόδου του και της κρουστικής του απόκρισης
β) Με τον ορισμό της γραμμικότητας και της χρονικής αμεταβλητότητας
γ) Να δείξουμε ότι το σύστημα δεν «γεννά» συχνότητες δηλ. δεν προσθέτει νέες συχνότητες στο σήμα εισόδου

Στη συγκεκριμένη άσκηση το ερώτημα α) θα γίνει με τον ορισμό της γραμμικότητας και της χρονικής αμεταβλητότητας ενώ το ερώτημα β) θα γίνει δείχνοντας ότι η έξοδος είναι η συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης.

α)

$$y(t)=\frac{1}{r_1+r_2}\int_{t-r_1}^{t+r_2} x(r)dr$$

<u>**Γραμμικό**</u>

Βάζουμε ως είσοδο **ένα γραμμικό συνδυασμό δύο εισόδων δηλ.** $x(t) = a \bullet x_1(t) + b \bullet x_2(t)$ **και προκύπτει ως έξοδος το σήμα**:

$$y_\alpha(t) = \frac{1}{r_1+r_2}\int_{t-r_1}^{t+r_2} a \bullet x_1(r) + b \bullet x_2(r)dr = a \bullet \frac{1}{r_1+r_2}\int_{t-r_1}^{t-r_2} x_1(r)dr + b \bullet \frac{1}{r_1+r_2}\int_{t-r_1}^{t-r_2} x_2(r)dr$$

Μετά παίρνουμε το γραμμικό συνδυασμό δύο εξόδων δηλ $a \bullet y_1(t) + b \bullet y_2(t)$ και **προκύπτει:**

$y_b(t) = a \bullet y_1(t) + b \bullet y_2(t) = a \bullet \frac{1}{r_1+r_2}\int_{t-r_1}^{t-r_2} x_1(r)dr + b \bullet \frac{1}{r_1+r_2}\int_{t-r_1}^{t-r_2} x_2(r)dr$. Επειδή $y_a(t) = y_b(t)$ **το σύστημα είναι γραμμικό**.

<u>**Χρονικά Αμετάβλητο**</u>

Εφαρμόζουμε πρώτα χρονική ολίσθηση στην είσοδο δηλ $x(t-t_0)$ και προκύπτει η έξοδος $y_a(t) = \frac{1}{r_1+r_2}\int_{t-r_1}^{t+r_2} x(r - t_0)dr$

Μετά εφαρμόζουμε χρονική ολίσθηση στην έξοδο και προκύπτει:

$$y_b(t) = y(t-t_0) = \frac{1}{r_1+r_2}\int_{t-t_0-r_1}^{t-t_0+r_2} x(r)dr = \frac{1}{r_1+r_2}\int_{t-r_1}^{t+r_2} x(r-t_0)dr$$

Επειδή $y_a(t) = y_b(t)$ το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Η κρουστική απόκριση h(t) είναι η έξοδος του συστήματος με είσοδο την κρουστική συνάρτηση δ(t). Για να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση θέτουμε ως είσοδο x(t) το δ(t) και προκύπτει: $h(t) = \frac{1}{r_1+r_2}\int_{t-r_1}^{t+r_2} \delta(r)dr$.

Επειδή τα όρια του ολοκληρώματος είναι πεπερασμένα, αν η ολίσθηση της δ(r) (που είναι μηδέν) είναι μέσα στα όρια του ολοκληρώματος τότε η κρουστική απόκριση θα είναι: $y(t)=\frac{1}{r_1+r_2}$ αν ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι συνθήκες: $t - r_1 < 0$ κ και $0 < t + r_2 \Rightarrow -r_2 < t < r_1$ ενώ η κρουστική απόκριση θα είναι μηδέν αν ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ Η ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ $-r_2 < t < r_1$. Άρα συνοψίζοντας έχουμε:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{r_1+r_2} & -r_2 < t < r_1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

β)

$$\boxed{y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}p(t-r)\bullet x(r)\bullet dr+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\bullet x(t-t_i)}$$

Υπολογίζουμε την έξοδο ως εξής:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}p(t-r)\bullet x(r)\bullet dr+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x(t-t_i)=x(t)*p(t)+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x(t)*\delta(t-t_i)=x(t)*p(t)+x(t)*\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\delta(t-t_i)=$$

$$=x(t)*\left[p(t)+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\bullet\delta(t-t_i)\right]$$

Θεωρώντας ως κρουστική απόκριση του συστήματος την $h(t)=p(t)+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\delta(t-t_i)$ παρατηρούμε ότι η έξοδος του συστήματος είναι η συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος άρα το σύστημα είναι ΓΧΑ με κρουστική απόκριση όπως αναφέραμε την $h(t)=p(t)+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\delta(t-t_i)$.

Παρατήρηση: Υπάρχουν 2 τρόποι για τον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης: ο 1ος τρόπος είναι να βάλουμε ως είσοδο στο σύστημα την κρουστική συνάρτηση δ(t) και να πάρουμε ως έξοδο την κρουστική απόκριση h(t) και ο 2ος τρόπος είναι από τη συνέλιξη ότι δηλαδή y(t)=x(t)*h(t)

1.7.6 Άσκηση 1.7

Χρησιμοποιώντας τον τύπο της συνέλιξης, υπολογίστε την έξοδο του συστήματος $y(t)=x(t)*h(t)$ για τα παρακάτω ζεύγη εισόδων-κρουστικών αποκρίσεων

$\alpha)$ $x(t)=u(t-1),\ \ h(t)=u(t)+\frac{d\delta(t-1)}{dt}$

$\beta)$ $x(t)=e^{at}u(t),\ \ h(t)=e^{\beta t}u(t)$. Εξετάστε τις περιπτώσεις $\alpha\neq\beta$ και $\alpha=\beta$.

$\gamma)$ $x(t)=e^{2t}u(t),\ \ h(t)=e^{-3t}u(t)$. Στην περίπτωση αυτή δείξτε ότι το σύστημα είναι αιτιατό και BIBO ευσταθές.

<u>Λύση</u>

α)

Η έξοδος του συστήματος είναι:

$$y(t)=x(t)*h(t)=u(t-1)*\left(u(t)+\dot{\delta}(t-1)\right)=u(t-1)*u(t)+u(t-1)*\dot{\delta}(t-1)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}u(r-1)\bullet u(t-r)dr+(-1)^1\bullet\dot{u}(t-1-1)=\int_{1}^{t}1\bullet 1\bullet dr-\delta(t-2)=(t-1)\bullet u(t-1)-\delta(t-2)$$

<u>Παρατήρηση</u>

- Ο πολλαπλασιασμός με u(t-1) του αποτελέσματος του πρώτου ολοκληρώματος είναι προαιρετικός και δεν αλλάζει κάτι στο αποτέλεσμα αφού το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με κάτω όριο το 1 και ως γνωστόν η u(t-1)=1 για t>1.

β)

Η έξοδος του συστήματος είναι:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(r)\bullet h(t-r)dr=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha r}\bullet u(r)\bullet e^{\beta(t-r)}u(t-r)dr=\int_{0}^{t}e^{\alpha r}\bullet e^{\beta t}\bullet e^{-\beta\bullet r}dr=e^{\beta t}\bullet\int_{0}^{t}e^{\alpha\bullet r}\bullet e^{-\beta\bullet r}dr=$$

$$=e^{\beta t}\bullet\int_{0}^{t}e^{r(\alpha-\beta)}dr$$

Εδώ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) α≠β

$$e^{\beta t}\bullet\int_0^t e^{r(\alpha-\beta)}dr = e^{\beta t}\bullet\frac{1}{\alpha-\beta}\left[e^{r(\alpha-\beta)}\right]_0^t = e^{\beta t}\bullet\frac{1}{\alpha-\beta}\left(e^{t(\alpha-\beta)}-1\right)=\frac{e^{\beta t}\bullet e^{\alpha t}\bullet e^{-\beta\beta}}{\alpha-\beta}-\frac{e^{\beta t}}{\alpha-\beta}=\frac{e^{\alpha t}}{\alpha-\beta}-\frac{e^{\beta t}}{\alpha-\beta}=\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{\alpha-\beta}\bullet u(t)$$

ii) α-β

$$e^{\beta t}\bullet\int_0^t e^{0}dr = e^{\beta t}\bullet t\bullet u(t)$$

__Παρατήρηση__

- Ο πολλαπλασιασμός με u(t) του αποτελέσματος του κάθε ολοκληρώματος είναι προαιρετικός και δεν αλλάζει κάτι στο αποτέλεσμα αφού το κάθε ολοκλήρωμα υπολογίζεται με κάτω όριο το 0 και ως γνωστόν η $u(t)=1$ για $t>0$.
- Γενικά ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_0^t e^{ar}dr$ έχει τον εξής τύπο: $\int_0^t e^{ar}dr = \frac{1}{(ar)'}\bullet\left[e^{ar}\right]_0^t$

γ)
Σύμφωνα με το ερώτημα β) το α=2 και το β=-3 άρα το αποτέλεσμα είναι:

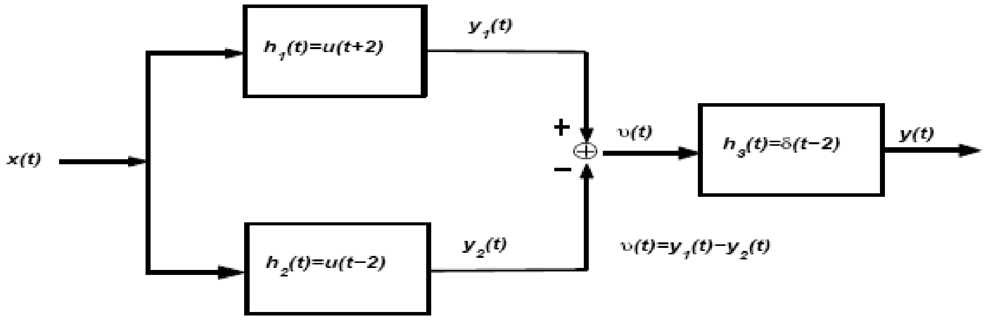
$$\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{\alpha-\beta}u(t)=\frac{e^{2t}-e^{-3t}}{2-(-3)}u(t)=\frac{e^{2t}-e^{-3t}}{5}u(t)$$

Επειδή η έξοδος του συστήματος είναι η συνέλιξη της εισόδου x(t) και της κρουστικής απόκρισης h(t) το σύστημα είναι ΓΧΑ.

- Για να είναι αιτιατό το σύστημα πρέπει η $h(t)=0$ για $t<0$. Η $h(t)=e^{-3t}u(t)$ και επειδή η $u(t)=0$ για $t<0$ άρα και η $h(t)=0$ για $t<0$. Συνεπώς το σύστημα είναι αιτιατό
- Για να είναι ΦΕΦΕ (BIBO) ευσταθές το σύστημα πρέπει $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα αυτό ως εξής: $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3t}u(t)dt=\int_0^{\infty}e^{-3t}dt=\frac{1}{-3}\left[e^{-3t}\right]_0^{\infty}=-\frac{1}{3}\left(e^{-\infty}-e^{0}\right)=\frac{1}{3}<\infty$ Άρα το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

1.7.7 Άσκηση 1.9

Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και εξετάστε αν το συνολικό σύστημα είναι αιτιατό και ΒΙΒΟ ευσταθές.



<u>Λύση</u>

Βήμα 1

Υπολογίζουμε την έξοδο του 1ου υποσυστήματος με κρουστική απόκριση $h_1(t)$ ως εξής: $y_1 = u(t+2) * x(t)$

Βήμα 2

Υπολογίζουμε την έξοδο του 2ου υποσυστήματος με κρουστική απόκριση $h_2(t)$ ως εξής: $y_2 = u(t-2) * x(t)$

Βήμα 3

Υπολογίζουμε την είσοδο v(t) στο 3ο υποσύστημα ως εξής: $v(t) = y_1(t) - y_2(t) = u(t+2) * x(t) - u(t-2) * x(t)$

Βήμα 4

Η v(t) είναι η είσοδος στο τελευταίο σύστημα με κρουστική απόκριση $h_3(t)$ και η έξοδος από το σύστημα αυτό είναι:

$$y(t) = v(t) * \delta(t-2) \Rightarrow y(t) = [u(t+2) * x(t) - u(t-2) * x(t)] * \delta(t-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = u(t+2) * x(t) * \delta(t-2 - u(t-2) * x(t) * \delta(t-2) \Rightarrow$$

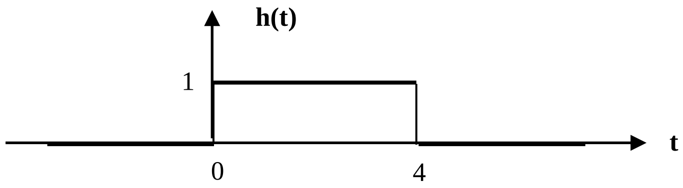
$$\Rightarrow y(t) = x(t) * u(t+2) * \delta(t-2) - x(t) * u(t-2) * \delta(t-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = x(t) * u(t+2-2) - x(t) * u(t-2-2) \Rightarrow y(t) = x(t) * u(t) - x(t) * u(t-4)$$

$$\Rightarrow y(t) = x(t) * [u(t) - u(t-4)]$$

Άρα η κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος είναι: $\boxed{h(t) = u(t) - u(t-4)}$

- Για να είναι το **συνολικό σύστημα αιτιατό πρέπει h(t)=0 για t<0**. Σχεδιάζοντας την κρουστική απόκριση του συστήματος αυτή έχει τη μορφή:



Παρατηρούμε ότι η κρουστική απόκριση h(t) είναι 0 για t<0 άρα το σύστημα είναι αιτιατό.

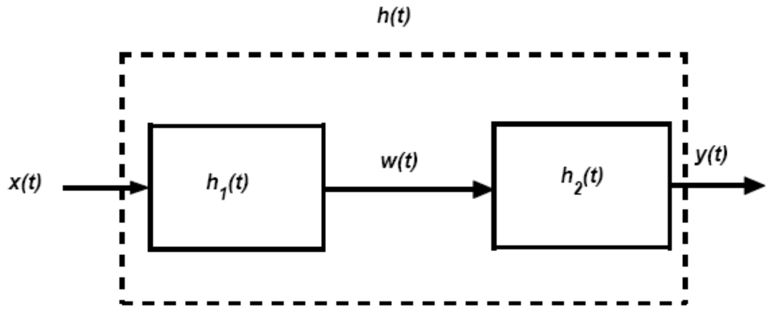
- Για να είναι το συνολικό σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$

Υπολογίζουμε το $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} [u(t) - u(t-4)] dt = \int_{0}^{4} dt = 4 < \infty$, άρα το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές

<u>Σημείωση</u>: Η διαφορά δύο βηματικών συναρτήσεων δίνει πάντα ένα σήμα πεπερασμένης χρονικής διάρκειας.

1.7.8 Άσκηση 1.10

Στο παρακάτω σχήμα το πρώτο ΓΧΑ έχει κρουστική απόκριση $h_1(t) = u(t+3)$ ενώ το δεύτερο (συνδεδεμένο σε σειρά) ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου $y(t) = \dot{w}(t) - \pi w(t)$. Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος. Δώστε μια έκφραση της εξόδου $y(t)$ ως συνάρτηση της εισόδου $x(t)$, χρησιμοποιώντας καθυστερητές, διαφοριστές και ολοκληρωτές. (Υπόδειξη: Προσπαθήστε να εκφράσετε την έξοδο στην μορφή $y(t) = Ax(t-t_1) + B\frac{dx(t-t_2)}{dt} + C\int_{-\infty}^{t-t_3} x(\tau)d\tau$)



Λύση

α)Η κρουστική απόκριση είναι η έξοδος του συστήματος με είσοδο την κρουστική συνάρτηση, δηλ, με είσοδο δ(t) η έξοδος είναι h(t). Η έξοδος του συστήματος δίνεται από τον τύπο:

$$y(t) = \dot{w}(t) - \pi w(t) \Rightarrow y(t) = \left(x(t) * h_1(t)\right)' - \pi\left(x(t) * h_1(t)\right)$$

Όπως είπαμε θέτουμε όπου y(t) την h(t) και όπου x(t) την δ(t) και προκύπτει το εξής αποτέλεσμα:

$$h(t) = \left(\delta(t) * h_1(t)\right)' - \pi\left(\delta(t) * h_1(t)\right) \Rightarrow h(t) = \left(h_1(t)\right)' - \pi\left(h_1(t)\right) \Rightarrow h(t) = \left(u(t+3)\right)' - \pi\left(u(t+3)\right) \Rightarrow$$
$$h(t) = \left(\delta(t+3)\right) - \pi\left(u(t+3)\right)$$

β)Η έξοδος του συστήματος είναι η συνέλιξη εισόδου x(t) και της κρουστικής απόκρισης h(t) που υπολογίσαμε προηγουμένως δηλαδή:

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \left(\delta(t+3)\right) - \pi\left(u(t+3)\right) = x(t) * \delta(t+3) - x(t) * \pi u(t+3) =$$

$$= x(t+3) - \pi\int_{-\infty}^{\infty} u(r+3) \bullet x(t-r)dr = x(t+3) - \pi\int_{-3}^{\infty} x(t-r)dr$$

Παρατήρηση: Το σήμα περνά αρχικά από ένα φίλτρο του οποίου η κρουστική απόκριση είναι η βηματική συνάρτηση u(t) (για την ακρίβεια μιας μετατοπισμένης έκδοσης αυτής) και αυτό ισοδυναμεί με την εφαρμογή ενός ολοκληρωτή.

1.8 Θέματα και Ασκήσεις στην Εισαγωγή

1.8.1 Θέμα 2β Άτυπη Μάρτιος 2012

Ένα Γραμμικό Χρονικά Αμετάβλητο Σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h(t)=\delta(t)+e^{-at}u(t),\ a>0$ **όπου δ(t) η κρουστική και u(t) η βηματική συνάρτηση αντίστοιχα. Βρείτε την έξοδο του συστήματος όταν στην είσοδο του εφαρμόσουμε το σήμα συνεχούς χρόνου** $x(t)=e^{-bt}u(t),\ b>0$ **(Να λάβετε υπόψη σας όλες τις περιπτώσεις)**

Λύση

Η έξοδος του ΓΧΑ είναι η συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης δηλ.

$$y(t)=x(t)*h(t)=x(t)*\left(\delta(t)+e^{-at}u(t)\right)=x(t)*\delta(t)+x(t)*e^{-at}u(t)=x(t)+x(t)*e^{-at}u(t)=e^{-bt}u(t)+e^{-bt}u(t)*e^{-at}u(t)=$$

$$=e^{-bt}u(t)+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-br}u(r)\bullet e^{-a(t-r)}u(t-r)dr=e^{-bt}u(t)+\int_{0}^{t}e^{-br}e^{-a(t-r)}dr=e^{-bt}u(t)+e^{-at}\int_{0}^{t}e^{-br}e^{ar}dr=e^{-bt}u(t)+e^{-at}\int_{0}^{t}e^{r(a-b)}dr$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

- ✓ **Αν a≠b τότε**

$$y(t)=e^{-bt}\bullet u(t)+e^{-at}\bullet\int_{0}^{t}e^{r(a-b)}dr=e^{-bt}+e^{-at}\bullet\frac{1}{a-b}\left[e^{r(a-b)}\right]_{0}^{t}=e^{-bt}\bullet u(t)+e^{-at}\bullet\frac{1}{a-b}\left[e^{t(a-b)}-1\right]=$$

$$e^{-bt}\bullet u(t)+\frac{e^{-at}\bullet e^{at}\bullet e^{-bt}}{a-b}-\frac{e^{-at}}{a-b}=e^{-bt}\bullet u(t)+\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{a-b}\bullet u(t)$$

Συνεπώς η έξοδος του συστήματος στην περίπτωση είναι: $\boxed{y(t)=e^{-bt}\bullet u(t)+\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{a-b}\bullet u(t)}$

- ✓ **Αν a=b τότε**

$$y(t)=e^{-bt}\bullet u(t)+e^{-at}\bullet\int_{0}^{t}dr=e^{-bt}\bullet u(t)+e^{-at}\bullet t\bullet u(t)$$

Συνεπώς η έξοδος του συστήματος στην περίπτωση είναι: $\boxed{y(t)=e^{-bt}\bullet u(t)+e^{-at}\bullet t\bullet u(t)}$

1.8.2 Θέμα 2β Άτυπη Σεπτέμβριος 2010

(α.1): (10%) Εξετάστε αν τα συστήματα που περιγράφονται από τις παρακάτω σχέσεις εισόδου-εξόδου είναι ΓΧΑ.

$$(1):\quad y(t)=\frac{1}{t_1+t_2}\int_{t-t_1}^{t+t_2}x^2(\tau)\,d\tau$$

$$(2):\quad y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau)\,x^{(r+1)}(\tau)\,d\tau+\sum_{n=1}^{N}a_n x(t-rt_n)$$

$$(3):\quad y(t)=ay(t-T)+x(t),\ |a|<1$$

(α.2): (10%) Για κάθε ένα από τα παραπάνω συστήματα που είναι ΓΧΑ, υπολογίστε την κρουστική απόκρισή του.

Λύση

Παρατήρηση

Υπάρχουν 3 τρόποι για να δείξουμε ότι ένα σύστημα είναι ΓΧΑ

α) Να δείξουμε ότι η έξοδος του είναι η συνέλιξη της εισόδου του και της κρουστικής του απόκρισης

β) Με τον ορισμό της γραμμικότητας και της χρονικής αμεταβλητότητας

γ) Να δείξουμε ότι το σύστημα δεν «γεννά» συχνότητες δηλ. δεν προσθέτει νέες συχνότητες στο σήμα εισόδου.

(1)
Για να εξετάσουμε αν το σύστημα είναι γραμμικό σκεφτόμαστε ως εξής:

$$y_A(t)=\frac{1}{t_1+t_2}\bullet\int_{t-t_1}^{t+t_2}(ax_1(r)+bx_2(r))^2\,dr$$

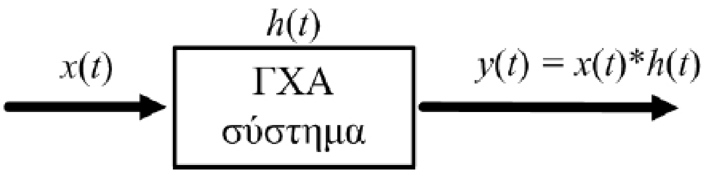
$$y_B(t)=a\bullet y(r)+b\bullet y_2(r)=a\bullet\frac{1}{t_1+t_2}\int_{t-t_1}^{t+t_2}x_1^2(r)\bullet dr+b\bullet\frac{1}{t_1+t_2}\int_{t-t_1}^{t+t_2}x_2^2(r)\bullet dr$$

Επειδή $y_A(t)\neq y_B(t)$ το σύστημα δεν είναι γραμμικό άρα ούτε ΓΧΑ.

(2)

Μας δίνεται η σχέση εισόδου-εξόδου $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau)x^{(r+1)}(\tau)d\tau+\sum_{n=1}^{N}a_n x(t-rt_n)$ ενός συστήματος. . Με $x(t)$ συμβολίζουμε το σήμα εισόδου, με $y(t)$ το σήμα εξόδου και με $\delta(t)$ την κρουστική συνάρτηση.

Αν δείξουμε ότι η έξοδος $y(t)$ μπορεί να γραφτεί ως $y(t)=x(t)*h(t)$ για κάποιο σήμα $h(t)$, τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ και το σήμα $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος. Με $*$ συμβολίζουμε την πράξη της συνέλιξης.



Στην αρχική σχέση παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα είναι η συνέλιξη των σημάτων $x^{(r+1)}(t)$ και $\delta(t)$.

Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή σχέση $x(t-t_0)=x(t)*\delta(t-t_0)$.

Άρα έχουμε.

$$y(t)=x^{(r+1)}(t)*\delta(t)+\sum_{n=1}^{N}a_n(x(t)*\delta(t-rt_n))$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα $x(t)*\delta^{(r+1)}(t)=(-1)^{r+1}\bullet x^{(r+1)}(t)\Rightarrow x^{(r+1)}(t)=\dfrac{x(t)*\delta^{(r+1)}(t)}{(-1)^{r+1}}=(-1)^{-(r+1)}\bullet x(t)*\delta^{(r+1)}(t)$

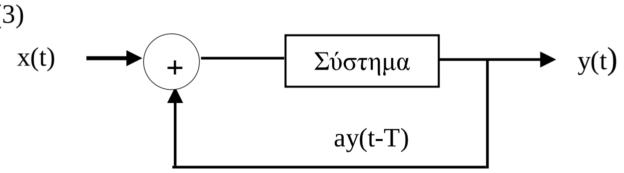
η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t)=\delta(t)*(-1)^{-(r+1)}\bullet x(t)*\delta^{(r+1)}(t)+x(t)*\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\delta(t-rt_n)=x(t)*\delta^{(r+1)}(t)\bullet(-1)^{-(r+1)}-x(t)*\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\delta(t-rt_n)=$$

$$=x(t)*\left[\delta^{(r+1)}(t)\bullet(-1)^{-(r+1)}+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\delta(t-rt_n)\right]$$

Θεωρώντας ως κρουστική απόκριση του συστήματος το σήμα $\boxed{h(t)=\delta^{(r+1)}(t)\bullet(-1)^{-(r+1)}+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\delta(t-rt_n)}$ παρατηρούμε ότι επειδή η έξοδος του συστήματος είναι η συνέλιξη εισόδου και κρουστικής απόκρισης το σύστημα είναι ΓΧΑ.

(3)



Στο συγκεκριμένο σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση $y(t) = ay(t-T) + x(t)$, η έξοδος είναι το σήμα $y(t)$ και η είσοδος είναι το σήμα $ay(t-T) + x(t)$.

α)Εξετάζουμε αν το σύστημα είναι γραμμικό

$$y_A(t) = b(ay_1(t-T) + x_1(t)) + c(y_2(t-T) + x_2(t))$$
$$y_B(t) = b \bullet y_1(t) + c \bullet y_2(t) = b \bullet (a \bullet y_1(t-T) + x_1(t)) + c \bullet (a \bullet y_2(t-T) + x_2(t))$$

Επειδή $y_A(t) = y_B(t)$ **το σύστημα είναι Γραμμικό**

β)Εξετάζουμε αν το σύστημα είναι Χρονικά Αμετάβλητο

$$y_A(t) = a \bullet y(t - t_0 - T) + x(t - t_0)$$
$$y_B(t) = y_B(t - t_0) = a \bullet y(t - t_0 - T) + x(t - t_0)$$

Επειδή $y_A(t) = y_B(t)$ **το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.**

Άρα το σύστημα είναι ΓΧΑ

Η κρουστική απόκριση του συστήματος προκύπτει ως εξής:

$$h(t) = a \bullet \delta(t-T) + \delta(t)$$

Προκύπτει θέτοντας ως σήμα εισόδου την $\delta(t)$ **δηλ.**

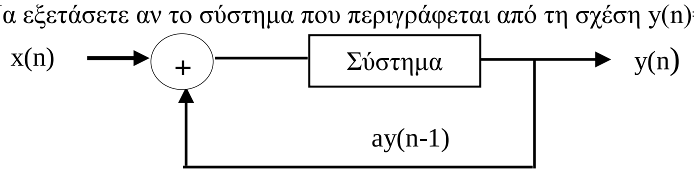
Παρατήρηση

Όταν ζητείται η κρουστική απόκριση ενός συστήματος τότε υπάρχουν 2 τρόποι για τον υπολογισμό της:

α)Υπολογίζουμε την έξοδο του συστήματος από τον τύπο y(t)=x(t)*h(t) και οποίο σήμα βρίσκεται δεξιά από τη συνέλιξη είναι η κρουστική απόκριση

β)Θέτουμε ως είσοδο του συστήματος την κρουστική συνάρτηση δ(t) και παίρνουμε ως έξοδο του συστήματος την κρουστική απόκριση h(t)

Να εξετάσετε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση y(n)=ay(n-1)+x(n) είναι ΓΧΑ;



<u>Απάντηση</u>

Στο συγκεκριμένο σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση y(n)=ay(n-1)+x(n), η έξοδος είναι το σήμα y(n) και η είσοδος είναι το σήμα ay(n-1)+x(n).

α)Εξετάζουμε αν το σύστημα είναι γραμμικό

$$y_A(n) = b(ay_1(n-1) + x_1(n)) + c(y_2(n-1) + x_2(n))$$
$$y_B(n) = b \bullet y_1(n) + c \bullet y_2(n) = b \bullet (a \bullet y_1(n-1) + x_1(n)) + c \bullet (a \bullet y_2(n-1) + x_2(n))$$

Επειδή $y_A(n) = y_B(n)$ **το σύστημα είναι Γραμμικό**

β)Εξετάζουμε αν το σύστημα είναι Χρονικά Αμετάβλητο

$$y_A(n) = a \bullet y(n - n_0 - 1) + x(n - n_0)$$

$$y_B(n) = y_B(n - n_0) = a \bullet y(n - n_0 - 1) + x(n - n_0)$$

Επειδή $y_A(n) = y_B(n)$ **το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.**

Άρα το σύστημα είναι ΓΧΑ

Η κρουστική απόκριση του συστήματος προκύπτει ως εξής:

$$h(n) = a \bullet \delta(n - 1) + \delta(n)$$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^2(t)dt$

<u>Απάντηση</u>

Δεν υπολογίζεται διότι $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \bullet \delta(t)dt = \delta(0)$

1.8.3 Θέμα 1 Ιούνιος 2010 και Ιανουάριος 2013

(α) (5%) Αποφανθείτε αν η σχέση $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(t-\tau)x(\tau)d\tau-\sum_{k=1}^{N} a_k x(t-(1+r\,\mathrm{mod}(2))t_k)$,

περιγράφει την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος συνεχούς χρόνου. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

(β)Υπολογίστε τις τιμές της ακολουθίας ολοκληρωμάτων $I_n = \int_{n}^{2(r+1)} e^{4t}\delta(2t-1)dt,\quad n=0,1,2,3,...$

<u>Λύση</u>

(α) <u>r mod 2 =0</u>

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} p(t-r)\bullet x(r)\bullet dr-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k x(t-t_k)=x(t)*p(t)-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k x(t)*\delta(t-t_k)=x(t)*p(t)-x(t)*\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\delta(t-t_k)=$$

$$=x(t)*\left[p(t)-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\delta(t-t_k)\right]$$

Θεωρώντας ως κρουστική απόκριση του συστήματος την $h(t)=p(t)-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\delta(t-t_k)$ παρατηρούμε ότι η έξοδος του συστήματος είναι η συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος άρα το σύστημα είναι ΓΧΑ με κρουστική απόκριση όπως αναφέραμε την $h(t)=p(t)-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\delta(t-t_k)$.

(β) <u>r mod 2 =1</u>

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} p(t-r)\bullet x(r)\bullet dr-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k x(t-2t_k)=x(t)*p(t)-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k x(t)*\delta(t-2t_k)=x(t)*p(t)-x(t)*\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\delta(t-2t_k)=$$

$$=x(t)*\left[p(t)-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\delta(t-2t_k)\right]$$

Θεωρώντας ως κρουστική απόκριση του συστήματος την $\boxed{h(t)=p(t)-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\delta(t-2t_k)}$ παρατηρούμε ότι η έξοδος του συστήματος είναι η συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος άρα η σχέση που μας δίνεται είναι όντως έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος.

(β)

Για n=0 προκύπτει ότι: $I_0=\int_{0}^{2(r+1)} e^{4t}\bullet\delta(2t-1)dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{2(r+1)} e^{4\frac{t}{2}}\bullet\delta(t-1)dt=\frac{1}{2}\bullet e^{4\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}e^2$

Για να ισχύει αυτό το αποτέλεσμα πρέπει η ολίσθηση της δ(t) να είναι μέσα στα όρια του ολοκληρώματος δηλ. $0<1<2(r+1)$. Η ανισότητα από αριστερά ισχύει εξορισμού, ενώ η για να ισχύει η ανισότητα από δεξιά πρέπει $r>-\frac{1}{2}$. Όμως επειδή το κάτω όριο του ολοκληρώματος είναι μικρότερο από το άνω όριο δηλ $0<2(r+1)\Rightarrow -2<2r\Rightarrow -1<r$ προκύπτει ότι το r είναι εξορισμού μεγαλύτερο από το -1 άρα είναι και μεγαλύτερο από το -1/2, οπότε έτσι επιβεβαιώνεται το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος.

Για n=1,2,3, … η ολίσθηση της δ(t) δεν είναι μέσα στα όρια του ολοκληρώματος άρα όλα τα επόμενα ολοκληρώματα είναι μηδέν.

1.8.4 Θέμα 1 Σεπτέμβριος 2013

Υποθέστε ότι οδηγούμε στην είσοδο ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)=2\delta(t)-\delta^{(1)}(t)$, το σήμα $x(t)=\cos\left(\Omega_0^{2+l \bmod 2}\, t\right)$. Υπολογίστε **την έξοδο του συστήματος**. Εξετάστε εάν το σύστημα είναι **ΦΕΦΕ ευσταθές**. Αν το σύστημα είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές **υπολογίστε την έξοδο του στην είσοδο** $x(t)=\left(u(t)\right)^{2+1 \bmod 2}$ όπου u(t) η βηματική συνάρτηση. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

Λύση

(α)(25%): Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γενικευμένης συνάρτησης $\delta(t)$:

$$\delta^{(n)}(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(\tau) f(t-\tau) d\tau = (-1)^n f^{(n)}(t),$$

έχουμε:

$$y(t) = h(t) * x(t) = 2\delta(t) * x(t) - \delta^{(1)}(t) * x(t) = 2x(t) + x^{(1)}(t). \qquad (1)$$

Παίρνοντας υπόψη μας ότι $x(t) = cos(\Omega_0^2 t)$ καταλήγουμε ότι η έξοδος του συστήματος θα είναι:

$$y(t) = 2cos(\Omega_0^2 t) - \Omega_0^2 sin(\Omega_0^2 t).$$

Το σύστημα δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές αφού μπορούμε να βρούμε φραγμένη είσοδο για την οποία η έξοδος δεν είναι φραγμένη. Πράγματι, επιλέγοντας ως είσοδο την βηματική συνάρτηση, δηλαδή $x(t) = u(t)$, από την (1) έχουμε ότι:

$$y(t) = 2u(t) + u^{(1)}(t) = 2u(t) + \delta(t),$$

η οποία είναι προφανές ότι δεν είναι φραγμένη.

Παρατήρηση

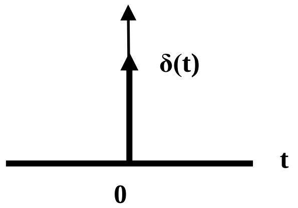
- Αν στην κρουστική απόκριση h(t) περιέχεται μόνο η κρουστική συνάρτηση δ(t) τότε το σύστημα μπορεί να είναι ΦΕΦΕ ευσταθές διότι με είσοδο π.χ. την u(t) που είναι φραγμένο σήμα η έξοδος είναι y(t)=u(t)*δ(t)=u(t) (ταυτοτικό σύστημα διότι δίνει ως έξοδο την είσοδο). Αν όμως στην κρουστική απόκριση h(t) περιέχεται μια παράγωγος της κρουστικής συνάρτησης δ(t) τότε το σύστημα δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές διότι με είσοδο π.χ. την u(t) που είναι φραγμένο σήμα η έξοδος είναι y(t)=u(t)*δ′(t)=u′(t)= δ(t) που δεν είναι φραγμένη
- Ισχύει η ιδιότητα: $\delta^{(n)}(t) * x(t) = (-1)^n \bullet x^{(n)}(t)$

Υπενθύμιση 1

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin'(f(t)) = f'(t) \bullet \cos(f(t)) \\ \cos'(f(t)) = -f'(t) \bullet \sin(f(t)) \end{array}}$$

Υπενθύμιση 2

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} = \dot{u}(t) = \begin{cases} \uparrow & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



1.8.5 Θέμα 1 Φεβρουάριος 2014

Υποθέστε ότι οδηγούμε στην είσοδο ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)=2\delta(t)-\delta^{(2)}(t)$, το σήμα $x(t)=\cos\left((2+l \bmod 2)\Omega_0 t\right)$. **Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος. Εξετάστε αν το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές. Αν το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές, υπολογίστε την έξοδο στην είσοδο** $x(t)=\left(u^{(3)}(t)\right)^{2+l \bmod 2}$ **όπου u(t) η βηματική συνάρτηση**. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

<u>Λύση</u>

$l \bmod 2 = 1$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γενικευμένης συνάρτησης δ(t) που είναι η $\delta^{(n)}(t)*f(t)=(-1)^n \bullet f^{(n)}(t)$ προκύπτουν τα εξής:

- ✓ Η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος είναι:
- ✓ y(t)=x(t)*h(t)= $\left(2\delta(t)-\delta^{(2)}(t)\right)*x(t)=2\delta(t)*x(t)-\delta^{(2)}(t)*x(t)=2\bullet x(t)-(-1)^2\bullet x^{(2)}(t)$
- ✓ Με είσοδο το σήμα εισόδου $x(t)=\cos(3\Omega_0 t)$ το σήμα εξόδου είναι το εξής:

$$y(t)=2\bullet\cos(3\Omega_0 t)-(-1)^2\bullet\cos^{(2)}(3\Omega_0 t)=2\bullet\cos(3\Omega_0 t)-\cos^{(2)}(3\Omega_0 t)=2\cos(3\Omega_0 t)+9\Omega_0^2\cos(3\Omega_0 t)$$

- ✓ Για να είναι το σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει για φραγμένο σήμα εισόδου να έχουμε και φραγμένο σήμα εξόδου. Γιαυτό δίνουμε ως είσοδο στο σύστημα τη βηματική συνάρτηση u(t) (που είναι ένα φραγμένο σήμα εισόδου) και η έξοδος που θα προκύψει είναι: $y(t)=2\bullet u(t)-u^{(2)}(t)=2\bullet u(t)-\delta^{(1)}(t)$
- ✓ **Παρατηρούμε ότι η έξοδος δεν είναι φραγμένη, άρα το σύστημα δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές**

$l \bmod 2 = 0$

- ✓ Η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος είναι:
- ✓ y(t)=x(t)*h(t)= $\left(2\delta(t)-\delta^{(2)}(t)\right)*x(t)=2\delta(t)*x(t)-\delta^{(2)}(t)*x(t)=2\bullet x(t)-(-1)^2\bullet x^{(2)}(t)=2x(t)-x^{(2)}(t)$
- ✓ Θέτουμε ως σήμα εισόδου το $x(t)=\cos(2\Omega_0 t)$ και έξοδος είναι: $y(t)=2\bullet\cos(2\Omega_0 t)+4\Omega_0^2\bullet\cos(2\Omega_0 t)$
- ✓ Για να είναι το σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει για φραγμένο σήμα εισόδου να έχουμε και φραγμένο σήμα εξόδου. Γιαυτό δίνουμε ως είσοδο στο σύστημα τη βηματική συνάρτηση u(t) (που είναι ένα φραγμένο σήμα εισόδου) και η έξοδος που θα προκύψει είναι: $y(t)=2\bullet u(t)-u^{(2)}(t)\Rightarrow y(t)=2\bullet u(t)-\delta^{(1)}(t)$
- ✓ **Παρατηρούμε ότι η έξοδος δεν είναι φραγμένη, άρα το σύστημα δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές**

Βασικές Παρατηρήσεις

- **Όταν η κρουστική απόκριση h(t) περιέχει την κρουστική συνάρτηση δ(t) τότε κατασκευάζουμε ένα γενικό τυπο για την έξοδο.**
- **Όταν η κρουστική απόκριση h(t) περιέχει την κρουστική συνάρτηση δ(t) τότε για να εξετάσουμε αν το σύστημα είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές θέτουμε στο γενικό τύπο της εξόδου τη βηματική συνάρτηση u(t)**

1.8.6 Θέμα 1β Ιούνιος 2010

(β) (15%) Υποθέστε ότι όταν οδηγούμε στην είσοδο ενός συστήματος το σήμα $x(t)=\cos(\Omega_0 t)$,

στην έξοδό του λαμβάνουμε το σήμα $y(t)=\sum_{k=0}^{99}\cos(k\Omega_0 t+(1+r\,\mathrm{mod}(2))\varphi_k),\ \varphi_k\in\mathbb{R}$.

Αποφανθείτε αν το σύστημα είναι ΓΧΑ. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

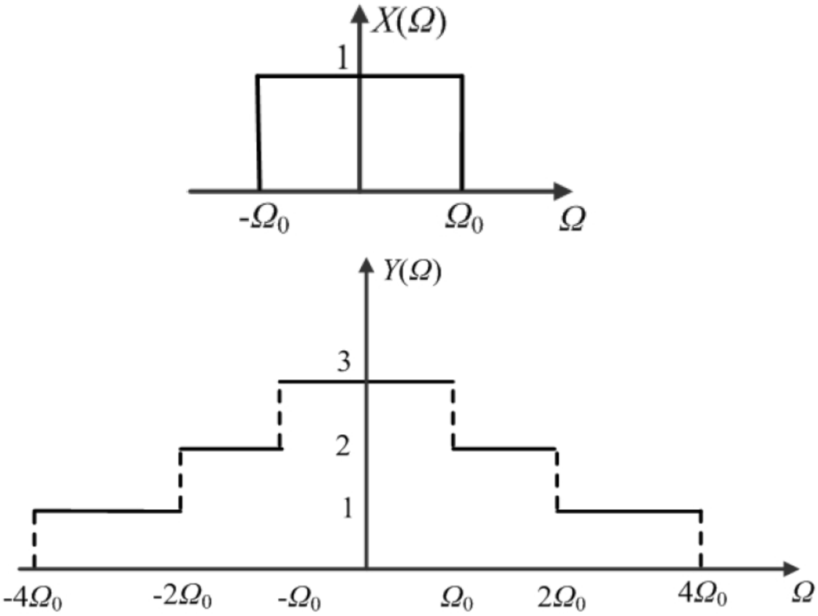
<u>Απάντηση</u>

Το σύστημα δεν είναι ΓΧΑ διότι προσθέτει συχνότητες στο σήμα εξόδου. Ένα ΓΧΑ σύστημα δεν «γεννά» συχνότητες, απλά μεταδίδει τις συχνότητες της εισόδου. Η έξοδος θα έπρεπε να έχει ως συχνότητα είτε την Ω_0 είτε κάποια μικρότερη συχνότητα αυτής για να είναι ΓΧΑ, αλλά όχι μεγαλύτερη συχνότητα αυτής

1.8.7 Άσκηση Φροντιστηρίου 2014

Αποφανθείτε αν το σύστημα που περιγράφεται από την είσοδο και την έξοδο που δίνονται στα ακόλουθα σχήματα είναι ΓΧΑ ή όχι

(α): (20%) Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι Μετασχηματισμοί Fourier (MF) των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$. Χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες του MF βρείτε με ποια σχέση συνδέονται τα παραπάνω σήματα.



<u>Λύση</u>

Το σύστημα δεν είναι ΓΧΑ διότι προσθέτει συχνότητες στο σήμα εξόδου. Ένα ΓΧΑ σύστημα δεν «γεννά» συχνότητες, απλά μεταδίδει τις συχνότητες της εισόδου.

Βασική Παρατήρηση

Για να εξετάσουμε αν ένα σύστημα είναι ΓΧΑ υπάρχουν 3 τρόποι:

α) Να αποδείξουμε ότι η έξοδος είναι συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης

β) Να αποδείξουμε ότι το σύστημα δεν «γεννά» νέες συχνότητες

γ) Να αποδείξουμε ότι εφαρμόζοντας ένα γραμμικό συνδυασμό στην είσοδο παίρνουμε ένα γραμμικό συνδυασμό και στην έξοδο. Επίσης αν εφαρμόσουμε χρονική ολίσθηση στην είσοδο αυτή μεταφέρεται και στην έξοδο.

1.8.8 Άσκηση με χαρακτηρισμό συστημάτων

Να χαρακτηρίσετε τα ακόλουθα συστήματα σύμφωνα με τα κριτήρια της ΦΕΦΕ ευστάθειας, αιτιατότητας, γραμμικότητας, χρονικής αμεταβλητότητας και στατικότητας.

(α) $y(t)=\cos(5t)\bullet x(t)$

(b) $y(t)=\dfrac{x(t-1)+1}{t+x(t)}$

<u>Λύση</u>

(α)

- Στατικό διότι η έξοδος εξαρτάται από την είσοδο την ίδια χρονική στιγμή
- Αιτιατό διότι η έξοδος δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου
- Γραμμικό διότι $y_1(t)=\cos(5t)\bullet\left(ax_1(t)+bx_2(t)\right)$ είναι ίσο με $y_2(t)=a\bullet x_1(t)\bullet\cos(5t)+b\bullet x_2(t)\bullet\cos(5t)$
- Δεν είναι Χρονικά Αμετάβλητο διότι $y_1(t)=\cos(5t)\bullet x(t-t_0)$ δεν είναι ίσο με $y_2(t)=\cos\left(5(t-t_0)\right)\bullet x(t-t_0)$
- Είναι ΦΕΦΕ ευσταθές διότι για φραγμένη είσοδο δηλ. αν $|x(t)|<\infty$ η έξοδος είναι φραγμένο σήμα ως γινόμενο δύο φραγμένων σημάτων αφού $|\cos(5t)|\leq 1$

(b) $y(t)=\dfrac{x(t-1)+1}{t+x(t)}$ Το σύστημα που περιγράφεται από αυτή τη σχέση εισόδου εξόδου:

- είναι Δυναμικό διότι η έξοδος εξαρτάται από την είσοδο σε διαφορετική χρονική στιγμή
- είναι Αιτιατό διότι η έξοδος δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου
- Δεν είναι Γραμμικό διότι η έξοδος $y_A(t)=\dfrac{ax_1(t-1)+bx_2(t-1)+1}{t+ax_1(t)+bx_2(t)}$ δεν είναι ίση με την έξοδο

  $$y_B(t)=ay_1(t)+by_2(t)=a\bullet\frac{x_1(t-1)+1}{t+x_1(t)}+b\bullet\frac{x_2(t-1)+1}{t+x_2(t)}$$

- Είναι Χρονικά Μεταβαλλόμενο διότι η έξοδος $y_A(t)=\dfrac{x(t-t_0-1)+1}{t+x(t-t_0-1)}$ δεν είναι ίση με την έξοδο

  $$y_B(t)=y(t-t_0)=\frac{x(t-t_0-1)+1}{(t-t_0)+x(t-t_0-1)}$$

- ΔΕΝ Είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές διότι για φραγμένη είσοδο δηλ. για $|x(t)|<\infty$ η έξοδος δεν είναι φραγμένο σήμα διότι αν $x(t)=-t$ τότε η έξοδος τείνει στο άπειρο και συνεπώς δεν είναι φραγμένη.

1.8.9 Άσκηση 1 από Project 2014

Χαρακτηρίστε ως προς την γραμμικότητα και τη ΦΕΦΕ ευστάθεια τα ακόλουθα συστήματα:

$$\begin{aligned} y[n] &= nx[n] \\ y[n] &= r^n x[n], r\in\mathcal{R} \\ y(t) &= x(t)x(t-1) \end{aligned}$$

<u>Λύση</u>

α) $y[n]=nx[n]$

Για να είναι γραμμικό το σύστημα πρέπει να ισχύει το εξής: $y_A[n]=y_B[n]$ όπου

$y_A[n]=n\left(ax_1[n]+bx_2[n]\right)=nax_1[n]+nbx_2[n]$

$y_B[n]=ay_1[n]+by_2[n]=anx_1[n]+bnx_2[n]$

Παρατηρούμε ότι όντως ισχύει ότι $y_A[n]=y_B[n]$ άρα το σύστημα είναι γραμμικό

Για είναι το σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει για φραγμένο σήμα εισόδου να έχουμε και φραγμένο σήμα εξόδου. Έστω ότι το σήμα εισόδου είναι φραγμένο δηλ. έστω ότι $\left|x[n]\right| < \infty$. Παρατηρούμε ότι όταν $n \to \infty$ τότε και το $y[n] \to \infty$, άρα το σύστημα ΔΕΝ είναι ΦΕΦΕ ευσταθές

β) $y[n] = r^n x[n], r \in R$

Για να είναι γραμμικό το σύστημα πρέπει να ισχύει το εξής: $y_A[n] = y_B[n]$ όπου

$$y_A[n] = r^n\left(ax_1[n] + bx_2[n]\right)$$

$$y_B[n] = ay_1[n] + by_2[n] = ar^n x_1[n] + br^n x_2[n]$$

Παρατηρούμε ότι όντως ισχύει ότι $y_A[n] = y_B[n]$ άρα το σύστημα είναι γραμμικό

Για είναι το σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει για φραγμένο σήμα εισόδου να έχουμε και φραγμένο σήμα εξόδου. Έστω ότι το σήμα εισόδου είναι φραγμένο δηλ. έστω ότι $\left|x[n]\right| < \infty$. Παρατηρούμε ότι όταν $r > 0$ και $n \to \infty$ τότε και το $y[n] \to \infty$, άρα το σύστημα ΔΕΝ είναι ΦΕΦΕ ευσταθές

γ) $y(t) = x(t) \bullet x(t-1)$

Για να είναι γραμμικό το σύστημα πρέπει να ισχύει το εξής: $y_A(t) = y_B(t)$ όπου

$$y_A(t) = \left(ax_1(t) + bx_2(t)\right) \bullet \left(ax_1(t-1) + bx_2(t-1)\right)$$

$$y_B(t) = ay_1(t) + by_2(t) = a\left(x_1(t) \bullet x_1(t-1)\right) + b\left(x_2(t) \bullet x_2(t-1)\right)$$

Παρατηρούμε ότι ΔΕΝ ισχύει ότι $y_A[n] = y_B[n]$ άρα το σύστημα ΔΕΝ είναι γραμμικό

Για είναι το σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει για φραγμένο σήμα εισόδου να έχουμε και φραγμένο σήμα εξόδου. Έστω ότι το σήμα εισόδου είναι φραγμένο δηλ. έστω ότι $\left|x(t)\right| < \infty$. Παρατηρούμε ότι όταν $\left|x(t)\right| < \infty$ τότε και το $\left|x(t-1)\right| < \infty$, άρα το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές

1.8.10 Άσκηση 7 από Project 2014

Χρησιμοποιώντας ιδιότητες της ιδιάζουσας κατανομής $\delta(t)$, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + sin(\frac{\pi t}{4}) + 2)\delta(t-4)dt \\
I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t^2-2)}\delta(t+\sqrt{2})dt \\
I_3 &= \int_{0}^{\infty} e^{t^2}\delta(t+2\sqrt{2})dt \\
I_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2t} sin(4t)\delta^{(2)}(t)dt \\
I_5 &= \int_{-\infty}^{\infty} (t^3 + 2t + 3)(\delta^{(1)}(t-1) + 2\delta^{(2)}(t-2))dt \\
I_6 &= \int_{0}^{2} e^{2t}\delta(2t-3)dt.
\end{aligned}$$

<u>Λύση</u>

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(t^2 + \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + 2\right) \bullet \delta(t-4)dt = 4^2 + \sin\left(\frac{\pi 4}{4}\right) + 2 = 16 + 2 = 18$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{\left(t^2-2\right)}\right) \bullet \delta\left(t+\sqrt{2}\right)dt = e^{\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-2\right)} = e^0 = 1$$

$I_3 = \int_{0}^{\infty}\left(e^{t^2}\right) \bullet \delta\left(t + 2\sqrt{2}\right)dt = 0$ διότι η ολίσθηση της δ(t) είναι εκτός ορίων ολοκληρώματος

$$I_4=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2t}\bullet\sin(4t)\delta^{(2)}(t)dt=(-1)^2\bullet\left(e^{2t}\bullet\sin(4t)\right)''\Big|_{t=0}=\left(2e^{2t}\sin(4t)+e^{2t}4\cos(4t)\right)'\Big|_{t=0}=$$

$$=\left(4e^{2t}\sin(4t)+8e^{2t}\cos(4t)+8e^{2t}\cos(4t)-16e^{2t}\sin(4t)\right)\Big|_{t=0}=16$$

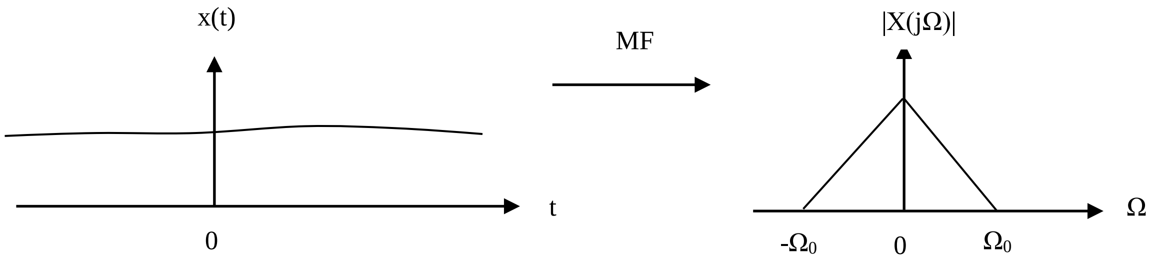
$$I_5=\int_{-\infty}^{\infty}\left(t^3+2t+3\right)\bullet\left(\delta^{(1)}(t-1)+2\delta^{(2)}(t-2)\right)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(t^3+2t+3\right)\bullet\delta^{(1)}(t-1)dt+\int_{-\infty}^{\infty}\left(t^3+2t+3\right)\bullet 2\delta^{(2)}(t-2)dt=$$

$$=(-1)^1\left(t^3+2t+3\right)'\Big|_{t=1}+(-1)^2\left(t^3+2t+3\right)''\Big|_{t=2}=-\left(3t^2+2\right)\Big|_{t=1}+\left(3t^2+2\right)'\Big|_{t=2}=-\left(3t^2+2\right)\Big|_{t=1}+(6t)\Big|_{t=2}=-5+12=7$$

$$I_6=\int_{0}^{2}e^{2t}\bullet\delta(2t-3)dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}e^{2t}\bullet\delta(t-3)dt=0$$ διότι η ολίσθηση της δ(t) είναι εκτός ορίων ολοκληρώματος

2 Δεύτερο Κεφάλαιο – Μετασχηματισμός Fourier και Σειρές Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι η μεταφορά ενός σήματος από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο συχνότητας π.χ.



2.1 Ορισμός μετασχηματισμού Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος συνεχούς χρόνου ορίζεται μαθηματικά ως εξής:

$$\boxed{X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bullet e^{-j\Omega t} dt}$$

2.2 Συμβολισμοί μετασχηματισμού Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος συνεχούς χρόνου συμβολίζεται με τους εξής τρόπους:

- $x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$
- $F\{x(t)\} = X(j\Omega)$
- $x(t) = F^{-1}\{X(j\Omega)\}$

2.3 Ορισμός αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος συνεχούς χρόνου ορίζεται μαθηματικά ως εξής:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) \bullet e^{j\Omega t} d\Omega}$$

2.4 Παραδείγματα υπολογισμού μετασχηματισμού Fourier Βασικών Σημάτων

Υπολογισμός MF της κρουστικής συνάρτησης δ(t)

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bullet e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \bullet e^{-j\Omega t} dt = 1$$

Υπολογισμός MF της συνάρτησης προσήμου sgn(t)

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bullet e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} sgn(t) \bullet e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-j\Omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-j\Omega t} dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-j\Omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-j\Omega t} dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-j\Omega t} dt = 2\frac{1}{-j\Omega}\left[e^{-j\Omega t}\right]_{0}^{\infty} = -\frac{2}{j\Omega}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) = \frac{2}{j\Omega}$$

Υπολογισμός MF του σήματος e^{-at} •u(t)

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bullet e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) \bullet e^{-j\Omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at} \bullet e^{-j\Omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t(a+j\Omega)} dt = \frac{1}{-(a+j\Omega)}\left[e^{-t(a+j\Omega)}\right]_{0}^{\infty} =$$

$$= -\frac{1}{(a+j\Omega)}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) = \frac{1}{(a+j\Omega)}$$

Υπολογισμός MF του σήματος e^{-at} •u(t)

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\bullet e^{-j\Omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{at}u(t)\bullet e^{-j\Omega t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{at}\bullet e^{-j\Omega t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-t(-a+j\Omega)}dt=\frac{1}{-\left(-a+j\Omega\right)}\left[e^{-t(-a+j\Omega)}\right]_0^{\infty}=$$
$$=\frac{1}{(a-j\Omega)}\left(e^{-\infty}-e^{0}\right)=-\frac{1}{(a-j\Omega)}=\frac{1}{-a+j\Omega}$$

Άρα οι MF μερικών Βασικών Σημάτων είναι οι ακόλουθοι:

$e^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{a+j\Omega}$	$e^{at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{-a+j\Omega}$	$\delta(t)\leftrightarrow 1$	$sgn(t)\leftrightarrow\frac{2}{j\Omega}$
$\cos(\Omega_0 t)\leftrightarrow\pi\left(\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right)$		$\sin(\Omega_0 t)\leftrightarrow\frac{\pi\left(\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)\right)}{j}$	

2.5 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

2.5.1 Ιδιότητα Γραμμικότητας

$x_1(t)\leftrightarrow X_1(j\Omega)$	Το σήμα $x_1(t)$ έχει ως MF τον $X_1(j\Omega)$
$x_2(t)\leftrightarrow X_2(j\Omega)$	Το σήμα $x_2(t)$ έχει ως MF τον $X_2(j\Omega)$
$ax_1(t)+bx_2(t)\leftrightarrow aX_1(j\Omega)+bX_2(j\Omega)$	Ο γραμμικός συνδυασμός των σημάτων $ax_1(t)+bx_2(t)$ έχει ως MF τον $aX_1(j\Omega)+bX_2(j\Omega)$ για οποιεσδήποτε σταθερές a και b

2.5.1.1 1º Παράδειγμα Γραμμικότητας

Να βρεθεί ο MF του σήματος $x(t)=2\delta(t)+3e^{-2t}u(t)+2e^{3t}u(t)$

<u>Απάντηση</u>

$\delta(t)\leftrightarrow 1$	MF της δ(t)
$2\delta(t)\leftrightarrow 2$	Ιδιότητα Γραμμικότητας
$e^{-2t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{2+j\Omega}$	MF του σήματος $e^{-2t}u(t)$
$3e^{-2t}u(t)\leftrightarrow 3\bullet\frac{1}{2+j\Omega}$	Ιδιότητα Γραμμικότητας
$e^{3t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{-3+j\Omega}$	MF της $e^{3t}u(t)$
$2e^{3t}u(t)\leftrightarrow 2\bullet\frac{1}{-3+j\Omega}$	Ιδιότητα Γραμμικότητας
$2\delta(t)+3e^{-2t}u(t)+2e^{3t}u(t)\leftrightarrow 2+\frac{3}{2+j\Omega}+\frac{2}{-3+j\Omega}$	Ιδιότητα Γραμμικότητας

2.5.1.2 2ᵒ Παράδειγμα Γραμμικότητας

- **Υπολογισμός MF της βηματικής συνάρτησης u(t)**

Η βηματική συνάρτηση u(t) γράφεται ως εξής: $u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$

$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$	MF του σήματος x(t)=1
$\frac{1}{2}\leftrightarrow \pi\delta(\Omega)$	MF του σήματος x(t)= $\frac{1}{2}$
$\mathrm{sgn}(t)\leftrightarrow \frac{2}{j\Omega}$	MF της συνάρτησης προσήμου sgn(t)
$\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)\leftrightarrow \frac{1}{2}\bullet\frac{2}{j\Omega}=\frac{1}{j\Omega}$	Ιδιότητα Γραμμικότητας
$u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)\leftrightarrow \pi\delta(\Omega)+\frac{1}{j\Omega}$	Ιδιότητα Γραμμικότητας

2.5.2 Χρονική Ολίσθηση

$x(t)\leftrightarrow X(j\Omega)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως MF τον $X(j\Omega)$
$x(t-t_0)\leftrightarrow e^{-j\Omega\bullet t_0}\bullet X(j\Omega)$	Δεξιά Χρονική Ολίσθηση του x(t) κατά t_0
$x(t+t_0)\leftrightarrow e^{j\Omega\bullet t_0}\bullet X(j\Omega)$	Αριστερή Χρονική Ολίσθηση του x(t) κατά t_0

<u>Παρατήρηση</u>: Στη χρονική ολίσθηση τα πρόσημα είναι ίδια

2.5.2.1 1ᵒ Παράδειγμα Χρονικής Ολίσθησης

Να βρεθεί ο MF του $2\bullet e^{-2(t-1)}\bullet u(t-1)$

<u>Απάντηση</u>

$e^{-at}\bullet u(t)\leftrightarrow \frac{1}{a+j\Omega}$	Το σήμα $e^{-at}u(t)$ έχει ως MF τον $\frac{1}{a+j\Omega}$
$e^{-2t}u(t)\leftrightarrow \frac{1}{2+j\Omega}$	Εφαρμογή προηγούμενου τύπου για a=2
$e^{-2(t-1)}\bullet u(t-1)\leftrightarrow e^{-j\Omega\bullet 1}\frac{1}{2+j\Omega}$	Δεξιά Χρονική Ολίσθηση με t_0=1
$2e^{-2(t-1)}\bullet u(t-1)\leftrightarrow 2e^{-j\Omega\bullet 1}\frac{1}{2+j\Omega}$	Ιδιότητα Γραμμικότητας

2.5.2.2 2ᵒ Παράδειγμα Χρονικής Ολίσθησης

Να βρεθεί ο MF του $3e^{2(t+3)}\bullet u(t+3)$

<u>Απάντηση</u>

$e^{at}u(t)\leftrightarrow \frac{1}{-a+j\Omega}$	Το σήμα $e^{at}u(t)$ έχει ως MF τον $\frac{1}{-a+j\Omega}$
$e^{2t}u(t)\leftrightarrow \frac{1}{-2+j\Omega}$	Εφαρμογή προηγούμενου τύπου για a=2

$e^{2(t+3)}u(t+3) \leftrightarrow e^{j\Omega\bullet 3}\dfrac{1}{-2+j\Omega}$	Δεξιά Χρονική Ολίσθηση με $t_0=-3$
$3e^{2(t+3)}u(t+3) \leftrightarrow 3e^{j\Omega\bullet 3}\dfrac{1}{-2+j\Omega}$	Ιδιότητα Γραμμικότητας

2.5.3 Ολίσθηση στη Συχνότητα

$x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως MF τον $X(j\Omega)$
$e^{j\Omega_0\bullet t}\bullet x(t) \leftrightarrow X(j(\Omega-\Omega_0))$	Δεξιά Συχνοτική Ολίσθηση κατά Ω_0
$e^{-j\Omega_0\bullet t}\bullet x(t) \leftrightarrow X(j(\Omega+\Omega_0))$	Αριστερή Συχνοτική Ολίσθηση κατά Ω_0

Παρατήρηση: Στη συχνοτική ολίσθηση τα πρόσημα είναι αντίθετα

2.5.3.1 1ο Παράδειγμα Συχνοτικής Ολίσθησης

Δίνεται ο MF $X(j\Omega)=\dfrac{1}{2+j\bullet(\Omega-1)}$.Να βρεθεί σε ποιο σήμα αντιστοιχεί;

Απάντηση

$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{a+j\Omega}$	Το σήμα $e^{-at}u(t)$ έχει ως MF τον $\dfrac{1}{a+j\Omega}$
$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2+j\Omega}$	Εφαρμογή προηγούμενου τύπου για a=2
$e^{j\bullet 1\bullet t}e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2+j(\Omega-1)}$	Συχνοτική Ολίσθηση προς τα δεξιά με $\Omega_0=1$

2.5.3.2 2ο Παράδειγμα Συχνοτικής Ολίσθησης

Δίνεται ο MF $X(j\Omega)=\dfrac{1}{-2+j\bullet(\Omega+3)}$.Να βρεθεί σε ποιο σήμα αντιστοιχεί;

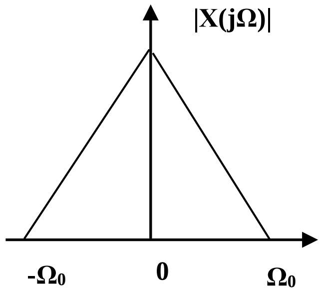
Απάντηση

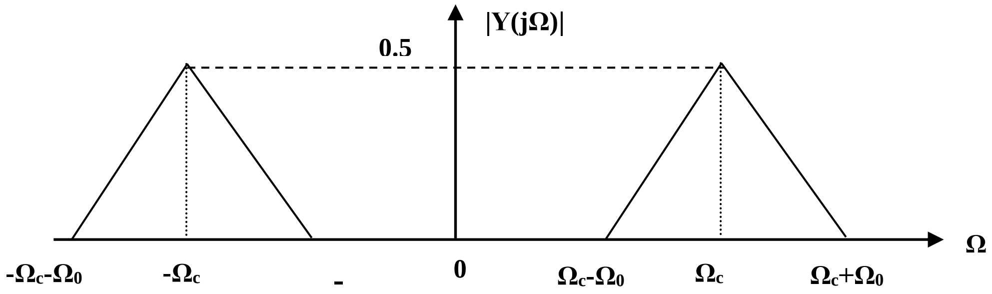
$e^{at}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{-a+j\Omega}$	Το σήμα έχει ως MF τον $\dfrac{1}{-a+j\Omega}$
$e^{2t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{-2+j\Omega}$	Εφαρμογή προηγούμενου τύπου για a=2
$e^{-j\bullet 3\bullet t}e^{2t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{-2+j\bullet(\Omega+3)}$	Συχνοτική Ολίσθηση προς τα αριστερά με $\Omega_0=-3$

2.5.4 Διαμόρφωση

$x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως MF τον $X(j\Omega)$
$x(t)\bullet\cos(\Omega_c t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left[X(j(\Omega-\Omega_c))+X(j(\Omega+\Omega_c))\right]$	Διαμόρφωση με cos
$x(t)\bullet\sin(\Omega_c t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2j}\left[X(j(\Omega-\Omega_c))-X(j(\Omega+\Omega_c))\right]$	Διαμόρφωση με sin
$y(t)=x(t)\bullet\cos(\Omega_c t+\theta) \leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left[X(j(\Omega-\Omega_c))\bullet e^{j\theta}+X(j(\Omega+\Omega_c))\bullet e^{-j\theta}\right]$	Διαμόρφωση με cos που έχει φάση

$x(t)\bullet\sin(\Omega_c t+\theta)\leftrightarrow \frac{1}{2j}\left[X(j(\Omega-\Omega_c))\bullet e^{j\theta}-X(j(\Omega+\Omega_c))\bullet e^{-j\theta}\right]$	Διαμόρφωση με sin που έχει φάση





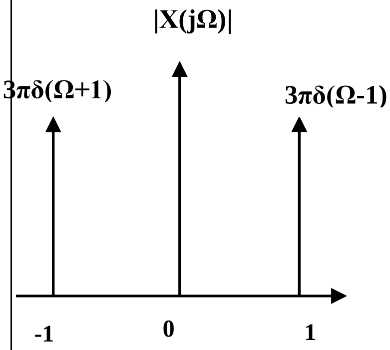
2.5.4.1 Παράδειγμα Διαμόρφωσης

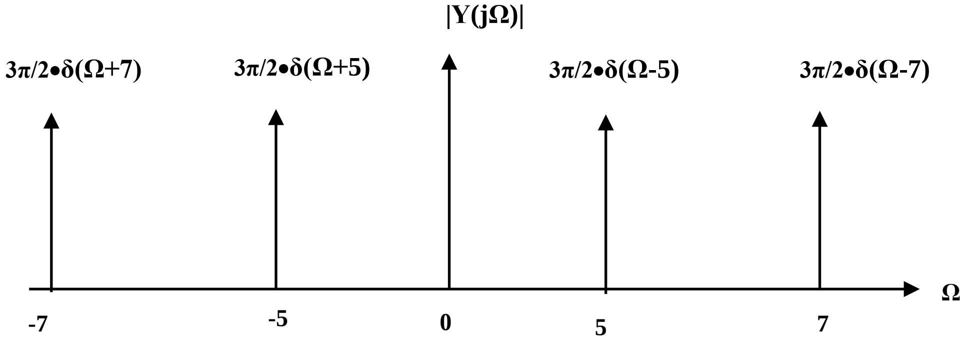
Να βρεθεί ο MF του σήματος $y(t)=3\bullet\cos(6t)\bullet\cos(t)$

Απάντηση

Θεωρούμε ως βασικό σήμα το $x(t)=3\cos(t)$ (αυτό με τη μικρότερη συχνότητα). Αυτό έχει πλάτος 3 και συχνότητα Ω_0=1 και ως συνημίτονο διαμόρφωσης θεωρούμε το $\cos(6t)$ (αυτό με τη μεγαλύτερη συχνότητα).

Σχηματικά ο MF του σήματος $y(t)=3\bullet\cos(6t)\bullet\cos(t)$ είναι ο εξής:



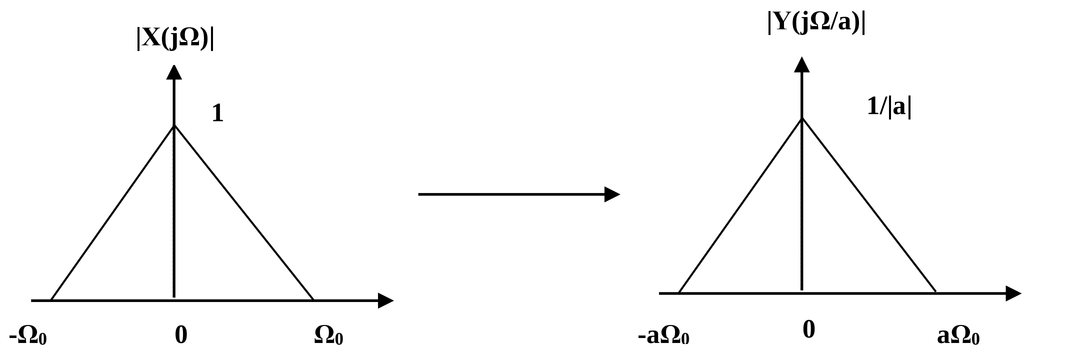


Τυπικά ο MF του σήματος $y(t)=3\bullet\cos(6t)\bullet\cos(t)$ είναι ο εξής:

$\cos(\Omega_0 t)\leftrightarrow\pi(\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0))$	MF του $\cos(\Omega_0 t)$
$\cos(t)\leftrightarrow\pi(\delta(\Omega-1)+\delta(\Omega+1))$	MF του cos(6t)
$3\cos(t)\leftrightarrow 3\pi(\delta(\Omega-1)+\delta(\Omega+1))$	Γραμμικότητα
$x(t)\bullet\cos(\Omega_c t)\leftrightarrow\frac{1}{2}(X(j(\Omega-\Omega_c))+X(j(\Omega+\Omega_c)))$	Διαμόρφωση
$3\bullet\cos(t)\bullet\cos(6t)\bullet\leftrightarrow\frac{1}{2}(3\pi(\delta(\Omega-6-1)+\delta(\Omega-6+1))+3\pi(\delta(\Omega+6-1)+\delta(\Omega+6+1)))$	Διαμόρφωση
$3\bullet\cos(t)\bullet\cos(6t)\bullet\leftrightarrow\frac{3\pi}{2}(\delta(\Omega-7)+\delta(\Omega-5)+\delta(\Omega+5)+\delta(\Omega+7))$	Διαμόρφωση

2.5.5 Κλιμάκωση

$x(t)\leftrightarrow X(j\Omega)$	Το σήμα x(t) έχει ως MF τον X(jΩ)
$x(at)\leftrightarrow\frac{1}{\lvert a\rvert}\bullet X\left(j\frac{\Omega}{a}\right)$	Κλιμάκωση στο χρόνο



<u>Παρατηρήσεις</u>

- Ο ίδιος συντελεστής που πολλαπλασιάζει το χρόνο ο ίδιος πολλαπλασιάζει και τη συχνότητα.
- Αν α<1 τότε ο **άξονας του χρόνου διαστέλλεται ενώ ο αντίστοιχος άξονας των συχνοτήτων συστέλλεται**.
- Αν α>1 τότε ο **άξονας του χρόνου συστέλλεται ενώ ο αντίστοιχος άξονας των συχνοτήτων διαστέλλεται**.

2.5.5.1 Παράδειγμα Κλιμάκωσης

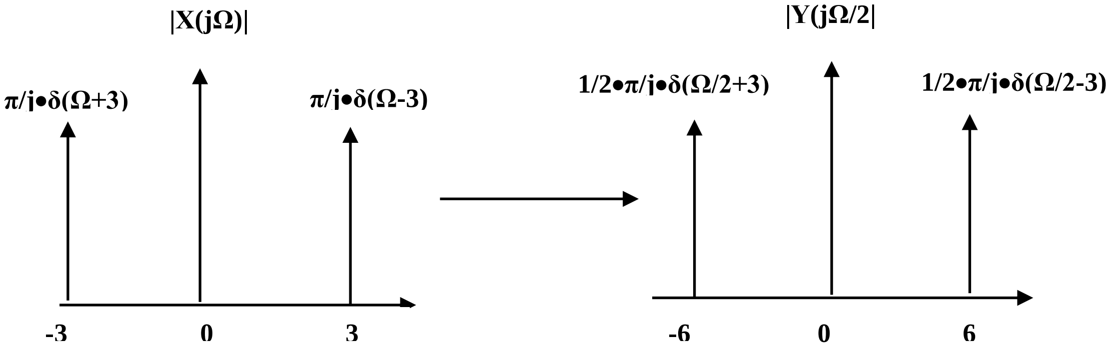
Αν $x(t)=\sin(3t)$ τότε να βρεθεί ο MF του σήματος $x(2t)$

<u>Απάντηση</u>

Τυπικά ο MF του σήματος $y(t)=x(2t)$ είναι ο εξής:

$x(t)\leftrightarrow X(j\Omega)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως MF τον $X(j\Omega)$
$\sin(\Omega_0 t)\leftrightarrow \frac{\pi}{j}\bullet\left(\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)\right)$	MF του $\sin(\Omega_0 t)$
$x(t)=\sin(3t)\leftrightarrow \frac{\pi}{j}\left(\delta(\Omega-3)-\delta(\Omega+3)\right)$	Το σήμα $\sin(3t)$ έχει ως MF τον $\frac{\pi}{j}\left[\delta(\Omega-3)-\delta(\Omega+3)\right]$
$x(2t)\leftrightarrow \frac{1}{2}\bullet\frac{\pi}{j}\bullet\left[\delta\left(\frac{\Omega}{2}-3\right)-\delta\left(\frac{\Omega}{2}+3\right)\right]$	Κλιμάκωση στο χρόνο

Σχηματικά ο MF του σήματος $y(t)=x(2t)$ είναι ο εξής:



2.5.6 Δυϊκότητα MF

$x(t)\leftrightarrow X(j\Omega)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως MF τον $X(j\Omega)$
$X(t)\leftrightarrow 2\pi\bullet x(-\Omega)$	Παίρνουμε τον MF, θέτουμε όπου Ω το t και τον μετατρέπουμε σε σήμα στο χρόνο και μετά παίρνουμε το σήμα στο χρόνο x(t), το πολλαπλασιάζουμε με 2π, θέτουμε όπου t το –Ω και το μετατρέπουμε σε MF. ΟΥΣΙΑΣΤΙΚΑ Η ΔΥΪΚΟΤΗΤΑ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΝΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΞΥ ΧΡΟΝΟΥ ΚΑΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

2.5.6.1 1º Παράδειγμα Δυϊκότητας

Αν $x(t)=e^{-3t}u(t)$ τότε να βρεθεί ο MF του $X(t)=\frac{1}{3+t}$

Απάντηση

$x(t)\leftrightarrow X(j\Omega)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως MF τον $X(j\Omega)$
$x(t)=e^{-3t}u(t)\leftrightarrow X(j\Omega)=\frac{1}{3+j\Omega}$	Το σήμα $x(t)=e^{-3t}u(t)$ έχει ως MF τον $\frac{1}{3+j\Omega}$
$X(t)=\frac{1}{3+t}\leftrightarrow 2\pi x(-\Omega)=2\pi\bullet e^{3\Omega}\bullet u(-\Omega)$	Εφαρμόζουμε τη δυϊκότητα

2.5.6.2 2º Παράδειγμα Δυϊκότητας

$\delta(t)\leftrightarrow 1$	Ο MF της δ(t)
$1\leftrightarrow 2\pi\delta(-\Omega)=2\pi\delta(\Omega)$	Δυϊκότητα στον προηγούμενο MF

Παρατήρηση

Όταν το σήμα στο χρόνο είναι της μορφής $X(t)=\frac{1}{\alpha+t}$ ή $X(t)=\frac{1}{-\alpha+t}$ και ζητείται ο MF αυτού τότε εφαρμόζουμε ιδιότητες δυϊκότητας για να τον υπολογίσουμε.

2.5.7 Παραγώγιση στο Χρόνο

$x(t)\leftrightarrow X(j\Omega)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως MF τον $X(j\Omega)$
$\frac{d^n x(t)}{dt^n}\leftrightarrow (j\Omega)^n\bullet X(j\Omega)$	Πολλαπλασιάζουμε τον MF του σήματος x(t) δηλαδή το $X(j\Omega)$ με τον όρο $(j\Omega)^n$ όπου το n εκφράζει την τάξη της παραγώγου

2.5.7.1 Παράδειγμα Παραγώγισης στο Χρόνο

Αν $x(t)=e^{-3t}u(t)$ τότε να βρεθεί ο MF του σήματος $\frac{d^2\left(e^{-3t}u(t)\right)}{dt^2}$

Απάντηση

$x(t)\leftrightarrow X(j\Omega)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως MF τον $X(j\Omega)$
$x(t)=e^{-3t}u(t)\leftrightarrow X(j\Omega)=\frac{1}{3+j\Omega}$	Το σήμα $y(t)$ έχει ως MF τον $Y(j\Omega)$
$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{d^2\left(e^{-3t}u(t)\right)}{dt^2}\leftrightarrow (j\Omega)^2\bullet X(j\Omega)=(j\Omega)^2\bullet\frac{1}{3+j\Omega}$	Ιδιότητα Παραγώγισης στο Χρόνο

2.5.8 Παραγώγιση στη (Μιγαδική) Συχνότητα

$x(t)\leftrightarrow X(j\Omega)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως MF τον $X(j\Omega)$
$t^n\bullet x(t)\leftrightarrow j^n\bullet\frac{d^nX(j\Omega)}{d\Omega^n}$	Τρόπος συμβολισμού της παραγώγισης στη μιγαδική συχνότητα

2.5.8.1 1º Παράδειγμα Παραγώγισης στη μιγαδική Συχνότητα

Θέλουμε να υπολογίσουμε σε ποιο σήμα αντιστοιχεί ο $X(j\Omega)=\frac{d^3}{d\Omega^3}\left(\frac{1}{1+j\Omega}\right)$

Απάντηση

$x(t)\leftrightarrow X(j\Omega)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως MF τον $X(j\Omega)$
$x(t)=e^{-t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{1+j\Omega}=X(j\Omega)$	Το σήμα $e^{-t}u(t)$ έχει ως MF τον $\frac{1}{1+j\Omega}$

$t^3e^{-t}u(t) \leftrightarrow j^3\dfrac{d^3X(j\Omega)}{d\Omega^3}$	Ιδιότητα παραγώγισης στη συχνότητα
$\dfrac{t^3e^{-t}u(t)}{j^3} \leftrightarrow \dfrac{d^3X(j\Omega)}{d\Omega^3}$	Υπολογισμός σήματος που αντιστοιχεί στη n-οστή παράγωγο του MF $\dfrac{1}{1+j\Omega}$

2.5.8.2 2ο Παράδειγμα Παραγώγισης στη Μιγαδική Συχνότητα

Θέλουμε να υπολογίσουμε το MF του σήματος $t^2e^{-3t}u(t)$

<u>Απάντηση</u>

$x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως MF τον $X(j\Omega)$
$x(t) = e^{-3t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{3+j\Omega} = X(j\Omega)$	Το σήμα $e^{-3t}u(t)$ έχει ως MF τον $\dfrac{1}{3+j\Omega}$
$t^2e^{-3t}u(t) \leftrightarrow j^2 \bullet \dfrac{d^2}{d\Omega^2}\left(\dfrac{1}{3+j\Omega}\right)$	Ιδιότητα Παραγώγισης στη Μιγαδική Συχνότητα

Παρατήρηση

Η παράγωγος κλάσματος είναι $\left(\dfrac{a}{b}\right)' = \dfrac{a' \bullet b - a \bullet b'}{b^2}$

2.5.9 Θεώρημα Συνέλιξης στο Χρόνο

$x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως MF τον $X(j\Omega)$
$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(j\Omega) \bullet Y(j\Omega)$	**ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ**

2.5.9.1 Παράδειγμα Συνέλιξης στο Χρόνο

Αν $x(t) = e^{-5t}u(t)$ και $y(t) = e^{2t}u(t)$ τότε να βρεθεί ο MF της συνέλιξης $x(t) * y(t)$

<u>Απάντηση</u>

$x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως MF τον $X(j\Omega)$
$y(t) \leftrightarrow Y(j\Omega)$	Το σήμα $y(t)$ έχει ως MF τον $Y(j\Omega)$
$e^{-5t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{5+j\Omega}$	Ο MF του σήματος $e^{-5t}u(t)$
$e^{2t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{-2+j\Omega}$	Ο MF του σήματος $e^{2t}u(t)$
$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(j\Omega) \bullet Y(j\Omega)$	Θεώρημα Συνέλιξης στο Χρόνο
$e^{-5t}u(t) * e^{2t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{5+j\Omega} \bullet \dfrac{1}{-2+j\Omega}$	Εφαρμόζουμε θεώρημα συνέλιξης και υπολογίζομε τον MF του σήματος $e^{-5t} * e^{2t}$

2.5.10 Θεώρημα Συνέλιξης στη Συχνότητα

$x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως MF τον $X(j\Omega)$
$x(t) \bullet y(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}(X(j\Omega) * Y(j\Omega))$	**ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΣΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ**

2.5.10.1 Παράδειγμα Συνέλιξης στη Συχνότητα

Να βρεθεί σε ποιο σήμα αντιστοιχεί ο MF: $\left(\dfrac{1}{5+j\Omega}\right) * \left(\dfrac{1}{-2+j\Omega}\right)$

Απάντηση

$x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως MF τον $X(j\Omega)$
$y(t) \leftrightarrow Y(j\Omega)$	Το σήμα $y(t)$ έχει ως MF τον $Y(j\Omega)$
$e^{-5t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{5+j\Omega}$	Ο MF του σήματος $e^{-5t}u(t)$
$e^{2t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{-2+j\Omega}$	Ο MF του σήματος $e^{2t}u(t)$
$e^{-5t}u(t) \bullet e^{2t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{1}{5+j\Omega} * \dfrac{1}{-2+j\Omega}\right)$	Θεώρημα Συνέλιξης στη Συχνότητα
$2\pi \bullet e^{-5t}u(t) \bullet e^{2t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{5+j\Omega} * \dfrac{1}{-2+j\Omega}$	Γραμμικότητα

2.6 Γνωστοί Μετασχηματισμοί Fourier

Σήμα x(t)	Μετασχηματισμός Fourier X(jΩ)	Σχόλιο
$\delta(t)$	1	MF κρουστικής συνάρτησης
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j\Omega}$	MF σήματος $e^{-at}u(t)$
$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{-a+j\Omega}$	MF σήματος $e^{at}u(t)$
$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+\Omega^2}$	MF σήματος $e^{-a\|t\|}$
$\begin{cases} 1 & \|t\|<\frac{T_1}{2} \\ 0 & \|t\|>\frac{T_1}{2} \end{cases}$	$T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right)$	MF τετραγωνικού παλμού
$\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\Omega}$	MF συνάρτησης προσήμου sgn(t)
1	$2\pi\delta(\Omega)$	MF σήματος 1
$\cos(\Omega_0 t)$	$\pi(\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0))$	MF $\cos(\Omega_0 t)$
$\sin(\Omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}(\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0))$	MF $\sin(\Omega_0 t)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)$	MF βηματικής συνάρτησης
$e^{j\Omega_0 t}$	$2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$	MF σήματος $e^{j\Omega_0 t}$
$\frac{\sin(\Omega_0 t)}{\pi t}$	$\begin{cases} 1 & \|\Omega\|<\Omega_0 \\ 0 & \|\Omega\|>\Omega_0 \end{cases}$	Κρουστική Απόκριση κατωπερατού φίλτρου
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a+j\Omega)^n}$	Αυτό αποδεικνύεται παραγωγίζοντας τον MF $\frac{1}{(a+j\Omega)}$ n φορές
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a+j\Omega)^2}$	Η προηγούμενη ιδιότητα για n=2
$\begin{cases} 1-\|t\| & \|t\|<1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$	$\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)$	MF τριγωνικού παλμού

2.7 Λύσεις Ασκήσεων 2ου Σετ

2.7.1 Άσκηση 1.1

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier των παρακάτω συναρτήσεων και δώστε τη γραφική του παράσταση

$\alpha)\ x(t) = \delta(t)$

$\beta)\ x(t) = e^{-\alpha t}u(t),\ \alpha > 0$

$\gamma)\ x(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha > 0,$

$$\delta)\ x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T_1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T_1}{2} \end{cases}$$

Λύση

α)Για να βρούμε το MF της x(t)=δ(t) παίρνουμε τον ορισμό του MF:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\Omega t}dt = 1$$

β)Για να βρούμε το MF της $x(t) = e^{-at}u(t)$ με α>0 παίρνουμε τον ορισμό του MF:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t(a+j\Omega)}dt = \frac{1}{-(a+j\Omega)}\left[e^{-t(a+j\Omega)}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{(a+j\Omega)}(0-1) = \frac{1}{a+j\Omega}$$

γ)Για να βρούμε το MF της $x(t) = e^{-a|t|}$ με α>0παίρνουμε τον ορισμό του MF:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \bullet e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\Omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\Omega t}dt = -\int_{0}^{\infty} e^{at}e^{-j\Omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\Omega t}dt =$$

$$= -\int_{0}^{\infty} e^{-t(-a+j\Omega)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t(a+j\Omega)t}dt = -\frac{1}{-(-a+j\Omega)}\left[e^{-t(-a+j\Omega)t}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{-(a+j\Omega)}\left[e^{-t(a+j\Omega)}\right]_0^{\infty} =$$

$$\frac{1}{(-a+j\Omega)}(0-1) - \frac{1}{(a+j\Omega)}(0-1) = -\frac{1}{(-a+j\Omega)} + \frac{1}{(a+j\Omega)} = \frac{2a}{a^2+\Omega^2}$$

Παρατήρηση

Η εναλλαγή των ορίων ολοκλήρωσης αλλάζει το πρόσημο του ορισμένου ολοκληρώματος

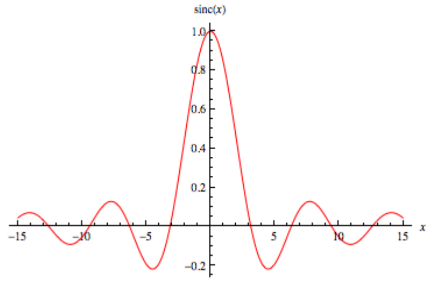
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

δ) Για να βρούμε το MF της $x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T_1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T_1}{2} \end{cases}$ παίρνουμε τον ορισμό του MF:

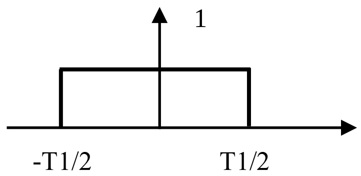
$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} e^{-j\Omega t}dt \frac{1}{-j\Omega}\left[e^{-j\Omega t}\right]_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} = -\frac{1}{j\Omega}\left(e^{-j\Omega\frac{T_1}{2}} - e^{j\Omega\frac{T_1}{2}}\right) =$$

$$\frac{\left(e^{-j\Omega\frac{T_1}{2}} - e^{j\Omega\frac{T_1}{2}}\right)}{2j} \bullet \frac{2}{\Omega} = \sin\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right) \bullet \frac{2}{\Omega} = \frac{\sin\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right)}{\frac{\Omega}{2}} = T_1 \bullet \frac{\sin\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right)}{\frac{\Omega T_1}{2}} = T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right)$$

Σημείωση: Η συνάρτηση sinc(x) ορίζεται ως: $\mathrm{sinc}(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$, ονομάζεται συνάρτηση δειγματοληψίας και παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις τηλεπικοινωνίες. Η γραφική της αναπαράσταση δίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

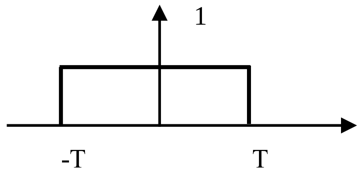


Παρατηρούμε ότι εκτείνεται στο (-∞,∞) (στο σχήμα απεικονίζεται ενδεικτικά μόνο ένα τμήμα της) και έχει μειούμενο πλάτος. **Γιαυτό το λόγο το σήμα sinc δεν είναι ζωνοπεριορισμένο καθώς δεν έχει μέγιστη συχνότητα και ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΗΘΕΙ.**



$\longleftrightarrow \quad T_1\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\Omega T_1}{2}\right)$

<u>Γενικός τύπος Ορθογώνιου Παλμού</u>



$\longleftrightarrow \quad \boxed{2\bullet T\mathrm{sinc}(\Omega T)}$

2.7.2 Άσκηση 1.2

Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier των ακόλουθων σημάτων

α) $x(t)=[e^{-\alpha t}cos(\omega_0 t)]u(t)$

β) $x(t)=e^{-3|t|}sin2t$

γ) $x(t)=\begin{cases} 1+cos(\pi t) & , \ |t|\leq 1 \\ 0 & , \ |t|>1 \end{cases}$

δ) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|t-2n|}$

<u>Λύση</u>

α)

<u>Α τρόπος</u>

Δίνεται η και ζητείται ο MF της.

Είναι γνωστό ότι: $x(t)=[e^{-at}\cos(\Omega_0 t)]u(t)$ άρα $y(t)=e^{-at}u(t)\leftrightarrow Y(j\Omega)=\dfrac{1}{a+j\Omega}$

Σύμφωνα με την ιδιότητα διαμόρφωσης με $\cos(\Omega_0 t)$ ισχύει ότι:

Άρα $e^{-at}u(t)\cos(\Omega_0 t)\leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{a+j(\Omega-\Omega_0)}+\dfrac{1}{a+j(\Omega+\Omega_0)}\right]$

β)Δίνεται η $x(t)=e^{-3|t|}\sin(2t)$ και ζητείται ο MF της.

Είναι γνωστό ότι: $e^{-a|t|}u(t) \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\Omega^2}$, άρα $y(t)=e^{-3|t|} \leftrightarrow Y(j\Omega)=\frac{6}{9+\Omega^2}$

Σύμφωνα με την ιδιότητα διαμόρφωσης με sin ισχύει ότι:

$$x(t)\bullet\sin(\Omega_c t)\leftrightarrow\frac{1}{2j}\left[X(j(\Omega-\Omega_c))-X(j(\Omega+\Omega_c))\right]$$

Άρα $e^{-3|t|}u(t)\bullet\sin(2t)\leftrightarrow\frac{1}{2j}\bullet\left[X(j(\Omega-2))-X(j(\Omega+2)\right]=\frac{1}{2j}\bullet\left[\frac{6}{9+(\Omega-2)^2}-\frac{6}{9+(\Omega+2)^2}\right]$

γ) Δίνεται η $x(t)=\begin{cases}1+\cos(\pi t) & |t|\leq 1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$ και ζητείται ο MF της.

Χρησιμοποιούμε τον ορισμό του MF για την x(t) και προκύπτει ότι:

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\bullet e^{-j\Omega t}dt=\int_{-1}^{1}[1+\cos(\pi t)]\bullet e^{-j\Omega t}dt=\int_{-1}^{1}e^{-j\Omega t}dt+\int_{-1}^{1}\cos(\pi t)\bullet e^{-j\Omega t}dt=$$

$$=\int_{-1}^{1}e^{-j\Omega t}dt+\int_{-1}^{1}\frac{e^{j\pi t}+e^{-j\pi t}}{2}\bullet e^{-j\Omega t}dt=\int_{-1}^{1}e^{-j\Omega t}dt+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{j\pi t}\bullet e^{-j\Omega t}dt+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{-j\pi t}\bullet e^{-j\Omega t}dt=$$

$$=\int_{-1}^{1}e^{-j\Omega t}dt+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{jt(\pi-\Omega)}dt+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{-jt(\pi+\Omega)}dt=\frac{1}{-j\Omega}\left[e^{-j\Omega t}\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{j(\pi-\Omega)}\left[e^{jt(\pi-\Omega)}\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{-j(\pi+\Omega)}\left[e^{-jt(\pi+\Omega)}\right]_{-1}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{j\Omega}\bullet\left(e^{-j\Omega}-e^{j\Omega}\right)+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{j(\pi-\Omega)}\bullet\left(e^{j(\pi-\Omega)}-e^{-j(\pi-\Omega)}\right)-\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{j(\pi+\Omega)}\bullet\left(e^{-j(\pi+\Omega)}-e^{j(\pi+\Omega)}\right)=$$

$$=\frac{\left(e^{j\Omega}-e^{-j\Omega}\right)}{2j}\bullet\frac{2}{\Omega}+\frac{1}{\pi-\Omega}\bullet\frac{e^{j(\pi-\Omega)}-e^{-j(\pi-\Omega)}}{2j}+\frac{1}{\pi+\Omega}\bullet\frac{e^{j(\pi+\Omega)}-e^{-j(\pi+\Omega)}}{2j}=$$

$$=\frac{2}{\Omega}\bullet\sin(\Omega)+\frac{1}{\pi-\Omega}\bullet\sin(\pi-\Omega)+\frac{1}{\pi+\Omega}\bullet\sin(\pi+\Omega)=\frac{2}{\Omega}\bullet\sin(\Omega)+\frac{1}{\pi-\Omega}\bullet\sin(\Omega)-\frac{1}{\pi+\Omega}\bullet\sin(\Omega)$$

Άρα $\boxed{x(t)=\begin{cases}1+\cos(\pi t) & |t|\leq 1\\ 0 & |t|>1\end{cases}\leftrightarrow\sin(\Omega)\bullet\frac{\pi^2}{(\pi^2-\Omega^2)\bullet\Omega}}$

Σημείωση: Στον υπολογισμό του τελικού αποτελέσματος χρησιμοποιήσαμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες: sin(π-Ω)=sin(Ω) και sin(π+Ω)=-sin(Ω)

δ) Θέλουμε να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier του σήματος $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-|t-2n|}$

Χρησιμοποιώντας το γνωστό MF: $e^{-a|t|}\leftrightarrow\frac{2a}{a^2+\Omega^2}$ με α>0 προκύπτει για a=1 ότι:

$$x(t)=e^{-|t|}\leftrightarrow X(j\Omega)=\frac{2}{1+\Omega^2}$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα χρονικής ολίσθησης $x(t-t_0)\leftrightarrow e^{-j\Omega t_0}X(j\Omega)$ προκύπτει ότι:

$$e^{-|t-2n|}\leftrightarrow e^{-j\Omega 2n}\frac{2}{1+\Omega^2}$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα γραμμικότητας προκύπτει ότι:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|t-2n|} \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega 2n} \frac{2}{1+\Omega^2} \Rightarrow$$

$$x(t) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega 2n} \frac{2}{1+\Omega^2} \Rightarrow$$

$$x(t) \leftrightarrow \frac{2}{1+\Omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega 2n} \Rightarrow$$

$$x(t) \leftrightarrow \frac{2}{1+\Omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\cos(2\Omega n) - j\sin(2\Omega n)\right) \Rightarrow$$

$$x(t) \leftrightarrow \frac{2}{1+\Omega^2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\Omega n) - j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(2\Omega n) \right)$$

Το cos είναι άρτια συνάρτηση δηλαδή cos(Ωt)=cos(-Ωt) άρα cos(2Ωn)=cos(-2Ωn) οπότε το $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\Omega n) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \cos(2\Omega n) - 1$**. Το 1 αφαιρείται διότι το υπολογίζουμε δύο φορές στο διάστημα από 0 μέχρι το ∞.**

Το sin είναι περιττή συνάρτηση δηλαδή -sin(Ωt)=sin(-Ωt) άρα -sin(2Ωn)=sin(-2Ωn) οπότε το $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(2\Omega n) = 0$**. Το sin(0)=0 οπότε εξαλείφεται όλο το άθροισμα.**

Τελικά: $\boxed{x(t) \leftrightarrow \frac{2}{1+\Omega^2} \left(2 \bullet \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2\Omega n) - 1 \right)}$

2.7.3 Άσκηση 1.3

Αν ο MF είναι αυτός που δίνεται σε κάθε περίπτωση, ποια είναι η συνάρτηση $x(t)$

(α) $X(j\omega) = \frac{2}{j\omega}$

(β) $X(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^n}$. (Υπόδειξη: Η συνάρτηση $X(j\omega)$ είναι ανάλογη με την $(n-1)$ παράγωγο της $\frac{1}{1+j\omega}$

<u>Λύση</u>

α)Θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο MF του $X(j\Omega) = \frac{2}{j\Omega}$. Γιαυτό παίρνουμε τον τύπο του αντίστροφου MF και προκύπτει ότι:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{j\Omega} e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{j\Omega} \left(\cos(\Omega t) + j\sin(\Omega t)\right) d\Omega =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{j\Omega} \cos(\Omega t) d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{j\Omega} j\sin(\Omega t) d\Omega = \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\Omega t)}{\Omega} d\Omega + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} d\Omega$$

Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\Omega t)}{\Omega} d\Omega$ **κάνει μηδέν διότι η συνάρτηση** $\frac{\cos(\Omega t)}{\Omega}$ **είναι περιττή και ισχύει εξορισμού ότι το ολοκλήρωμα μιας περιττής συνάρτησης στο διάστημα από -∞ έως ∞ ισούται με μηδέν. Ο λόγος που είναι περιττή είναι διότι:** $\frac{\cos(\Omega t)}{\Omega} = \frac{\cos(-\Omega t)}{-\Omega} = \frac{\cos(\Omega os}{-\Omega} = -\frac{\cos(\Omega os}{\Omega}$

Η συνάρτηση $\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega}$ είναι άρτια αφού $\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega}=\frac{\sin(-\Omega t)}{-\Omega}=\frac{-\sin(\Omega in}{-\Omega}=\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega}$

Ισχύει ότι το ολοκλήρωμα μιας άρτιας συνάρτησης στο διάστημα μιας περιόδου ισούται με μηδέν.

Άρα προκύπτει ότι $\boxed{x(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega}d\Omega}$ Αυτός όμως είναι ο ορισμός της συνάρτησης προσήμου sgn(t) οπότε x(t)=sgn(t)

β) Θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο MF του $X(j\Omega)=\frac{1}{(1+j\Omega)^n}$

Είναι γνωστό ότι: $x(t)=e^{-t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{1+j\Omega}=X(j\Omega)$

Σύμφωνα με την ιδιότητα παραγώγισης στη συχνότητα ισχύει ότι: $t^n\bullet e^{-t}\bullet u(t)\leftrightarrow j^n\bullet\left(\frac{1}{1+j\Omega}\right)^{(n)}$ (1)

- Παίρνοντας την $1^η$ παράγωγο του X(jΩ) προκύπτει ότι: $\left(\frac{1}{1+j\Omega}\right)^{(1)}=\frac{(-1)j}{(1+j\Omega)^2}$
- Παίρνοντας την $2^η$ παράγωγο του X(jΩ) προκύπτει ότι: $\left(\frac{1}{1+j\Omega}\right)^{(2)}=\frac{(-1)(-2)j^2}{(1+j\Omega)^3}$
- Παίρνοντας την $3^η$ παράγωγο του X(jΩ) προκύπτει ότι: $\left(\frac{1}{1+j\Omega}\right)^{3}\frac{(-1)(-2)(-3)j^3}{(1+j\Omega)^4}$

……………….

- Παίρνοντας την $(n-1)^η$ παράγωγο του X(jΩ) προκύπτει ότι: $\left(\frac{1}{1+j\Omega}\right)^{(n)-1}=\frac{(-1)(-2)(-3)......(-(n-1))j^{n-1}}{(1+j\Omega)^n}$ (2)

Αντικαθιστώντας τη (2) στην (1) προκύπτει ότι:

$$t^{n-1}\bullet e^{-t}\bullet u(t)\leftrightarrow j^{n-1}\frac{(-1)(-2)(-3)......(-(n-1))j^{n-1}}{(1+j\Omega)^n}=\frac{j^{n-1}\bullet(-1)^{n-1}\bullet(n-1)!\bullet j^{n-1}}{(1+j\Omega)^n}=\frac{(j^2)^{n-1}\bullet(-1)^{n-1}\bullet(n-1)!}{(1+j\Omega)^n}=$$

$$\frac{((-1)^2)^{n-1}\bullet(n-1)!}{(1+j\Omega)^n}=\frac{(n-1)!}{(1+j\Omega)^n}$$

Συνεπώς $t^{n-1}e^{-t}u(t)\leftrightarrow\frac{(n-1)!}{(1+j\Omega)^n}$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το 1/(n-1)! και προκύπτει ότι:

$$\boxed{x(t)=\frac{t^{n-1}e^{-t}u(t)}{(n-1)!}\leftrightarrow\frac{1}{(1+j\Omega)^n}}$$

2.7.4 Άσκηση 1.4

(α) Έστω η συνάρτηση $r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t+\tau)d\tau$ (δεν είναι συνέλιξη). Εκφράστε τον μετασχηματισμό Fourier $R(j\omega)$ της $r(t)$ με βάση του μετασχηματισμούς $X(j\omega)$, $Y(j\omega)$, των $x(t)$, $y(t)$ αντίστοιχα.

(β) Υποθέστε ότι $x(t)=y(t)=e^{-|t|}$. Αφού υπολογίσετε το ολοκλήρωμα και την $r(t)$, χρησιμοποιήστε ΜF για να υπολογίσετε την $R(j\omega)$.

(γ) Όπως και στο (β), υπολογίστε την $R(j\omega)$ χρησιμοποιώντας την σχέση του (α) στο πεδίο της συχνότητας.

<u>Λύση</u>

α)

Δίνεται η συνάρτηση $r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(r)y(t+r)dr$ και θέλουμε να υπολογίσουμε τον R(jΩ) συναρτήσει των X(jΩ) και Y(jΩ). Παίρνουμε τον ορισμό του MF για το σήμα r(t):

$$R(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}r(t)e^{-j\Omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(r)y(t+r)dr\right)e^{-j\Omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(r)\left(\int_{-\infty}^{\infty}y(t+r)e^{-j\Omega t}dt\right)dr \quad (1)$$

Το $\int_{-\infty}^{\infty}y(t+r)e^{-j\Omega t}dt$ είναι ο ορισμός του MF για το σήμα $y(t+r)$ δηλ:

$$F\{y(t+r)\}=\int_{-\infty}^{\infty}y(t+r)e^{-j\Omega t}dt \text{ ή } y(t+r)\leftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}y(t+r)e^{-j\Omega t}dt \quad (2)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της ολίσθησης το $y(t+r)$ έχει ως MF τον $e^{j\Omega r}\bullet \mathrm{R}(\mathrm{j}\Omega)$ δηλ.

$$y(t+r)\leftrightarrow e^{j\Omega r}\bullet \mathrm{R}(\mathrm{j}\Omega) \quad (3)$$

Επειδή τα αριστερά μέλη των (2) και (3) είναι ίσα μεταξύ τους είναι επίσης ίσα και τα δεξιά μέλη των (2) και (3). Αντικαθιστούμε την (3) στην (1) και προκύπτει:

$$\mathrm{R}(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(r)e^{j\Omega r}Y(\mathrm{j}\Omega)dr=Y(\mathrm{j}\Omega)\int_{-\infty}^{\infty}x(r)e^{j\Omega r}dr \quad (4)$$

Ισχύει ότι: $\mathrm{X}(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$, άρα $\mathrm{X}(\mathrm{j}(-\Omega))=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{j\Omega t}dt$ (5). Αντικαθιστούμε την (5) στην (4) και προκύπτει: $\boxed{\mathrm{R}(\mathrm{j}\Omega)=\mathrm{Y}(\mathrm{j}\Omega)\bullet \mathrm{X}(-\mathrm{j}\Omega)}$

β)

Μας δίνεται ότι $x(t)=y(t)=e^{-|t|}$ και θέλουμε να υπολογίσουμε πρώτα το σήμα r(t) και μετά τον MF της r(t) δηλ τον R(jΩ).

Υπολογισμός της r(t)

$$r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(r)y(t+r)dr=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|r|}\bullet e^{-|t+r|}dr$$

Αν t>0

$$r(t)=\int_{-\infty}^{-t}e^{r}\bullet e^{(r+t)}dr+\int_{-t}^{0}e^{r}\bullet e^{-(r+t)}dr+\int_{0}^{\infty}e^{-r}\bullet e^{-(r+t)}dr=\int_{-\infty}^{-t}e^{(2r+t)}dr+\int_{-t}^{0}e^{-t}dr+\int_{0}^{\infty}e^{-2r-t}dr=(1+t)\bullet e^{-t} \quad (6)$$

Αν t<0

$$r(t)=\int_{-\infty}^{0}e^{r}\bullet e^{(r+t)}dr+\int_{0}^{-t}e^{-r}\bullet e^{(r+t)}dr+\int_{-t}^{\infty}e^{-r}\bullet e^{-(r+t)}dr=\int_{-\infty}^{0}e^{(2r+t)}dr+\int_{0}^{-t}e^{t}dr+\int_{-t}^{\infty}e^{-2r-t}dr=(1-t)\bullet e^{t} \quad (7)$$

Συνδυάζοντας τις (6) και (7) προκύπτει ότι: $r(t)=(1+|t|)e^{-|t|}$

Υπολογισμός του R(jΩ)

$$R(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} r(t)e^{-j\Omega t}\mathrm{dt}=\int_{-\infty}^{\infty}(1+|t|)\bullet e^{-|t|}\bullet e^{-j\Omega t}\mathrm{dt}=\int_{-\infty}^{0}(1-t)\bullet e^{t}\bullet e^{-j\Omega t}\mathrm{dt}+\int_{0}^{\infty}(1+t)\bullet e^{-t}\bullet e^{-j\Omega t}\mathrm{dt}=$$

$$=\int_{0}^{\infty}(1+t)\bullet e^{-t}\bullet e^{j\Omega t}\mathrm{dt}+\int_{0}^{\infty}(1+t)\bullet e^{-t}\bullet \mathrm{e}^{-j\Omega t}\mathrm{dt}=\int_{0}^{\infty}e^{-t}\bullet e^{j\Omega t}\mathrm{dt}+\int_{0}^{\infty}te^{-t}\bullet e^{j\Omega t}\mathrm{dt}+\int_{0}^{\infty}e^{-t}\bullet e^{-j\Omega t}dt+\int_{0}^{\infty}te^{-t}\bullet e^{-j\Omega t}\mathrm{dt}$$

Ας υπολογίσουμε το κάθε ολοκλήρωμα ξεχωριστά:

- $\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\bullet\mathrm{e}^{-j\Omega t}\mathrm{dt}=\mathrm{F}(j\Omega)=\dfrac{1}{1+j\Omega}$
- $\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\bullet\mathrm{e}^{j\Omega t}\mathrm{dt}=\mathrm{F}(-j\Omega)=\dfrac{1}{1-j\Omega}$
- $\int_{0}^{\infty}\mathrm{te}^{-t}\bullet\mathrm{e}^{-j\Omega t}\mathrm{dt}=\dfrac{1}{(1+j\Omega)^2}$
- $\int_{0}^{\infty}\mathrm{te}^{-t}\bullet\mathrm{e}^{j\Omega t}\mathrm{dt}=\dfrac{1}{(1-j\Omega)^2}$

Άρα

$$\mathrm{R}(j\Omega)=\frac{1}{1+j\Omega}+\frac{1}{1-j\Omega}+\frac{1}{(1+j\Omega)^2}+\frac{1}{(1-j\Omega)^2}\Rightarrow\mathrm{R}(j\Omega)==\frac{4}{(1+\Omega^2)^2}$$

γ)
Θέλουμε να υπολογίσουμε τον R(jΩ) χρησιμοποιώντας τη σχέση που βρήκαμε στο α) ερώτημα. Πιο συγκεκριμένα έχουμε υπολογίσει από το α) ερώτημα ότι $\mathrm{R}(j\Omega)=\mathrm{Y}(j\Omega)\bullet\mathrm{X}(-j\Omega)$ και γνωρίζουμε από το β) ερώτημα ότι $\mathrm{x(t)}=\mathrm{y(t)}=e^{-|t|}$. Άρα ο MF των x(t) και y(t) είναι:

$$\mathrm{x(t)}=\mathrm{y(t)}=\mathrm{e}^{-|t|}\leftrightarrow\mathrm{X}(j\Omega)=\mathrm{Y}(j\Omega)=\frac{2}{1+\Omega^2}$$

Άρα

$$\mathrm{R}(j\Omega)=\mathrm{Y}(j\Omega)\bullet\mathrm{X}(-j\Omega)\Rightarrow\mathrm{R}(j\Omega)=\frac{2}{1+\Omega^2}\bullet\frac{2}{1+(-\Omega)^2}\Rightarrow\mathrm{R}(j\Omega)=\frac{4}{(1+\Omega^2)^2}$$

2.7.5 Άσκηση 1.5

(α) Αν $\mathcal{F}(x(t))=X(\omega)$, όπου $\mathcal{F}$ ο μετασχηματισμός Fourier και $x_m(t)=x(t)cos(\omega_1 t)sin(\omega_2 t+\theta)$, βρείτε τον $\mathcal{F}(x_m(t))$.

(β) Αν $f''(t)+2f'(t)+2f(t)=-(\delta(t+\pi)+\delta(t-\pi))$, βρείτε την $f(t)$

Λύση

α)Θέλουμε να υπολογίσουμε τον MF του σήματος $x_m(t)=x(t)\bullet\cos(\Omega_1 t)\bullet\sin(\Omega_2 t+\theta)$.

- Αρχικά υπολογίζουμε τον MF του σήματος $y(t)=x(t)\bullet\cos(\Omega_1 t)$ ως εξής:

$$\mathrm{y(t)}=\mathrm{x(t)}\bullet\cos(\Omega_1\mathrm{t})\leftrightarrow\mathrm{Y}(j\Omega)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{X}(j(\Omega-\Omega_1))+\mathrm{X}(j(\Omega+\Omega_1))\right]\ (1)$$

- Μετά υπολογίζουμε τον MF του σήματος $y(t)\bullet\sin(\Omega_2 t+\theta)=x(t)\bullet\cos(\Omega_1 t)\bullet\sin(\Omega_2 t+\theta))$

$$\mathrm{y(t)}\bullet\sin(\Omega_2\mathrm{t}+\theta)\leftrightarrow\frac{1}{2j}\left[\mathrm{Y}(j(\Omega-\Omega_2))\bullet e^{j\theta}-\mathrm{Y}(j(\Omega+\Omega_2))\bullet\mathrm{e}^{-j\theta}\right]\ (2)$$

Αντικαθιστούμε στη (2) τον Y(jΩ) που έχουμε υπολογίσει από την (1) και προκύπτει:

$$\mathrm{y(t)}\bullet\sin(\Omega_2 t+\theta)=\mathrm{x(t)}\bullet\cos(\Omega_1 t)\bullet\sin(\Omega_2 t+\theta)\leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\left[\frac{1}{2}\left[\mathrm{X}(j(\Omega-\Omega_2-\Omega_1))+\mathrm{X}(j(\Omega-\Omega_2+\Omega_1))\right]\right]\bullet e^{j\theta}-\left[\frac{1}{2}\left[\mathrm{X}(j(\Omega+\Omega_2-\Omega_1))+\mathrm{X}(j(\Omega+\Omega_2+\Omega_1))\right]\right]\bullet e^{-j\theta}\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{X(j(\Omega-\Omega_2-\Omega_1))}}{4\mathrm{j}}\bullet e^{j\theta}+\frac{\mathrm{X(j(\Omega-\Omega_2+\Omega_1))}}{4\mathrm{j}}\bullet e^{j\theta}-\frac{\mathrm{X(j(\Omega+\Omega_2-\Omega_1))}}{4\mathrm{j}}\bullet e^{-j\theta}-\frac{\mathrm{X(j(\Omega+\Omega_2+\Omega_1))}}{4\mathrm{j}}\bullet e^{-j\theta}$$

β)Θέλουμε να λύσουμε τη διαφορική: $f''(t)+2f'(t)+2f(t)=-(\delta(t+\pi)+\delta(t-\pi))$

Εφαρμόζουμε MF και στα δύο μέρη της διαφορικής και προκύπτει:

$$(j\Omega)^2\bullet F(j\Omega)+2\bullet(j\Omega)\bullet F(j\Omega)+2\bullet F(j\Omega)=-F\{(\delta(t+\pi)+\delta(t-\pi))\}\Rightarrow$$

$$F(j\Omega)\bullet\left((j\Omega)^2+2\bullet(j\Omega)+2\right)=-F\{(\delta(t+\pi)+\delta(t-\pi))\}\Rightarrow$$

$$F(j\Omega)=\frac{1}{(j\Omega)^2+2\bullet(j\Omega)+2}\bullet F\{-(\delta(t+\pi)-\delta(t-\pi))\}(1)$$

Αναλύουμε τον 1ο όρο $\frac{1}{(j\Omega)^2+2\bullet(j\Omega)+2}$ σε απλά κλάσματα ως εξής:

$$\frac{1}{(j\Omega)^2+2\bullet(j\Omega)+2}=\frac{1}{\left(j\Omega-(-1-j)\right)\bullet\left(j\Omega-(-1+j)\right)}=\frac{\mathrm{A}}{j\Omega-(-1-j)}+\frac{\mathrm{B}}{j\Omega-(-1+j)}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές A και B ως εξής:

$$\mathrm{A}=\lim_{j\Omega\to(-1-j)}(j\Omega-(-1-j))\bullet\frac{1}{\left(j\Omega-(-1-j)\right)\bullet\left(j\Omega-(-1+j)\right)}=\frac{1}{\left(-1-j-(-1+j)\right)}=-\frac{1}{2j}$$

$$\mathrm{B}=\lim_{j\Omega\to(-1+j)}(j\Omega-(-1+j))\bullet\frac{1}{\left(j\Omega-(-1-j)\right)\bullet\left(j\Omega-(-1+j)\right)}=\frac{1}{\left(-1+j-(-1-j)\right)}=\frac{1}{2j}$$

Άρα $\frac{1}{(j\Omega)^2+2\bullet(j\Omega)+2}=-\frac{1}{2j}\bullet\frac{1}{j\Omega-(-1-j)}+\frac{1}{2j}\bullet\frac{1}{j\Omega-(-1+j)}$

Η (1) γράφεται ως εξής: $F(j\Omega)=-\frac{1}{2j}\bullet\frac{1}{j\Omega-(-1-j)}+\frac{1}{2j}\bullet\frac{1}{j\Omega-(-1+j)}\bullet F\{-\delta(t+\pi)-\delta(t-\pi))\}$

Για να βρούμε την f(t) θα υπολογίσουμε τον F^{-1}\{F(jΩ)\}. Επειδή έχουμε πολλαπλασιασμό δύο MF θα κάνουμε συνέλιξη των αντί-στοιχων σημάτων στο πεδίο του χρόνου.

Ο 1ος όρος $-\frac{1}{2j}\bullet\frac{1}{j\Omega-(-1-j)}+\frac{1}{2j}\bullet\frac{1}{j\Omega-(-1+j)}$ αντιστοιχεί στο σήμα (παρουσιάζουμε αναλυτικά τη διαδικασία):

$$\frac{1}{\mathrm{j\Omega-(-1-j)}}=\frac{1}{\mathrm{1+j\Omega+j}}=\frac{1}{\mathrm{1+j(\Omega+1)}}$$

Επειδή ισχύει η αντιστοιχία $\frac{1}{1+\mathrm{j\Omega}}\leftrightarrow e^{-t}\mathrm{u(t)}$ άρα λόγω της χρονικής ολίσθησης θα ισχύει και η αντιστοιχία

$\frac{1}{1+\mathrm{j(\Omega+1)}}\leftrightarrow\mathrm{e^{-jt}}\bullet e^{-t}u(t)$ και ομοίως $-\frac{1}{2\mathrm{j}}\bullet\frac{1}{1+\mathrm{j(\Omega+1)}}\leftrightarrow-\frac{1}{2\mathrm{j}}\bullet e^{-jt}\bullet e^{-t}u(t)$

$$\frac{1}{\mathrm{j\Omega-(-1+j)}}=\frac{1}{\mathrm{1+j\Omega-j}}=\frac{1}{\mathrm{1+j(\Omega-1)}}$$

Επειδή $\dfrac{1}{1+j\Omega} \leftrightarrow e^{-t}u(t)$ το $\dfrac{1}{1+j(\Omega-1)} \leftrightarrow e^{jt} \bullet e^{-t}u(t)$ και το $\dfrac{1}{2j} \bullet \dfrac{1}{1+j(\Omega+1)} \leftrightarrow \dfrac{1}{2j} \bullet e^{jt} \bullet e^{-t}u(t)$

Άρα

$$-\frac{1}{2j} \bullet \frac{1}{j\Omega-(-1-j)} + \frac{1}{2j} \bullet \frac{1}{j\Omega-(-1+j)} \leftrightarrow -\frac{1}{2j} \bullet e^{-jt} \bullet e^{-t}u(t) + \frac{1}{2j} \bullet e^{jt} \bullet e^{-t}u(t) \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2j} \bullet e^{-t}u(t) \bullet \left[e^{jt} - e^{-jt}\right] = e^{-t} \bullet u(t) \bullet \frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j} = e^{-t}u(t) \bullet \sin(t)$$

Η συνέλιξη που θα γίνει τώρα είναι μεταξύ των σημάτων:

$$e^{-t}u(t) \bullet \sin(t) \text{ και } -(\delta(t+\pi)-\delta(t-\pi)$$

και θα υλοποιηθεί ως εξής:

$$[e^{-t}u(t) \bullet \sin(t)] * [-\delta(t+\pi)-\delta(t-\pi)] =$$
$$= -e^{-t}u(t) \bullet \sin(t) * \delta(t+\pi) - e^{-t}u(t) \bullet \sin(t) * (\delta(t-\pi) =$$
$$= -e^{-(t+\pi)}u(t+\pi) \bullet \sin(t+\pi) - e^{-(t-\pi)}u(t-\pi) \bullet \sin(t-\pi) =$$
$$= e^{-(t+\pi)}u(t+\pi) \bullet \sin(t) + e^{-(t-\pi)}u(t-\pi) \bullet \sin(t) =$$
$$= \sin(t) \bullet \left[e^{-(t+\pi)}u(t+\pi) + e^{-(t-\pi)}u(t-\pi)\right]$$

Συνεπώς το ζητούμενο σήμα είναι: $\boxed{f(t) = \sin(t) \bullet [e^{-(t+\pi)}u(t+\pi) + e^{-(t-\pi)}u(t-\pi)]}$

Σημείωση: Χρησιμοποιήσαμε τις ταυτότητες $\sin(t+\pi) = -\sin(t)$ και $\sin(t-\pi) = -\sin(t)$

2.7.6 Άσκηση 1.6

Έστω $x(t)$ τριγωνικός παλμός που ορίζεται ως εξής

$$x(t) = \begin{cases} 1-|t| & |t|<1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

α) Παίρνοντας την παράγωγο της $x(t)$ και κάνοντας χρήση της ιδιότητας της παραγώγου, υπολογίστε το MF. (Υπόδειξη: εκφράστε την παράγωγο της $x(t)$ ως άθροισμα δύο παλμών)

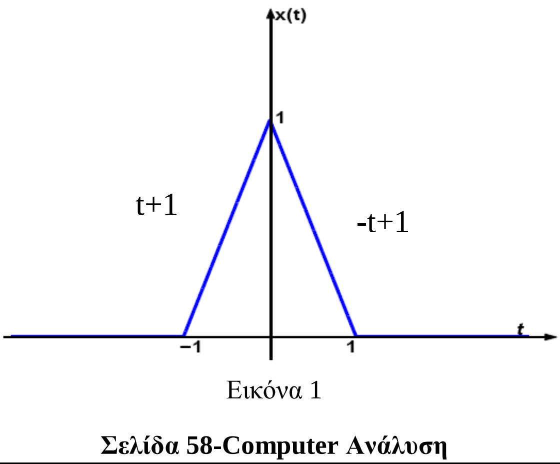
β) Υπολογίστε τον MF χρησιμοποιώντας την δεύτερη παράγωγο της $x(t)$

γ) Υπολογίστε τον MF χρησιμοποιώντας την ιδότητα της συνέλιξης (Υπόδειξη: θεωρείστε ότι η $x(t)$ έχει προέλθει από τη συνέλιξη δύο σημάτων)

__Λύση__

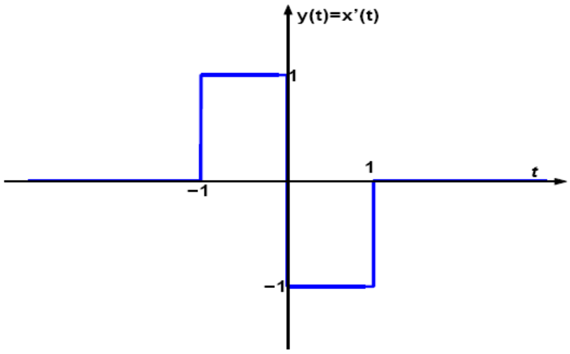
α)Θέλουμε να υπολογίσουμε τον MF του τριγωνικού παλμού παίρνοντας την παράγωγο του x(t) και εφαρμόζοντας την ιδιότητα παραγώγισης στο χρόνο.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης x(t) φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



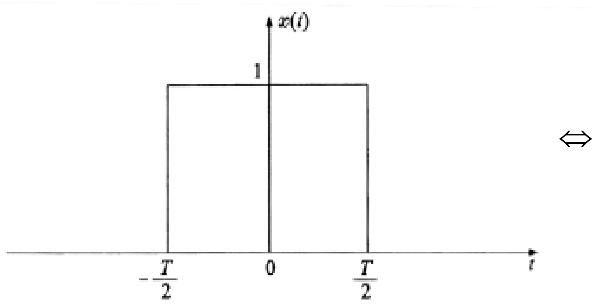
Εικόνα 1

Η παράγωγος της συνάρτησης αναπαριστάνεται γραφικά στην επόμενη εικόνα:



Εικόνα 2

Γνωρίζουμε ότι ο μοναδιαίος παλμός που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα έχει ως MF sinc(ΩΤ/2)



$\Leftrightarrow$ sinc(ΩT/2)

Εικόνα 3

Αν T=1 τότε ο MF παίρνει τη μορφή sinc(Ω/2)

- ✓ Παρατηρούμε ότι στη γραφική παράσταση της x(t) το αριστερό τμήμα της που βρίσκεται από -1 μέχρι 0 είναι ο μοναδιαίος παλμός με T=1 μετατοπισμένος προς τα αριστερά κατά ½. Άρα σύμφωνα με την ιδιότητα της χρονικής ολίσθησης το τμήμα αυτό (που είναι το αριστερό τμήμα της 1ης παραγώγου στην Εικόνα 2) έχει ως MF τον $e^{j\Omega/2}\sin c(\frac{\Omega}{2})$
- ✓ Παρατηρούμε επίσης ότι στη γραφική παράσταση της x(t) το δεξιό τμήμα της που βρίσκεται από 0 μέχρι -1 είναι ο μοναδιαίος παλμός με T=1 μετατοπισμένος προς τα δεξιά κατά ½ και με πρόσημο -1. Άρα σύμφωνα με την ιδιότητα της χρονικής ολίσθησης το τμήμα αυτό (που είναι το δεξιό τμήμα της 1ης παραγώγου στην Εικόνα 2) έχει ως MF τον $-e^{-j\Omega/2}\sin c(\frac{\Omega}{2})$

Άρα συνολικά ο MF της 1ης παραγώγου είναι:

$$F\{\dot{x}(t)\} = e^{j\Omega/2}\mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega}{2}\right) - e^{-j\Omega/2}\mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega}{2}\right) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega}{2}\right)\bullet(e^{j\Omega/2}-e^{-j\Omega/2}) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega}{2}\right)\bullet 2j\bullet\frac{(e^{j\Omega/2}-e^{-j\Omega/2})}{2j} =$$

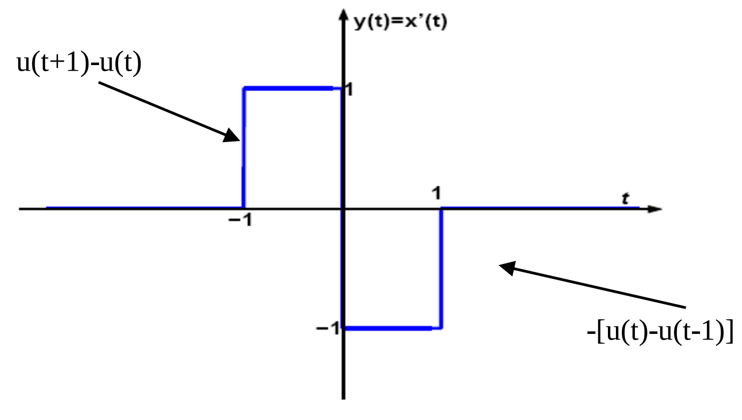
$$= \mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega}{2}\right)\bullet 2j\bullet\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) = 2j\bullet\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)\bullet\frac{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{\frac{\Omega}{2}} = \frac{4j}{\Omega}\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

- ✓ Συνεπώς προκύπτει ότι: $F\{\dot{x}(t)\} = \frac{4j}{\Omega}\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)$ (1)
- ✓ Σύμφωνα με την ιδιότητα παραγώγισης στο χρόνο ισχύει ότι: $F\{\dot{x}(t)\} = (j\Omega)\bullet X(j\Omega)$ (2)

Τα πρώτα μέρη των (1) και (2) είναι ίσα, άρα εξισώνουμε και τα δεύτερα μέρη και προκύπτει ότι:

$$\boxed{\frac{4j}{\Omega}\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right) = (j\Omega)\bullet X(j\Omega) \Rightarrow X(j\Omega) = \frac{\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{\frac{\Omega^2}{4}} \Rightarrow X(j\Omega) = \frac{\sin^2(\frac{\Omega}{2})}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2} \Rightarrow X(j\Omega) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

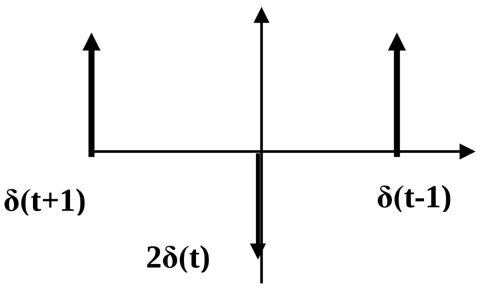
β) Θέλουμε να υπολογίσουμε τον MF του τριγωνικού παλμού παίρνοντας την δεύτερη παράγωγο του x(t).



Παίρνοντας την 2η παράγωγο της x(t) προκύπτει:

$$x(t)'' = [u(t+1) - u(t)]' - [u(t) - u(t-1)]' \Rightarrow x(t) = \delta(t+1) - \delta(t) - \delta(t) + \delta(t-1) \Rightarrow$$

$$x(t)'' = \delta(t+1) - 2 \bullet \delta(t) + \delta(t-1)$$



Παίρνουμε MF και στα 2 μέρη της x(t) και προκύπτει:

$$F\{\ddot{x}(t)\} = F\{\delta(t+1)\} - 2F\{\delta(t)\} + F\{\delta(t-1)\} = e^{j\Omega} - 2 + e^{-j\Omega} = \frac{e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}}{2} 2 - 2 = 2\cos(\Omega) - 2 = 2[\cos(\Omega) - 1] =$$

$$= 2\left[1 - 2\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right) - 1\right] = -4\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

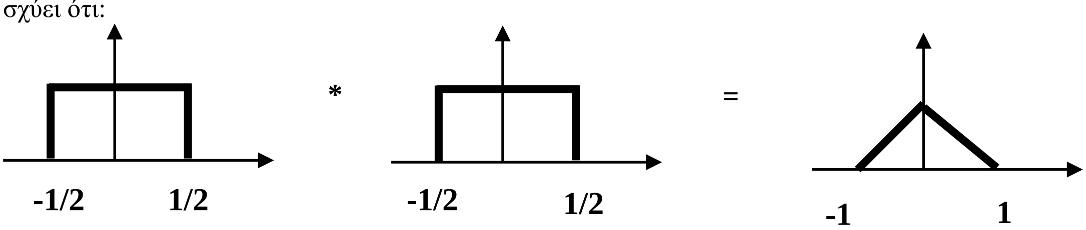
- ✓ Συνεπώς προκύπτει ότι: $F\{\ddot{x}(t)\} = -4\sin^2\frac{\Omega}{2}$ (3)
- ✓ Σύμφωνα με την ιδιότητα παραγώγισης στο χρόνο ισχύει ότι

$$F\{\ddot{x}(t)\} = (j\Omega)^2 \bullet X(j\Omega) \quad (4)$$

Τα πρώτα μέρη των (3) και (4) είναι ίσα, άρα εξισώνουμε και τα δεύτερα μέρη και προκύπτει ότι:

$$\boxed{-4\sin^2\frac{\Omega}{2} = (j\Omega)^2 \bullet X(j\Omega) \Rightarrow X(j\Omega) = \left[\frac{\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{\frac{\Omega}{2}}\right]^2 \Rightarrow X(j\Omega) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

γ) Θέλουμε να υπολογίσουμε τον MF του τριγωνικού παλμού παίρνοντας την ιδιότητα συνέλιξης.
Πιο συγκεκριμένα ο τριγωνικός παλμός μπορεί να προκύψει από τη συνέλιξη δύο μοναδιαίων παλμών. Για ένα μοναδιαίο παλμό ισχύει ότι:



Η συνέλιξη δύο τετραγωνικών ή ορθογώνιων παλμών δίνει ένα τριγωνικό παλμό.
Από την ιδιότητα της συνέλιξης ισχύει: $x_1(t) * x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\Omega) \bullet X_1(j\Omega) = \mathrm{sinc}(\Omega/2) \bullet \mathrm{sinc}(\Omega/2) = \mathrm{sinc}^2(\Omega/2)$

Άρα $\boxed{X(j\Omega) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$

2.7.7 Άσκηση 1.7

Η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι $x(t) = 10 + 2\delta(t-2) + \frac{sin(2000\pi t)}{\pi t}$ και η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι

$$H(j\omega) = \begin{cases} 10 & \mid \omega \mid < 1000\pi \\ 0 & \mid \omega \mid > 1000\pi \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε το ΜF $X(j\omega)$

(β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (α), εκφράστε το ΜF $Y(j\omega)$ της εξόδου του ΓΧΑ συστήματος με απόκριση $H(j\omega)$, όταν στην είσοδο εφαρμόσουμε το σήμα $x(t)$

(γ) Χρησιμοποιείστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier για να βρείτε την $y(t)$

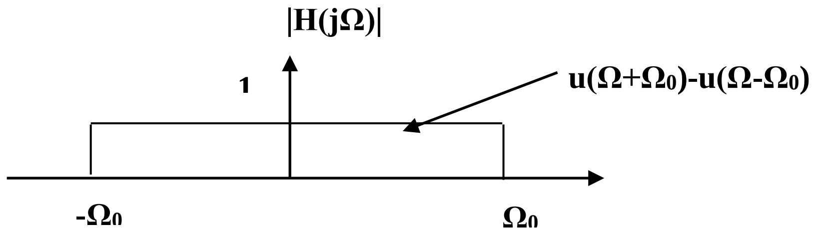
Λύση

α)Δίνεται το σήμα $x(t) = 10 + 2\delta(t-2) + \dfrac{\sin(2000\pi t)}{\pi t}$ και ζητείται ο ΜF του σήματος εισόδου δηλ. ο X(jΩ). Για να υπολογίσουμε λοιπόν τον ΜF του σήματος εισόδου που δίνεται, παίρνουμε ΜF και στα 2 μέλη της x(t):
F{x(t)}=F{10+2δ(t-2)+sin(2000πt)/(πt)⇒F{x(t)}=F{10}+2F{δ(t-2)}+F{sin(2000πt)/(πt)}

- Επειδή F{1}=2πδ(Ω) ⇒ F{10}=20πδ(Ω) (1)
- Επειδή F{δ(t)}=1 ⇒ F{2δ(t-2)}=$2e^{-j\Omega 2}$ (2)
- **Επειδή το sin(Ω₀t)/(πt) είναι η κρουστική απόκριση κατωπερατού φίλτρου με ΜF**:

$$\frac{\sin(\Omega_0 t)}{\pi t} \leftrightarrow \begin{cases} 1 & |\Omega| < \Omega_0 \\ 0 & |\Omega| > \Omega_0 \end{cases}$$

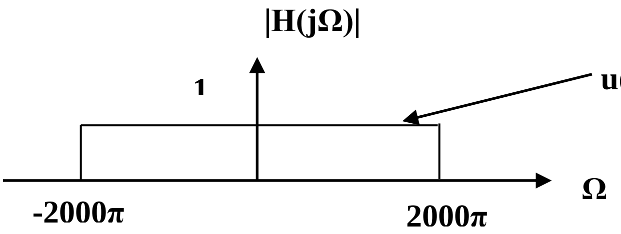
Σχηματικά:



προκύπτει ότι:

$$\frac{\sin(2000\pi t)}{\pi t} \leftrightarrow \begin{cases} 1 & |\Omega| < 2000\pi \\ 0 & |\Omega| > 2000\pi \end{cases} \quad (3)$$

Σχηματικά:



Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει: X(jΩ)=20πδ(Ω)+$2e^{-j\Omega 2}$+u(Ω+2000π)-u(Ω-2000π) (4)

β)Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Y(jΩ) συναρτήσει της απόκρισης συχνότητας H(jΩ) που δίνεται.

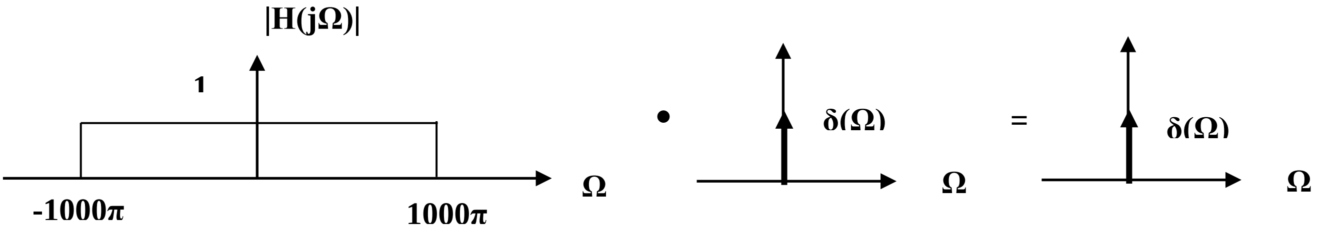
Η έξοδος του φίλτρου (το οποίο είναι εξορισμού σύστημα ΓΧΑ) είναι y(t)=x(t)*h(t) και έχει ως ΜF τον Y(jΩ)=X(jΩ)•H(jΩ)⇒ Y(jΩ)=[20πδ(Ω)+$2e^{-j\Omega 2}$+u(Ω+2000π)-u(Ω-2000π)]•H(jΩ) όπου το H(jΩ) δίνεται ως:

$$H(j\Omega)=\begin{cases}10 & |\Omega|<1000\pi \\ 0 & |\Omega|>1000\pi\end{cases} \Rightarrow H(j\Omega)=[u(\Omega+1000\pi]-[u(\Omega-1000\pi]$$

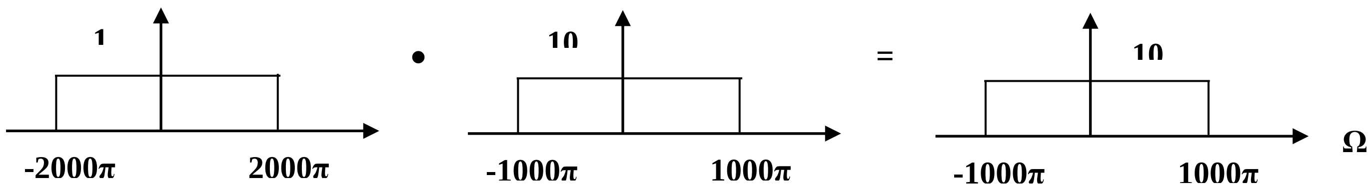
$Y(j\Omega)= [20\pi\delta(\Omega)+ 2e^{-j\Omega 2}+U(\Omega+2000\pi)-U(\Omega-2000\pi)]\bullet 10[U(\Omega+1000\pi)-U(\Omega-1000\pi)]$

Όταν πολλαπλασιάζουμε MF τους συναληθεύουμε γραφικά.
Ας δούμε κάθε γινόμενο χωριστά:

- $20\pi\delta(\Omega)\bullet 10[u(\Omega+1000\pi)-u(\Omega-1000\pi)]=200\pi\bullet\delta(\Omega)$ (Η συναλήθευση γίνεται μόνο στο σημείο 0, όπου η $\delta(\Omega)$ απειρίζεται, οπότε η απάντηση είναι η $\delta(\Omega)$ επί 200π



- $2e^{-j\Omega 2}\bullet 10[u(\Omega+1000\pi)-u(\Omega-1000\pi)]=20e^{-j\Omega 2}\bullet[u(\Omega+1000\pi)-u(\Omega-1000\pi)]$ (Δεν γνωρίζουμε την ακριβή της $2e^{-j\Omega 2}$, οπότε αφήνουμε το γινόμενο όπως είναι)
- $u(\Omega+2000\pi)\bullet 10[u(\Omega+1000\pi)-u(\Omega-1000\pi)]=10[u(\Omega+1000\pi)-u(\Omega-1000\pi)]$ (Η συναλήθευση γίνεται στο διάστημα από -1000π έως 1000π)



$Y(j\Omega)=200\pi\delta(\Omega)+20e^{-j\Omega 2}\bullet[u(\Omega+1000\pi)-u(\Omega-1000\pi)]+10[u(\Omega+1000\pi)-u(\Omega-1000\pi)]$

γ)Υπολογίζουμε αντίστροφο MF για κάθε όρο του $Y(j\Omega)$ που τον έχουμε υπολογίσει από το προηγούμενο ερώτημα ως:

$$Y(j\Omega)=200\pi\delta(\Omega)+20e^{-j\Omega 2}\bullet[u(\Omega+1000\pi)-u(\Omega-1000\pi)]+10[u(\Omega+1000\pi)-u(\Omega-1000\pi)]$$

Αναλυτικά οι υπολογισμοί είναι οι ακόλουθοι:

- $F^{-1}\{200\pi\delta(\Omega)\}=100$
- $F^{-1}\{[u(\Omega+1000\pi)-u(\Omega-1000\pi)]\}=\dfrac{\sin(1000\pi t)}{\pi t}\Rightarrow$

  $F^{-1}\{20([u(\Omega+1000\pi)-u(\Omega-1000\pi)])\}=20\bullet\dfrac{\sin(1000\pi t)}{\pi t}\Rightarrow$

  $F^{-1}\{20e^{-j\Omega 2}\ ([u(\Omega+1000\pi)-u(\Omega-1000\pi)])\}=20\bullet\dfrac{\sin(1000\pi(t-2))}{\pi(t-2)}$
- $F^{-1}\{10[u(\Omega+1000\pi)-u(\Omega-1000\pi)]\}=10\bullet\dfrac{\sin(1000\pi t)}{\pi t}$

Άρα η έξοδος είναι: $y(t)=100+20\bullet\dfrac{\sin(1000\pi(t-2))}{\pi(t-2)}+10\bullet\dfrac{\sin(1000\pi t)}{\pi t}$

2.8 Υπολογισμός Εξόδου ΓΧΑ Συστημάτων όταν γνωρίζουμε την είσοδο και την Απόκριση Συχνότητας

1) Όταν η είσοδος στο ΓΧΑ είναι ένα σταθερό σήμα δηλ. $x(t)=A$ τότε το σήμα εξόδου θα είναι: $y(t)=A\bullet|H(j0)|$
Παρατηρούμε ότι η έξοδος του ΓΧΑ είναι το σήμα εισόδου επί το μέτρο της απόκρισης συχνότητας στη συχνότητα της εισόδου (που είναι μηδέν).

2) **Όταν η είσοδος στο ΓΧΑ είναι ένα ημιτονοειδές σήμα χωρίς φάση** δηλ. $x(t)=A\bullet\cos(\Omega_0 t)$ ή $x(t)=A\bullet\sin(\Omega_0 t)$ τότε το σήμα εξόδου θα είναι:

$$y(t)=A\bullet|H(j\Omega_0)|\cos\left(\Omega_0 t+<H(j\Omega_0)\right) \text{ ή } y(t)=A\bullet|H(j\Omega_0)|\sin\left(\Omega_0 t+<H(j\Omega_0)\right)$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος έχει ενισχυμένο πλάτος $A|H(j\Omega_0|$, διατηρεί αναλλοίωτη τη συχνότητα της εισόδου και προσθέτει επιπλέον φάση στο σήμα εισόδου η οποία είναι προσαρμοσμένη στη συχνότητα της εισόδου

3) **Όταν η είσοδος στο ΓΧΑ είναι ένα ημιτονοειδές σήμα με φάση** π.χ. $x(t)=A\bullet\cos(\Omega_0 t+\varphi)$ ή $x(t)=A\bullet\sin(\Omega_0 t+\varphi)$ τότε το σήμα εξόδου θα είναι:

$$y(t)=A\bullet|H(j\Omega_0)|\cos\left(\Omega_0 t+\varphi+<H(j\Omega_0)\right) \text{ ή } y(t)=A\bullet|H(j\Omega_0)|\sin\left(\Omega_0 t+\varphi+<H(j\Omega_0)\right)$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος έχει ενισχυμένο πλάτος $A|H(j\Omega_0|$, διατηρεί αναλλοίωτη τη συχνότητα της εισόδου, διατηρεί τη φάση της εισόδου και προσθέτει επιπλέον φάση σε αυτή η οποία είναι προσαρμοσμένη στη συχνότητα της εισόδου.

4) **Όταν η είσοδος στο ΓΧΑ είναι ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα (ιδιοσυνάρτηση) χωρίς φάση** π.χ. $x(t)=A\bullet e^{j\Omega_0 t}$ ή $x(t)=A\bullet e^{-j\Omega_0 t}$ τότε το σήμα εξόδου θα είναι: $y(t)=A\bullet|H(j\Omega_0)|e^{j(\Omega_0 t+<H(j\Omega_0))}$ ή αντίστοιχα $y(t)=A\bullet|H(j\Omega_0)|e^{-j(\Omega_0 t+<H(j\Omega_0))}$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος έχει ενισχυμένο πλάτος $A|H(j\Omega_0|$,, διατηρεί αναλλοίωτη τη συχνότητα της εισόδου και προσθέτει επιπλέον φάση στο σήμα εισόδου.

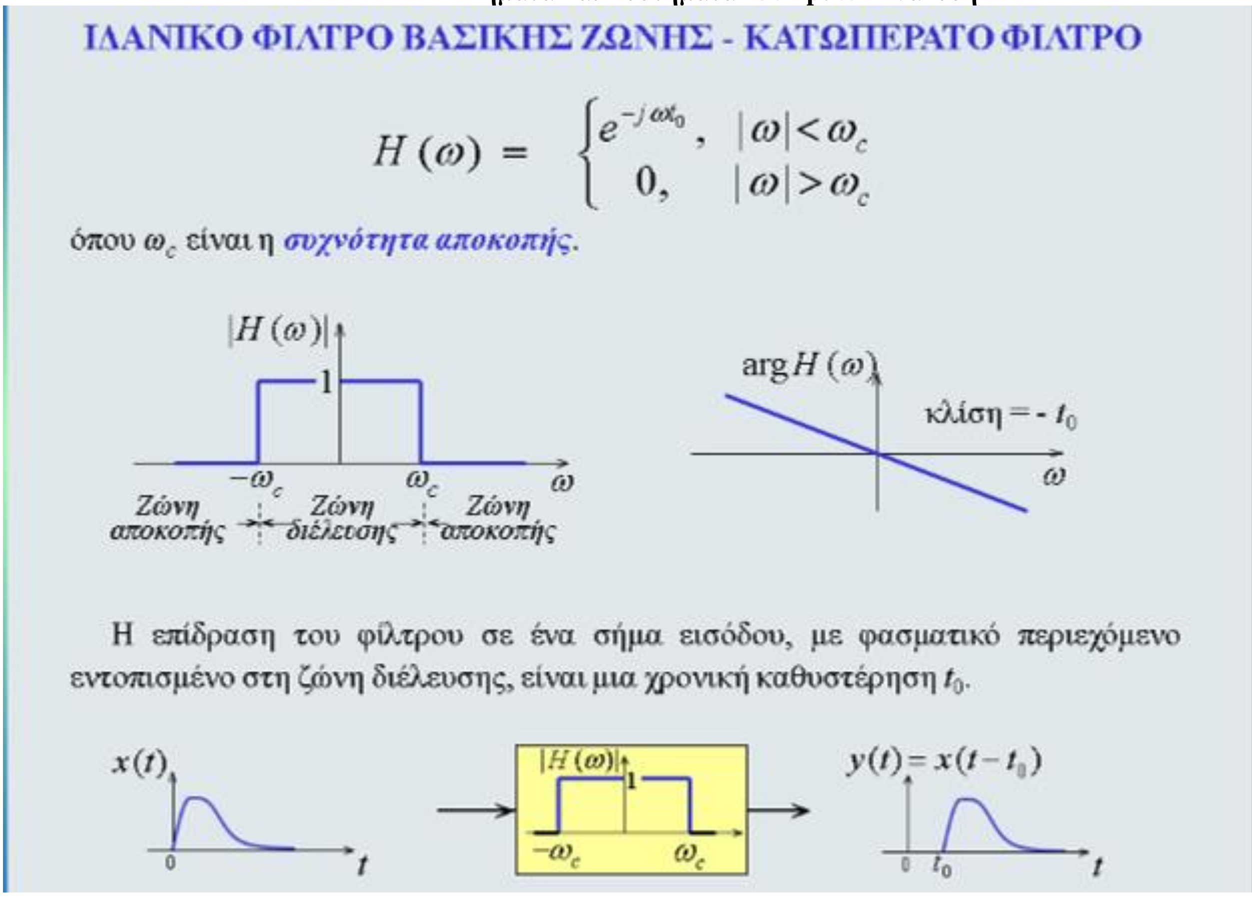
5) **Όταν η είσοδος στο ΓΧΑ είναι ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα (ιδιοσυνάρτηση) με φάση** π.χ. $x(t)=A\bullet e^{j(\Omega_0 t+\varphi)}$ ή $x(t)=A\bullet e^{-j(\Omega_0 t+\varphi)}$ τότε το σήμα εξόδου θα είναι:

$$y(t)=A\bullet|H(j\Omega_0)|e^{j(\Omega_0 t+\varphi+<H(j\Omega_0))} \text{ ή } y(t)=A\bullet|H(j\Omega_0)|e^{-j(\Omega_0 t+\varphi+<H(j\Omega_0))} \text{ αντίστοιχα}$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος έχει ενισχυμένο πλάτος, **$A|H(j\Omega_0|$,**, διατηρεί αναλλοίωτη τη συχνότητα της εισόδου και προσθέτει επιπλέον φάση στο σήμα εισόδου.

Βασική Παρατήρηση: Ένα ΓΧΑ σύστημα ΠΟΤΕ ΔΕΝ «ΓΕΝΝΑ» ΝΕΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΔΗΛΑΔΗ ΠΟΤΕ ΔΕΝ ΠΡΟΣΘΕΤΕΙ ΝΕΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ ΣΗΜΑ ΕΙΣΟΔΟΥ. ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΠΕΡΝΑ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ ΤΙΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ ΕΙΣΟΔΟΥ ΕΙΤΕ ΝΑ ΚΟΒΕΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ ΕΙΣΟΔΟΥ ΑΝ ΕΙΝΑΙ ΦΙΛΤΡΟ ΑΛΛΑ ΠΟΤΕ ΔΕΝ ΠΡΟΣΘΕΤΕΙ ΝΕΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ ΣΗΜΑ ΕΙΣΟΔΟΥ

Παρατήρηση
Όπου ω εννοείται Ω στο ακόλουθο σχήμα:



2.8.1 Άσκηση 1.8

΄Ενα συνεχούς χρόνου ΓΧΑ έχει κρουστική απόκριση

$$h(t) = \delta(t-3) - e^{-7(t-3)}u(t-3)$$

α) Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας του συστήματος.

β) Σχεδιάστε το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνότητας (Χρησιμοποιήστε το περιβάλλον MATLAB)

γ) Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος, αν εφαρμόσουμε στην είσοδο το σήμα

$$x(t) = 7 + 7cos(7t + \pi 2) \qquad (1.1)$$

<u>**Λύση**</u>

α)

Δίνεται η κρουστική απόκριση $h(t) = \delta(t-3) - e^{-7(t-3)}u(t-3)$ **και ζητείται η απόκριση συχνότητας του συστήματος (δηλαδή ζητείται ο ΜF της κρουστικής απόκρισης του συστήματος). Για να βρούμε την απόκριση συχνότητας του συστήματος παίρνουμε MF και στα 2 μέρη της συνάρτησης h(t) και προκύπτει:**

$$H(j\Omega) = F\{\delta(t-3)\} - F\{e^{-7(t-3)} \bullet u(t-3)\} = e^{-j\Omega 3} - e^{-j\Omega 3} \bullet \frac{1}{7+j\Omega} = e^{-j\Omega 3} \bullet \left(1 - \frac{1}{7+j\Omega}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{H(j\Omega) = e^{-j\Omega 3} \bullet \frac{6+j\Omega}{7+j\Omega}}$$

Σημείωση: Στον υπολογισμό αυτό χρησιμοποιήσαμε τους γνωστούς MF:

$\delta(t) \leftrightarrow 1$
$\delta(t\text{-}3) \leftrightarrow e^{-j\Omega j} \bullet 1$

$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{a+j\Omega}$ και για a=7 προκύπτει $e^{-7t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{7+j\Omega}$	
$x(t-t_o) \leftrightarrow e^{-j\Omega t_0} \bullet X(j\Omega)$	
$e^{-7(t-3)}u(t-3) \leftrightarrow e^{-j\Omega 3} \bullet \dfrac{1}{7+j\Omega}$	

β)

Η απόκριση συχνότητας σε πολική μορφή γράφεται ως εξής: $H(j\Omega) = |H(j\Omega)| \bullet e^{j\bullet\varphi(\Omega)}$ όπου $|H(j\Omega)|$ το μέτρο της απόκρισης συχνότητας και φ(Ω) είναι η φάση της απόκρισης συχνότητας. Εδώ βρήκαμε ότι η απόκριση συχνότητας είναι: $H(j\Omega) = e^{-j\Omega 3} \bullet \dfrac{6+j\Omega}{7+j\Omega}$. Άρα το μέτρο της απόκρισης συχνότητας είναι: $|H(j\Omega)| = \dfrac{6+j\Omega}{7+j\Omega} = \sqrt{\dfrac{36+\Omega^2}{49+\Omega^2}}$ και η φάση της απόκρισης συχνότητας είναι $\varphi(\Omega) = -3\Omega$.

γ) Ζητείται η έξοδος του συστήματος με είσοδο το σήμα $x(t) = 7 + 7 \bullet \cos\left(7t + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Υπολογίζουμε την έξοδο του συστήματος ξεχωριστά για κάθε όρο της εισόδου.

- **Ο 1ος όρος της εισόδου είναι σταθερή συνάρτηση**, οπότε για να υπολογίσουμε την αντίστοιχη έξοδο του συστήματος πολλαπλασιάζουμε την απόκριση συχνότητας του συστήματος στη συχνότητα Ω=0 (ονομάζεται συχνότητα DC) με το σήμα εισόδου δηλ. $y_1(t) = 7 \bullet |H(j0)| = 7 \bullet \left|\dfrac{6+j0}{7+j0}\right| = 7 \bullet \sqrt{\dfrac{36}{49}} = 6$
- **Ο 2ος όρος της εισόδου είναι το ημιτονοειδές σήμα** $7 \bullet \cos\left(7t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ με συχνότητα Ω=7rad/sec. Επειδή το σύστημα είναι ΓΧΑ, η έξοδος ενός ΓΧΑ με είσοδο ένα ημιτονοειδές σήμα, είναι και πάλι ημιτονοειδές σήμα με την ίδια συχνότητα, ενισχυμένο πλάτος και με μια επιπρόσθετη φάση που εισάγει το σύστημα, δηλαδή:

$$y_2(t) = 7 \bullet |H(j7)| \bullet \cos\left(7t + \left(\frac{\pi}{2} + \angle H(j7)\right)\right)$$

- Η φάση της απόκρισης συχνότητας $H(j\Omega) = \dfrac{6+j\Omega}{7+j\Omega} \bullet e^{-j\Omega 3} = (\cos 3\Omega - j \bullet \sin 3\Omega) \bullet \dfrac{6+j\Omega}{7+j\Omega}$ στη συχνότητα της εισόδου που είναι 7 είναι η ακόλουθη: $\angle H(j7) = \tan^{-1}\left(-\dfrac{\sin(3 \bullet 7)}{\cos(3 \bullet 7)}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{7}{6}\right) + \tan^{-1}\left(-\dfrac{7}{7}\right)$
- Η συνολική φάση του συστήματος είναι $\dfrac{\pi}{2} + \angle H(j7) = \tan^{-1}\left(-\dfrac{\sin(3 \bullet 7)}{\cos(3 \bullet 7)}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{7}{6}\right) + \tan^{-1}\left(-\dfrac{7}{7}\right) = -0.11\pi$
- Άρα η έξοδος με είσοδο το σήμα $7 \bullet \cos\left(7t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι:

$$y_2(t) = 7 \bullet |H(j7)| \bullet \cos\left(7t + \left(\frac{\pi}{2} - 0{,}11\pi\right)\right) = 6.52 \bullet \cos(7t - 0{,}11\pi)$$

Η έξοδος του συστήματος με είσοδο το $x(t) = 7 + 7 \bullet \cos\left(7t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι: $y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 6 + 6.52 \bullet \cos(7t - 0{,}11\pi)$

2.8.2 Άσκηση 1.9

Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$h(t) = \delta(t) + 5e^{-5t}u(t)$$

α) Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας του συστήματος και σχεδιάστε τη.

β) Ποια συχνότητα "ενισχύει" περισσότερο το σύστημα; Σε ποια συχνότητα, το τετράγωνο του μέτρου της απόκρισης παίρνει το μισό της μέγιστης τιμής; (Η συχνότητα αυτή αναφέρεται και ως $3dB$ συχνότητα, διότι σε dB κλίμακα, $10log \mid H(j\omega) \mid^2$, η απόκριση εκεί είναι 3.01 dB μικρότερη από την μέγιστη τιμή.)

γ) Ποιά είναι η έξοδος αν η είσοδος είναι η

$$x(t) = 1 + 2cos(100t) \qquad (1.2)$$

<u>Λύση</u>

α)

Δίνεται η κρουστική απόκριση $h(t) = \delta(t) + 5e^{-5t}u(t)$ και ζητείται η απόκριση συχνότητας του συστήματος. Για να βρούμε την απόκριση συχνότητας παίρνουμε MF και στα 2 μέρη της συνάρτησης h(t) και προκύπτει:

$$H(j\Omega) = F\{\delta(t)\} + 5F\{e^{-5t} \bullet u(t)\} = 1 + \frac{5}{5+j\Omega} = \frac{10+j\Omega}{5+j\Omega}$$

β)**Η συχνότητα που ενισχύει περισσότερο το σύστημα είναι η DC συχνότητα δηλαδή η συχνότητα Ω=0 διότι η συχνότητα αυτή μεγιστοποιεί το πλάτος (ή αλλιώς το τετράγωνο του μέτρου απόκρισης) του MF και το κάνει ίσο** με $|H(j0)|^2=4$.

Το τετράγωνο του μέτρου απόκρισης παίρνει το μισό της μέγιστης τιμής (δηλ. γίνεται ίσο με το 2) όταν η συχνότητα είναι:

$$| H(j\Omega) |^2 = 2 \Rightarrow \frac{100+\Omega^2}{25+\Omega^2} = 2 \Rightarrow 100+\Omega^2 = 50+2\Omega^2 \Rightarrow \Omega^2 = 50 \Rightarrow \Omega = \sqrt{50} \text{ rad/sec}$$

γ)Ζητείται η έξοδος του συστήματος με είσοδο το σήμα $x(t) = 1 + 2 \bullet \cos(100t)$. Υπολογίζουμε την έξοδο του συστήματος ξεχωριστά για κάθε όρο της εισόδου $x(t) = 1 + 2 \bullet \cos(100t)$.

- **Ο 1ος όρος της εισόδου είναι μια σταθερή συνάρτηση**, οπότε για να υπολογίσουμε την αντίστοιχη έξοδο του συστήματος πολλαπλασιάζουμε το σήμα εισόδου με την απόκριση συχνότητας του συστήματος στη συχνότητα 0 δηλ:

$$y_1(t) = 1 \bullet | H(j0) | = 1 \bullet \left| \frac{10+j0}{5+j0} \right| = 1 \bullet \sqrt{\frac{100}{25}} = 2$$

- **Ο 2ος όρος της εισόδου είναι το ημιτονοειδές σήμα 2•cos(100t)** με συχνότητα Ω=100 rad/sec. Επειδή το σύστημα είναι ΓΧΑ, είναι γνωστό ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος με είσοδο ένα ημιτονοειδές σήμα, είναι και πάλι ημιτονοειδές σήμα με την ίδια συχνότητα, ενισχυμένο πλάτος και μια επιπρόσθετη φάση που εισάγει το σύστημα. Πιο συγκεκριμένα:

$$y_2(t) = 2 \bullet |H(j \bullet 100)| \bullet \cos(100t + < H(j \bullet 100))$$

- Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας $H(j\Omega) = \frac{10+j\Omega}{5+j\Omega}$ στη συχνότητα 100 είναι: $|H(j \bullet 100)| = \sqrt{\frac{100+100^2}{25+100^2}} = 1.003$
- Η φάση της απόκρισης συχνότητας $H(j\Omega) = \frac{10+j\Omega}{5+j\Omega}$ στη συχνότητα 100 είναι

$$< H(j100) = <(10+j100) + <(5+j100) = \tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{10}\right) + \tan^{-1}\left(-\frac{\Omega}{5}\right) = -0.05$$

Η έξοδος του συστήματος με είσοδο το ημιτονοειδές σήμα $2 \bullet \cos(100t)$ είναι:

$$y_2(t) = 2 \bullet |H(j \bullet 100)| \cos(100t + < H(j \bullet 100)) = 2 \bullet 1.004 \bullet \cos(100t - 0.05)$$

Η συνολική έξοδος του συστήματος με είσοδο το σήμα $x(t) = 1 + 2 \bullet \cos(100t)$ είναι:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 2 + 2{,}008 \bullet \cos(100t - 0.05)$$

2.8.3 Άσκηση 1.10

Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=2x(t).$$

Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

<u>Λύση</u>

Θέλουμε να επιλύσουμε την διαφορική εξίσωση: $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=2x(t)$

Παίρνουμε MF και στα 2 μέρη της διαφορικής εξίσωσης που μας δίνεται και σύμφωνα με την ιδιότητα παραγώγισης στο χρόνο προκύπτει:

$$F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)\right\}=F\{2x(t)\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (j\Omega)^2\bullet Y(j\Omega)+6(j\Omega)\bullet Y(j\Omega)+8\bullet Y(j\Omega)=2\bullet X(j\Omega)\Rightarrow Y(j\Omega)\bullet[(j\Omega)^2+6(j\Omega)+8]=2\bullet X(j\Omega)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(j\Omega)=\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}=\frac{2}{(j\Omega)^2+6(j\Omega)+8}$$

Παραγοντοποιούμε πρώτα τον παρονομαστή και μετά τον αναλύουμε σε απλά κλάσματα δηλ.

$$H(j\Omega)=\frac{2}{(j\Omega+2)\bullet(j\Omega+4)}\Rightarrow H(j\Omega)=\frac{A}{(j\Omega+2)}+\frac{B}{(j\Omega+4)}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Α και Β

$$A=\lim_{j\Omega\to-2}(j\Omega+2)\bullet\frac{2}{(j\Omega+2)\bullet(j\Omega+4)}\Rightarrow A=\frac{2}{(-2+4)}\Rightarrow A=1$$

$$B=\lim_{j\Omega\to-4}(j\Omega+4)\bullet\frac{2}{(j\Omega+2)\bullet(j\Omega+4)}\Rightarrow B=\frac{2}{(-4+2)}\Rightarrow B=-1$$

Άρα $\boxed{H(j\Omega)=\frac{1}{(j\Omega+2)}-\frac{1}{(j\Omega+4)}}$

Παίρνουμε αντίστροφο MF και υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση h(t) δηλ.

$$h(t)=F^{-1}\{H(j\Omega)\}\Rightarrow h(t)=F^{-1}\left\{\frac{1}{(j\Omega+2)}-\frac{1}{(j\Omega+4)}\right\}\Rightarrow h(t)=e^{-2t}u(t)-e^{-4t}u(t)$$

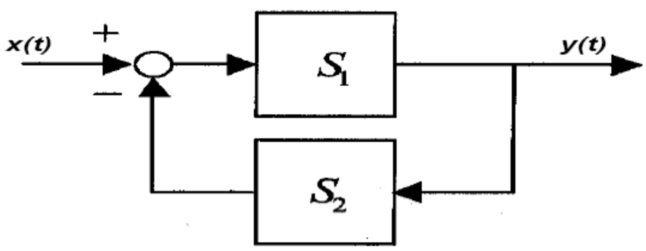
Βασικές Παρατηρήσεις

- Το πηλίκο $H(j\Omega)=\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}$ ονομάζεται απόκριση συχνότητας και είναι ο MF της κρουστικής απόκρισης h(t)
- Από την ιδιότητα $x(t)*y(t)\leftrightarrow X(j\Omega)\bullet Y(j\Omega)$ προκύπτει ότι $H(j\Omega)=\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}$
- Η μέθοδος υπολογισμού της κρουστικής απόκρισης h(t) από την απόκριση συχνότητας H(jΩ) είναι η ακόλουθη:
  - Παίρνουμε MF και στα δύο μέρη της διαφορικής και υπολογίζουμε την απόκριση συχνότητας ως πηλίκο $H(j\Omega)=\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}$
  - Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή
  - Αναλύουμε τον MF σε απλά κλάσματα υπολογίζοντας τους συντελεστές κάθε όρου

- Υπολογίζουμε τον αντίστροφο MF για κάθε όρο και προκύπτει η κρουστική απόκριση h(t)

2.8.4 Άσκηση 1.11

θεωρείστε το παρακάτω σύστημα με ανάδραση που αποτελείται από δύο ΓΧΑ συστήματα των οποίων η λειτουργία εκφράζεται μέσα απο τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις



$$S_1: \quad \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$
$$S_2: \quad \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας του συνολικού συστήματος και σχεδιάστε τη με τη βοήθεια της MATLAB. Αν στην είσοδο έχουμε την βηματική συνάρτηση, υπολογίστε την έξοδο του συστήματος (βηματική απόκριση). Σχεδιάστε στο Simulink το σύστημα και επιβεβαιώστε το γεγονός, ότι αν το αντικαταστήσουμε με το συνολικό σύστημα που προκύπτει, η έξοδος παραμένει η ίδια.

<u>Λύση</u>

α)

Υπολογίζουμε αρχικά την απόκριση συχνότητας του κάθε υποσυστήματος παίρνοντας MF και στα 2 μέρη κάθε διαφορικής που περιγράφει το εκάστοτε σύστημα.

Για το υποσύστημα S_1 έχουμε ότι:

$$F\left\{\frac{dy(t)}{dt} + y(t)\right\} = F\{x(t)\} \Rightarrow (j\Omega)\bullet Y_1(j\Omega) + Y_1(j\Omega) = X_1(j\Omega) \Rightarrow H_1(j\Omega) = \frac{Y_1(j\Omega)}{X_1(j\Omega)} = \frac{1}{1+j\Omega}$$

Για το υποσύστημα S_2 έχουμε ότι:

$$F\left\{\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t)\right\} = F\left\{\frac{dx(t)}{dt} + x(t)\right\} \Rightarrow (j\Omega)\bullet Y_2(j\Omega) + Y_2(j\Omega) = X_2(j\Omega) \Rightarrow H_2(j\Omega) = \frac{Y_2(j\Omega)}{X_2(j\Omega)} = \frac{1+j\Omega}{2+j\Omega}$$

Η έξοδος του συνολικού συστήματος είναι: $y(t)=w(t)*h_1(t)$ όπου με w(t) συμβολίζουμε την είσοδο στο S_1. Η $w(t)=x(t)-y(t)*h_2(t)$ όπου με $y(t)*h_2(t)$ συμβολίζουμε την έξοδο του S_2. Άρα $y(t)=[x(t)-y(t)*h_2(t)]*h_1(t) \Rightarrow y(t)=x(t)*h_1(t)-y(t)*h_2(t)*h_1(t)$ (1)

Παίρνουμε MF και στα 2 μέρη της (1) και προκύπτει:

$$Y(j\Omega) = X(j\Omega)\bullet H_1(j\Omega) - Y(j\Omega)\bullet H_1(j\Omega)\bullet H_2(j\Omega) \Rightarrow Y(j\Omega)(1+H_1(j\Omega)\bullet H_2(j\Omega)) = X(j\Omega)\bullet H_1(j\Omega) \Rightarrow$$

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{H_1(j\Omega)}{1+H_1(j\Omega)\bullet H_2(j\Omega)} \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{\frac{1}{1+j\Omega}}{1+\frac{1}{1+j\Omega}\bullet\frac{1+j\Omega}{2+j\Omega}} \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{2+j\Omega}{(1+j\Omega)\bullet(3+j\Omega)}$$

- ✓ **Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας είναι** $|H(j\Omega)| = \frac{\sqrt{4+\Omega^2}}{\sqrt{9+\Omega^2}\bullet\sqrt{1+\Omega^2}}$

- ✓ **Η γωνία (φάση) της απόκρισης συχνότητας είναι** $\angle H(j\Omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{2}\right) + \tan^{-1}\left(-\frac{\Omega}{1}\right) + \tan^{-1}\left(-\frac{\Omega}{3}\right)$

β) **Υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος** παίρνοντας τον αντίστροφο MF της απόκρισης συχνότητας $H(j\Omega)$

<u>Α τρόπος</u>

Βήμα 1: Ανάλυση της σε $H(j\Omega)$ απλά κλάσματα

$$H(j\Omega)=\frac{2+j\Omega}{(1+j\Omega)\bullet(3+j\Omega)}=\frac{A}{1+j\Omega}+\frac{B}{3+j\Omega}$$

Βήμα 2: Υπολογισμός των συντελεστών Α και Β

$$A=\lim_{j\Omega\to -1}(j\Omega+1)\bullet\frac{j\Omega+2}{(j\Omega+1)\bullet(j\Omega+3)}=\frac{1}{2}$$

$$B=\lim_{j\Omega\to -3}(j\Omega+3)\bullet\frac{j\Omega+2}{(j\Omega+1)\bullet(j\Omega+3)}=\frac{1}{2}$$

Βήμα 3: Υπολογισμός αντίστροφου MF για την $H(j\Omega)$

$$H(j\Omega)=\frac{2+j\Omega}{(1+j\Omega)\bullet(3+j\Omega)}=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{1+j\Omega}+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{3+j\Omega}$$

Η κρουστική απόκριση είναι: $h(t)=\frac{1}{2}\bullet e^{-t}u(t)+\frac{1}{2}\bullet e^{-3t}u(t)$

Βήμα 4: Υπολογισμός βηματικής απόκρισης

Η έξοδος του συστήματος, με είσοδο τη βηματική συνάρτηση u(t), ονομάζεται βηματική απόκριση s(t) και δίνεται από τον τύπο:

$$s(t)=h(t)*u(t)=u(t)*\left[\frac{1}{2}\bullet e^{-t}u(t)+\frac{1}{2}\bullet e^{-3t}u(t)\right]=u(t)*\frac{1}{2}\bullet e^{-t}u(t)+u(t)*\frac{1}{2}\bullet e^{-3t}u(t)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-r}u(r)u(t-r)d(r)+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3r}u(r)u(t-r)d(r)=\frac{1}{2}\int_{0}^{t}e^{-r}d(r)+\frac{1}{2}\int_{0}^{t}e^{-3r}d(r)=\frac{1}{2}\frac{1}{-1}\left[e^{-r}\right]_0^t+\frac{1}{2}\frac{1}{-3}\left[e^{-3r}\right]_0^t=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}e^{-3t}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-3t}$$

Άρα: $\boxed{s(t)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}u(t)\frac{1}{6}e^{-3t}u(t)}$

<u>Β τρόπος</u>

$$s(t)=h(t)*u(t)\leftrightarrow S(j\Omega)=H(j\Omega)*U(j\Omega)\Rightarrow S(j\Omega)=\left(\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)\right)\bullet\left(\frac{2+j\Omega}{(1+j\Omega)\bullet(3+j\Omega)}\right)\Rightarrow$$

$$S(j\Omega)=\frac{2+j\Omega}{(j\Omega)\bullet(1+j\Omega)\bullet(3+j\Omega)}+\frac{\pi\delta(\Omega)\bullet(2+j\Omega)}{(1+j\Omega)\bullet(3+j\Omega)}\Rightarrow S(j\Omega)=\left(\frac{A}{j\Omega}+\frac{B}{1+j\Omega}+\frac{\Gamma}{3+j\Omega}\right)+\left(\frac{\Delta}{1+j\Omega}+\frac{E}{3+j\Omega}\right)\Rightarrow$$

$$S(j\Omega)=\frac{2}{3}\bullet\frac{1}{j\Omega}-\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{1+j\Omega}-\frac{1}{6}\bullet\frac{1}{3+j\Omega}+\frac{\pi\delta(\Omega)}{2}\bullet\frac{1}{1+j\Omega}+\frac{\pi\delta(\Omega)}{2}\bullet\frac{1}{3+j\Omega}$$

Η βηματική απόκριση είναι:

$$s(t)=\frac{1}{3}\mathrm{sgn}(t)-\frac{1}{2}e^{-t}u(t)-\frac{1}{6}e^{-3t}u(t)+\frac{1}{4}*e^{-t}u(t)+\frac{1}{4}*e^{-3t}u(t)\Rightarrow$$

$$s(t)=\frac{1}{3}\mathrm{sgn}(t)-\frac{1}{2}e^{-t}u(t)-\frac{1}{6}e^{-3t}u(t)+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\Rightarrow s(t)=\frac{1}{3}\mathrm{sgn}(t)-\frac{1}{2}e^{-t}u(t)-\frac{1}{6}e^{-3t}u(t)+\frac{1}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(t)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}u(t)-\frac{1}{6}e^{-3t}u(t)$$

Άρα: $\boxed{s(t)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-3t}}$

2.9 Γενική Θεωρία για Σειρές Fourier

- ✓ **Κάθε περιοδική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως σειρά Fourier. Η σειρά Fourier είναι η αναπαράσταση της συνάρτησης ως ένα άπειρο άθροισμα όρων και δεν έχει καμία σχέση με το μετασχηματισμό Fourier που είναι η απεικόνιση των συχνοτήτων της συνάρτησης**. Υπάρχουν δύο είδη σειρών Fourier: Η εκθετική και η τριγωνομετρική σειρά Fourier
- ✓ Η εκθετική σειρά Fourier δίνεται από τον τύπο: $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t}$ (1)
- ✓ Οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier δίνονται από τον τύπο: $c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt$ (2)
- ✓ Αν παραγωγίσουμε k φορές τη σχέση (1) προκύπτει η k-οστή παράγωγος $x(t)^{(k)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(jn\Omega_0\right)^k e^{jn\Omega_0 t}$ (3)
- ✓ Αν συμβολίσουμε $c_n^{(k)}$ τους συντελεστές της k-αστής παραγώγου τότε η σχέση που συνδέει τους συντελεστές $c_n^{(k)}$ της k-αστής παραγώγου της σειράς Fourier με τους συντελεστές c_n της εκθετικής σειράς Fourier είναι: $c_n = \frac{c_n^{(k)}}{(jn\Omega_0)^k}$ (4)
- ✓ Η τριγωνομετρική σειρά Fourier δίνεται από τον τύπο: $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$
- ✓ Οι συντελεστές της τριγωνομετρικής σειράς Fourier δίνονται από τους τύπους:
  - $a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt$
  - $a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cos(n\Omega_0 t)dt$ για n=1,2,3,…
  - $b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\sin(n\Omega_0 t)dt$ για n=1,2,3,…

2.9.1 Άσκηση 1.13

Μια περιοδική συνάρτηση κρουστικών παλμών (periodic impulse train) ορίζεται από τον τύπο

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

(α) Σχεδιάστε το σήμα για $-3T_0 \leq t \leq 3T_0$

(β) Ποια είναι η βασική συχνότητα, ω_0, αν $T_0 = 10$. Χρησιμοποιείστε την τιμη $T_0 = 10$ για τα υπόλοιπα υποερωτήματα

(γ) Υπολογίστε τους συντελεστές της σειράς Fourier c_k, στην αναπαράσταση

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

(δ) Σχεδιάστε το φάσμα του σήματος για $-4\omega_0 \leq \omega \leq 4\omega_0$

(ϵ) Αν η συνάρτηση $x(t)$ είναι η είσοδος ενός συστήματος με απόκριση συχνότητας

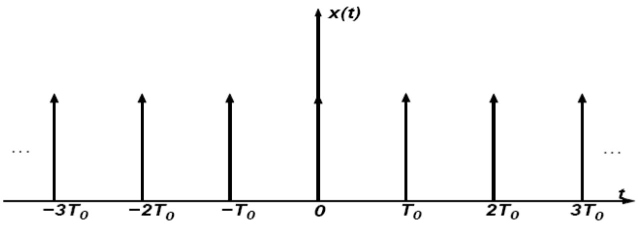
$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-4j\omega} & |\,\omega\,| < \omega_{co} \\ 0 & |\,\omega\,| > \omega_{co} \end{cases}$$

με $\omega_{co} = \pi/T_0$, ποια είναι η έξοδος του συστήματος;

$(\sigma\tau)$ Αν $\omega_{co} = 3\pi/T_0$, ποια η έξοδος στην περίπτωση αυτή;

<u>Λύση</u>

(α) Για το διάστημα $-3T_0 \leq t \leq 3T_0$ το σήμα αναπαρίσταται στο επόμενο σχήμα



(β) Εφόσον $T_0 = 10$, τότε η βασική συχνότητα θα είναι

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{5}$$

(γ) Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier, ολοκληρώνουμε σε μια περίοδο, οπότε

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \frac{1}{10}\int_{-5}^{5} \delta(t)e^{-jk(\pi/5)t}dt \\ &= \frac{1}{10}\int_{-5}^{5} \delta(t)dt \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $x(t)$ μπορεί να γραφεί

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{10} e^{\frac{jk\pi}{5}t}$$

δ) Το ερώτημα αυτό ζητά να βρούμε το MF του σήματος x(t). Τον υπολογίζουμε σταδιακά ως εξής:

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t - nT_0) \leftrightarrow e^{-jn\Omega T_0}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\Omega T_0}$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της δυϊκότητας κάνουμε εναλλαγή χρόνου και συχνότητας:

$$x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$$

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi X(-\Omega)$$

Προκύπτει ότι:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \quad \leftrightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\Omega T_0}$$

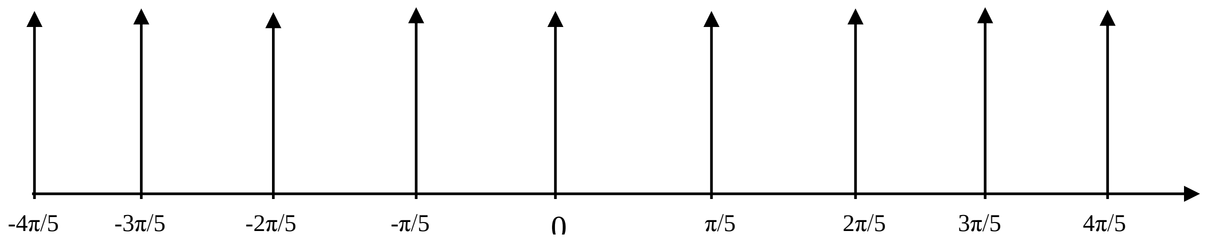
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jnt\Omega_0} \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(-\left(\Omega - n\Omega_0\right)\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnt\Omega_0} \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - n\Omega_0\right)$$

$$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnt\Omega_0} \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - n\Omega_0\right)$$

$$x(t) \leftrightarrow \Omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_0)$$

Το $\Omega_0 = \dfrac{\pi}{5}$ οπότε η αναπαράσταση του φάσματος δηλ. των συχνοτήτων του MF για το σήμα x(t) στο διάστημα [-4π/5, 4π/5] είναι:



Παρατηρούμε ότι κάθε κρουστική συνάρτηση στο χρόνο έχει και μια αντίστοιχη κρουστική συνάρτηση στη συχνότητα.

ε) Το σήμα εισόδου οδηγείται σε ένα σύστημα με κρουστική απόκριση $\delta(t-4) \leftrightarrow e^{-j\Omega 4}$ και επειδή ότι η απόκριση συχνότητας του συστήματος ορίζεται μόνο στο διάστημα (-π/5, π/5) συμπεραίνουμε ότι στην έξοδο του φίλτρου περνάνε μόνο συχνότητες που βρίσκονται στο διάστημα αυτό. Άρα από το σήμα εισόδου θα περάσει μόνο ο κεντρικός όρος του αθροίσματος για n=0 ο οποίος έχει συχνότητα 0. Επίσης το σύστημα καθυστερεί την είσοδο κατά 4 μονάδες χρόνου

Άρα η έξοδος του φίλτρου είναι:

$$y(t) = |H(j0)| \bullet \frac{1}{10} \Rightarrow y(t) = \left|e^{-4j0}\right| \bullet \frac{1}{10} = 0.1$$

στ)Στην περίπτωση που το ω_{c0}=3π/10 οι όροι από το σήμα που διέρχονται από το φίλτρο είναι για n=0, n=1 και n=2 οι οποίοι έχουν συχνότητες –π/5, 0 και π/5 διότι αυτοί βρίσκονται μέσα στο επιτρεπτό διάστημα συχνοτήτων [-3π/10, 3π/10] του φίλτρου. Άρα η έξοδος είναι:

$$y(t) = H\left(j\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) \bullet \frac{1}{10} e^{j(-1)\frac{\pi}{5}t} + H(j(0)) \bullet \frac{1}{10} e^{j(0)\frac{\pi}{5}t} + H\left(j\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \bullet \frac{1}{10} e^{j(1)\frac{\pi}{5}t}$$

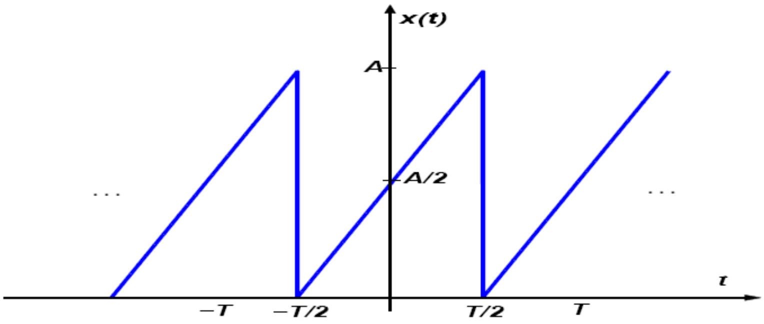
$$y(t) = \left|e^{-4j\left(-\frac{\pi}{5}\right)}\right| \bullet \frac{1}{10} e^{j(-1)\frac{\pi}{5}t} + \left|e^{-4j(0)}\right| \bullet \frac{1}{10} e^{j(0)\frac{\pi}{5}t} + \left|e^{-4j\left(\frac{\pi}{5}\right)}\right| \bullet \frac{1}{10} e^{j(1)\frac{\pi}{5}t}$$

Παρατήρηση

Γενικά η έξοδος του φίλτρου (ΓΧΑ σύστημα) με είσοδο ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα (ιδιοσυνάρτηση) είναι: $y(t)=x(t)|H(j\Omega_0)|$ δηλ. είναι το σήμα εισόδου επί την απόκριση συχνότητας του συστήματος στη συχνότητα της εισόδου

2.9.2 Άσκηση 1.14

Βρείτε την βασική περίοδο T και τη βασική συχνότητα ω_0 του παρακάτω σήματος και υπολογίστε τον συντελεστές c_k της αντίστοιχης σειράς Fourier. Εκφράστε το σήμα ως σειρά Fourier. Χρησιμοποιώντας το περιβάλλον MATLAB, σχεδιάστε το σήμα που προκύπτει για $5,\ 15,\ 250$ αρ-



μονικές (συντελεστές) και για $A = T = 1$.

<u>Λύση</u>

Η γενική μορφή της ευθείας είναι: y=λx+b. Για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές λ και b παίρνουμε τα ακόλουθα σημεία της ευθείας: (-T/2,0) και (A/2,0). Για τα σημεία αυτά προκύπτει το σύστημα: 0=λ(-T/2)+b και A/2=λ0+b. Οι λύσεις του συστήματος είναι: $\lambda = \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{T}}$ και $\mathrm{b} = \dfrac{\mathrm{A}}{2}$ οπότε η μορφή της ευθείας είναι: y= $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{T}} t + \dfrac{\mathrm{A}}{2}$

Η βασική περίοδος του σήματος είναι T και η βασική συχνότητα είναι $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{\mathrm{T}}$. Για να βρούμε την εκθετική σειρά Fourier χρησιμοποιούμε τον τύπο: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$ ενώ οι συντελεστές της δίνονται από τον τύπο: $c_n = \dfrac{1}{\mathrm{T}} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

Για n≠0 έχουμε:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\frac{A}{T}t+\frac{A}{2}\right)e^{-j\omega_o \mathrm{n}t}dt = \frac{1}{T}\left(\left[\frac{1}{-jn\omega_0}e^{-j\omega_0 \mathrm{n}t}\bullet\left(\frac{A}{T}t+\frac{A}{2}\right)\right]_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{-jn\omega_0}e^{-jn\omega_0 t}\bullet\frac{A}{T}dt\right) =$$

$$\frac{1}{T}\left(\left[\frac{1}{-jn\omega_0}e^{-jn\omega_0 t}\bullet\left(\left(\frac{A}{T}\frac{T}{2}+\frac{A}{2}\right)-\left(\frac{A}{T}\bullet-\frac{T}{2}+\frac{A}{2}\right)\right)\right]_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{-jn\omega_0}e^{-jn\omega_0 t}\bullet\frac{A}{T}dt\right) =$$

$$\frac{1}{T}\left(\left[\frac{1}{-jn\omega_0}e^{-jn\omega_0 t}\bullet(A)\right]_{-T/2}^{T/2} + \frac{\mathrm{A}}{j2n\omega_0}\int_{-T/2}^{T/2}e^{-jn\omega_0 t}dt\right) = \frac{1}{T}\left(\left[\frac{A\mathrm{T}}{-j2n\omega_0}e^{-jn\omega_0 t}\right] + \frac{\mathrm{A}}{j2n\omega_0}\int_{-T/2}^{T/2}e^{-jn\omega_0 t}dt\right) =$$

$$\frac{1}{T}\left(\left[\frac{A\mathrm{T}}{-j2n\omega_0}\left(e^{-jn\omega_0\frac{T}{2}} - e^{jn\omega_0\frac{T}{2}}\right)\right] + \frac{\mathrm{A}}{j2\pi n}\frac{1}{-j2\pi n}\left[e^{-jn\omega_0 t}\right]_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2}\right) = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{j}2\pi\mathrm{n}}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{A\mathrm{T}}{4\pi^2\mathrm{n}^2}\left(e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{T}}n\frac{T}{2}} - e^{j\frac{2\pi}{\mathrm{T}}n\frac{T}{2}}\right) =$$

$$-\frac{A}{j2\pi n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 0 = \frac{jA}{2\pi n}(-1)^n$$

Επειδή το n βρίσκεται στον παρονομαστή του c_n, αυτό σημαίνει ότι οι συντελεστές δεν ορίζονται για n=0. Γιαυτό υπολογίζουμε επιπλέον το συντελεστή c_0 και προκύπτει:

Άρα τελικά: $\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 \mathrm{t}} = c_o + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty} c_n e^{jn\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{A}}{2} + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty} \frac{\mathrm{jA(-1)^n}}{2\pi\mathrm{n}} e^{jn\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\mathrm{t}}}$

2.9.3 Άσκηση 1.15

Βρείτε τις σειρές Fourier των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων με περίοδο $T = 2\pi$

$$(\alpha)\ f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\pi, 0) \\ 1 & t \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$(\beta)\ f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\pi, 0) \\ t & t \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$(\gamma)\ f(t) = \begin{cases} -t & t \in (-\pi, 0) \\ t & t \in (0, \pi] \end{cases} \qquad f(0) = 0$$

$$(\delta)\ f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{t}{2\pi} & t \in (-\pi, 0) \\ \frac{1}{2} - \frac{t}{2\pi} & t \in [0, \pi] \end{cases}$$

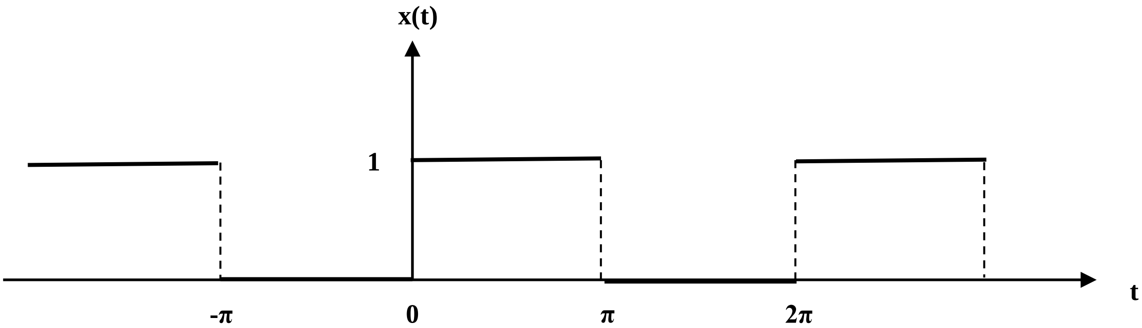
Σχεδιάστε στη MATLAB τα σήματα που προκύπτουν χρησιμοποιώντας 25 συντελεστές.

<u>Λύση</u>

α)

Δίνεται το ακόλουθο σήμα. Να αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\pi, 0) \\ 1 & t \in [0, \pi] \end{cases}$$



Οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από τον τύπο:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-jnt}dt = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-jn}\left[e^{-jnt}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{-2\pi jn}\left(e^{-jn\pi} - 1\right) = \frac{1-e^{-jn\pi}}{2\pi jn} = \frac{1-(-1)^n}{2\pi jn} \quad n \neq 0$$

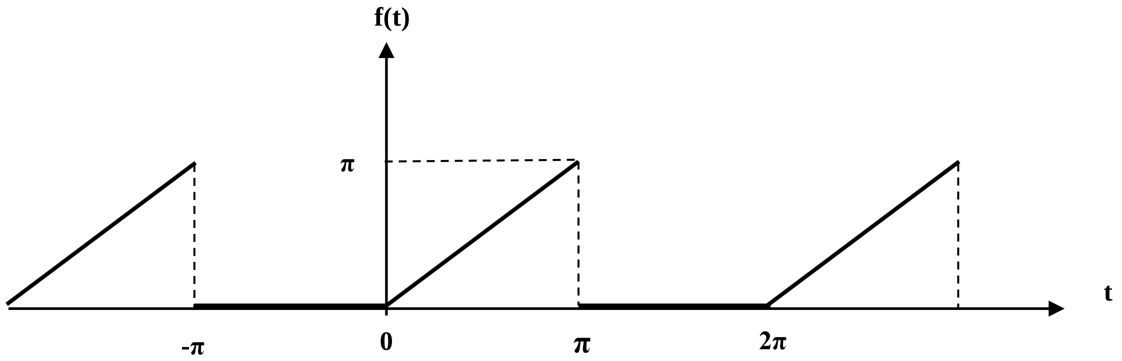
$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} dt = \frac{1}{2}$$

Άρα η ζητούμενη σειρά Fourier είναι: $\boxed{f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2\pi jn} e^{jnt}}$

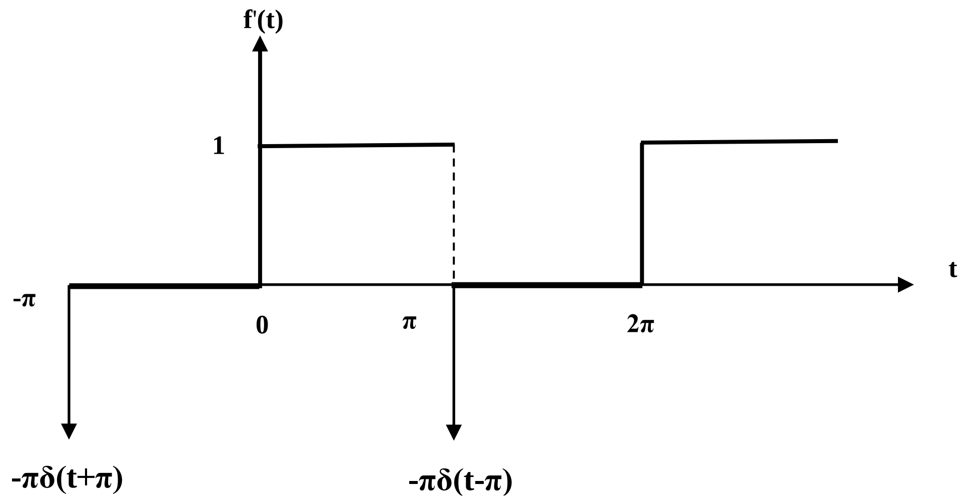
β)
Δίνεται το ακόλουθο σήμα. Να αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\pi, 0) \\ t & t \in [0, \pi] \end{cases}$$

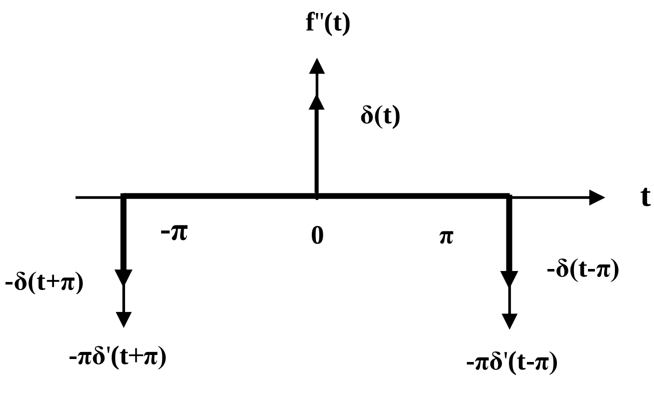
<u>Λύση</u>



Η 1η παράγωγος της f(t) στο διάστημα (-π, π] είναι: $f'(t)=1-\pi\delta(t-\pi)$



Η 2η παράγωγος της f(t) στο διάστημα (-π, π] είναι: $f''(t)=\delta(t)-\pi\delta'(t-\pi)-\pi\delta(t-\pi)$



<u>Α τρόπος – Υπολογισμός συντελεστών σειράς Fourier από 2η παράγωγο</u>
Οι συντελεστές της 2ης παραγώγου δίνονται από τον τύπο:

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)e^{-jnt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\delta(t)-\pi\delta'(t-\pi)-\delta(t-\pi)\big)e^{-jnt}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)e^{-jnt}dt - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\delta'(t-\pi)e^{-jnt}dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t-\pi)e^{-jnt}dt = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2}(-1)^1\left(e^{-jnt}\right)'\Big|_{t=\pi} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2}(-jne^{-jn\pi}) - \frac{1}{2\pi}e^{-jn\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} - \frac{jn\pi(-1)^n}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}e^{-jn\pi} = \frac{1-e^{-jn\pi}-jn\pi e^{-jn\pi}}{2\pi}$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από τον τύπο:

$$c_n = \frac{c_n^{(k)}}{(jn\Omega_0)^k} = \frac{c_n^{(2)}}{(jn\Omega_0)^2} = \frac{\dfrac{1-e^{-jn\pi} - jn\pi e^{-jn\pi}}{2\pi}}{-n^2} = \frac{e^{-jn\pi} + \pi jne^{-jn\pi} - 1}{2\pi n^2} \text{ για } n \neq 0$$

Θα πρέπει να βρούμε ξεχωριστά τον όρο c_0 διότι ο προηγούμενος τύπος ισχύει για n≠0.

Ο όρος $c_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} tdt\right) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{4}$

Άρα η ζητούμενη σειρά Fourier είναι: $\boxed{f(t) = \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{2jn} e^{jnt}}$

<u>Β τρόπος – Υπολογισμός συντελεστών σειράς Fourier από 1η παράγωγο</u>

Οι συντελεστές της 1ης παραγώγου δίνονται από τον τύπο:

$$c_n^{(1)} = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-jnt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \pi\delta(t-\pi)\right)e^{-jnt}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-jnt}dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \pi\delta(t-\pi)e^{-jnt}dt = \frac{1}{2\pi} \bullet \frac{1}{-jn}\left[e^{-jnt}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\left(\pi e^{-jn\pi t}\right) = \frac{1-e^{-jn\pi} - \pi jne^{-jn\pi}}{2\pi jn}$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από τον τύπο:

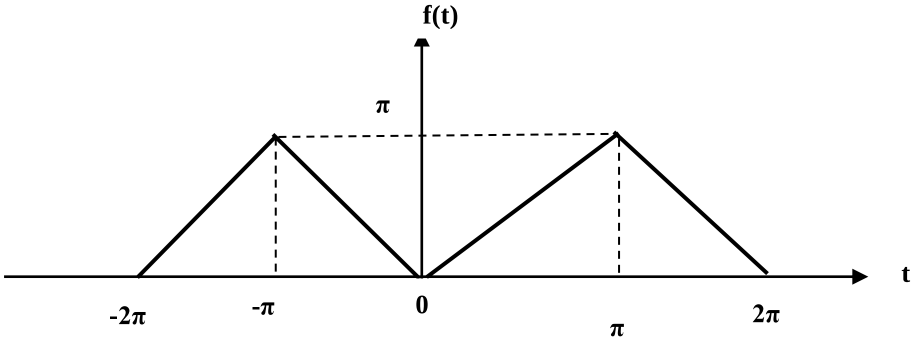
$$c_n = \frac{c_n^{(k)}}{(jn\Omega_0)^k} = \frac{c_n^{(1)}}{(jn\Omega_0)^1} = \frac{\dfrac{1-e^{-jn\pi} - \pi jne^{-jn\pi}}{2\pi jn}}{jn} = \frac{e^{-jn\pi} + \pi jne^{-jn\pi} - 1}{2\pi n^2} \text{ για } n \neq 0$$

Παρατήρηση: Όταν η συνάρτηση που δίνεται περιλαμβάνει στον τύπο της με οποιονδήποτε τρόπο την παράμετρο t τότε στον υπολογισμό των συντελεστών της σειράς Fourier προκύπτει πάντα ολοκλήρωση κατά παράγοντες και εφαρμόζεται η μέθοδος της παραγώγου.

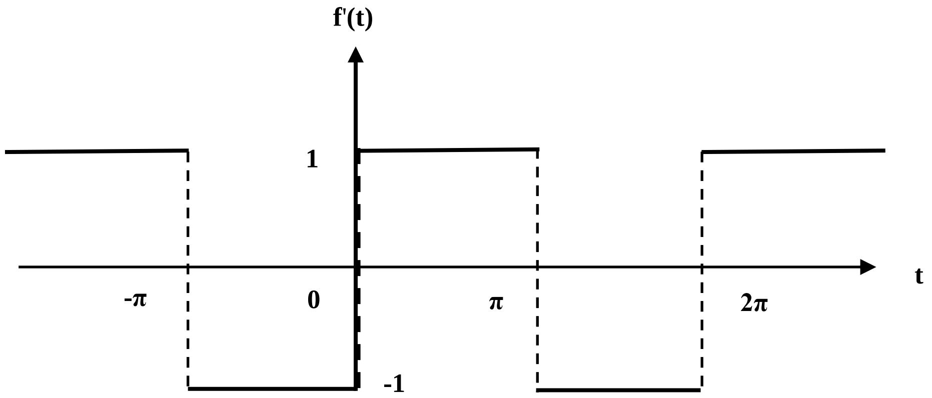
γ)
Δίνεται το ακόλουθο σήμα. Να αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier.

$$f(t) = \begin{cases} -t & t \in (-\pi, 0) \\ t & t \in (0, \pi] \end{cases} \qquad f(0) = 0$$

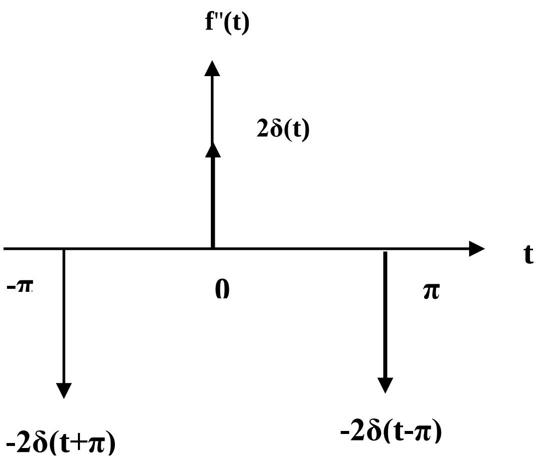
<u>Λύση</u>



Η $1^{η}$ παράγωγος της f(t) στο διάστημα (-π, π] είναι: f'(t)=-1,+1



Η $2^{η}$ παράγωγος της f(t) στο διάστημα (-π, π] είναι: f''(t)=2δ(t)-2δ(t-π)



Οι συντελεστές της $2^{ης}$ παραγώγου δίνονται από τον τύπο:

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)e^{-jnt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[2\delta(t) - 2\delta(t-\pi)\right]e^{-jnt}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)e^{-jnt}dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t-\pi)e^{-jnt}dt = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}e^{-jn\pi} = \frac{1}{\pi}\left(1 - e^{-jn\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(1 - \cos n\pi + j\sin n\pi\right) = \frac{1}{\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από τον τύπο:

$$c_n = \frac{c_n^{(k)}}{(jn\Omega_0)^k} = \frac{c_n^{(2)}}{(jn\Omega_0)^2} = \frac{c_n^{(2)}}{-n^2} = \frac{\frac{1}{\pi}\left(1 - (-1)^n\right)}{-n^2} = \frac{1 - (-1)^n}{-n^2\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \; n \neq 0$$

Θα πρέπει να βρούμε ξεχωριστά τον όρο c_0 διότι ο προηγούμενος τύπος ισχύει για n≠0.

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -t\,dt + \int_{0}^{\pi} t\,dt\right) = \frac{1}{2\pi}\left(-\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(-\left(0-\frac{\pi^2}{2}\right)+\left(\frac{\pi^2}{2}-0\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Άρα η ζητούμενη σειρά Fourier είναι: $\boxed{f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} e^{jnt}}$

<u>Β τρόπος</u>

Οι συντελεστές της $1^{ης}$ παραγώγου δίνονται από τον τύπο:

$$c_n^{(1)} = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -e^{-jnt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-jnt}dt = \frac{1}{2\pi}\bullet\frac{-1}{-jn}\left[e^{-jnt}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}\bullet\frac{-1}{-jn}\left[e^{-jnt}\right]_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi jn} - \frac{e^{jn\pi}}{2\pi jn} - \frac{e^{-jn\pi}}{2\pi jn} + \frac{1}{2\pi jn} = \frac{1-\cos n\pi}{\pi jn} = \frac{1-(-1)^n}{\pi jn}$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από τον τύπο:

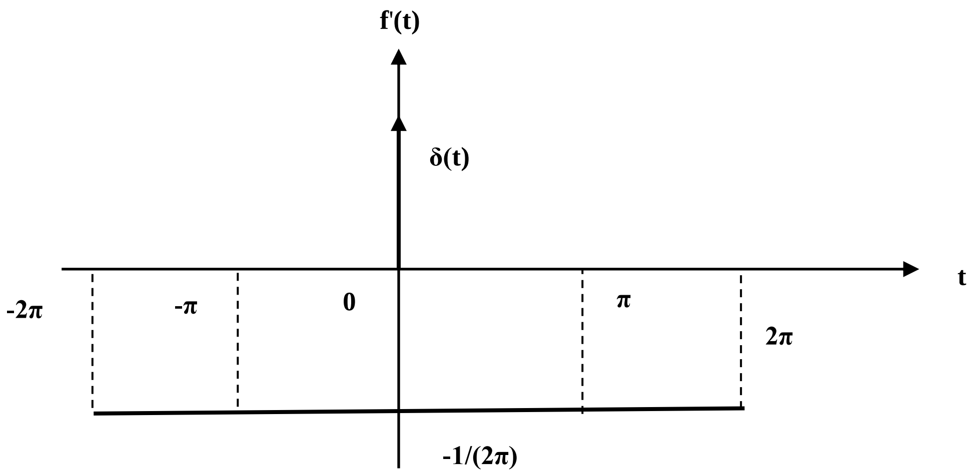
$$c_n = \frac{c_n^{(k)}}{(jn\Omega_0)^k} = \frac{c_n^{(1)}}{(jn\Omega_0)^1} = \frac{\frac{1-\cos n\pi}{\pi jn}}{jn} = \frac{1-\cos n\pi}{-\pi n^2} = \frac{\cos n\pi - 1}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\; n \neq 0$$

δ)

Δίνεται το ακόλουθο σήμα. Να αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{t}{2\pi} & t \in (-\pi, 0) \\ \frac{1}{2} - \frac{t}{2\pi} & t \in [0, \pi] \end{cases}$$

<u>Α τρόπος</u>



Η $1^{η}$ παράγωγος της x(t) στο διάστημα (-π, π] είναι: $f'(t) = -\frac{1}{2\pi} + \delta(t)$

Οι συντελεστές της $1^{ης}$ παραγώγου δίνονται από τον τύπο:

$$c_n^{(1)} = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-jnt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[-\frac{1}{2\pi}+\delta(t)\right]e^{-jnt}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)e^{-jnt}dt - \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-jnt}dt = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{4\pi}\bullet\frac{1}{-jn}\left[e^{-jnt}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi jn}\left(e^{-jn\pi} - e^{jn\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2n\pi}\frac{\left(e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}\right)}{2j} = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2n\pi}\sin(n\pi) = \frac{1}{2\pi}$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από τον τύπο:

$$c_n = \frac{c_n^{(k)}}{(jn\Omega_0)^k} = \frac{c_n^{(1)}}{(jn\Omega_0)^1} = \frac{c_n^{(1)}}{jn} = \frac{\frac{1}{2\pi}}{jn} = \frac{1}{2\pi jn}\, n \neq 0$$

Θα πρέπει να βρούμε ξεχωριστά τον όρο c_0 διότι ο προηγούμενος τύπος ισχύει για n≠0.

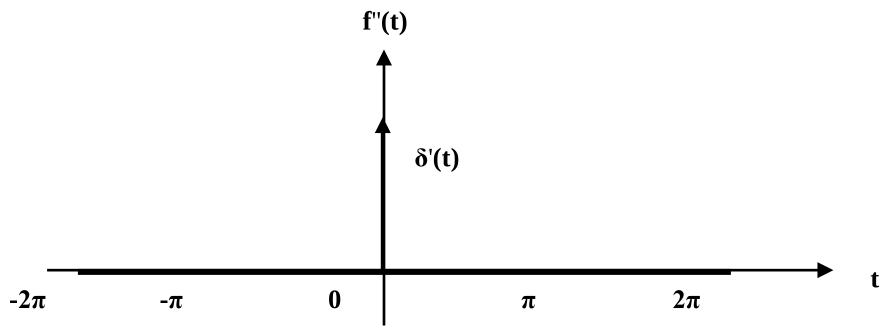
$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{2}-\frac{t}{2\pi}\right)dt + \int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{2\pi}\right)dt\right) =$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2}\,dt + \int_{-\pi}^{0}-\frac{t}{2\pi}\,dt + \int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\,dt + \int_{0}^{\pi}-\frac{t}{2\pi}\,dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\pi - \frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{4\pi}\pi - \frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{\pi} = -\frac{1}{4\pi^2}\bullet\left(-\frac{\pi^2}{2}\right) - \frac{1}{4\pi^2}\bullet\left(\frac{\pi^2}{2}\right) = 0$$

Άρα η ζητούμενη σειρά Fourier είναι: $\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty} \frac{1}{2\pi jn} e^{jnt}}$

<u>Β Τρόπος</u>



Η $2^{η}$ παράγωγος της x(t) στο διάστημα (-π, π] είναι: $f''(\mathrm{t}) = \delta'(t)$
Οι συντελεστές της $2^{ης}$ παραγώγου δίνονται από τον τύπο:

$$\mathrm{c_n}^{(2)} = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f''(t)}e^{-\mathrm{jn}\Omega_0 \mathrm{t}}\mathrm{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f''(t)}e^{-jnt}\mathrm{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta'(t)\bullet e^{-jnt}\mathrm{dt} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(-1)^1\left(e^{-jnt}\right)'\Big|_{t=0} = -\frac{1}{2\pi}\left(-jne^{-jnt}\right)\Big|_{t=0} = \frac{jn}{2\pi}$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από τον τύπο:

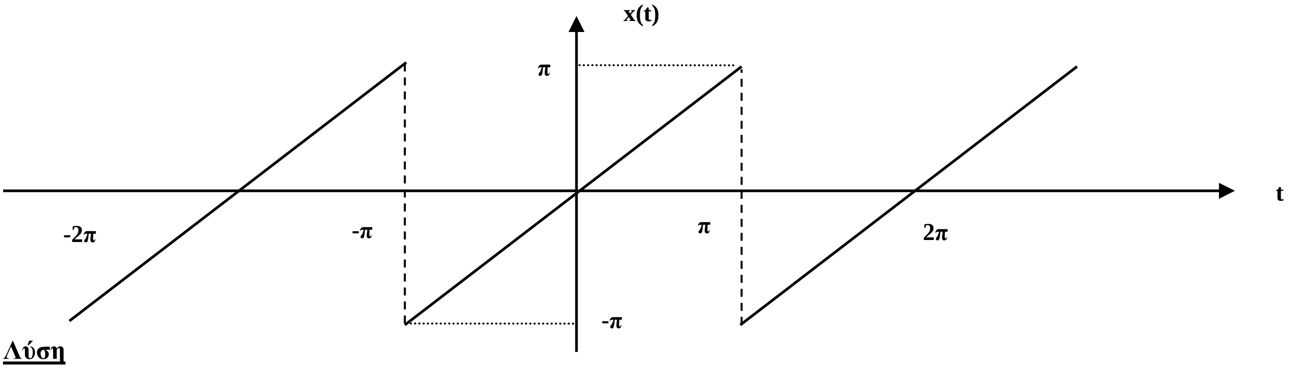
$$c_n = \frac{c_n^{(k)}}{(jn\Omega_0)^k} = \frac{c_n^{(2)}}{(jn\Omega_0)^1} = \frac{\frac{jn}{2\pi}}{-n^2} = \frac{jn}{-2\pi n^2} = -\frac{j}{2\pi n} = \frac{1}{2\pi nj}\, n \neq 0$$

Παρατηρούμε ότι και με τους συντελεστές της $2^{ης}$ παραγώγου υπολογίζουμε τους ίδιους συντελεστές c_n για τη σειρά Fourier.

2.9.4 Ασκήσεις και Θέματα με Σειρές Fourier

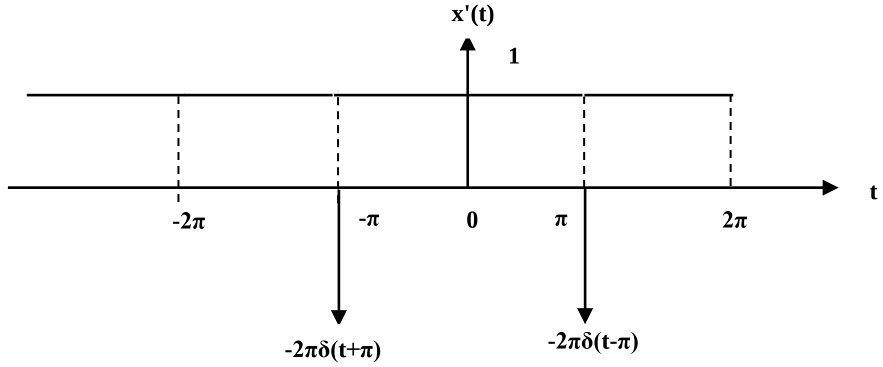
2.9.4.1 Θέμα 3 Ιούνιος 2007 και Ιούνιος 2009

Δίνεται το ακόλουθο σήμα. Να αναπτυχθεί σε εκθετική σειρά Fourier



Λύση

Η βασική περίοδος του σήματος είναι T=2π και η βασική συχνότητα είναι $\Omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2\pi}=1$.



Α Τρόπος – Υπολογισμός Συντελεστών 1ης Παραγώγου

Οι συντελεστές της 1ης παραγώγου είναι οι εξής:

$$c_n{}^{(1)}=\frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi}x'(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x'(t)e^{-jnt}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(-2\pi\delta(t+\pi)+1\right)e^{-jnt}dt=-\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t+\pi)e^{-jnt}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-jnt}dt=$$

$$=-e^{-jn\pi}+\frac{1}{-jn}\left[e^{-jnt}\right]_{-\pi}^{\pi}=e^{-jn\pi}-\frac{1}{jn}\left(e^{-jn\pi}-e^{jn\pi}\right)=-e^{jn\pi}+\frac{2}{n}\left(\frac{e^{jn\pi}-e^{-jn\pi}}{2j}\right)=e^{jn\pi}+\frac{2}{n}\sin(n\pi)=$$

$$=-e^{jn\pi}=-\left((\cos n\pi)-j\sin(n\pi)\right)=-(-1)^n$$

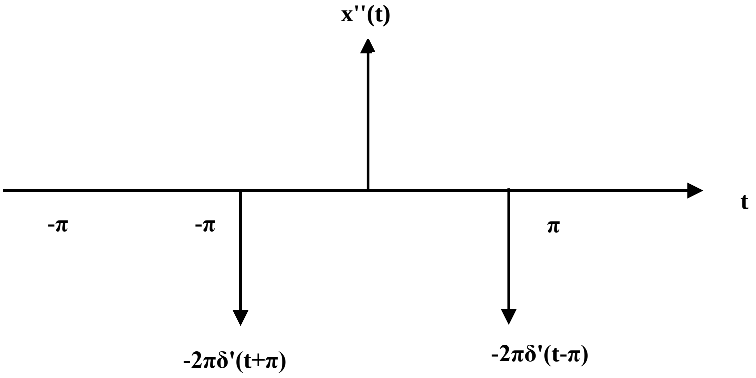
Οι κανονικοί συντελεστές είναι οι εξής:

$$c_n=\frac{c_n{}^{(k)}}{(jn\Omega_0)^k}=\frac{c_n{}^{(1)}}{(jn)^1}=\frac{-(-1)^n}{jn}=\frac{j(-1)^n}{n},n\neq 0$$

Αυτοί οι συντελεστές ισχύουν μόνο για n≠0, οπότε θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τον όρο c_0.

Ο όρος $c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\,dt=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=0$

Άρα η **ζητούμενη σειρά Fourier** είναι: $x(t)=c_0+\sum_{n=-\infty\wedge n\neq 0}^{\infty}c_n e^{jn\Omega_0 t}=\sum_{n=-\infty\wedge n\neq 0}^{\infty}\frac{j(-1)^n}{n}e^{jnt}$



Β Τρόπος – Υπολογισμός Συντελεστών 2ης Παραγώγου

Από τις 2 κρουστικές συναρτήσεις θα κρατήσουμε ΜΟΝΟ αυτή που είναι μέσα στα όρια του ολοκληρώματος και συγκεκριμένα επειδή θα θεωρήσουμε ως διάστημα ολοκλήρωσης είτε το [-π, π) είτε το (-π,π] θα κρατήσουμε είτε την $-2\pi\delta'(t+\pi)$ είτε την $-2\pi\delta'(t-\pi)$ αντίστοιχα

Οι συντελεστές της 2ης παραγώγου είναι οι εξής:

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} x''(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x''(t)e^{-jnt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -2\pi\delta'(t-\pi)e^{-jnt}dt = -\int_{-\pi}^{\pi}\delta'(t-\pi)e^{-jnt}dt =$$

$$= -(-1)^1(e^{-jnt})'\Big|_{t=\pi} = (-jne^{-jnt})\Big|_{t=\pi} = (-jne^{-jn\pi}) = -jn[(\cos n\pi) - j\sin(n\pi)] = -jn(-1)^n$$

Οι κανονικοί συντελεστές είναι οι εξής:

$$c_n = \frac{c_n^{(k)}}{(jn\Omega_0)^k} = \frac{c_n^{(2)}}{(jn\Omega_0)^2} = \frac{c_n^{(2)}}{(jn)^2} = \frac{-jn(-1)^n}{-n^2} = \frac{j(-1)^n}{n} \text{ για } n\neq 0$$

Αυτοί οι συντελεστές ισχύουν μόνο για $n\neq 0$, οπότε θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τον όρο c_0.

Ο όρος $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

Άρα η ζητούμενη σειρά Fourier είναι: $\boxed{x(t) = c_0 + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t} = \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty} \frac{-j(-1)^n}{n} e^{jnt}}$

Συμπέρασμα

ΤΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΟΠΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΤΑΞΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΚΑΙ ΑΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ, ΟΙ ΚΑΝΟΝΙΚΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΤΗΣ ΣΕΙΡΑΣ FOURIER ΘΑ ΕΙΝΑΙ ΠΑΝΤΑ ΟΙ ΙΔΙΟΙ.

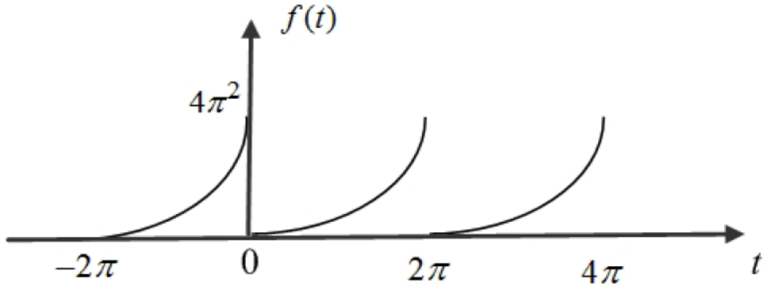
2.9.4.2 Θέμα 2 Φεβρουάριος 2003 και Σεπτέμβριος 2004

Βρείτε τη σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης $f(t)=t^2$ για $0<t<2\pi$ (η περίοδος είναι 2π)

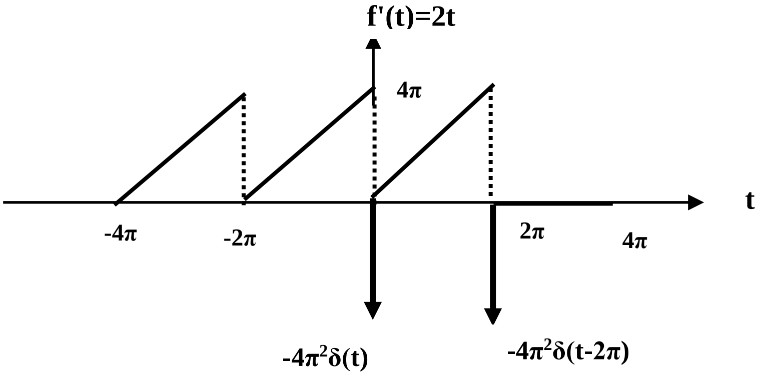
<u>Λύση</u>

ΜΟΝΟ ΟΤΑΝ ΤΟ ΣΗΜΑ ΠΟΥ ΔΙΝΕΤΑΙ ΕΙΝΑΙ ΣΤΑΘΕΡΟ ΔΗΛ. ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΤΟΥ t ΤΟΤΕ ΜΟΝΟ ΜΠΟΡΟΎΜΕ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΑΠΕΥΘΕΙΑΣ ΤΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΤΗΣ ΣΕΙΡΑΣ FOURIER, ΑΛΛΙΩΣ ΕΦΑΡΜΟΖΟΥΜΕ ΜΕΘΟΔΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ.

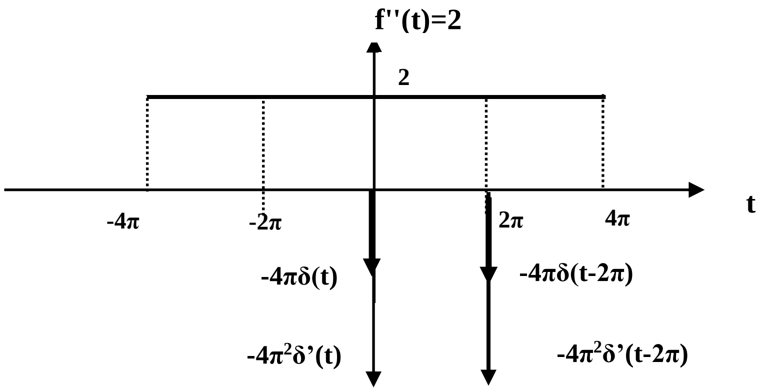
Πρώτα αναπαριστάνουμε γραφικά την περιοδική επέκταση της f(t)



Η $1^η$ παράγωγος της f(t) είναι: $f'(t)=2t-4\pi^2\delta(t)$



Η $2^η$ παράγωγος της f(t) είναι: $f''(t)=2-4\pi^2\delta'(t)-4\pi\delta(t)$



Παρατηρούμε ότι στη $2^η$ παράγωγο της f(t) προκύπτει νέα ασυνέχεια στο 0.

<u>Α τρόπος-Υπολογισμός Συντελεστών $2^{ης}$ παραγώγου</u>

Οι συντελεστές της $2^{ης}$ παραγώγου δίνονται από τον τύπο:

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{T}\bullet\int_0^{2\pi} f''(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{2\pi}\bullet\int_0^{2\pi} f''(t)\bullet e^{-jnt}dt = \frac{1}{2\pi}\bullet\int_0^{2\pi}\left(2-4\pi^2\delta'(t)-4\pi\delta(t)\right)\bullet e^{-jnt}dt =$$

$$= \frac{2}{2\pi}\bullet\int_0^{2\pi} e^{-jnt}dt - \frac{4\pi^2}{2\pi}\bullet\int_0^{2\pi}\delta'(t)\bullet e^{-jnt}dt - \frac{4\pi}{2\pi}\bullet\int_0^{2\pi}\delta(t)\bullet e^{-jnt}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\bullet\left(\frac{1}{-jn}[e^{-jnt}]_0^{2\pi}\right) - 2\pi\left((-1)^1\left(e^{-jnt}\right)'\Big|_{t=0}\right) - 2 = -\frac{1}{\pi jn}\left(e^{-jn2\pi}-1\right) + 2\pi\left(-jne^{-jnt}\right)\Big|_{t=0} - 2 =$$

$$= -\frac{1}{\pi jn}\left(\cos(2\pi n) - j\sin(2\pi n) - 1\right) - 2\pi jn - 2 = -\frac{1}{\pi jn}\left(1-0-1\right) - 2\pi jn - 2 = -2\pi jn - 2$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι:

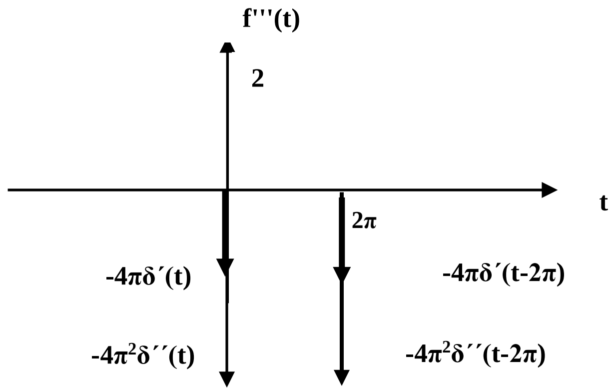
$$c_n = \frac{c_n^{(k)}}{(jn\Omega_0)^k} = \frac{c_n^{(2)}}{(jn\Omega_0)^2} = \frac{c_n^{(2)}}{(jn)^2} = \frac{-2\pi jn - 2}{-n^2} = \frac{2+2\pi jn}{n^2} \text{ για } n\neq 0$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε ξεχωριστά τον όρο c_0 διότι ο προηγούμενος τύπος ισχύει για $n\neq 0$.

Ο όρος $c_0 = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} t^2 dt\right) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{8\pi^3}{3} = \frac{4}{3}\pi^2$

Άρα η ζητούμενη σειρά Fourier είναι: $\boxed{x(t) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty}\left(\frac{2+2\pi jn}{n^2}\right)e^{jnt}}$

<u>Β τρόπος-Υπολογισμός Συντελεστών 3ης παραγώγου</u>



Οι συντελεστές της 3ης παραγώγου δίνονται από τον τύπο:

$$c_n^{(3)} = \frac{1}{T}\bullet\int_0^{2\pi} f'''(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{2\pi}\bullet\int_0^{2\pi} f'''(t)\bullet e^{-jnt}dt = \frac{1}{2\pi}\bullet\int_0^{2\pi}\left(-4\pi^2\delta''(t)-4\pi\delta'(t)\right)\bullet e^{-jnt}dt =$$

$$= -\frac{4\pi^2}{2\pi}\bullet\int_0^{2\pi}\delta''(t)\bullet e^{-jnt}dt - \frac{4\pi}{2\pi}\bullet\int_0^{2\pi}\delta'(t)\bullet e^{-jnt}dt = -2jn + 2\pi n^2$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι:

$$c_n = \frac{c_n^{(k)}}{(jn\Omega_0)^k} = \frac{c_n^{(3)}}{(jn\Omega_0)^3} = \frac{-2jn + 2\pi n^2}{-jn^3} = \frac{2\pi jn + 2}{n^2} \text{ για } n\neq 0$$

2.9.4.3 Φροντιστήριο 2012

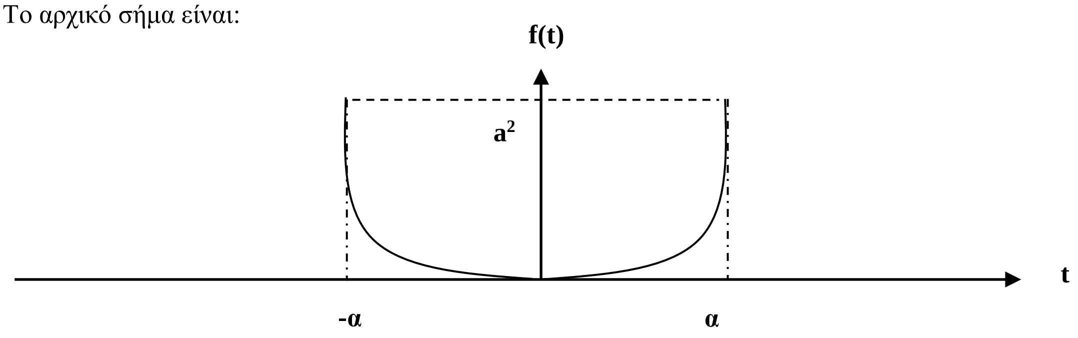
Δίνεται το ακόλουθο σήμα:

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & -a\le t\le a \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

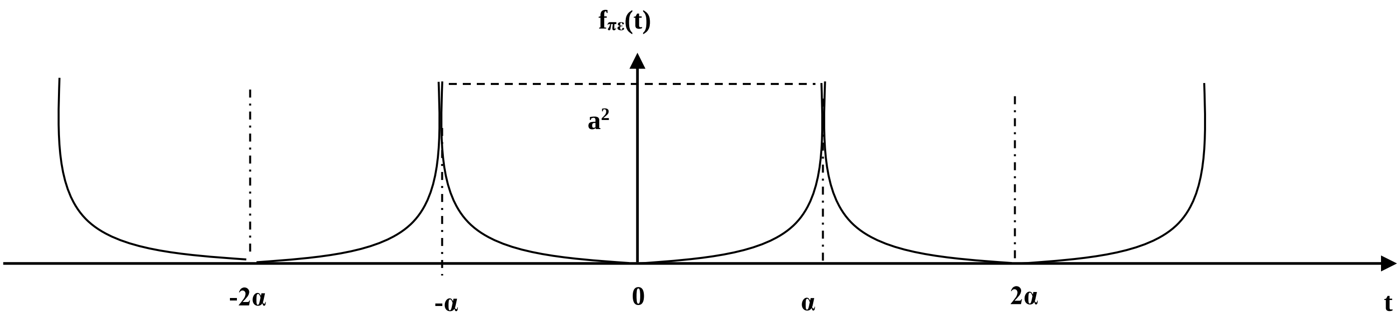
Να βρεθεί η σειρά Fourier της περιοδικής επέκτασης του σήματος

Λύση

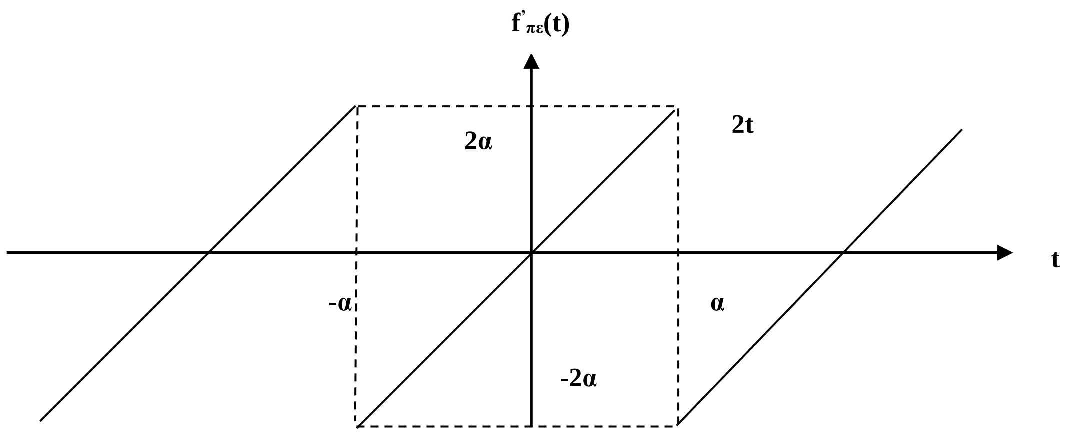
Το αρχικό σήμα είναι:



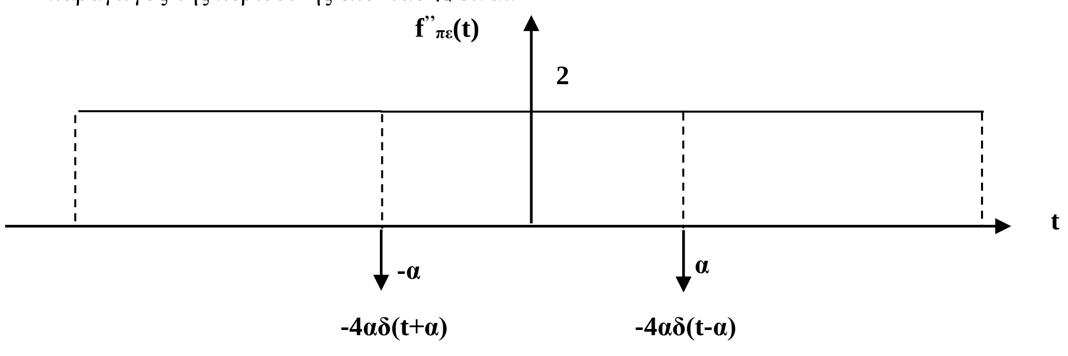
Η περιοδική επέκταση του αρχικού σήματος είναι:



Η $1^η$ παράγωγος της περιοδικής επέκτασης είναι:



Η $2^η$ παράγωγος της περιοδικής επέκτασης είναι:



$$c_n^{(2)}=\frac{1}{T}\bullet\int_{-a}^{a}f''(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt=\frac{1}{2\alpha}\bullet\int_{-a}^{a}\left(2-4\alpha\delta(t-\alpha)\right)e^{-jn\Omega_0 t}dt=\frac{1}{2\alpha}\bullet\int_{-a}^{a}2e^{-jn\Omega_0 t}dt-\frac{1}{2\alpha}\bullet\int_{-a}^{a}4\alpha\delta(t-\alpha)e^{-jn\Omega_0 t}dt=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\bullet\frac{1}{-jn\Omega_0}\left[e^{-jn\Omega_0 t}\right]_{-\alpha}^{\alpha}-2e^{-jn\frac{\pi}{\alpha}\alpha}=-\frac{1}{\alpha}\bullet\frac{1}{jn\frac{\pi}{\alpha}}\left(e^{-jn\frac{\pi}{\alpha}\alpha}-e^{jn\frac{\pi}{\alpha}\alpha}\right)-2e^{-jn\pi}=\frac{2}{n\pi}\left(\frac{e^{jn\pi}-e^{-jn\pi}}{2j}\right)-2e^{-jn\pi}=$$

$$=2\sin(n\pi)-2e^{-jn\pi}=-2e^{-jn\pi}$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι:

$$c_n=\frac{c_n^{(k)}}{(jn\Omega_0)^k}=\frac{c_n^{(2)}}{(jn\Omega_0)^2}=\frac{c_n^{(2)}}{\left(jn\frac{\pi}{\alpha}\right)^2}=\frac{-2e^{-jn\pi}}{-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}}=\frac{-2\alpha^2e^{-jn\pi}}{-n^2\pi^2}=\frac{2\alpha^2e^{-jn\pi}}{n^2\pi^2}=\frac{2\alpha^2(-1)^n}{n^2\pi^2}\quad \text{για } n\neq 0$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε ξεχωριστά τον όρο c_0 διότι ο προηγούμενος τύπος ισχύει για $n\neq 0$.

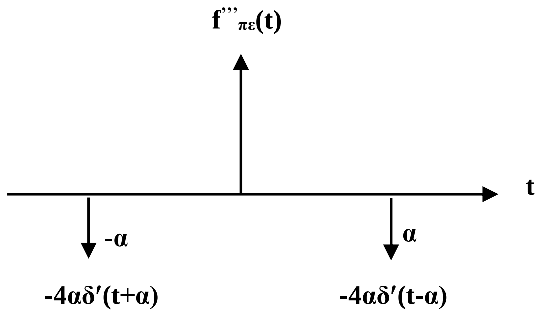
$$c_0=\frac{1}{T}\int_{-\alpha}^{\alpha}f(t)dt=\frac{1}{2\alpha}\left(\int_{-\alpha}^{\alpha}t^2dt\right)=\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\alpha}^{\alpha}=\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{\alpha^3}{3}-\left(-\frac{\alpha^3}{3}\right)\right]=\frac{\alpha^2}{3}$$

Άρα η ζητούμενη σειρά Fourier είναι:

$$\boxed{x(t)=\frac{\alpha^2}{3}+\sum_{n=-\infty\wedge n\neq 0}^{\infty}\frac{2\alpha^2(-1)^n}{n^2\pi^2}e^{-jn\frac{2\pi}{2\alpha}t}\Rightarrow x(t)=\frac{\alpha^2}{3}+\sum_{n=-\infty\wedge n\neq 0}^{\infty}\frac{2\alpha^2(-1)^n}{n^2\pi^2}e^{-jn\frac{\pi}{\alpha}t}}$$

<u>Β τρόπος</u>

Η 3η παράγωγος της περιοδικής επέκτασης είναι:



$$c_n^{(3)}=\frac{1}{T}\bullet\int_{-\alpha}^{\alpha}f'''(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt=-\frac{1}{2\alpha}\bullet\int_{-\alpha}^{\alpha}4\alpha\delta'(t+\alpha)e^{-jn\Omega_0 t}dt=-2jn\frac{\pi}{\alpha}(-1)^n$$

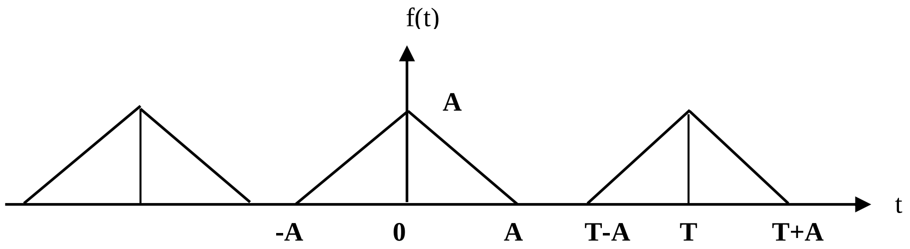
Οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι:

$$c_n=\frac{c_n^{(k)}}{(jn\Omega_0)^k}=\frac{c_n^{(3)}}{(jn\Omega_0)^3}=\frac{-2jn\frac{\pi}{a}(-1)^n}{-jn^3\frac{\pi^3}{\alpha^3}}=\frac{2\alpha^2(-1)^n}{n^2\pi^2}\quad \text{για } n\neq 0$$

2.9.4.4 Θέμα 3 Ιούνιος 2011

a. Να αποδείξτε ότι $F\{\text{sign}(t)\} \leftrightarrow \dfrac{2}{j\Omega}$

b. Να βρείτε τη σειρά Fourier του ακόλουθου περιοδικού σήματος:



<u>Λύση</u>

(α) Θέλουμε να δείξουμε ότι: $F\{\text{sign}(t)\} = \dfrac{2}{j\Omega}$ ή εναλλακτικά $\text{sign}(t) \leftrightarrow \dfrac{2}{j\Omega}$

<u>Α τρόπος Απόδειξης:</u>

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bullet e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t) \bullet e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-j\Omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-j\Omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-j\Omega t}dt = \frac{1}{-j\Omega}\left[e^{-j\Omega t}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{-j\Omega}\left[e^{-j\Omega t}\right]_0^{\infty} =$$

$$= -\frac{1}{j\Omega}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) - \frac{1}{j\Omega}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) = \frac{1}{j\Omega} + \frac{1}{j\Omega} = \frac{2}{j\Omega}$$

<u>Β τρόπος Απόδειξης με θεωρία Κατανομών</u>

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sign}(t) \Rightarrow \text{sign}(t) = 2u(t) - 1 \Rightarrow \left(\text{sign}(t)\right)' = \left(2u(t) - 1\right)' \Rightarrow \left(\text{sign}(t)\right)' = 2\delta(t)$$

$$x'(t) \leftrightarrow (j\Omega) \bullet X(j\Omega) \Rightarrow \left(\text{sign}(t)\right)' \leftrightarrow (j\Omega) \bullet X(j\Omega) \leftrightarrow F\left\{\left(\text{sign}(t)\right)' = (j\Omega) \bullet X(j\Omega)\right\}$$

$$\text{Από θεωρία κκατανομώ είναι γνωστό ότι: } t \bullet f(t) = t \bullet g(t) \Rightarrow f(t) = g(t) + \lambda \bullet \delta(t)\,(1)$$

$$\text{Θέτουμε όπου } t = j\Omega \text{ στην (1) και προκύπτει: } j\Omega \bullet F\{j\Omega\} = j\Omega \bullet G\{j\Omega\} \Rightarrow F\{j\Omega\} = G\{j\Omega\} + \lambda\delta(\Omega)\ (2)$$

$$\text{Συνδυάζοντας ττι (1) κκα(2) πρροκύπτεότι: } j\Omega \bullet F\{\text{sgnt}(t)\} = \frac{2}{j\Omega} j\Omega \Rightarrow F\{\text{sgnt}(t)\} = \frac{2}{j\Omega} + \lambda\delta(\Omega)$$

(α) Β μέρος- Υπολογισμός ΜF της $t^n x(t)$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα παραγώγισης στη συχνότητα δηλ: $t^n x(t) \leftrightarrow j^n \dfrac{d^n X(j\Omega)}{d\Omega^n}$

To x(t)=sign(t), $\text{sign}(t) \leftrightarrow \dfrac{2}{j\Omega} \Rightarrow \dfrac{\text{sign}(t)}{2} \leftrightarrow \dfrac{1}{j\Omega}$ και συνεπώς: $t^n \bullet \dfrac{\text{sign}(t)}{2} \leftrightarrow j^n \bullet \dfrac{d^n}{d\Omega^n}\left(\dfrac{1}{j\Omega}\right)(1)$

Υπολογίζουμε τη n-οστή παράγωγο του $\dfrac{1}{j\Omega}$ ως εξής:

- Η 1η παράγωγος του $\dfrac{1}{j\Omega}$ είναι: $\dfrac{-j}{j^2\Omega^2} = \dfrac{j}{\Omega^2}$
- Η 2η παράγωγος του $\dfrac{1}{j\Omega}$ είναι: $\dfrac{-j2\Omega}{\Omega^4} = \dfrac{-1 \bullet 2 \bullet j}{\Omega^3}$
- Η 3η παράγωγος του $\dfrac{1}{j\Omega}$ είναι: $\dfrac{2 \bullet j \bullet 3\Omega^2}{\Omega^6} = \dfrac{1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet j}{\Omega^4}$

- Η 4η παράγωγος του $\frac{1}{j\Omega}$ είναι: $\frac{-1\bullet 2\bullet 3\bullet j\bullet 4\bullet \Omega^3}{\Omega^8}=\frac{-1\bullet 2\bullet 3\bullet 4\bullet j}{\Omega^5}$

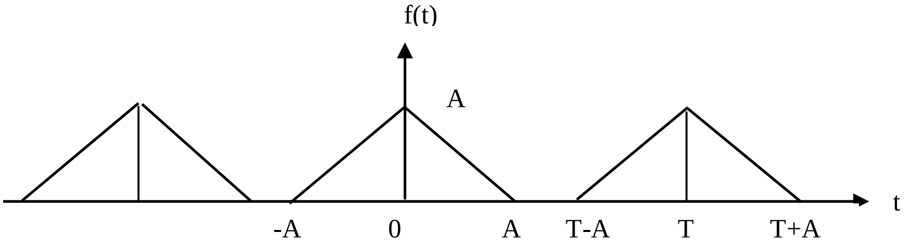
………..

- Η n-οστή παράγωγος του $\frac{1}{j\Omega}$ είναι: $\frac{(-1)^{n-1}1\bullet 2\bullet 3\bullet \ldots\bullet n\bullet j}{\Omega^{n+1}}=\frac{(-1)^{n-1}\bullet n!\bullet j}{\Omega^{n+1}}$ (2)

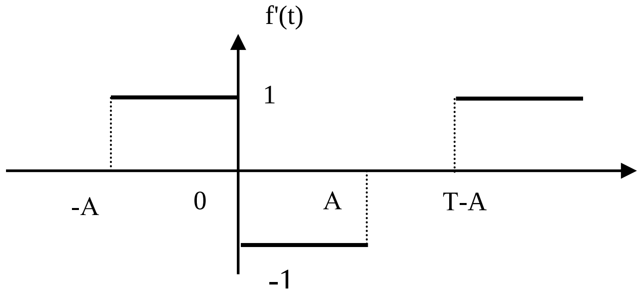
Αντικαθιστούμε τη (2) στην (1) και προκύπτει:

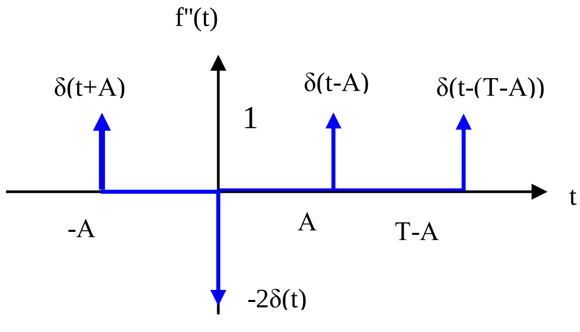
$$\boxed{t^n\bullet\frac{\mathrm{sign}(t)}{2}\leftrightarrow j^n\bullet\left[\frac{(-1)^{n-1}\bullet n!\bullet j}{\Omega^{n+1}}\right]=\frac{(-1)^{n-1}\bullet n!\bullet j^{n+1}}{\Omega^{n+1}}\Rightarrow t^n\bullet\mathrm{sign}(t)\leftrightarrow\frac{2\bullet(-1)^{n-1}\bullet n!\bullet j^{n+1}}{\Omega^{n+1}}}$$

(β)



Η μορφή του σήματος f(t) από –A μέχρι 0 είναι $f_1(t)=t+A$ και $f_2(t)=-t+A$





<u>Α τρόπος-Υπολογισμός Συντελεστών 1ης Παραγώγου</u>

Οι συντελεστές της 1ης παραγώγου δίνονται από τον τύπο:

$$c_n^{(1)}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f'(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-A}^{0}1\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt+\frac{1}{T}\int_{0}^{A}-1\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt+\frac{1}{T}\int_{A}^{T-A}0\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt=$$

$$=\frac{1}{T}\bullet\frac{1}{-jn\Omega_0}\left[e^{-jn\Omega_0 t}\right]_{-A}^{0}-\frac{1}{T}\bullet\frac{1}{-jn\Omega_0}\left[e^{-jn\Omega_0 t}\right]_{0}^{A}$$

$$=-\frac{1}{Tjn\frac{2\pi}{T}}\left(1-e^{jn\Omega_0 A}\right)+\frac{1}{Tjn\frac{2\pi}{T}}\left(e^{-jn\Omega_0 A}-1\right)=\frac{e^{jn\frac{2\pi}{T}A}+e^{-jn\frac{2\pi}{T}A}-2}{2jn\pi}=\frac{\cos\left(\frac{2n\pi A}{T}\right)-1}{jn\pi}$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από τον τύπο:

$$c_n=\frac{c_n^{(1)}}{(jn\Omega_0)^k}=\frac{\dfrac{\cos\left(\dfrac{2n\pi A}{T}\right)-1}{jn\pi}}{jn\dfrac{2\pi}{T}}=\frac{\cos\left(\dfrac{2n\pi A}{T}\right)-1}{-2n^2\pi^2}=\frac{T\left(1-\cos\left(\dfrac{2\pi\pi n}{T}\right)\right)}{2n^2\pi^2},\ n\neq 0$$

Θα πρέπει να βρούμε ξεχωριστά τον όρο c_0 διότι ο προηγούμενος τύπος ισχύει για $n\neq0$.

$$c_0=\frac{1}{T}\int_{-A}^{T-A}f(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-A}^{A}f(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-A}^{0}(t+A)dt+\frac{1}{T}\int_{0}^{A}(-t+A)dt=\frac{1}{T}\int_{-A}^{0}tdt+\frac{A}{T}\int_{-A}^{0}dt+\frac{1}{T}\int_{0}^{A}-tdt+\frac{A}{T}\int_{0}^{A}dt=$$

$$=\frac{1}{T}\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-A}^{0}+A^2-\left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{A}+A^2\right)=\frac{1}{T}\left(-\frac{A^2}{2}+A^2-\frac{A^2}{2}+A^2\right)=\frac{A^2}{T}$$

Η σειρά Fourier για την f(t) είναι: $f(t)=c_0+\sum\limits_{n=-\infty\wedge n\neq0}^{\infty}c_n\bullet e^{jn\Omega_0 t}=\dfrac{A^2}{T}+\sum\limits_{n=-\infty\wedge n\neq0}^{\infty}\dfrac{T\left(1-\cos\left(\dfrac{2\pi\pi n}{T}\right)\right)}{2n^2\pi^2}e^{j\frac{n2\pi}{T}t}$

<u>Β τρόπος-Υπολογισμός Συντελεστών 2ης Παραγώγου</u>

Οι συντελεστές της 2ης παραγώγου δίνονται από τον τύπο:

$$c_n^{(2)}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f''(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-A}^{T-A}\left[\delta(t+A)-2\delta(t)+\delta(t-A)\right]e^{-jn\Omega_0 t}dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-A}^{T-A}\delta(t+A)e^{-jn\Omega_0 t}dt+\frac{1}{T}\int_{-A}^{T-A}-2\delta(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt+\frac{1}{T}\int_{-A}^{T-A}\delta(t-A)e^{-jn\Omega_0 t}dt==\frac{1}{T}e^{-jn\Omega_0\bullet-A}-\frac{2}{T}+\frac{1}{T}e^{-jn\Omega_0 A}=$$

$$=\frac{1}{T}\left(e^{jn\Omega_0 A}+e^{-jn\Omega_0 A}\right)-\frac{2}{T}=\frac{2}{T}\left(\frac{e^{jn\Omega_0 A}+e^{-jn\Omega_0 A}}{2}\right)-\frac{2}{T}=\frac{2}{T}\cos(n\Omega_0 A)-\frac{2}{T}=\frac{2}{T}\left(\cos(n\Omega_0 A)-1\right)=\frac{2}{T}\left(\cos\left(\frac{2\pi\pi n}{T}\right)-1\right)$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από τον τύπο:

$$c_n=\frac{c_n^{(2)}}{(jn\Omega_0)^k}=\frac{c_n^{(2)}}{(jn\Omega_0)^2}=\frac{\dfrac{2}{T}\left(\cos\left(\dfrac{2\pi nA}{T}\right)-1\right)}{-n^2\dfrac{4\pi^2}{T^2}}=\frac{\cos\left(\dfrac{2\pi nA}{T}\right)-1}{-n^2\dfrac{2\pi^2}{T}}=\frac{T\left(1-\cos\left(\dfrac{2\pi nA}{T}\right)\right)}{2n^2\pi^2},\ n\neq0$$

Ο αρχικός όρος της σειράς Fourier για n=0 είναι

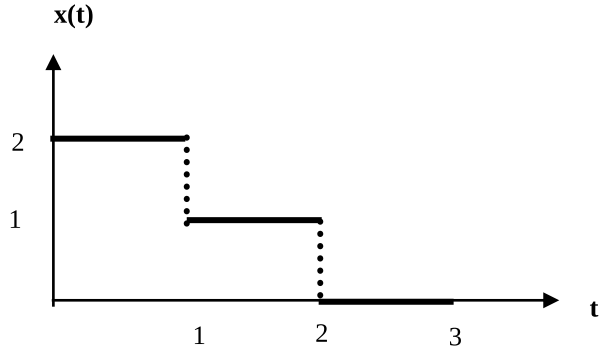
$$c_0=\frac{1}{T}\int_{-A}^{T-A}f(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-A}^{A}f(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-A}^{0}(t+A)dt+\frac{1}{T}\int_{0}^{A}(-t+A)dt=\frac{1}{T}\int_{-A}^{0}tdt+\frac{A}{T}\int_{-A}^{0}dt+\frac{1}{T}\int_{0}^{A}-tdt+\frac{A}{T}\int_{0}^{A}dt=$$

$$=\frac{1}{T}\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-A}^{0}+A^2-\left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{A}+A^2\right)=\frac{1}{T}\left(-\frac{A^2}{2}+A^2-\frac{A^2}{2}+A^2\right)=\frac{A^2}{T}$$

Η σειρά Fourier για την f(t) είναι: $\boxed{f(t)=c_0+\sum\limits_{n=-\infty\wedge n\neq0}^{\infty}c_n\bullet e^{jn\Omega_0 t}=\dfrac{A^2}{T}+\sum\limits_{n=-\infty\wedge n\neq0}^{\infty}\dfrac{T\left(1-\cos\left(\dfrac{2\pi\pi n}{T}\right)\right)}{2n^2\pi^2}e^{j\frac{n2\pi}{T}t}}$

2.9.4.5 Άσκηση 8 με σειρά Fourier - Φροντιστήριο 2012

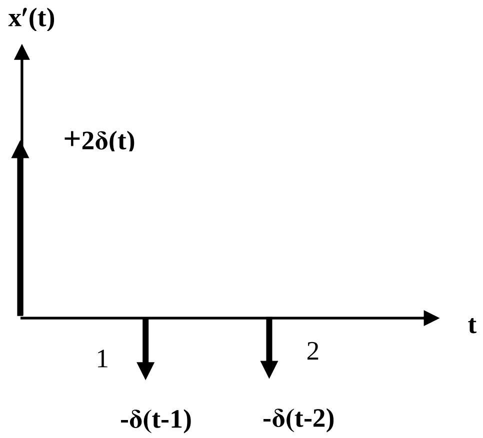
Δίνεται το ακόλουθο σήμα:



Να υπολογίσετε τη σειρά Fourier της περιοδικής επέκτασης του σήματος

<u>Λύση</u>

<u>Α τρόπος υπολογισμού με μέθοδο παραγώγου</u>



$$c_n^{(1)} = \frac{1}{3}\int_0^3 f'(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{3}\int_0^3 \left[2\delta(t) - \delta(t-1) - \delta(t-2)\right]e^{-jn\Omega_0 t}dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 2\delta(t) \bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt - \frac{1}{3}\int_0^3 \delta(t-1)e^{-jn\Omega_0 t}dt - \frac{1}{3}\int_0^3 \left[\delta(t-2)\right]e^{-jn\Omega_0 t}dt =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}e^{-jn\Omega_0} - \frac{1}{3}e^{-jn2\Omega_0} = \frac{1}{3}\left[2 - e^{-jn\Omega_0} - e^{-jn2\Omega_0}\right] = \frac{1}{3}\left[2 - e^{-jn\frac{2\pi}{3}} - e^{-jn2\frac{2\pi}{3}}\right]$$

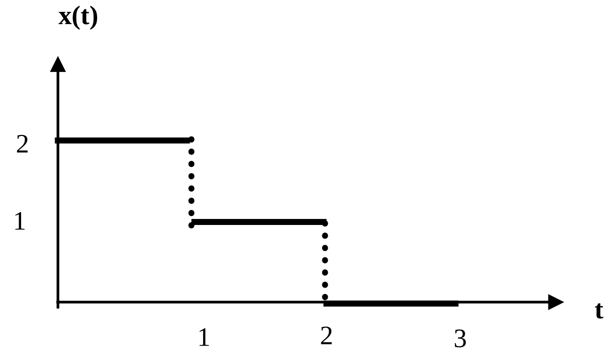
Οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι:

$$\boxed{c_n = \frac{c_n^{(1)}}{(jn\Omega_0)} = \frac{\frac{1}{3}\left(2 - e^{-jn\frac{2\pi}{3}} - e^{-jn2\frac{2\pi}{3}}\right)}{\frac{jn2\pi}{3}} = \frac{2 - e^{-jn\frac{2\pi}{3}} - e^{-jn2\frac{2\pi}{3}}}{jn2\pi} = \frac{je^{-jn\frac{2\pi}{3}} + je^{-jn\frac{4\pi}{3}} - 2j}{n2\pi}, n \neq 0}$$

Ο αρχικός όρος της σειράς Fourier για n=0 είναι: $\boxed{c_0 = \frac{1}{T}\int_0^3 f(t)dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^1 2dt + \int_1^2 1dt\right) = \frac{3}{3} = 1}$

Η ζητούμενη σειρά Fourier είναι: $\boxed{x(t) = 1 + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty} \frac{je^{-jn\frac{2\pi}{3}} + je^{-jn\frac{4\pi}{3}} - 2j}{n2\pi} \bullet e^{jn\frac{2\pi}{3}t}}$

<u>Β τρόπος υπολογισμού χωρίς μέθοδο παραγώγου διότι το σήμα είναι ανεξάρτητο του χρόνου</u>



$$c_n = \frac{1}{3}\int_0^3 f(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{3}\int_0^1 2e^{-jn\Omega_0 t}dt + \frac{1}{3}\int_1^2 1e^{-jn\Omega_0 t}dt + \frac{1}{3}\int_2^3 0e^{-jn\Omega_0 t}dt =$$

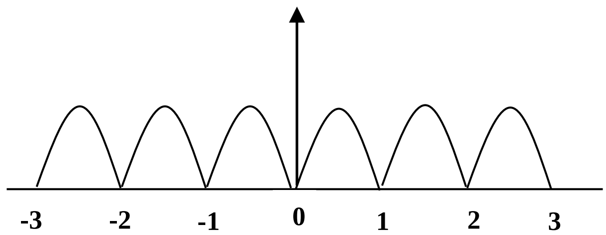
$$= \frac{2}{3}\bullet\frac{1}{-jn\Omega_0}\left[e^{-jn\Omega_0 t}\right]_0^1 + \frac{1}{3}\bullet\frac{1}{-jn\Omega_0}\left[e^{-jn\Omega_0 t}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\bullet\frac{1}{-jn\frac{2\pi}{3}}\left(e^{-jn\frac{2\pi}{3}1} - e^0\right) + \frac{1}{3}\bullet\frac{1}{-jn\frac{2\pi}{3}}\left(e^{-jn\frac{2\pi}{3}2} - e^{-jn\frac{2\pi}{3}1}\right) =$$

$$= \frac{1}{-jn\pi}\left(e^{-jn\frac{2\pi}{3}1} - 1\right) + \frac{1}{-jn2\pi}\left(e^{-jn\frac{2\pi}{3}2} - e^{-jn\frac{2\pi}{3}1}\right) = \frac{e^{-jn\frac{2\pi}{3}}}{-jn\pi} - \frac{1}{-jn\pi} + \frac{e^{-jn\frac{4\pi}{3}}}{-jn2\pi} - \frac{e^{-jn\frac{2\pi}{3}}}{-jn2\pi} =$$

$$= \frac{-2e^{-jn\frac{2\pi}{3}} + 2 - e^{-jn\frac{4\pi}{3}} + e^{-jn\frac{2\pi}{3}}}{2jn\pi} = \frac{-e^{-jn\frac{2\pi}{3}} + 2 - e^{-jn\frac{4\pi}{3}}}{2jn\pi} = \frac{je^{-jn\frac{2\pi}{3}} + je^{-jn\frac{4\pi}{3}} - 2j}{n2\pi}, n \neq 0$$

2.9.4.6 Άσκηση Βιβλίου με σειρά Fourier

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση $x(t)=A\bullet\sin(\pi t)$ με $0<t<1$ που φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



<u>Απάντηση</u>

Το σήμα είναι περιοδικό και αντιπροσωπεύει το πλήρως ανορθωμένο ημίτονο με T=1. Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές της σειράς Fourier που δίνονται από το γενικό τύπο:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt$$

Οι συντελεστές είναι:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_0^1 x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_0^1 A\bullet\sin(\pi t)\bullet e^{-jn2\pi t}dt = A\int_0^1\left(\frac{e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}}{2j}\right)e^{-jn2\pi t}dt$$

$$= \frac{A}{2j}\int_0^1 e^{j\pi t}e^{-jn2\pi t}dt - \frac{A}{2j}\int_0^1 e^{-j\pi t}e^{-jn2\pi t}dt = \frac{A}{2j}\int_0^1 e^{j\pi t(1-2n)}dt - \frac{A}{2j}\int_0^1 e^{-j\pi t(1+2n)}dt =$$

$$= \frac{A}{2j}\left[\frac{1}{j\pi(1-2n)}e^{j\pi t(1-2n)}\right]_0^1 - \frac{A}{2j}\left[\frac{1}{-j\pi(1+2n)}e^{-j\pi t(1+2n)}\right]_0^1 = \frac{A}{2j}\left[\frac{1}{j\pi(1-2n)}\left(e^{j\pi(1-2n)} - 1\right)\right] + \frac{A}{2j}\left[\frac{1}{j\pi(1+2n)}\left(e^{-j\pi(1+2n)} - 1\right)\right] =$$

$$= \frac{A}{2j}\left[\frac{-2}{j\pi(1-2n)}\right] + \frac{A}{2j}\left[\frac{-2}{j\pi(1+2n)}\right] = -\frac{2A}{2j^2\pi}\left[\frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n}\right] = -\frac{2A}{\pi(4n^2-1)}$$

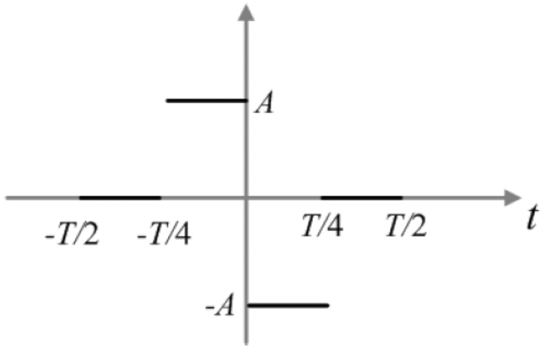
Τελικά η σειρά Fourier θα είναι:

$$\boxed{x(t) = -\frac{2A}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}e^{j2\pi nt}}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Ο παρονομαστής $\pi(4n^2-1)$ δεν μηδενίζεται διότι το n παίρνει μόνο ακέραιες τιμές

2.9.4.7 Θέμα 3 Ιούνιος 2005 και Ιούνιος 2009

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier την περιοδική συνάρτηση του σχήματος:



<u>Απάντηση</u>

Η συχνότητα επανάληψης του σήματος είναι Ωₒ=2π/T

Η σειρά Fourier που δίνονται από το γενικό τύπο: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt\Omega_0}$ έχει ως συντελεστές c_n τους ακόλουθους:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{0} Ae^{-jn\Omega_0 t}dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/4} -Ae^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{A}{T}\int_{-T/4}^{0} e^{-jn\Omega_0 t}dt - \frac{A}{T}\int_{0}^{T/4} e^{-jn\Omega_0 t}dt =$$

$$= \frac{A}{T}\bullet\frac{1}{-jn\Omega_0}\left[e^{-jn\Omega_0 t}\right]_{-T/4}^{0} - \frac{A}{T}\bullet\frac{1}{-jn\Omega_0}\left[e^{-jn\Omega_0 t}\right]_{0}^{T/4} = -\frac{A}{T}\frac{T}{jn2\pi}\left[1-e^{-jn\frac{2\pi}{T}\bullet\frac{-T}{4}}\right] + \frac{A}{T}\frac{T}{jn2\pi}\left[e^{-jn\frac{2\pi}{T}\bullet\frac{T}{4}}-1\right] =$$

$$= -\frac{A}{jn2\pi} + \frac{A}{jn2\pi}e^{\frac{jn\pi}{2}} + \frac{A}{jn2\pi}e^{-\frac{jn\pi}{2}} - \frac{A}{jn2\pi} = -\frac{2A}{jn2\pi} + \frac{A}{jn2\pi}\left(\frac{e^{\frac{jn\pi}{2}}+e^{-\frac{jn\pi}{2}}}{2}\right) = -\frac{2A}{jn2\pi} + \frac{A}{jn2\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{A}{jn\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right), n \neq 0$$

Για n=0 ισχύει ότι $c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{3T/4} x(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{0} Adt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/4} -Adt = \frac{A}{T}\bullet\frac{T}{4} - \frac{A}{T}\bullet\frac{T}{4} = 0$

Η σειρά Fourier είναι: $\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty}\frac{A}{jn\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right)e^{jn\frac{2\pi}{T}t}}$

2.9.4.8 Θέμα 2 Ιούνιος 2012

Υπολογίστε τη σειρά Fourier του σήματος $x(t)=|\sin((1+l \bmod 2)t)$ δηλ. τη σειρά Fourier του ανυψωμένου ημιτόνου

Λύση

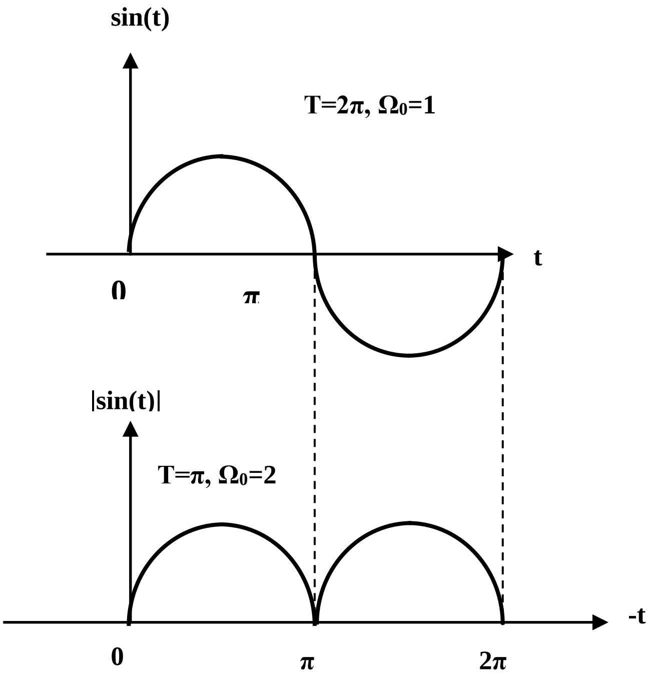
Υπενθύμιση

$\sin'(t)=\cos(t)$

$\cos'(t)=-\sin(t)$

l mod 2= 0

x(t)=|sin(t)|. Το σήμα είναι περιοδικό και αντιπροσωπεύει το **πλήρως ανορθωμένο ημίτονο με** $T=\pi$ και φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Θεωρούμε ως βασικό σήμα αυτό με περίοδο T=π και υπολογίζουμε τους συντελεστές της σειράς Fourier για την περιοδική του επέκταση. Οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από το γενικό τύπο:

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt$$

ΠΡΟΣΟΧΗ ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΣΧΕΣΗ Η ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΤΟΥ SIN ΜΕ ΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΤΟΥ SIN. ΕΔΩ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ Η ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΤΟΥ SIN ΕΙΝΑΙ Ω_0=1 ΕΝΩ Η ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΤΟΥ SIN ΕΙΝΑΙ Π

Άρα θα έχουμε:

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)e^{-j2nt}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}e^{-j2nt}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_0^{\pi}e^{jt}e^{-j2nt}dt-\frac{1}{2\pi j}\int_0^{\pi}e^{-jt}e^{-j2nt}dt=\frac{1}{2\pi j}\int_0^{\pi}e^{jt(1-2n)}dt-\frac{1}{2\pi j}\int_0^{\pi}e^{-jt(1+2n)}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi jj(1-2n)}\left[e^{jt(1-2n)}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2\pi jj(1+2n)}\left[e^{-jt(1+2n)}\right]_0^{\pi}=-\frac{1}{2\pi(1-2n)}\left(e^{j\pi}\bullet e^{-j2\pi 2}-1\right)-\frac{1}{2\pi(1+2n)}\left(e^{-j\pi}\bullet e^{-j2\pi 2}-1\right)=$$

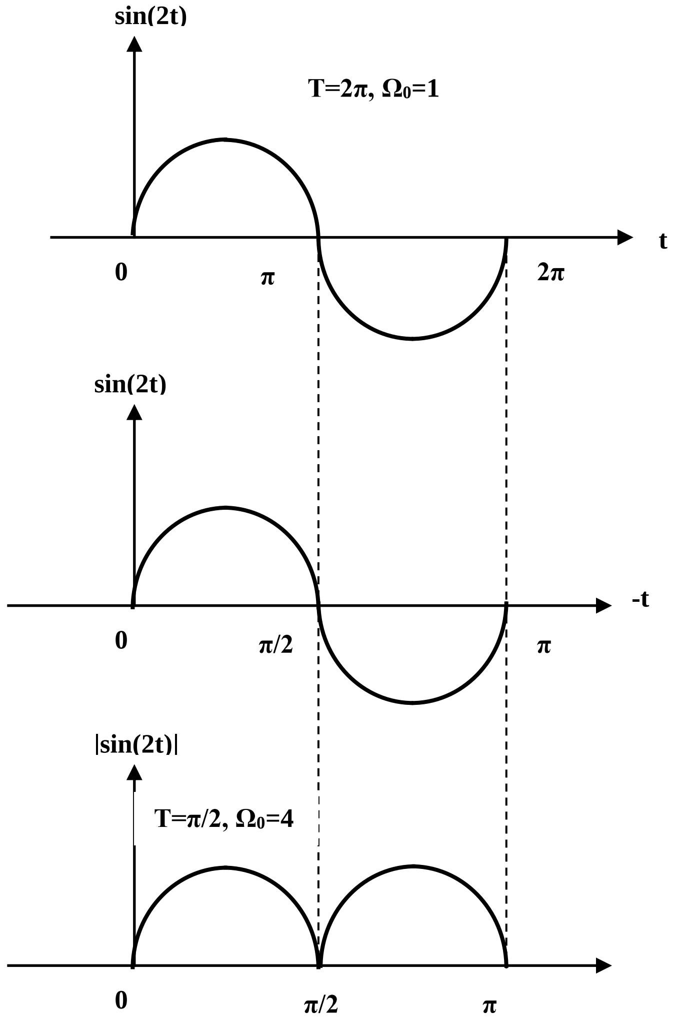
$$=-\frac{1}{2\pi(1-n)}\bullet(-1-1)-\frac{1}{2\pi(1+2n)}(-1-1)=\frac{1}{\pi(1-2n)}+\frac{1}{\pi(1+2n)}=\frac{2}{\pi(1-4n^2)}$$

Άρα η σειρά Fourier είναι: $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\bullet e^{jn\Omega_0 t}\Rightarrow x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi(1-4n^2)}\bullet e^{jn2t}$

Προσοχή Δεν υπολογίζουμε όρο c_0 διότι το n παίρνει μόνο ακέραιες τιμές και εδώ ο παρονομαστής του c_n μηδενίζεται για πραγματική τιμή (n=1/2).

l mod 2= 1

x(t)=|sin(2t)|. Το σήμα είναι περιοδικό και αντιπροσωπεύει το **πλήρως ανορθωμένο ημίτονο με** $T=\frac{\pi}{2}$ και φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Θεωρούμε ως βασικό σήμα αυτό με περίοδο T=π/2 και υπολογίζουμε τους συντελεστές της σειράς Fourier για την περιοδική του ε-πέκταση. Οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από το γενικό τύπο:

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt$$

Άρα θα έχουμε:

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2t)\bullet e^{-jn4t}dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{j2t}-e^{-j2t}}{2j}\bullet e^{-jn4t}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi j}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{j2t}e^{-jn4t}dt-\frac{1}{\pi j}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-j2t}e^{-jn4t}dt=\frac{1}{\pi j}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{j2t(1-2n)}dt-\frac{1}{\pi j}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-j2t(1+2n)}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi j(1-2n)}\left[e^{j2t(1-2n)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2\pi j(1+2n)}\left[e^{-j2t(1+2n)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi j(1-2n)}\left(e^{\pi j}e^{-j2\pi n}-1\right)+\frac{1}{2\pi j(1+2n)}\left(e^{-\pi j}e^{-j2\pi n}-1\right)=\frac{1}{2\pi j(1-2n)}(-1-1)+\frac{1}{2\pi j(1+2n)}(-1-1)$$

$$=-\frac{1}{\pi j(1-2n)}-\frac{1}{\pi j(1+2n)}=\frac{-\pi j-2\pi jn-\pi j+2\pi jn}{\pi^2 j^2(1+2n)(1-2n)}=\frac{-2\pi j}{\pi^2\left(1-4n^2\right)}=\frac{-2j}{\pi\left(1-4n^2\right)}$$

Άρα η σειρά Fourier είναι: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \bullet e^{jn\Omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-2j}{\pi(1-4n^2)} \bullet e^{jn4t}$

Παρατήρηση

Γενικά όταν έχουμε συνάρτηση cos(x) είτε συνάρτηση sin(x) τότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε μέθοδο παραγώγου διότι sin′(x) = cos(x) και cos′(x) = -sin(x)

2.9.5 Άσκηση με σειρές Fourier Φροντιστήριο 2013

Να βρεθεί η σειρά Fourier των ακόλουθων σημάτων:

1. $x(t)=\cos(\Omega_0 t)$

2. $x(t)=\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$

3. $x(t)=\cos(2^3 t)+\sin((2^5-1)t)$

4. $x(t)=\sin(30\pi t)$

5. $x(t)=\cos(4t)+\sin(6t)$

Λύση

ΠΡΟΣΟΧΗ:ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΤΗ ΣΕΙΡΑ FOURIER ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΥΠΟ EULER.

1. $x(t)=\cos(\Omega_0 t)=\frac{e^{j\Omega_0 t}}{2}+\frac{e^{-j\Omega_0 t}}{2}=\frac{1}{2}\bullet e^{j\Omega_0 t}+\frac{1}{2}\bullet e^{-j\Omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\bullet e^{jn\Omega_0 t}$ όπου $c_{-1}=\frac{1}{2}$ και $c_1=\frac{1}{2}$ και $c_k=0,|k|\neq 1$

δηλ. ο τύπος του Euler εκφράζει κατευθείαν τη σειρά Fourier

Ο λόγος που στην προηγούμενη άσκηση με x(t)=|sin(t)| και x(t)=|sin(2t)| δεν πήραμε τύπο Euler για να υπολογίσουμε τη σειρά Fourier είναι ότι κανένα από τα σήματα αυτά δεν είναι τριγωνομετρικά και αυτό φαίνεται από τη γραφική τους παράσταση

2. $x(t)=\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{e^{j\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-j\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)}}{2}=\left(\frac{1}{2}\bullet e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\bullet e^{j2t}+\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)\bullet e^{-j2t}\bullet=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\bullet e^{jn\Omega_0 t}$ όπου

$c_1=\frac{1}{2}\bullet e^{j\frac{\pi}{4}}$ και $c_{-1}=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$ και $c_k=0,|k|\neq 1$

3. **Για να υπάρχει σειρά Fourier για το γραμμικό συνδυασμό περιοδικών σημάτων, όπως είναι εδώ το σήμα** $x(t)=\cos(2^3\bullet t)+\sin((2^5-1)\bullet t)$**, πρέπει το συνολικό σήμα να είναι περιοδικό. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει η συχνότητα κάθε όρου να είναι πολλαπλάσιο μιας βασικής συχνότητας. Εδώ ο 1ος όρος έχει συχνότητα** $\Omega_1=8$ **και ο 2ος όρος έχει συχνότητα** $\Omega_2=31$**. Παρατηρούμε ότι οι συχνότητες τους δεν είναι πολλαπλάσια μιας βασικής συχνότητας άρα το σήμα x(t) δεν είναι περιοδικό και συνεπώς δεν υπολογίζεται σειρά Fourier γιαυτό.**

Παρατήρηση

Όπως ισχύει η γραμμικότητα για το ΜF ισχύει επίσης και για τη σειρά Fourier.

Αν το σήμα είχε τη μορφή $x(t)=\cos(2^3\bullet t)+\sin(2^5\bullet t)$ τότε αυτό θα ήταν περιοδικό και οι συντελεστές της σειράς Fourier θα ήταν:

$x(t)=\frac{1}{2}\bullet e^{j8t}+\frac{1}{2}\bullet e^{-j8t}+\frac{1}{2j}\bullet e^{j4\bullet 8t}-\frac{1}{2j}\bullet e^{-j4\bullet 8t}$ οπότε οι συντελεστές της σειράς Fourier θα ήταν:

- $c_1=\frac{1}{2}$, $c_{-1}=\frac{1}{2}$, $c_4=\frac{1}{2j}$, $c_{-4}=-\frac{1}{2j}$

4. $\sin(30\pi t) = \dfrac{e^{j30\pi t} - e^{-j30\pi t}}{2j} = \dfrac{1}{2j}e^{j30\pi t} - \dfrac{1}{2j}e^{-j30\pi t}$

Παρατηρούμε ότι στο γενικό τύπο της σειράς Fourier $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt\Omega_0}$ προκύπτει ότι οι όροι που έχουμε είναι για n=-1 και για n=1 με Ω_0=30π, άρα οι συντελεστές είναι οι $c_1 = \dfrac{1}{2j}$ και $c_{-1} = -\dfrac{1}{2j}$

5.

$$x(t) = \cos(4t) + \sin(6t) = \frac{1}{2} \bullet e^{j4t} + \frac{1}{2} \bullet e^{-j4t} + \frac{1}{2j} \bullet e^{j6t} - \frac{1}{2j} \bullet e^{-j6t} = \frac{1}{2} \bullet e^{j2\bullet 2t} + \frac{1}{2} \bullet e^{-j2\bullet 2t} + \frac{1}{2j} \bullet e^{j3\bullet 2t} - \frac{1}{2j} \bullet e^{-j3\bullet 2t}$$

Άρα οι συντελεστές είναι οι

- $c_2 = \dfrac{1}{2}$
- $c_{-2} = \dfrac{1}{2}$
- $c_3 = \dfrac{1}{2j}$
- $c_{-3} = -\dfrac{1}{2j}$
- $c_k = 0, |k| \neq 2$ και $|k| \neq 3$

Παρατήρηση

- Για να είναι περιοδικό ένα σήμα που εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός cos και sin πρέπει οι συχνότητες των cos και sin να είναι πολλαπλάσια μεταξύ τους.

- Κάθε cos και sin συνεχούς χρόνου είναι εξορισμού περιοδικό σήμα. Αυτό δεν ισχύει στο διακριτό χρόνο

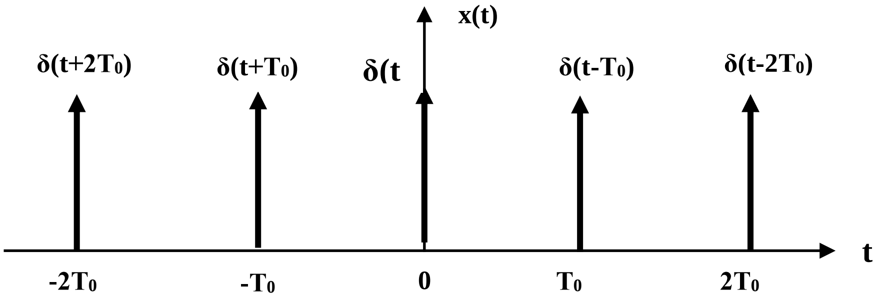
2.9.6 Θέμα 2 Σεπτέμβριος 2013

Υπολογίστε τη σειρά Fourier του σήματος $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-k\left(1+l \bmod 2\right)T_0\right)$

<u>Λύση</u>

<u>l mod 2=0</u>

Το σήμα είναι $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_0)$. Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο T_0. Γραφικά απεικονίζεται ως εξής:



Για να βρούμε τους συντελεστές της σειράς Fourier χρησιμοποιούμε τον τύπο:

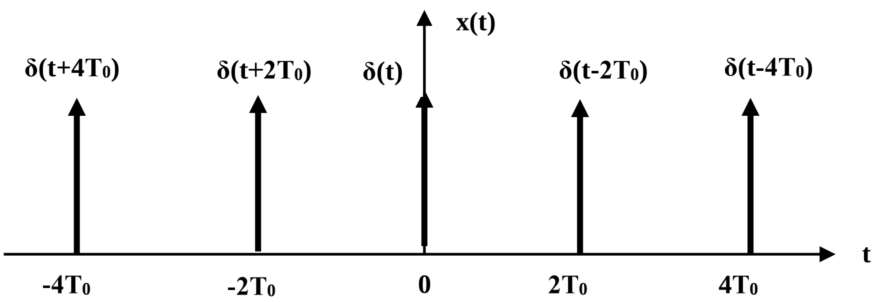
$$c_k=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\bullet e^{-jk\Omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0}\delta(t)\bullet e^{-jk\Omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}$$

Η σειρά Fourier δίνεται από τον τύπο:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\bullet e^{jk\Omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_0}\bullet e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}=\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$$

<u>l mod 2=1</u>

Το σήμα είναι $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2\bullet kT_0)$. **Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $2T_0$**. Γραφικά απεικονίζεται ως εξής:



Για να βρούμε τους συντελεστές της σειράς Fourier χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$c_k=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\bullet e^{-jk\Omega_0 t}dt=\frac{1}{2T_0}\int_{0}^{2T_0}\delta(t)\bullet e^{-jk\Omega_0 t}dt=\frac{1}{2T_0}$$

Η σειρά Fourier δίνεται από τον τύπο:

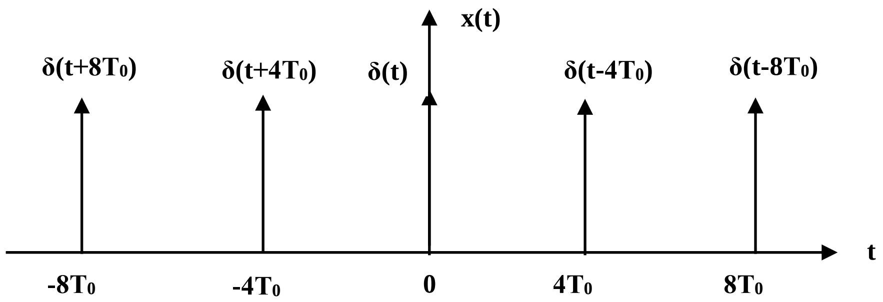
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\bullet e^{jk\Omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2T_0}\bullet e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}=\frac{1}{2T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$$

2.9.7 Θέμα 3β Ιούνιος 2013

(β) Υπολογίστε τη σειρά Fourier του σήματος $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-4k\left(1+r \bmod 2\right)T_0\right)$

<u>r mod 2=0</u>

Το σήμα είναι $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-4kT_0)$. Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $4T_0$. Γραφικά απεικονίζεται ως εξής:



Για να βρούμε τους συντελεστές της σειράς Fourier χρησιμοποιούμε τον τύπο:

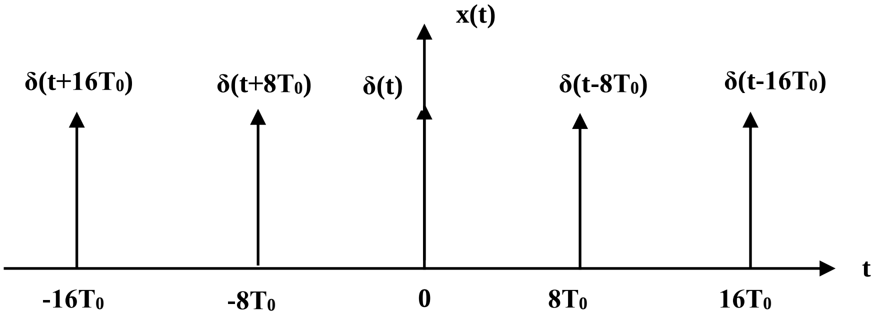
$$c_k=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\bullet e^{-jk\Omega_0 t}dt=\frac{1}{4T_0}\int_{0}^{4T_0}\delta(t)\bullet e^{-jk\Omega_0 t}dt=\frac{1}{4T_0}$$

Η σειρά Fourier δίνεται από τον τύπο:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\bullet e^{jk\Omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4T_0}\bullet e^{jk\frac{2\pi}{4T_0}t}=\frac{1}{4T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\frac{2\pi}{4T_0}t}$$

<u>r mod 2=1</u>

Το σήμα είναι $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-8\bullet kT_0)$. Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $8T_0$. Γραφικά απεικονίζεται ως εξής:



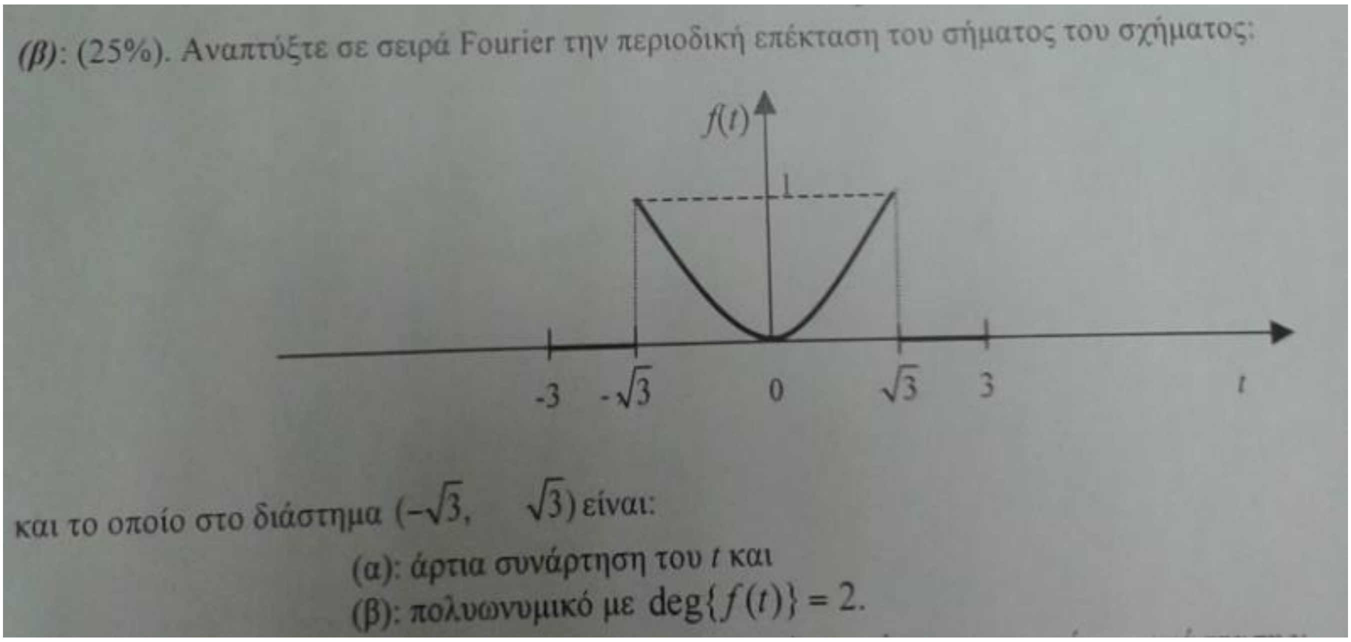
Για να βρούμε τους συντελεστές της σειράς Fourier χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$c_k=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\bullet e^{-jk\Omega_0 t}dt=\frac{1}{8T_0}\int_{0}^{8T_0}\delta(t)\bullet e^{-jk\Omega_0 t}dt=\frac{1}{8T_0}$$

Η σειρά Fourier δίνεται από τον τύπο:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\bullet e^{jk\Omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{8T_0}\bullet e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}=\frac{1}{8T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$$

2.9.8 Θέμα 1β Φεβρουάριος 2011-Άτυπη



(β): (25%). Αναπτύξτε σε σειρά Fourier την περιοδική επέκταση του σήματος του σχήματος:

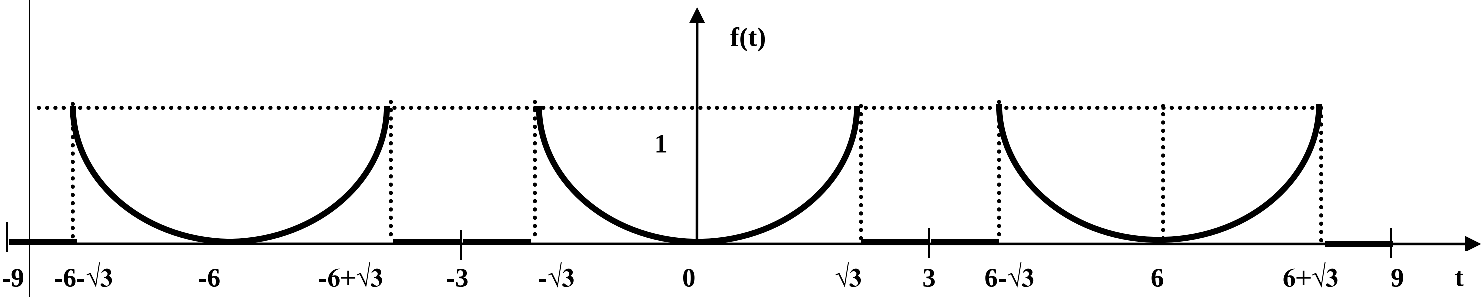
και το οποίο στο διάστημα $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ είναι:

(α): άρτια συνάρτηση του *t* και

(β): πολυωνυμικό με $\deg\{f(t)\} = 2$.

Απάντηση

Η περιοδική επέκταση του σήματος είναι:



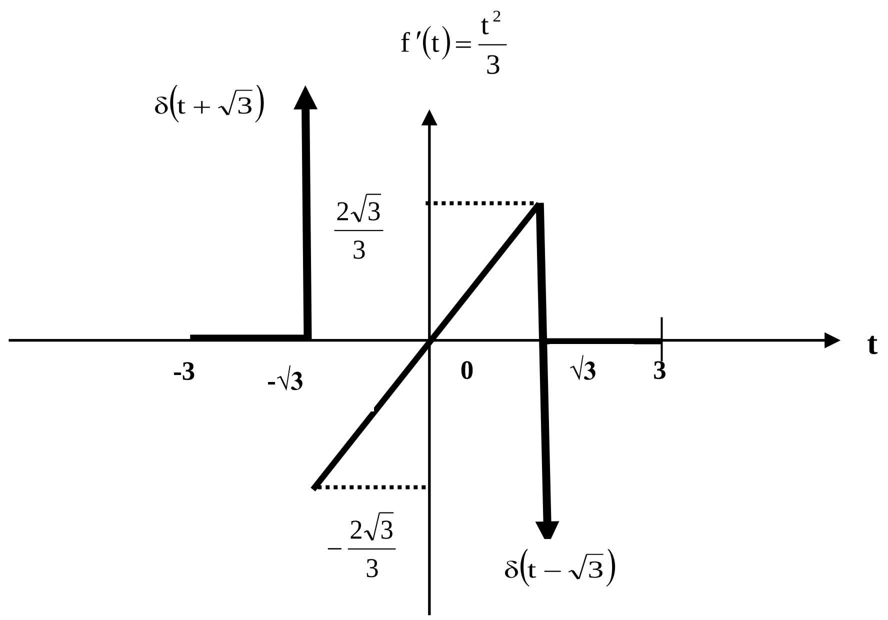
Στο διάστημα [-√3,√3] ο τύπος της f(t) είναι $f(t) = a \bullet t^2$ ενώ στο διάστημα [-3,√3) ο τύπος της f(t)=0 και τέλος στο διάστημα (√3,3] ο τύπος της f(t)=0. Επίσης ισχύει ότι $1 = a\left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow a = \dfrac{1}{3}$. Άρα $f(t) = \dfrac{t^2}{3}$ στο διάστημα [-√3,√3]

Συνεπώς ο γενικός τύπος της f(t) είναι ο εξής:

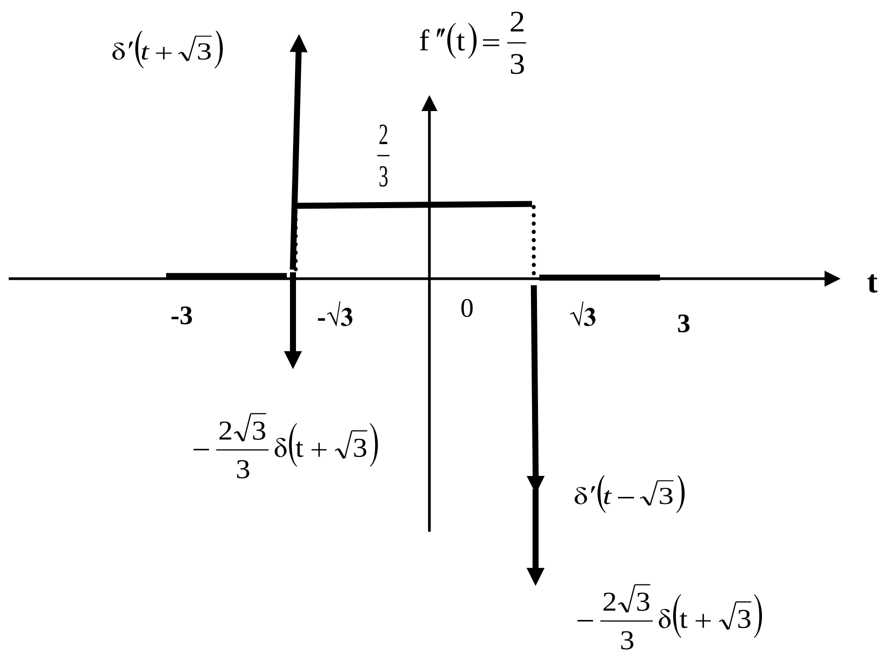
$$f(t) = \begin{cases} 0 & -3 < t < -\sqrt{3} \\ \dfrac{t^2}{3} & -3 \le t \le 3 \\ 0 & \sqrt{3} < t < 3 \end{cases}$$

Η συνάρτηση ορίζεται στο διάστημα [-3,3], άρα η περίοδος της είναι Τ=6 και η βασική συχνότητα είναι $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$

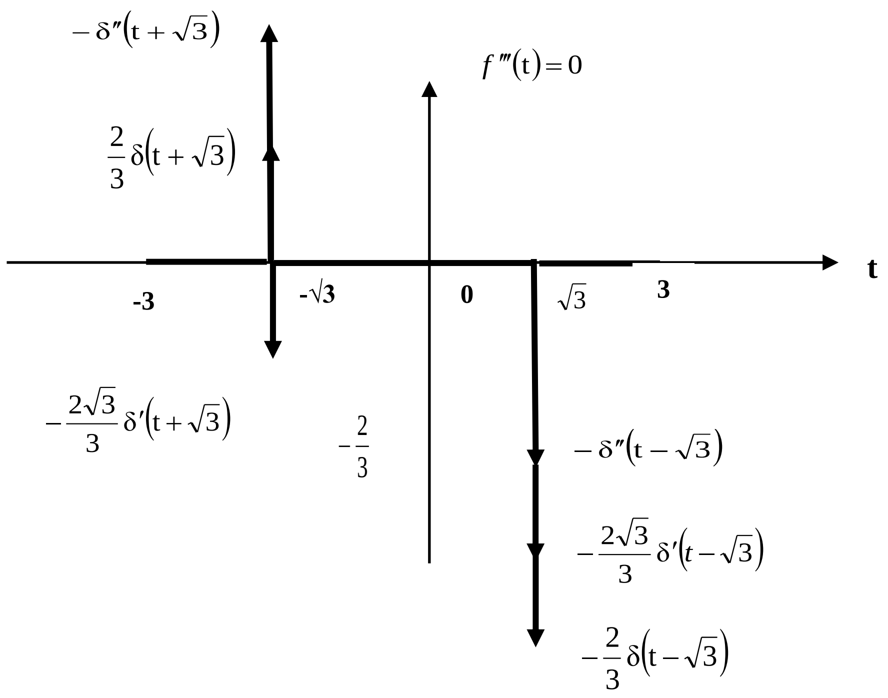
Η 1η παράγωγος της συνάρτησης είναι:



Η 2η παράγωγος της συνάρτησης είναι:



Η 3[η] παράγωγος της συνάρτησης είναι:



Οι συντελεστές της 3[ης] παραγώγου είναι οι εξής:

$$c_n^{(3)} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f'''(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt =$$

$$= \frac{1}{6}\int_{-3}^{3}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\delta'\left(t+\sqrt{3}\right)-\delta''\left(t+\sqrt{3}\right)+\frac{2}{3}\delta\left(t+\sqrt{3}\right)-\frac{2}{3}\delta\left(t-\sqrt{3}\right)-\frac{2\sqrt{3}}{3}\delta'\left(t-\sqrt{3}\right)-\delta''\left(t-\sqrt{3}\right)\right)e^{-jn\frac{2\pi}{6}t}dt =$$

$$= \frac{1}{6}\int_{-3}^{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\delta'\left(t+\sqrt{3}\right)e^{-jn\frac{\pi}{3}t}dt + \frac{1}{6}\int_{-3}^{3}-\delta''\left(t+\sqrt{3}\right)e^{-jn\frac{\pi}{3}t}dt + \frac{1}{6}\int_{-3}^{3}\frac{2}{3}\delta\left(t+\sqrt{3}\right)e^{-jn\frac{\pi}{3}t}dt +$$

$$+ \frac{1}{6}\int_{-3}^{3}-\frac{2}{3}\delta\left(t-\sqrt{3}\right)e^{-jn\frac{\pi}{3}t}dt + \frac{1}{6}\int_{-3}^{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\delta'\left(t-\sqrt{3}\right)e^{-jn\frac{\pi}{3}t}dt + \frac{1}{6}\int_{-3}^{3}-\delta''\left(t-\sqrt{3}\right)e^{-jn\frac{\pi}{3}t}dt =$$

$$= -\frac{1}{6}(-1)^2\left(e^{-jn\frac{\pi}{3}t}\right)''\Bigg|_{t=-\sqrt{3}} + \frac{1}{6}(-1)^1\left(e^{-jn\frac{\pi}{3}t}\right)'\Bigg|_{t=-\sqrt{3}} + \frac{1}{9}e^{-jn\frac{\pi}{3}\left(-\sqrt{3}\right)} - \frac{1}{6}(-1)^2\left(e^{-jn\frac{\pi}{3}t}\right)''\Bigg|_{t=\sqrt{3}} -$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{9}(-1)^1\left(e^{-jn\frac{\pi}{3}t}\right)'\Bigg|_{t=\sqrt{3}} - \frac{1}{6}e^{-jn\frac{\pi}{3}\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{1}{6}\left(j^2n^2\frac{\pi^2}{9}e^{-jn\frac{\pi}{3}\left(-\sqrt{3}\right)}\right) + \frac{\sqrt{3}}{9}\left(-jn\frac{\pi}{3}e^{-jn\frac{\pi}{3}\left(-\sqrt{3}\right)}\right) + \frac{1}{9}e^{\frac{jn\pi\sqrt{3}}{3}} - \frac{1}{6}\left(j^2n^2\frac{\pi^2}{9}e^{-jn\frac{\pi}{3}\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{9}\left(-jn\frac{\pi}{3}e^{-jn\frac{\pi\sqrt{3}}{3}}\right) -$$

$$-\frac{1}{9}e^{-jn\frac{\pi\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{1}{6}\frac{\pi^2n^2}{9}e^{\frac{jn\pi\sqrt{3}}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{27}jn\pi e^{\frac{jn\pi\sqrt{3}}{3}} + \frac{1}{9}e^{\frac{jn\pi\sqrt{3}}{3}} + \frac{1}{6}\frac{\pi^2n^2}{9}e^{\frac{-jn\pi\sqrt{3}}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{27}jn\pi e^{\frac{-jn\pi\sqrt{3}}{3}} - \frac{1}{9}e^{-\frac{jn\pi\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{\pi^2n^2}{27}\left(\frac{e^{\frac{jn\pi\sqrt{3}}{3}}+e^{-\frac{jn\pi\sqrt{3}}{3}}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{27}jn\pi\left(\frac{e^{\frac{jn\pi\sqrt{3}}{3}}+e^{-\frac{jn\pi\sqrt{3}}{3}}}{2}\right)\bullet 2 + \frac{1}{9}\left(\frac{e^{\frac{jn\pi\sqrt{3}}{3}}-e^{-\frac{jn\pi\sqrt{3}}{3}}}{2j}\right)\bullet 2j =$$

$$= \frac{\pi^2n^2}{27}\cos\left(\frac{n\pi\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{2jn\pi\sqrt{3}}{27}\cos\left(\frac{n\pi\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{2j}{9}\sin\left(\frac{n\pi\sqrt{3}}{3}\right)$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier δίνονται από τον τύπο:

$$c_n=\frac{c_n^{(3)}}{(jn\Omega_0)^3}=\frac{\frac{\pi^2 n^2}{27}\cos\left(\frac{n\pi\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{2jn\pi\sqrt{3}}{27}\cos\left(\frac{n\pi\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{2j}{9}\sin\left(\frac{n\pi\sqrt{3}}{3}\right)}{-\frac{jn^3\pi^3}{27}}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{n\pi\sqrt{3}}{3}\right)}{-jn\pi}+\frac{\cos\left(\frac{n\pi\sqrt{3}}{3}\right)2\sqrt{3}}{n^2\pi^2}-\frac{6\sin\left(\frac{n\pi\sqrt{3}}{3}\right)}{n^3\pi^3}=\frac{j\cos\left(\frac{n\pi\sqrt{3}}{3}\right)}{n\pi}+\frac{\cos\left(\frac{n\pi\sqrt{3}}{3}\right)2\sqrt{3}}{n^2\pi^2}-\frac{6\sin\left(\frac{n\pi\sqrt{3}}{3}\right)}{n^3\pi^3},n\neq 0$$

Θα πρέπει να βρούμε ξεχωριστά τον όρο c_0 διότι ο προηγούμενος τύπος ισχύει για $n\neq 0$.

$$c_0=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt=\frac{1}{6}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{t^2}{3}dt=\frac{1}{18}\left(\frac{t^3}{3}\right)_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

Η σειρά Fourier για την f(t) είναι:

$$f(t)=c_0+\sum_{n=-\infty\wedge n\neq 0}^{\infty} c_n \bullet e^{jn\Omega_0 t}=$$

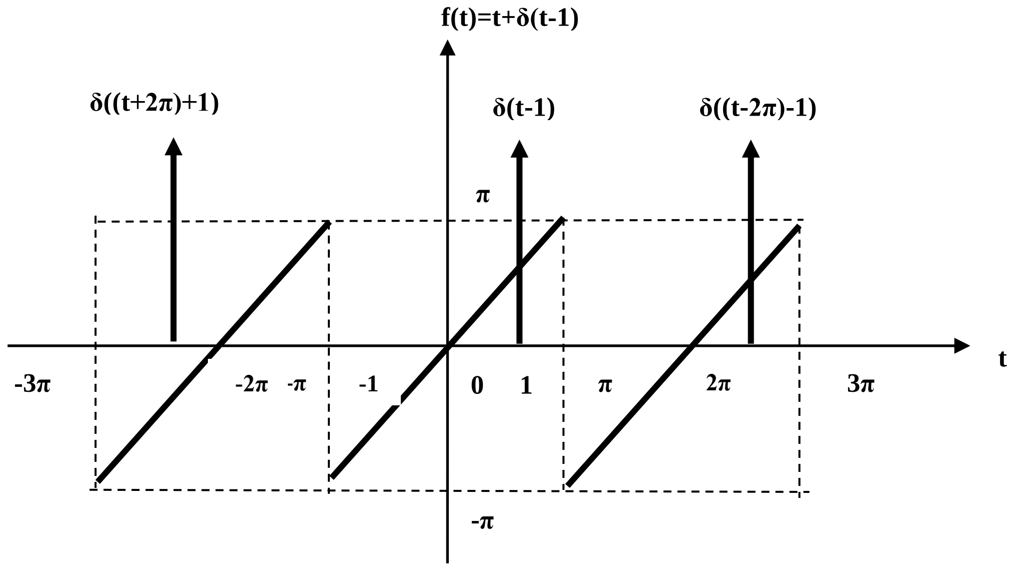
$$=\frac{\sqrt{3}}{9}+\sum_{n=-\infty\wedge n\neq 0}^{\infty}\left(\frac{j\cos\left(\frac{n\pi\sqrt{3}}{3}\right)}{n\pi}+\frac{\cos\left(\frac{n\pi\sqrt{3}}{3}\right)2\sqrt{3}}{n^2\pi^2}-\frac{6\sin\left(\frac{n\pi\sqrt{3}}{3}\right)}{n^3\pi^3}\right)e^{j\frac{n\pi}{3}t}$$

2.9.9 Θέμα 2 Φεβρουάριος 2015

ΘΕΜΑ 2: (45%). Θεωρήστε το σήμα συνεχούς χρόνου $f(t)=\begin{cases} t+\delta(t-1), |t|\leq\pi \\ 0,\ \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$, όπου $\delta(t)$ η κατανομή δέλτα. Υπολογίστε τη σειρά Fourier της περιοδικής επέκτασης του σήματος.

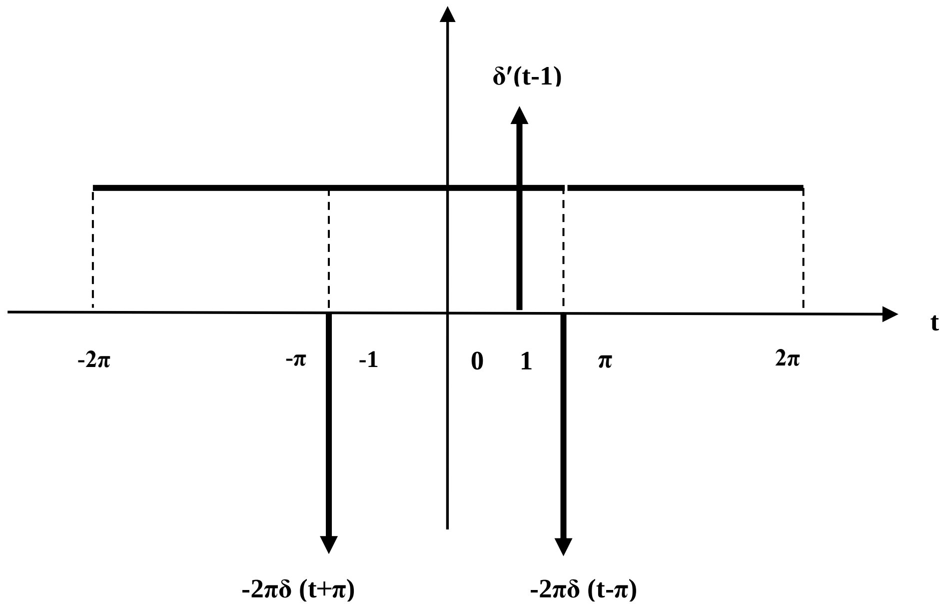
Λύση

Η περιοδική επέκταση της συνάρτησης είναι:



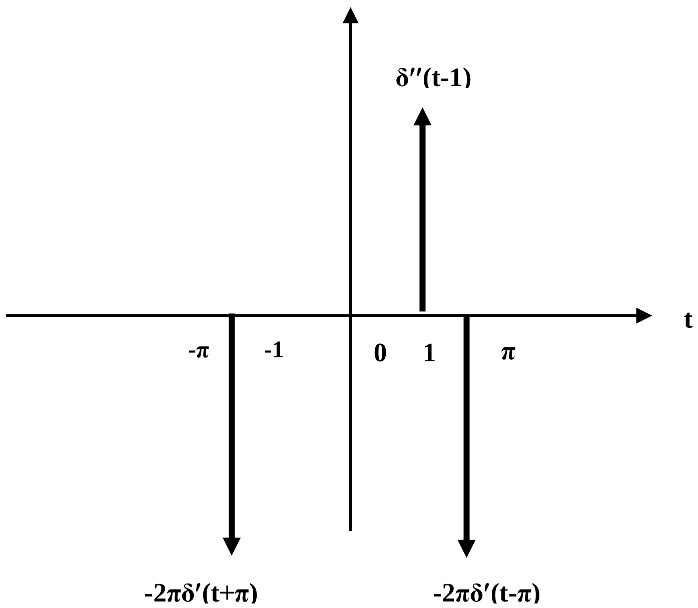
Η 1η παράγωγος της περιοδικής επέκτασης της συνάρτησης είναι:

f′(t)=1+δ′(t-1)



Η 2η παράγωγος της περιοδικής επέκτασης της συνάρτησης είναι:

f″(t)=δ″(t-1)



Οι συντελεστές της 2ης παραγώγου είναι οι εξής:

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(-2\pi\delta'(t+\pi)+\delta''(t-1)\right)\bullet e^{-jnt}dt =$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi}\delta'(t+\pi)\bullet e^{-jnt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta''(t-1)\bullet e^{-jnt}dt = -(-1)\left(e^{-jnt}\right)'\Big|_{t=-\pi} + \frac{1}{2\pi}(-1)^2\left(e^{-jnt}\right)''\Big|_{t=1} =$$

$$= \left(-jne^{-jnt}\right)\Big|_{t=-\pi} + \frac{1}{2\pi}\left(-jne^{-jnt}\right)'\Big|_{t=1} = \left(-jne^{-jnt}\right)\Big|_{t=-\pi} + \frac{1}{2\pi}\left(j^2n^2e^{-jnt}\right)\Big|_{t=1} = \left(-jne^{jn\pi}\right) - \frac{1}{2\pi}n^2e^{-jn} =$$

$$= -jn(-1)^n - \frac{n^2e^{-jn}}{2\pi} = \frac{-2\pi jn(-1)^n - n^2e^{-jn}}{2\pi}, n \neq 0$$

Ο συντελεστής c_0 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(t+\delta(t-1)\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tdt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t-1)dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

Άρα η **ζητούμενη σειρά Fourier** είναι η ακόλουθη:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty}\left(\frac{-2\pi jn(-1)^n - n^2 e^{-jn}}{2\pi}\right)\bullet e^{jnt}$$

Βασική Παρατήρηση

Σε κάποια άλλη ομάδα είχε δώσει τον τύπο: $f(t) = \left\langle \begin{matrix} t+\delta(t\text{-}15) & |t| \leq \pi \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{matrix} \right.$

Προφανώς εδώ μέσα στα όρια της περιόδου δεν περιλαμβάνεται η κρουστική συνάρτηση δ(t-15) και δεν θα τη λάβουμε υπόψη μας στον υπολογισμό των συντελεστών της σειράς Fourier

2.10 Ασκήσεις με Φίλτρα

2.10.1 Θέμα 5 Φεβρουάριος 2004

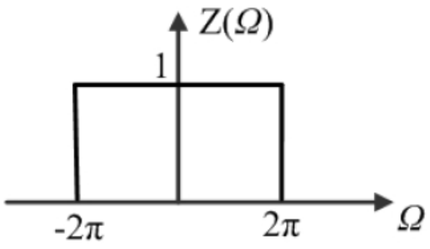
Δίνεται η κρουστική απόκριση $h(t)=2\dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\cos(7\pi t)$, η είσοδος $x(t)=3\cos(3\pi t)+\sin(6\pi t)$ και ο ακόλουθος Μετασχηματισμός Fourier :

$$\frac{\sin(\Omega_0 t)}{\pi t} \overset{MF}{\leftrightarrow} \begin{cases} 1, & |\Omega|<\Omega_0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

α) Με χρήση του MF να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος.

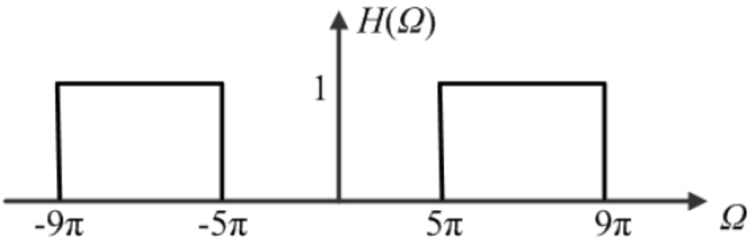
β) Τι παρατηρείτε για την έξοδο όταν η είσοδος είναι $x(t)=3\cos(3\pi t)+\sin(2\pi t)$

α) Έστω το σήμα $z(t)=\dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$. Ο MF του σήματος αυτού μας δίνεται στην εκφώνηση της άσκησης (για $\Omega_0=2\pi$) και αναπαρίσταται γραφικά ως εξής:



Σχήμα 1.

Λόγω της Ιδιότητας της Διαμόρφωσης του MF, ο MF του σήματος $h(t)=2\dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\cos(7\pi t)$ είναι $H(\Omega)=Z(\Omega-7\pi)+Z(\Omega+7\pi)$ και αναπαρίσταται γραφικά ως:



Σχήμα 2.

Βλέπουμε από το Σχήμα 2 ότι το σύστημα (με κρουστική απόκριση $h(t)$ και απόκριση συχνοτήτων $H(\Omega)$) είναι ένα ζωνοπερατό φίλτρο με ζώνη διέλευσης $5\pi < |\Omega| < 9\pi$. Δηλαδή, οι συχνότητες εισόδου που ανήκουν στη ζώνη αυτή περνάνε με αμείωτο πλάτος, ενώ όλες οι υπόλοιπες συχνότητες κόβονται.

Η εκφώνηση της άσκησης αναφέρει ότι στην είσοδο έχουμε το σήμα $x(t) = 3\cos(3\pi t) + \sin(6\pi t)$. Το σήμα αυτό έχει συχνότητες $\pm 3\pi$ λόγω του όρου $3\cos(3\pi t)$ και συχνότητες $\pm 6\pi$ λόγω του όρου $\sin(6\pi t)$.

Το φίλτρο θα κόψει τις συχνότητες $\pm 3\pi$, δηλαδή τον όρο $3\cos(3\pi t)$.

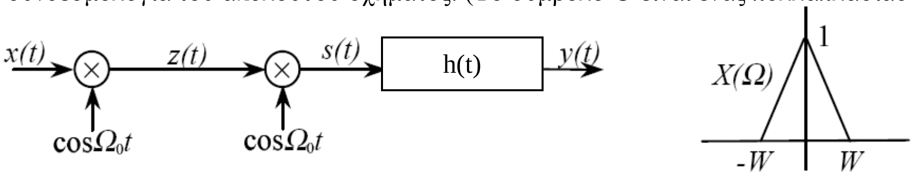
Άρα η έξοδος του συστήματος θα είναι $y(t) = \sin(6\pi t)$.

β) Τώρα στην είσοδο έχουμε το σήμα $x(t) = 3\cos(3\pi t) + \sin(2\pi t)$. Το σήμα αυτό έχει συχνότητες $\pm 3\pi$ και $\pm 2\pi$.

Το φίλτρο θα κόψει όλες τις συχνότητες. Άρα η έξοδος του συστήματος θα είναι $y(t) = 0$.

2.10.2 Είσοδος και Έξοδος Φίλτρου ίδιο σήμα

Δίνεται η συνδεσμολογία του ακόλουθου σχήματος: (Το σύμβολο ⊗ είναι ένας πολλαπλασιαστής)



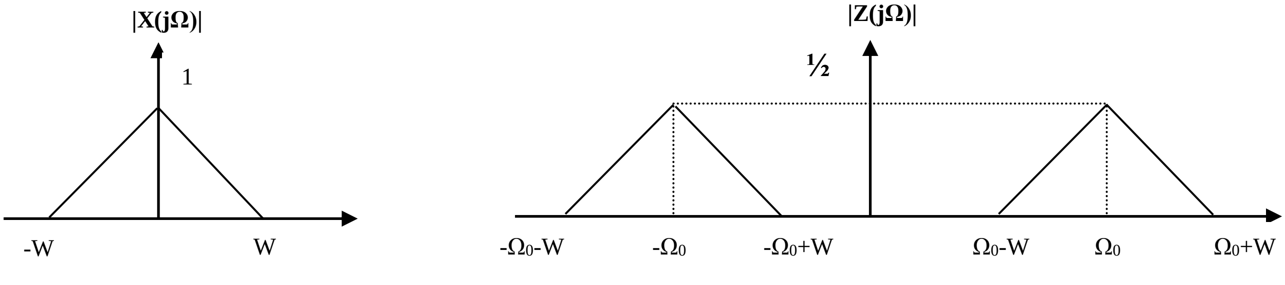
Έστω ότι ο Μετασχηματισμός Fourier $X(\Omega)$ του σήματος εισόδου $x(t)$ είναι της μορφής του δεύτερου σχήματος και $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού χρονικά σταθερού συστήματος. Προσδιορίστε το γραμμικό σύστημα καθώς και τη σχέση μεταξύ Ω_0 και W, ώστε η τελική έξοδος $y(t)$ να είναι ίση με την είσοδο $x(t)$.

<u>Λύση</u>

Η έξοδος από τον 1ο πολλαπλασιαστή (διαμορφωτή) είναι:

$$z(t) = x(t) \bullet \cos(\Omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \bullet \left[X(j \bullet (\Omega - \Omega_0)) + X(j \bullet (\Omega + \Omega_0))\right]$$

Γραφικά ο MF του z(t) δηλ. ο Z(jΩ) αναπαριστάνεται ως εξής:



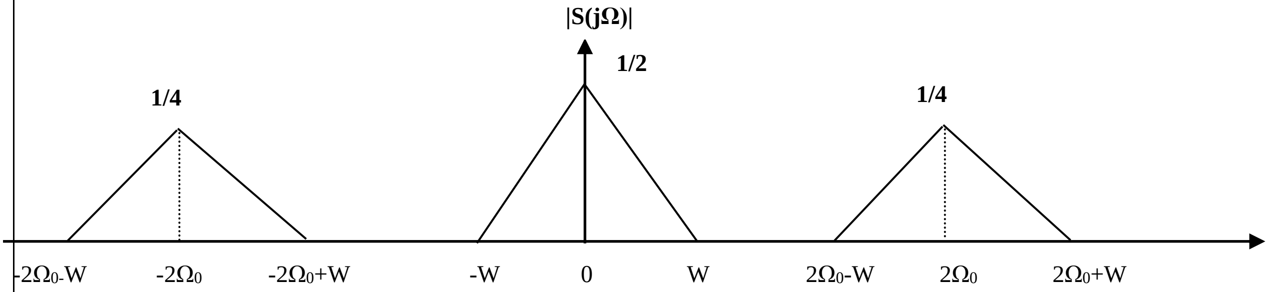
Στη συνέχεια η έξοδος από το 2ο πολλαπλασιαστή (διαμορφωτή) είναι:

$$s(t)=z(t)\cos(\Omega_0 t)\leftrightarrow \frac{1}{2}\left[Z\left(j(\Omega-\Omega_0)\right)+Z\left(j(\Omega+\Omega_0)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left[X\left(j(\Omega-\Omega_0-\Omega_0)\right)+X\left(j(\Omega-\Omega_0+\Omega_0)\right)\right]+\frac{1}{2}\left[X\left(j(\Omega+\Omega_0-\Omega_0)\right)+X\left(j(\Omega+\Omega_0+\Omega_0)\right)\right]\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left[X\left(j(\Omega-2\Omega_0)\right)+X\left(j(\Omega)\right)\right]+\frac{1}{2}\left[X\left(j(\Omega)\right)+X\left(j(\Omega+2\Omega_0)\right)\right]\right]=\frac{1}{4}X\left(j(\Omega-2\Omega_0)\right)+\frac{1}{4}X\left(j(\Omega+2\Omega_0)\right)+\frac{1}{2}X\left(j(\Omega)\right)$$

Γραφικά ο MF του s(t) δηλ. ο S(jΩ) αναπαριστάνεται ως εξής:



Για να πάρουμε στην έξοδο το σήμα εισόδου x(t) πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι ακόλουθες συνθήκες ώστε να μην επικαλύπτονται τα τμήματα και να μην αλλοιώνεται η μορφή του βασικού τριγώνου X(jΩ) δηλ:

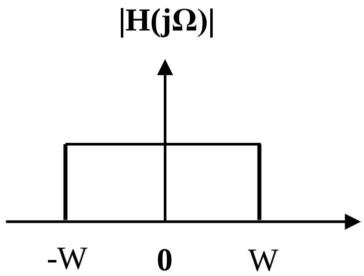
- $2\Omega_0-W>W\Rightarrow 2\Omega_0>2W\Rightarrow \Omega_0>W$
- $-2\Omega_0+W<-W\Rightarrow -2\Omega_0<-2W\Rightarrow \Omega_0>W$

Για να γίνει αυτό πρέπει να επιλέξουμε την απόκριση συχνότητας H(jΩ) να είναι ένα φίλτρο της μορφής:

$$H(j\Omega)=\begin{cases}2 & -W<\Omega<W \quad \text{με} \quad W<\Omega_0\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

Έτσι από τους 3 όρους της S(jΩ) μόνο ο κεντρικός όρος με πλάτος ½ και εύρος συχνοτήτων από –W μέχρι W διέρχεται μέσα από το φίλτρο, ενώ οι δύο άλλοι όροι αποκόπτονται από το φίλτρο, οπότε τελικά στην έξοδο φτάνει ακριβώς ο X(jΩ) (αφού το φίλτρο διπλασιάζει το πλάτος του) που αντιστοιχεί στο αρχικό σήμα x(t).

Γραφικά ο MF του h(t) δηλ. η απόκριση συχνότητας H(jΩ) αναπαριστάνεται ως εξής:



2.10.3 Θέμα 1 Ιούνιος 2012

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων: $x(t)=2\cos(6\pi t)+\sin(8\pi t)$ και $h(t)=2\dfrac{\sin(2\pi(1+1\mathrm{mod}2)\bullet t)}{\pi t}\cos(7\pi t)$

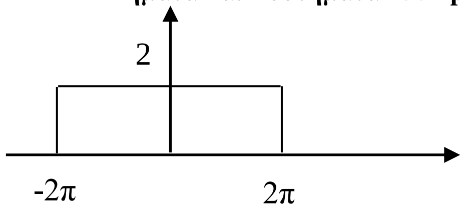
<u>Απάντηση – Α Τρόπος-Γραφική Λύση</u>

Η έξοδος του συστήματος είναι y(t)=x(t)*h(t)↔Y(jΩ)=X(jΩ)•H(jΩ). Θα υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς X(jΩ) και H(jΩ) της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης αντίστοιχα.

✓ **Πρώτα υπολογίζουμε την απόκριση συχνότητας H(jΩ)**

Παρατηρούμε ότι ο 1ος όρος $\dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$ της h(t) είναι η κρουστική απόκριση κατωπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής $\Omega_c=2\pi$ δηλ. $h(t)=2\dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\leftrightarrow H(j\Omega)=2\begin{cases}1 & |\Omega|<2\pi\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$

Η γραφική απεικόνιση του MF της $2\dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$ είναι:

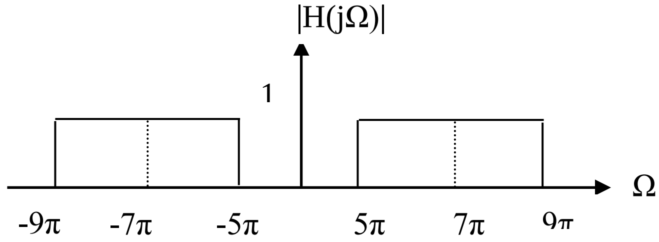


Ο όρος $\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$ πολλαπλασιάζεται με το cos(7πt) και σύμφωνα με την ιδιότητα της διαμόρφωσης ισχύει ότι:

$$2\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\cos(7\pi t) \leftrightarrow 2\begin{cases}1 & |\Omega - 7\pi| < 2\pi \text{ και } |\Omega + 7\pi| < 2\pi \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

$$2\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\cos(7\pi t) \leftrightarrow 2\frac{1}{2}\left[u(\Omega-5\pi)-u(\Omega-9\pi)+u(\Omega+9\pi)-u(\Omega+5p)\right] \quad (1)$$

Η γραφική αναπαράσταση του MF της $2\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\cos(7\pi t)$ είναι:



Παρατηρούμε ότι και οι δύο όροι της εισόδου $x(t) = 2\cos(6\pi t) + \sin(8\pi t)$ έχουν συχνότητες που είναι μέσα στα όρια του φίλτρου, άρα περνούν και οι δύο από το φίλτρο οπότε η έξοδος ταυτίζεται με την είσοδο.

<u>Λύση –Β Τρόπος-Μαθηματική Επίλυση</u>

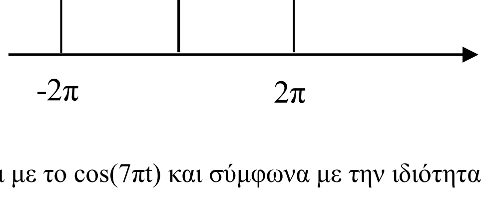
Η έξοδος του συστήματος είναι y(t)=x(t)*h(t)↔ Y(jΩ)=X(jΩ)*H(jΩ). Θα υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς X(jΩ) και H(jΩ) της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης αντίστοιχα.

✓ Πρώτα υπολογίζουμε την απόκριση συχνότητας H(jΩ)

Παρατηρούμε ότι ο 1ος όρος $\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$ της h(t) είναι η κρουστική απόκριση ενός κατωπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής $\Omega_c = 2\pi$ δηλ.

$$h(t) = 2\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \leftrightarrow H(j\Omega) = 2\begin{cases}1 & |\Omega| < 2\pi \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

Η γραφική απεικόνιση του MF της $2\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$ είναι:

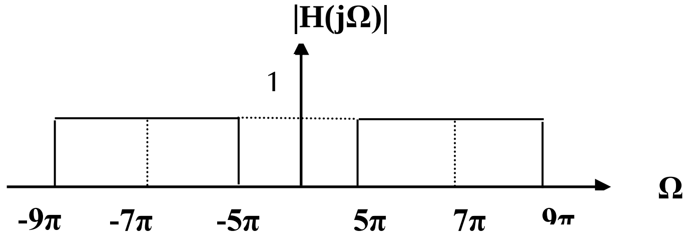


Ο όρος $\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$ πολλαπλασιάζεται με το cos(7πt) και σύμφωνα με την ιδιότητα της διαμόρφωσης ισχύει ότι:

$$2\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\cos(7\pi t) \leftrightarrow 2\begin{cases}1 & |\Omega - 7\pi| < 2\pi \text{ και } |\Omega + 7\pi| < 2\pi \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

$$2\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\cos(7\pi t)\leftrightarrow 2\frac{1}{2}\left[u(\Omega-5\pi)-u(\Omega-9\pi)+u(\Omega+9\pi)-u(\Omega+5\pi)\right] \quad (1)$$

Η γραφική αναπαράσταση του MF της $\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\cos(7\pi t)$ είναι:



Μελετώντας γραφικά την |H(jΩ)| μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι γράφεται ως:

$$\left[u(\Omega-5\pi)-u(\Omega-9\pi)\right]-\frac{1}{2}\left[u(\Omega+9\pi)-u(\Omega+5\pi)\right] \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) επιβεβαιώνουν ότι βρίσκουμε ακριβώς και με τον τύπο της διαμόρφωσης και γραφικά την ίδια έκφραση για την απόκριση συχνότητας H(jΩ)

Η απόκριση συχνότητας H(jΩ) μπορεί να γραφεί τελικά ως εξής:

H(jΩ)=([u(Ω-5π)- u(Ω-9π)]+[u(Ω+9π)-u(Ω+5π)])

- ✓ Μετά υπολογίζουμε τον MF της εισόδου, εφαρμόζοντας MF και στα 2 μέρη της x(t): $x(t)=2\cos(6\pi t)+\sin(8\pi t)$

$$2\cos(6\pi t)\leftrightarrow 2\pi\big(\delta(\Omega-6\pi)+\delta(\Omega+6\pi)\big)$$

$$\sin(8\pi t)\leftrightarrow \frac{\pi}{j}\big(\delta(\Omega-8\pi)-\delta(\Omega+8\pi)\big)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα γραμμικότητας προκύπτει:

$$\boxed{x(t)=2\cos(6\pi t)+\sin(8\pi t)\leftrightarrow X(j\Omega)=2\pi\big(\delta(\Omega-6\pi)+\delta(\Omega+6\pi)\big)+\frac{\pi}{j}\big(\delta(\Omega-8\pi)-\delta(\Omega+8\pi)\big)}$$

- ✓ Μετά υπολογίζουμε τον MF της εξόδου δηλ. τον Y(jΩ) ως εξής:

$$Y(j\Omega)=X(j\Omega)\bullet H(j\Omega)\Rightarrow$$

$$Y(j\Omega)=\left(2\pi\big(\delta(\Omega-6\pi)+\delta(\Omega+6\pi)\big)+\frac{\pi}{j}\big(\delta(\Omega-8\pi)-\delta(\Omega+8\pi)\big)\right)\bullet H(j\Omega)$$

Παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι της εισόδου διέρχονται μέσω του φίλτρου (δηλ. μέσω της H(jΩ)) οπότε η έξοδος είναι:

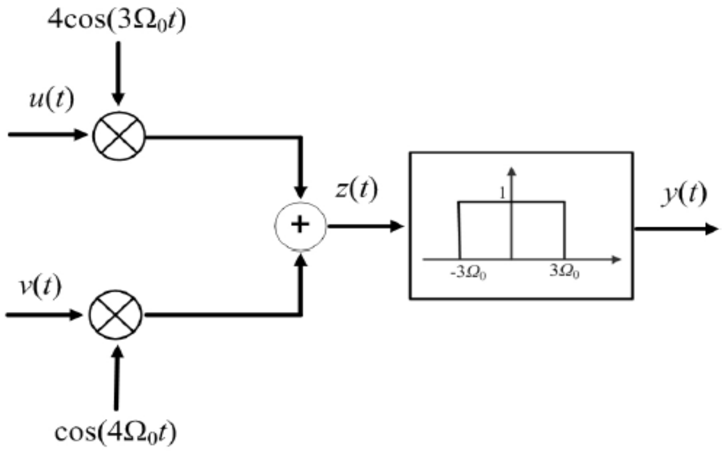
$$Y(j\Omega)=2\pi\big(\delta(\Omega-6\pi)+\delta(\Omega+6\pi)\big)+\frac{\pi}{j}\big(\delta(\Omega-8\pi)-\delta(\Omega+8\pi)\big)$$

- ✓ Τέλος βρίσκουμε το σήμα εξόδου y(t) με αντίστροφο MF οπότε:

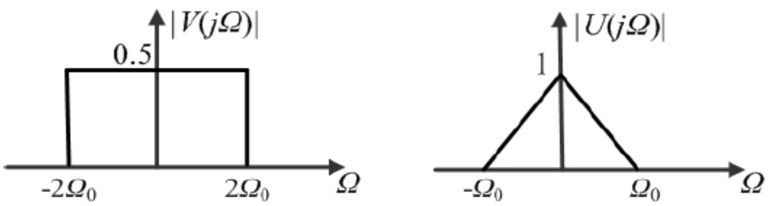
$$\boxed{y(t)=2\cos(6\pi t)+\sin(8\pi t)}$$

2.10.4 Άτυπη Φεβρουάριος 2013

Να αναπαραστήστε γραφικά τα μέτρα των MF των σημάτων z(t) και y(t). Οι MF των σημάτων u(t) και v(t) δίνονται στο σχήμα 2.



Σχήμα 1.



Σχήμα 2.

<u>Λύση</u>

Στο Σχήμα 1 παρατηρούμε ότι το σήμα εισόδου $u(t)$ πολλαπλασιάζεται με το σήμα $4\cos(3\Omega_0 t)$.

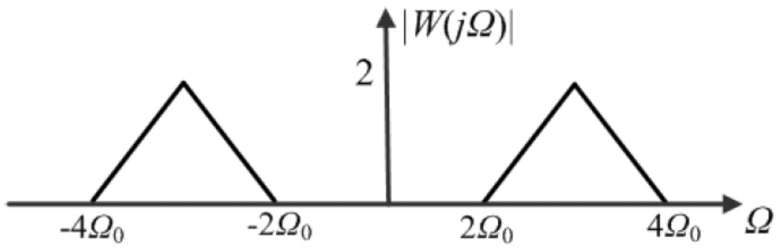
Έστω το σήμα που προκύπτει συμβολίζεται με $w(t)$. Δηλαδή $w(t) = 4u(t)\cos(3\Omega_0 t)$.

Σύμφωνα με την Ιδιότητα της Διαμόρφωσης του MF, ο MF του σήματος $w(t)$ θα είναι:

$$W(\Omega) = 2U(\Omega - 3\Omega_0) + 2U(\Omega + 3\Omega_0) \qquad (1)$$

όπου $U(\Omega)$ είναι ο MF του σήματος $u(t)$.

Επομένως, με βάση την εξίσωση (1) και το Σχήμα 2, το μέτρο της $W(\Omega)$ θα είναι:



Σχήμα 3.

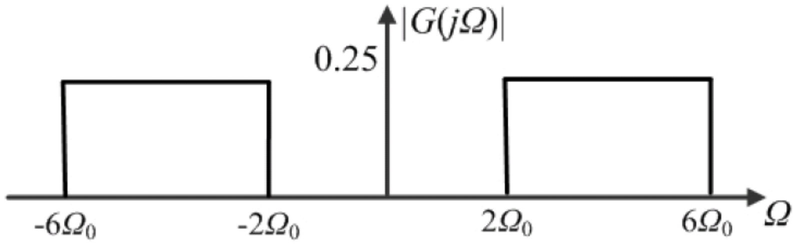
Επίσης στο Σχήμα 1 παρατηρούμε ότι το σήμα εισόδου $v(t)$ πολλαπλασιάζεται με το σήμα $\cos(4\Omega_0 t)$. Έστω το σήμα που προκύπτει συμβολίζεται με $g(t)$. Δηλαδή $g(t) = u(t)\cos(4\Omega_0 t)$.

Σύμφωνα με την Ιδιότητα της Διαμόρφωσης του MF, ο MF του σήματος $g(t)$ θα είναι:

$$G(\Omega) = \frac{1}{2}V(\Omega - 4\Omega_0) + \frac{1}{2}V(\Omega + 4\Omega_0) \qquad (2)$$

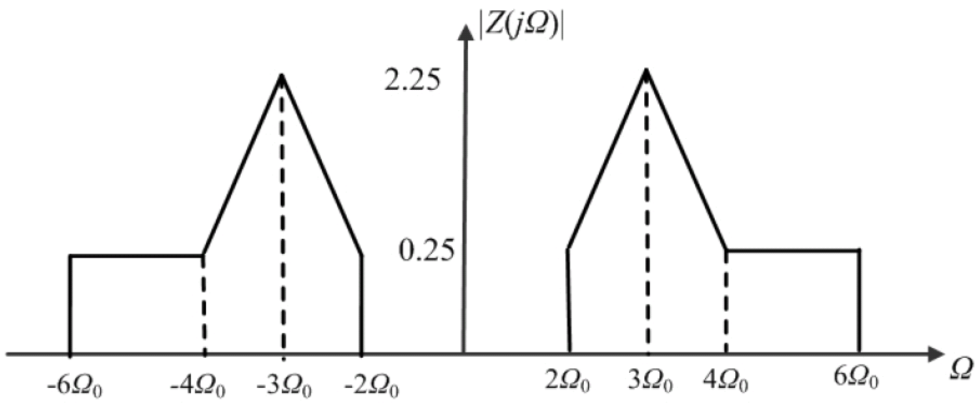
όπου $V(\Omega)$ είναι ο MF του σήματος $v(t)$.

Επομένως, με βάση την εξίσωση (2) και το Σχήμα 2, το μέτρο της $G(\Omega)$ θα είναι:



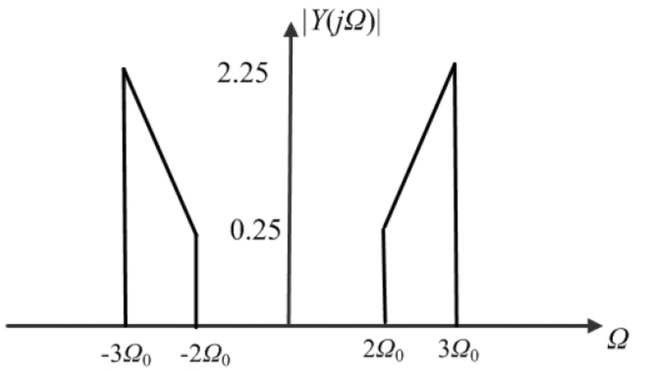
Σχήμα 4.

Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 1, ισχύει $z(t) = w(t) + g(t)$. Άρα το μέτρο του σήματος $z(t)$ θα είναι άθροισμα των μέτρων που φαίνονται στα Σχήματα 3 και 4. Δηλαδή θα είναι:



Σχήμα 5.

Τέλος, στο Σχήμα 1 βλέπουμε ότι το σήμα $z(t)$ είναι είσοδος ενός κατωπερατού φίλτρου που έχει συχνότητα αποκοπής $3\Omega_0$. Η έξοδος του φίλτρου είναι το σήμα $y(t)$. Το μέτρο του MF του σήματος αυτού είναι το παρακάτω:

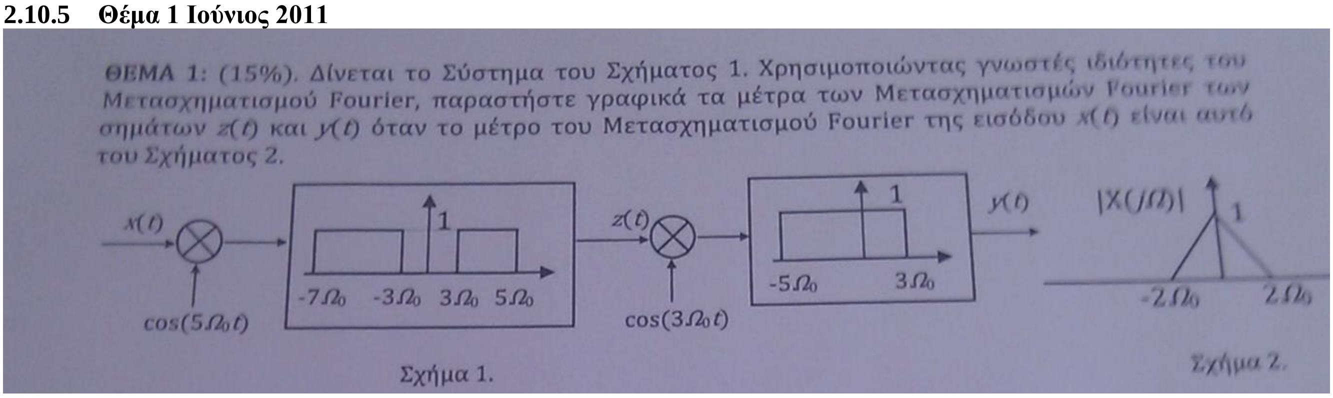


Σχήμα 6.

Αυτό προέκυψε από το μέτρο του MF του σήματος $z(t)$ (Σχήμα 5) κόβοντας τις συχνότητες που είναι έξω από διάστημα $|\Omega|<3\Omega_0$.

Το πλάτος του MF της εξόδου από το φίλτρο είναι το γινόμενο του πλάτους του MF της εισόδου και του πλάτος του MF της απόκρισης συχνότητας

2.10.5 Θέμα 1 Ιούνιος 2011



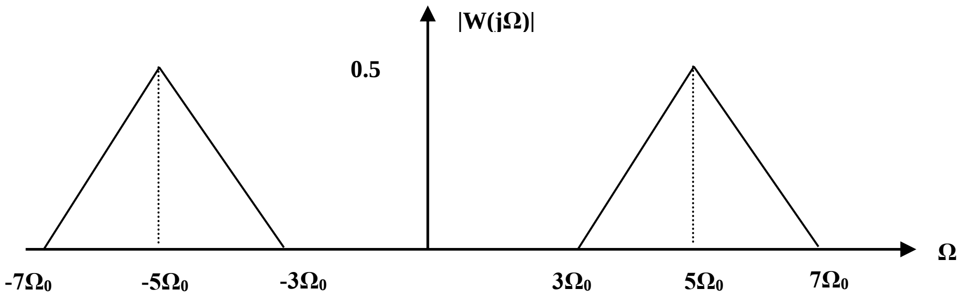
ΘΕΜΑ 1: (15%). Δίνεται το Σύστημα του Σχήματος 1. Χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier, παραστήστε γραφικά τα μέτρα των Μετασχηματισμών Fourier των σημάτων $z(t)$ και $y(t)$ όταν το μέτρο του Μετασχηματισμού Fourier της εισόδου $x(t)$ είναι αυτό του Σχήματος 2.

Σχήμα 1.

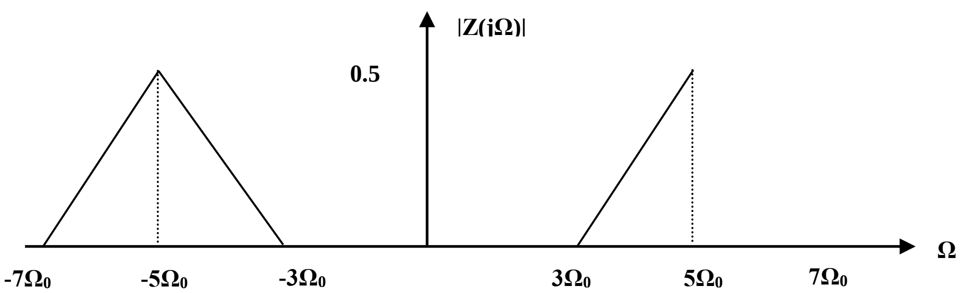
Σχήμα 2.

Λύση

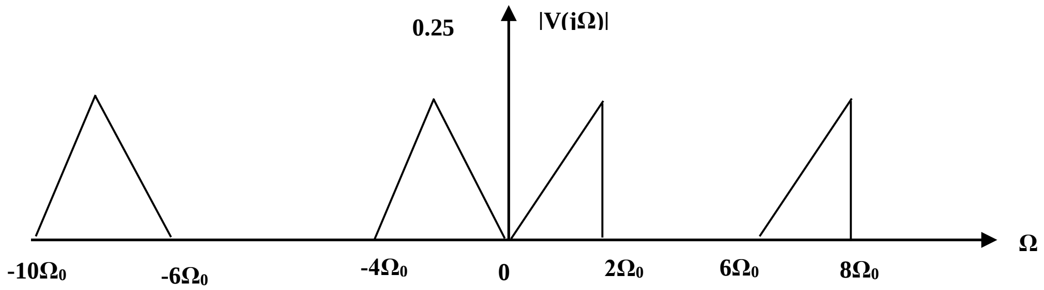
Παρατηρούμε ότι το σήμα εισόδου x(t) πολλαπλασιάζεται (διαμορφώνεται) αρχικά με το σήμα $\cos(5\Omega_o t)$. Το σήμα που προκύπτει το συμβολίζουμε ως w(t) (δηλαδή $w(t)=x(t)\cos(5\Omega_o t)$) και μπαίνει ως είσοδος στο φίλτρο του Σχήματος 1. Σύμφωνα με την ιδιότητα της διαμόρφωσης ο MF του w(t) θα είναι:



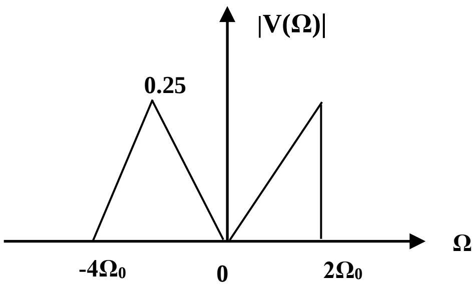
Η έξοδος του φίλτρου συμβολίζεται με z(t). Το μέτρο του MF του σήματος z(t) θα είναι:



Δηλαδή το φίλτρο θα περάσει μόνο τις συχνότητες των διαστημάτων $[-7\Omega_0,-3\Omega_0]$ και $[3\Omega_0,5\Omega_0]$ με αμείωτο πλάτος. Μετά το σήμα z(t) που εξέρχεται από το φίλτρο πολλαπλασιάζεται (διαμορφώνεται) με το σήμα $\cos(3\Omega_o t)$. Το νέο σήμα που προκύπτει το συμβολίζουμε ως v(t) δηλαδή $v(t)=z(t)\cos(3\Omega_o t)$ και μπαίνει ως είσοδος στο φίλτρο του Σχήματος 2. Σύμφωνα με την ιδιότητα της διαμόρφωσης ο MF του v(t) θα είναι:



Το σήμα v(t) είναι είσοδος στο κατωπερατό φίλτρο του Σχήματος 2 οπότε η έξοδος του φίλτρου είναι:

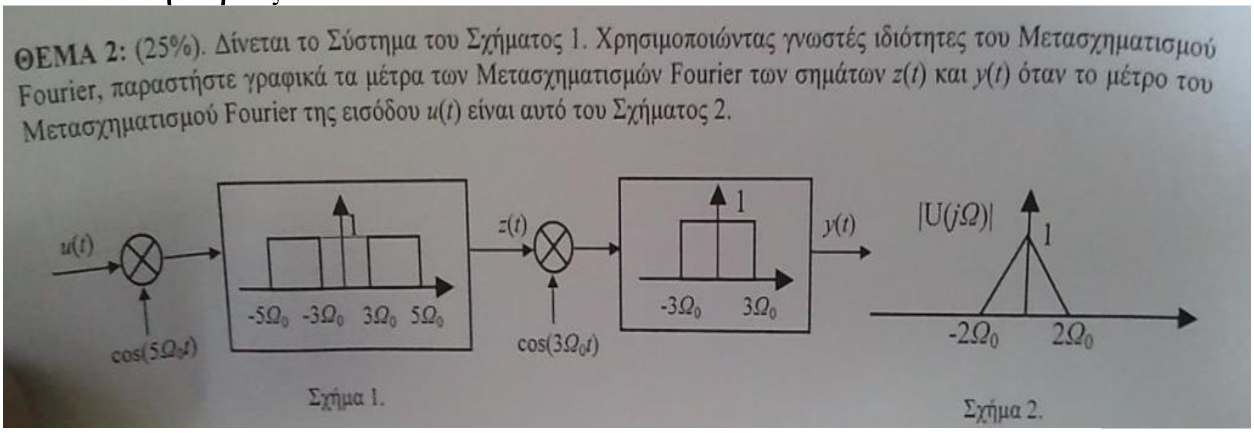


<u>Παρατήρηση</u>

Ο τρόπος με τον οποίο δουλεύουμε σε τέτοιες ασκήσεις με διαμορφώσεις και φίλτρα είναι ο εξής:

Για να απεικονίσουμε γραφικά τη διαμόρφωση πηγαίνουμε στον οριζόντιο άξονα που είναι πάντα συνάρτηση του Ω και με κέντρο τη συχνότητα του συνημίτονου διαμόρφωσης έστω Ω_0, προσθέτουμε τον MF του αρχικού σήματος. Έπειτα με κέντρο το $-\Omega_0$ προσθέτουμε πάλι τον MF του αρχικού σήματος και θέτουμε ως ύψος (πλάτος) του MF του διαμορφωμένου σήματος το ½. Στη συνέχεια όταν το σήμα διοχετεύεται σε φίλτρο παρατηρούμε τι ακριβώς «περνάει» και τι ακριβώς «κόβεται» από το φίλτρο καθώς και το ύψος του MF του φίλτρου και πολλαπλασιάζουμε τα ύψη των MF του εισερχόμενου σήματος και του φίλτρου.

2.10.6 Άτυπη Μάρτιος 2012



ΘΕΜΑ 2: (25%). Δίνεται το Σύστημα του Σχήματος 1. Χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier, παραστήστε γραφικά τα μέτρα των Μετασχηματισμών Fourier των σημάτων $z(t)$ και $y(t)$ όταν το μέτρο του Μετασχηματισμού Fourier της εισόδου $u(t)$ είναι αυτό του Σχήματος 2.

Σχήμα 1.

Σχήμα 2.

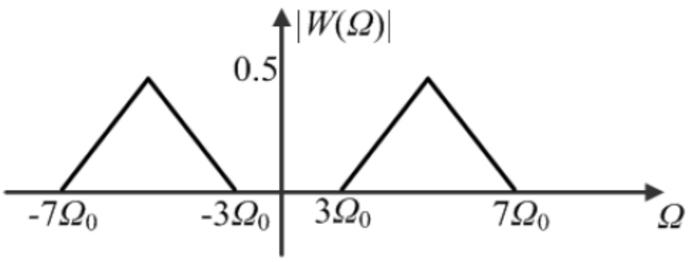
Στο Σχήμα 1 παρατηρούμε ότι το σήμα εισόδου $u(t)$ αρχικά πολλαπλασιάζεται με το σήμα $\cos(5\Omega_0 t)$. Έστω το σήμα που προκύπτει συμβολίζεται με $w(t)$. Δηλαδή $w(t)=u(t)\cos(5\Omega_0 t)$.

Σύμφωνα με την Ιδιότητα της Διαμόρφωσης του ΜF, ο ΜF του σήματος $w(t)$ θα είναι:

$$W(\Omega)=\frac{1}{2}U(\Omega-5\Omega_0)+\frac{1}{2}U(\Omega+5\Omega_0) \qquad (1)$$

όπου $U(\Omega)$ είναι ο ΜF του σήματος $u(t)$.

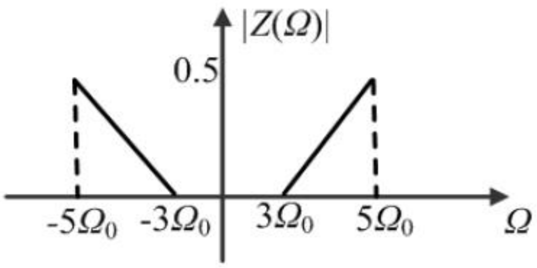
Επομένως, με βάση την εξίσωση (1) και το Σχήμα 2, το μέτρο της $W(\Omega)$ θα είναι:



Σχήμα 3.

Βλέπουμε στο Σχήμα 1 ότι το σήμα $w(t)$ είναι είσοδος σε ένα ζωνοπερατό φίλτρο που έχει ζώνη διέλευσης $3\Omega_0<|\Omega|<5\Omega_0$. Η έξοδος του φίλτρου συμβολίζεται με $z(t)$.

Το μέτρο του ΜF του σήματος $z(t)$ θα είναι:

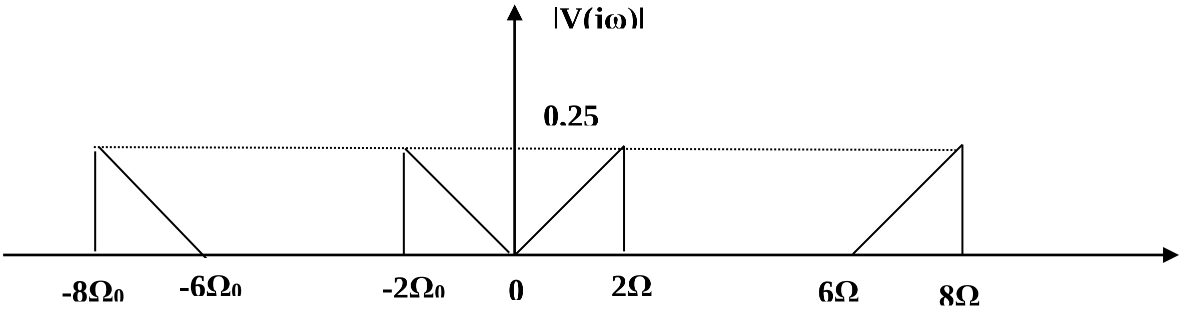


Σχήμα 4.

Και πάλι λόγω της Ιδιότητας της Διαμόρφωσης του MF, ο MF του σήματος $v(t)$ θα είναι:

$$V(\Omega)=\frac{1}{2}Z(\Omega-3\Omega_0)+\frac{1}{2}Z(\Omega+3\Omega_0) \qquad (2)$$

Επομένως, λόγω της εξίσωσης (2) και του Σχήματος 4, το μέτρο της $V(\Omega)$ θα είναι:

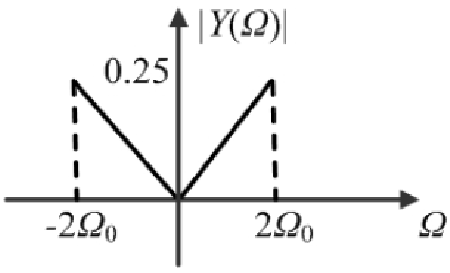


Και πάλι λόγω της Ιδιότητας της Διαμόρφωσης του MF, ο MF του σήματος $v(t)$ θα είναι:

$$V(\Omega)=\frac{1}{2}Z(\Omega-3\Omega_0)+\frac{1}{2}Z(\Omega+3\Omega_0) \qquad (2)$$

Επομένως, λόγω της εξίσωσης (2) και του Σχήματος 4, το μέτρο της $V(\Omega)$ θα είναι:

Άρα το μέτρο του MF του σήματος $v(t)$ θα είναι:

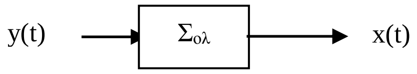


Σχήμα 6.

Συνοψίζοντας, οι γραφικές αναπαραστάσεις των μέτρων των MF των σημάτων $z(t)$ και $y(t)$ φαίνονται στα Σχήματα 4 και 6, αντίστοιχα.

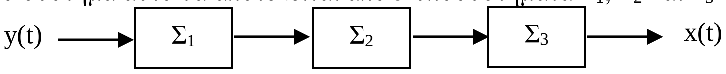
2.10.7 Θέμα 1 Μάρτιος 2010

Ψάχνουμε ένα σύστημα $\Sigma_{o\lambda}$ το οποίο θα παίρνει ως είσοδο το σήμα $y(t)=x(t)\bullet e^{a(t)}$ και θα βγάζει στην έξοδο το σήμα x(t).



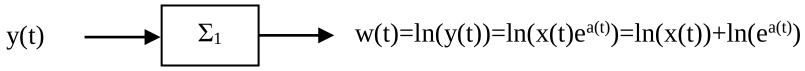
<u>Λύση</u>

Το σύστημα αυτό θα αποτελείται από 3 υποσυστήματα Σ_1, Σ_2 και Σ_3 συνδεδεμένα σε σειρά όπως φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα:



Στη συνέχεια θα βρούμε τα υποσυστήματα αυτά.

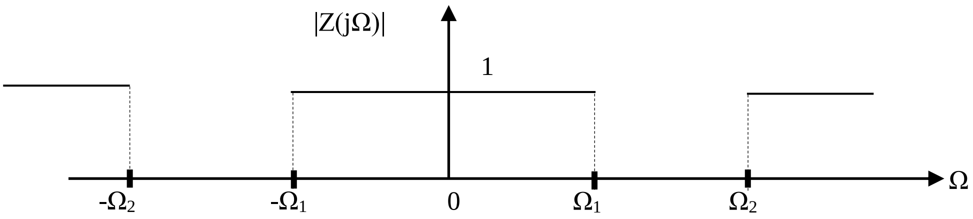
- **Το 1ο υποσύστημα Σ_1 θα έχει την ακόλουθη μορφή:**

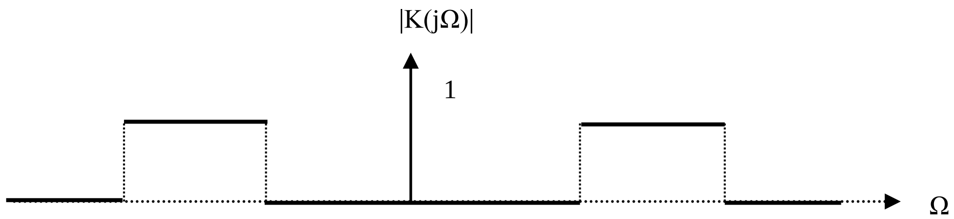


- **Το 2ο σύστημα είναι ένα φίλτρο που θα επιτρέπει τη διέλευση στο σήμα ln(x(t)) και θα κόβει το σήμα $\ln(e^{a(t)})$**. Θεωρούμε **ότι ο MF του σήματος z(t)=ln(x(t)) είναι μη αρνητικός και ορθογώνιος με τον MF του σήματος $k(t)=\ln(e^{a(t)})$** (αυτό σημαίνει ότι: $\int_{\infty}^{\infty} K(j\Omega)Z(j\Omega)=0$ δηλ. το εσωτερικό γινόμενο των 2 MF ισούται με μηδέν) **και υποθέτοντας ότι το σήμα z(t)=ln(x(t)) έχει μηδενικές συχνότητες στα διαστήματα $[-\Omega_2,-\Omega_1]$ και $[\Omega_1, \Omega_2]$ (άρα το $k(t)=\ln(e^{a(t)})$ θα έχει μη μηδενικές συχνότητες στα διαστήματα αυτά).**

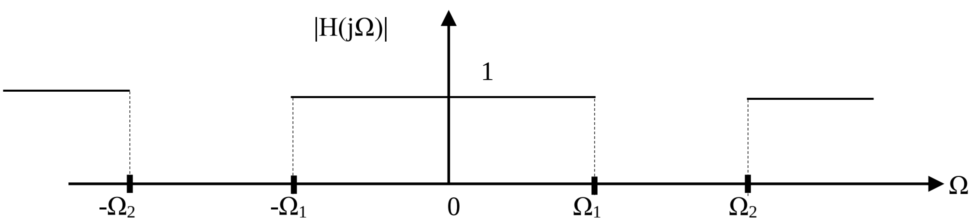
Άρα επιλέγουμε την απόκριση συχνότητας του φίλτρου να είναι 1 στα διαστήματα $[-\Omega_2,-\Omega_1]$ και $[\Omega_1, \Omega_2]$ και 0 στα υπόλοιπα διαστήματα. Συνεπώς η έξοδος του φίλτρου θα είναι μόνο το σήμα z(t)=ln(x(t)) (δηλαδή το Σ2 θα κόψει όλες τις συχνότητες του $k(t)=\ln(e^{a(t)})$ ενώ δεν θα κόψει καμία συχνότητα του z(t)=ln(x(t))).

Οι MF των 2 σημάτων απεικονίζονται ως εξής:

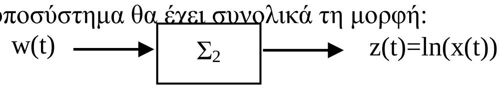




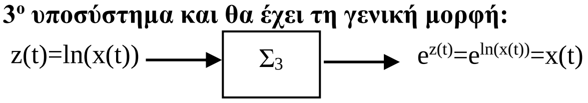
Το 2ο υποσύστημα Σ_2 θα είναι ένα φίλτρο αποκοπής ζώνης με απόκριση συχνότητας



Το 2ο υποσύστημα θα έχει συνολικά τη μορφή:



- **Το 3ο υποσύστημα και θα έχει τη γενική μορφή:**



2.10.8 Θέμα 1 – Ιούνιος 2013

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $h(t)=2\frac{\sin(7\pi t)}{\pi t}\cos\left(2\pi\left(1+l \bmod 2\right)t\right)$ και $x(t)=2\cos(6\pi t)+\sin(8\pi t)$

<u>Απάντηση</u>

Α τρόπος λύσης: l mod 2=0

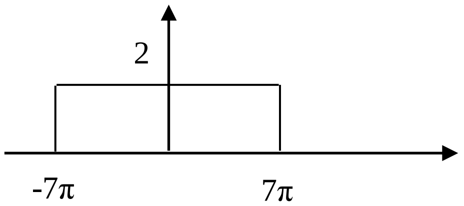
Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι η $h(t)=2\frac{\sin(7\pi t)}{\pi t}\cos(2\pi t)$

✓ **Υπολογίζουμε την απόκριση συχνότητας H(jΩ)**

Παρατηρούμε ότι ο 1ος όρος $\frac{\sin(7\pi t)}{\pi t}$ της h(t) είναι η κρουστική απόκριση κατωπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής

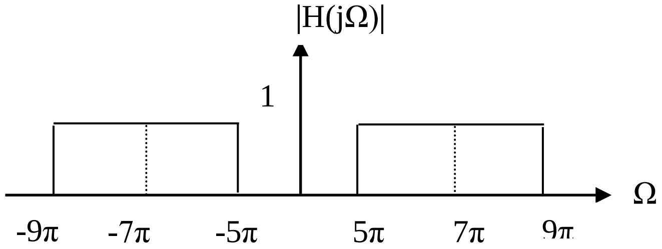
$\Omega_c=7\pi$ δηλ. $h(t)=2\frac{\sin(7\pi t)}{\pi t}\leftrightarrow H(j\Omega)=2\begin{cases}1 & |\Omega|<7\pi\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$

Η γραφική απεικόνιση του MF της $2\frac{\sin(7\pi t)}{\pi t}$ είναι:



$$2\frac{\sin(7\pi t)}{\pi t}\cos(2\pi t)\leftrightarrow 2\begin{cases}1 & |\Omega-7\pi|<2\pi\,,\ |\Omega+7\pi|<2\pi\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

Η γραφική αναπαράσταση του MF της $2\frac{\sin(7\pi t)}{\pi t}\cos(2\pi t)$ είναι:



Παρατηρούμε ότι και οι δύο όροι της εισόδου $x(t)=2\cos(6\pi t)+\sin(8\pi t)$ έχουν συχνότητες που είναι μέσα στα όρια του φίλτρου, άρα περνούν και οι δύο από το φίλτρο οπότε η έξοδος ταυτίζεται με την είσοδο δηλ. y (t) =x(t)

Β Τρόπος λύσης: l mod 2=1

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι η $h(t)=2\frac{\sin(7\pi t)}{\pi t}\cos(4\pi t)$

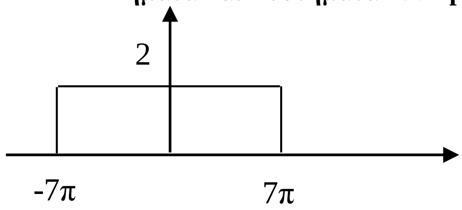
Η έξοδος του συστήματος είναι y(t)=x(t)*h(t)↔ Y(jΩ)=X(jΩ)•H(jΩ). Θα υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς X(jΩ) και H(jΩ) της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης αντίστοιχα.

✓ **Υπολογίζουμε την απόκριση συχνότητας H(jΩ)**

Παρατηρούμε ότι ο 1ος όρος $\frac{\sin(7\pi t)}{\pi t}$ της h(t) είναι η κρουστική απόκριση κατωπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής

$$\Omega_c=7\pi \text{ δηλ. } h(t)=2\frac{\sin(7\pi t)}{\pi t}\leftrightarrow H(j\Omega)=2\begin{cases}1 & |\Omega|<7\pi\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

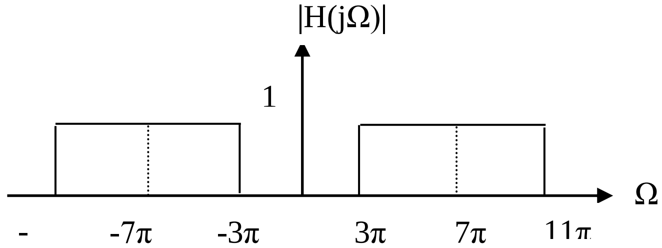
Η γραφική απεικόνιση του MF της $2\frac{\sin(7\pi t)}{\pi t}$ είναι:



Ο όρος $\dfrac{\sin(7\pi t)}{\pi t}$ πολλαπλασιάζεται με το cos(4πt) και σύμφωνα με την ιδιότητα της διαμόρφωσης ισχύει ότι:

$$2\frac{\sin(7\pi t)}{\pi t}\cos(4\pi t) \leftrightarrow 2\begin{cases}1 & |\Omega-7\pi|<4\pi\,,\ |\Omega+7\pi|<4\pi \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

Η γραφική αναπαράσταση του MF της $2\dfrac{\sin(7\pi t)}{\pi t}\cos(4\pi t)$ είναι:



Παρατηρούμε ότι και οι δύο όροι της εισόδου $x(t)=2\cos(6\pi t)+\sin(8\pi t)$ έχουν συχνότητες που είναι μέσα στα όρια του φίλτρου, άρα περνούν και οι δύο από το φίλτρο οπότε η έξοδος ταυτίζεται με την είσοδο δηλ. y(t)=x(t)

2.10.9 Θέμα 1β – Σεπτέμβριος 2013

Αν $h(t)=\dfrac{\cos(10\pi(1+l \bmod 2\ )t)}{\pi t}\sin(3\pi t)$ και $x(t)=\cos(6\pi t)+2\sin(8\pi t)$. Να υπολογιστούν οι συνελίξεις:

α) $h(t)*x(t)$

β) $h(t)*x(t/2)$

γ) $h(t/2)*x(2t)$

Λύση

(β)(15%): Για τη λύση της άσκησης αυτής θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της συνέλιξης, σύμφωνα με το οποίο:

$$y(t)=h(t)*x(t)=\mathcal{F}^{-1}\{Y(j\Omega)\}=\mathcal{F}^{-1}\{H(j\Omega)X(j\Omega)\} \qquad (1)$$

όπου $Z(j\Omega)=\mathcal{F}\{z(t)\}$και $z(t)=\mathcal{F}^{-1}\{Z(j\Omega)\}$ ο ευθύς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του σήματος $z(t)$ αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$cos(A)sin(B)=\frac{1}{2}(sin(A+B)-sin(A-B))$$

για $A=10\pi t,\ B=3\pi t$, η κρουστική απόκριση του συστήματος εκφράζεται ως ακολούθως:

$$h(t)=\frac{sin(13\pi t)}{2\pi t}-\frac{sin(7\pi t)}{2\pi t}$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση που σας δίδεται στο φύλλο θεμάτων, προκύπτει οτι η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι η ακόλουθη[1]:

$$H(j\Omega)=\begin{cases}0.5, & 7\pi<|\Omega|<13\pi \\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}. \qquad (2)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τη σχέση που σας δίνονταν στο φύλλο θεμάτων μπορείτε να υπολογίσετε τα ακόλουθα:

[1]Εναλλακτικά, για τον υπολογισμό της απόκρισης συχνότητας, θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε και την ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα.

1. $x(t) = cos(6\pi t) + 2sin(8\pi t)$:

$$X(j\Omega) = \pi(\delta(\Omega - 6\pi) + \delta(\Omega + 6\pi)) - j2\pi(\delta(\Omega - 8\pi) - \delta(\Omega + 8\pi))$$

   και επομένως από (1) και (2), $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\Omega)\} = sin(8\pi t)$.

2. $\hat{x}(t) = x(t/2) = cos(3\pi t) + 2sin(4\pi t)$. Και οι δύο συχνότητες του σήματος εισόδου είναι εκτός της περιοχής διάβασης της απόκρισης συχνότητας του συστήματος και ως εκ τούτου $y(t) = 0$.

3. $\hat{x}(t) = x(2t) = cos(12\pi t) + 2sin(16\pi t)$. Από την ιδιότητα της κλιμάκωσης του μετασχηματισμού Fourier για $\alpha = 1/2$ έχουμε, $\mathcal{F}\{h(t/2)\} = 2H(j2\Omega)$ και επομένως:

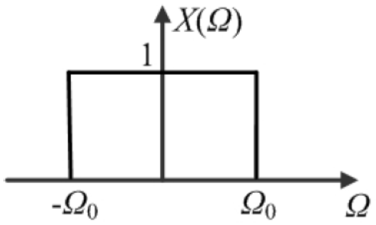
$$H(j\Omega) = \begin{cases} 1, & 3.5\pi < |\Omega| < 6.5\pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} .$$

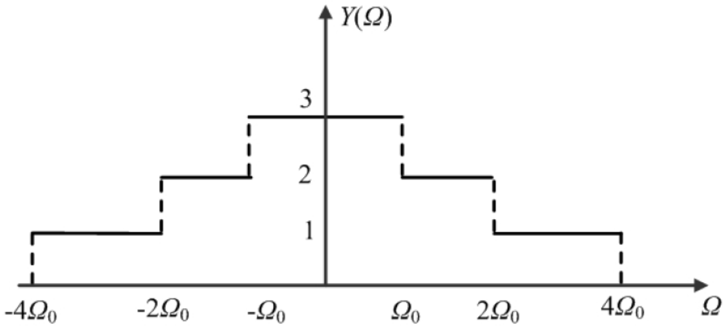
   Όμως, και οι δύο συχνότητες του σήματος εισόδου, και σε αυτή την περίπτωση, είναι εκτός της περιοχής διάβασης της απόκρισης συχνότητας του συστήματος και ως εκ τούτου $y(t) = 0$.

2.11 Ασκήσεις με Ιδιότητες ΜF

2.11.1 Θέμα 2 Σεπτέμβριος 2010

(α): (20%) Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι Μετασχηματισμοί Fourier (MF) των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$. Χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες του MF βρείτε με ποια σχέση συνδέονται τα παραπάνω σήματα.

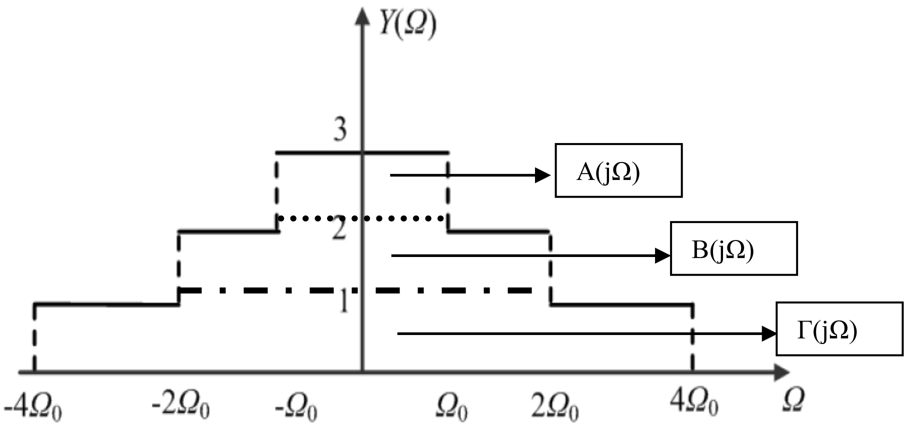




<u>Λύση</u>

(α)

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε 3 MF στο σχήμα αυτό:



Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε 3 MF όπως φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα και να εφαρμόσουμε την ιδιότητα της κλιμάκωσης που έχει τη μορφή $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\Omega}{|a|}\right)$ στους MF B(jΩ) και Γ(jΩ)

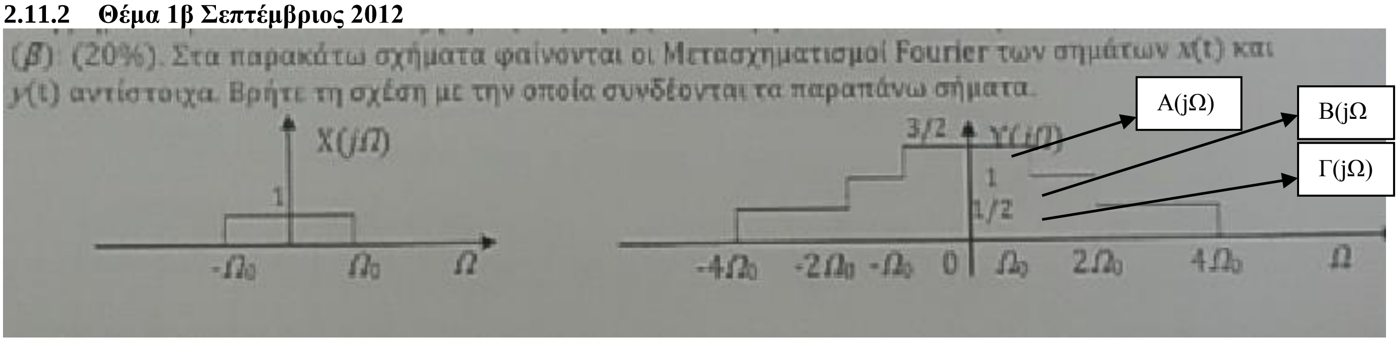
A: $x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$

B: $x(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2} X\left(j\frac{\Omega}{2}\right) \Rightarrow 2x(2t) \leftrightarrow X\left(j\frac{\Omega}{2}\right)$

Γ: $x(4t) \leftrightarrow \frac{1}{4} X\left(j\frac{\Omega}{4}\right) \Rightarrow 4x(4t) \leftrightarrow X\left(j\frac{\Omega}{4}\right)$

Άρα το σήμα y(t)=x(t)+2x(2t)+4x(4t)

2.11.2 Θέμα 1β Σεπτέμβριος 2012



<u>**Λύση**</u>

(α)

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε 3 MF στο σχήμα αυτό και να εφαρμόσουμε την ιδιότητα της κλιμάκωσης

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\Omega}{|a|}\right)$$

A: $x(t) \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow \frac{1}{2} \bullet x(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \bullet X(j\Omega)$ Εφαρμόζω γραμμικότητα και στα 2 μέρη

B: $x(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2} X\left(j\frac{\Omega}{2}\right)$

Γ: $x(4t) \leftrightarrow \frac{1}{4} X\left(j\frac{\Omega}{4}\right) \Rightarrow 2x(4t) \leftrightarrow \frac{1}{2} X\left(j\frac{\Omega}{4}\right)$

Άρα το σήμα εξόδου συναρτήσει της εισόδου μπορεί να γραφεί ως εξής: $y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \bullet x(t) + x(2t) + 2 \bullet x(4t)$

Βασική Παρατήρηση

Για α<1 έχουμε αποσυμπίεση στο χρόνο (διαστολή στο χρόνο) και συμπίεση στο πεδίο της συχνότητας (συστολή στη συχνότητα)

Για α>1 έχουμε συμπίεση στο χρόνο (συστολή στο χρόνο) και αποσυμπίεση στο πεδίο της συχνότητας (διαστολή στη συχνότητα)

2.11.3 Θέμα 2 Ιούνιος 2012

Να υπολογιστούν οι MF των σημάτων

α) t^n

β) $t^n u(t)$

γ) $|t|^n$

<u>**Λύση**</u>

α) t^n

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα παραγώγισης στη συχνότητα δηλ: $t^n x(t) \leftrightarrow j^n \frac{d^n X(j\Omega)}{d\Omega^n}$

Με x(t)=1 προκύπτει ότι: $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$ και συνεπώς: $t^n \bullet 1 \leftrightarrow j^n \frac{d^n(2\pi\delta(\Omega))}{d\Omega^n}$ (1)

Υπολογίζουμε τη n-οστή παράγωγο $\frac{d^n(2\pi\delta(\Omega))}{d\Omega^n}$ ως εξής:

$[2\pi\delta(\Omega)]^{(1)} = 2\pi\delta'(\Omega)$

$[2\pi\delta(\Omega)]^{(2)} = 2\pi\delta''(\Omega)$

…………………………………

$[2\pi\delta(\Omega)]^{(n)} = 2\pi\delta^{(n)}(\Omega)(2)$

Αντικαθιστούμε τη (2) στην (1) και προκύπτει: $t^n \leftrightarrow j^n 2\pi\delta^{(n)}(\Omega)$

β) $t^n \bullet u(t)$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα παραγώγισης στη συχνότητα δηλ: $t^n x(t) \leftrightarrow j^n \dfrac{d^n X(j\Omega)}{d\Omega^n}$

Επειδή x(t)=u(t) προκύπτει ότι: $u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$ και συνεπώς: $t^n \bullet u(t) \leftrightarrow j^n \dfrac{d^n}{d\Omega^n}\left(\dfrac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right)$ (1)

Υπολογίζουμε τη n-οστή παράγωγο $\dfrac{d^n}{d\Omega^n}\left(\dfrac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right)$ ως εξής:

$$\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right]^{(1)} = j\frac{1}{\Omega^2} + \pi\delta'(\Omega)$$

$$\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right]^{(2)} = -j\frac{1\bullet 2}{\Omega^3} + \pi\delta''(\Omega)$$

$$\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right]^{(3)} = j\frac{1\bullet 2\bullet 3}{\Omega^4} + \pi\delta'''(\Omega)$$

....

$$\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right]^{(n)} = j(-1)^{n-1}\frac{1\bullet 2\bullet 3\bullet....\bullet n}{\Omega^{n+1}} + \pi\delta^{(n)}(\Omega) = j(-1)^{n-1}\frac{n!}{\Omega^{n+1}} + \pi\delta^{(n)}(\Omega)(2)$$

Αντικαθιστούμε τη (2) στην (1) και προκύπτει: $\boxed{t^n \bullet u(t) \leftrightarrow j^n\left[j\bullet(-1)^{n-1}\dfrac{n!}{\Omega^{n+1}} + \pi\delta^{(n)}(\Omega)\right]}$

γ)|t|^n

Η |t|^n μπορεί να γραφεί ως εξής: $|t|^n = \begin{cases} t^n \mathrm{sign}(t) & n = \text{περιττός} \\ t^n & n = \text{άρτιος} \end{cases}$

<u>Αν n=περιττός</u>

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα παραγώγισης στη συχνότητα δηλ: $t^n x(t) \leftrightarrow j^n \dfrac{d^n X(j\Omega)}{d\Omega^n}$

Το x(t)=sign(t), $\mathrm{sign}(t) \leftrightarrow \dfrac{2}{j\Omega} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{sign}(t)}{2} \leftrightarrow \dfrac{1}{j\Omega}$ και συνεπώς: $t^n \bullet \dfrac{\mathrm{sign}(t)}{2} \leftrightarrow j^n \bullet \dfrac{d^n}{d\Omega^n}\left(\dfrac{1}{j\Omega}\right)$(1)

Υπολογίζουμε τη n-οστή παράγωγο του $\dfrac{1}{j\Omega}$ ως εξής:

- Η 1η παράγωγος του $\dfrac{1}{j\Omega}$ είναι: $\dfrac{-j}{j^2\Omega^2} = \dfrac{j}{\Omega^2}$
- Η 2η παράγωγος του $\dfrac{1}{j\Omega}$ είναι: $\dfrac{-j2\Omega}{\Omega^4} = \dfrac{-1\bullet 2\bullet j}{\Omega^3}$
- Η 3η παράγωγος του $\dfrac{1}{j\Omega}$ είναι: $\dfrac{2\bullet j\bullet 3\Omega^2}{\Omega^6} = \dfrac{1\bullet 2\bullet 3\bullet j}{\Omega^4}$
- Η 4η παράγωγος του $\dfrac{1}{j\Omega}$ είναι: $\dfrac{-1\bullet 2\bullet 3\bullet j\bullet 4\bullet\Omega^3}{\Omega^8} = \dfrac{-1\bullet 2\bullet 3\bullet 4\bullet j}{\Omega^5}$

……………………………………………………..…………………………………………..

- Η n-οστή παράγωγος του $\dfrac{1}{j\Omega}$ είναι: $\dfrac{(-1)^{n-1}1\bullet 2\bullet 3\bullet...\bullet n\bullet j}{\Omega^{n+1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}\bullet n!\bullet j}{\Omega^{n+1}}$ (2)

Αντικαθιστούμε τη (2) στην (1) και προκύπτει:

$$\boxed{t^n \bullet \frac{\text{sign}(t)}{2} \leftrightarrow j^n \bullet \left[\frac{(-1)^{n-1} \bullet n! \bullet j}{\Omega^{n+1}}\right] = \frac{(-1)^{n-1} \bullet n! \bullet j^{n+1}}{\Omega^{n+1}} \Rightarrow t^n \bullet \text{sign}(t) \leftrightarrow \frac{2 \bullet (-1)^{n-1} \bullet n! \bullet j^{n+1}}{\Omega^{n+1}}}$$

<u>Αν n=άρτιος</u>

Είναι το ερώτημα α) στο οποίο βρήκαμε ότι $t^n \leftrightarrow j^n 2\pi\delta^{(n)}(\Omega)$

2.11.4 Άσκηση με ιδιότητες MF

Να υπολογιστούν οι MF των παρακάτω συναρτήσεων

i. $x(t) = t^n e^{-(b+j\Omega_0)t} u(t)$

ii. $x(t) = t^n e^{(b+j\Omega_0)t} u(-t)$

iii. $x(t) = e^{-c|t|} \quad c > 0$

iv. $x(t) = \frac{1}{c^2+t^2}$

<u>Λύση</u>

i)

Πρώτα βρίσκουμε τον MF του σήματος $e^{-(b+j\Omega_0)t}u(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(b+j\Omega_0)t}u(t) \bullet e^{-j\Omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(b+j\Omega_0+j\Omega)t}dt = \frac{1}{-(b+j\Omega_0+j\Omega)}\left[\int_0^{\infty} e^{-(b+j\Omega_0+j\Omega)t}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{(b+j\Omega_0+j\Omega)}(0-1) =$$

$$= \frac{1}{(b+j\Omega_0+j\Omega)}$$

Μετά εφαρμόζουμε την ιδιότητα παραγώγισης στη συχνότητα $t^n \bullet x(t) \leftrightarrow j^n \bullet \frac{d^n X(j\Omega)}{d\Omega^n}$

$$t^n \bullet e^{-(b+j\Omega_0)t} \leftrightarrow j^n \bullet \frac{d^n\left(\frac{1}{b+j\Omega_0+j\Omega}\right)}{d\Omega^n} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{b+j\Omega_0+j\Omega}\right)' = -\frac{j}{(b+j\Omega_0+j\Omega)^2}$$

$$\left(\frac{1}{b+j\Omega_0+j\Omega}\right)'' = \frac{2j^2}{(b+j\Omega_0+j\Omega)^3}$$

$$\left(\frac{1}{b+j\Omega_0+j\Omega}\right)''' = -\frac{2 \bullet 3 \bullet j^3}{(b+j\Omega_0+j\Omega)^4}$$

……………………………………………

$$\left(\frac{1}{b+j\Omega_0+j\Omega}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \bullet n! \bullet j^n}{(b+j\Omega_0+j\Omega)^{n+1}}$$

Άρα από την (1) προκύπτει:

$$t^n \bullet e^{-(b+j\Omega_0)t}u(t) \leftrightarrow j^n \bullet \frac{(-1)^{n-1} \bullet n! \bullet j^n}{(b+j\Omega_0+j\Omega)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n-1} \bullet n! \bullet j^{2n}}{(b+j\Omega_0+j\Omega)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n-1} \bullet n! \bullet (-1)^n}{(b+j\Omega_0+j\Omega)^{n+1}} = -\frac{n!}{(b+j\Omega_0+j\Omega)^{n+1}} \quad (1)$$

ii)

Πρώτα βρίσκουμε τον MF του σήματος $e^{(b+j\Omega_0)t}u(-t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(b+j\Omega_0)t}u(-t)\bullet e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(b+j\Omega_0-j\Omega)t}dt = \frac{1}{(b+j\Omega_0+j\Omega)}\left[\int_{0}^{\infty} e^{(b+j\Omega_0-j\Omega)t}\right]_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{(b+j\Omega_0-j\Omega)}(0-1) =$$

$$= \frac{1}{(b+j\Omega_0 - j\Omega)}$$

Μετά εφαρμόζουμε την ιδιότητα παραγώγισης στη συχνότητα $t^n \bullet x(t) \leftrightarrow j^n \bullet \frac{d^n X(j\Omega)}{d\Omega^n}$

$$t^n \bullet e^{(b+j\Omega_0)t}u(-t) \leftrightarrow j^n \bullet \frac{d^n}{d\Omega^n}\left(\frac{1}{b+j\Omega_0-j\Omega}\right) \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{b+j\Omega_0-j\Omega}\right)' = \frac{j}{(b+j\Omega_0-j\Omega)^2}$$

$$\left(\frac{1}{b+j\Omega_0-j\Omega}\right)'' = \frac{2j^2}{(b+j\Omega_0-j\Omega)^3}$$

$$\left(\frac{1}{b+j\Omega_0+j\Omega}\right)''' = -\frac{2\bullet 3\bullet j^3}{(b+j\Omega_0-j\Omega)^4}$$

…………………………………………………

$$\left(\frac{1}{b+j\Omega_0+j\Omega}\right)^{(n)} = \frac{n!\bullet j^n}{(b+j\Omega_0-j\Omega)^{n+1}}$$

Άρα από την (1) προκύπτει:

$$t^n \bullet e^{(b+j\Omega_0)t}u(-t) \leftrightarrow j^n \bullet \frac{n!\bullet j^n}{(b+j\Omega_0-j\Omega)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(b+j\Omega_0+j\Omega)^{n+1}} \quad (1)$$

iii)

Για να βρούμε το MF της $x(t) = e^{-c|t|}$ με c>0παίρνουμε τον ορισμό του MF:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c|t|}\bullet e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{ct}e^{-j\Omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-ct}e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t(c-j\Omega)}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t(c+j\Omega)}dt =$$

$$= \frac{1}{(c-j\Omega)}\left[e^{t(c-j\Omega)}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-(c+j\Omega)}\left[e^{-t(c+j\Omega)}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{(c-j\Omega)}(1-0) - \frac{1}{(c+j\Omega)}(0-1) = \frac{1}{(c-j\Omega)} + \frac{1}{(c+j\Omega)} = \frac{2c}{c^2+\Omega^2}$$

iv)

Από το προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι: $e^{-c|t|} \leftrightarrow \frac{2c}{c^2+\Omega^2}$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα της δυϊκότητας και προκύπτει:

$e^{-c\lvert t\rvert} \leftrightarrow$	$\frac{2c}{c^2+\Omega^2}$
$\frac{2c}{c^2+t^2} \leftrightarrow$	$2\pi\bullet e^{-c\lvert -\Omega\rvert} = 2\pi\bullet e^{-c\lvert\Omega\rvert}$
$\frac{1}{c^2+t^2} \leftrightarrow$	$\frac{2\pi}{2c}\bullet e^{-c\lvert\Omega\rvert} = \frac{\pi}{c}\bullet e^{-c\lvert\Omega\rvert}$

Άρα $\frac{1}{c^2+t^2} \leftrightarrow \frac{\pi}{c}\bullet e^{-c|\Omega|}$

Παρατήρηση

Η ιδιότητα της δυϊκότητας εφαρμόζεται στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1.Στον υπολογισμό του MF του σήματος x(t)=1

2.Όταν η συνάρτηση για την οποία ζητάμε το MF της συμβολίζεται ως X(t)

3.Στον υπολογισμό του MF του σήματος $x(t)=\dfrac{1}{c^2+t^2}$

2.11.5 Άσκηση με ιδιότητα παραγώγισης MF

Να αποδείξετε ότι ο MF του σήματος $x(t)=t^n e^{-bt}u(t)$ είναι ο $X(j\Omega)=\dfrac{n!}{(b+j\Omega)^{n+1}}$

<u>Λύση</u>

Υπολογίζουμε την n-οστή παράγωγο του $\dfrac{1}{b+j\Omega}$ δηλαδή τη $\dfrac{d^n}{d\Omega^n}\left(\dfrac{1}{b+j\Omega}\right)$

$$\left(\frac{1}{b+j\Omega}\right)^{(1)}=\frac{-j}{(b+j\Omega)^2}$$

$$\left(\frac{1}{b+j\Omega}\right)^{(2)}=\frac{j2(b+j\Omega)j}{(b+j\Omega)^4}=\frac{2j^2}{(b+j\Omega)^3}$$

$$\left(\frac{1}{b+j\Omega}\right)^{(3)}=\frac{-2j^2 3(b+j\Omega)^2 j}{(b+j\Omega)^6}=\frac{-2\bullet 3\bullet j^3}{(b+j\Omega)^4}$$

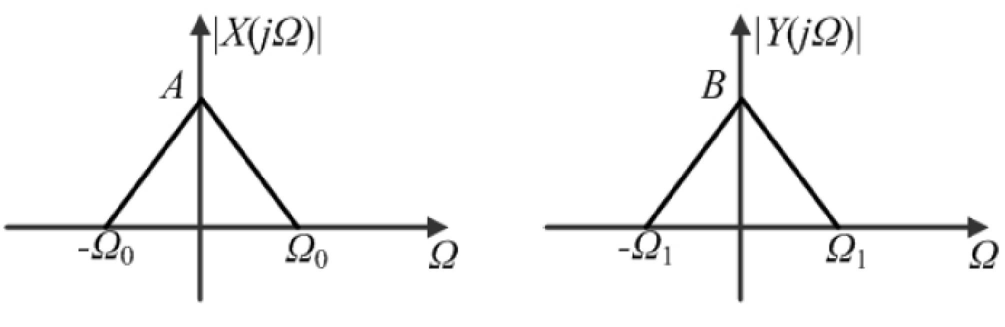
……………………………………………

$$\left(\frac{1}{b+j\Omega}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n\bullet n!\bullet j^n}{(b+j\Omega)^{n+1}}$$

Συνεπώς: $\boxed{F\left(t^n e^{-bt}u(t)\right)=j^n\bullet\dfrac{(-1)^n n!\, j^n}{(b+j\Omega)^{n+1}}=\dfrac{n!}{(b+j\Omega)^{n+1}}}$

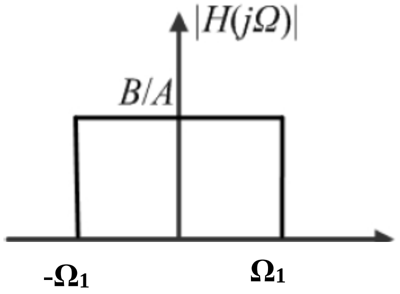
2.11.6 Θέμα 2 Σεπτέμβριος 2002

Θεωρείστε ένα σύστημα με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$. Θεωρείστε επίσης ότι τα μέτρα των Μετασχηματισμών Fourier $X(j\Omega), Y(j\Omega)$ της εισόδου και της αντίστοιχης εξόδου του συστήματος είναι όπως του παρακάτω σχήματος:



Βρείτε κάτω από ποιες προϋποθέσεις το εν λόγω σύστημα είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο και προσδιορίστε τη μορφή της απόκρισης συχνότητάς του.

<u>Λύση</u>



Το χαρακτηριστικό ενός ΓΧΑ συστήματος είναι ότι δεν προσθέτει νέες συχνότητες στο σήμα εισόδου. Είτε περνά αναλλοίωτη τη συχνότητα του σήματος εισόδου είτε κόβει συχνότητες από το σήμα εισόδου, αλλά ποτέ δεν προσθέτει νέες συχνότητες στο σήμα εισόδου (δηλ. δεν «γεννά» νέες συχνότητες). Άρα για να είναι ΓΧΑ το σύστημα θα πρέπει $\Omega_1<\Omega_0$.

2.11.7 Άσκηση 8 με ιδιότητες MF -Θέμα 2 Ιούνιος 2013

(α)Υπολογίστε τους MF των σημάτων $x(t)=t^n$, $x(t)=t^n u(t)$, $x(t)=\mathrm{sign}(t)$

<u>Λύση</u>

i) Εφαρμόζουμε την ιδιότητα παραγώγισης στη συχνότητα δηλ: $t^n x(t) \leftrightarrow j^n \dfrac{d^n X(j\Omega)}{d\Omega^n}$

Με x(t)=1 προκύπτει ότι: $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$ και συνεπώς: $t^n \bullet 1 \leftrightarrow j^n \dfrac{d^n(2\pi\delta(\Omega))}{d\Omega^n}$ (1)

Υπολογίζουμε τη n-οστή παράγωγο $\dfrac{d^n(2\pi\delta(\Omega))}{d\Omega^n}$ ως εξής:

$$\left[2\pi\delta(\Omega)\right]^{(1)} = 2\pi\delta'(\Omega)$$
$$\left[2\pi\delta(\Omega)\right]^{(2)} = 2\pi\delta''(\Omega)$$

....

$$\left[2\pi\delta(\Omega)\right]^{(n)} = 2\pi\delta^{(n)}(\Omega)(2)$$

Αντικαθιστούμε τη (2) στην (1) και προκύπτει: $\boxed{t^n \leftrightarrow j^n 2\pi\delta^{(n)}(\Omega)}$

ii) Εφαρμόζουμε την ιδιότητα παραγώγισης στη συχνότητα δηλ: $t^n x(t) \leftrightarrow j^n \dfrac{d^n X(j\Omega)}{d\Omega^n}$

Επειδή x(t)=u(t) προκύπτει ότι: $u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$ και συνεπώς: $t^n \bullet u(t) \leftrightarrow j^n \dfrac{d^n}{d\Omega^n}\left(\dfrac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right)$(1)

Υπολογίζουμε τη n-οστή παράγωγο $\dfrac{d^n}{d\Omega^n}\left(\dfrac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right)$ ως εξής:

$$\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right]^{(1)} = j\frac{1}{\Omega^2} + \pi\delta'(\Omega)$$

$$\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right]^{(2)} = -j\frac{1\bullet 2}{\Omega^3} + \pi\delta''(\Omega)$$

$$\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right]^{(3)} = j\frac{1\bullet 2\bullet 3}{\Omega^4} + \pi\delta'''(\Omega)$$

....

$$\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right]^{(n)} = j(-1)^{n-1}\frac{1\bullet 2\bullet 3\bullet ....\bullet n}{\Omega^{n+1}} + \pi\delta^{(n)}(\Omega) = j(-1)^{n-1}\frac{n!}{\Omega^{n+1}} + \pi\delta^{(n)}(\Omega)(2)$$

Αντικαθιστούμε τη (2) στην (1) και προκύπτει: $\boxed{t^n \bullet u(t) \leftrightarrow j^n\left[j\bullet(-1)^{n-1}\dfrac{n!}{\Omega^{n+1}}+\pi\delta^{(n)}(\Omega)\right]}$

iii) $x(t)=\text{sign}(t)$

ΠΡΟΣΟΧΗ: ΣΤΗΝ ΕΚΦΩΝΗΣΗ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΔΙΝΕ ΤΗΝ ΑΚΟΛΟΥΘΗ ΥΠΟΔΕΙΞΗ:
Οι μόνοι μετασχηματισμοί που δίνονται είναι οι:

$$1.F\left\{\frac{\sin(\Omega_0 t)}{\pi t}\right\}=\begin{cases}1 & |\Omega|<\Omega_0\\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

$$2.F\{u(t)\}\leftrightarrow \pi\delta(\Omega)+\frac{1}{j\Omega}$$

$$3.F\left\{e^{-j\Omega_k t}u(t)\right\}\leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega+\Omega_k)$$

$$4.L\left\{e^{at}u(t)\right\}\leftrightarrow\frac{1}{s-a}\ \text{Re}(s)>\text{Re}(a)$$

ΑΥΤΟ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΟΤΙ Ο ΤΡΟΠΟΣ ΜΕ ΤΟΝ ΟΠΟΙΟ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΙ Ο MF ΤΗΣ sign(t) ΕΙΝΑΙ Ο ΕΞΗΣ:

Α ΤΡΟΠΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ MF ΤΗΣ sign(t)

$$u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{sign}(t)\Rightarrow u(t)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{sign}(t)\Rightarrow 2u(t)-1=\text{sign}(t)$$

$$u(t)\leftrightarrow\pi\delta(\Omega)+\frac{1}{j\Omega}$$

$$2u(t)\leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)+\frac{2}{j\Omega}$$

$$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$$

$$2u(t)-1=\text{sign}(t)\leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)+\frac{2}{j\Omega}-2\pi\delta(\Omega)=\frac{2}{j\Omega}$$

$$\text{Άρα}\ \text{sign}(t)\leftrightarrow\frac{2}{j\Omega}$$

Β ΤΡΟΠΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ MF ΤΗΣ sign(t)

Υπολογισμός MF της συνάρτησης προσήμου sgn(t)

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\bullet e^{-j\Omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\text{sgn}(t)\bullet e^{-j\Omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}-e^{-j\Omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-j\Omega t}dt=$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-j\Omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-j\Omega t}dt=2\int_{0}^{\infty}e^{-j\Omega t}dt=2\frac{1}{-j\Omega}\left[e^{-j\Omega t}\right]_0^{\infty}=-\frac{2}{j\Omega}\left(e^{-\infty}-e^{0}\right)=\frac{2}{j\Omega}$$

<u>Γ ΤΡΟΠΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ MF ΤΗΣ sign(t) ΜΕ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ</u>

Ξεκινάμε από την ισότητα $\text{sign}(t)=2u(t)-1$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει η ασθενής ισότητα κατανομών $\text{sign}^{(1)}(t)=2\delta(f)$.
Παίρνουμε μετασχηματισμό Fourier και στα 2 μέρη της τελευταίας ισότητας και προκύπτει ότι:

$$F\left\{\text{sign}^{(1)}(t)\right\}=F\{2\delta(t)\}=2F\{\delta(t)\}=2$$

Από ιδιότητα παραγώγισης στο χρόνο ισχύει ότι: $F\left\{sign^{(1)}(t)\right\}=j\Omega\bullet X(j\Omega)$.
Επειδή τα αριστερά μέρη των 2 τελευταίων ισοτήτων είναι ίσα, άρα και τα δεξιά μέρη είναι ίσα οπότε

$$j\Omega\bullet X(j\Omega)=2\Rightarrow X(j\Omega)=\frac{2}{j\Omega}$$

Αφού είπαμε ότι ισχύει η ασθενής ισότητα μεταξύ των κατανομών καταλήγουμε στη σχέση $X(j\Omega)=\dfrac{2}{j\Omega}+\lambda\delta(\Omega)$.

Άρα πρέπει να υπολογίσουμε το λ. Παίρνουμε το MF της sign(t).

$$F\{sign(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} sign(t) \bullet e^{-jt\Omega} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} sign(t) \bullet (\cos(\Omega t) - j\sin(\Omega t))dt = \int_{-\infty}^{\infty} sign(t) \bullet \cos(\Omega t)dt - j\int_{-\infty}^{\infty} sign(t) \bullet \cos(\Omega t)dt$$

Παίρνουμε τον 1ο όρο $\int_{-\infty}^{\infty} sign(t) \bullet \cos(\Omega t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} odd \bullet even = \int_{-\infty}^{\infty} odd = 0$

Άρα $Re\{F\{sign(t)\}\} = 0$. Συνεπώς προκύπτει ότι $X(j\Omega) = \frac{2}{j\Omega}$

2.11.8 Άσκηση 5 στο Project 2014

5. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες της ιδιάζουσας κατανομής $\delta(t)$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(α) η ιδιάζουσα κατανομή $\delta(t)$ είναι άρτια

(β) $\delta(t) = u^{(1)}(t)$ όπου $u(t)$ η βηματική συνάρτηση

(γ) αν $tf(t) = tg(t)$ με $f(t)$, $g(t)$ κατανομές, τότε $f(t) = g(t) + \lambda\delta(t)$, $\lambda \in \mathcal{R}$.

<u>Λύση</u>

α) Η συνάρτηση δέλτα ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα κλιμάκωσης για μια μη μηδενική παράμετρο α

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)\, \frac{du}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|}$$

Από την οποία προκύπτει ότι:

$$\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}.$$

Όπως προκύπτει από την προηγούμενη ιδιότητα η συνάρτηση δέλτα είναι μια άρτια συνάρτηση διότι $\delta(-x) = \delta(x)$

β) Η βηματική συνάρτηση u(t) ορίζεται ως εξής:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \\ \text{δεν ορίζεται} & t = 0 \end{cases}$$

Η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης u(t) είναι η εξής:

$$du(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{δεν ορίζεται} & t = 0 \end{cases}$$

Ερμηνεύοντας την u(t) ως κατανομή προκύπτει: $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi(t)dt = \int_{0}^{\infty} \varphi(t)dt \equiv N_u[\varphi(t)]$

Από ορισμό παραγώγου προκύπτει ότι:

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du(t)}{dt}\varphi(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\frac{d\varphi(t)}{dt}dt = -\int_{0}^{\infty} \frac{d\varphi(t)}{dt}dt = \varphi(0) - \varphi(\infty) = \varphi(0)$ για $\varphi(t)$ περιορισμένου εύρους. Άρα $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$

γ)Αν t•f(t)=t•g(t) θα δείξουμε ότι $f(\mathrm{t}) = g(\mathrm{t}) + \lambda\delta(\mathrm{t})$

Για να ορίσουμε 2 κατανομές ίσες πρέπει ∀φ να ισχύει ότι: $< f,\phi >=< g,\phi >$

Άρα $< \mathrm{g} + \lambda\delta, \varphi >=< \mathrm{g}, \varphi > + < \lambda\delta, \varphi >$

$< \mathrm{tg} + \lambda \mathrm{t}\delta, \varphi >=< \mathrm{tg}, \varphi > + < \lambda \mathrm{t}\delta, \varphi >$

Όμως $< \mathrm{t}\lambda\delta, \varphi >= \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathrm{t}) \bullet \mathrm{t} \bullet \varphi(\mathrm{t}) \bullet \mathrm{dt} = \lambda \bullet \mathrm{t} \bullet \varphi(\mathrm{t})\Big|_{t=0} = 0$

Άρα $< \mathrm{tg} + \mathrm{t}\lambda\delta, \varphi =< \mathrm{tg}, \varphi >$ και επειδή t•f(t)=t•g(t) άρα $< \mathrm{tg} + \mathrm{t}\lambda\delta, \varphi >=< \mathrm{tf}, \varphi >$ συνεπώς $f(t) = \mathrm{g}(t) + \lambda\delta(t)$

2.11.9 Άσκηση 1 Φροντιστήριο 2013

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του γινομένου **sign(t)•cos(Ω₀t)**

<u>Λύση</u>

<u>Α τρόπος επίλυσης με ιδιότητα συνέλιξης στη μιγαδική συχνότητα</u>

Σύμφωνα με την ιδιότητα: $x(t)\bullet y(t)\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\bullet\left[X(j\Omega)*Y(j\Omega)\right]$ προκύπτει ότι:

$$\mathrm{sign}(t)\bullet\cos(\Omega_0 t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\bullet\left[\frac{2}{j\Omega}*\left(\pi\delta(\Omega+\Omega_0)+\pi\delta(\Omega-\Omega_0)\right)\right]\Rightarrow$$

$$\mathrm{sign}(t)\bullet\cos(\Omega_0 t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\bullet\left[\frac{2}{j\Omega}*\pi\delta(\Omega+\Omega_0)+\frac{2}{j\Omega}*\pi\delta(\Omega-\Omega_0)\right]\Rightarrow$$

$$\mathrm{sign}(t)\bullet\cos(\Omega_0 t)\leftrightarrow\left[\frac{1}{j(\Omega-\Omega_0)}+\frac{1}{(\Omega+\Omega_0)}\right]\Rightarrow\mathrm{sign}(t)\bullet\cos(\Omega_0 t)\leftrightarrow\frac{1}{j(\Omega-\Omega_0)}+\frac{1}{j(\Omega+\Omega_0)}$$

<u>Β τρόπος επίλυσης με ιδιότητα διαμόρφωσης</u>

$$x(t)\bullet\cos(\Omega_0 t)\leftrightarrow\frac{1}{2}\bullet\left[X(j(\Omega+\Omega_0))+X(j(\Omega-\Omega_0))\right]$$

$$\mathrm{sign}(t)\bullet\cos(\Omega_0 t)\leftrightarrow\frac{1}{2}\bullet\left[\frac{2}{j(\Omega+\Omega_0)}+\frac{2}{j(\Omega-\Omega_0)}\right]$$ όπου $\mathrm{sign}(t)\leftrightarrow\frac{2}{j\Omega}$

2.11.10 Άσκηση τελευταίου Φροντιστηρίου 2014

Να αποδείξετε την **ιδιότητα της διαφόρισης (παραγώγισης) στη μιγαδική συχνότητα**.

<u>Λύση</u>

Θέλουμε να αποδείξουμε την ιδιότητα $t^n\bullet f(t)\leftrightarrow j^n\bullet F^{(n)}(j\Omega)=j^n\bullet\frac{d^nF(j\Omega)}{d\Omega^n}$

Έστω ότι $F(j\Omega)=F\{f(t)\}$

$$F^{(1)}(j\Omega)=\frac{dF(j\Omega)}{d\Omega}=\frac{d}{d\Omega}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\bullet e^{-jt\Omega}dt\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\bullet(-jt)\bullet e^{-jt\Omega}dt=-j\int_{-\infty}^{\infty}t\bullet f(t)\bullet e^{-jt\Omega}dt=-j\bullet F\{t\bullet f(t)\}$$

$$F^{(2)}(j\Omega)=\frac{d^2}{d\Omega^2}F(j\Omega)=-j\frac{d}{d\Omega}\int_{-\infty}^{\infty}tf(t)e^{-jt\Omega}dt=-j\bullet\int_{-\infty}^{\infty}-j\bullet t^2\bullet f(t)\bullet e^{-jt\Omega}dt=(-j)^2\bullet F\{t^2\bullet f(t)\}$$

………………………………………………………………………………………………………

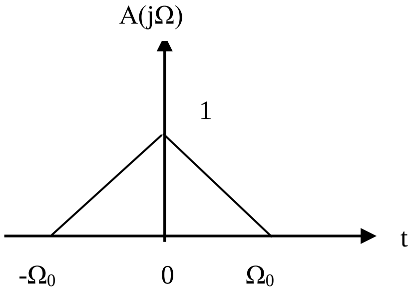
$$F^{(n)}(j\Omega)=(-j)^nF\{t^nf(t)\}\Rightarrow F\{t^n\bullet f(t)\}=\frac{F^{(n)}(j\Omega)}{(-j)^n}\Rightarrow F\{t^n\bullet f(t)\}=\frac{F^{(n)}(j\Omega)}{(-1)^n\bullet j^n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\{t^n\bullet f(t)\}=\frac{F^{(n)}(j\Omega)\bullet j^n}{(-1)^n\bullet j^n\bullet j^n}\Rightarrow F\{t^n\bullet f(t)\}=\frac{F^{(n)}(j\Omega)\bullet j^n}{(-1)^n\bullet\left(j^{2^n}\right)}\Rightarrow F\{t^n\bullet f(t)\}=\frac{F^{(n)}(j\Omega)\bullet j^n}{(-1)^n\bullet(-1)^n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\{t^n\bullet f(t)\}=j^n\bullet F^{(n)}(j\Omega)$$

2.11.11 Θέμα 1 Ιούνιος 2014

Δίνεται **το μη γραμμικό σύστημα** $y(t)=x(t)+2x^2(t)$ με $x(t)=r\bullet\alpha(t)+c\bullet\cos(10\pi\bullet f_0\bullet t)$ και α(t) ένα σήμα συνεχούς χρόνου του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Χρησιμοποιώντας **ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier να υπολογίσετε και να παραστήσετε γραφικά τους μετασχηματισμούς Fourier των σημάτων x(t) και y(t)**

<u>Λύση</u>

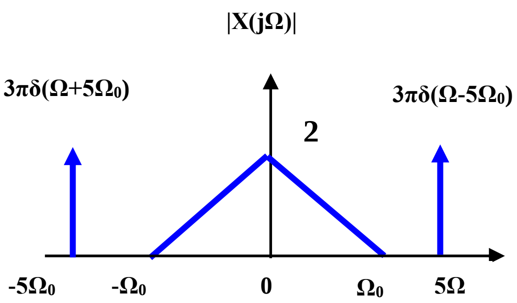
Για r=2 και c=3 η είσοδος είναι $x(t)=2\bullet\alpha(t)+3\bullet\cos(10\pi\bullet f_0\bullet t)$ όπου α(t) ένα σήμα συνεχούς χρόνου και $\Omega_0=10\pi f_0$.

Θέτουμε όπου $f_0=\dfrac{\Omega_0}{2\pi}$ και προκύπτει ότι $x(t)=2\bullet\alpha(t)+3\bullet\cos\left(10\pi\dfrac{\Omega_0}{2\pi}t\right)\Rightarrow x(t)=2\bullet\alpha(t)+3\bullet\cos(5\Omega_0 t)$

Για να υπολογίσουμε το MF του x(t) παίρνουμε MF και στα 2 μέρη της $x(t)$ **και προκύπτει το εξής:**

$$\boxed{X(j\Omega)=2\bullet A(j\Omega)+3\bullet[\pi(\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0))]\Rightarrow X(j\Omega)=2\bullet A(j\Omega)+3\bullet\pi\delta(\Omega-5\Omega_0)+3\bullet\pi\delta(\Omega+5\Omega_0)}$$

Γραφικά ο MF του x(t) είναι ο ακόλουθος:



Για να υπολογίσουμε το MF του y(t) παίρνουμε MF και στα 2 μέρη της $y(t)=x(t)+2x^2(t)$ **και προκύπτει το εξής:**

$$Y(j\Omega)=X(j\Omega)+2\frac{1}{2\pi}(X(j\Omega)*X(j\Omega))\Rightarrow$$

$$Y(j\Omega)=X(j\Omega)+2\bullet\frac{1}{2\pi}(X(j\Omega)*X(j\Omega))=$$

$$=2A(j\Omega)+3\pi\delta(\Omega-5\Omega_0)+3\pi\delta(\Omega+5\Omega_0)+\frac{1}{\pi}\bullet$$

$$[(2A(j\Omega)+3\pi\delta(\Omega-5\Omega_0)+3\pi\delta(\Omega+5\Omega_0))*(2A(j\Omega)+3\pi\delta(\Omega-5\Omega_0)+3\pi\delta(\Omega+5\Omega_0))]\Rightarrow$$

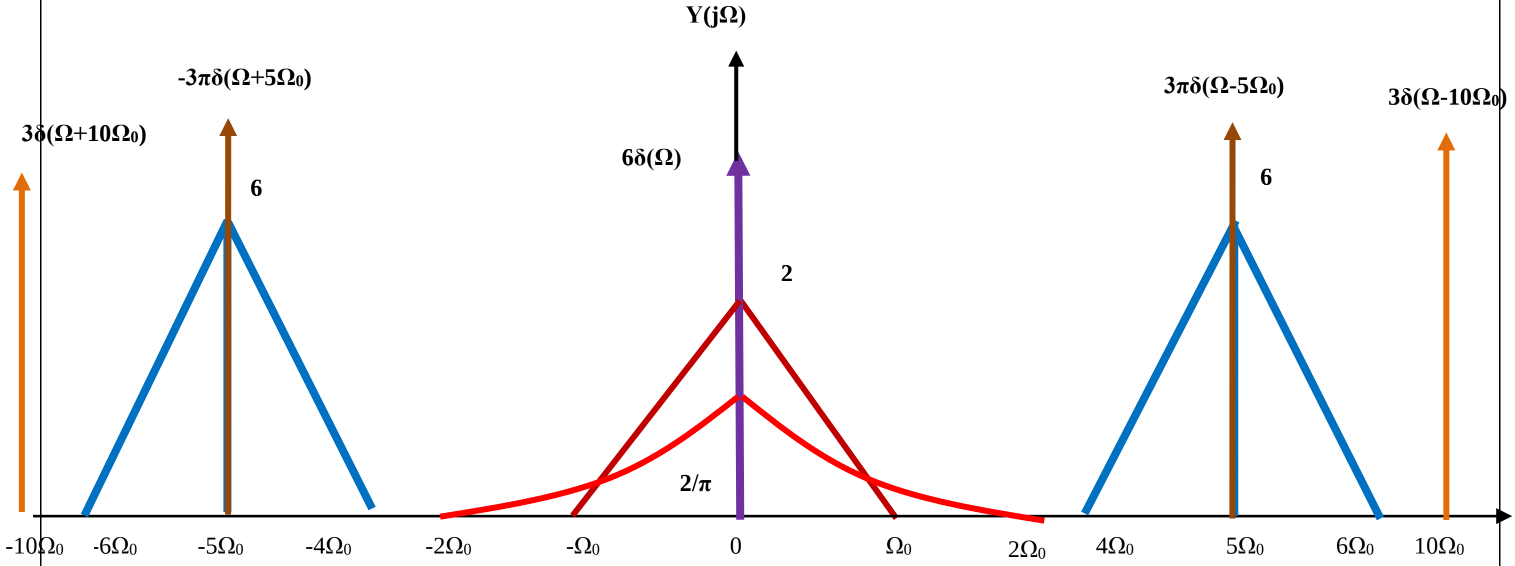
$$Y(j\Omega)=2A(j\Omega)+3\pi\delta(\Omega-5\Omega_0)+3\pi\delta(\Omega+5\Omega_0)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\bullet\left[\begin{array}{l}2A(j\Omega)*2A(j\Omega)+2A(j\Omega)*3\pi\delta(\Omega-5\Omega_0)+2A(j\Omega)*3\pi\delta(\Omega+5\Omega_0)+2A(j\Omega)*3\pi\delta(\Omega-5\Omega_0)+\\+2A(j\Omega)*3\pi\delta(\Omega-5\Omega_0)+3\pi\delta(\Omega-5\Omega_0)*3\pi\delta(\Omega-5\Omega_0)+3\pi\delta(\Omega-5\Omega_0)*3\pi\delta(\Omega+5\Omega_0)+\\+2A(j\Omega)*3\pi\delta(\Omega+5\Omega_0)+3\pi\delta(\Omega-5\Omega_0)*3\pi\delta(\Omega+5\Omega_0)+3\pi\delta(\Omega+5\Omega_0)*3\pi\delta(\Omega+5\Omega_0)\end{array}\right]=$$

$$=2A(j\Omega)+3\pi\delta(\Omega-5\Omega_0)+3\pi\delta(\Omega+5\Omega_0)+\frac{1}{\pi}\bullet\left[\begin{array}{l}2\bullet(A(j\Omega)*A(j\Omega))+2\bullet(2A(j\Omega)*3\pi\delta(\Omega-5\Omega_0))+\\+2\bullet(2A(j\Omega)*3\pi\delta(\Omega+5\Omega_0)+6\pi\delta(\Omega))+3\pi\delta(\Omega-10\Omega_0)+\\+3\pi\delta(\Omega+10\Omega_0)\end{array}\right]=$$

$$=2A(j\Omega)+3\pi\delta(\Omega-5\Omega_0)+3\pi\delta(\Omega+5\Omega_0)+\frac{2}{\pi}(A(j\Omega)*A(j\Omega))+6A(j\Omega-5\Omega_0)+6A(j\Omega+5\Omega_0)+6\pi\delta(\Omega)+$$
$$+3\delta(\Omega-10\Omega_0)+3\delta(\Omega+10\Omega_0)$$

Γραφικά ο MF της εξόδου y(t) είναι ο ακόλουθος:



2.11.12 Θέμα 3 Ιούνιος 2014

Χρησιμοποιώντας:

- ιδιότητες της θεωρίας κατανομών και
- την ιδιότητα της διαφόρισης στο πεδίο του χρόνου

αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος x(t)=sign(t) (όπου sign(t) η συνάρτηση προσήμου) είναι 2/(jΩ). Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της διαφόρισης στο πεδίο της **συχνότητας υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier του σήματος $x(t)=t^n \bullet sign(t)$**

<u>Λύση</u>

Ξεκινάμε από την ισότητα $\mathrm{sign}(t)=2u(t)-1$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει η ασθενής ισότητα κατανομών $\mathrm{sign}^{(1)}(t)=2\delta(t)$

Παίρνουμε μετασχηματισμό Fourier και στα 2 μέρη της τελευταίας ισότητας $\mathrm{sign}^{(1)}(t)=2\delta(t)$ και προκύπτει ότι:

$$F\{\mathrm{sign}^{(1)}(t)\}=F\{2\delta(t)\}=2F\{\delta(t)\}=2$$

Από ιδιότητα παραγώγισης στο χρόνο ισχύει ότι: $F\{sign^{(1)}(t)\}=j\Omega\bullet X(j\Omega)$ όπου $X(j\Omega)$ ο MF της sign(t)

Επειδή τα αριστερά μέρη των 2 τελευταίων ισοτήτων είναι ίσα, άρα και τα δεξιά μέρη είναι ίσα οπότε

$$j\Omega\bullet X(j\Omega)=2\Rightarrow X(j\Omega)=\frac{2}{j\Omega}$$

Για να ισχύει και η ισχυρή ισότητα κατανομών θα πρέπει: $X(j\Omega)=\dfrac{2}{j\Omega}+\lambda\delta(\Omega)$

Άρα πρέπει να υπολογίσουμε το λ. που είναι το πραγματικό μέρος του MF της sign(t). Παίρνουμε το MF της sign(t).

$$F\{\mathrm{sign}(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sign}(t)\bullet e^{-jt\Omega}dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sign}(t)\bullet(\cos(\Omega t)-j\sin(\Omega t))dt=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sign}(t)\bullet\cos(\Omega t)dt-j\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sign}(t)\bullet\cos(\Omega t)dt$$

Ο ΄2ᵒ όρος αγνοείται διότι το λ είναι πραγματικός..

Παίρνουμε τον 1ᵒ όρο του ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sign}(t)\bullet\cos(\Omega t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}odd\bullet even=\int_{-\infty}^{\infty}odd=0$.Άρα $\mathrm{Re}\{F\{\mathrm{sign}(t)\}\}=0$. Συνεπώς προκύπτει ότι $\boxed{X(j\Omega)=\dfrac{2}{j\Omega}}$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα διαφόρισης στη συχνότητα δηλ: $t^n x(t)\leftrightarrow j^n\dfrac{d^nX(j\Omega)}{d\Omega^n}$ με x(t)=sign(t).

$\mathrm{sign}(t)\leftrightarrow\dfrac{2}{j\Omega}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{sign}(t)}{2}\leftrightarrow\dfrac{1}{j\Omega}$ και συνεπώς: $t^n\bullet\dfrac{\mathrm{sign}(t)}{2}\leftrightarrow j^n\bullet\dfrac{d^n}{d\Omega^n}\left(\dfrac{1}{j\Omega}\right)$(1)

Υπολογίζουμε τη n-οστή παράγωγο του $\dfrac{1}{j\Omega}$ ως εξής:

- Η 1η παράγωγος του $\dfrac{1}{j\Omega}$ είναι: $\dfrac{-j}{j^2\Omega^2}=\dfrac{j}{\Omega^2}$
- Η 2η παράγωγος του $\dfrac{1}{j\Omega}$ είναι: $\dfrac{-j2\Omega}{\Omega^4}=\dfrac{-1\bullet2\bullet j}{\Omega^3}$
- Η 3η παράγωγος του $\dfrac{1}{j\Omega}$ είναι: $\dfrac{2\bullet j\bullet3\Omega^2}{\Omega^6}=\dfrac{1\bullet2\bullet3\bullet j}{\Omega^4}$

……………………………………………………………………………………………………..

- Η n-οστή παράγωγος του $\frac{1}{j\Omega}$ είναι: $\frac{(-1)^{n-1} 1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet ... \bullet n \bullet j}{\Omega^{n+1}} = \frac{(-1)^{n-1} \bullet n! \bullet j}{\Omega^{n+1}}$ (2)

Αντικαθιστούμε τη (2) στην (1) και προκύπτει:

$$t^n \bullet \frac{\operatorname{sign}(t)}{2} \leftrightarrow j^n \bullet \left[\frac{(-1)^{n-1} \bullet n! \bullet j}{\Omega^{n+1}} \right] = \frac{(-1)^{n-1} \bullet n! \bullet j^{n+1}}{\Omega^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^n \bullet \operatorname{sign}(t) \leftrightarrow \frac{2 \bullet (-1)^{n-1} \bullet n! \bullet j^{n+1}}{\Omega^{n+1}}$$

2.11.13 Θέμα 2 Σεπτέμβριος 2014

Δίνεται το σήμα συνεχούς χρόνου $x_0(t)$ που είναι διάφορο του μηδενός στο διάστημα $|t| \le T_0/2$ και η περιοδική επέκταση του $\tilde{x}_0(t) = x_0(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$, όπου δ(.) η γενικευμένη συνάρτηση δέλτα. **Αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος μπορεί να εκφραστεί ως** $\tilde{X}_0(j\Omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_0(j\Omega) \bullet \delta(\Omega - k\Omega_0)$ και τεκμηριώστε τα σχετικά με τη διακριτή φύση του.

Απάντηση

Για το σήμα $\tilde{x}_0(t) = x_0(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$ παίρνουμε ΜF και στα δύο μέρη του και προκύπτει ότι:

$$\boxed{\tilde{x}_0(t) = x_0(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kt_0) \leftrightarrow X_0(j\Omega) \bullet F\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kt_0)\right\} \quad (1)}$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\boxed{F\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kt_0)\right\} = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0)}$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t - kT_0) \leftrightarrow e^{-jk\Omega T_0}$$

Ιδιότητα Χρονικής Ολίσθησης

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\Omega T_0}$$

Ιδιότητα Γραμμικότητας

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jkt\Omega_0} \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(-(\Omega - k\Omega_0))$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jkt\Omega_0} \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jkt\Omega_0} \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

$$\frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jkt\Omega_0} \leftrightarrow \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

Το περιοδικό σήμα $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kt_0)$ έχει ως σειρά Fourier την $x(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jkt\Omega_0}$

Άρα $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kt_0) \leftrightarrow \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0)$ (2)

Αντικαθιστούμε τη (2) στην (1) και προκύπτει ότι:

$$\boxed{\tilde{x}_0(t) = x_0(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kt_0) \leftrightarrow X_0(j\Omega) \bullet \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_0(j\Omega) \bullet \delta(\Omega - k\Omega_0)}$$

Παρατήρηση

Απόδειξη ότι το σήμα $y(\mathrm{t})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-k\mathrm{T}_0\right)$ έχει ως σειρά Fourier την $\frac{1}{\mathrm{T}_0}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{jkt}\Omega_0}$

<u>Απόδειξη</u>

Υπολογίζουμε πρώτα τους συντελεστές της σειράς Fourier από τον τύπο

$$\mathrm{c_n}=\frac{1}{\mathrm{T}_0}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt}=\frac{1}{\mathrm{T}_0}\int_{0}^{\pi}\delta\left(\mathrm{t}-k\mathrm{T}_0\right)\mathrm{e^{-jn\Omega_0 t}dt}=\frac{1}{\mathrm{T}_0}$$

$$\mathrm{y(t)}=\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{T}_0}\mathrm{e}^{\mathrm{jk\Omega_0 t}}=\frac{1}{\mathrm{T}_0}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{jk\Omega_0 t}}=\frac{1}{\mathrm{T}_0}\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{jk\Omega_0 t}}$$

<u>Λύση Ψαράκη</u>

ΘΕΜΑ 2(25%). Λυμένο πολλές φορές στο μάθημα.

1. Χρησιμοποιείστε τη γνωστή ιδιότητα του μετασχηματισμού *Fourier* σύμφωνα με την οποία η συνέλιξη δύο σημάτων στο πεδίο του χρόνου ισούται με πολλαπλασιασμό των μετασχηματισμών τους.

2. Υπολογίστε τον γενικευμένο μετασχηματισμό *Fourier* του συρμού του *Poisson* και

3. τέλος χρησιμοποιώντας γνωστή ιδιότητα των κατανομών έχουμε ότι:

$$\bar{X}_0(j\Omega)-\frac{2\pi}{T_0}\sum_{k=\ \infty}^{\infty}X_0(j\Omega)\delta(\Omega-k\Omega_0)-\frac{2\pi}{T_0}\sum_{k=\ \infty}^{\infty}X_0(jk\Omega_0)\delta(\Omega-k\Omega_0),$$

από την οποία δικαιολογείται η διακριτή φύση του μετασχηματισμού. Επιπλέον εφαρμόζοντας τον αντίστροφο γενικευμένο μετασχηματισμό *Fourier* στην παραπάνω σχέση και χρησιμοποιώντας ιδιότητες της γενικευμένης συνάρτησης δέλτα, εύκολα καταλήγουμε στη σειρά *Fourier* και στην ακόλουθη σχέση:

$$c_k-\frac{1}{T_0}X_0(jk\Omega_0),$$

που συνδέει φασματικές γραμμές και δείγματα του μετασχηματισμού *Fourier* του αρχικού σήματος.

3 Τρίτο Κεφάλαιο – Μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι η γενίκευση του μετασχηματισμού Fourier και μεταφέρει ένα σήμα από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας. Πιο συγκεκριμένα η συχνότητα ορίζεται ως ένας μιγαδικός της μορφής s=σ+jΩ όπου σ το πραγματικό μέρος και Ω το φανταστικό μέρος του. Ο μετασχηματισμός Laplace μαθηματικά ως εξής:

$L\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bullet e^{-st} dt$ Αμφίπλευρος Μετασχηματισμός Laplace (αφορά όλα τα σήματα συνεχούς χρόνου)

$L\{x(t)\} = X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t) \bullet e^{-st} dt$ Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Laplace (αφορά μόνο τα αιτιατά σήματα συνεχούς χρόνου)

Υπενθύμιση:

$F\{x(t)\} = X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bullet e^{-j\Omega t} dt$ Μετασχηματισμός Fourier

Πρέπει να τονίσουμε ότι αν το πραγματικό μέρος του μιγαδικού s είναι μηδέν δηλ. αν σ=0 τότε προκύπτει ότι s=jΩ και προκύπτει ο μετασχηματισμός Fourier ο οποίος μεταφέρει ένα σήμα από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της φανταστικής συχνότητας. Συνεπώς ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί μια ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού Laplace και εφαρμόζεται όταν το πραγματικό μέρος του μιγαδικού s είναι μηδέν. Για κάθε σήμα συνεχούς χρόνου υπάρχει μετασχηματισμός Laplace ενώ μετασχηματισμός Fourier μπορεί και να μην υπάρχει.

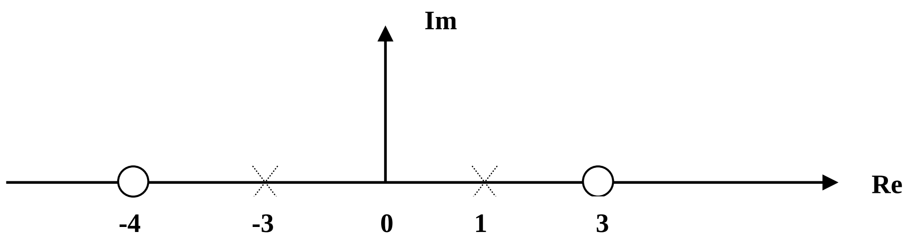
3.1 Συμβολισμοί μετασχηματισμού Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace ενός σήματος συνεχούς χρόνου συμβολίζεται με τους εξής τρόπους:

- $x(t) \leftrightarrow X(s)$
- $L\{x(t)\} = X(s)$
- $x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$

3.2 Περιοχή Σύγκλισης μετασχηματισμού Laplace

Αν ο μετασχηματισμός Laplace (ML) είναι της μορφής $X(s) = \frac{\text{Αριθμητής(s)}}{\text{Παρονομαστής(s)}}$ τότε οι **τιμές που μηδενίζουν τον αριθμητή ονομάζονται μηδενικά, ενώ αυτές που μηδενίζουν τον παρονομαστή ονομάζονται πόλοι**. Για παράδειγμα στο μετασχηματισμό Laplace $X(s) = \frac{(s-3)\bullet(s+4)}{(s+3)\bullet(s-1)}$ τα μηδενικά είναι οι τιμές 3 και -4 και οι πόλοι είναι οι τιμές -3 και 1. Γραφικά οι πόλοι και τα μηδενικά απεικονίζονται όπως φαίνεται στην επόμενη εικόνα: (Ο οριζόντιος άξονας είναι ο πραγματικός άξονας και συμβολίζεται ως Re και ο κάθετος άξονας είναι ο φαντασιακός άξονας και συμβολίζεται ως Im)



Η περιοχή σύγκλισης ενός μετασχηματισμού Laplace (ML) είναι μια ορθογώνια περιοχή ΠΟΥ ΔΕΝ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΠΟΛΟΥΣ και συμβολίζεται ως Re(s). Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις γιαυτή:

- Αν **το σήμα είναι αιτιατό** τότε η περιοχή σύγκλισης **είναι δεξιά του μεγαλύτερου πόλου** δηλ. Re(s)>max(p_1, p_2, …,p_n) όπου p_1, p_2, …,p_n οι πόλοι του X(s). Στο προηγούμενο παράδειγμα η περιοχή σύγκλισης είναι Re(s)>1

- Αν **το σήμα είναι μη αιτιατό** τότε η περιοχή σύγκλισης **είναι αριστερά του μικρότερου πόλου** δηλ. Re(s)<min(p_1, p_2, …,p_n) όπου p_1, p_2, …,p_n οι πόλοι του X(s). Στο προηγούμενο παράδειγμα η περιοχή σύγκλισης είναι Re(s)<-3

- **Αν το σήμα έχει και αιτιατό και μη αιτιατό τμήμα** τότε η περιοχή σύγκλισης **είναι ανάμεσα στους πόλους.** Στο προηγούμενο παράδειγμα η περιοχή σύγκλισης είναι -3<Re(s)<1.

Παρατηρήσεις

Ένα σήμα είναι αιτιατό αν x(t)=0 για t<0 (Οποιοδήποτε σήμα περιλαμβάνει με τη μορφή γινομένου τη βηματική συνάρτηση u(t) είναι αιτιατό)	**Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν h(t)=0 αν t<0**
Ένα σήμα είναι μη αιτιατό αν x(t)=0 για t>0 (Οποιοδήποτε σήμα περιλαμβάνει με τη μορφή γινομένου τη βηματική συνάρτηση u(-t) είναι μη αιτιατό)	**Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι μη αιτιατό αν h(t)=0 αν t>0**

3.3 Διαφορές Μετασχηματισμών Fourier και Laplace

Οι διαφορές των μετασχηματισμών Fourier και Laplace είναι οι ακόλουθες:

1. Ο συμβολισμός της συχνότητας s στο μετασχηματισμό Laplace έχει τη μορφή s=σ+jΩ ενώ στο μετασχηματισμό Fourier έχει τη μορφή s=jΩ
2. Στο μετασχηματισμό Laplace ορίζουμε μια περιοχή σύγκλισης κάθε φορά που υπολογίζουμε ένα μετασχηματισμό Laplace. Η περιοχή σύγκλισης είναι μια ορθογώνια περιοχή που δεν περιλαμβάνει τους πόλους δηλ τις τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή σε ένα μετασχηματισμό Laplace (εφόσον βέβαια αυτός έχει πόλους) και συμβολίζεται ως Re(s) δηλ. το πραγματικό μέρος του μιγαδικού s. Αν ο μετασχηματισμός Laplace δεν έχει πόλους τότε η περιοχή σύγκλισης συμβολίζεται ως Re(s)>-∞ δηλ είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο. **Στο μετασχηματισμό Fourier δεν ορίζουμε περιοχή σύγκλισης γιατί δεν υπάρχει πραγματικό μέρος στο μιγαδικό s αφού Re(s)=0**.
3. Για κάθε σήμα συνεχούς χρόνου υπάρχει μετασχηματισμός Laplace, ενώ ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί και να μην υπάρχει για το σήμα αυτό. Πιο συγκεκριμένα αν η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα τότε υπάρχει και ο μετασχηματισμός Fourier για το σήμα αυτό αλλιώς όχι.

3.4 Παραδείγματα Υπολογισμού Μετασχηματισμού Laplace Βασικών Σημάτων

Υπολογισμός ML της κρουστικής συνάρτησης δ(t)

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\bullet e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\bullet e^{-st}dt=1$$

Η περιοχή σύγκλισης του σήματος $\delta(t)$ είναι η Re(s)>-∞ δηλαδή όλο το μιγαδικό επίπεδο διότι ο ML του δ(t) ΔΕΝ έχει πόλους

Υπολογισμός ML του σήματος e^{-at}•u(t)

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\bullet e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-at}u(t)\bullet e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-at}\bullet e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-t(a+s)}dt=\frac{1}{-(a+s)}\left[e^{-t(a+s)}\right]_0^{\infty}=-\frac{1}{(a+s)}\left(e^{-\infty}-e^{0}\right)=\frac{1}{(s+a)}$$

Η περιοχή σύγκλισης του ML του σήματος $e^{-at}u(t)$ είναι η Re(s)>-a

Υπολογισμός ML του σήματος e^{at}•u(t)

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\bullet e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{at}u(t)\bullet e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}e^{at}\bullet e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-t(-a+s)}dt=\frac{1}{-(-a+s)}\left[e^{-t(-a+s)}\right]_0^{\infty}=-\frac{1}{(-a+s)}\left(e^{-\infty}-e^{0}\right)=\frac{1}{(s-a)}$$

Η περιοχή σύγκλισης του ML του σήματος $e^{-at}u(t)$ είναι η Re(s)>a

Υπολογισμός ML του σήματος u(t)

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\bullet e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\bullet e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-st}dt=\frac{1}{-s}\left[e^{-s}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{s}$$

Η περιοχή σύγκλισης του ML του σήματος $u(t)$ είναι η Re(s)>0

Υπολογισμός ML του σήματος $\cos(\Omega_0 t)u(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\bullet e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\Omega_0 t)\bullet u(t)\bullet e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} \cos(\Omega_0 t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{j\Omega_0 t}+e^{-j\Omega_0 t}}{2}\right)e^{-st}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{j\Omega_0 t}\bullet e^{-st}dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-j\Omega_0 t}\bullet e^{-st}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-t(s-j\Omega_0)}dt - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-t(s+j\Omega_0))}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{-(s-j\Omega_n)}\left[e^{-t(s-j\Omega_0)}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{-(s+j\Omega_n)}\left[e^{-t(s+j\Omega_0)}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2(s-j\Omega_0)}(0-1) - \frac{1}{2(s+j\Omega_0))}(0-1) =$$

$$= \frac{1}{2\bullet(s-j\Omega_0)} + \frac{1}{2\bullet(s+j\Omega_0)} = \frac{1}{2}\bullet\left(\frac{s+j\Omega_0+s-j\Omega_0}{s^2-(j\Omega_0)^2}\right) = \frac{1}{2}\bullet\frac{2s}{s^2+\Omega_0^2} = \frac{s}{s^2+\Omega_0^2}$$

Οι πόλοι είναι $s_1 = j\Omega_0$ **και** $s_2 = -j\Omega_0$ **Η περιοχή σύγκλισης είναι Re(s)>0.**

Υπολογισμός ML του σήματος $\sin(\Omega_0 t)u(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\bullet e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\Omega_0 t)\bullet u(t)\bullet e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} \sin(\Omega_0 t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{j\Omega_0 t}-e^{-j\Omega_0 t}}{2j}\right)e^{-st}dt =$$

$$= \frac{1}{2j}\int_0^{\infty} e^{j\Omega_0 t}\bullet e^{-st}dt - \frac{1}{2j}\int_0^{\infty} e^{-j\Omega_0 t}\bullet e^{-st}dt = \frac{1}{2j}\int_0^{\infty} e^{-t(s-j\Omega_0)}dt - \frac{1}{2j}\int_0^{\infty} e^{-t(s+j\Omega_0))}dt =$$

$$= \frac{1}{2j}\bullet\frac{1}{-(s-j\Omega_0)}\left[e^{-t(s-j\Omega_0)}\right]_0^{\infty} - \frac{1}{2j}\bullet\frac{1}{-(s+j\Omega_0)}\left[e^{-t(s+j\Omega_0)}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2j(s-j\Omega_0)}\bullet(0-1) + \frac{1}{2j(s+j\Omega_0))}\bullet(0-1) =$$

$$= \frac{1}{2j\bullet(s-j\Omega_0)} - \frac{1}{2j\bullet(s+j\Omega_0)} = \frac{1}{2j}\bullet\left(\frac{s+j\Omega_0-s+j\Omega_0}{s^2-(j\Omega_0)^2}\right) = \frac{1}{2j}\bullet\frac{2j\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2} = \frac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}$$

Οι πόλοι είναι $s_1 = j\Omega_0$ **και** $s_2 = -j\Omega_0$ **. Η περιοχή σύγκλισης είναι Re(s)>0.**

Παρατήρηση
Στο Μετασχηματισμό Laplace θεωρούμε πάντα τα τριγωνομετρικά σήματα $\cos(\Omega_0 t)$ και $\sin(\Omega_0 t)$ ως αιτιατά σήματα είτε πολλαπλασιάζονται με την u(t) είτε όχι.

3.5 Χαρακτηριστικά Μετασχηματισμού Laplace

- **Συνάρτηση Μεταφοράς H(s) ονομάζεται ο ML της κρουστικής απόκρισης h(t), ενώ Απόκριση Συχνότητας H(jΩ) ονομάζεται ο MF της κρουστικής απόκρισης h(t).**
- Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι **ΦΕΦΕ (BIBO) Ευσταθές αν και μόνο αν η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς H(s) περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα (δηλ. τον άξονα 0 ή άξονα y)**
- **Ένα ΑΙΤΙΑΤΟ ΓΧΑ σύστημα είναι ΦΕΦΕ (BIBO) ευσταθές αν και μόνο ΟΛΟΙ οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς H(s) έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος ή εναλλακτικά** αν όλοι οι πόλοι **της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο**
- Αν η **περιοχή σύγκλισης του ML περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα (δηλ. τον άξονα 0 ή άξονα y) τότε ΥΠΑΡΧΕΙ ΚΑΙ Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER του σήματος αυτού, αλλιώς όχι. Αν υπάρχει ο MF τότε για να τον υπολογίσουμε θέτουμε όπου s το jΩ και προκύπτει ο MF**

Περιπτώσεις ΦΕΦΕ Ευστάθειας μέχρι τώρα

Ένα σύστημα είναι ΦΕΦΕ (BIBO) Ευσταθές όταν συμβαίνει ένα από τα ακόλουθα:

1. Όταν για φραγμένο σήμα εισόδου έχουμε και φραγμένο σήμα εξόδου

2.Αν το σύστημα είναι ΓΧΑ τότε είναι και ΦΕΦΕ Ευσταθές αν $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$

3. Ένα σύστημα είναι ΦΕΦΕ (BIBO) Ευσταθές αν η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς H(s) περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα

4.Αν το σύστημα είναι ΑΙΤΙΑΤΟ τότε είναι ΦΕΦΕ (BIBO) Ευσταθές αν ΟΛΟΙ οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς H(s) έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος

3.6 Αντιαιτιατά Σήματα

Δύο σήματα ονομάζονται αντιαιτιατά όταν το ένα είναι το μη αιτιατό σήμα του άλλου και έχουν ως χαρακτηριστικό ότι έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό Laplace και αντίθετες περιοχές σύγκλισης. **Για να κατασκευάσουμε το αντιαιτιατό σήμα θέτουμε αντίθετο πρόσημο και στη θέση της u(t) θέτουμε την u(-t)**. Παραδείγματα αντιαιτιατών σημάτων είναι τα ακόλουθα:

Αιτιατό Σήμα $\leftrightarrow$ ML	**Π.Σ.**
$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$	Re(s)>-a
$e^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}$	Re(s)>a
$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$	Re(s)>0
Μη Αιτιατό Σήμα $\leftrightarrow$ ML	**Π.Σ.**
$-e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$	Re(s)<-a
$-e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}$	Re(s)<a
$-u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$	Re(s)<0

3.7 Πίνακας Γνωστών Μετασχηματισμών Laplace

Σήμα $x(t)$	ML $X(s)$	ΠΣ
$\delta(t)$	1	$\mathrm{Re}(s) > -\infty$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$\frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$	s^n	$\mathrm{Re}(s) > -\infty$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}(s) > -a$
$e^{+at}u(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\mathrm{Re}(s) > a$
$e^{j\Omega_0 t}u(t)$	$\frac{1}{s-j\Omega_0}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$\cos(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\Omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$\sin(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$e^{-at}\cos(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\Omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -a$
$e^{-at}\sin(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{\Omega_0}{(s+a)^2+\Omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -a$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$e^{-at}t^n u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > -a$
$t\cos(\Omega_0 t)u(t)$	$\frac{s^2-\Omega_0^2}{(s^2+\Omega_0^2)^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$

1	$\frac{1}{s}$
δ	1
$\delta^{(k)}$	s^k
t	$\frac{1}{s^2}$

3.8 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

3.8.1 Ιδιότητα Γραμμικότητας (Αρχή Υπέρθεσης)

		Π.Σ.
$x_1(t) \leftrightarrow X_1(s)$	Το σήμα $x_1(t)$ έχει ως ML τον $X_1(s)$	Re(s)>σ_1
$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s)$	Το σήμα $x_2(t)$ έχει ως ML τον $X_2(s)$	Re(s)>σ_2
$ax_1(t)+bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(s)+bX_2(s)$	Ο γραμμικός συνδυασμός των σημάτων $ax_1(t)+bx_2(t)$ έχει ως ML τον $aX_1(s)+bX_2(s)$ για οποιεσδήποτε σταθερές a και b	Re(s)>max(σ_1,σ_2)

Παρατήρηση: Η Π.Σ. είναι η τομή των περιοχών σύγκλισης των $X_1(s)$ και $X_2(s)$ Μάλιστα αυτή ΕΙΝΑΙ Η ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ, δηλ. η πραγματική περιοχή σύγκλισης του γραμμικού συνδυασμού δύο ή περισσότερων σημάτων μπορεί να είναι μεγαλύτερη της τομής.

Υπενθύμιση Fourier

$ax_1(t)+bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(j\Omega)+bX_2(j\Omega)$	Ο γραμμικός συνδυασμός των σημάτων $ax_1(t)+bx_2(t)$ έχει ως MF τον $aX_1(j\Omega)+bX_2(j\Omega)$ για οποιεσδήποτε σταθερές a και b

3.8.1.1 1ο Παράδειγμα Ιδιότητας Γραμμικότητας

Να βρεθεί ο ML του σήματος $x(t)=2\delta(t)+3e^{-2t}u(t)+2e^{3t}u(t)$

Απάντηση

		Π.Σ.
$\delta(t) \leftrightarrow 1$	ML της δ(t)	Re(s)>-∞
$2\delta(t) \leftrightarrow 2$	Ιδιότητα Γραμμικότητας	Re(s)>-∞
$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2}$	ML της $e^{-2t}u(t)$	Re(s)>-2
$3e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{3}{s+2}$	Ιδιότητα Γραμμικότητας	Re(s)>-2
$e^{3t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-3}$	MF της $e^{3t}u(t)$	Re(s)>3
$2e^{3t}u(t) \leftrightarrow \frac{2}{s-3}$	MF της $e^{3t}u(t)$	Re(s)>3
$2\delta(t)+3e^{-2t}u(t)+2e^{3t}u(t) \leftrightarrow 2+\frac{3}{s+2}+\frac{2}{s-3}$	Ιδιότητα Γραμμικότητας	Re(s)>max(-2, 3)=3

3.8.1.2 2ο Παράδειγμα Ιδιότητας Γραμμικότητας

Να βρεθεί η περιοχή σύγκλισης του γραμμικού συνδυασμού των ML $\frac{s}{s-1}$ και $-\frac{1}{s-1}$

Απάντηση

	Π.Σ.
$\frac{s}{s-1}$	Re(s)>1
$-\frac{1}{s-1}$	Re(s)>1
$\frac{s}{s-1}-\frac{1}{s-1}=1$	Re(s)>-∞

Παρατηρούμε ότι η Π.Σ. είναι Re(s)>-∞ και ΟΧΙ η τομή των περιοχών σύγκλισης των ML $\frac{s}{s-1}$ και $-\frac{1}{s-1}$ που είναι **Re(s)>-1** **η διότι ο γραμμικός συνδυασμός των δύο ML που είναι $\frac{s}{s-1}-\frac{1}{s-1}$ ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΠΟΛΟΥΣ ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΝΟΝΤΑΣ ότι η περιοχή σύγκλισης ενδέχεται να είναι μεγαλύτερη από την τομή των περιοχών σύγκλισης.**

3.8.2 Ιδιότητα Χρονικής Ολίσθησης

		Π.Σ.
$x(t) \leftrightarrow X(s)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως ML τον $X(s)$	Re(s)>σ_0
$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} \bullet X(s)$	Δεξιά Χρονική Ολίσθηση κατά t_0	Re(s)>σ_0
$x(t+t_0) \leftrightarrow e^{st_0} \bullet X(s)$	Αριστερή Χρονική Ολίσθηση κατά t_0	Re(s)>σ_0

Υπενθύμιση Fourier

$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\Omega \bullet t_0} \bullet X(j\Omega)$	Δεξιά Χρονική Ολίσθηση του x(t) κατά t_0
$x(t+t_0) \leftrightarrow e^{j\Omega \bullet t_0} \bullet X(j\Omega)$	Αριστερή Χρονική Ολίσθηση του x(t) κατά t_0

<u>Παρατήρηση</u>: Στη χρονική ολίσθηση τα πρόσημα είναι ίδια όπως και στον MF. Επίσης η Π.Σ. δεν αλλάζει.

3.8.2.1 1ο Παράδειγμα Χρονικής Ολίσθησης

Να βρεθεί ο ML του σήματος $2e^{-2(t-1)} \bullet u(t-1)$

<u>Απάντηση</u>

		Π.Σ.
$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$	Το σήμα e^{-at} •u(t) έχει ως ML τον $\frac{1}{s+a}$	Re(s)>-a
$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2}$	Εφαρμογή προηγούμενου τύπου για a=2	Re(s)>-2
$e^{-2(t-1)}u(t-1) \leftrightarrow e^{-s1}\frac{1}{s+2}$	Δεξιά Χρονική Ολίσθηση με $t_0=1$	Re(s)>-2
$2e^{-2(t-1)}u(t-1) \leftrightarrow 2e^{-s}\frac{1}{s+2}$	Ιδιότητα Γραμμικότητας	Re(s)>-2

3.8.2.2 2ο Παράδειγμα Χρονικής Ολίσθησης

Να βρεθεί ο ML του σήματος $3e^{2(t+3)}$ •u(t+3)

<u>Απάντηση</u>

$e^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}$	Το σήμα e^{at} •u(t) έχει ως MF τον $\frac{1}{s-a}$	Re(s)>a
$e^{2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-2}$	Εφαρμογή προηγούμενου τύπου για a=2	Re(s)>2
$e^{2(t+3)}u(t+3) \leftrightarrow e^{s\bullet 3}\frac{1}{s-2}$	Δεξιά Χρονική Ολίσθηση με t_0=-3	Re(s)>2
$3e^{2(t+3)}u(t+3) \leftrightarrow 3e^{s\bullet 3}\frac{1}{s-2}$	Ιδιότητα Γραμμικότητας	Re(s)>2

3.8.3 Ολίσθηση στη Συχνότητα

		Π.Σ.
$x(t) \leftrightarrow X(s)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως ML τον $X(s)$	Re(s)>σ_0
$e^{s_0 t} \bullet x(t) \leftrightarrow X(s-s_0)$	Δεξιά Συχνοτική Ολίσθηση κατά s_0	Re(s)>σ_0+Re(s_0)
$e^{-s_0 t} \bullet x(t) \leftrightarrow X(s+s_0)$	Αριστερή Συχνοτική Ολίσθηση κατά s_0	Re(s)>σ_0+Re(s_0)

<u>Παρατήρηση</u>: Στη συχνοτική ολίσθηση τα πρόσημα είναι αντίθετα όπως και στον MF.

Υπενθύμιση Fourier

$e^{j\Omega_0 \bullet t} \bullet x(t) \leftrightarrow X(j(\Omega-\Omega_0))$	Δεξιά Συχνοτική Ολίσθηση κατά Ω_0

$e^{-j\Omega_0 \bullet t} \bullet x(t) \leftrightarrow X(j(\Omega+\Omega_0))$	Αριστερή Συχνοτική Ολίσθηση κατά Ω_0

3.8.3.1 1ο Παράδειγμα Συχνοτικής Ολίσθησης

Δίνεται ο ML $X(s)=\dfrac{1}{(s-s_0)+2}$.Να βρεθεί σε ποιο σήμα αντιστοιχεί.

Απάντηση

		Π.Σ.
$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s+a}$	Το σήμα $e^{-at}u(t)$ έχει ως ML τον $\dfrac{1}{s+a}$	Re(s)>-a
$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s+2}$	Εφαρμογή προηγούμενου τύπου για a=2	Re(s)>-2
$e^{s_0 t}e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{(s-s_0)+2}$	Συχνοτική Ολίσθηση προς τα δεξιά	Re(s)>-2+Re(s_0)

3.8.3.2 2ο Παράδειγμα Συχνοτικής Ολίσθησης

Δίνεται ο ML $X(s)=\dfrac{1}{(s-j\Omega_0)-2}$. Να βρεθεί σε ποιο σήμα αντιστοιχεί;

Απάντηση

$e^{at}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s-a}$	Το σήμα $e^{at}u(t)$ έχει ως ML τον $\dfrac{1}{s-a}$	Re(s)>a
$e^{2t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s-2}$	Εφαρμογή προηγούμενου τύπου για a=2	Re(s)>2
$e^{j\Omega_0 t}e^{2t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{(s-j\Omega_0)-2}$	Συχνοτική Ολίσθηση προς τα δεξιά κατά $j\Omega_0$	Re(s)>2-Re($j\Omega_0$)=2

3.8.4 Κλιμάκωση στο Χρόνο

		Π.Σ.
$x(t) \leftrightarrow X(s)$	Το σήμα x(t) έχει ως ML τον X(s)	Re(s)>σ_0
$x(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\dfrac{s}{a}\right)$	Ιδιότητα Κλιμάκωσης	Re(s)>$a\sigma_0$

Υπενθύμιση Fourier

$x(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{\lvert a \rvert} \bullet X\left(j\dfrac{\Omega}{a}\right)$	Κλιμάκωση στο χρόνο

3.8.5 Παραγώγιση στο Χρόνο

		Π.Σ.
$\dfrac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s)-x(0^-)$	1η παράγωγος στο Χρόνο	Re(s)> σ_0
$\dfrac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n X(s)-s^{n-1}x(0^-)-s^{n-2}x'(0^-)-s^{n-3}x''(0^-)-s^{n-4}x'''(0^-)-.......-s^0 x^{(n-1)}(0^-)$	Παραγώγιση στο Χρόνο	Re(s)> σ_0

Παρατήρηση Οι όροι του s σταματάνε όταν ο εκθέτης του s γίνει 0. Επίσης οι όροι $x(0^-)$, $x'(0^-)$, $x''(0^-)$, $x'''(0^-)$, ….., $x^{(n-1)}(0^-)$ είναι αρχικές τιμές του σήματος που αν υπάρχουν θα δίνονται.

Υπενθύμιση Fourier

$\dfrac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\Omega)^n \bullet X(j\Omega)$	Πολλαπλασιάζουμε τον MF του σήματος x(t) δηλαδή το $X(j\Omega)$ με τον όρο $(j\Omega)^n$ όπου το n εκφράζει την τάξη της παραγώγου

3.8.5.1 1º Παράδειγμα Παραγώγισης στο Χρόνο

Αν $x(t)=e^{-3t}u(t)$ τότε να βρεθεί ο ML του σήματος $\frac{d^2\left(e^{-3t}u(t)\right)}{dt^2}$. Δίνεται ότι $x(0^-)=0$ και $x'(0^-)=0$

<u>Απάντηση</u>

		Π.Σ.
$x(t)\leftrightarrow X(s)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως ML τον $X(s)$	Re(s)>σ_0
$x(t)=e^{-3t}u(t)\leftrightarrow X(s)=\frac{1}{s+3}$	Το σήμα $e^{-3t}u(t)$ έχει ως ML τον $\frac{1}{s+3}$	Re(s)>-3
$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{d^2\left(e^{-3t}u(t)\right)}{dt^2}\leftrightarrow s^2X(s)-s^1x(0^-)-s^0x'(0^-)=s^2\frac{1}{s+3}$	Θεώρημα Παραγώγισης στο Χρόνο	Re(s)>-3

3.8.5.2 2º Παράδειγμα Παραγώγισης στο Χρόνο

Αν $x(t)=e^{-3t}u(t)$ τότε να βρεθεί ο ML του σήματος $\frac{d^2\left(e^{-3t}u(t)\right)}{dt^2}$. Δίνεται ότι $x(0^-)=2$ και $x'(0^-)=3$

<u>Απάντηση</u>

		Π.Σ.
$x(t)\leftrightarrow X(s)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως ML τον $X(s)$	Re(s)>σ_0
$x(t)=e^{-3t}u(t)\leftrightarrow X(s)=\frac{1}{s+3}$	Το σήμα $e^{-3t}u(t)$ έχει ως ML τον $\frac{1}{s+3}$	Re(s)>-3
$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{d^2\left(e^{-3t}u(t)\right)}{dt^2}\leftrightarrow s^2X(s)-s^1x(0^-)-s^0x'(0^-)=$ $=s^2\frac{1}{s+3}-2s^1-3s^0$	Θεώρημα Παραγώγισης στο Χρόνο	Re(s)>-3

3.8.6 Παραγώγιση στη Μιγαδική Συχνότητα

		Π.Σ.
$x(t)\leftrightarrow X(s)$	Το σήμα x(t) έχει ως ML τον X(s)	Re(s)>σ_0
$(-t)^n\bullet x(t)\leftrightarrow\frac{d^nX(s)}{ds^n}$ ή $(-1)^n t^n\bullet x(t)\leftrightarrow\frac{d^nX(s)}{ds^n}$	Ιδιότητα Παραγώγισης στη Μιγαδική Συχνότητα	Re(s)>σ_0

<u>Παρατήρηση</u>

Προσοχή η ιδιότητα παραγώγισης στη συχνότητα στον MF είναι: $F\left(t^n x(t)\right)=j^n\frac{d^nX(j\Omega)}{d\Omega^n}$ **ενώ η ιδιότητα παραγώγισης στη συχνότητα στον ML είναι:** $L\left((-t)^n x(t)\right)=\frac{d^nX(s)}{ds^n}$

Υπενθύμιση Fourier

$t^n\bullet x(t)\leftrightarrow j^n\bullet\frac{d^nX(j\Omega)}{d\Omega^n}$	Τρόπος συμβολισμού της παραγώγισης στη μιγαδική συχνότητα

3.8.6.1 1º Παράδειγμα Παραγώγισης στη Μιγαδική Συχνότητα

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον ML του σήματος $(-t)^2e^{-t}u(t)$

<u>Απάντηση</u>

		Π.Σ.
$x(t)\leftrightarrow X(s)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως ML τον $X(s)$	

$x(t)=e^{-t}u(t)\leftrightarrow X(s)=\frac{1}{s+1}$	Το σήμα $e^{-t}u(t)$ έχει ως ML τον $\frac{1}{s+1}$	Re(s)>-1
$(-t)^2e^{-t}u(t)\leftrightarrow\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s+1}\right)=\frac{2}{(s+1)^3}$	Ιδιότητα παραγώγισης στη συχνότητα	Re(s)>-1

3.8.6.2 2º Παράδειγμα Παραγώγισης στη Μιγαδική Συχνότητα

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον ML του σήματος $t^3e^{-t}u(t)$

Απάντηση

		Π.Σ.
$x(t)\leftrightarrow X(s)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως ML τον $X(s)$	
$x(t)=e^{-t}u(t)\leftrightarrow X(s)=\frac{1}{s+1}$	Το σήμα $e^{-t}u(t)$ έχει ως ML τον $\frac{1}{s+1}$	Re(s)>-1
$(-1)^3t^3e^{-t}u(t)\leftrightarrow\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s+1}\right)\Rightarrow$ $t^3e^{-t}u(t)\leftrightarrow-\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s+1}\right)$	Ιδιότητα παραγώγισης στη συχνότητα	Re(s)>-1

3.8.7 Μετασχηματισμός Laplace Ολοκληρώματος

		Π.Σ.
$x(t)\leftrightarrow X(s)$	Το σήμα x(t) έχει ως ML τον X(s)	Re(s)>σ_0
$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(r)dr\leftrightarrow\frac{X(s)}{s}+\frac{y(0^-)}{s}$ όπου $y(0^-)=\int_{-\infty}^{0^-}x(r)dr$	Ιδιότητα Laplace Ολοκληρώματος	Re(s)>σ_0

Παρατήρηση: Ο όρος $y(0^-)=\int_{-\infty}^{0^-}x(r)dr$ είναι αρχική συνθήκη η οποία αν υπάρχει θα δίνεται.

3.8.8 Θεώρημα Αρχικής τιμής (Θ.Α.Τ.)

		Παρατηρήσεις
$x(t)\leftrightarrow X(s)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως ML τον $X(s)$	Re(s)>σ_0
$x(0^+)=\lim_{s\to\infty}s\bullet X(s)$	Θεώρημα Αρχικής τιμής	Το Θεώρημα Αρχικής τιμής εφαρμόζεται **όταν η x(t) δεν έχει κρουστικές συναρτήσεις στο t=0**

3.8.8.1 1º Παράδειγμα στο Θεώρημα Αρχικής Τιμής (Θ.Α.Τ.)

Δίνεται το σήμα x(t)=cos(Ω_0t). Να βρεθεί η τιμή της x(t) για t=0^+

Δύση

Η x(t) δεν περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στο t=0 οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα αρχικής τιμής και σύμφωνα με αυτό προκύπτει ότι: $x(0^+)=\lim_{s\to\infty}s\bullet X(s)=\lim_{s\to\infty}s\bullet\frac{s}{s^2+\Omega_0^2}=\lim_{s\to\infty}\frac{s^2}{s^2+\Omega_0^2}=\lim_{s\to\infty}\frac{s^2}{s^2\left(1+\frac{\Omega_0^2}{s^2}\right)}=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{\Omega_0^2}{s^2}\right)}=1$

3.8.8.2 2º Παράδειγμα στο Θεώρημα Αρχικής Τιμής (Θ.Α.Τ.)

Δίνεται το σήμα x(t)=sin(Ω_0t).. Να βρεθεί η τιμή της x(t) για t=0^+

Δύση

Η $x(t)$ δεν περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στο t=0 οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα αρχικής τιμής και σύμφωνα με αυτό προκύπτει ότι: $x(0^+)=\lim_{s\to\infty} s\bullet X(s)=\lim_{s\to\infty} s\bullet\frac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}=\lim_{s\to\infty}\frac{s\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}=\lim_{s\to\infty}\frac{s\Omega_0}{s\left(s+\frac{\Omega_0^2}{s}\right)}=\lim_{s\to\infty}\frac{\Omega_0}{\left(s+\frac{\Omega_0^2}{s}\right)}=0$

3.8.9 Θεώρημα Τελικής τιμής

		Παρατηρήσεις
$x(t)\leftrightarrow X(s)$	Το σήμα $x(t)$ έχει ως ML τον $X(s)$	Re(s)>σ_0
$\lim_{t\to\infty} x(t)=\lim_{s\to 0} s\bullet X(s)$	Θεώρημα Τελικής τιμής	Το Θεώρημα Τελικής Τιμής εφαρμόζεται όταν η s•X(s) **δεν έχει πόλους στο δεξιό ημιεπίπεδο ή στο φανταστικό άξονα**

3.8.9.1 Παράδειγμα στο Θεώρημα Τελικής Τιμής (Θ.Τ.Τ.)

Δίνεται το σήμα $x(t)=(1-e^{-t})\bullet u(t)$. Να βρεθεί το $\lim_{t\to\infty} x(t)$ ή εναλλακτικά το $x(\infty)$

<u>Απάντηση</u>

$x(t)=(1-e^{-t})\bullet u(t)=u(t)-e^{-t}\bullet u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s\bullet(s+1)}$ Re(s)>max{0,-1}=0

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα τελικής τιμής διότι το $s\bullet X(s)$ δεν έχει πόλους στο φανταστικό άξονα η στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο και σύμφωνα με αυτό προκύπτει ότι: $\lim_{t\to\infty} x(t)=\lim_{s\to 0} s\bullet X(s)=\lim_{s\to 0} s\bullet\frac{1}{s\bullet(s+1)}=1$

3.8.10 Ιδιότητα Συνέλιξης στο Χρόνο

		Π.Σ.
$x_1(t)\leftrightarrow X_1(s)$	Το σήμα $x_1(t)$ έχει ως ML τον $X_1(s)$	Re(s)>σ_1
$x_2(t)\leftrightarrow X_2(s)$	Το σήμα $x_2(t)$ έχει ως ML τον $X_2(s)$	Re(s)>σ_2
$x_1(t)*x_2(t)\leftrightarrow X_1(s)\bullet X_2(s)$	Ιδιότητα Συνέλιξης στο Χρόνο	Re(s)>max(σ_1,σ_2)

Παρατήρηση: Η περιοχή σύγκλισης είναι όπως και στη γραμμικότητα δηλ. η τομή των περιοχών σύγκλισης.

Υπενθύμιση Fourier

$x(t)*y(t)\leftrightarrow X(j\Omega)\bullet Y(j\Omega)$	**ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΤΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ**

3.8.10.1 Παράδειγμα Ιδιότητας Συνέλιξης στο Χρόνο

Να βρεθεί ο ML του σήματος $3e^{-2t}u(t)*2e^{3t}u(t)$

<u>Απάντηση</u>

		Π.Σ.
$e^{-2t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+2}$	ML της $e^{-2t}u(t)$	Re(s)>-2
$3e^{-2t}u(t)\leftrightarrow\frac{3}{s+2}$	Ιδιότητα Γραμμικότητας	Re(s)>-2
$e^{3t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-3}$	MF της $e^{3t}u(t)$	Re(s)>3
$2e^{3t}u(t)\leftrightarrow\frac{2}{s-3}$	MF της $e^{3t}u(t)$	Re(s)>3
$3e^{-2t}u(t)*2e^{3t}u(t)\leftrightarrow\frac{3}{s+2}\bullet\frac{2}{s-3}=\frac{6}{(s+2)\bullet(s-3)}$	Ιδιότητα Συνέλιξης στο Χρόνο	Re(s)>max(-2,3)=3

3.9 Περιπτώσεις Ανάλυσης σε Απλά Κλάσματα για υπολογισμό Αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace και Fourier

Ο μετασχηματισμός Laplace γράφεται ως εξής: $X(s)=\dfrac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + ... + b_0}{a_m x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0}$. Ο βαθμός του πολυωνύμου στον αριθμητή είναι m και ο βαθμός του πολυωνύμου στον παρονομαστή είναι n.

a)Για να είναι δυνατή η ανάλυση του σε απλά κλάσματα πρέπει:
ΒΑΘΜΟΣ ΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΣΤΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΗ < ΒΑΘΜΟΣ ΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΣΤΟΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ

ΜΕ ΤΗΝ ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΗ ΑΥΤΗ ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΜΕ ΤΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ:

1η περίπτωση: Διακριτές (Διαφορετικές) Ρίζες που είναι είτε Πραγματικές είτε Μιγαδικές

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ οι ρίζες του παρονομαστή (πόλοι). Ο ML X(s) γράφεται ως εξής: $X(s)=\dfrac{c_1}{s-\lambda_1}+\dfrac{c_2}{s-\lambda_2}+....+\dfrac{c_n}{s-\lambda_n}$

Οι συντελεστές c_i για i=1…n υπολογίζονται από το γενικό τύπο:

$$\boxed{c_i = \lim_{s\to\lambda_i}(s-\lambda_i)\bullet X(s), i=1...n}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace δίνεται από τον τύπο: $x(t)=\left(c_1 e^{\lambda_1 t}+c_2 e^{\lambda_2 t}+....+c_n e^{\lambda_n t}\right)\bullet u(t)$

2η περίπτωση: Πραγματικές Ρίζες με Πολλαπλότητα

Έστω ότι η ρίζα λ_1 εμφανίζεται με πολλαπλότητα r ενώ οι υπόλοιπες ρίζες είναι απλές (έχουν πολλαπλότητα 1)

Ο ML X(s) γράφεται ως εξής: $X(s)=\dfrac{c_1}{s-\lambda_1}+\dfrac{c_2}{(s-\lambda_1)^2}+\dfrac{c_3}{(s-\lambda_1)^3}+.....+\dfrac{c_r}{(s-\lambda_1)^r}+\dfrac{c_{r+1}}{s-\lambda_{r+1}}+.....+\dfrac{c_n}{s-\lambda_n}$

Οι συντελεστές c_i για i=1…n υπολογίζονται από το γενικό τύπο:

$$\boxed{c_i = \lim_{s\to\lambda_i}\frac{1}{(r-i)!}\bullet\frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}}\left[(s-\lambda_i)^r\bullet X(s)\right], i=1...r}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace δίνεται από τον τύπο:

$$x(t)=\left(c_1 e^{\lambda_1 t}+c_2 t e^{\lambda_1 t}+c_2\frac{t^2}{(2-1)!}e^{\lambda_1 t}+....+c_r\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}e^{\lambda_1 t}+c_{r+1}e^{\lambda_{r+1}t}+.....+c_n e^{\lambda_n t}\right)\bullet u(t)$$

Γενικός τύπος: $c_i\dfrac{t^{i-1}}{(i-1)!}e^{\lambda_1 t}u(t), i=1,2,....,r$

b) **ΑΝ ΒΑΘΜΟΣ ΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΣΤΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΗ >=ΒΑΘΜΟΣ ΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΣΤΟΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ ΤΟΤΕ ΚΑΝΟΥΜΕ ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ**:

$$X(s)=\frac{\text{ΑΡΙΘΜΗΤΗΣ(s) ή ΔΙΑΙΡΕΤΕΟΣ(s)}}{\text{ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗΣ(s) ή ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ(s)}}=\text{ΠΗΛΙΚΟ (s)}+\frac{\text{ΥΠΟΛΟΙΠΟ(s)}}{\text{ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ(s)}}$$

και μετά αναλύουμε σε απλά κλάσματα ΜΟΝΟ τον όρο $\dfrac{\text{ΥΠΟΛΟΙΠΟ(s)}}{\text{ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ(s)}}$ **σύμφωνα με τους τρόπους που περιγράψαμε προηγουμένως.**

3.10 Λύσεις Ασκήσεων 3ου Σετ

3.10.1 Άσκηση 1.1

1.1 Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace των παρακάτω συναρτήσεων και σχεδιάστε την περιοχή σύγκλισης

α) $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$

β) $x(t) = -e^{-\alpha t}u(-t)$

γ) $x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t),$

δ) $x(t) = e^{-b|t|}$

Λύση

α)

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t(a+s)}dt = \frac{1}{-(a+s)}\left[e^{-t(a+s)}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{(s+a)}[0-1] =$$

$$= \frac{1}{(s+a)} \text{ με Π.Σ. } \mathrm{Re}(s) > -a$$

Παρατηρήσεις

- Ο πόλος είναι η τιμή που μηδενίζει τον παρονομαστή και εδώ ο πόλος είναι το s=-a. Το σήμα που δίνεται είναι το e-1tu(t) $e^{-at}u(t)$ που είναι προφανώς αιτιατό σήμα λόγω της u(t). Άρα η περιοχή σύγκλισης (Π.Σ.) του ML είναι δεξιά του πόλου δηλ. Re(s)>-a. **Αν a>0 τότε η Π.Σ. περιλαμβάνει και το φανταστικό άξονα και αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει και ο MF του σήματος x(t). Αν θέλουμε να τον υπολογίσουμε θέτουμε όπου s το jΩ.**
- Ένα σήμα x(t) είναι αιτιατό όταν x(t)=0 για t<0. Στα αιτιατά σήματα υπολογίζουμε το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace

β)

Α τρόπος

Το σήμα $-e^{-at}u(-t)$ που έχει αρνητικό πρόσημο και στη θέση της u(t) την u(-t) είναι το αντίστοιχο μη-αιτιατό (ή αλλιώς το αντιαιτιατό σήμα) του $e^{-at}u(t)$. **Αυτό σημαίνει ότι έχει τον ίδιο ML με το αιτιατό σήμα** $e^{-at}u(t)$ **και αντίθετη περιοχή σύγκλισης**. Συνεπώς το σήμα $-e^{-at}u(-t)$ έχει ως ML:

$$-e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \text{ με Π.Σ. } \mathrm{Re}(s) < -a$$

Σημείωση: Γενικά ισχύουν τα εξής:

Αιτιατό Σήμα $\leftrightarrow$ML	**Π.Σ.**
$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$	Re(s)>-a
Μη Αιτιατό Σήμα $\leftrightarrow$ML	**Π.Σ.**
$-e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$	Re(s)<-a

Β τρόπος

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\bullet e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}u(-t)\bullet e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-at}\bullet e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-t(a+s)}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t(a+s)}dt = \frac{1}{-(s+a)}\left[e^{-t(s+a)}\right]_0^{\infty} =$$

$$= -\frac{1}{(s+a)}(0-1) = \frac{1}{(s+a)} \text{ με Π.Σ. } \mathrm{Re}(s) < -a$$

Παρατήρηση

Ένα σήμα x(t) είναι μη αιτιατό όταν x(t)=0 για t>0.

γ)Δίνεται το σήμα $x(t)=\delta(t)-\frac{4}{3}e^{-t}u(t)+\frac{1}{3}e^{2t}u(t)$. Εδώ θα υπολογίσουμε τον ML με διαφορετικό τρόπο. Πιο συγκεκριμένα θα τον υπολογίσουμε με ιδιότητα γραμμικότητας και όχι εφαρμόζοντας τον ορισμό του ML.

- ✓ $\delta(t)\leftrightarrow 1$ με Π.Σ. Re(s)>-∞ διότι δεν υπάρχουν πόλοι στον ML της δ(t)
- ✓ $e^{-at}u(t)\leftrightarrow \frac{1}{s+a}\Rightarrow e^{-t}u(t)\leftrightarrow \frac{1}{s+1}\Rightarrow -\frac{4}{3}e^{-t}u(t)\leftrightarrow -\frac{4}{3}\bullet\frac{1}{s+1}$ με Π.Σ. Re(s)>-1 διότι το $\frac{4}{3}e^{-t}u(t)$ είναι αιτιατό σήμα
- ✓ $e^{at}u(t)\leftrightarrow \frac{1}{s-a}\Rightarrow e^{2t}u(t)\leftrightarrow \frac{1}{s-2}\Rightarrow \frac{1}{3}e^{2t}u(t)\leftrightarrow \frac{1}{3}\frac{1}{s-2}$ με Π.Σ. Re(s)>2 διότι το $\frac{1}{3}e^{2t}u(t)$ είναι αιτιατό σήμα
- ✓ Άρα το συνολικό σήμα $\delta(t)-\frac{4}{3}e^{-t}u(t)+\frac{1}{3}e^{2t}u(t)$ έχει ως ML: $1-\frac{4}{3}\bullet\frac{1}{s+1}+\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{s-2}=\frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}$

Οι πόλοι του ML είναι το -1 και το 2 και επειδή το σήμα x(t) είναι αιτιατό, η περιοχή σύγκλισης του ML είναι Re(s)>max{-1,2}=2

δ)Το σήμα $x(t)=e^{-b|t|}$ μπορεί να γραφεί ως εξής: $x(t)=e^{bt}u(-t)+e^{-bt}u(t)$. Ουσιαστικά το σήμα αυτό αποτελείται από ένα μη αιτιατό και από ένα αιτιατό τμήμα.

- ✓ Το μη αιτιατό τμήμα έχει ML $e^{bt}u(-t)\leftrightarrow -\frac{1}{s-b}$ και περιοχή σύγκλισης Re(s)<b
- ✓ Το αιτιατό τμήμα έχει ML $e^{-bt}u(t)\leftrightarrow \frac{1}{s+b}$ και περιοχή σύγκλισης Re(s)>-b
- ✓ Άρα το συνολικό σήμα $x(t)=e^{bt}+e^{-bt}$ έχει ως ML $-\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s+b}=-\frac{2b}{s^2-b^2}$

Συνεπώς το σήμα $x(t)=e^{-b|t|}$ έχει ως Π.Σ. –b<Re(s)<b

__Παρατηρήσεις__

- **Όταν ένα σήμα είναι αιτιατό τότε ο ML του έχει ως περιοχή σύγκλισης την περιοχή που είναι δεξιά του μεγαλύτερου πόλου δηλ Re(s)>max(p_i) όπου p_i οι πόλοι του ML για i=1..N. Όταν ένα σήμα είναι μη αιτιατό τότε ο ML του έχει ως περιοχή σύγκλισης την περιοχή που είναι αριστερά του μικρότερου πόλου δηλ Re(s)<min(p_i) όπου p_i οι πόλοι του ML για i=1..N.**

  Όταν ένα σήμα έχει και αιτιατό και μη αιτιατό τμήμα όπως στο σήμα $x(t)=e^{-b|t|}$ τότε η περιοχή σύγκλισης είναι ανάμεσα στους πόλους.
- **Κάθε σήμα που περιλαμβάνει τη βηματική συνάρτηση u(t) είναι αιτιατό, ενώ κάθε σήμα που περιλαμβάνει τη βηματική συνάρτηση u(-t) είναι μη αιτιατό. Αν η βηματική συνάρτηση u(t) βρίσκεται στην κρουστική απόκριση h(t) τότε το σύστημα είναι αιτιατό**
- Για το σήμα $x(t)=e^{-b|t|}$ παρατηρούμε ότι η Π.Σ. (περιοχή σύγκλισης) είναι η –b<Re(s)<b και περιλαμβάνει **το φανταστικό άξονα (y=0)** και συνεπώς για το σήμα αυτό υπάρχει και ο μετασχηματισμός Fourier του. Για να τον βρούμε θέτουμε στον τύπο $X(s)=-\frac{2b}{s^2-b^2}$ όπου s το jΩ και προκύπτει ότι: $X(j\Omega)=-\frac{2b}{(j\Omega)^2-b^2}\Rightarrow X(j\Omega)=\frac{2b}{b^2+\Omega^2}$

3.10.2 Άσκηση 1.2

1.2 Να αποδείξετε ότι

α) $\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\} = \dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$

β) $\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\} = \dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

γ) $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\} = \dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$

δ) $\mathcal{L}\{t\cos(\omega_0 t)\} = \dfrac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$

Λύση

α) $L\{\cos(\Omega_0 t)\} = \dfrac{s}{s^2+\Omega_0^2}$

Α τρόπος με ιδιότητες

Χρησιμοποιώντας τον τύπο Euler: $\cos(\Omega_0 t) = \dfrac{e^{j\Omega_0 t}+e^{-j\Omega_0 t}}{2}$

Σήμα	Π.Σ.
$e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow \dfrac{1}{s-j\Omega_0}$	$\mathrm{Re}(s)>0$
$e^{-j\Omega_0 t} \leftrightarrow \dfrac{1}{s+j\Omega_0}$	$\mathrm{Re}(s)>0$
$\dfrac{1}{2}\bullet e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow \dfrac{1}{2}\bullet\dfrac{1}{s-j\Omega_0}$	$\mathrm{Re}(s)>0$
$\dfrac{1}{2}\bullet e^{-j\Omega_0 t} \leftrightarrow \dfrac{1}{2}\bullet\dfrac{1}{s+j\Omega_0}$	$\mathrm{Re}(s)>0$
$\cos(\Omega_0 t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2}\bullet\left(\dfrac{1}{s-j\Omega_0}+\dfrac{1}{s+j\Omega_0}\right) = \dfrac{s}{s^2+\Omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s)>0$

Παρατήρηση: Γενικά ισχύει ότι $e^{-ct} \leftrightarrow \dfrac{1}{s+c}$ όπου c μιγαδικός

Β τρόπος με ορισμό του Μετασχηματισμού Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\bullet e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\cos(\Omega_0 t)\bullet u(t)\bullet e^{-st}dt = \int_0^{\infty}\cos(\Omega_0 t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{j\Omega_0 t}+e^{-j\Omega_0 t}}{2}\right)e^{-st}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{j\Omega_0 t}\bullet e^{-st}dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-j\Omega_0 t}\bullet e^{-st}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-t(s-j\Omega_0)}dt - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-t(s+j\Omega_0))}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{-(s-j\Omega_n)}\left[e^{-t(s-j\Omega_0)}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{-(s+j\Omega_n)}\left[e^{-t(s+j\Omega_0)}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2(s-j\Omega_0)}(0-1) - \frac{1}{2(s+j\Omega_0))}(0-1) =$$

$$= \frac{1}{2\bullet(s-j\Omega_0)} + \frac{1}{2\bullet(s+j\Omega_0)} = \frac{1}{2}\bullet\left(\frac{s+j\Omega_0+s-j\Omega_0}{s^2-(j\Omega_0)^2}\right) = \frac{1}{2}\bullet\frac{2s}{s^2+\Omega_0^2} = \frac{s}{s^2+\Omega_0^2}$$

Οι πόλοι είναι $s_1 = j\Omega_0$ και $s_2 = -j\Omega_0$ Η περιοχή σύγκλισης είναι Re(s)>0.

β) $L\{\sin(\Omega_0 t)\} = \dfrac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}$

<u>Α τρόπος με ιδιότητες</u>

Σήμα	Π.Σ.
$e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow \dfrac{1}{s-j\Omega_0}$	$\mathrm{Re}(s)>0$
$e^{-j\Omega_0 t} \leftrightarrow \dfrac{1}{s+j\Omega_0}$	$\mathrm{Re}(s)>0$
$\dfrac{1}{2j}\bullet e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow \dfrac{1}{2j}\bullet\dfrac{1}{s-j\Omega_0}$	$\mathrm{Re}(s)>0$
$\dfrac{1}{2j}\bullet e^{-j\Omega_0 t} \leftrightarrow \dfrac{1}{2j}\bullet\dfrac{1}{s+j\Omega_0}$	$\mathrm{Re}(s)>0$
$\sin(\Omega_0 t)=\left(\dfrac{1}{2j}\bullet e^{j\Omega_0 t}-\dfrac{1}{2j}\bullet e^{-j\Omega_0 t}\right)\leftrightarrow \dfrac{1}{2j}\bullet\left(\dfrac{1}{s-j\Omega_0}-\dfrac{1}{s+j\Omega_0}\right)=\dfrac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s)>0$

<u>Β τρόπος με ορισμό του Μετασχηματισμού Laplace</u>

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\bullet e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\Omega_0 t)\bullet u(t)\bullet e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}\sin(\Omega_0 t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{j\Omega_0 t}-e^{-j\Omega_0 t}}{2j}\right)e^{-st}dt=$$

$$=\frac{1}{2j}\int_0^\infty e^{j\Omega_0 t}\bullet e^{-st}dt-\frac{1}{2j}\int_0^\infty e^{-j\Omega_0 t}\bullet e^{-st}dt=\frac{1}{2j}\int_0^\infty e^{-t(s-j\Omega_0)}dt-\frac{1}{2j}\int_0^\infty e^{-t(s+j\Omega_0))}dt=$$

$$=\frac{1}{2j}\bullet\frac{1}{-(s-j\Omega_0)}\left[e^{-t(s-j\Omega_0)}\right]_0^\infty-\frac{1}{2j}\bullet\frac{1}{-(s+j\Omega_0)}\left[e^{-t(s+j\Omega_0)}\right]_0^\infty=-\frac{1}{2j(s-j\Omega_0)}\bullet(0-1)+\frac{1}{2j(s+j\Omega_0))}\bullet(0-1)=$$

$$=\frac{1}{2j\bullet(s-j\Omega_0)}-\frac{1}{2j\bullet(s+j\Omega_0)}=\frac{1}{2j}\bullet\left(\frac{s+j\Omega_0-s+j\Omega_0}{s^2-(j\Omega_0)^2}\right)=\frac{1}{2j}\bullet\frac{2j\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}=\frac{\Omega_n}{s^2+\Omega_0^2}$$

Οι πόλοι είναι $s_1=j\Omega_0$ και $s_2=-j\Omega_0$ Η περιοχή σύγκλισης είναι Re(s)>0.

γ) $L\{e^{-at}\cos(\Omega_0 t)\}=\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\Omega_0^2}$

Χρησιμοποιώντας το γνωστό ML: $L\{\cos(\Omega_0 t)\}=\dfrac{s}{s^2+\Omega_0^2}\ \mathrm{Re}(s)>0$

και την ιδιότητα ολίσθησης στη συχνότητα $e^{-s_0 t}\bullet x(t)\leftrightarrow X(s+s_0), \mathrm{Re}(s)>\sigma_0+\mathrm{Re}(s_0)$ προκύπτει ότι:

$$L\{e^{-at}\cos(\Omega_0 t)\}=\frac{s+a}{(s+a)^2+\Omega_0^2}$$

Οι πόλοι είναι $(s+a)^2=-\Omega_0^2 \Rightarrow (s+a)^2=(j\Omega_0)^2 \Rightarrow (s+a)^2=\pm j\Omega_0 \Rightarrow \begin{cases} s_1=-a-j\Omega_0 \\ s_2=-a+j\Omega_0 \end{cases}$

Η Π.Σ. είναι $\mathrm{Re}(s)>0+\mathrm{Re}(s_0)=0+(-a)\Rightarrow \mathrm{Re}(s)>-a$

Η ολίσθηση εδώ είναι πραγματικός αριθμός

Άρα $L\{e^{-at}\cos(\Omega_0 t)\}=\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\Omega_0^2}\ \mathrm{Re}(s)>-a$

Οι πόλοι είναι δύο συζυγείς μιγαδικοί και λαμβάνουμε υπόψη μας μόνο το πραγματικό τους μέρος για τον υπολογισμό της περιοχής σύγκλισης τους.

δ) $L\{t\cos(\Omega_0 t)\} = \dfrac{s^2-\Omega_0^2}{\left(s^2+\Omega_0^2\right)^2}$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγώγισης στη συχνότητα $(-t)^n x(t) \leftrightarrow \dfrac{d^n X(s)}{ds^n}$

και θέτοντας n=1 προκύπτει $(-t)\bullet x(t) \leftrightarrow \dfrac{dX(s)}{ds} \Rightarrow t \bullet x(t) \leftrightarrow -\dfrac{dX(s)}{ds}$

Έχουμε βρει ότι $x(t) = \cos(\Omega_0 t) \leftrightarrow X(s) = \dfrac{s}{s^2+\Omega_0^2}$

Συνεπώς $t\cos(\Omega_0 t) \leftrightarrow -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^2+\Omega_0^2}\right) = -\left(\dfrac{s^2+\Omega_0^2-s2s}{\left(s^2+\Omega_0^2\right)^2}\right) = -\left(\dfrac{-s^2+\Omega_0^2}{\left(s^2+\Omega_0^2\right)^2}\right) = \dfrac{s^2-\Omega_0^2}{\left(s^2+\Omega_0^2\right)^2} \operatorname{Re}(s) > 0$

Άρα $L\{t\cos(\Omega_0 t)\} = \dfrac{s^2-\Omega_0^2}{\left(s^2+\Omega_0^2\right)^2} \operatorname{Re}(s) > 0$

<u>**Παρατήρηση**</u>

- **Αν βρούμε τους πόλους του** $\dfrac{s^2-\Omega_0^2}{\left(s^2+\Omega_0^2\right)^2}$ **παρατηρούμε ότι είναι δύο συζυγείς μιγαδικοί πόλοι επάνω στον φανταστικό άξονα και η ΠΣ είναι δεξιά των πόλων δηλ: Re(s)>0 θεωρώντας το** $\cos(\Omega_0 t)$ **ως αιτιατό σήμα**
- **Προσέξτε τη διαφορά** $t^n u(t) \leftrightarrow \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ **(γνωστός ML) και** $(-t)^n u(t) = (-1)^n t^n u(t) \leftrightarrow \dfrac{d^n}{ds^n}\left(\dfrac{1}{s}\right)$ **(ιδιότητα παραγώγισης)**

3.10.3 Άσκηση 1.3

1.3 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων

$\alpha)\ x(t) = u(t) - u(t-1)$

$\beta)\ x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \delta(t-kT), \quad (T>0)$

$\gamma)\ x(t) = t^n u(t),$

$\delta)\ x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi) u(t)$

<u>**Λύση**</u>

α) Σύμφωνα με τους γνωστούς ML: $L\{u(t)\} = \dfrac{1}{s}, \operatorname{Re}(s) > 0$ και $L\{u(t-1)\} = e^{-s}\dfrac{1}{s}, \operatorname{Re}(s) > 0$ Από την ιδιότητα γραμμικότητας προκύπτει ότι: $L\{u(t)-u(t-1)\} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{e^{-s}}{s} = \dfrac{1-e^{-s}}{s}, \operatorname{Re}(s) > -\infty$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

ΕΠΕΙΔΗ ΤΟ ΣΗΜΑ $u(t)-u(t-1)$ ΕΧΕΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΧΡΟΝΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ (ΔΗΛ ΕΧΕΙ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΧΡΟΝΙΚΕΣ ΣΤΙΓΜΕΣ), Η Π.Σ. ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥ ML ΕΙΝΑΙ ΟΛΟ ΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΗΛ $\operatorname{Re}(s) > -\infty$ ΠΑΡΟΛΟ ΠΟΥ Η ΤΟΜΗ ΤΩΝ Π.Σ. ΤΩΝ u(t) ΚΑΙ u(t-1) ΕΙΝΑΙ $\operatorname{Re}(s) > 0$. **ΓΕΝΙΚΑ ΣΕ ΕΝΑ ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ ΣΗΜΑ ΠΟΥ ΕΚΦΡΑΖΕΤΑΙ ΩΣ ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΥΟ ΒΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ Ο ML ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ** $\operatorname{Re}(s) > -\infty$

β) $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \bullet \delta(t-kT)(T>0)$

Σύμφωνα με τους γνωστούς ML και την ιδιότητα γραμμικότητας προκύπτει:

$$\delta(t) \leftrightarrow 1,\ \operatorname{Re}(s) > -\infty$$

$$\delta(t-kT) \leftrightarrow e^{-skT} \bullet 1,\ \operatorname{Re}(s) > -\infty$$

$$a^k \bullet \delta(t-kT) \leftrightarrow a^k \bullet e^{-skT}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \bullet \delta(t-kT) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a^k \bullet e^{-skT}$$

$$x(t) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a^k \bullet e^{-skT} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a \bullet e^{-sT}\right)^k = \frac{1}{1-a \bullet e^{-sT}}$$

Η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \; |a|<1$. Από τον περιορισμό αυτό προκύπτει και η Π.Σ. δηλαδή:

$$\left|a \bullet e^{-sT}\right| < 1 \Rightarrow \left|e^{-sT}\right| < \frac{1}{|a|} \Rightarrow -sT < \ln\left(\frac{1}{|a|}\right) \Rightarrow -sT < \left(\ln 1 - \ln|a|\right) \Rightarrow -sT < -\ln|a| \Rightarrow sT > \ln|a| \Rightarrow s > \frac{\ln|a|}{T}$$

Άρα $x(t) \leftrightarrow \frac{1}{1-a \bullet e^{-sT}}, \mathrm{Re}(s) > \frac{\ln|a|}{T}$

γ) $x(t) = t^n \bullet u(t)$

Σύμφωνα με το γνωστό ML: $L\{u(t)\} = \frac{1}{s}\mathrm{Re}(s) > 0$ και την ιδιότητα παραγώγισης στη συχνότητα $(-t)^n \bullet x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(s)}{ds^n}$ που μπορεί να γραφεί και με τη μορφή $(-1)^n \bullet t^n \bullet x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(s)}{ds^n}$ προκύπτει ότι: $(-1)^n \bullet t^n \bullet x(t) \leftrightarrow \frac{d^n\left(\frac{1}{s}\right)}{ds^n}$

Υπολογίζουμε σταδιακά τις παραγώγους του $\left(\frac{1}{s}\right)$ μέχρι να φτάσουμε στη n-οστή παράγωγο.

<u>1η παράγωγος του 1/s</u>

$$\left(\frac{1}{s}\right)' = -\frac{1}{s^2}$$

<u>2η παράγωγος του 1/s</u>

$$\left(\frac{1}{s}\right)'' = \left(-\frac{1}{s^2}\right)' = \frac{(-1)\bullet(-2)}{s^3} = \frac{1\bullet 2}{s^3}$$

<u>3η παράγωγος του 1/s</u>

$$\left(\frac{1}{s}\right)''' = \left(\frac{(-1)\bullet(-2)}{s^2}\right)' = -\frac{1\bullet 2\bullet 3}{s^4} =$$

……………….

<u>n-οστή παράγωγος του 1/s</u>

$$\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{(-1)^n \bullet n!}{s^{n+1}}$$

Άρα $t^n \bullet u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(-1)^n} \bullet \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) \Rightarrow (-1)^n \bullet t^n \bullet x(t) \leftrightarrow \frac{(-1)^n \bullet n!}{s^{n+1}} \Rightarrow t^n \bullet u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}, \mathrm{Re}(s) > 0$

Παρατήρηση:

Πολύ βασικός είναι ο ML $e^{-at}\bullet t^n \bullet u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$. Για να αποδείξουμε αυτόν τον ML εφαρμόζουμε την ιδιότητα ολίσθησης στη συχνότητα $e^{s_0 \bullet t}\bullet x(t) \leftrightarrow X(s-s_0)$ στον ML $t^n \bullet u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$ με s_0=a και προκύπτει ότι $e^{-at}\bullet t^n \bullet u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

δ) $x(t) = \cos(\Omega_0 t + \varphi)\bullet u(t)$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα: $\cos(a+b) = \cos(a)\bullet\cos(b) - \sin(a)\bullet\sin(b)$

προκύπτει ότι: $\cos(\Omega_0 t+\varphi) = \cos(\Omega_0 t)\bullet\cos(\varphi) - \sin(\Omega_0 t)\bullet\sin(\varphi)$ και

$$\cos(\Omega_0 t+\varphi)\bullet u(t) = \cos(\Omega_0 t)\bullet\cos(\varphi)\bullet u(t) - \sin(\Omega_0 t)\bullet\sin(\varphi)\bullet u(t) \Rightarrow \cos(\Omega_0 t)\bullet u(t)\bullet\cos(\varphi) - \sin(\Omega_0 t)\bullet u(t)\bullet\sin(\varphi)$$

Χρησιμοποιώντας τους γνωστούς ML: $L\{\cos(\Omega_0 t)\bullet u(t)\} = \frac{s}{s^2+\Omega_0^2}, \mathrm{Re}(s) > 0$

$$L\{\sin(\Omega_0 t)\bullet u(t)\} = \frac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}, \mathrm{Re}(s) > 0$$

προκύπτει τελικά ότι:

$$\begin{aligned}
&L\{\cos(\Omega_0 t)\bullet u(t)\bullet\cos(\varphi) - \sin(\Omega_0 t)\bullet u(t)\bullet\sin(\varphi)\} = \\
&= L\{\cos(\Omega_0 t)\bullet u(t)\bullet\cos(\varphi)\} - L\{\sin(\Omega_0 t)\bullet u(t)\bullet\sin(\varphi)\} = \\
&= L\{\cos(\Omega_0 t)\bullet u(t)\}\bullet\cos(\varphi) - L\{\sin(\Omega_0 t)\bullet u(t)\}\bullet\sin(\varphi) = \\
&= \frac{s}{s^2+\Omega_0^2}\bullet\cos(\varphi) - \frac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}\bullet\sin(\varphi) = \frac{s\bullet\cos(\varphi) - \Omega_0\bullet\sin(\varphi)}{s^2+\Omega_0^2}, \mathrm{Re}(s) > 0
\end{aligned}$$

Άρα:

$$\cos(\Omega_0 t+\varphi)\bullet u(t) \leftrightarrow \frac{s\bullet\cos(\varphi) - \Omega_0\bullet\sin(\varphi)}{s^2+\Omega_0^2}, \mathrm{Re}(s) > 0$$

3.10.4 Άσκηση 1.4

1.4 Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML των συναρτήσεων

α) $X(s) = \frac{1}{s^2+9}, \quad \Re e\{s\} > 0$

β) $X(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}, \quad \Re e\{s\} > -2$

γ) $X(s) = \frac{s^2-s+1}{s^2(s-1)}, \quad \Re e\{s\} > 1,$

δ) $X(s) = \frac{s^2-s+1}{(s+1)^2}, \quad \Re e\{s\} > -1$

Λύση

α) $X(s) = \frac{1}{s^2+9}, \mathrm{Re}(s) > 0$

Α τρόπος

Αναλύουμε το X(s) σε απλά κλάσματα αφού πρώτα παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή.

$$X(s) = \frac{1}{s^2+9} = \frac{1}{(s-3j)\bullet(s+3j)} = \frac{A}{(s-3j)} + \frac{B}{(s+3j)}$$

$$A = \lim_{s\to 3j}(s-3j)\bullet\frac{1}{(s-3j)\bullet(s+3j)} = \frac{1}{3j+3j} = \frac{1}{6j}$$

$$B=\lim_{s\to -3j}(s+3j)\bullet\frac{1}{(s-3j)\bullet(s+3j)}=\frac{1}{-3j-3j}=-\frac{1}{6j}$$

Άρα $X(s)=\dfrac{1}{s^2+9}=\dfrac{1}{(s-3j)\bullet(s+3j)}=\dfrac{1}{6j}\bullet\dfrac{1}{(s-3j)}-\dfrac{1}{6j}\bullet\dfrac{1}{(s+3j)}$

Σύμφωνα με τους γνωστούς ML: Σύμφωνα με τους γνωστούς ML $e^{at}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s+a}$ και $e^{-2t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s-a}$ προκύπτει ότι:

$e^{-3jt}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s+3j}$ και $e^{3jt}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s-3j}$

Άρα: $x(t)=-\dfrac{1}{6j}e^{-3jt}u(t)+\dfrac{1}{6j}e^{3jt}u(t)\Rightarrow x(t)=\dfrac{u(t)}{3}\bullet\left(\dfrac{e^{3jt}-e^{-3jt}}{2j}\right)\Rightarrow x(t)=\dfrac{1}{3}\bullet\sin(3t)\bullet u(t)$

Β τρόπος

Επειδή οι πόλοι 3j και -3j είναι πάνω στον φανταστικό άξονα και επειδή δίνεται ως Π.Σ. το διάστημα Re(s)>0, αυτό σημαίνει ότι η Π.Σ. είναι δεξιά του μεγαλύτερου πόλου, άρα το σήμα είναι αιτιατό. Σύμφωνα με το γνωστό ML:

$$L\{\sin(\Omega_0 t)u(t)\}=\frac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}$$

Προκύπτει για $\Omega_0=3$ ότι:

$$L\{\sin(3t)u(t)\}=\frac{3}{s^2+3^2}\Rightarrow L\frac{\{\sin(3t)u(t)\}}{3}=\frac{1}{s^2+3^2}$$

Άρα αποδεικνύουμε και με ένα δεύτερο τρόπο ότι:: $L\{\sin(3t)u(t)\}=\dfrac{1}{s^2+9}$

Παρατήρηση:

- Δίνεται ότι η Π.Σ. Re(s)>0 και από αυτό συμπεραίνομε ότι το σήμα είναι αιτιατό διότι η Π.Σ. είναι δεξιά από τους πόλους. Αν δινόταν Re(s)<0 τότε το σήμα x(t) είναι μη αιτιατό και υπολογίζεται ως εξής:

$$x(t)=\frac{1}{6j}e^{-3jt}u(-t)-\frac{1}{6j}e^{3jt}u(-t)$$

b) $X(s)=\dfrac{s+1}{s^2+5s+6},\operatorname{Re}(s)>-2$

Επειδή η Π.Σ. είναι δεξιά του μεγαλύτερου πόλου (οι πόλοι είναι το -2 και το -3) άρα το σήμα είναι αιτιατό.

Αναλύουμε το X(s) σε απλά κλάσματα αφού πρώτα παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή.

$$X(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}=\frac{s+1}{(s+3)\bullet(s+2)}=\frac{A}{(s+3)}+\frac{B}{(s+2)}$$

$$A=\lim_{s\to -3}(s+3)\bullet\frac{s+1}{(s+3)\bullet(s+2)}=\frac{-3+1}{-3+2}=2$$

$$B=\lim_{s\to -2}(s+2)\bullet\frac{s+1}{(s+3)\bullet(s+2)}=\frac{-2+1}{-2+3}=-1$$

Άρα $X(s)=\dfrac{s+1}{s^2+5s+6}=\dfrac{s+1}{(s+3)\bullet(s+2)}=\dfrac{2}{(s+3)}-\dfrac{1}{(s+2)}$

Σύμφωνα με τους γνωστούς ML $e^{at}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s+a}$ και $e^{-2t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s-a}$ προκύπτει ότι: $2e^{-3t}u(t)\leftrightarrow 2\bullet\dfrac{1}{s+3}$ και $-e^{-2t}u(t)\leftrightarrow-\dfrac{1}{s+2}$

Άρα: $x(t)=2e^{-3t}u(t)-e^{-2t}u(t)$

<u>Παρατήρηση</u>

Αν η Π.Σ. δινόταν ως Re(s)<-3 τότε το σήμα x(t) θα ήταν μη αιτιατό και θα είχαμε: $-2\bullet e^{-3t}u(-t)\leftrightarrow 2\bullet\frac{1}{s+3}$ και

$+e^{-2t}u(-t)\leftrightarrow -\frac{1}{s+2}$ Το x(t) θα ήταν: $x(t)=-2\bullet e^{-3t}u(-t)+e^{-2t}u(-t)\Rightarrow x(t)=\left(-2\bullet e^{-3t}+e^{-2t}\right)\bullet u(-t)$

γ) $X(s)=\frac{s^2-s+1}{s^2(s-1)},\mathrm{Re}(s)>1$

Επειδή η Π.Σ. είναι δεξιά του μεγαλύτερου πόλου (οι πόλοι είναι το 0 και το 1) άρα το σήμα είναι αιτιατό.

Αναλύουμε το X(s) σε απλά κλάσματα.

$$X(s)=\frac{s^2-s+1}{s^2(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{\Gamma}{s-1}$$

$$A=\lim_{s\to 0}\frac{1}{(2-1)!}\bullet\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left((s-0)^2\bullet\frac{s^2-s+1}{s^2(s-1)}\right)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{s^2-s+1}{(s-1)}\right)'=\lim_{s\to 0}\left(\frac{(2s-1)\bullet(s-1)-\left(s^2-s+1\right)}{(s-1)^2}\right)=0$$

$$B=\lim_{s\to 0}\frac{1}{(2-2)!}\bullet\frac{d^{2-2}}{ds^{2-2}}\left((s-0)^2\bullet\frac{s^2-s+1}{s^2(s-1)}\right)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{s^2-s+1}{s-1}\right)=-1$$

$$\Gamma=\lim_{s\to 1}(s-1)\bullet\frac{s^2-s+1}{s^2(s-1)}=1$$

Άρα $X(s)=\frac{s^2-s+1}{s^2(s-1)}=\frac{0}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s-1}=-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s-1}$

Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο Laplace χρησιμοποιούμε μια από τις ακόλουθες μεθόδους:

- Σύμφωνα με το γενικό τύπο: $c_i\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}e^{\lambda_1 t}u(t), i=1,2,....,r$ (λ1 είναι ο πόλος) που χρησιμοποιούμε στον αντίστροφο Laplace προκύπτει ότι ο αντίστροφος ML για i=2 του όρου $-\frac{1}{s^2}$ είναι ο $c_2\frac{t^{2-1}}{(2-1)!}e^{\lambda_1 t}u(t)=-te^{0t}u(t)=-t$. O αντίστροφος ML του $\frac{1}{s-1}$ είναι ο $e^t\bullet u(t)$. Άρα: $x(t)=-t\bullet u(t)+e^t u(t)\Rightarrow x(t)=\left(e^t-t\right)\bullet u(t)$
- Σύμφωνα με το γενικό τύπο $t^n\bullet u(t)\leftrightarrow\frac{n!}{s^{n+1}}$ θέτουμε όπου n=1 και προκύπτει $t\bullet u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^{1+1}}=\frac{1}{s^2}$. Άρα $x(t)=-t\bullet u(t)+e^t u(t)\Rightarrow x(t)=\left(e^t-t\right)\bullet u(t)$

<u>Παρατήρηση:</u>

Επειδή $\mathrm{Re}(s)>1$ το σήμα είναι αιτιατό. Αν δεν δινόταν περιοχή σύγκλισης τότε θα έπρεπε να πάρουμε 3 περιπτώσεις:

- Η 1η περίπτωση αυτή είναι αυτή που εξετάσαμε δηλ. η Π.Σ. να είναι δεξιά του μεγαλύτερου πόλου (αιτιατό σήμα).
- Η 2η περίπτωση είναι η Π.Σ. να είναι αριστερά του μικρότερου πόλου δηλ. $\mathrm{Re}(s)<0$ δηλ $x(t)=\left(e^t-t\right)\bullet u(t)$
- Η 3η περίπτωση είναι η Π.Σ. να είναι ανάμεσα στους πόλους δηλ. $0<\mathrm{Re}(s)<1$ δηλ $x(t)=-e^t\bullet u(-t)-t\bullet u(t)$

δ) $X(s)=\frac{s^2-s+1}{(s+1)^2},\mathrm{Re}(s)>-1$

Μπορούμε να γράψουμε τον X(s) ως εξής: $X(s)=\frac{s^2-s+1}{s^2+2s+1}$

Παρατηρούμε ότι ο βαθμός του αριθμητή και του παρονομαστή είναι ίδιοι μεταξύ τους, άρα δεν μπορεί να γίνει ανάλυση σε απλά κλάσματα. Κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων (Αριθμητής/Παρονομαστής) και προκύπτει το εξής πηλίκο (και υπόλοιπο):

$$\begin{array}{l|l} s^2-s+1 & s^2+2s+1 \\ \cline{2-2} -s^2-2s-1 & 1 \\ -3s & \end{array}$$

Συνεπώς $X(s)=1-\frac{3s}{s^2+2s+1}=1-\frac{3s}{(s+1)^2},\mathrm{Re}(s)>-1$

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα τον όρο $\frac{3s}{(s+1)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}$

$$A=\lim_{s\to-1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left[(s+1)^2\frac{3s}{(s+1)^2}\right]=\lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}[3s]=3$$

$$B=\lim_{s\to-1}\frac{1}{(2-2)!}\frac{d^{2-2}}{ds^{2-2}}\left[(s+1)^2\frac{3s}{(s+1)^2}\right]=\lim_{s\to-1}[3s]=-3$$

$$X(s)=1-\frac{3}{s+1}+\frac{3}{(s+1)^2},\mathrm{Re}(s)>-1$$

<u>Α τρόπος</u>

Σύμφωνα με το γνωστό ML: $e^{-at}\bullet t^n u(t)\leftrightarrow\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ θέτοντας n=1 προκύπτει $e^{-t}\bullet tu(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s+1)^2}$

Με αντίστροφο ML παίρνουμε: $x(t)=\delta(t)-3\bullet e^{-t}\bullet u(t)+3\bullet t\bullet e^{-t}\bullet u(t)\Rightarrow x(t)=\delta(t)+3\bullet(t-1)\bullet e^{-t}\bullet u(t)$

<u>Β τρόπος</u>

Σύμφωνα με το γενικό τύπο: $c_i\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}e^{\lambda_1 t}u(t),i=1,2,....,r$ προκύπτει ότι ο αντίστροφος ML για i=2 του όρου $-\frac{3}{(s+1)^2}$ είναι ο

$-3\bullet\frac{t^{2-1}}{(2-1)!}e^{-t}u(t)=-3t\bullet e^{-t}u(t)$ και συνολικά με αντίστροφο ML προκύπτει ότι:

$$x(t)=\delta(t)-3\bullet e^{-t}\bullet u(t)+3\bullet t\bullet e^{-t}\bullet u(t)\Rightarrow x(t)=\delta(t)+3\bullet(t-1)\bullet e^{-t}\bullet u(t)$$

<u>Παρατήρηση</u>

Για να υπολογίζουμε γενικά αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace σε όρους με εκθέτη χρησιμοποιούμε το γενικό μετασχηματισμό:

$$e^{-at}\bullet t^n u(t)\leftrightarrow\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

ενώ όταν δεν υπάρχει a θέτουμε όπου a=0

3.10.5 Άσκηση 1.5

1.5 Θεωρείστε ένα ΓΧΑ σύστημα στο οποίο εφαρμόζεται το σήμα εισόδου $x(t)=e^{-t}u(t)$ και το οποίο έχει κρουστική απόκριση $h(t)=e^{-2t}u(t)$

α) Υπολογίστε τους μετασχηματισμούς Laplace των $x(t)$, $h(t)$

β) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης βρείτε το ML $Y(s)$ της εξόδου $y(t)$

γ) Από το ML $Y(s)$ καθορίστε την έξοδο $y(t)$

δ) Υπολογίστε την έξοδο $y(t)$ χρησιμοποιώντας τον τύπο της συνέλιξης

<u>Λύση</u>

Δίνεται ένα ΓΧΑ σύστημα στο οποίο εφαρμόζεται το σήμα εισόδου $x(t)=e^{-t}u(t)$ και έχει κρουστική απόκριση $h(t)=e^{-2t}u(t)$

α) Ο ML της εισόδου x(t) είναι: $x(t)=e^{-t}u(t)\leftrightarrow X(s)=\frac{1}{s+1}, \mathrm{Re}(s)>-1$

Ο ML της κρουστικής απόκρισης h(t) είναι: $h(t)=e^{-2t}u(t)\leftrightarrow H(s)=\frac{1}{s+2}, \mathrm{Re}(s)>-2$

β) Ο ML της εξόδου του συστήματος είναι:

$$y(t)=x(t)*h(t)\leftrightarrow Y(s)=X(s)\bullet H(s)\Rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s+2)\bullet(s+1)}\mathrm{Re}(s)>-1$$

γ) Η έξοδος y(t) υπολογίζεται με αντίστροφο ML ως εξής:

$$Y(s)=\frac{1}{(s+2)\bullet(s+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}$$

$$A=\lim_{s\to-1}(s+1)\bullet\frac{1}{(s+1)\bullet(s+2)}=\frac{1}{-1+2}=1$$

$$B=\lim_{s\to-2}(s+2)\bullet\frac{1}{(s+1)\bullet(s+2)}=\frac{1}{-2+1}=-1$$

Συνεπώς:

$$Y(s)=\frac{1}{(s+2)\bullet(s+1)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

και με αντίστροφο ML προκύπτει ότι:

$$y(t)=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$$

δ) Η έξοδος y(t) υπολογίζεται με συνέλιξη ως εξής:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(r)\bullet h(t-r)dr=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-r}u(r)e^{-2(t-r)}u(t-r)dr=\int_0^t e^{-r}e^{-2t}e^{2r}dr=e^{-2t}\int_0^t e^{r}dr=e^{-2t}\left[e^{r}\right]_0^t=$$

$$=e^{-2t}\left(e^{t}-1\right)u(t)=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$$

3.10.6 Άσκηση 1.6

1.6 Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

α) Όταν η είσοδος στο σύστημα είναι η $x(t)=e^{2t}$, η έξοδος είναι η $y(t)=(1/6)e^{2t}$.

β) Η κρουστική απόκριση $h(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)=e^{-4t}u(t)+bu(t)$$

όπου b μια άγνωστη σταθερά. Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$

__Λύση__

Δίνεται ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση h(t) και δύο ιδιότητες. Γνωρίζουμε την είσοδο $x(t)=e^{2t}u(t)$ και την έξοδο $y(t)=\frac{1}{6}e^{2t}$. Επίσης γνωρίζουμε τη διαφορική εξίσωση που το περιγράφει: $\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)=e^{-4t}u(t)+bu(t)$ και ζητάμε τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς H(s).

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητας παραγώγισης στο χρόνο:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n}\leftrightarrow s^n X(s)-s^{n-1}x(0^-)-s^{n-2}x'(0^-)-s^{n-3}x''(0^-)-....-s^0x^{(n-1)}(0^-)$$

παίρνουμε ML και στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης που μας δίνεται και προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$sH(s)-h(0^-)+2H(s)=\frac{1}{s+4}+b\frac{1}{s}$$

Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό ισχύει ότι $h(0^-)=0$, άρα η προηγούμενη εξίσωση παίρνει τώρα τη μορφή:

$$sH(s)+2H(s)=\frac{1}{s+4}+\frac{b}{s}\Rightarrow H(s)\bullet(s+2)=\frac{s+bs+4b}{s(s+4)}\Rightarrow H(s)=\frac{s+bs+4b}{s(s+4)\bullet(s+2)}\mathrm{Re}(s)>0$$

Κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα και προκύπτει ότι: $H(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}+\frac{\Gamma}{s+4}$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Α, Β, Γ με τα όρια όπως ακολούθως:

$$A=\lim_{s\to 0}(s-0)\bullet\frac{s(b+1)+4b}{s(s+4)(s+2)}=\frac{b}{2}$$

$$B=\lim_{s\to -2}(s+2)\bullet\frac{s(b+1)+4b}{s(s+4)(s+2)}=\frac{1-b}{2}$$

$$\Gamma=\lim_{s\to -4}(s+4)\bullet\frac{s(b+1)+4b}{s(s+4)(s+2)}=-\frac{1}{2}$$

Συνεπώς: $H(s)=\frac{b}{2}\bullet\frac{1}{s}+\frac{1-b}{2}\bullet\frac{1}{s+2}-\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{s+4}$

Εφαρμόζουμε αντίστροφο ML και στα δύο μέλη της τελικής εξίσωσης για το H(s) και προκύπτει ότι:

$$h(t)=\frac{b}{2}\bullet u(t)+\frac{1-b}{2}\bullet e^{-2t}\bullet u(t)-\frac{1}{2}\bullet e^{-4t}\bullet u(t)$$

Παρατηρούμε ότι η κρουστική απόκριση έχει μέσα της την άγνωστη σταθερά b.

Η έξοδος του συστήματος υπολογίζεται από τον τύπο της συνέλιξης ως εξής:

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-r)\bullet h(r)dr=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2(t-r)}\bullet\left[\frac{b}{2}\bullet u(r)+\frac{1-b}{2}\bullet e^{-2r}\bullet u(r)-\frac{1}{2}\bullet e^{-4r}\bullet u(r)\right]dr=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2t}\bullet e^{-2r}\bullet\left[\frac{b}{2}\bullet u(r)+\frac{1-b}{2}\bullet e^{-2r}\bullet u(r)-\frac{1}{2}\bullet e^{-4r}\bullet u(r)\right]dr=$$

$$=e^{2t}\bullet\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2r}\bullet\frac{b}{2}\bullet u(r)dr+e^{2t}\bullet\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2r}\bullet e^{-2r}\bullet\frac{1-b}{2}\bullet u(r)dr-e^{2t}\bullet\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2r}\bullet e^{-4r}\bullet\frac{1}{2}\bullet u(r)dr=$$

$$=e^{2t}\bullet\frac{b}{2}\bullet\int_{0}^{\infty}e^{-2r}dr+e^{2t}\bullet\frac{1-b}{2}\bullet\int_{0}^{\infty}e^{-4r}dr-e^{2t}\bullet\frac{1}{2}\bullet\int_{0}^{\infty}e^{-6r}dr=$$

$$=e^{2t}\bullet\frac{b}{2}\bullet\frac{1}{-2}\left[e^{-2r}\right]_0^{\infty}+e^{2t}\bullet\frac{1-b}{2}\bullet\frac{1}{-4}\left[e^{-4r}\right]_0^{\infty}-e^{2t}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{-6}\left[e^{-6r}\right]_0^{\infty}=$$

$$=-\frac{b}{4}\bullet e^{2t}\bullet[0-1]+e^{2t}\bullet\frac{b-1}{8}[0-1]+e^{2t}\bullet\frac{1}{12}[0-1]=\frac{b}{4}\bullet e^{2t}-\frac{b-1}{8}e^{2t}-\frac{1}{12}\bullet e^{2t}=e^{2t}\bullet\left(\frac{b}{4}+\frac{1-b}{8}-\frac{1}{12}\right)$$

Άρα η έξοδος του συστήματος είναι: $y(t)=e^{2t}\bullet\left(\frac{b}{4}+\frac{1-b}{8}-\frac{1}{12}\right)$

Στην εκφώνηση της άσκησης δίνεται ότι $y(t)=\frac{1}{6}e^{2t}$

Άρα προκύπτει ότι: $y(t)=\frac{1}{6}e^{2t}=e^{2t}\bullet\left(\frac{b}{4}+\frac{1-b}{8}-\frac{1}{12}\right)\Rightarrow\frac{1}{6}=\frac{b}{4}+\frac{1-b}{8}-\frac{1}{12}\Rightarrow b=1$

Συνεπώς η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(s)=\frac{b}{2}\bullet\frac{1}{s}+\frac{1-b}{2}\bullet\frac{1}{s+2}-\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{s+4}\Rightarrow H(s)=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{s}+\frac{1-1}{2}\bullet\frac{1}{s+2}-\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{s+4}\Rightarrow H(s)=\frac{1}{2s}-\frac{1}{2(s+4)}\Rightarrow$$

$$H(s)=\frac{2}{s(s+4)}\ \mathrm{Re}(s)>0$$

3.10.7 Άσκηση 1.7

1.7 Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα S έχει κρουστική απόκριση $h(t)$ και η σχέση εισόδου-εξόδου περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+(1+\alpha)\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\alpha(1+\alpha)\frac{dy(t)}{dt}+\alpha^2y(t)=x(t).$$

$\alpha)$ Αν

$$g(t)=\frac{dh(t)}{dt}+h(t),$$

πόσους πόλους έχει η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$;

$\beta)$ Για ποιες πραγματικές τιμές της παραμέτρου α το σύστημα S είναι ευσταθές;

<u>Λύση</u>

α) Δίνεται ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+(1+\alpha)\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\alpha(1+\alpha)\frac{dy(t)}{dt}+\alpha^2y(t)=x(t)$$

και θέλουμε να υπολογίσουμε τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς G(s) για την κρουστική απόκριση $g(t)=\frac{dh(t)}{dt}-h(t)$

Πρώτα υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς H(s) ως εξής (παίρνουμε ML και στα δύο μέλη της h(t) και εφαρμόζουμε την ιδιότητα παραγώγισης στο χρόνο.

$$\left[s^3Y(s)-s^2y(0^-)-sy'(0^-)-s^0y''(0^-)\right]+(1+\alpha)\bullet\left[s^2Y(s)-sy(0^-)-s^0y'(0^-)\right]+\alpha(1+\alpha)\bullet\left[sY(s)-s^0y(0^-)\right]+\alpha^2Y(s)$$
$$=X(s)\Rightarrow s^3Y(s)+(1+\alpha)\bullet s^2Y(s)+\alpha(1+\alpha)\bullet s\bullet Y(s)+\alpha^2Y(s)=X(s)\Rightarrow Y(s)\bullet\left(s^3+(1+\alpha)s^2+\alpha(1+\alpha)s+\alpha^2\right)=$$
$$X(s)\Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^3+(1+\alpha)s^2+\alpha(1+\alpha)s+\alpha^2}$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι στον παραπάνω υπολογισμό θεωρήσαμε $y(0^-)=0,y'(0^-)=0,y''(0^-)=0$ διότι το σύστημα δίνεται αιτιατό.

Μετά παίρνουμε ML και στα δύο μέλη της g(t) και προκύπτει:

$$G(s)=sH(s)-h(0^-)-H(s)\Rightarrow G(s)=(s-1)\bullet H(s)\Rightarrow G(s)=\frac{s-1}{s^3+(1+\alpha)s^2+\alpha(1+\alpha)s+\alpha^2}$$

Πρώτα πρέπει να βρούμε τις ρίζες του παρονομαστή. Για να λύσουμε μια εξίσωση βαθμού > 2 ξεκινάμε δοκιμάζοντας πειραματικές ρίζες. Μια ρίζα είναι το -1. Άρα

$s^3+(1+\alpha)s^2+\alpha(1+\alpha)s+\alpha^2$	$s+1$
$-s^3-s^2$	$s^2+\alpha s+\alpha^2$
$\alpha s^2+\alpha\ (1+\alpha)s+\alpha^2$	
$-\alpha s^2-\alpha s$	
$\alpha^2s+\alpha^2$	
$-\alpha^2s-\alpha^2$	
0	

Οι ρίζες του $s^2+\alpha s+\alpha^2$ είναι: $\left\langle \begin{matrix} -\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}i \\ -\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}i \end{matrix} \right.$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς G(s) γράφεται ως εξής::

$$G(s)=\frac{s-1}{s^3+(1+\alpha)s^2+\alpha(1+\alpha)s+\alpha^2}=\frac{s-1}{(s+1)\bullet\left(s+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}i\right)\bullet\left(s+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

και οι πόλοι της είναι:

- $s_1=-1$
- $s_2=-\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}i$
- $s_3=-\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}i$

Συνεπώς η G(s) έχει 3 πόλους: ένα πραγματικό (τον -1) και δύο συζυγείς μιγαδικούς που εξαρτώνται από την παράμετρο α.

β)Για να είναι ευσταθές ένα σύστημα πρέπει ΟΛΟΙ οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Ο πραγματικός πόλος στο -1 προφανώς έχει αρνητικό πραγματικό μέρος. Οι δύο συζυγείς μιγαδικοί πόλοι με πραγματικό μέρος $-\dfrac{\alpha}{2}$ θα βρίσκονται στο αρνητικό μιγαδικό επίπεδο αν α>0. **Συνεπώς το σύστημα είναι ευσταθές για α>0**.

3.10.8 Άσκηση 1.8

1.8 Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$2y''(t)+4y'(t)+4y(t)=4\delta(t)+2u(t)-3u(t-1)$$

και οι αρχικές συνθήκες $y(0^-)=y'(0^-)=0$

α) Βρείτε τις τιμές $y(0^+)$, $y'(0^+)$

β) Βρείτε την $y(t)$

Λύση

α)

Υπολογισμός y(0⁺) - Θεώρημα Αρχικής Τιμής

Για να υπολογίσουμε την τιμή $y(0^+)$ εφαρμόζουμε το θεώρημα Αρχικής Τιμής σύμφωνα με το οποίο $y(0^+)=\lim_{s\to\infty} s\bullet Y(s)$. Άρα πρώτα πρέπει να βρούμε τον ML της y(t) δηλ. τον Y(s). Παίρνουμε ML και στα δύο μέλη της διαφορικής που δίνεται:

$$2\left(s^2Y(s)-sy(0^-)-s^0y'(0^-)\right)+4\left(sY(s)-y(0^-)\right)+4Y(s)=4+2\frac{1}{s}-3e^{-s}\frac{1}{s}\Rightarrow$$

$$2s^2Y(s)+4sY(s)+4Y(s)=\frac{4s+2-3e^{-s}}{s}\Rightarrow Y(s)\bullet\left(2s^2+4s+4\right)=\frac{4s+2-3e^{-s}}{s}\Rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{4s+2-3e^{-s}}{s\left(2s^2+4s+4\right)}\Rightarrow Y(s)=\frac{4s+2-3e^{-s}}{2s^3+4s^2+4s}$$

Αντικαθιστούμε τον ML Y(s) στον τύπο για το θεώρημα Αρχικής Τιμής και προκύπτει ότι:

$$y(0^+)=\lim_{s\to\infty} s\bullet Y(s)\Rightarrow y(0^+)=\lim_{s\to\infty} s\bullet\frac{4s+2-3e^{-s}}{s\left(2s^2+4s+4\right)}\Rightarrow y(0^+)=\lim_{s\to\infty}\frac{4s+2-3e^{-s}}{2s^2+4s+4}\Rightarrow$$

$$y(0^+)=\lim_{s\to\infty}\frac{4s+2}{2s^2+4s+4}-\lim_{s\to\infty}\frac{3e^{-s}}{2s^2+4s+4}\Rightarrow y(0^+)=\lim_{s\to\infty}\frac{4s}{2s^2}-\lim_{s\to\infty}\frac{3}{e^s\bullet\left(2s^2+4s+4\right)}\Rightarrow y(0^+)=0$$

Υπολογισμός y′(0⁺) - Παράγωγος θεωρήματος Αρχικής Τιμής

Για να υπολογίσουμε το $y'(0^+)$ πρέπει να εφαρμόσουμε την παράγωγο στο θεώρημα Αρχικής Τιμής σύμφωνα με το οποίο:

$$y'(0^+)=\lim_{s\to\infty} s\bullet[s\bullet Y(s)-y(0^-)]$$

Άρα $y'(0^+)=\lim_{s\to\infty} s\bullet[s\bullet Y(s)-y(0^-)]=\lim_{s\to\infty} s^2\bullet Y(s)-\lim_{s\to\infty} s\bullet y(0^-)=\lim_{s\to\infty} s^2\bullet Y(s)$

$$y'(0^+)=\lim_{s\to\infty} s^2\bullet Y(s)=\lim_{s\to\infty} s^2\bullet\frac{4s+2-3e^{-s}}{s\bullet\left(2s^2+4s+4\right)}=\lim_{s\to\infty}\frac{4s^3+2s^2-3s^2e^{-s}}{2s^3+4s^2+s}=2$$

β) Ο ML της εξόδου είναι $Y(s)=\dfrac{4s+2-3e^{-s}}{2s^3+4s^2+4s}$ ο οποίος διασπάται σε 3 όρους

$\boxed{\textbf{1}^{\text{ος}}\ \textbf{όρος}\ \dfrac{2}{(s+1)^2+1^2}}$

Σύμφωνα με τους γνωστούς ML $\sin(\Omega_0 t)\leftrightarrow\dfrac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0{}^2}$ και $e^{-at}\sin(\Omega_0 t)\leftrightarrow\dfrac{\Omega_0}{(s+a)^2+\Omega_0{}^2}$ για $\Omega_0=1$ και $\alpha=1$ προκύπτει:

$e^{-t}\sin(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{(s+1)^2+1^2}$ και επειδή το σήμα είναι αιτιατό προκύπτει $\boxed{\dfrac{2}{(s+1)^2+1^2}\leftrightarrow 2\bullet e^{-t}\sin(t)\leftrightarrow\dfrac{2}{(s+1)^2+1^2}}$ (1)

$$\boxed{\textbf{2}^{\textbf{ος}}\ \textbf{όρος}\ \frac{1}{s\bullet\left(s^2+2s+2\right)}}$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα συνέλιξης στο χρόνο προκύπτει ότι:

$$\boxed{\frac{1}{s\bullet\left(s^2+2s+2\right)}=\frac{1}{s}\bullet\frac{1}{\left(s^2+2s+2\right)}\leftrightarrow u(t)*e^{-t}\bullet\sin\left(t\right)\bullet u(t)}$$

$$\boxed{\textbf{3}^{\textbf{ος}}\ \textbf{όρος}\ -\frac{3}{2}e^{-s}\bullet\frac{1}{s\bullet\left(s+1\right)^2+1^2}}$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα ολίσθησης στο χρόνο προκύπτει ότι:

$$\boxed{-\frac{3}{2}e^{-s}\bullet\frac{1}{s}\bullet\frac{1}{\left(s^2+2s+2\right)}\leftrightarrow -\frac{3}{2}u(t-1)*e^{-(t-1)}\bullet\sin\left(t-1\right)\bullet u(t-1)}$$

Άρα η έξοδος είναι: $y(t)=2e^{-t}\bullet\sin\left(t\right)+u(t)*2e^{-t}\bullet\sin\left(t\right)\bullet u(t)-\frac{3}{2}u(t-1)*\bullet e^{-(t-1)}\bullet\sin\left(t-1\right)\bullet u(t-1)$

3.11 Ασκήσεις και Θέματα με Μετασχηματισμό Laplace

3.11.1 Άσκηση με Θεώρημα Συνέλιξης και Ανάλυσης σε απλά κλάσματα

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML της συνάρτησης $X(s)=\dfrac{1}{s^2(s+a)}$

Λύση

Περίπτωση 1: Αν -a≠0 τότε υπάρχουν **δύο Διακριτοί (Διαφορετικοί) Πόλοι** δηλαδή που είναι το 0 και -a

$$X(s)=\frac{1}{s^2(s+a)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{\Gamma}{(s+a)}$$

$$A=\lim_{s\to 0}\frac{1}{(2-1)!}\bullet\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left[s^2\bullet\frac{1}{s^2(s+a)}\right]=\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\frac{1}{(s+a)}=\lim_{s\to 0}-\frac{1}{(s+a)^2}=-\frac{1}{a^2}$$

$$B=\lim_{s\to 0}\frac{1}{(2-2)!}\bullet\frac{d^{2-2}}{ds^{2-2}}\left[s^2\bullet\frac{1}{s^2(s+a)}\right]=\lim_{s\to 0}\frac{1}{(s+a)}=\frac{1}{a}$$

$$\Gamma=\lim_{s\to -a}\left[(s+a)\bullet\frac{1}{s^2(s+a)}\right]=\lim_{s\to -a}\frac{1}{s^2}=\frac{1}{a^2}$$

$$X(s)=\frac{1}{s^2(s+a)}=-\frac{1}{a^2}\bullet\frac{1}{s}+\frac{1}{a}\bullet\frac{1}{s^2}+\frac{1}{a^2}\bullet\frac{1}{(s+a)}$$

Υποπερίπτωση 1α:Η Π.Σ. είναι Re{s}>max{-a, 0} οπότε το σήμα x(t) είναι αιτιατό

Στην περίπτωση αυτή και τα τρία σήματα είναι αιτιατά συνεπώς: $x(t)=-\dfrac{1}{a^2}\bullet u(t)+\dfrac{1}{a}\bullet t\bullet u(t)+\dfrac{1}{a^2}\bullet e^{-at}u(t)$

Υποπερίπτωση 1β: Re{s}<min{-a, 0} οπότε το σήμα x(t) είναι μη αιτιατό

Στην περίπτωση αυτή και τα τρία σήματα είναι μη αιτιατά συνεπώς: $x(t)=\dfrac{1}{a^2}\bullet u(-t)-\dfrac{1}{a}\bullet t\bullet u(-t)-\dfrac{1}{a^2}\bullet e^{-at}u(-t)$

Υποπερίπτωση 1γ: Η Π.Σ. είναι s_1<Re{s}<s_2⇒οπότε το σήμα x(t) περιλαμβάνει ένα αιτιατό και ένα μη αιτιατό τμήμα

i) Αν $s_1=-a<Re\{s\}<s_2=0\Rightarrow$ $x(t)=\dfrac{1}{a^2}\bullet u(-t)-\dfrac{1}{a}\bullet t\bullet u(-t)+\dfrac{1}{a^2}\bullet e^{-at}u(t)$

ii) Αν $s_2=0<Re\{s\}<s_1=-a\Rightarrow$ $x(t)=-\dfrac{1}{a^2}\bullet u(t)+\dfrac{1}{a}\bullet t\bullet u(t)-\dfrac{1}{a^2}\bullet e^{-at}u(-t)$

<u>Περίπτωση 2:</u> Αν a=0 τότε έχουμε ως πόλο μόνο το 0 με πολλαπλότητα 3

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι τώρα $X(s)=\dfrac{1}{s^3}$

Υποπερίπτωση 2α: Η Π.Σ. είναι 0<Re{s} ⇒ το σήμα x(t) είναι αιτιατό και $x(t)=\dfrac{1}{2}\bullet t^2\bullet u(t)$

Υποπερίπτωση 2β: Η Π.Σ. είναι Re{s}<0 ⇒το σήμα x(t) είναι μη αιτιατό και $x(t)=-\dfrac{1}{2}\bullet t^2\bullet u(-t)$

Παρατηρήσεις

• Μπορούμε να γράψουμε τον ML $X(s)=\dfrac{1}{s^2(s+a)}$ ως γινόμενο 2 ML και συγκεκριμένα των $\dfrac{1}{s^2}$ και $\dfrac{1}{(s+a)}$ οπότε το αντίστοιχο σήμα στο πεδίο του χρόνου είναι $x(t)=t\bullet u(t)*e^{-at}u(t)$ διότι $t^n u(t)\leftrightarrow\dfrac{n!}{s^{n+1}}\Rightarrow tu(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s^2}$ και $e^{-at}tu(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{(s+a)}$

• Ο γενικός τύπος υπολογισμού των συντελεστών που αντιστοιχούν σε όρους με πολλαπλότητα

$$c_i=\lim_{s\to\lambda_1}\frac{1}{(r-i)!}\bullet\frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}}\left[(s-\lambda_1)^r\bullet X(s)\right]$$

3.11.2 Θέμα με μετασχηματισμό Laplace και Περιοχή Σύγκλισης-Θέμα 3 Σεπτέμβριος 2010

Ο Μετασχηματισμός Laplace της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ ενός πραγματικού αιτιατού συστήματος συνεχούς χρόνου δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\mathfrak{L}\{h(t)\} = H(s) = \frac{2}{s+3}\prod_{k=1}^{2}\frac{1}{s+s_k}$$

Προσδιορίστε την περιοχή σύγκλισης του παραπάνω μετασχηματισμού και υπολογίστε τη κρουστική απόκριση του συστήματος. Εξετάστε όλες τις δυνατές περιπτώσεις και σχολιάστε για κάθε περίπτωση την ΦΕΦΕ ευστάθεια του συστήματος.

<u>Λύση</u>

Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, η Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης $H(s)$ θα είναι $\mathrm{Re}(s) > \sigma_{\max}$, όπου $\sigma_{\max}$ είναι το πραγματικό μέρος του πόλου που έχει το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος σε σύγκριση με όλους τους υπόλοιπους πόλους. Δηλαδή είναι το πραγματικό μέρος του πόλου που βρίσκεται δεξιότερα από τους υπόλοιπους πόλους πάνω στο μιγαδικό επίπεδο.

$$H(s) = \frac{2}{s+3}\prod_{k=1}^{2}\frac{1}{s+s_k} = \frac{2}{(s+3)(s+s_1)(s+s_2)}$$

Βλέπουμε ότι η $H(s)$ έχει τρεις πόλους: $-3, -s_1, -s_2$. Ο πρώτος πόλος είναι πραγματικός, ενώ οι άλλοι δύο θα θεωρήσουμε ότι θα μπορούσαν να είναι και μιγαδικοί, επειδή δεν το διευκρινίζει η εκφώνηση.

Π.χ. Αν $-3 \geq \mathrm{Re}(-s_1)$ και $-3 \geq \mathrm{Re}(-s_2)$, τότε η περιοχή σύγκλισης είναι $\mathrm{Re}(s) > -3$.

Αν $\mathrm{Re}(-s_1) \geq -3$ και $\mathrm{Re}(-s_1) \geq \mathrm{Re}(-s_2)$, τότε η περιοχή σύγκλισης είναι $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(-s_1)$.

Για τον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης του συστήματος θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο Μετασχηματσμό Laplace (ML) της $H(s)$.

Έχουμε $H(s) = \dfrac{2}{s+3}\dfrac{1}{s+s_1}\dfrac{1}{s+s_2}$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) Αν $s_1 = s_2 = 3$, δηλαδή έχουμε έναν τριπλό πόλο, τον -3. Τότε $H(s) = \dfrac{2}{(s+3)^3}$

2) Αν $s_1 = s_2 \neq 3$, δηλαδή έχουμε έναν απλό πόλο, τον -3, και έναν διπλό πόλο, τον $-s_1$. Τότε

$$H(s) = \frac{2}{(s+3)(s+s_1)^2}$$

3) Αν $s_1 = 3 \neq s_2$. Τότε $H(s) = \dfrac{2}{(s+3)^2(s+s_2)}$

4) Αν $s_2 = 3 \neq s_1$. Τότε $H(s) = \dfrac{2}{(s+3)^2(s+s_1)}$

5) Αν $3 \neq s_1 \neq s_2 \neq 3$, δηλαδή έχουμε τρεις απλούς πόλους. Τότε $H(s) = \frac{2}{(s+3)(s+s_1)(s+s_2)}$

Θα υπολογίσουμε τον Αντίστροφο ML σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις.
Παρακάτω, οι συμβολισμοί $x(t) \leftrightarrow X(s)$ και $X(s) \leftrightarrow x(t)$ σημαίνουν ότι η συνάρτηση $X(s)$ είναι ο ML της συνάρτησης $x(t)$.

1) $H(s) = \frac{2}{(s+3)^3} \leftrightarrow t^2 e^{-3t} u(t)$, όπου $u(t)$ είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση.

2) Θα κάνουμε διάσπαση σε απλά κλάσματα

$$H(s) = \frac{2}{(s+3)(s+s_1)^2} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+s_1} + \frac{\Gamma}{(s+s_1)^2}$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές *Α, Β* και *Γ*:

$$A = \lim_{s \to -3} H(s)(s+3) = \lim_{s \to -3} \frac{2}{(s+s_1)^2} = \frac{2}{(-3+s_1)^2}$$

$$B = \lim_{s \to -s_1} \frac{d}{ds}[H(s)(s+s_1)^2] = \lim_{s \to -s_1} \frac{d}{ds}[\frac{2}{(s+3)}] = \lim_{s \to -s_1} \frac{-2}{(s+3)^2} = \frac{-2}{(-s_1+3)^2}$$

$$\Gamma = \lim_{s \to -s_1} H(s)(s+s_1)^2 = \lim_{s \to -s_1} \frac{2}{s+3} = \frac{2}{-s_1+3}$$

Τώρα ο υπολογισμός του αντιστρόφου ML:

$$H(s) \leftrightarrow Ae^{-3t}u(t) + Be^{-s_1 t}u(t) + \Gamma te^{-s_1 t}u(t)$$

Οι περιπτώσεις (3) και (4) είναι παρόμοιες με την περίπτωση (2), οπότε έχουμε

3) $H(s) \leftrightarrow Ae^{-s_2 t}u(t) + Be^{-3t}u(t) + \Gamma te^{-3t}u(t)$, με $A = \frac{2}{(-s_2+3)^2}$, $B = \frac{-2}{(-3+s_2)^2}$, $\Gamma = \frac{2}{-3+s_2}$

4) $H(s) \leftrightarrow Ae^{-s_1 t}u(t) + Be^{-3t}u(t) + \Gamma te^{-3t}u(t)$, με $A = \frac{2}{(-s_1+3)^2}$, $B = \frac{-2}{(-3+s_1)^2}$, $\Gamma = \frac{2}{-3+s_1}$

5) Θα κάνουμε διάσπαση σε απλά κλάσματα

$$H(s) = \frac{2}{(s+3)(s+s_1)(s+s_2)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+s_1} + \frac{\Gamma}{s+s_2}$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές *A, B* και *Γ*:

$$A=\lim_{s\to -3} H(s)(s+3)=\lim_{s\to -3}\frac{2}{(s+s_1)(s+s_2)}=\frac{2}{(-3+s_1)(-3+s_2)}$$

$$B=\lim_{s\to -s_1} H(s)(s+s_1)=\lim_{s\to -s_1}\frac{2}{(s+3)(s+s_2)}=\frac{2}{(-s_1+3)(-s_1+s_2)}$$

$$\Gamma=\lim_{s\to -s_2} H(s)(s+s_2)=\lim_{s\to -s_2}\frac{2}{(s+3)(s+s_1)}=\frac{2}{(-s_2+3)(-s_2+s_1)}$$

Τώρα υπολογισμός του Αντιστρόφου ML:

$$H(s)\leftrightarrow Ae^{-3t}u(t)+Be^{-s_1 t}u(t)+\Gamma e^{-s_2 t}u(t)$$

Ας δούμε τώρα την ΦΕΦΕ ευστάθεια του συστήματος.

Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, για να είναι και ευσταθές πρέπει όλοι οι πόλοι να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου. Δηλαδή όλοι οι πόλοι πρέπει να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Για τον πόλο -3 αυτό προφανώς ισχύει. Άρα για ευστάθεια πρέπει $\mathrm{Re}(-s_1)<0$ και $\mathrm{Re}(-s_2)<0$.

<u>Παρατήρηση:</u>

Στον αντίστροφο ML τα σήματα που αντιστοιχούν στους όρους με πολλαπλότητα υπολογίζονται με 2 τρόπους:

1ος τρόπος: Από τον τύπο $e^{-at}\bullet t^n\bullet u(t)\leftrightarrow\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

2ος τρόπος: Από τον τύπο $c_i\frac{t}{(i-1)!}^{i-1}\bullet e^{\lambda_1 t}u(t)$ για $i=1,2...,r$

3.11.3 Θέμα με μετασχηματισμό Laplace και Περιοχή Σύγκλισης-Θέμα 3 Σεπτέμβριος 2013

ΘΕΜΑ 3: (25%)

Ο Μετασχηματισμός Laplace της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ ενός πραγματικού αιτιατού συστήματος συνεχούς χρόνου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\mathcal{L}\{h(t)\}=H(s)=\frac{2}{s+3}\prod_{k=1}^{2}\frac{1}{s-s_k},\ \mathrm{Im}\{s_k\}\neq 0.$$

Προσδιορίστε την περιοχή σύγκλισης του παραπάνω μετασχηματισμού και υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος. Εξετάστε όλες τις δυνατές περιπτώσεις και σχολιάστε για κάθε περίπτωση την ΦΕΦΕ ευστάθεια του συστήματος.

<u>Λύση</u>

ΘΕΜΑ 3(25%). Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

1. Το σύστημα έχει πραγματικούς συντελεστές
2. $Im\{s_k\}\neq 0,\ k=1,2.$

Άρα η μοναδική επιλογή για τους δύο άγνωστους πόλους του συστήματος είναι αυτοί να είναι συζυγείς, δηλαδή: $s_1=\sigma_1+j\Omega_1$ και $s_2=s_1^\star=\sigma_1-j\Omega_1$ με $\Omega_1\neq 0$.

Έχοντας επιλέξει τους πόλους του συστήματος, κάνουμε ανάλυση σε μερικά κλάσματα της συνάρτησης μεταφοράς, δηλαδή:

$$H(s)=\frac{2}{(s+3)(s-s_1)(s-s_1^\star)}=\frac{A_0}{s+3}+\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_1^\star} \tag{1}$$

όπου

$$\begin{aligned}
A_0 &= H(s)(s+3)|_{s=-3}=\frac{2}{(s-s_1)(s-s_1^\star)}|_{s=-3}=\frac{2}{(3+\sigma_1)^2+\Omega_1^2}\\
A_1 &= H(s)(s-s_1)|_{s=s_1}=\frac{2}{(s+3)(s_1-s_1^\star)}|_{s=s_1}=\frac{-1}{\Omega_1(\Omega_1-j(3+\sigma_1))}\\
A_2 &= H(s)(s-s_1^\star)|_{s=s_1^\star}=\frac{2}{(s+3)(s_1^\star-s_1)}|_{s=s_1^\star}=\frac{-1}{\Omega_1(\Omega_1+j(3+\sigma_1))}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την πληροφορία ότι το ζητούμενο σύστημα είναι αιτιατό και τη σχέση $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}u(t)\}=\frac{1}{s-\alpha},\ \mathcal{R}e\{s\}>\mathcal{R}e\{\alpha\}$ (η οποία σας δίνονταν στο φύλλο θεμάτων), από την (1) έχουμε:

1. Περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού και ΦΕΦΕ ευστάθεια του **αιτιατού** Συστήματος.

   Η περιοχή σύγκλισης θα είναι το υποσύνολο $\mathcal{S}=\{s:\sigma>max\{-3,\ \sigma_1\}\}$ του μιγαδικού επιπέδου-s ($s=\sigma+j\Omega$), και η ευστάθεια του συστήματος είναι φανερό ότι θα καθορίζεται από την τιμή του σ_1.

   Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

   (α') $\sigma_1>0$: Το σύστημα είναι ασταθές και $\mathcal{S}=\{s:\sigma>\sigma_1\}$.

   (β') $\sigma_1<0$: Το σύστημα είναι ευσταθές και (γ) $\sigma_1 = 0$: Η ευστάθεια του συστήματος είναι κρίσιμη ή ουδέτερη και $\mathcal{S} = \{s : \sigma > 0\}$.

2. Κρουστική απόκριση του συστήματος

Από τη σχέση $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}u(t)\} = \frac{1}{s-\alpha}$ έχουμε ότι $e^{\alpha t}u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\alpha}\right\}$ και επομένως από την (5) έχουμε:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = A_0 e^{-3t}u(t) + A_1 e^{(\sigma_1 + j\Omega_1)t}u(t) + A_2 e^{(\sigma_1 - j\Omega_1)t}u(t).$$

<u>Β τρόπος Λύσης</u>

Η συνάρτηση μεταφοράς έχει την ακόλουθη μορφή: $H(s) = \dfrac{2}{(s+3)\bullet(s-s_1)\bullet(s-s_2)}$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1

$s_1 \neq s_2 \neq -3$

Αναλύουμε τη συνάρτηση μεταφοράς σε άθροισμα απλών κλασμάτων δηλ

$$H(s) = \frac{2}{(s+3)\bullet(s-s_1)\bullet(s-s_2)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-s_1} + \frac{\Gamma}{s-s_2}$$

$$A = \lim_{s\to -3}(s+3)\bullet\frac{2}{(s+3)\bullet(s-s_1)\bullet(s-s_2)} = \lim_{s\to -3}\frac{2}{(s-s_1)\bullet(s-s_2)} = \frac{2}{(-3-s_1)\bullet(-3-s_2)}$$

$$B = \lim_{s\to -s_1}(s-s_1)\bullet\frac{2}{(s+3)\bullet(s-s_1)\bullet(s-s_2)} = \lim_{s\to -s_1}\frac{2}{(s+3)\bullet(s-s_2)} = \frac{2}{(-s_1+3)\bullet(-s_1-s_2)}$$

$$\Gamma = \lim_{s\to -s_2}(s-s_2)\bullet\frac{2}{(s+3)\bullet(s-s_1)\bullet(s-s_2)} = \lim_{s\to -s_2}\frac{2}{(s+3)\bullet(s-s_1)} = \frac{2}{(-s_2+3)\bullet(-s_2-s_1)}$$

Άρα $H(s) = \dfrac{2}{(-3-s_1)\bullet(-3-s_2)}\bullet\dfrac{1}{s+3} + \dfrac{2}{(-s_1+3)\bullet(-s_1-s_2)}\bullet\dfrac{1}{s-s_1} + \dfrac{2}{(-s_2+3)\bullet(-s_2-s_1)}\bullet\dfrac{1}{s-s_2}$

Επειδή το σύστημα δίνεται από την εκφώνηση ως αιτιατό κάνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος που είναι:

$$h(t) = \frac{2}{(-3-s_1)\bullet(-3-s_2)}\bullet e^{-3t}u(t) + \frac{2}{(-s_1+3)\bullet(-s_1-s_2)}\bullet e^{s_1 t}u(t) + \frac{2}{(-s_2+3)\bullet(-s_2-s_1)}\bullet e^{s_2 t}u(t)$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι: $\mathrm{Re}(s) > \max\{-3, -s_1, -s_2\}$

Για να είναι το σύστημα ΦΕΦΕ Ευσταθές (επειδή είναι και αιτιατό) πρέπει όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος δηλ. $\mathrm{Re}(-s_1) < 0, \mathrm{Re}(-s_2) < 0$ αφού ο πόλος -3 έχει εξορισμού πραγματικό μέρος.

Περίπτωση 2

$s_1 = s_2 \neq -3$

Αναλύουμε τη συνάρτηση μεταφοράς σε άθροισμα απλών κλασμάτων δηλ

$$H(s) = \frac{2}{(s+3)\bullet(s-s_1)^2} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-s_1} + \frac{\Gamma}{(s-s_1)^2}$$

$$A = \lim_{s\to -3}(s+3)\bullet\frac{2}{(s+3)\bullet(s-s_1)^2} = \lim_{s\to -3}\frac{2}{(s-s_1)^2} = \frac{2}{(-3-s_1)^2}$$

$$B = \lim_{s\to -s_1}\frac{1}{(2-1)!}\bullet\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left((s-s_1)^2\bullet\frac{2}{(s+3)\bullet(s-s_1)^2}\right) = \lim_{s\to -s_1}\left(\frac{2}{s+3}\right)' = \lim_{s\to -s_1}\frac{2}{(s+3)^2} = \frac{2}{(-s_1+3)^2}$$

$$\Gamma = \lim_{s\to -s_1} \frac{1}{(2-2)!} \bullet \frac{d^{2-2}}{ds^{2-2}} \left((s-s_1)^2 \bullet \frac{2}{(s+3)\bullet(s-s_1)^2} \right) = \lim_{s\to -s_1} \left(\frac{2}{s+3} \right) = \frac{2}{(-s_1+3)}$$

Άρα $H(s) = \frac{2}{(-3-s_1)^2} \bullet \frac{1}{s+3} + \frac{2}{(-s_1+3)^2} \bullet \frac{1}{s-s_1} + \frac{2}{(-s_1+3)} \bullet \frac{1}{(s-s_1)^2}$

Επειδή το σύστημα δίνεται από την εκφώνηση ως αιτιατό κάνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος που είναι:

$$h(t) = \frac{2}{(-3-s_1)^2} \bullet e^{-3t}u(t) + \frac{2}{(-s_1+3)^2} \bullet e^{s_1 t}u(t) + \frac{2}{(-s_1+3)} \bullet e^{s_1 t}tu(t)$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι: $\mathrm{Re}(s) > \max\{-3, -s_1\}$

Για να είναι το σύστημα ΦΕΦΕ Ευσταθές (επειδή είναι και αιτιατό) πρέπει όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος δηλ. $\mathrm{Re}(-s_1) < 0$ αφού ο πόλος -3 έχει εξορισμού πραγματικό μέρος.

ΠΡΟΣΟΧΗ: ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΑΛΛΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΔΙΟΤΙ Ο ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΟΥ ΔΙΝΕΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΚΦΩΝΗΣΗ ΟΤΙ ΔΗΛΑΔΗ Im{$s_k \neq 0$} ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΟΤΙ ΟΙ ΠΟΛΟΙ ΕΧΟΥΝ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ (IMAGINARY) ΜΕΡΟΣ

3.11.4 Θέμα με μετασχηματισμό Laplace και μετασχηματισμό Fourier –Ιούνιος 2010

(α) (10%)

Βρείτε το αιτιατό σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ καθώς και την περιοχή σύγκλισης του Μετασχηματισμού Laplace του σήματος ο οποίος δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$X(s) = \prod_{k=1}^{2} \frac{\lambda_k}{s+a_k}, \ a_k \geq 0$$

(β) (20%)

Ο Μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος $x(t)$, δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$X(j\Omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{N-1} [\delta(\Omega + \sqrt{r \bmod(2)+1}\Omega_n) + \delta(\Omega - \sqrt{r \bmod(2)+1}\Omega_n)] + \sum_{n=0}^{N-1} [\frac{j\Omega}{(r \bmod(2)+1)\Omega_n^2 - \Omega^2}]$$

όπου $\delta(.)$ η γενικευμένη συνάρτηση δέλτα. Υπολογίστε τον Μετασχηματισμό Laplace του σήματος. Δικαιολογήστε τα αποτελέσματά σας.

Λύση

(α)

Έχουμε $X(s)=\prod_{k=1}^{2}\frac{\lambda_k}{s+a_k}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{(s+a_1)(s+a_2)}$, με $a_1,\alpha_2\geq 0$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) αν $a_1\neq a_2$, τότε έχουμε δύο απλούς πόλους $p_1=-a_1,\quad p_2=-a_2$.

Επειδή το σήμα είναι αιτιατό η Περιοχή Σύγκλισης (Π.Σ.) θα είναι $\mathrm{Re}(s)>\sigma_{\max}$, όπου $\sigma_{\max}$ είναι το πραγματικό μέρος του πόλου που έχει το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος σε σύγκριση με όλους τους υπόλοιπους πόλους. Άρα Π.Σ. $\mathrm{Re}(s)>\max(-a_1,-a_2)$.

Για να βρούμε το σήμα $x(t)$ θα εφαρμόσουμε αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace (ML) στην $X(s)$.

Αρχικά κάνουμε διάσπαση σε απλά κλάσματα

$$X(s)=\frac{\lambda_1\lambda_2}{(s+a_1)(s+a_2)}=\frac{A}{s+a_1}+\frac{B}{s+a_2}$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές A και B:

$$A=\lim_{s\to -a_1}\frac{\lambda_1\lambda_2}{s+a_2}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{-a_1+a_2},\qquad B=\lim_{s\to -a_2}\frac{\lambda_1\lambda_2}{s+a_1}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{-a_2+a_1}$$

Προκύπτει

$$x(t)=Ae^{-a_1t}u(t)+Be^{-a_2t}u(t)=\frac{\lambda_1\lambda_2}{a_2-a_1}(e^{-a_1t}-e^{-a_2t})u(t)$$

2) αν $a_1=a_2$, τότε έχουμε έναν διπλό πόλο $p=-a_1$. Άρα Π.Σ. $\mathrm{Re}(s)>-a_1$.

Τότε $X(s)=\frac{\lambda_1\lambda_2}{(s+a_1)(s+a_2)}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{(s+a_1)^2}$

Και με εφαρμογή του αντιστρόφου ML προκύπτει

$$x(t)=\lambda_1\lambda_2te^{-a_1t}u(t)$$

(β)

Όταν γνωρίζουμε τον Μετασχηματισμό Fourier (MF) ενός σήματος, για να βρούμε τον ML του ίδιου σήματος εργαζόμαστε ως εξής:

- Διαγράφουμε όλες τις κρουστικές συναρτήσεις
- Αντικαθιστούμε το $j\Omega$ με το s.

Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ο εξής ML: $X_L(s) = \sum_{n=0}^{N-1} [\frac{s}{(r \bmod(2)+1)\Omega_n^2 + s^2}],\ \text{Re}(s) > 0$

Αν $r = 0, 2, 4, \ldots$, έχουμε $r \bmod(2) = 0$ $\quad X_L(s) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{s}{s^2 + \Omega_n^2},\quad \text{Re}(s) > 0$

Αν $r = 1, 3, 5, \ldots$, έχουμε $r \bmod(2) = 1$ $\quad X_L(s) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{s}{s^2 + 2\Omega_n^2},\quad \text{Re}(s) > 0$

3.11.5 Άσκηση με μετασχηματισμό Laplace με σειρά Fourier

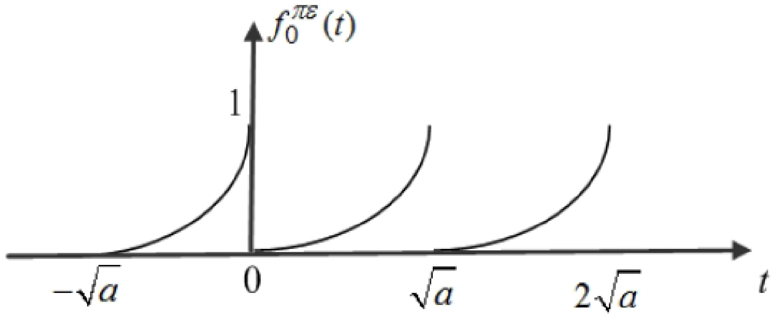
Θεωρείστε το σήμα συνεχούς χρόνου $f(t)=\dfrac{t^2}{a},\ \ 0\le t\le\sqrt{a}$.

(α): (20%). Υπολογίστε τη Σειρά Fourier της περιοδικής επέκτασης του σήματος $f_{r\,\mathrm{mod}(2)}(t)=f(\sqrt{a(r\,\mathrm{mod}(2))}+(-1)^{r\,\mathrm{mod}(2)}t)$.

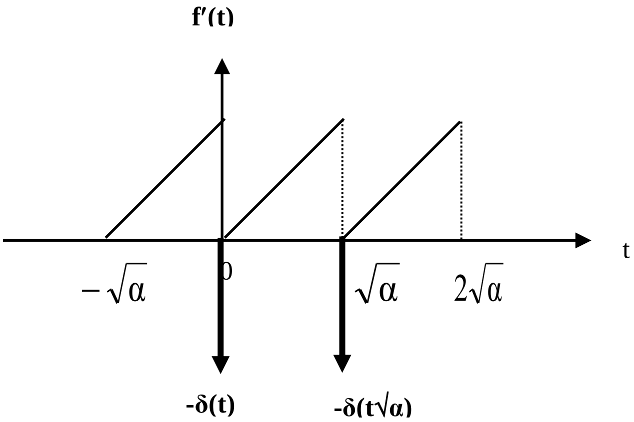
(β): (10%). Υπολογίστε τον Μετασχηματισμό Laplace της αιτιατής περιοδικής επέκτασης του σήματος του ερωτήματος (α).

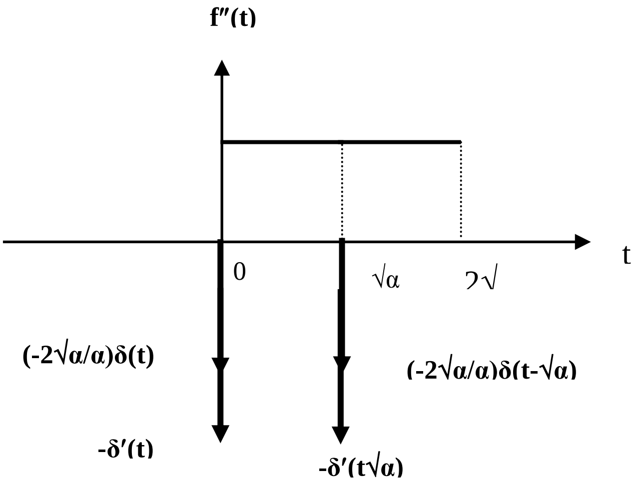
Λύση

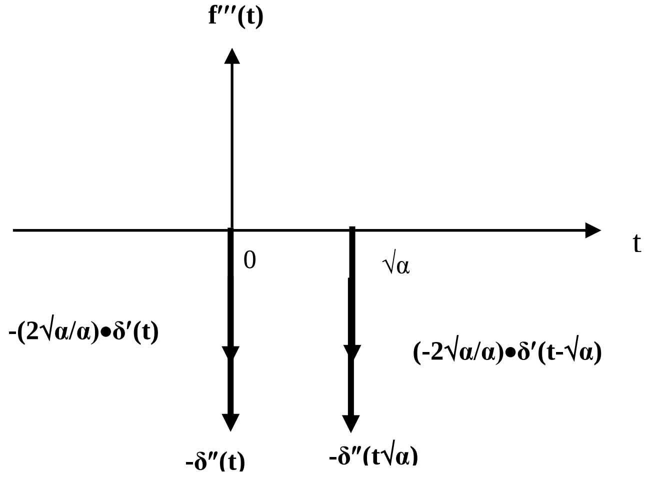
r mod 2 =0



Σχήμα 1. Η περιοδική επέκταση του σήματος $f_0(t)$.







Οι συντελεστές της $3^{ης}$ παραγώγου της σειράς Fourier είναι οι ακόλουθοι:

$$c_n^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{\sqrt{\alpha}}\left(-\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha}\delta'(t)-\delta''(t)\right)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{\sqrt{\alpha}}-\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha}\delta'(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{\sqrt{\alpha}}\left(-\delta''(t)\right)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt =$$

$$= -\frac{2}{\alpha}(-1)^1\left(-jn\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(-1)^2\left(j^2n^2\frac{4\pi^2}{\alpha}\right) = \frac{4\pi^2n^2-4\pi jn}{\alpha\sqrt{\alpha}}$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι οι ακόλουθοι:

$$c_n = \frac{c_n^{(3)}}{(jn\Omega_0)^3} = \frac{\dfrac{4\pi^2n^2-4\pi jn}{\alpha\sqrt{\alpha}}}{-jn^3\dfrac{8\pi^3}{\alpha\sqrt{\alpha}}} = \frac{j-\pi n}{2\pi^2n^2 j} = \frac{-1-\pi nj}{-2\pi^2n^2} = \frac{1+\pi nj}{2\pi^2n^2}, n \neq 0$$

Ο συντελεστής c_0 είναι ο εξής:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\sqrt{a}} f_0^{\pi\varepsilon}(t)dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\sqrt{a}}\frac{t^2}{a}dt = \frac{1}{a\sqrt{a}}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{a\sqrt{a}}\left(\frac{a\sqrt{a}}{3}-0\right) = \frac{1}{3}$$

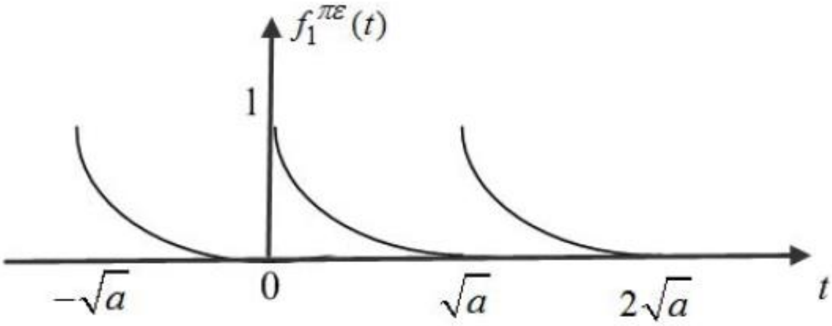
Άρα η σειρά Fourier είναι $x(t) = \frac{1}{3} + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty}\left(\frac{1+\pi nj}{2\pi^2n^2}\right)e^{jn\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}t}$

β)Η αιτιατή περιοδική επέκταση της x(t) είναι :

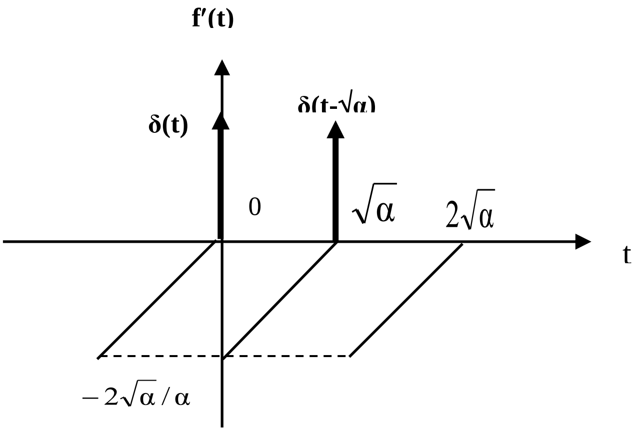
$$x(t) = \frac{1}{3}u(t) + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty}\left(\frac{1+\pi nj}{2\pi^2n^2}\right)e^{jn\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}t}\bullet u(t)$$

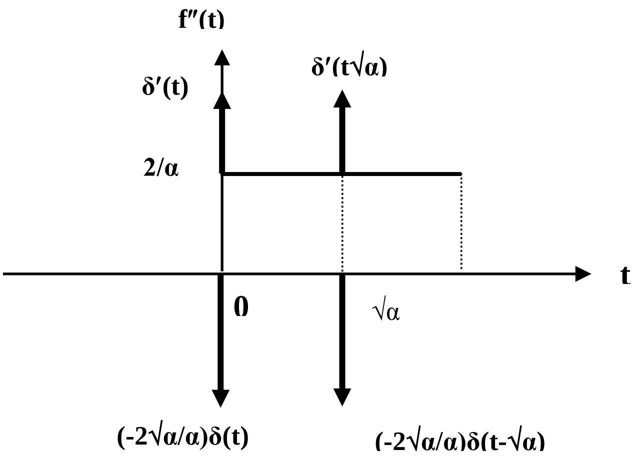
Ο ML αυτής είναι: $X(s) = \frac{1}{3}\bullet\frac{1}{s} + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty}\left(\frac{1+\pi nj}{2\pi^2n^2}\right)\bullet\frac{1}{s-jn\dfrac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}}, \mathrm{Re}(s) > 0$

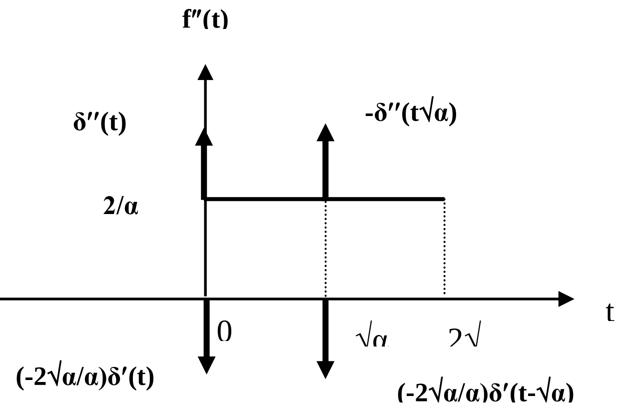
r mod 2 =1



Σχήμα 2. Η περιοδική επέκταση του σήματος $f_1(t)$.







Οι συντελεστές της 3ης παραγώγου της σειράς Fourier είναι οι ακόλουθοι:

$$c_n^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{\sqrt{\alpha}}\left(\delta''(t) - \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha}\delta'(t)\right)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{\sqrt{\alpha}}\delta''(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{\sqrt{\alpha}} -\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha}\delta'(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(-1)^2\left(e^{-jn\Omega_0 t}\right)''\Big|_{t=0} - \frac{1}{\alpha}(-1)^1\left(e^{-jn\Omega_0 t}\right)'\Big|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(-jn\Omega_0 e^{-jn\Omega_0 t}\right)\Big|_{t=0} + \frac{1}{\alpha}\left(-jn\Omega_0\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(j^2 n^2 \Omega_0{}^2 e^{-jn\Omega_0 t}\right)\Big|_{t=0} + \frac{1}{\alpha}\left(-jn\Omega_0\right) = -\frac{n^2\Omega_0{}^2}{\sqrt{\alpha}} - \frac{jn\Omega_0}{\alpha} = -\frac{4\pi^2 n^2}{\alpha\sqrt{\alpha}} - \frac{jn2\pi}{\alpha\sqrt{\alpha}} = \frac{-4\pi^2 n^2 - jn2\pi}{\alpha\sqrt{\alpha}}$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι οι ακόλουθοι:

$$c_n = \frac{c_n^{(3)}}{\left(jn\Omega_0\right)^3} = \frac{\dfrac{-4\pi^2 n^2 - jn2\pi}{\alpha\sqrt{\alpha}}}{-jn^3\dfrac{8\pi^3}{\alpha\sqrt{\alpha}}} = \frac{-\pi n - j}{-2j\pi^2 n^2} = \frac{\pi n + j}{2j\pi^2 n^2} = \frac{\pi nj - 1}{-2\pi^2 n^2} = \frac{1 - \pi nj}{2\pi^2 n^2}, n \neq 0$$

Ο συντελεστής c_0 είναι ο εξής:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\sqrt{a}} f_0^{\pi\varepsilon}(t)dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\sqrt{a}}\frac{t^2}{a}dt = \frac{1}{a\sqrt{a}}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{a\sqrt{a}}\left(\frac{a\sqrt{a}}{3} - 0\right) = \frac{1}{3}$$

Άρα η σειρά Fourier είναι $x(t) = \dfrac{1}{3} + \displaystyle\sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty}\left(\frac{1-\pi nj}{2\pi^2 n^2}\right)e^{jn\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}t}$

β)Η αιτιατή περιοδική επέκταση της x(t) είναι :

$$x(t) = \frac{1}{3}u(t) + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty}\left(\frac{1-\pi nj}{2\pi^2 n^2}\right)e^{jn\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}t}\bullet u(t)$$

Ο ML αυτής είναι: $X(s) = \dfrac{1}{3}\bullet\dfrac{1}{s} + \displaystyle\sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty}\left(\frac{1-\pi nj}{2\pi^2 n^2}\right)\frac{1}{s - jn\dfrac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}}, Re(s) > 0$

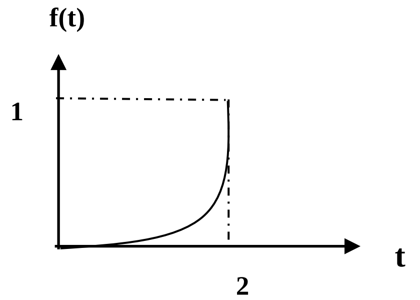
3.11.6 Άσκηση 2 με μετασχηματισμό Laplace με σειρά Fourier - Θέμα 2 Φεβρουάριος 2014

ΘΕΜΑ 2: (25%). Θεωρήστε το σήμα συνεχούς χρόνου $f(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^2,\ 2 \geq t \geq 0.$
(α): (15%). Υπολογίστε τη σειρά Fourier της περιοδικής επέκτασης του σήματος.
(β): (10%). Υπολογίστε τον Μετασχηματισμό Laplace του αιτιατού τμήματος της περιοδικής επέκτασης του σήματος του ερωτήματος (α) και σχολιάστε σύντομα τα αποτέλεσματά σας.

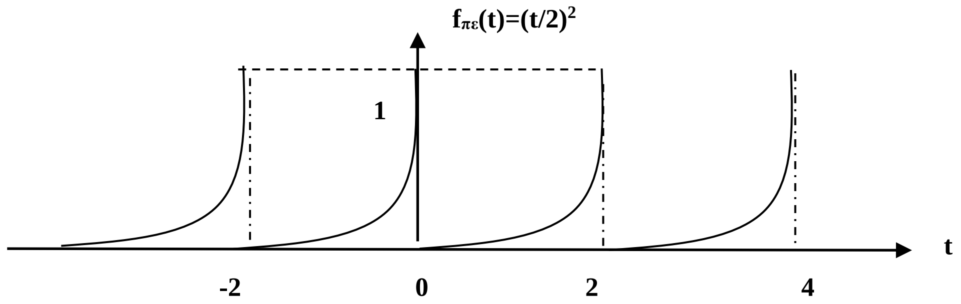
<u>Λύση</u>

<u>Α Τρόπος Επίλυσης-Υπολογισμός συντελεστών σειράς Fourier 2ης παραγώγου</u>

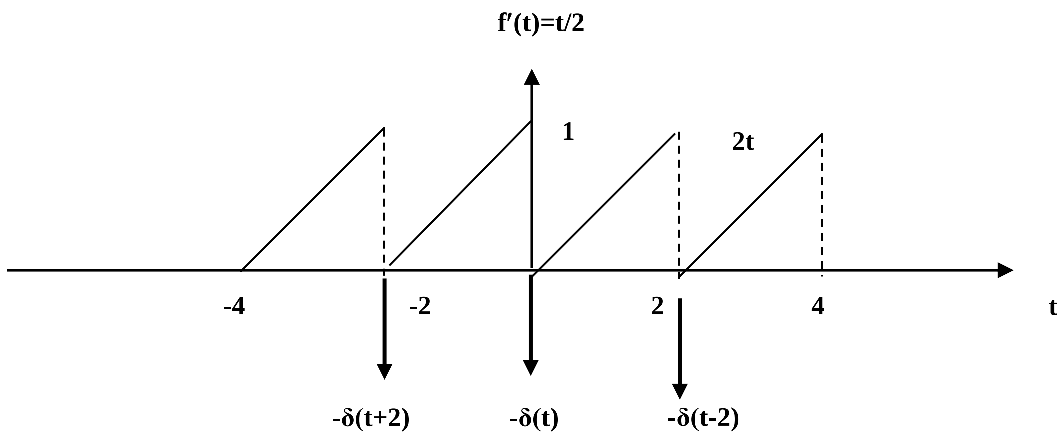
(α) Το αρχικό σήμα είναι:



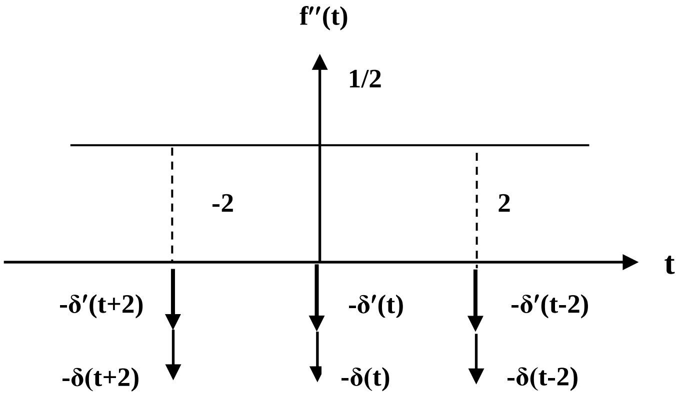
Η περιοδική επέκταση του αρχικού σήματος είναι:



Η 1η παράγωγος της περιοδικής επέκτασης είναι:



Η 2η παράγωγος της περιοδικής επέκτασης είναι:



$$c_n^{(2)} = \frac{1}{T}\bullet\int_0^2 f''(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\bullet\int_0^2\left(\frac{1}{2}-\delta'(t)-\delta(t)\right)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{2}\bullet\int_0^2 e^{-jn\Omega_0 t}dt - \frac{1}{2}\bullet\int_0^2 \delta'(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt - \frac{1}{2}\bullet\int_0^2 \delta(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{-jn\Omega_0}\left[e^{-jn\Omega_0 t}\right]_0^2 - \frac{1}{2}\bullet(-1)^1\bullet\left(e^{-jn\Omega_0 t}\right)'\Big|_{t=0} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{jn\pi}\left(e^{-jn2\pi}-1\right)+\frac{1}{2}(-jn\pi)e^{-jn\pi t}\Big|_{t=0} = -\frac{jn\pi}{2}-\frac{1}{2}$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι:

$$c_n = \frac{c_n^{(k)}}{(jn\Omega_0)^k} = \frac{c_n^{(2)}}{(jn\Omega_0)^2} = \frac{c_n^{(2)}}{(jn\pi)^2} = \frac{\frac{-jn\pi-1}{2}}{-n^2\pi^2} = \frac{-jn\pi-1}{-2n^2\pi^2} = \frac{jn\pi+1}{2n^2\pi^2},\ n\neq 0$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε ξεχωριστά τον όρο c_0 διότι ο προηγούμενος τύπος ισχύει για n≠0.

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^2\left(\frac{t}{2}\right)^2 dt\right) = \frac{1}{8}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{8}\bullet\frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

Άρα η ζητούμενη σειρά Fourier είναι: $\boxed{x(t) = \frac{1}{3} + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty}\left(\frac{jn\pi+1}{2n^2\pi^2}\right)e^{jn\pi}}$

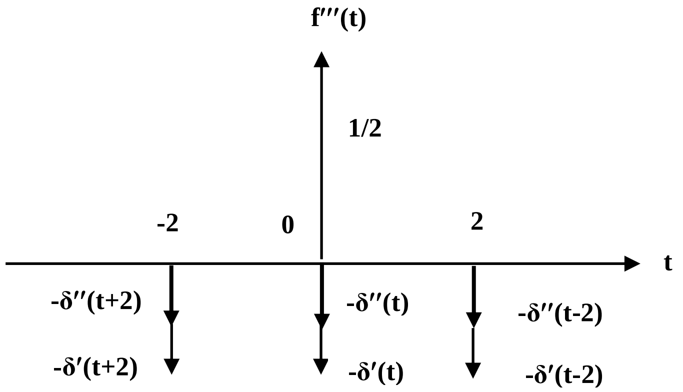
(β) Η αιτιατή περιοδική επέκταση του σήματος είναι: $x(t) = \frac{1}{3}u(t) + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty}\left(\frac{jn\pi+1}{2n^2\pi^2}\right)e^{jn\pi}u(t)$

Ο μετασχηματισμός Laplace του αιτιατού τμήματος της περιοδικής επέκτασης του σήματος είναι:

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{3}\bullet\frac{1}{s} + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty}\left(\frac{jn\pi+1}{2n\pi}\right)\frac{1}{s-jn\pi}}$$

<u>Β Τρόπος Επίλυσης-Υπολογισμός συντελεστών σειράς Fourier 3ης παραγώγου</u>

Η 3η παράγωγος της περιοδικής επέκτασης είναι:



$$c_n^{(3)} = \frac{1}{T} \bullet \int_0^2 f'''(t) \bullet e^{-jn\Omega_0 t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \bullet \int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \delta''(t) - \delta'(t) \right) e^{-jn\Omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \bullet \int_0^2 \delta''(t) \bullet e^{-jn\Omega_0 t} dt - \frac{1}{2} \bullet \int_0^2 \delta'(t) \bullet e^{-jn\Omega_0 t} dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \bullet (-1)^2 \bullet \left(e^{-jn\Omega_0 t}\right)'' \Big|_{t=0} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \bullet \left(j^2 n^2 \Omega_0^2\right) - \frac{1}{2}\left(jn\Omega_0\right) = -\frac{1}{2} \bullet \left(j^2 n^2 \pi^2\right) - \frac{1}{2}\left(jn\pi\right) = \frac{1}{2} n\pi\left(n\pi - j\right)$$

Οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι:

$$c_n = \frac{c_n^{(k)}}{(jn\Omega_0)^k} = \frac{c_n^{(3)}}{(jn\Omega_0)^3} = \frac{c_n^{(3)}}{(jn\pi)^3} = \frac{\frac{1}{2} n\pi(n\pi - j)}{-jn^3\pi^3} = \frac{\frac{1}{2}(n\pi - j)}{-jn^2\pi^2} = \frac{j - n\pi}{2jn^2\pi^2} = \frac{j^2 - jn\pi}{-2n^2\pi^2} = \frac{1 + jn\pi}{2n^2\pi^2}, \ n \neq 0$$

Παρατηρούμε ότι και πάλι υπολογίζουμε του ίδιους ακριβώς συντελεστές της σειράς Fourier όπως και πριν με τη 2η παράγωγο.

3.11.7 Έξοδος ΓΧΑ συστήματος με είσοδο ιδιοσυναρτήσεις και γνωστή τη συνάρτηση μεταφοράς H(s)

Όταν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα, για το οποίο είναι γνωστή η συνάρτηση μεταφοράς του H(s), είναι **μια ιδιοσυνάρτηση της μορφής** $Ae^{s_0 t}$ **ή** $Ae^{-s_0 t}$ **τότε η έξοδος του συστήματος δίνεται από τον τύπο:** $y(t)=H(s_0)\bullet A\bullet e^{s_0 t}$ **ή** $y(t)=H(-s_0)\bullet A\bullet e^{-s_0 t}$ **με την προϋπόθεση ότι το s_0 ή το $-s_0$ της εισόδου βρίσκεται εντός της περιοχής σύγκλισης της H(s).**

<u>Παράδειγμα</u>

Ένα **αιτιατό ΓΧΑ** περιγράφεται από την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς: $H(s)=\dfrac{s+2}{(s+1)\bullet(s+3)}$

Να βρεθεί το σήμα εξόδου για καθένα από τα ακόλουθα σήματα εισόδου:

α)$x_1(t)=\cos(t)$

β)$x_2(t)=1$

γ)$x_3(t)=e^{-5t}$

<u>Λύση</u>

α)Το $x_1(t)$ μπορεί να γραφεί ως εξής: $x_1(t)=\dfrac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}$. Γενικά ισχύει από τον τύπο Euler ότι: $\cos(t)=\dfrac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}=\dfrac{1}{2}e^{jt}+\dfrac{1}{2}e^{-jt}$. **Το** e^{jt} **και το** e^{-jt} **είναι ιδιοσυναρτήσεις με** $s_0=j$ **και** $s_0=-j$ αντίστοιχα και οι έξοδοι είναι: $H(j)\bullet\dfrac{1}{2}e^{jt}$ **και** $H(-j)\bullet\dfrac{1}{2}e^{-jt}$. Η συνολική έξοδος είναι:

$$y_1(t)=H(j)\bullet\frac{1}{2}e^{jt}+H(-j)\bullet\frac{1}{2}e^{-jt}=\frac{1}{2}\bullet\left(H(j)\bullet e^{jt}+H(-j)\bullet e^{-jt}\right)=\frac{1}{2}\bullet\frac{j+2}{(j+1)\bullet(j+3)}e^{jt}+\frac{1}{2}\bullet\frac{-j+2}{(-j+1)\bullet(-j+3)}2e^{-jt}=$$

$$=\frac{1}{2}\bullet\frac{j+2}{(4j+2)}e^{jt}+\frac{1}{2}\bullet\frac{-j+2}{(-4j+2)}e^{-jt}=\frac{1}{2}\bullet\frac{j+2}{4j+2}e^{jt}+\frac{1}{2}\bullet\left(\frac{j+2}{4j+2}e^{jt}\right)^{*}\Rightarrow y_1(t)=\mathrm{Re}\left\{\frac{j+2}{4j+2}e^{jt}\right\}$$

Σημείωση: Προσθέτουμε δύο συζυγείς μιγαδικούς οπότε τα φανταστικά μέρη απαλείφονται και αθροίζονται μόνο τα πραγματικά τους μέρη. Άρα $y_1(t)=2\bullet\mathrm{Re}\left\{\dfrac{j+2}{4j+2}\dfrac{e^{jt}}{2}\right\}\Rightarrow y_1(t)=\mathrm{Re}\left\{\dfrac{j+2}{4j+2}e^{jt}\right\}$

β)Το $x_2(t)$ είναι ιδιοσυνάρτηση για s=0 οπότε η έξοδος που προκύπτει είναι: $y_2(t)=H(0)\bullet 1=\dfrac{2}{3}$

γ)Το $x_3(t)$ είναι ιδιοσυνάρτηση για s=-5 όμως αυτή η τιμή του s **βρίσκεται έξω από την περιοχή σύγκλισης η οποία είναι Re(s)>-1. Επειδή το σήμα εισόδου δεν βρίσκεται στην περιοχή σύγκλισης η έξοδος δεν συγκλίνει**.

<u>Βασική Παρατήρηση</u>

Η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος όταν γνωρίζουμε την απόκριση συχνότητας του $H(j\Omega)$ είναι:

- Με είσοδο σταθερό σήμα x(t)=A → y(t)=A•|H(j0)|
- Με είσοδο $x(t)=A\bullet\cos(\Omega_0 t)$ → $y(t)=A\bullet|H(j\Omega_0)|\bullet\cos(\Omega_0 t+\angle H(j\Omega_0))$
- Με είσοδο $x(t)=A\bullet\sin(\Omega_0 t)$ → $y(t)=A\bullet|H(j\Omega_0)|\bullet\sin(\Omega_0 t+\angle H(j\Omega_0))$
- Με είσοδο ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα (ιδιοσυνάρτηση) $x(t)=A\bullet e^{j\Omega_0 t}\to y(t)=A\bullet|H(j\Omega_0)|\bullet e^{j(\Omega_0 t+\angle H(j\Omega_0))}$
- Με είσοδο μια ιδιοσυνάρτηση $x(t)=A\bullet e^{-j\Omega_0 t}\to y(t)=A\bullet|H(j(-\Omega_0))|\bullet e^{-j(\Omega_0 t+\angle H(j(-\Omega_0)))}$

Η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος όταν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς H(s) είναι:

- Με είσοδο ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα (ιδιοσυνάρτηση) $x(t)=A\bullet e^{s_0 t}\to y(t)=A\bullet H(s_0)e^{s_0 t}$
- Με είσοδο ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα (ιδιοσυνάρτηση) $x(t)=A\bullet e^{-s_0 t}\to y(t)=A\bullet H(-s_0)e^{-s_0 t}$

<u>Παρατήρηση</u>

Το ΓΧΑ σύστημα δεν γεννά νέες συχνότητες. Είτε μεταβιβάζει στην έξοδο αναλλοίωτη τη συχνότητα της εισόδου είτε κόβει συχνότητες από την είσοδο, αλλά ποτέ δεν προσθέτει νέες συχνότητες.

3.11.8 Άσκηση με μετασχηματισμό Laplace και ιδιότητες

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t)=e^{-3t}u(t)+e^{2t}u(-t)$

Λύση

Το 1ο σήμα e $e^{-3t}u(t)$ είναι αιτιατό και ο ML του είναι: $e^{-3t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s+3},\mathrm{Re}(s)>-3$

Το 2ο σήμα $e^{2t}u(-t)$ είναι μη αιτιατό και ο ML του είναι: $-e^{2t}u(-t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s-2},\mathrm{Re}(s)<2\Rightarrow e^{2t}u(-t)\leftrightarrow-\dfrac{1}{s-2},\mathrm{Re}(s)<2$

Άρα ο μετασχηματισμός Laplace είναι: $X(s)=\dfrac{1}{s+3}-\dfrac{1}{s-2},-3<\mathrm{Re}(s)<2$

Παρατήρηση Επειδή το σήμα έχει και αιτιατό και μη αιτιατό τμήμα γιαυτό η Π.Σ. του ML του είναι ανάμεσα στους πόλους.

3.11.9 Άσκηση με μετασχηματισμό Laplace και διαφορική

Δίνεται η διαφορική εξίσωση $y^{(2)}(t)+5y^{(1)}(t)+6y(t)=x(t)$ και το σήμα εισόδου είναι $x(t)=e^{-t}u(t)$. Να βρεθούν **η έξοδος y(t) και η κρουστική απόκριση h(t)**.

Λύση

α)Παίρνουμε ML και στα δύο μέρη της διαφορικής και προκύπτει:

$$s^2Y(s)-s^1y(0^-)-s^0y'(0^-)+5\bullet\left(sY(s)-sy(0^-)\right)+6\bullet Y(s)=X(s)\Rightarrow s^2Y(s)+5sY(s)+6\bullet Y(s)=X(s)\Rightarrow$$

$$(s^2+5s+6)\bullet Y(s)=X(s)\Rightarrow\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^2+5s+6}\Rightarrow H(s)=\frac{1}{(s+2)\bullet(s+3)}\Rightarrow H(s)=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}\Rightarrow H(s)=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}$$

Με αντίστροφο ML προκύπτει η κρουστική απόκριση: $h(t)=e^{-2t}u(t)-e^{-3t}u(t)$. Θεωρώ ότι το σύστημα είναι αιτιατό διότι λαμβάνει ένα σήμα εισόδου που είναι αιτιατό.

β)Για να βρούμε την έξοδο y(t) θέτουμε ως είσοδο $x(t)=e^{-t}u(t)$ και προκύπτει ότι: $y^{(2)}(t)+5y^{(1)}(t)+6y(t)=e^{-t}u(t)$

Παίρνουμε ML και στα δύο μέρη της διαφορικής και προκύπτει:

$$(s^2+5s+6)\bullet Y(s)=\frac{1}{s+1}\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{\left(s^2+5s+6\right)\bullet(s+1)}\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s+2)\bullet(s+3)\bullet(s+1)}\Rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}+\frac{\Gamma}{s+1}\Rightarrow Y(s)=-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{s+3}+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{s+1}$$

Με αντίστροφο ML προκύπτει η έξοδος: $y(t)=-e^{-2t}u(t)+\dfrac{1}{2}e^{-3t}u(t)+\dfrac{1}{2}e^{-t}u(t)$

Παρατήρηση

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε της έξοδο y(t) με συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης δηλ. $y(t)=x(t)*h(t)=e^{-t}u(t)*\left(e^{-2t}u(t)-e^{-3t}u(t)\right)$

3.11.10 Άσκηση με μετασχηματισμό Laplace και περιοχή σύγκλισης

Δίνεται $X(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)\bullet(s-2)}$ Να βρεθεί το x(t) εξετάζοντας όλες τις περιπτώσεις για την περιοχή σύγκλισης.

Λύση

Αναλύουμε την X(s) σε απλά κλάσματα: $X(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)\bullet(s-2)}=\dfrac{A}{s+1}+\dfrac{B}{s-2}=-\dfrac{2}{3}\bullet\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{5}{3}\bullet\dfrac{1}{s-2}$

Υπάρχουν 3 περιοχές σύγκλισης:

α)Re(s)>max{-1,2}=2

Στην περίπτωση αυτή το σήμα είναι **αιτιατό** και με αντίστροφο ML παίρνουμε: $x(t)=-\dfrac{2}{3}\bullet e^{-t}u(t)+\dfrac{5}{3}\bullet e^{2t}u(t)$

β)Re(s)<min{-1,2}=-1

Στην περίπτωση αυτή το σήμα **μη αιτιατό** και με αντίστροφο ML παίρνουμε: $x(t)=\dfrac{2}{3}\bullet e^{-t}u(-t)-\dfrac{5}{3}\bullet e^{2t}u(-t)$

γ)-1<Re(s)<2

Στην περίπτωση αυτή το σήμα αποτελείται **και από μη αιτιατό και από αιτιατό τμήμα** και με αντίστροφο ML παίρνουμε:

$$x(t)=-\frac{2}{3}\bullet e^{-t}u(t)-\frac{5}{3}\bullet e^{2t}u(-t)$$

3.11.11 Άσκηση με μετασχηματισμό Laplace ολοκληρώματος-Φροντιστήριο 2013

Άσκηση Δ1. Δίνεται η παρακάτω ολοκληρωτικο-διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) + 2\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = u(t), \quad t \geq 0$$

όπου $u(t)$ η μοναδιαία βηματική συνάρτηση, με αρχικές συνθήκες $x(0-) = 2$, $\int_{-\infty}^{0-} x(t)dt = 0$.

α) Με τη χρήση του Μετασχηματισμού Laplace να βρεθεί η λύση της εξίσωσης.

β) Επαληθεύστε τα θεωρήματα Αρχικής και Τελικής Τιμής.

Λύση: Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού για παραγώγιση και ολοκλήρωση έχουμε ότι

$$sX(s) - x(0-) + 3X(s) + 2\frac{[X(s) + \phi(0-)]}{s} = \frac{1}{s}$$

αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες και λύνοντας ως προς $X(s)$ καταλήγουμε

$$X(s) = \frac{1+2s}{s^2+3s+2} = \frac{1+2s}{(s+1)(s+2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

Αφού πρόκειται για αιτιατό σήμα, έχουμε ότι το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού είναι $\mathrm{Re}\{s\} > \max\{-1,-2\} = -1$. Για να βρούμε τη $x(t)$, αφού ο αντίστροφος Laplace της συνάρτησης $\frac{1}{s-a}$ είναι $e^{at}u(t)$, συμπεραίνουμε ότι $x(t) = (3e^{-2t} - e^{-t})u(t)$.

Για το β) ερώτημα, για το θεώρημα Αρχικής Τιμής πρέπει να ισχύει $x(0+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$. Το όριο

$$\lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{2s^2+s}{s^2+3s+2} = 2$$

όντως συμφωνεί με το $x(0+) = 2$.

Για το Θεώρημα της Τελικής Τιμής θα πρέπει να ισχύει $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$ ΕΦΟΣΟΝ όμως το μηδέν ανήκει ή είναι το όριο του πεδίου σύγκλισης. Στην περίπτωσή μας ισχύει αυτή η προϋπόθεση αφού $0 \geq -1$. Παρατηρούμε τέλος ότι

$$\lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2s^2+s}{s^2+3s+2} = 0$$

το οποίο συμφωνεί με το $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}(3e^{-2t} - e^{-t})u(t) = 0$.

Παρατηρήσεις

- Το σήμα x(t) είναι αιτιατό διότι $t \geq 0$.
- Επίσης απαραίτητη προϋπόθεση για να κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα είναι ο βαθμό του αριθμητή να είναι καθαρά μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή.

Επαλήθευση στο Θ.Α.Τ.

Θέτω στη συνάρτηση $x(t) = 3e^{-3t}u(t) - e^{--t}u(t)$ όπου t το 0^{+} και προκύπτει $x(0^{+}) = 3 - 1 = 2$. Παρατηρούμε ότι αυτό που προκύπτει συμφωνεί με το αποτέλεσμα που βρήκαμε από το Θ.Α.Τ.

Επαλήθευση στο Θ.Τ.Τ.

Υπολογίσουμε το όριο $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left(3e^{-3t}u(t) - e^{-t}u(t)\right) = \lim_{t\to\infty}\left(3e^{-3t} - e^{-t}\right)u(t) = im_{t\to\infty}\left(3\frac{1}{e^{3t}} - \frac{1}{e^{t}}\right)u(t) = 0$. Παρατηρούμε ότι αυτό που προκύπτει συμφωνεί με το αποτέλεσμα που βρήκαμε από το Θ.Τ.Τ.

3.11.12 Μετατροπή από μετασχηματισμό Laplace σε μετασχηματισμό Fourier και αντίστροφα

3.11.12.1 Μετατροπή από Μετασχηματισμό Laplace σε Μετασχηματισμό Fourier

Για να μετατρέψουμε ένα μετασχηματισμό Laplace στον αντίστοιχο μετασχηματισμό Fourier διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

- Αν ο ML **έχει πραγματικούς πόλους**, τότε ο MF προκύπτει από τον ML θέτοντας απλά όπου s το jΩ. **ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΗ ΓΙΑ ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΕΙΝΑΙ Η ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE ΝΑ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΤΟ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΑΞΟΝΑ**.

- Αν ο ML **έχει μιγαδικούς πόλους,** τότε ο MF προκύπτει από τον ML θέτοντας απλά όπου s το jΩ. **ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΗ ΓΙΑ ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΕΙΝΑΙ Η ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΝΑ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΤΟ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΑΞΟΝΑ**

- Αν ο ML **έχει φανταστικούς πόλους ή τον πόλο 0** τότε ο MF προκύπτει από το ML ως εξής: **Το πρώτο μέρος του μετασχηματισμού Fourier προκύπτει από το μετασχηματισμό Laplace θέτοντας όπου s το jΩ (αναλυτική συνάρτηση). Το δεύτερο μέρος του μετασχηματισμού Fourier προκύπτει δημιουργώντας μια κρουστική συνάρτηση για κάθε πόλο στο φανταστικό άξονα την οποία πολλαπλασιάζουμε με το συντελεστή του πόλου και με το π** δηλ. αν ο ML είναι ο X(s) και έχει N πόλους στο φανταστικό άξονα τότε ο αντίστοιχος MF συμβολίζεται ως εξής:

$$X(j\Omega) = X_\alpha(s = j\Omega) + \pi \bullet \sum_{k=1}^{N} b_k \bullet \delta(\Omega - \Omega_k)$$

όπου b_k οι συντελεστές των πόλων.

Παράδειγμα 1-Υπολογισμός MF cos(Ω₀t)•u(t)

Έστω $x(t)=\cos(\Omega_0 t)\bullet u(t)$. Ο ML αυτής είναι: $X(s) = \frac{s}{s^2+\Omega_0^2}$ ο οποίος έχει τους πόλους $s_1 = j\Omega_0$ και $s_2 = -j\Omega_0$ επάνω στο φανταστικό άξονα και η Π.Σ. αυτού είναι Re(s)>0. Για να μετατρέψουμε τον ML σε MF πρώτα υπολογίζουμε τους συντελεστές b_k. ως εξής:

$$\frac{s}{s^2+\Omega_0^2} = \frac{s}{s^2-\left(j\Omega_0\right)^2} = \frac{s}{\left(s-j\Omega_0\right)\bullet\left(s+j\Omega_0\right)} = \frac{A}{s-j\Omega_0} + \frac{B}{s-j\Omega_0}$$

$$A = \lim_{s\to j\Omega_0}\left(s-j\Omega_0\right)\bullet\frac{s}{\left(s-j\Omega_0\right)\bullet\left(s+j\Omega_0\right)} = \frac{j\Omega_0}{\left(j\Omega_0+j\Omega_0\right)} = \frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{s\to -j\Omega_0}\left(s+j\Omega_0\right)\bullet\frac{s}{\left(s-j\Omega_0\right)\bullet\left(s+j\Omega_0\right)} = \frac{-j\Omega_0}{\left(-j\Omega_0-j\Omega_0\right)} = \frac{1}{2}$$

Άρα $\frac{s}{s^2+\Omega_0^2} = \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{s-j\Omega_0} + \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{s+j\Omega_0}$ και ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Fourier είναι:

$$X(j\Omega) = X(s = j\Omega) + \pi\sum_{k=1}^{N} b_k\delta(\Omega - j\Omega_k) \Rightarrow X(j\Omega) = \frac{j\Omega}{\left(j\Omega\right)^2+\Omega_0^2} + \pi\frac{1}{2}\delta(\Omega-\Omega_0) + \pi\frac{1}{2}\delta(\Omega+\Omega_0) \Rightarrow$$

$$X(j\Omega) = \frac{j\Omega}{\Omega_0^2-\Omega^2+} + \frac{\pi}{2}\left[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right]$$

Παράδειγμα 2-Υπολογισμός MF sin(Ω₀t)•u(t)

Έστω $x(t)=\sin(\Omega_0 t)\bullet u(t)$. Ο ML αυτής είναι: $X(s) = \frac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}$ ο οποίος έχει τους πόλους $s_1 = j\Omega_0$ και $s_2 = -j\Omega_0$ επάνω στο φανταστικό άξονα και η Π.Σ. αυτού είναι Re(s)>0. Για να μετατρέψουμε τον ML σε MF πρώτα υπολογίζουμε τους συντελεστές b_k. ως εξής:

$$\frac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2} = \frac{\Omega_0}{s^2-\left(j\Omega_0\right)^2} = \frac{\Omega_0}{\left(s-j\Omega_0\right)\bullet\left(s+j\Omega_0\right)} = \frac{A}{s-j\Omega_0} + \frac{B}{s+j\Omega_0}$$

$$A = \lim_{s\to j\Omega_0}\left(s-j\Omega_0\right)\bullet\frac{\Omega_0}{\left(s-j\Omega_0\right)\bullet\left(s+j\Omega_0\right)} = \frac{\Omega_0}{\left(j\Omega_0+j\Omega_0\right)} = \frac{1}{2j}$$

$$B=\lim_{s\to -j\Omega_0}\left(s+j\Omega_0\right)\bullet\frac{\Omega_0}{\left(s-j\Omega_0\right)\bullet\left(s+j\Omega_0\right)}=\frac{\Omega_0}{\left(-j\Omega_0-j\Omega_0\right)}=-\frac{1}{2j}$$

Άρα $\frac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}=\frac{1}{2j}\bullet\frac{1}{s-j\Omega_0}-\frac{1}{2j}\bullet\frac{1}{s+j\Omega_0}$ και ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Fourier είναι:

$$X(j\Omega)=X(s=j\Omega)+\pi\sum_{k=1}^{N}b_k\delta(\Omega-j\Omega_k)\Rightarrow X(j\Omega)=\frac{\Omega_0}{\left(j\Omega\right)^2+\Omega_0^2}+\pi\bullet\left(\frac{1}{2j}\delta(\Omega-\Omega_0)-\frac{1}{2j}\delta(\Omega+\Omega_0)\right)\Rightarrow$$

$$X(j\Omega)=\frac{\Omega_0}{\Omega_0^2-\Omega^2+}+\frac{\pi}{2j}\bullet\left(\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)\right)$$

3.11.12.2 Άσκηση Φροντιστηρίου 2012 με μετατροπή από μετασχηματισμό Laplace σε μετασχηματισμό Fourier

Δίνεται ο ML $X(s)=\frac{s+a}{\left(s+a\right)^2+\Omega_0^2}$ $\mathrm{Re}(s)>-a$. Ποιο είναι το x(t) και ποιος ο MF X(jΩ); Εξετάστε όλες τις περιπτώσεις.

<u>Λύση</u>

Υπολογισμός ML του σήματος $\cos(\Omega_n t)u(t)$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\bullet e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\Omega_0 t)\bullet u(t)\bullet e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}\cos(\Omega_0 t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{j\Omega_0 t}+e^{-j\Omega_0 t}}{2}\right)e^{-st}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{j\Omega_0 t}\bullet e^{-st}dt+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-j\Omega_0 t}\bullet e^{-st}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-t(s-j\Omega_0)}dt-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-t(s+j\Omega_0))}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{-(s-j\Omega_n)}\left[e^{-t(s-j\Omega_0)}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{-(s+j\Omega_n)}\left[e^{-t(s+j\Omega_0)}\right]_0^{\infty}=-\frac{1}{2(s-j\Omega_0)}\left(0-1\right)-\frac{1}{2(s+j\Omega_0))}\left(0-1\right)=$$

$$=\frac{1}{2\bullet(s-j\Omega_0)}+\frac{1}{2\bullet(s+j\Omega_0)}=\frac{1}{2}\bullet\left(\frac{s+j\Omega_0+s-j\Omega_0}{s^2-\left(j\Omega_0\right)^2}\right)=\frac{1}{2}\bullet\frac{2s}{s^2+\Omega_0^2}=\frac{s}{s^2+\Omega_0^2}$$

Οι πόλοι είναι $s_1=j\Omega_0$ και $s_2=-j\Omega_0$ Η περιοχή σύγκλισης είναι Re(s)>0.

Άρα $\cos\left(\Omega_0 t\right)u(t)\leftrightarrow\frac{s}{s^2-\Omega_0{}^2}$ Μετασχηματισμός Laplace cos

$e^{-at}\cos\left(\Omega_0 t\right)u(t)\leftrightarrow\frac{s+a}{\left(s+a\right)^2-\left(j\Omega_0\right)^2}$ Ιδιότητα ολίσθησης στη συχνότητα

Περίπτωση 1: α>0

Οι πόλοι είναι $\left(s+a\right)^2=-\Omega_0^2\Rightarrow\left(s+a\right)^2=\left(j\Omega_0\right)^2\Rightarrow\left(s+a\right)=\pm j\Omega_0\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}s_1=-a+j\Omega_0\\ s_2=-a-j\Omega_0\end{array}\right.$

Αφού η Π.Σ. είναι Re(s)>-a το σήμα είναι αιτιατό

Τώρα η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα και οι πόλοι είναι μιγαδικοί συνεπώς υπάρχει και ο μετασχηματισμός Fourier του x(t) και προκύπτει ως εξής: Θέτω όπου s το jΩ και προκύπτει ότι ο MF είναι ο $X(j\Omega)=\frac{j\Omega+a}{(j\Omega+a)^2+\Omega_0^2}$

Περίπτωση 2: α<0

Οι πόλοι είναι $\left(s+a\right)^2=-\Omega_0^2\Rightarrow\left(s+a\right)^2=\left(j\Omega_0\right)^2\Rightarrow\left(s+a\right)=\pm j\Omega_0\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}s_1=-a+j\Omega_0\\ s_2=-a-j\Omega_0\end{array}\right.$

Αφού η Π.Σ. είναι Re(s)>-a το σήμα είναι και πάλι αιτιατό

Τώρα η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace ΔΕΝ περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα οπότε ΔΕΝ υπάρχει και ο μετασχηματισμός Fourier του x(t).

Περίπτωση 3: α=0 και $\Omega_0\neq 0$

$$X(s)=\frac{s}{s^2+\Omega_0^2}, \mathrm{Re}(s)>0$$

Τώρα που ο Laplace έχει πόλους επάνω στο φανταστικό άξονα πρέπει η X(s) να σπάσει σε δύο συναρτήσεις: μια αναλυτική που δεν έχει πόλους στο φανταστικό άξονα και σε μια δεύτερη που έχει πόλους στο φανταστικό άξονα δηλ. ο αντίστοιχος MF είναι ο εξής:

$$X(j\Omega)=\frac{j\Omega}{(j\Omega)^2+\Omega_0^2}+\frac{\pi}{2}\bullet\left(\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right)$$

Περίπτωση 4: α=0 και Ω_0=0

$$X(s)=\frac{s}{s^2}=\frac{1}{s}, \mathrm{Re}\{s\}>0$$

$$X(s)=\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)$$

Παρατηρούμε ότι ο ML $X(s)=\frac{1}{s}$ έχει τον πόλο 0 επάνω στο φανταστικό άξονα. Άρα για να μετατρέψουμε τώρα τον ML σε MF διασπάμε τον ML σε δύο συναρτήσεις, σε μια αναλυτική που δεν έχει τον πόλο στο φανταστικό άξονα θέτοντας όπου s το jΩ και σε δεύτερη που έχει τον πόλο και δημιουργούμε μια κρουστική συνάρτηση για τον πόλο αυτό που είναι η δ(Ω).

__**Σημείωση**__

Θα μπορούσε να ζητηθεί και για μη αιτιατά σήματα.

3.11.12.3 Μετατροπή από Μετασχηματισμό Fourier σε Μετασχηματισμό Laplace

Για να μετατρέψουμε ένα μετασχηματισμό Fourier στον αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace κάνουμε 2 ενέργειες:

- Θέτουμε όπου jΩ το s
- Αφαιρούμε όλες τις κρουστικές συναρτήσεις

3.11.12.4 Άσκηση Μετατροπής από μετασχηματισμό Fourier σε μετασχηματισμό Laplace

Ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος x(t) είναι: $X(j\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\delta(\Omega+3\Omega_0)+\delta(\Omega-3\Omega_0)\right)+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{2j\Omega}{3\Omega_n^2-\Omega^2}$

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος x(t).

__**Λύση**__

Για τη μετατροπή από μετασχηματισμό Fourier σε μετασχηματισμό Laplace κάνουμε δύο βήματα:

- ✓ Θέτουμε όπου jΩ το s
- ✓ Αφαιρούμε όλες τις κρουστικές συναρτήσεις (Ο ML δεν έχει ποτέ κρουστικές συναρτήσεις οι οποίες υποδηλώνουν ασυνέχειες και γιαυτό ορίζεται στον ML περιοχή σύγκλισης)

Άρα $X(s)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{2s}{3\Omega_n^2+(j\Omega)^2}\Rightarrow X(s)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{2s}{3\Omega_n^2+s^2}$

3.11.13 Θέμα 3 Ιούνιος 2012 με μετατροπή από μετασχηματισμό Laplace σε Fourier

Υπολογίστε το Μετασχηματισμό Laplace και το Μετασχηματισμό Fourier του σήματος $x(t)=\sum_{n=0}^{N-1}\sin\left(\Omega_n t+(l \bmod 2)\frac{\pi}{2}\right)u(t)$

όπου u(t) η βηματική συνάρτηση

__**Απάντηση**__

(α) *l mod 2= 0*

$$x(t)=\sum_{n=0}^{N-1}\sin(\Omega_n t)u(t)$$

Υπολογισμός ML του σήματος sin(Ω_nt)u(t)

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\bullet e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\Omega_n t)\bullet u(t)\bullet e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}\sin(\Omega_n t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{j\Omega_0 t}-e^{-j\Omega_0 t}}{2j}\right)e^{-st}dt=$$

$$=\frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty}e^{j\Omega_n t}\bullet e^{-st}dt-\frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty}e^{-j\Omega_n t}\bullet e^{-st}dt=\frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty}e^{-t(s-j\Omega_n)}dt-\frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty}e^{-t(s+j\Omega_n))}dt=$$

$$=\frac{1}{2j}\bullet\frac{1}{-(s-j\Omega_n)}\left[e^{-t(s-j\Omega_n)}\right]_0^{\infty}-\frac{1}{2j}\bullet\frac{1}{-(s+j\Omega_n)}\left[e^{-t(s+j\Omega_n)}\right]_0^{\infty}=-\frac{1}{2j(s-j\Omega_n)}\bullet(0-1)+\frac{1}{2j(s+j\Omega_n))}\bullet(0-1)=$$

$$=\frac{1}{2j\bullet(s-j\Omega_n)}-\frac{1}{2j\bullet(s+j\Omega_n)}=\frac{1}{2j}\bullet\left(\frac{s+j\Omega_n-s+j\Omega_n}{s^2-(j\Omega_n)^2}\right)=\frac{1}{2j}\bullet\frac{2j\Omega_n}{s^2+\Omega_n^2}=\frac{\Omega_n}{s^2+\Omega_n^2}$$

Οι πόλοι είναι $s_1=j\Omega_0$ **και** $s_2=-j\Omega_0$ **Η περιοχή σύγκλισης είναι Re(s)>0.**

Οι πόλοι είναι $s_1=j\Omega_n$ **και** $s_2=-j\Omega_n$ **Η περιοχή σύγκλισης είναι Re(s)>0.**

$$L\{\sin(\Omega_n t)u(t)\}=\frac{\Omega_n}{s^2+\Omega_n^2}\Rightarrow L\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\sin(\Omega_n t)u(t)\right\}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\Omega_n}{s^2+\Omega_n^2}\Rightarrow L\{x(t)\}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\Omega_n}{s^2+\Omega_n^2}\Rightarrow X(s)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\Omega_n}{s^2+\Omega_n^2}$$

Για τη μετατροπή του ML σε MF παρατηρούμε ότι επειδή ο ML της x(t) έχει πόλους στο φανταστικό άξονα, θα γραφεί ως ά-θροισμα δύο συναρτήσεων του s: μιας αναλυτικής που δεν έχει πόλους στον φανταστικό άξονα και μιας άλλης που περιέχει τους πόλους στον φανταστικό άξονα δηλ.:

$$X(s)=X_a(s)+\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{s-j\Omega_n}$$

και ο αντίστοιχος MF είναι:

$$X(j\Omega)=X_a(j\Omega)+\pi\bullet\sum_{n=1}^{N}b_n\delta(\Omega-\Omega_n)$$

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές b_n κάνουμε ανάλυση της $\frac{\Omega_n}{s^2+\Omega_n^2}$ σε απλά κλάσματα.

$$\frac{\Omega_n}{s^2+\Omega_n^2}=\frac{\Omega_n}{s^2-(j\Omega_n)^2}=\frac{\Omega_n}{(s-j\Omega_n)\bullet(s+j\Omega_n)}=\frac{A}{s-j\Omega_n}+\frac{B}{s+j\Omega_n}$$

$$A=\lim_{s\to j\Omega_n}(s-j\Omega_n)\frac{\Omega_n}{(s-j\Omega_n)\bullet(s+j\Omega_n)}=\frac{\Omega_n}{j\Omega_n+j\Omega_n}=\frac{\Omega_n}{2j\Omega_n}=\frac{1}{2j}$$

$$B=\lim_{s\to -j\Omega_n}(s+j\Omega_n)\frac{\Omega_n}{(s-j\Omega_n)\bullet(s+j\Omega_n)}=\frac{\Omega_n}{-j\Omega_n-j\Omega_n}=\frac{\Omega_n}{-2j\Omega_n}=-\frac{1}{2j}$$

Άρα ο MF της x(t) είναι:

$$X(j\Omega)=X_\alpha(j\Omega)+\pi\bullet\sum_{n=1}^{N}b_n\delta(\Omega-\Omega_n)\Rightarrow X(j\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{\Omega_n}{(j\Omega)^2+\Omega_n^2}+\pi\left(\frac{1}{2j}\delta(\Omega-\Omega_n)-\frac{1}{2j}\delta(\Omega+\Omega_n)\right)\right)\Rightarrow$$

$$X(j\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{\Omega_n}{(j\Omega)^2+\Omega_n^2}+\frac{\pi}{2j}\left(\delta(\Omega-\Omega_n)-\delta(\Omega+\Omega_n)\right)\right)$$

(β) ***l mod 2= 1***

$x(t)=\sum_{n=0}^{N-1}\sin\left(\Omega_n t+\frac{\pi}{2}\right)u(t)=\sum_{n=0}^{N-1}\cos(\Omega_n t)u(t)$ διότι αφενός $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\cos(\varphi)$ και αφετέρου $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$ άρα $\sin\left(\Omega_n t+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\Omega_n t)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\Omega_n t)$

Υπολογισμός ML του σήματος $\cos(\Omega_n t)u(t)$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\bullet e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\Omega_0 t)\bullet u(t)\bullet e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}\cos(\Omega_0 t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{j\Omega_0 t}+e^{-j\Omega_0 t}}{2}\right)e^{-st}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{j\Omega_0 t}\bullet e^{-st}dt+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-j\Omega_0 t}\bullet e^{-st}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-t(s-j\Omega_0)}dt-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-t(s+j\Omega_0))}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{-(s-j\Omega_n)}\left[e^{-t(s-j\Omega_0)}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{-(s+j\Omega_n)}\left[e^{-t(s+j\Omega_0)}\right]_0^{\infty}=-\frac{1}{2(s-j\Omega_0)}(0-1)-\frac{1}{2(s+j\Omega_0))}(0-1)=$$

$$=\frac{1}{2\bullet(s-j\Omega_0)}+\frac{1}{2\bullet(s+j\Omega_0)}=\frac{1}{2}\bullet\left(\frac{s+j\Omega_0+s-j\Omega_0}{s^2-(j\Omega_0)^2}\right)=\frac{1}{2}\bullet\frac{2s}{s^2+\Omega_0^2}=\frac{s}{s^2+\Omega_0^2}$$

Οι πόλοι είναι $s_1=j\Omega_0$ **και** $s_2=-j\Omega_0$ **Η περιοχή σύγκλισης είναι Re(s)>0.**

$$L\{\cos(\Omega_n t)u(t)\}=\frac{s}{s^2+\Omega_n^2}\Rightarrow L\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\cos(\Omega_n t)u(t)\right\}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{s}{s^2+\Omega_n^2}\Rightarrow L\{x(t)\}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{s}{s^2+\Omega_n^2}\Rightarrow X(s)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{s}{s^2+\Omega_n^2}$$

Για τη μετατροπή του ML σε MF παρατηρούμε ότι επειδή ο ML της x(t) έχει πόλους στο φανταστικό άξονα, θα γραφεί ως ά-θροισμα δύο συναρτήσεων του s: μιας αναλυτικής που δεν έχει πόλους στον φανταστικό άξονα και μιας άλλης που περιέχει τους πόλους στον φανταστικό άξονα δηλ.:

$$X(s)=X_a(s)+\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{s-j\Omega_n}$$

και ο αντίστοιχος MF είναι:

$$X(j\Omega)=X_a(j\Omega)+\pi\bullet\sum_{n=1}^{N}b_n\delta(\Omega-\Omega_n)$$

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές b_n κάνουμε ανάλυση της $\frac{s}{s^2+\Omega_n^2}$ σε απλά κλάσματα.

$$\frac{s}{s^2+\Omega_n^2}=\frac{s}{s^2-(j\Omega_n)^2}=\frac{s}{(s-j\Omega_n)\bullet(s+j\Omega_n)}=\frac{A}{s-j\Omega_n}+\frac{B}{s+j\Omega_n}$$

$$A=\lim_{s\to j\Omega}(s-j\Omega_n)\frac{s}{(s-j\Omega_n)\bullet(s+j\Omega_n)}=\frac{j\Omega_n}{j\Omega_n+j\Omega_n}=\frac{j\Omega_n}{2j\Omega_n}=\frac{1}{2}$$

$$B=\lim_{s\to -j\Omega}(s+j\Omega_n)\frac{s}{(s-j\Omega_n)\bullet(s+j\Omega_n)}=\frac{-j\Omega_n}{-j\Omega_n-j\Omega_n}=\frac{-j\Omega_n}{-2j\Omega_n}=\frac{1}{2}$$

Άρα ο MF της x(t) είναι:

$$X(j\Omega)=X_a(j\Omega)+\pi\bullet\sum_{n=1}^{N}b_n\delta(\Omega-\Omega_n)\Rightarrow X(j\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{\Omega_n}{(j\Omega)^2+\Omega_n^2}+\frac{\pi}{2}\left(\delta(\Omega-\Omega_n)+\delta(\Omega+\Omega_n)\right)\right)\Rightarrow$$

$$X(j\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{\Omega_n}{(j\Omega)^2+\Omega_n^2}+\frac{\pi}{2}\left(\delta(\Omega-\Omega_n)+\delta(\Omega+\Omega_n)\right)\right)$$

3.11.14 Θέμα 3-Ιούνιος 2013

Υπολογίστε το Μετασχηματισμό Laplace και το Μετασχηματισμό Fourier του σήματος:

$$x(t)=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\left(\Omega_n t+(l \bmod 2)\frac{\pi}{2}\right)}u(t)$$

Λύση

l mod 2= 0

α)ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

Δίνεται το σήμα είναι $x(t)=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\Omega_n t}u(t)$

Πρώτα υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace του σήματος $e^{j\Omega_n t}u(t)$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\bullet e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\Omega_n t}u(t)\bullet e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}e^{j\Omega_n t}\bullet e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-t(s-j\Omega_n)}dt=\frac{1}{-(s-j\Omega_n)}\left[e^{-t(s-j\Omega_n)}\right]_0^{\infty}=$$

$$=\frac{1}{-(s-j\Omega_n)}(0-1)=\frac{1}{s-j\Omega_n},\ \mathrm{Re}(s)>0$$

Μετά εφαρμόζουμε την ιδιότητα Γραμμικότητας

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\Omega_n t}\bullet u(t)\leftrightarrow\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{s-j\Omega_n}$$ Ιδιότητα Γραμμικότητας

Άρα ο **μετασχηματισμός Laplace του σήματος** $x(t)=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\Omega_n t}u(t)$ είναι: $X(s)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{s-j\Omega_n}$

b) ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LAPLACE ΣΕ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ FOURIER

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace $\frac{1}{s-j\Omega_n}$ έχει ένα πόλο στο φανταστικό άξονα. Άρα ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Fourier προκύπτει ως εξής: Διασπάμε το μετασχηματισμό Laplace σε 2 τμήματα: Σε ένα τμήμα που δεν έχει πόλους στο φανταστικό άξονα θέτοντας όπου s το jΩ και σε ένα δεύτερο τμήμα όπου δημιουργούμε μια κρουστική συνάρτηση για κάθε πόλο στο φανταστικό άξονα. Εδώ υπάρχει μόνο 1 πόλος στο φανταστικό άξονα, ο $j\Omega_n$, άρα δημιουργούμε μόνο μια κρουστική συνάρτηση Ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Fourier είναι ο εξής:

$$\frac{1}{j\Omega-j\Omega_n}+\pi\delta(\Omega-\Omega_n)$$

Άρα ο τελικός μετασχηματισμός Fourier είναι: $X(j\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{j\Omega-j\Omega_n}+\pi\delta(\Omega-\Omega_n)\right)$

l mod 2= 1

α)ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

Δίνεται το σήμα είναι $x(t)=\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\left(\Omega_n t+\frac{\pi}{2}\right)} u(t)$. Προσπαθούμε να φέρουμε το σήμα σε πιο απλή μορφή με τον εξής τρόπο:

$$e^{j\left(\Omega_n t+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{j\Omega_n t}\bullet e^{\frac{\pi}{2}}=j\bullet e^{j\Omega_n t}$$

Άρα καταλήγουμε στα ίδια αποτελέσματα με τη μόνη διαφορά ότι αυτά πολλαπλασιάζονται με τον όρο j

Άρα $X(s)=j\bullet\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{s-j\Omega_n}$ και $X(j\Omega)=j\bullet\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{j\Omega-j\Omega_n}+\pi\delta(\Omega-\Omega_n)\right)$

3.11.15 Άσκηση με Επίλυση Διαφορικής με μετασχηματισμό Laplace

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $\frac{d^3y(t)}{dt^3}-\frac{dy(t)}{dt}=\sin(t)$ με αρχικές συνθήκες $y(0^-)=2$, $y^{(1)}(0^-)=0$, $y^{(2)}(0^-)=1$

<u>Λύση</u>

Παίρνουμε ML και στα 2 μέρη της διαφορικής και προκύπτει:

$$s^3Y(s)-s^2y(0^-)-sy^{(1)}(0^-)-y^{(2)}(0^-)-\left(sY(s)-y(0^-)\right)=\frac{1}{s^2+1}\Rightarrow$$

$$s^3Y(s)-s^2 2-s0-1-\left(sY(s)-2\right)=\frac{1}{s^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^3Y(s)-2s^2-1-sY(s)+2=\frac{1}{s^2+1}\Rightarrow s^3Y(s)-2s^2-1-s\bullet Y(s)+2=\frac{1}{s^2+1}$$

$$\left(s^3Y(s)-2s^2-1-s\bullet Y(s)+2\right)\bullet\left(s^2+1\right)=1\Rightarrow$$

$$\left(s^5Y(s)+s^3Y(s)-2s^4-2s^2-s^2-1-s^3Y(s)-sY(s)+2s^2+2\right)=1\Rightarrow$$

$$\left(s^5Y(s)-2s^4-s^2+1-sY(s)\right)=1\Rightarrow Y(s)\left(s^5-s\right)=2s^4+s^2\Rightarrow Y(s)\left(s^4-1\right)=2s^3+s$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{2s^3+s}{s^4-1}=\frac{2s^3+s}{\left(s^2\right)^2-1}=\frac{2s^3+s}{\left(s^2-1\right)\left(s^2+1\right)}=\frac{2s^3+s}{(s-1)(s+1)(s-j)(s+j)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}+\frac{\Gamma}{s-j}+\frac{\Delta}{s+j}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Α, Β, Γ και Δ ως εξής:

$$A=\lim_{s\to1}\left[(s-1)\frac{2s^3+s}{(s-1)(s+1)(s-j)(s+j)}\right]=\lim_{s\to1}\frac{2s^3+s}{(s+1)(s-j)(s+j)}=\frac{3}{4}$$

$$B=\lim_{s\to-1}\left[(s+1)\frac{2s^3+s}{(s-1)(s+1)(s-j)(s+j)}\right]=\lim_{s\to-1}\frac{2s^3+s}{(s-1)(s-j)(s+j)}=\frac{3}{4}$$

$$\Gamma=\lim_{s\to j}\left[(s-j)\frac{2s^3+s}{(s-1)(s+1)(s-j)(s+j)}\right]=\lim_{s\to j}\frac{2s^3+s}{(s-1)(s+1)(s+j)}=\frac{-2j+j}{-4j}=\frac{1}{4}$$

$$\Delta=\lim_{s\to-j}\left[(s+j)\frac{2s^3+s}{(s-1)(s+1)(s-j)(s+j)}\right]=\lim_{s\to-j}\frac{2s^3+s}{(s-1)(s+1)(s-j)}=\frac{+2j-j}{4j}=\frac{1}{4}$$

$$Y(s)=\frac{3}{4}\frac{1}{s-1}+\frac{3}{4}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{s-j}+\frac{1}{4}\frac{1}{s+j}$$

Με αντίστροφο ML ότι:

$$y(t)=\frac{3}{4}e^{t}\bullet u(t)+\frac{3}{4}e^{-t}\bullet u(t)+\frac{1}{4}e^{jt}\bullet u(t)+\frac{1}{4}e^{-jt}\bullet u(t)=\frac{3}{4}e^{t}\bullet u(t)+\frac{3}{4}e^{-t}\bullet u(t)+\frac{1}{2}\frac{e^{jt}+e^{-t}}{2}=$$

$$=\frac{3}{4}e^{t}\bullet u(t)+\frac{3}{4}e^{-t}\bullet u(t)+\frac{1}{2}\cos(t)$$

3.11.16 Επιπλέον Άσκηση με Επίλυση Διαφορικής σε μετασχηματισμό Laplace

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=x(t)$ με αρχικές συνθήκες $y(0^-)=0,\ y^{(1)}(0^-)=0$ και $x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le \pi\\ 0 & t\ge \pi \text{ και } t<0\end{cases}$

<u>Λύση</u>

Εκφράζουμε τη x(t) ως διαφορά 2 βηματικών συναρτήσεων δηλ. $x(t)=u(t)-u(t-\pi)$

Άρα η διαφορική εξίσωση παίρνει τώρα τη μορφή $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=u(t)-u(t-\pi)$

Παίρνουμε ML και στα δύο μέλη της διαφορικής και προκύπτει:

$$s^2Y(s)-sy(0^-)-sy'(0^-)+2sY(s)-2y(0^-)+5\cdot Y(s)=\frac{1}{s}-\left(e^{-\pi s}\frac{1}{s}\right)\Rightarrow Y(s)=\frac{1-e^{-s\pi}}{s(s^2+2s+5)}$$

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}\right\}$$

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα τον 1ο όρο:

$$\frac{1}{s(s^2+2s+5)}=\frac{1}{s\bullet(s-(-1+2j))\bullet(s-(-1-2j))}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-(-1+2j)}+\frac{\Gamma}{s-(-1-2j)}$$

$$A=\lim_{s\to 0}s\bullet\frac{1}{s(s^2+2s+5)}=\frac{1}{5}$$

$$B=\lim_{s\to(-1+2j)}(s-(-1+2j))\bullet\frac{1}{s\bullet(s-(-1+2j))\bullet(s-(-1-2j))}=\frac{1}{(-1+2j)\bullet(-1+2j+1+2j)}=\frac{1}{-4j-8}=\frac{1}{-8-4j}$$

$$\Gamma=\lim_{s\to(-1-2j)}(s-(-1-2j))\bullet\frac{1}{s\bullet(s-(-1+2j))\bullet(s-(-1-2j))}=\frac{1}{(-1-2j)\bullet(-1-2j+1-2j)}=\frac{1}{(-1-2j)\bullet(-4j)}=$$

$$=-\frac{1}{-8+4j}=\frac{1}{8-4j}$$

Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς:

$$\frac{1}{5}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{5}\cdot s \quad \text{και} \quad e^{-t}\bullet e^{2jt}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s+1)-2j}\ ,\ e^{-t}\bullet e^{-2jt}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s+1)+2j}$$

προκύπτει ότι το σήμα είναι: $\boxed{\frac{1}{5}\bullet u(t)+\frac{1}{-8-4j}e^{-t}\bullet e^{2jt}u(t)+\frac{1}{8-4j}e^{-t}\bullet e^{-2jt}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s(s^2+2s+5)}}$

Ο 2ος όρος είναι: $\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}=e^{-\pi s}\bullet\frac{1}{s}\bullet\frac{1}{s^2+2s+5}$

Σύμφωνα με την ιδιότητα ολίσθησης στο χρόνο προκύπτει ότι:

$$\boxed{\frac{1}{5}\bullet u(t-\pi)+\frac{1}{-8-4j}e^{-(t-\pi)}\bullet e^{2j(t-\pi)}u(t-\pi)+\frac{1}{8-4j}e^{-(t-\pi)}\bullet e^{-2j(t-\pi)}u(t-\pi)\leftrightarrow e^{-\pi s}\bullet\frac{1}{s}\bullet\frac{1}{s^2+2s+5}}$$

Άρα το συνολικό σήμα είναι:

$$\frac{1}{5}\bullet u(t)+\frac{1}{-8-4j}e^{-t}\bullet e^{2jt}u(t)+\frac{1}{8-4j}e^{-t}\bullet e^{-2jt}u(t)-\left(\frac{1}{5}\bullet u(t-\pi)+\frac{1}{-8-4j}e^{-(t-\pi)}\bullet e^{2j(t-\pi)}u(t-\pi)+\frac{1}{8-4j}e^{-(t-\pi)}\bullet e^{-2j(t-\pi)}u(t-\pi)\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\bullet u(t)+\frac{1}{-8-4j}e^{-t}\bullet e^{2jt}u(t)+\frac{1}{8-4j}e^{-t}\bullet e^{-2jt}u(t)-\frac{1}{5}\bullet u(t-\pi)+\frac{1}{8+4j}e^{-t}e^{\pi}e^{2jt}e^{-2\pi}u(t-\pi)-\frac{1}{8-4j}e^{-t}e^{\pi}e^{-2jt}e^{2\pi}u(t-\pi)=$$

$$=\frac{1}{5}\bullet u(t)+\frac{1}{-8-4j}e^{-t}\bullet e^{2jt}u(t)+\frac{1}{8-4j}e^{-t}\bullet e^{-2jt}u(t)-\frac{1}{5}\bullet u(t-\pi)-\frac{1}{8+4j}e^{-t}e^{2jt}u(t-\pi)+\frac{1}{8-4j}e^{-t}e^{-2jt}u(t-\pi)=$$

$$=\frac{1}{5}\bullet u(t)+\frac{1}{-8-4j}e^{-t}\bullet e^{2jt}u(t)+\frac{1}{8-4j}e^{-t}\bullet e^{-2jt}u(t)-\frac{1}{5}\bullet u(t-\pi)+\frac{1}{-8-4j}e^{-t}e^{2jt}u(t-\pi)+\frac{1}{8-4j}e^{-t}e^{-2jt}u(t-\pi)=$$

$$=\frac{1}{5}\bullet u(t)+\frac{1}{-8-4j}\bullet e^{-t}\bullet e^{2jt}\big(u(t)+u(t-\pi)\big)+\frac{1}{8-4j}e^{-t}\bullet e^{-2jt}\big(u(t)+u(t-\pi)\big)=$$

$$=\frac{1}{5}\bullet u(t)+e^{-t}\bullet e^{2jt}\big(u(t)+u(t-\pi)\big)\bullet\left(\frac{1}{-8-4j}+\frac{1}{8-4j}\right)=\frac{1}{5}\bullet u(t)+e^{-t}\bullet e^{2jt}\big(u(t)+u(t-\pi)\big)\bullet\frac{j}{10}$$

3.11.17 Τελευταίο Φροντιστήριο 2013 με ΦΕΦΕ ευστάθεια

Ένα **αιτιατό** σύστημα περιγράφεται από την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s)=\frac{s^3+3s^2+s+8}{\big(s-(-1+2j)\big)\bullet\big(s-(-1-2j)\big)}$$

Είναι το **σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές**;

<u>Λύση</u>

Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές παρόλο που όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος διότι η συνάρτηση μεταφοράς δεν είναι υλοποιήσιμη αφού ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή.

$$H(s)=\frac{s^3+3s^2+s+8}{\big(s-(-1+2j)\big)\bullet\big(s-(-1-2j)\big)}=\frac{s^3+3s^2+s+8}{(s+1+2j)\bullet(s+1-2j)}=\frac{s^3+3s^2+s+8}{\big((s+1)+2j\big)\bullet\big((s+1)-2j\big)}=\frac{s^3+3s^2+s+8}{s^2+2s+5}$$

Κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων:

s^3+3s^2+s+8	s^2+2s+5
$-s^3-2s^2-5s$	$s+1$
s^2-4s+8	
$-s^2-2s-5$	
$-6s+3$	

Η συνάρτηση μεταφορά είναι: $H(s)=(s+1)+\frac{-6s+3}{s^2+2s+5}$

Κάνοντας αντίστροφο ML και σύμφωνα με την ιδιότητα παραγώγισης στο χρόνο $\frac{dx(t)}{dt}\leftrightarrow sX(s)$ και με τους γνωστούς ML

$\delta(t)\leftrightarrow 1$
$\delta'(t)\leftrightarrow s$
$\delta''(t)\leftrightarrow s^2$
$\delta^{(n)}(t)\leftrightarrow s^n$

προκύπτει ότι η κρουστική απόκριση είναι: $h(t)=\delta'(t)+\delta(t)+L^{-1}\left\{\frac{-6s+3}{s^2+2s+5}\right\}$

Βάζουμε ως είσοδο στο σύστημα τη βηματική συνάρτηση u(t) η οποία είναι ένα φραγμένο σήμα. Το αντίστοιχο σήμα εξόδου που προκύπτει είναι το εξής:

$$y(t)=x(t)*h(t)\Rightarrow y(t)=u(t)*\left(\delta'(t)+\delta(t)+L^{-1}\left\{\frac{-6s+3}{s^2+2s+5}\right\}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=u(t)*\delta'(t)+u(t)*\delta(t)+u(t)*L^{-1}\left\{\frac{-6s+3}{s^2+2s+5}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=(-1)^1 u'(t)+u(t)+u(t)*L^{-1}\left\{\frac{-6s+3}{s^2+2s+5}\right\}=-\delta(t)+u(t)+u(t)*L^{-1}\left\{\frac{-6s+3}{s^2+2s+5}\right\}$$

Λόγω του όρου δ(t) η y(t) δεν είναι φραγμένο σήμα εξόδου και συνεπώς το σύστημα δεν είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές (Θα έπρεπε με φραγμένο σήμα εισόδου να έχουμε και φραγμένο σήμα εξόδου).

Παρατηρήσεις

- **Όταν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή σε μια συνάρτηση μεταφοράς το σύστημα δεν είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές και η μεθοδολογία που το αποδεικνύουμε είναι αυτή που ακολουθήσαμε στην άσκηση αυτή.**

- Στο μετασχηματισμό Laplace ισχύουν τα εξής:

Σύστημα	Ευστάθεια
Αιτιατό και ΦΕΦΕ Ευσταθές	Όλοι οι πόλοι της Συνάρτησης Μεταφοράς έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος
Μη Αιτιατό και ΦΕΦΕ Ευσταθές	Όλοι οι πόλοι της Συνάρτησης Μεταφοράς έχουν θετικό πραγματικό μέρος
Αιτιατό και μη Αιτιατό μέρος	Η περιοχή Σύγκλισης να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα

3.11.18 Έλεγχος ΦΕΦΕ Ευστάθειας σε συνάρτηση μεταφοράς με σταθερό όρο

Για να μελετήσουμε τη ΦΕΦΕ Ευστάθεια ενός συστήματος όταν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του H(s) στην περίπτωση που αυτή περιλαμβάνει σταθερό όρο παραθέτουμε τα ακόλουθα παραδείγματα:

- ✓ Στη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=\frac{2}{s+3}+2$ ο μοναδικός πόλος είναι το -3. Επειδή ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή, εξετάζουμε κανονικά αν ο πόλος έχει αρνητικό πραγματικό μέρος. Εδώ το -3 έχει αρνητικό πραγματικό μέρος άρα το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές

- ✓ Στη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=\frac{s+3}{s+5}+2$ ο μοναδικός πόλος είναι το -5. Επειδή ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με το βαθμό του παρονομαστή, εξετάζουμε αν ο πόλος έχει αρνητικό πραγματικό μέρος. Εδώ το -5 έχει αρνητικό πραγματικό μέρος άρα το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές

- ✓ Στη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=\frac{s^2+2s+13}{s+5}=s+\frac{-3s+13}{s+5}$ ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή και το σύστημα δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές λόγω του όρου s. Συγκεκριμένα κάνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace η $h(t)=\delta'(t)+L^{-1}\left\{\frac{-3s+13}{s+5}\right\}$. **Επειδή η h(t) περιλαμβάνει τη δ′(t) το σύστημα <u>δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές</u>** διότι π.χ. με είσοδο το σήμα x(t)=u(t) (δηλ με φραγμένο σήμα εισόδου) το σήμα εξόδου είναι: $y(t)=x(t)*h(t)=u(t)*\delta^{(1)}(t)+u(t)*L^{-1}\left\{\frac{-3s+13}{s+5}\right\}=-\delta(t)+u(t)*L^{-1}\left\{\frac{-3s+13}{s+5}\right\}$. Λόγω του όρου δ(t) το σήμα εξόδου y(t) δεν είναι φραγμένο σήμα και συνεπώς το σύστημα δεν είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές.

Παρατηρήσεις

- ➢ Μετασχηματισμός Laplace: $\delta^{(k)}(t)\leftrightarrow s^k$
- ➢ Αν η h(t) περιέχει τη δ′(t), δ″(t) κ.λ.π. και γενικά οποιαδήποτε παράγωγο της δ(t) κ.λ.π. ΤΟΤΕ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΦΕΦΕ ΕΥΣΤΑΘΕΣ
- ➢ Το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=s^2$ **δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές διότι η κρουστική απόκριση είναι** $h(t)=\delta''(t)\leftrightarrow s^2$ **και με είσοδο τη βηματική συνάρτηση u(t) η έξοδος είναι** $y(t)=h(t)*u(t)=\delta''(t)*u(t)=(-1)^2\bullet\delta'(t)=\delta'(t)$

Συμπέρασμα: Όταν ο βαθμός του Αριθμητή είναι ≤ από το βαθμό του Παρονομαστή το σύστημα μπορεί να είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές μπορεί και όχι. Εξαρτάται από το πρόσημο των πόλων της H(s). Αν όμως ο βαθμός του Αριθμητή είναι > από το βαθμό του Παρονομαστή το σύστημα ΔΕΝ είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές

3.11.19 Τελευταίο Φροντιστήριο 2013 με Διαφορική

Χαρακτηρίστε το σύστημα ως προς τη ΦΕΦΕ ευστάθεια και βρείτε τη **διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί**. Το σήμα εισόδου είναι $x(t)=e^{-3t}\bullet u(t)$ και το σήμα εξόδου $y(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)\bullet u(t)$

Λύση

Ο μετασχηματισμός Laplace της εισόδου είναι $X(s)=\dfrac{1}{s+3},\mathrm{Re}(s)>3$ και ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου είναι

$$Y(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}=\frac{1}{(s+1)\bullet(s+2)},\mathrm{Re}(s)>-1$$

Η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει είναι: $\boxed{H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{\dfrac{1}{(s+1)\bullet(s+2)}}{\dfrac{1}{s+3}}=\dfrac{s+3}{(s+1)\bullet(s+2)},\mathrm{Re}(s)>-1}$

- **Μπορούμε από τη συνάρτηση μεταφοράς να χαρακτηρίσουμε απευθείας το σύστημα ως ΦΕΦΕ ευσταθές ή όχι επειδή ο βαθμός αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή και δε χρειάζεται να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων και αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.**

- **Το σύστημα είναι αιτιατό γιατί και το σήμα εισόδου και το σήμα εξόδου είναι αιτιατά λόγω του ότι ορίζονται μόνο σε θετικές χρονικές στιγμές. Συνεπώς για να είναι το σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Οι πόλοι είναι το -1 και το -2, έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, άρα το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές. Εναλλακτικά μπορούμε να το χαρακτηρίσουμε ως ΦΕΦΕ ευσταθές διότι η περιοχή σύγκλισης είναι Re(s)>-1 και περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.**

Για να βρούμε τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί το σύστημα κάνουμε το εξής:

Από τη σχέση $\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{s+3}{(s+1)\bullet(s+2)}$ προκύπτει ότι:

$$Y(s)\bullet(s+1)\bullet(s+2)=X(s)\bullet(s+3)\Rightarrow s^2\bullet Y(s)+3s\bullet Y(s)+2\bullet Y(s)=s\bullet X(s)+3\bullet X(s)$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace προκύπτει ότι: $y^{(2)}(t)+3\bullet y^{(1)}(t)+2\bullet y(t)=x^{(1)}(t)+3\bullet x(t)$

3.11.20 Θέμα 3 –Ιούλιος 2008 και Φροντιστήριο 2013

Θεωρείστε το σήμα συνεχούς χρόνου $f(t)=\cos(\Omega_c t),|t|\le\dfrac{\pi}{2}$

a. Να βρεθεί **η σειρά Fourier της περιοδικής επέκτασης** του σήματος

b. Υποθέστε ότι **το παραπάνω σήμα οδηγείται στην είσοδο ενός RC κυκλώματος 1ης τάξης**. Υπολογίστε την **έξοδο** του συστήματος (**ως έξοδο θεωρήστε την τάση στα άκρα του πυκνωτή**)

Λύση

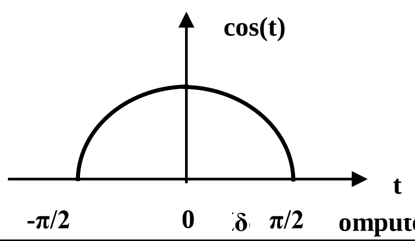
Προσοχή αν δεν έδινε τον περιορισμό για το χρόνο δηλ. ότι $|t|\le\dfrac{\pi}{2}$ τότε η άσκηση θα λυνόταν με τον τύπο Euler ως εξής:

Ο γενικός της σειράς Fourier είναι $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\bullet e^{jn\Omega_0 t}$.Από εδώ παρατηρούμε ότι οι συντελεστές της σειράς Fourier θα ήταν οι $c_1=\dfrac{1}{2}$ για n=1 και $c_{-1}=\dfrac{1}{2}$ για n=-1 αντίστοιχα.. Όμως λόγω του περιορισμού $|t|\le\dfrac{\pi}{2}$ η άσκηση λύνεται με διαφορετικό τρόπο.

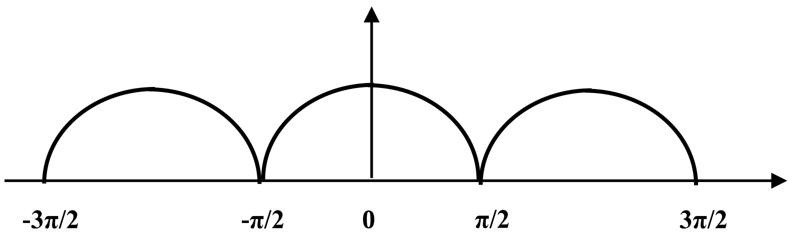
Προσοχή: Είναι διαφορετική η συχνότητα Ω_c του συνημίτονου και διαφορετική η βασική συχνότητα επανάληψης του συνημιτόνου. Εδώ η συχνότητα του συνημίτονου είναι Ω_c =1, ενώ η βασική συχνότητα επανάληψης του συνημίτονου είναι Ω_0 =2 και αυτή προκύπτει από τον τύπο:

$$\Omega_0=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\Omega_0=\frac{2\pi}{\pi}\Rightarrow\Omega_0=2$$

Αν πάρουμε μια περίοδο από –π/2 έως π/2 του $\cos(t)$ τότε το σήμα είναι το ακόλουθο:



Το σήμα αυτό αντιπροσωπεύει το **πλήρως ανορθωμένο συνημίτονο με** $T=\pi$ και Στη συνέχεια σχηματίζουμε την περιοδική επέκταση του σήματος η οποία είναι ακόλουθη:



$$c_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x(t)\bullet e^{-jn\frac{2\pi}{\pi}t}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\Omega_c t)\bullet e^{-jn2t}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}\bullet e^{-jn2t}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{jt(1-2n)}\bullet dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-jt(1+2n)}\bullet dt=\frac{1}{2\pi}\bullet\frac{1}{j(1-2n)}\left[e^{jt(1-2n)}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2\pi}\bullet\frac{1}{j(1+2n)}\left[e^{-jt(1+2n)}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi j(1-2n)}\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\bullet e^{-jn\pi}-e^{-j\frac{\pi}{2}}\bullet e^{jn\pi}\right)-\frac{1}{2\pi j(1+2n)}\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\bullet e^{-jn\pi}-e^{j\frac{\pi}{2}}\bullet e^{jn\pi}\right)=$$

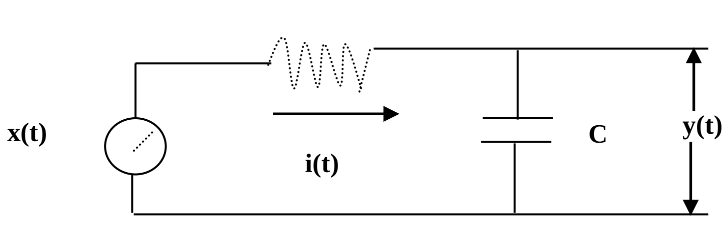
$$=\frac{1}{2\pi j(1-2n)}\left(j(-1)^n+j(-1)^n\right)-\frac{1}{2\pi j(1+2n)}\left(-j\bullet(-1)^n-j\bullet(-1)^n\right)=\frac{(-1)^n}{\pi(1-2n)}+\frac{(-1)^n}{\pi(1+2n)}=\frac{2(-1)^n\pi}{\pi\left(1-4n^2\right)}=\frac{2(-1)^n}{\pi\left(1-4n^2\right)}$$

Άρα η σειρά Fourier είναι: $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\pi\left(1-4n^2\right)}\bullet e^{jn2t}$

Παρατηρήσεις

- ✓ **Ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται ποτέ γιατί το n παίρνει μόνο ακέραιες τιμές**
- ✓ **Οι συντελεστές μιας σειράς Fourier δεν ΕΙΝΑΙ ΠΟΤΕ ΜΗΔΕΝ**

Β. **Το κύκλωμα RC πρώτης τάξης** δίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Στο σχήμα αυτό το x(t) είναι η τάση στα άκρα της πηγής και y(t) είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή

Ισχύει ότι: $V_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}}(t)=V_R(t)+V_c(t)\Rightarrow V_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}}(t)=V_R+V_c(t)\Rightarrow V_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}}(t)=R\bullet i(t)+V_c(t)$ (1) και $i(t)=C\bullet\frac{dV_c(t)}{dt}$ (2).

Αντικαθιστούμε τη σχέση (2) στην (1) και προκύπτει ότι:

$$\boxed{V_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}}(t)=R\bullet C\bullet\frac{dV_c(t)}{dt}+V_c(t)\Rightarrow V_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}}(t)=R\bullet C\bullet V_c(t)'+V_c(t)}$$

Θεωρώντας ως σήμα εισόδου την τάση της πηγής $x(t)=V_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}}(t)$ **που είναι το σήμα cos(Ω_ct) και ως σήμα εξόδου την τάση στα άκρα του πυκνωτή** $y(t)=V_c(t)$ **προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα:**

$$\boxed{x(t)=R\bullet C\bullet y'(t)+y(t)}\ (3)$$

Παίρνουμε μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέρη της (3) και υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος ως εξής:

$$X(s)=R\bullet C\bullet s\bullet Y(s)+Y(s)\Rightarrow X(s)=Y(s)\bullet(1+R\bullet C\bullet s)\Rightarrow\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{1+R\bullet C\bullet s}\Rightarrow H(s)=\frac{1}{1+R\bullet C\bullet s}$$

Με είσοδο το σήμα $\cos(\Omega_c t)=\frac{e^{j\Omega_c t}+e^{-j\Omega_c t}}{2}$ και με συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=\frac{1}{1+R\bullet C\bullet s}$ η έξοδος του συστήματος είναι:

$$\boxed{y(t)=\frac{1}{2}\bullet H(j\Omega_c)\bullet e^{j\Omega_c t}+\frac{1}{2}\bullet H(-\Omega_c)\bullet e^{-j\Omega_c t}\Rightarrow y(t)=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{1+R\bullet C\bullet j\Omega_c}\bullet e^{j\Omega_c t}+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{1-R\bullet C\bullet j\Omega_c}\bullet e^{-j\Omega_c t}}$$

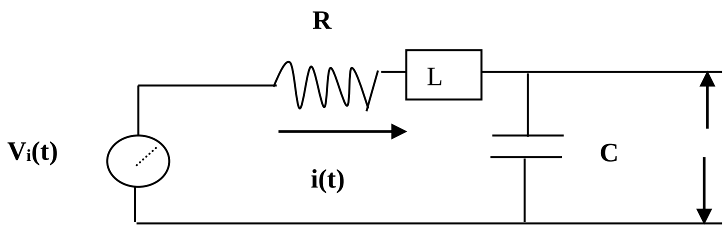
Υπενθύμιση:
Η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος όταν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς H(s) και η είσοδος σε αυτό είναι ιδιοσυνάρτηση της μορφής $A\bullet e^{s_0 t}$ ή $A\bullet e^{-s_0 t}$ δίνεται από τον τύπο:

- Με είσοδο $x(t)=A\bullet e^{s_0 t}$ η έξοδος είναι $y(t)=A\bullet e^{s_0 t}\bullet H(s_0)$
- Με είσοδο $x(t)=A\bullet e^{-s_0 t}$ η έξοδος είναι $y(t)=A\bullet e^{-s_0 t}\bullet H(-s_0)$

Απαραίτητη προϋπόθεση για να υπάρχει έξοδος είναι το s_0 της εισόδου να βρίσκεται στην περιοχή σύγκλισης της H(s).

Μεθοδολογία Ασκήσεων με Κυκλώματα
- Στις ασκήσεις με κυκλώματα προσδιορίζουμε πρώτα από την εκφώνηση της άσκησης το σήμα εισόδου και εξόδου. Το σήμα εισόδου είναι η πηγή
- Κατασκευάζουμε διαφορική εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα η οποία περιλαμβάνει μόνο το σήμα εισόδου και το σήμα εξόδου
- Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος
- Τέλος (αν ζητείται) βρίσκουμε την έξοδο του συστήματος από τους τύπους $y(t)=A\bullet e^{s_0 t}\bullet H(s_0)$ ή $y(t)=A\bullet e^{-s_0 t}\bullet H(-s_0)$

3.11.21 Θέμα με Κύκλωμα
Δίνεται το κύκλωμα RLC του ακόλουθου σχήματος. Θεωρώντας γνωστή την τάση εισόδου $V_i(t)$, το αρχικό ρεύμα i(0) του πηνίου και την αρχική τάση $V_C(0)$ του πυκνωτή να βρεθούν:
α)**Η συνάρτηση μεταφοράς** του κυκλώματος μεταξύ της πηγής $V_i(t)$ (είσοδος) και του ρεύματος i(t) (έξοδος)
β)**Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το ρεύμα i(t) του κυκλώματος**
<u>Λύση</u>



α) $V_i(t)=V_R(t)+V_L(t)+V_C(t)=R\bullet i(t)+L\bullet\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\left(\int_{0^-}^{t}i(r)\bullet dr+V_C(0^-)\right)$

Θεωρώντας ως σήμα εισόδου x(t) την τάση της πηγής $V_i(t)$ και ως σήμα εξόδου το ρεύμα του κυκλώματος $i(t)$ προκύπτει ότι:

$$\boxed{x(t)=R\bullet y(t)+L\bullet y'(t)+\frac{1}{C}\left(\int_{0^-}^{t}y(r)\bullet dr\right)}$$

Παίρνουμε ML και στα δύο μέλη της προηγούμενης εξίσωσης:

$$X(s) = R \bullet Y(s) + L \bullet s \bullet Y(s) + \frac{1}{C} \bullet \left(\frac{Y(s)}{s} + \frac{\varphi(0^-)}{s} \right) \Rightarrow X(s) = Y(s) \bullet \left(R + L \bullet s + \frac{1}{C \bullet s} \right) \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{R + L \bullet s + \frac{1}{C \bullet s}}$$

β) Η αρχική εξίσωση από την οποία υπολογίσαμε τη συνάρτηση μεταφοράς είναι ολοκληρωτικο-διαφορική εξίσωση και εμείς θέλουμε να βρούμε μια καθαρά διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα.

$$H(s) = \frac{1}{R + L \bullet s + \frac{1}{C \bullet s}} \Rightarrow H(s) = \frac{s}{sR + Ls^2 + \frac{1}{C}} \Rightarrow \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s \bullet R + Ls^2 + \frac{1}{C}} \Rightarrow$$

$$I(s) \bullet \left(s \bullet R + Ls^2 + \frac{1}{C} \right) = s \bullet V(s) \Rightarrow s \bullet R \bullet I(s) + L \bullet s^2 \bullet I(s) + \frac{1}{C} \bullet I(s) = s \bullet V(s) \Rightarrow$$

$$s \bullet C \bullet R \bullet I(s) + L \bullet C \bullet s^2 \bullet I(s) + I(s) = s \bullet C \bullet V(s)$$

Με αντίστροφο ML προκύπτει ότι:

$$\boxed{R \bullet i^{(1)}(t) + L \bullet i^{(2)}(t) + \frac{1}{C} \bullet i(t) = v^{(1)}(t) \Rightarrow C \bullet R \bullet i^{(1)}(t) + C \bullet L \bullet i^{(2)}(t) + i(t) = C \bullet v^{(1)}(t)}$$

Τυπολόγιο Κυκλωμάτων	
$V_R(t) = R \bullet i(t)$	**Τάση στα άκρα Αντίστασης**
$V_L(t) = L \bullet \frac{di(t)}{dt}$	**Τάση στα άκρα Πηνίου**
$V_C(t) = \frac{1}{C} \left(\int_{0^-}^{t} i(r) \bullet dr + V_C(0^-) \right)$	**Τάση στα άκρα Πυκνωτή**
$i(t) = C \bullet \frac{dV_c(t)}{dt}$	**Ρεύμα Πυκνωτή**

3.11.22 Θέμα 2 Ιούνιος 2014

Θεωρήστε το σήμα συνεχούς χρόνου x(t)=1, 0≤t≤1 sec και x(t)=0 για 1<t<2 sec

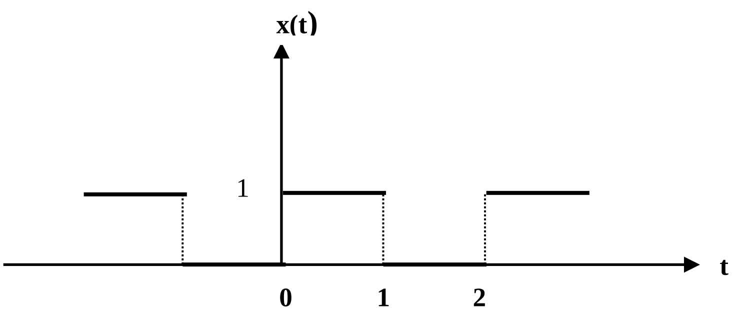
α) Να βρεθεί **η σειρά Fourier της περιοδικής επέκτασης του σήματος**

(b)Υποθέστε ότι το παραπάνω σήμα οδηγείται στην είσοδο του RC κυκλώματος του σχήματος. **Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος**

Είναι περιοδική; Αν ναι, ποια η περίοδος της και ποιες οι φασματικές γραμμές της;

<u>Λύση</u>

Το σήμα είναι σταθερό και έχει διαφορετική τιμή στα διαστήματα της περιόδου της (1 στο 0≤t≤1 και 0 στο 1<t<2)



Η συχνότητα είναι $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Υπολογίζουμε **απευθείας** τους συντελεστές της σειράς Fourier:

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^2 x(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt + \int_1^2 0\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 1\bullet e^{-jn\pi n}dt = \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{-jn\pi}\left[e^{-jn\pi n}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2jn\pi}\left(e^{-jn\pi}-1\right) = \frac{\left(1-e^{-jn\pi}\right)}{2jn\pi} = \frac{1-(-1)^n}{2jn\pi}, n\neq 0$$

Ο συντελεστής c_0 είναι: $c_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 x(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 1dt + \frac{1}{2}\int_1^2 0dt = \frac{1}{2}$

Άρα η σειρά Fourier είναι $\boxed{x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{2jn\pi}e^{j\pi nt}}$

b.
Στο σχήμα αυτό το σήμα εισόδου είναι η τάση x(t) στα άκρα της πηγής και το σήμα εξόδου y(t) είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή. Ισχύει ότι:

$$V_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}}(t) = V_R(t) + V_c(t) \Rightarrow V_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}}(t) = V_R(t) + V_c(t) \Rightarrow V_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}}(t) = R\bullet i(t) + V_c(t) \quad (1).$$

Πρέπει στη σχέση του κυκλώματος να ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ ΜΟΝΟ ΤΑ ΣΗΜΑΤΑ ΕΙΣΟΔΟΥ ΚΑΙ ΕΞΟΔΟΥ. Γιαυτό αντικαθιστούμε το ρεύμα $i(t)$ στη σχέση (1) με τον τύπο $i(t) = C\frac{dV_c(t)}{dt}$. Άρα προκύπτει ότι:

$$\boxed{V_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}}(t) = RC\frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = RCV_c{}'(t) + V_c(t)}$$

Θεωρώντας ως σήμα εισόδου την τάση της πηγής $V_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}}(t)$ δηλ $x(t) = V_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}}(t)$ και ως σήμα εξόδου την τάση στα άκρα του πυκνωτή $V_c(t)$ δηλ. $y(t) = V_c(t)$ προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα:

$$\boxed{x(t) = RCy'(t) + y(t)} \quad (2)$$

Παίρνουμε μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέρη της (2) με σκοπό να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς.

$$X(s) = RCsY(s) + Y(s) \Rightarrow X(s) = Y(s)(1+RCs) \Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1+RCs} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{1+RCs}$$

Γενικά η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος με είσοδο μια ιδιοσυνάρτηση της μορφής $x(t)=A\bullet e^{s_0t}$ είναι της μορφής:

$$y(t) = Ae^{s_0 t}H(s_0)$$

Άρα με είσοδο το σήμα $x(1)=1=e^{0t}$ και με συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \frac{1}{1+RCs}$ η έξοδος του συστήματος είναι:

$$\boxed{y(t) = 1\bullet H(0) = 1}$$

ενώ με είσοδο το σήμα $x(t) = 0$ και με συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \frac{1}{1+RCs}$ η έξοδος του συστήματος είναι:

$$\boxed{y(t) = 0\bullet H(0) = 0}$$

Η έξοδος **είναι κατά τμήματα περιοδική με περίοδο 2**. Συγκεκριμένα στο διάστημα $0\le t\le 1$ η έξοδος είναι 1 ενώ στο διάστημα $1<t<2$ η έξοδος είναι 0. Άρα έχει 2 φασματικές γραμμές, {0,0} και {0,1}

3.11.23 Θέμα 1 Σεπτέμβριος 2014

7 Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα S έχει κρουστική απόκριση $h(t)$ και η σχέση εισόδου-εξόδου περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+(1+\alpha)\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\alpha(1+\alpha)\frac{dy(t)}{dt}+\alpha^2y(t)=x(t).$$

α) Αν

$$g(t)=\frac{dh(t)}{dt}+h(t),$$

πόσους πόλους έχει η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$;

β) Για ποιες πραγματικές τιμές της παραμέτρου α το σύστημα S είναι ευσταθές;

__**Λύση**__

α) Δίνεται ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+(1+\alpha)\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\alpha(1+\alpha)\frac{dy(t)}{dt}+\alpha^2y(t)=x(t)$$

και θέλουμε να υπολογίσουμε τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς G(s) για την κρουστική απόκριση $g(t)=\frac{dh(t)}{dt}-h(t)$

Πρώτα υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς H(s) ως εξής (παίρνουμε ML και στα δύο μέλη της h(t) και εφαρμόζουμε την ιδιότητα παραγώγισης στο χρόνο.

$$\left[s^3Y(s)-s^2y(0^-)-sy'(0^-)-s^0y''(0^-)\right]+(1+\alpha)\bullet\left[s^2Y(s)-sy(0^-)-s^0y'(0^-)\right]+\alpha(1+\alpha)\bullet\left[sY(s)-s^0y(0^-)\right]+\alpha^2Y(s)$$
$$=X(s)\Rightarrow s^3Y(s)+(1+\alpha)\bullet s^2Y(s)+\alpha(1+\alpha)\bullet s\bullet Y(s)+\alpha^2Y(s)=X(s)\Rightarrow Y(s)\bullet\left(s^3+(1+\alpha)s^2+\alpha(1+\alpha)s+\alpha^2\right)=$$
$$X(s)\Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^3+(1+\alpha)s^2+\alpha(1+\alpha)s+\alpha^2}$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι στον παραπάνω υπολογισμό θεωρήσαμε $y(0^-)=0, y'(0^-)=0, y''(0^-)=0$ διότι το σύστημα δίνεται αιτιατό.

Μετά παίρνουμε ML και στα δύο μέλη της g(t) και προκύπτει:

$$G(s)=sH(s)-h(0^-)-H(s)\Rightarrow G(s)=(s-1)\bullet H(s)\Rightarrow G(s)=\frac{s-1}{s^3+(1+\alpha)s^2+\alpha(1+\alpha)s+\alpha^2}$$

Πρώτα πρέπει να βρούμε τις ρίζες του παρονομαστή. Για να λύσουμε μια εξίσωση βαθμού > 2 ξεκινάμε δοκιμάζοντας πειραματικές ρίζες. Μια ρίζα είναι το -1. Άρα

$s^3+(1+\alpha)s^2+\alpha(1+\alpha)s+\alpha^2$	$s+1$
$-s^3-s^2$	$s^2+\alpha s+\alpha^2$
$\alpha s^2+\alpha\,(1+\alpha)s+\alpha^2$	
$-\alpha s^2-\alpha s$	
$\alpha^2s+\alpha^2$	
$-\alpha^2s-\alpha^2$	
0	

Οι ρίζες του $s^2+\alpha s+\alpha^2$ είναι:c

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς G(s) γράφεται ως εξής::

$$G(s)=\frac{s-1}{s^3+(1+\alpha)s^2+\alpha(1+\alpha)s+\alpha^2}=\frac{s-1}{(s+1)\bullet\left(s+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}i\right)\bullet\left(s+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

και οι πόλοι της είναι:

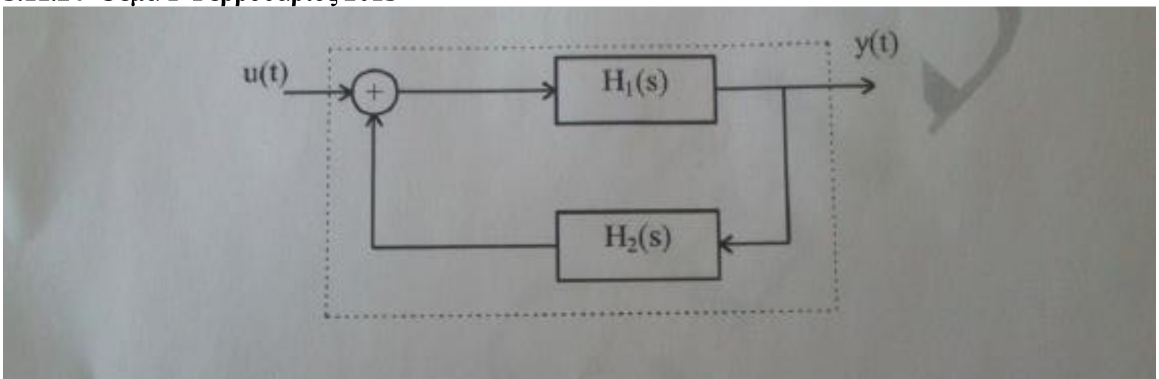
- $s_1=-1$

- $s_2 = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} i$
- $s_3 = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} i$

Συνεπώς η G(s) έχει 3 πόλους: ένα πραγματικό (τον -1) και δύο συζυγείς μιγαδικούς που εξαρτώνται από την παράμετρο α.

β)Για να είναι ευσταθές ένα σύστημα πρέπει ΟΛΟΙ οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Ο πραγματικός πόλος στο -1 προφανώς έχει αρνητικό πραγματικό μέρος. Οι δύο συζυγείς μιγαδικοί πόλοι με πραγματικό μέρος $-\frac{\alpha}{2}$ θα βρίσκονται στο αρνητικό μιγαδικό επίπεδο αν α>0. **Συνεπώς το σύστημα είναι ευσταθές για α>0**.

3.11.24 Θέμα 1 Φεβρουάριος 2015



όπου $H_1(s)=1/(s-1)$ και $H_2(s)=k/(s+2)$.
(α) Βρείτε τη συνολική συνάρτηση μεταφοράς.
(β) Αν τα δύο υποσυστήματα είναι αιτιατά καθώς και το συνολικό σύστημα, βρείτε για ποιές τιμές της μεταβλητής k το συνολικό σύστημα είναι ευσταθές.

<u>Απάντηση</u>

Το w(t) είναι το σήμα εισόδου στο σύστημα $H_1(s)$ και το v(t) είναι το σήμα εξόδου από το $H_2(s)$.
Το $w(t)=u(t)+v(t)=u(t)+y(t)*h_2(t)$
Το $y(t)=w(t)*h1(t)=(u(t)+y(t)*h_2(t))*h_1(t) \Rightarrow y(t)= u(t)*h_1(t)+ y(t)*h_2(t))*h_1(t)$
Παίρνουμε ML και στα 2 μέρη και προκύπτει ότι:

$Y(s)=X(s)\bullet H_1(s)+Y(s)\bullet H_1(s)\bullet H_2(s) \Rightarrow H(s)=$ $H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{H_1(s)}{1-H_1(ks)\bullet H_2(s)}=\frac{\frac{1}{s-1}}{1-\frac{1}{s-1}\bullet\frac{k}{s+2}}=\frac{s+2}{s^2+s-(k+2)}$

b)Δ>0

4 Τέταρτο Κεφάλαιο – Καταστατικές Εξισώσεις

4.1 Καταστατικές ή Δυναμικές Εξισώσεις

Οι καταστατικές εξισώσεις ενός συστήματος το περιγράφουν **στο χώρο κατάστασης δηλ. δείχνουν τη χρονική εξέλιξη κάποιων μεγεθών**. **Ορίζουμε ως κατάσταση του συστήματος** τη χρονική στιγμή t_0 το σύνολο της ελάχιστης πληροφορίας (τη χρονική στιγμή t_0) η οποία μαζί με τη γνώση της εισόδου v(t) καθορίζει πλήρως τη συμπεριφορά του συστήματος για $t \geq t_0$**. Ως συμπεριφορά του συστήματος εννοούμε τις μεταβολές που αυτό υφίσταται ως συνάρτηση του χρόνου**.

Το σύνολο των μεταβλητών που καθορίζουν την κατάσταση ενός συστήματος ονομάζονται μεταβλητές κατάστασης και αποτελούν τις συνιστώσες ενός διανύσματος που ονομάζεται **διάνυσμα κατάστασης** και συμβολίζεται ως $\underline{x}(t)$. Για παράδειγμα έστω v(t) και i(t) οι μεταβλητές κατάστασης οι οποίες ορίζουν το διάνυσμα κατάστασης $\underline{x}(t)=\begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$ όπου v(t) η τάση του συστήματος και i(t) το ρεύμα που το διαρρέει. Η παράγωγος στο διάνυσμα κατάστασης συμβολίζεται ως $\dot{\underline{x}}(t)$ και περιλαμβάνει τα μεγέθη $\dot{\underline{x}}(t)=\begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{i}(t) \end{bmatrix}$

Οι εξισώσεις που περιγράφουν τις μονοσήμαντα ορισμένες σχέσεις μεταξύ εισόδου, εξόδου και μεταβλητών κατάστασης ονομάζονται δυναμικές ή καταστατικές εξισώσεις και είναι οι ακόλουθες:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \bullet \underline{x}(t) + \underline{b} \bullet v(t)$$
$$y(t) = \underline{c}^T \bullet \underline{x}(t) + d \bullet v(t)$$

4.2 Βασικά μεγέθη Καταστατικών Εξισώσεων

Συμβολισμός Μεγέθους	Ερμηνεία	Τύπος Υπολογισμού
e^{At}	**Μητρώο Καταστατικής Μετάβασης**	$e^{At} = L^{-1}\left(\left(s \bullet I - A\right)^{-1}\right)$
h(t)	**Κρουστική Απόκριση Συστήματος**	$h(t) = \underline{c}^T \bullet e^{At} \bullet \underline{b} + d \bullet \delta(t)$
H(s)	**Συνάρτηση Μεταφοράς Συστήματος**	$H(s) = \underline{c}^T \bullet (s \bullet I - A)^{-1} \bullet \underline{b} + d$
y(t)	**Σήμα Εξόδου**	**Όταν το σύστημα δεν ξεκινά αρχικά από ηρεμία δηλ. όταν δίνεται διάνυσμα αρχικής κατάστασης $\underline{x}(t_0)$ τότε η έξοδος υπολογίζεται από τη 2η καταστατική εξίσωση**: $y(t) = \underline{c}^T \bullet \underline{x}(t) + d \bullet v(t)$ **Όταν το σύστημα ξεκινά αρχικά από ηρεμία (δηλ. όταν ΔΕΝ δίνεται διάνυσμα αρχικής κατάστασης $\underline{x}(t_0)$) τότε η έξοδος υπολογίζεται από** $L^{-1}(Y(s))$ με $Y(s) = X(s) \bullet H(s)$ Συνοψίζοντας έχουμε: $y(t) = \underline{c}^T \bullet \underline{x}(t) + d \bullet v(t)$ όταν $\underline{x}(t_0) \neq 0$ $y(t) \leftrightarrow Y(s) = X(s) \bullet H(s)$ με $\underline{x}(t_0) = 0$
$\dot{\underline{x}}(t)$ ή $\underline{x}^{(1)}(t)$	**Παράγωγος στο Διάνυσμα Κατάστασης**	Περιλαμβάνει την παράγωγο για όλα τα σήματα που περιέχονται στο διάνυσμα κατάστασης

$\underline{x}(t)$	**Διάνυσμα Κατάστασης**	$\underline{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \bullet \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-r)} \bullet \underline{b} \bullet v(r) \bullet dr$ Συμβολίζουμε ως t_0 την αρχική χρονική στιγμή που το σύστημα ξεκινά να λειτουργεί και **συνήθως επιλέγουμε ως αρχική χρονική στιγμή τη χρονική στιγμή 0** οπότε ο προηγούμενος τύπος παίρνει τη μορφή: $\underline{x}(t) = e^{At} \bullet \underline{x}(0) + \int_{0}^{t} e^{A(t-r)} \underline{b} \bullet v(r) \bullet dr$
$\underline{x}(t_0)$	Διάνυσμα αρχικής κατάστασης στη χρονική στιγμή t_0	
$\underline{x}(0)$	Διάνυσμα αρχικής κατάστασης στη χρονική στιγμή 0	
d	**Βαθμωτός όρος**	**Πραγματικός Αριθμός**
v(t)	**Σήμα Εισόδου**	
A	**Μητρώο διάστασης n x n**	
$\underline{b}$	**Διάνυσμα Συντελεστών**	**Αν** $\underline{b} = \underline{0}$ **το σύστημα ονομάζεται ομογενές**
$\underline{c}^T$	**Διάνυσμα Συντελεστών (γράφεται ως γραμμή)**	
$S = [\underline{b} \quad A\underline{b} \quad A^2\underline{b} \quad .... \quad A^{n-1}\underline{b}]$	**Μητρώο Ελεγξιμότητας**	**Ένα σύστημα είναι Ελέγξιμο αν και μόνο αν το Μητρώο Ελεγξιμότητας S είναι αντιστρέψιμο δηλ. det(S)≠0.**
$V = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T A \\ \underline{c}^T A^2 \\ \cdots\cdots \\ \underline{c}^T A^{n-1} \end{bmatrix}$	**Μητρώο Παρατηρησιμότητας**	**Ένα σύστημα είναι Παρατηρήσιμο αν και μόνο αν το Μητρώο Παρατηρησιμότητας V είναι αντιστρέψιμο δηλ. det(V)≠0.**

Παράδειγμα 1

Δίνεται το μητρώο $A=\begin{bmatrix}-3 & -10\\ 2 & 6\end{bmatrix}$. Να βρεθεί το **μητρώο καταστατικής μετάβασης** e^{At}

Λύση

$$e^{At}=L^{-1}\left((s\bullet I-A)^{-1}\right)=L^{-1}\left\{\left(s\bullet\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3 & -10\\ 2 & 6\end{bmatrix}\right)^{-1}\right\}=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}s+3 & 10\\ -2 & s-6\end{bmatrix}^{-1}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix}s-6 & -10\\ 2 & s+3\end{bmatrix}}{(s+3)\bullet(s-6)+20}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix}s-6 & -10\\ 2 & s+3\end{bmatrix}}{s^2-3s+2}\right\}=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\frac{s-6}{s^2-3s+2} & -\frac{10}{s^2-3s+2}\\ \frac{2}{s^2-3s+2} & \frac{s+3}{s^2-3s+2}\end{bmatrix}\right\}=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\frac{s-6}{(s-2)\bullet(s-1)} & -\frac{10}{(s-2)\bullet(s-1)}\\ \frac{2}{(s-2)\bullet(s-1)} & \frac{s+3}{(s-2)\bullet(s-1)}\end{bmatrix}\right\}$$

Κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα για κάθε όρο του πίνακα. Δείχνουμε ενδεικτικά τη διαδικασία αυτή για το πρώτο στοιχείο του πίνακα: $\frac{s-6}{(s-2)\bullet(s-1)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-1}$

$$A=\lim_{s\to 2}(s-2)\bullet\frac{s-6}{(s-2)\bullet(s-1)}=-4 \text{ και } B=\lim_{s\to 1}(s-1)\bullet\frac{s-6}{(s-2)\bullet(s-1)}=5$$

Άρα $\frac{s-6}{(s-2)\bullet(s-1)}=\frac{-4}{s-2}+\frac{5}{s-1}$

Ομοίως υπολογίζουμε και τους υπόλοιπους συντελεστές και τελικά ο πίνακας είναι: $L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}-\frac{4}{s-2}+\frac{5}{s-1} & -\frac{10}{s-2}+\frac{10}{s-1}\\ \frac{2}{s-2}-\frac{2}{s-1} & \frac{5}{s-2}-\frac{4}{s-1}\end{bmatrix}\right\}$

Μετά υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace για κάθε όρο του πίνακα και το μητρώο καταστατικής μετάβασης που προκύπτει είναι το ακόλουθο: $e^{At}=\begin{bmatrix}-4e^{2t}+5e^{t} & -10e^{2t}+10e^{t}\\ 2e^{2t}-2e^{t} & 5e^{2t}-4e^{t}\end{bmatrix}\bullet u(t)$

Παρατηρήσεις

- ✓ Ο αντίστροφος ενός πίνακα $A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ 2x2 δίνεται από τον τύπο: $A^{-1}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}^{-1}=\frac{Adj(A)}{\det(A)}=\frac{\begin{bmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{bmatrix}}{\alpha\delta-\beta\gamma}$
- ✓ Το μητρώο καταστατικής μετάβασης είναι μητρώο στο χρόνο
- ✓ Σε όλο το κεφάλαιο των καταστατικών εξισώσεων **τα συστήματα θεωρούνται εξορισμού αιτιατά**

Παράδειγμα 2

Δίνονται το ακόλουθο ζεύγος καταστατικών εξισώσεων:

$$\dot{\underline{x}}(t)=\begin{bmatrix}-3 & -10\\ 2 & 6\end{bmatrix}\bullet\underline{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\bullet u(t) \text{ και } y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\bullet\underline{x}(t)$$

Το σήμα εισόδου είναι η βηματική συνάρτηση u(t). **Ζητείται η έξοδος του συστήματος για t≥0**. Δίνεται ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι το διάνυσμα $\underline{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

Λύση

Επειδή δίνεται διάνυσμα αρχικής κατάστασης το σύστημα δεν ξεκινά αρχικά από ηρεμία και επειδή ακριβώς δεν ξεκινά από ηρεμία θα υπολογίσουμε την έξοδο y(t) από τη 2η καταστατική εξίσωση που στη γενική μορφή της είναι η $y(t)=\underline{c}^T \bullet \underline{x}(t)+d \bullet v(t)$. Επειδή δεν δίνεται βαθμωτός όρος d θεωρούμε ότι είναι μηδέν. Για βρούμε την έξοδο y(t) πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το διάνυσμα κατάστασης $\underline{x}(t)$. Το διάνυσμα κατάστασης υπολογίζεται από τον τύπο: $\underline{x}(t)=e^{A(t-t_0)} \bullet \underline{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t} e^{A(t-r)}\underline{b} \bullet u(r)dr$. Θέτοντας όπου $t_0=0$ και προκύπτει: $\underline{x}(t)=e^{At} \bullet \underline{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-r)} \bullet \underline{b} \bullet u(r) \bullet dr$.

Παρατηρούμε ότι το μητρώο A είναι ίδιο με αυτό της προηγούμενης άσκησης άρα και το μητρώο καταστατικής μετάβασης είναι και αυτό το ίδιο και πιο συγκριμένα είναι το $e^{At}=\begin{bmatrix} -4e^{2t}+5e^{t} & -10e^{2t}+10e^{t} \\ 2e^{2t}-2e^{t} & 5e^{2t}-4e^{t} \end{bmatrix} \bullet u(t)$

- Πρώτα υπολογίζουμε το γινόμενο: $e^{At} \bullet \underline{x}(0)=\begin{bmatrix} -4e^{2t}+5e^{t} & -10e^{2t}+10e^{t} \\ 2e^{2t}-2e^{t} & 5e^{2t}-4e^{t} \end{bmatrix} \bullet u(t) \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -14e^{2t}+15e^{t} \\ 7e^{2t}-6e^{t} \end{bmatrix} \bullet u(t)$

- Μετά υπολογίζουμε το γινόμενο:

$$e^{A(t-r)} \bullet \underline{b}=\begin{bmatrix} -4e^{2(t-r)}+5e^{(t-r)} & -10e^{2(t-r)}+10e^{(t-r)} \\ 2e^{2(t-r)}-2e^{(t-r)} & 5e^{2(t-r)}-4e^{(t-r)} \end{bmatrix} \bullet u(t-r) \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4e^{2(t-r)}+5e^{(t-r)} \\ 2e^{2(t-r)}-2e^{(t-r)} \end{bmatrix} \bullet u(t-r)$$

- Μετά υπολογίζουμε το προηγούμενο γινόμενο μέσα στο ολοκλήρωμα: $\int_0^t \begin{bmatrix} -4e^{2(t-r)}+5e^{(t-r)} \\ 2e^{2(t-r)}-2e^{(t-r)} \end{bmatrix} dr$

- Το διάνυσμα κατάστασης είναι:

$$\underline{x}(t)=\begin{bmatrix} -14e^{2t}+15e^{t} \\ 7e^{2t}-6e^{t} \end{bmatrix} \bullet u(t)+\int_0^t \begin{bmatrix} -4e^{2(t-r)}+5e^{(t-r)} \\ 2e^{2(t-r)}-2e^{(t-r)} \end{bmatrix} dr$$

- Το σήμα εξόδου είναι:

$$y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left(\begin{bmatrix} -14e^{2t}+15e^{t} \\ 7e^{2t}-6e^{t} \end{bmatrix} \bullet u(t)+\int_0^t \begin{bmatrix} -4e^{2(t-r)}+5e^{(t-r)} \\ 2e^{2(t-r)}-2e^{(t-r)} \end{bmatrix} dr \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=-7e^{2t}+9-e^{t}+\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \int_0^t \begin{bmatrix} -4e^{2(t-r)}+5e^{(t-r)} \\ 2e^{2(t-r)}-2e^{(t-r)} \end{bmatrix} dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=-7e^{2t}+9e^{t}+\int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -4e^{2(t-r)}+5e^{(t-r)} \\ 2e^{2(t-r)}-2e^{(t-r)} \end{bmatrix} dr \Rightarrow y(t)=-7e^{2t}+9e^{t}+\int_0^t \left(-2e^{2(t-r)}+3e^{(t-r)}\right) dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=-7e^{2t}+9e^{t}+\int_0^t -2e^{2(t-r)}dr+\int_0^t 3e^{(t-r)}dr \Rightarrow y(t)=-7e^{2t}+9e^{t}-2 \bullet \frac{1}{-2}e^{2t}\left[e^{-2r}\right]_0^t+3 \bullet \frac{1}{-1}e^{t}\left[e^{-r}\right]_0^t$$

$$y(t)=-7e^{2t}+9e^{t}+e^{2t}(e^{-2t}-1)-3e^{t}(e^{-t}-1) \Rightarrow y(t)=\left(-7e^{2t}+9e^{t}\right)u(t)$$

<u>Παρατήρηση</u>

Στις καταστατικές εξισώσεις μπορούμε να συμβολίζουμε το διάνυσμα κατάστασης $\underline{x}(t)$ είτε απλά με το συμβολισμό του δηλ. ως $\underline{x}(t)$ είτε με τις συντεταγμένες του π.χ. $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$. Το ακριβώς ισχύει και για την αναπαράσταση της παραγώγου του διανύσματος κατάστασης δηλ. της $\dot{\underline{x}}(t)$ η οποία μπορεί να συμβολίζεται απλά ως $\dot{\underline{x}}(t)$ είτε ως $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$.

4.3 Μητρώο Ελεγξιμότητας και Παρατηρησιμότητας

- Ένα σύστημα είναι **Ελέγξιμο αν και μόνο αν το Μητρώο Ελεγξιμότητας S είναι αντιστρέψιμο δηλ. det(S)≠0**. Το Μητρώο Ελεγξιμότητας ορίζεται ως εξής: $S=\begin{bmatrix}\underline{b} & A\underline{b} & A^2\underline{b} & \ldots\ldots & A^{n-1}\underline{b}\end{bmatrix}$ όπου n είναι η διάσταση του μητρώου A.

- Ένα σύστημα είναι **Παρατηρήσιμο αν και μόνο αν το Μητρώο Παρατηρησιμότητας V είναι αντιστρέψιμο δηλ. det(V)≠0**.

  Το Μητρώο Παρατηρησιμότητας ορίζεται ως εξής: $V=\begin{bmatrix}\underline{c}^T \\ \underline{c}^T A \\ \underline{c}^T A^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{c}^T A^{n-1}\end{bmatrix}$ όπου n είναι η διάσταση του μητρώου A.

4.3.1 Παραδείγματα με Μητρώα Ελεγξιμότητας και Παρατηρησιμότητας

4.3.1.1 Άσκηση 1 με Μητρώα Ελεγξιμότητας και Παρατηρησιμότητας

Δίνεται το ακόλουθο σχήμα δηλαδή το ακόλουθο ζεύγος δυναμικών εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1(t) \\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}\bullet v(t) \text{ και } y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1(t) \\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Να εξετάσετε αν το σύστημα αυτό είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.

<u>Λύση</u>

- Υπολογίζουμε το μητρώο ελεγξιμότητας S

$$S=\begin{bmatrix}\underline{b} & A\bullet\underline{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Επειδή det(S)=-1≠0 το σύστημα είναι ελέγξιμο.

- Υπολογίζουμε το μητρώο παρατηρησιμότητας V

$$V=\begin{bmatrix}\underline{c}^T \\ \underline{c}^T\bullet A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

Επειδή det(V)=0 το σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο.

4.3.1.2 Άσκηση 2 με Μητρώα Ελεγξιμότητας και Παρατηρησιμότητας

Δίνεται το ακόλουθο ζεύγος δυναμικών εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1(t) \\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 \\ 1\end{bmatrix}\bullet v(t) \text{ και } y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1(t) \\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Να εξετάσετε αν το σύστημα αυτό είναι **ελέγξιμο και παρατηρήσιμο**

<u>Λύση</u>

- Υπολογίζουμε το μητρώο ελεγξιμότητας S

$$S=\begin{bmatrix}\underline{b} & A\bullet\underline{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 \\ 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}-1 \\ 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 \\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Επειδή det(S)=0 το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο.

- Υπολογίζουμε το μητρώο παρατηρησιμότητας V

$$V=\begin{bmatrix}\underline{c}^T \\ \underline{c}^T\bullet A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Επειδή det(V)=-1≠0 το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

4.4 Ταυτόχρονη Ελεγξιμότητα και Παρατηρησιμότητα

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- ✓ **Σύστημα ταυτόχρονα Ελέγξιμο και Παρατηρήσιμο ⇔ Συνάρτηση Μεταφοράς H(s) είναι μη Συρρικνούμενη δηλ. μη Απλοποιήσιμη δηλ. ΔΕΝ έχει κοινά Μηδενικά και Πόλους**
- ✓ **Σύστημα είναι ταυτόχρονα Ελέγξιμο και Παρατηρήσιμο ⇔ Ελάχιστη υλοποίηση**
- ✓ Σύστημα είναι ταυτόχρονα Ελέγξιμο και Παρατηρήσιμο ⇔ Οι ιδιοτιμές του μητρώου A συμπίπτουν με τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς H(s)
- ✓ Αν η συνάρτηση Μεταφοράς H(s) είναι Μη Συρρικνούμενη δηλ. Μη Απλοποιήσιμη δηλ. Δεν έχει Κοινά Μηδενικά και Πόλους ⇔ η Ασυμπωτική Ευστάθεια ΤΑΥΤΙΖΕΤΑΙ με τη ΦΕΦΕ Ευστάθεια
- ✓ Σύστημα είναι Ταυτόχρονα Ελέγξιμο και Παρατηρήσιμο ⇔ η Ασυμπωτική Ευστάθεια ΤΑΥΤΙΖΕΤΑΙ με τη ΦΕΦΕ Ευστάθεια

4.4.1 Παραδείγματα στην Ταυτόχρονη Ελεγξιμότητα και Παρατηρησιμότητα

4.4.1.1 Άσκηση 1 στην ταυτόχρονη Ελεγξιμότητα και Παρατηρησιμότητα

Θεωρούμε το σύστημα που περιγράφεται από τις ακόλουθες δυναμικές (καταστατικές) εξισώσεις:

$$\dot{\underline{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\bullet \underline{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\bullet v(t) \text{ και } y(t)=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\bullet \underline{x}(t)$$

Να μελετηθούν η **Ελεγξιμότητα, η Παρατηρησιμότητα και να βρεθεί η Συνάρτηση Μεταφοράς του συστήματος**.

<u>Λύση</u>

α)Ελεγξιμότητα

Υπολογίζουμε το μητρώο ελεγξιμότητας S

$$S=\begin{bmatrix}\underline{b} & A\bullet \underline{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

Επειδή det(S)=-1≠0 το σύστημα είναι ελέγξιμο.

β)Παρατηρησιμότητα

Υπολογίζουμε το μητρώο παρατηρησιμότητας V

$$V=\begin{bmatrix}\underline{c}^T\\ \underline{c}^T\bullet A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

Επειδή det(V)=2≠0 το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

γ)Συνάρτηση Μεταφοράς

Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τον τύπο: $H(s)=\underline{c}^T\bullet(sI-A)^{-1}\bullet\underline{b}+d$. Εδώ d=0 οπότε:

$$H(s)=\underline{c}^T\bullet(s\bullet I-A)^{-1}\bullet\underline{b}\Rightarrow H(s)=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\bullet(s\bullet I-A)^{-1}\bullet\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad (1)$$

- ➢ Υπολογίζουμε ξεχωριστά τον πίνακα $s\bullet I-A$

$$s\bullet\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}$$

- ➢ Υπολογίζουμε μετά τον αντίστροφο πίνακα του $s\bullet I-A$ σύμφωνα με το γενικό τύπο $\dfrac{Adj(s\bullet I-A)}{\det(s\bullet I-A)}$

$$(s\bullet I-A)^{-1}=\left(\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}\right)^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}}{s(s+3)+2}=\frac{\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}}{s^2+3s+2}=\frac{\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}}{(s+1)\bullet(s+2)}=$$

Αντικαθιστούμε τον αντίστροφο πίνακα $(s\bullet I-A)^{-1}$ στη σχέση (1) και προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s)=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\bullet\frac{\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}}{(s+1)\bullet(s+2)}\bullet\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\frac{1}{(s+1)\bullet(s+2)}=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1\\ s\end{bmatrix}\bullet\frac{1}{(s+1)\bullet(s+2)}=$$

$$=\frac{s+3}{(s+1)\bullet(s+2)}$$

Συμπέρασμα
Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς που υπολογίσαμε είναι μη συρρικνούμενη (διότι οι πόλοι -1 και -2 δεν ταυτίζονται με το μηδενικό που είναι το -3). Αυτό είναι αναμενόμενο να συμβεί διότι αποδείξαμε προηγουμένως ότι το σύστημα είναι ταυτόχρονα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.

Β Τρόπος Λύσης
Θα μπορούσαμε πρώτα να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς και αν διαπιστώσουμε όπως εδώ ότι είναι μη συρρικνούμενη, τότε θα λέγαμε αυτομάτως ότι το σύστημα είναι ταυτόχρονα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε τα μητρώα ελεγξιμότητας S και παρατηρησιμότητας V.

Παρατηρήσεις
- Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς H(s) **ΔΕΝ** θα διαιρούμε κάθε στοιχείο του Adj(s•I-A) με την ορίζουσα (det) του πίνακα, αλλά θα πολλαπλασιάζουμε πρώτα τους πίνακες και στο τέλος θα διαιρούμε το τελικό στοιχείο που θα προκύψει από τον πολλαπλασιασμό των πινάκων που είναι βαθμωτός όρος με την ορίζουσα
- Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τους πίνακες με όποια σειρά θέλουμε αλλά δεν επιτρέπεται να αλλάξουμε τις θέσεις των πινάκων στον πολλαπλασιασμό

4.5 Ευστάθεια ΓΧΑ Συστημάτων

Ένα δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από την καταστατική εξίσωση $\dot{\underline{x}}(t)=A\bullet\underline{x}(t)+\underline{b}\bullet v(t)$ ονομάζεται **Ασυμπτωτικά Ευσταθές αν το πραγματικό μέρος κάθε ιδιοτιμής του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του μητρώου A είναι αρνητικό, δηλαδή $Re(\lambda_i)<0\ \forall\lambda_i$ όπου λ_i οι ιδιοτιμές του μητρώου A**. Το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του μητρώου A είναι το det(A-λ•I) και το θέτουμε ίσο με μηδέν για να βρούμε τις ιδιοτιμές του μητρώου A. **Πρακτικά ασυμπτωτική ευστάθεια σημαίνει ότι απουσία εισόδου, το σύστημα εκφορτίζει ασυμπτωτικά την ενέργεια που έχει αποθηκευμένη λόγω της αρχικής μη μηδενικής συνθήκης**.

4.5.1 Υπολογισμών Ιδιοτιμών Μητρώου A
Υπάρχουν δύο τρόποι υπολογισμού των Ιδιοτιμών του Μητρώου A

- Πόλοι της μη απλοποιημένης Συνάρτησης Μεταφοράς
- Ρίζες Χαρακτηριστικού Πολυωνύμου μητρώου A δηλ ρίζες του $P_A(\lambda)$=det(A-λ•I)

4.5.2 Σύγκριση Ασυμπτωτικής και ΦΕΦΕ (BIBO) Ευστάθειας

✓ **Η ασυμπτωτική ευστάθεια είναι γενικότερη από τη ΦΕΦΕ ευστάθεια (BIBO ευστάθεια)**

✓ **Αν η συνάρτηση μεταφοράς είναι ΜΗ ΣΥΡΡΙΚΝΟΥΜΕΝΗ τότε η Ασυμπωτική Ευστάθεια ΤΑΥΤΙΖΕΤΑΙ με τη ΦΕΦΕ Ευστάθεια. Αυτό σημαίνει ότι αν το σύστημα είναι Ασυμπττωτικά Ευσταθές τότε είναι και ΦΕΦΕ Ευσταθές (δεν χρειάζεται να εξετάσουμε και τη ΦΕΦΕ Ευστάθεια). Αντίστροφα αν είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές τότε είναι και Ασυμπτωτικά Ευσταθές (δεν χρειάζεται να εξετάσουμε και την Ασυμπτωτική Ευστάθεια)**

✓ Αν συνάρτηση μεταφοράς είναι ΣΥΡΡΙΚΝΟΥΜΕΝΗ τότε η Ασυμπωτική Ευστάθεια ΔΕΝ ΤΑΥΤΙΖΕΤΑΙ με τη ΦΕΦΕ Ευστάθεια. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να μελετήσουμε την κάθε Ευστάθεια ξεχωριστά

✓ Αν το σύστημα είναι ταυτόχρονα Ελέγξιμο και Παρατηρήσιμο, δηλαδή αν δεν υπάρχουν κοινά μηδενικά και πόλοι στη συνάρτηση μεταφοράς, τότε η Ασυμπωτική Ευστάθεια ΤΑΥΤΙΖΕΤΑΙ με τη ΦΕΦΕ Ευστάθεια. Αυτό σημαίνει ότι αν το σύστημα (δεν) είναι ΦΕΦΕ ευσταθές τότε (δεν) είναι και Ασυμπτωτικά Ευσταθές. Ισχύει βέβαια και το αντίστροφο δηλ. αν σύστημα (δεν) είναι Ασυμπτωτικά ευσταθές τότε (δεν) είναι και ΦΕΦΕ Ευσταθές

- ✓ **Αν η συνάρτηση μεταφοράς είναι ΜΗ συρρικνούμενη τότε οι ιδιοτιμές του μητρώου Α ταυτίζονται με τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς. Αν η συνάρτηση μεταφοράς είναι συρρικνούμενη τότε οι ιδιοτιμές του μητρώου Α ταυτίζονται με τους πόλους τη ΜΗ απλοποιημένης συνάρτησης μεταφοράς.**

- ✓ **Για τη ΦΕΦΕ Ευστάθεια ΑΠΛΟΠΟΙΟΥΜΕ πρώτα τη συνάρτηση μεταφοράς (αν είναι συρρικνούμενη) και στον τελικό απλοποιημένο τύπο βρίσκουμε τους πόλους της και από αυτούς καθορίζουμε τη ΦΕΦΕ ευστάθεια. Για την Ασυμπτωτική Ευστάθεια ΔΕΝ ΑΠΛΟΠΟΙΟΥΜΕ ΠΟΤΕ τη συνάρτηση μεταφοράς (έστω και αυτή αν είναι συρρικνούμενη) και την προσδιορίζουμε από το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών του μητρώου Α οι οποίες ταυτίζονται με τους πόλους της Συνάρτησης Μεταφοράς ΠΟΥ ΔΕΝ ΑΠΛΟΠΟΙΟΥΜΕ.**

<u>Παραδείγματα</u>

- ✓ Για παράδειγμα η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=\dfrac{s-3}{(s-1)\bullet(s+2)}$ είναι ΜΗ συρρικνούμενη. Το σύστημα αυτό δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές γιατί δεν έχουν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς αρνητικό πραγματικό μέρος. Επειδή οι δύο ευστάθειες ταυτίζονται άρα δεν είναι ούτε ασυμπτωτικά ευσταθές. Εναλλακτικά οι ιδιοτιμές του μητρώου Α είναι το -1 και το 2 (οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές του μητρώου Α), δεν έχουν όλες αρνητικό πραγματικό μέρος άρα το σύστημα δεν είναι Ασυμπτωτικά Ευσταθές και επειδή οι δύο ευστάθειες ταυτίζονται δεν είναι ούτε ΦΕΦΕ ευσταθές.

- ✓ Για παράδειγμα στη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=\dfrac{s-3}{(s+1)\bullet(s-3)}$ που είναι συρρικνούμενη, οι ιδιοτιμές είναι το -1 και το 3 (ταυτίζονται με τους πόλους της ΜΗ απλοποιημένης συνάρτησης μεταφοράς) και το σύστημα δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές γιατί δεν έχουν όλες οι ιδιοτιμές αρνητικό πραγματικό μέρος, ενώ για τη ΦΕΦΕ ευστάθεια απλοποιούμε πρώτα τη συνάρτηση μεταφοράς και στον τελικό απλοποιημένο τύπο $H(s)=\dfrac{1}{s+1}$ ο μοναδικός πόλος είναι το -1 και επειδή έχει αρνητικό πραγματικό μέρος το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

- ✓ Για παράδειγμα στη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=\dfrac{s+3}{(s+2)\bullet(s+3)}$ που είναι συρρικνούμενη, οι ιδιοτιμές είναι το -2 και το -3 (ταυτίζονται με τους πόλους της ΜΗ απλοποιημένης συνάρτησης μεταφοράς) και το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές γιατί όλες οι ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, ενώ για τη ΦΕΦΕ ευστάθεια απλοποιούμε πρώτα τη συνάρτηση μεταφοράς και στον τελικό απλοποιημένο τύπο $H(s)=\dfrac{1}{s+2}$ ο μοναδικός πόλος είναι το -2 και επειδή έχει αρνητικό πραγματικό μέρος το σύστημα είναι και ΦΕΦΕ ευσταθές

4.5.2.1 Άσκηση 1 σε Ασυμπτωτική Ευστάθεια

Δίνεται ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=\dfrac{s-1}{s^2-1}$ το οποίο περιγράφεται από το ακόλουθο σχήμα (δηλ. ζεύγος καταστατικών εξισώσεων):

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\bullet v(t) \text{ και } y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Να εξετάσετε αν το σύστημα είναι ασυμπτωτικά και ΦΕΦΕ ευσταθές

<u>Λύση</u>

- ✓ Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=\dfrac{s-1}{s^2-1}\Rightarrow H(s)=\dfrac{s-1}{(s-1)\bullet(s+1)}$ είναι συρρικνούμενη διότι το 1 είναι ταυτόχρονα και μηδενικό και πόλος
- ✓ Όσον αφορά τη ΦΕΦΕ Ευστάθεια πρώτα ΑΠΛΟΠΟΙΟΥΜΕ τη συνάρτηση μεταφοράς και στον τελικό απλοποιημένο τύπο $H(s)=\dfrac{1}{(s+1)}$ εξετάζουμε τους πόλους. Εδώ ο πόλος είναι το -1, βρίσκεται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο άρα το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ΕΥΣΤΑΘΕΣ

Α Τρόπος Ελέγχου Ασυμπτωτικής Ευστάθειας από τη συνάρτηση μεταφοράς

Για να ελέγξουμε αν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές **ΔΕΝ ΑΠΛΟΠΟΙΟΥΜΕ τη συνάρτηση μεταφοράς, έστω και αν αυτή είναι συρρικνούμενη και οι ιδιοτιμές είναι το 1 και το -1. Παρατηρούμε ότι δεν έχουν όλες αρνητικό πραγματικό μέρος, άρα το σύστημα ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ Ασυμπτωτικά Ευσταθές. ΜΗΝ ΞΕΧΝΑΤΕ: ΟΙ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΤΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ Α ΤΑΥΤΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΤΟΥΣ ΠΟΛΟΥΣ ΤΗΣ ΜΗ ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ**

Β Τρόπος Ελέγχου Ασυμπτωτικής Ευστάθειας από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου Α

Για να ελέγξουμε αν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του μητρώου Α. **Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου Α** υπολογίζεται ως εξής:

Βήμα 1: Πρώτα υπολογίζουμε το μητρώο $A-\lambda\bullet I=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}-\lambda\bullet\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix}$

Βήμα 2: Μετά υπολογίζουμε την ορίζουσα του μητρώου αυτού δηλ. την det(Α-λ•Ι). Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου Α συμβολίζεται ως $P_A(\lambda)=\det(A-\lambda\bullet I)=\lambda^2-1$. Θέτουμε την ορίζουσα ίση με μηδέν και οι ιδιοτιμές του μητρώου Α είναι $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$. **Παρατηρούμε ότι το σύστημα ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ Ασυμπτωτικά Ευσταθές**, διότι το πραγματικό μέρος του λ_2 είναι θετικός.

<u>Παρατήρηση</u>

Η συνάρτηση μεταφοράς που δίνεται είναι συρρικνούμενη, άρα το σύστημα δεν είναι ταυτόχρονα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.

4.5.2.2 Άσκηση 2 σε Ασυμπτωτική Ευστάθεια

Θεωρείστε το ακόλουθο σύστημα στο χώρο κατάστασης:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\ \underline{b}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},\ \underline{c}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\ d=0 \text{ και } \underline{x}(0)=\begin{bmatrix}x_0\\ x_1\end{bmatrix}$$ όπου x_0 και x_1 τυχαίες σταθερές.

α)Υπολογίστε το **διάνυσμα κατάστασης** $\underline{x}(t)$

β)εξετάστε αν το σύστημα είναι **Ασυμπτωτικά Ευσταθές**

γ)**Χαρακτηρίστε** το σύστημα

<u>Λύση</u>

α)

Το διάνυσμα κατάστασης δίνεται από τον τύπο: $\underline{x}(t)=e^{A(t-t_0)}\bullet\underline{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-r)}\underline{b}\bullet v(r)dr$. Θεωρούμε ως αρχική χρονική στιγμή πάντα τη στιγμή 0 δηλ. $t_0=0$ και ο προηγούμενος τύπος παίρνει τη μορφή: $\underline{x}(t)=e^{At}\bullet\underline{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-r)}\underline{b}\bullet v(r)\bullet dr$. **Το σύστημα είναι ομογενές** διότι $\underline{b}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ και ο προηγούμενος τύπος παίρνει τη μορφή $\underline{x}(t)=e^{At}\bullet\underline{x}(0)$.

- ✓ Υπολογίζουμε πρώτα το μητρώο καταστατικής μετάβασης e^{At} ως εξής:

$$e^{At}=L^{-1}\left((s\bullet I-A)^{-1}\right)=L^{-1}\left(\left(s\bullet\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right)^{-1}\right)=L^{-1}\left(\left(\begin{bmatrix}s & -1\\ 1 & s\end{bmatrix}\right)^{-1}\right)=L^{-1}\left(\frac{\begin{bmatrix}s & 1\\ -1 & s\end{bmatrix}}{s^2+1}\right)=L^{-1}\left(\begin{bmatrix}\frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1}\\ -\frac{1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1}\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(t)\bullet u(t) & \sin(t)\bullet u(t)\\ -\sin(t)\bullet u(t) & \cos(t)\bullet u(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t)\end{bmatrix}\bullet u(t)$$

Άρα το διάνυσμα κατάστασης είναι:

$$\underline{x}(t)=\begin{bmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t)\end{bmatrix}\bullet u(t)\bullet\begin{bmatrix}x_0\\ x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(t)\bullet x_0+\sin(t)\bullet x_1\\ -\sin(t)\bullet x_0+\cos(t)\bullet x_1\end{bmatrix}\bullet u(t)$$

β)Για να ελέγξουμε αν το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του μητρώου Α.

Βήμα 1: Πρώτα υπολογίζουμε το μητρώο $(A-\lambda\bullet I)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}-\lambda\bullet\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{bmatrix}$

Βήμα 2: Μετά υπολογίζουμε την ορίζουσα του μητρώου αυτού δηλ. $P_A(\lambda)=\det(A-\lambda\bullet I)=\det\left(\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{bmatrix}\right)=\lambda^2+1$

Βρίσκουμε ως ιδιοτιμές τις εξής: $\lambda^2 + 1 = 0 \begin{cases} \lambda = j \\ \lambda = -j \end{cases}$

Επειδή το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών είναι μηδέν το σύστημα ΔΕΝ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

γ)
Ο χαρακτηρισμός του συστήματος αφορά την Ελεγξιμότητα και την Παρατηρησιμότητα.

Ελεγξιμότητα

- Υπολογίζουμε το μητρώο ελεγξιμότητας S

$$S = [\underline{b} \quad A \bullet \underline{b}] = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή det(S)=0 το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο.

Παρατηρησιμότητα

- Υπολογίζουμε το μητρώο παρατηρησιμότητας V

$$V = \begin{bmatrix} [1 \quad 0] \\ [1 \quad 0] \bullet \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή det(V)=1≠0 το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

Παρατηρήσεις

- Όταν υπολογίζουμε το μητρώο καταστατικής μετάβασης e^{At} διαιρούμε κάθε στοιχείο του συμπληρωματικού (Adj) πίνακα με την ορίζουσα και στο τελικό αποτέλεσμα που προκύπτει υπολογίζουμε αντίστροφο Laplace για κάθε στοιχείο του πίνακα κάνοντας α-νάλυση σε απλά κλάσματα
- Το μητρώο καταστατικής μετάβασης e^{At} είναι μητρώο στο χρόνο
- Όταν θέλουμε να εξετάσουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια ενός συστήματος πρέπει να γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές του μητρώου A. Αυτές τις βρίσκουμε είτε από τη μη απλοποιημένη συνάρτηση μεταφοράς είτε από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου A
- Στη συγκεκριμένη άσκηση δεν μπορούμε να εξετάσουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια από τη συνάρτηση μεταφοράς η οποία υπολογίζεται από τον τύπο $H(s) = \underline{c}^T \bullet (s \bullet I - A)^{-1} \bullet \underline{b} + d$ διότι το b=0 και d=0 και ο πολλαπλασιασμός δίνει 0 για τη συνάρτηση μεταφοράς

4.6 Σταθεροποίηση Δυναμικών Συστημάτων-Ανάδραση

Η Ασυμπτωτική Ευστάθεια ενός συστήματος είναι προϋπόθεση για να μπορεί ένα σύστημα να χρησιμοποιηθεί στην πράξη, δηλαδή να μας δίνει τη δυνατότητα να οδηγούμε την έξοδό του εκεί που εμείς επιθυμούμε εφαρμόζοντας κατάλληλη είσοδο και αρχικές συνθήκες. Έστω το δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \bullet \underline{x}(t) + \underline{b} \bullet v(t)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \bullet \underline{x}(t) + d \bullet v(t)$$

- ✓ **Υποθέτουμε ότι το σύστημα αυτό είναι Ασυμπτωτικά Ασταθές, δηλαδή κάποιες από τις ιδιοτιμές του μητρώου A έχουν θετικό πραγματικό μέρος. Ένας τρόπος για να προκύψει από το παραπάνω σύστημα ένα άλλο που να είναι Ασυμπτωτικά Ευσταθές, είναι να τροποποιήσουμε το μητρώο A, ώστε το νέο μητρώο που θα προκύψει να έχει όλες τις ιδιοτιμές του με αρνητικό πραγματικό μέρος**
- ✓ **Για το σκοπό αυτό προσθέτουμε στο μητρώο A ένα Διάνυσμα Ανάδρασης ή Σταθεροποίησης $\underline{k}^T = [k_1, k_2, \ldots k_n]$ (έχει τόσες συνιστώσες όσο και ο βαθμός n του μητρώου A) και το σταθεροποιημένο μητρώο που προκύπτει συμβολίζεται ως** $A' = A + \underline{b} \bullet \underline{k}^T$ **ή** $\hat{A} = A + \underline{b} \bullet \underline{k}^T$ **Το πρόβλημα τώρα ανάγεται στο να επιλέξουμε ένα κατάλληλο διάνυσμα $\underline{k}$ ώστε το σταθεροποιημένο μητρώο** $A' = A + \underline{b} \bullet \underline{k}^T$ **να έχει όλες τις ιδιοτιμές του με αρνητικό πραγματικό μέρος.**

Βασική Παρατήρηση

Η προϋπόθεση για να μπορούμε να σταθεροποιήσουμε ένα σύστημα είναι αυτό να είναι Ελέγξιμο.

4.6.1 Άσκηση 1 σε Σταθεροποίηση Συστήματος

Δίνεται το σύστημα που περιγράφεται από τις ακόλουθες δυναμικές εξισώσεις:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet v(t) \text{ και } y(t) = [-1 \quad 1] \bullet \underline{x}(t)$$

Το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ασταθές. Να υπολογίσετε το διάνυσμα σταθεροποίησης (ανάδρασης) $\underline{k}^T$ ώστε οι νέες ιδιοτιμές του συστήματος μετά τη χρήση ανάδρασης κατάστασης να είναι λ_1= -1, λ_2= -2.

Λύση

- Υπολογίζουμε το μητρώο ελεγξιμότητας S

$$S=[\underline{b} \quad A\bullet\underline{b}]=\left[\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

Το σύστημα είναι ελέγξιμο διότι det(S)=-1≠0 και συνεπώς μπορεί να σταθεροποιηθεί. Το διάνυσμα $\underline{k}^T$ θα έχει δύο συνιστώσες δηλ. $\underline{k}^T=[k_1\ k_2]$ διότι το μητρώο A έχει διάσταση n=2.

- Υπολογίζουμε το σταθεροποιημένο μητρώο ως εξής:

$$A'=A+\underline{b}\bullet\underline{k}^T=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\bullet[k_1 \quad k_2]=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\k_1&k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\k_1+1&k_2\end{bmatrix}$$

- Υπολογίζουμε μετά τις ιδιοτιμές του σταθεροποιημένου μητρώου A'
  - ✓ **Βήμα 1:** $A'-\lambda\bullet I=\begin{bmatrix}0&1\\k_1+1&k_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda&1\\k_1+1&k_2-\lambda\end{bmatrix}$
  - ✓ **Βήμα 2**: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παραπάνω μητρώου είναι

$$\det(A'-\lambda\bullet I)=-\lambda(k_2-\lambda)-(k_1+1)=-\lambda k_2+\lambda^2-k_1-1=\lambda^2-k_2\bullet\lambda+(-k_1-1) \quad (1)$$

- **Το Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο β' βαθμού** $\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\bullet\lambda+\lambda_1\bullet\lambda_2$ (2)

Δίνεται ότι $\lambda_1=-1$ και $\lambda_2=-2$, άρα $\lambda_1+\lambda_2=-3$ και $\lambda_1\bullet\lambda_2=2$. Εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές των σχέσεων (1) και (2) και προκύπτει ότι $k_2=-3$ και $k_1+1=-2\Rightarrow k_1=-3$. Συνεπώς το διάνυσμα ανάδρασης (σταθεροποίησης) είναι: $\underline{k}^T=[-3\ \ -3]$

Β Τρόπος Υπολογισμού των k1 και k2

Στη σχέση λ^2-$k_2\bullet\lambda$-(k_1+1) θέτω όπου λ το -1 και προκύπτει: 1+k_2-k_1-1=0 ⇒ k_1=k_2

Στη σχέση λ^2-$k_2\cdot\lambda$-(k_1+1) θέτω όπου λ το -2 και προκύπτει: 4+2·k_2-k_1-1=3+2·k_2-k_1=0 ⇒ 3+k_2=0 ⇒ k_2=-3. Άρα και k_1 = -3.

Συνεπώς και πάλι $\underline{k}^T=[-3\ \ -3]$

Μεθοδολογία υπολογισμού του διανύσματος ανάδρασης ή σταθεροποίησης

Βήμα 1. Εξετάζουμε αν το σύστημα είναι ελέγξιμο

Βήμα 2. Υπολογίζουμε το μητρώο $A'=A+\underline{b}\bullet\underline{k}^T$

Βήμα 3. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου A' δηλ. το $\det(A'-\lambda\bullet I)$ και το θέτουμε ίσο με μηδέν για να υπολογίσουμε τις συνιστώσες του διανύσματος $\underline{k}^T$

4.7 Θέμα 4 Ιούνιος 2009

Θεωρείστε το ακόλουθο σύστημα στο χώρο κατάστασης:

$$A=\begin{bmatrix}-1&1+r\bmod 2\\0&2\end{bmatrix},\ \underline{b}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},\ \underline{c}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix},\ d=0 \text{ και } \underline{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

α)Να βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση του συστήματος

β)Είναι το σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές;

γ)Αν το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ασταθές θα μπορούσαμε χρησιμοποιώντας ανατροφοδότηση κατάστασης να το σταθεροποιήσουμε; Αν ναι σταθεροποιήστε το ώστε να έχει ένα πόλο πολλαπλότητας 2.

Λύση

i) r mod 2=1

$$A=\begin{bmatrix}-1&2\\0&2\end{bmatrix}$$

Α ερώτημα

Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τον τύπο: $H(s)=\underline{c}^T\bullet(s\bullet I-A)^{-1}\bullet\underline{b}+d$. Εδώ d=0 οπότε $H(s)=\underline{c}^T\bullet(s\bullet I-A)^{-1}\bullet\underline{b}$ (1)

Βήμα 1

Υπολογίζουμε πρώτα τον πίνακα $s\bullet I-A$

$$s\bullet I - A = \left(s\bullet\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}s+1 & -2\\0 & s-2\end{bmatrix}$$

Βήμα 2

Μετά υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα $(s\bullet I - A)^{-1}$

$$(s\bullet I - A)^{-1} = \begin{pmatrix}s+1 & -2\\0 & s-2\end{pmatrix}^{-1} = \frac{Adj(s\bullet I - A)}{\det(s\bullet I - A)} = \frac{\begin{bmatrix}s-2 & 2\\0 & s+1\end{bmatrix}}{(s+1)\bullet(s-2)}$$

Βήμα 3

Αντικαθιστούμε στην (1) τον αντίστροφο πίνακα που υπολογίσαμε και προκύπτει:

$$H(s) = \underline{c}^T \bullet (s\bullet I - A)^{-1} \bullet \underline{b} \Rightarrow H(s) = \begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix}\bullet \frac{\begin{bmatrix}s-2 & 2\\0 & s+1\end{bmatrix}}{(s+1)\bullet(s-2)}\bullet\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(s) = \begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}s-2 & 2\\0 & s+1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\bullet\frac{1}{(s+1)\bullet(s-2)} \Rightarrow H(s) = \begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}3s-6+2\\s+1\end{bmatrix}\bullet\frac{1}{(s+1)\bullet(s-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{9s-12-s-1}{(s+1)\bullet(s-2)} \Rightarrow H(s) = \frac{8s-13}{(s+1)\bullet(s-2)}$$

Συμπεράσματα

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι μη συρρικνούμενη, άρα

- **Το σύστημα είναι ταυτόχρονα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο**
- **Η ασυμπτωτική ευστάθεια ταυτίζεται με τη ΦΕΦΕ ευστάθεια**
- **Οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές του μητρώου Α**

Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση με 2 τρόπους:

Α τρόπος υπολογισμού κρουστικής απόκρισης – Με αντίστροφο ML από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{8s-13}{(s+1)\bullet(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2}$$

$$A = \lim_{s\to -1}(s+1)\bullet\frac{8s-13}{(s+1)\bullet(s-2)} = \frac{-21}{-3} = 7$$

$$B = \lim_{s\to 2}(s-2)\bullet\frac{8s-13}{(s+1)\bullet(s-2)} = \frac{3}{3} = 1$$

Άρα $H(s) = \frac{7}{s+1} + \frac{1}{s-2}$ και επειδή το σύστημα είναι αιτιατό $\boxed{h(t) = 7e^{-t}u(t) + e^{2t}u(t)}$

Β τρόπος υπολογισμού κρουστικής απόκρισης – Με τον τύπο $h(t) = \underline{c}^T \bullet e^{At} \bullet \underline{b} + d\bullet\delta(t)$

Η κρουστική απόκριση δίνεται από τον τύπο: $h(t) = \underline{c}^T \bullet e^{At} \bullet \underline{b} + d\bullet\delta(t)$. Εδώ d=0 οπότε $h(t) = \underline{c}^T \bullet e^{At} \bullet \underline{b}$

Βήμα 1

Υπολογίζουμε πρώτα τον πίνακα $s\bullet I - A$

$$s\bullet I - A = \left(s\bullet\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}s+1 & -2\\0 & s-2\end{bmatrix}$$

Βήμα 2

Μετά υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα $(s\bullet I - A)^{-1}$

$$(s\bullet I-A)^{-1}=\begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s-2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{Adj(s\bullet I-A)}{\det(s\bullet I-A)}=\frac{\begin{bmatrix} s-2 & 2 \\ 0 & s+1\end{bmatrix}}{(s+1)\bullet(s-2)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{(s+1)\bullet(s-2)} \\ 0 & \frac{1}{s-2}\end{bmatrix}$$

<u>Βήμα 3</u>

Μετά υπολογίζουμε το μητρώο καταστατικής μετάβασης $e^{At}=L^{-1}\left((s\bullet I-A)^{-1}\right)\Rightarrow e^{At}=L^{-1}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{(s+1)\bullet(s-2)} \\ 0 & \frac{1}{s-2}\end{bmatrix}\right)$

Συγκεκριμένα για κάθε στοιχείο του πίνακα υπολογίζουμε τον αντίστροφο ML.

$$\frac{2}{(s+1)\bullet(s-2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-2}$$

$$A=\lim_{s\to-1}(s+1)\bullet\frac{2}{(s+1)\bullet(s-2)}=-\frac{2}{3}$$

$$B=\lim_{s\to2}(s-2)\bullet\frac{2}{(s+1)\bullet(s-2)}=\frac{2}{3}$$

Άρα το μητρώο καταστατικής μετάβασης είναι: $e^{At}=\begin{bmatrix} e^{-t}u(t) & -\frac{2}{3}e^{-t}u(t)+\frac{2}{3}e^{2t}u(t) \\ 0 & e^{2t}u(t)\end{bmatrix}$

$$h(t)=\underline{c}^{T}\bullet e^{At}\bullet\underline{b}\Rightarrow h(t)=\begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} e^{-t}u(t) & -\frac{2}{3}e^{-t}u(t)+\frac{2}{3}e^{2t}u(t) \\ 0 & e^{2t}u(t)\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 3e^{-t}u(t)-\frac{2}{3}e^{-t}u(t)+\frac{2}{3}e^{2t}u(t) \\ 0+e^{2t}u(t)\end{bmatrix}=$$

$$=9e^{-t}u(t)-3\bullet\frac{2}{3}e^{-t}u(t)+3\bullet\frac{2}{3}e^{2t}u(t)-e^{2t}u(t)=7e^{-t}u(t)+e^{2t}u(t)$$

Άρα και πάλι υπολογίζουμε ως h(t) την $\boxed{h(t)=7e^{-t}u(t)+e^{2t}u(t)}$

<u>Β ερώτημα</u>

<u>Α τρόπος</u>

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου Α

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda\bullet I)=\det\left(\begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}-\lambda\bullet\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}-1-\lambda & 2\\0 & 2-\lambda\end{bmatrix}\right)=(\lambda+1)\bullet(\lambda-2)$$

Θέτουμε $P_A(\lambda)=0\Rightarrow(\lambda+1)\bullet(\lambda-2)=0\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}\lambda_1=-1\\\lambda_2=2\end{matrix}\right.$

Επειδή **δεν έχουν όλες αρνητικό πραγματικό μέρος το σύστημα δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.**

<u>Β τρόπος</u>

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι $H(s)=\frac{8s-13}{(s+1)\bullet(s-2)}$. **Παρατηρούμε ότι επειδή η συνάρτηση μεταφοράς είναι μη συρρικνούμενη οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές του μητρώου Α, άρα μπορούμε να βρούμε κατευθείαν τις ιδιοτιμές του μητρώου Α που είναι οι πόλοι -1 και 2 της συνάρτησης μεταφοράς. Επειδή δεν έχουν όλες αρνητικό πραγματικό μέρος το σύστημα δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.**

<u>Πίνακας Παρατηρήσεων</u>

Συνάρτηση μεταφοράς είναι μη συρρικνούμενη⇒οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές του μητρώου Α
Συνάρτηση μεταφοράς είναι μη συρρικνούμενη⇒Σύστημα ταυτόχρονα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο
Συνάρτηση μεταφοράς είναι μη συρρικνούμενη⇒Η ΦΕΦΕ και η Ασυμπωτική Ευστάθεια ταυτίζονται

<u>Γ ερώτημα</u>

Επειδή το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ασταθές μπορούμε να το σταθεροποιήσουμε μεταβάλλοντας το μητρώο A ώστε το νέο μητρώο A′ που θα προκύψει να έχει ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος. **ΒΕΒΑΙΑ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΗ ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΗ ΓΙΑ ΝΑ ΜΠΟΡΕΣΟΥΜΕ ΝΑ ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΣΟΥΜΕ ΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΕΛΕΓΞΙΜΟ**. Γιαυτό υπολογίζουμε πρώτα το μητρώο ελεγξιμότητας.

$$S=\begin{bmatrix}\underline{b} & A\bullet\underline{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}$$

Επειδή det(S)=7≠0 το σύστημα είναι ελέγξιμο και ως εκ τούτου μπορεί να σταθεροποιηθεί.

<u>Παρατήρηση</u>

Επειδή η συνάρτηση μεταφοράς είναι μη συρρικνούμενη, το σύστημα είναι εξορισμού ελέγξιμο και παρατηρήσιμο όπως προαναφέραμε, οπότε στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν χρειάζεται ο υπολογισμός του μητρώου ελεγξιμότητας αφού γνωρίζουμε ότι είναι ελέγξιμο.

Για τη σταθεροποίηση ορίζουμε ένα διάνυσμα σταθεροποίησης ή ανάδρασης $\underline{k}^T=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$ (ο λόγος που έχει 2 συντελεστές είναι διότι ο βαθμός του μητρώου A είναι 2) έτσι ώστε το νέο μητρώο που προκύπτει: $A'=A+\underline{b}\bullet\underline{k}^T$ να έχει ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος. Συγκεκριμένα:

$$A'=A+\underline{b}\bullet\underline{k}^T\Rightarrow A'=\begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\Rightarrow A'=\begin{bmatrix}3k_1-1 & 3k_2+2\\k_1 & 2+k_2\end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου A′

$$P_{A'}(\lambda)=\det(A'-\lambda\bullet I)=\det\left(\begin{bmatrix}3k_1-1 & 3k_2+2\\k_1 & 2+k_2\end{bmatrix}-\lambda\bullet\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}3k_1-1 & 3k_2+2\\k_1 & 2+k_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix}3k_1-1-\lambda & 3k_2+2\\k_1 & 2+k_2-\lambda\end{bmatrix}\right)$$

Θέτουμε $P_{A'}(\lambda)=0$ και προκύπτει:

$$P_{A'}(\lambda)=0\Rightarrow(3k_1-1-\lambda)\bullet(2+k_2-\lambda)-(3k_2+2)\bullet k_1=0\Rightarrow P_{A'}(\lambda)=0\Rightarrow\lambda^2-(1+3k_1+k_2)\bullet\lambda+(4k_1-k_2-2)\ (1)$$

Ο γενικός τύπος για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο 2^{ης} τάξης είναι: $\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\bullet\lambda+\lambda_1\bullet\lambda_2$ (2)

Επιλέγουμε από τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς (δηλ. τις ιδιοτιμές) το -1 ώστε να έχουμε ένα πόλο πολλαπλότητας 2 με αρνητικό πραγματικό μέρος. Άρα $\lambda_1=-1$ και $\lambda_2=-1$. Άρα ο γενικός τύπος για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο 2^{ης} τάξης παίρνει τώρα τη μορφή $\lambda^2-(-1-1)\bullet\lambda+(-1)\bullet(-1)\Rightarrow\lambda^2-(-2)\bullet\lambda+1$ (3)

Μετά εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές των (1) και (3) και προκύπτει το σύστημα:

$$1+3k_1+k_2=-2$$
$$4k_1-k_2-2=1$$

Από τη λύση του συστήματος υπολογίζεται ότι $k_1=0$ και $k_2=-3$, άρα το διάνυσμα σταθεροποίησης ή ανάδρασης που υπολογίζεται είναι το εξής: $\underline{k}^T=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$ είναι: $\underline{k}^T=\begin{bmatrix}0 & -3\end{bmatrix}$

<u>i) r mod 2=0</u>

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$$

<u>Α ερώτημα</u>

Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τον τύπο: $H(s)=\underline{c}^T\bullet(s\bullet I-A)^{-1}\bullet\underline{b}+d$. Εδώ d=0 οπότε $H(s)=\underline{c}^T\bullet(s\bullet I-A)^{-1}\bullet\underline{b}$ (1)

<u>Βήμα 1</u>

Υπολογίζουμε πρώτα τον πίνακα $s\bullet I-A$

$$s\bullet I-A=\left(s\bullet\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 0 & s-2\end{bmatrix}$$

<u>Βήμα 2</u>

Μετά υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα $(s\bullet I-A)^{-1}$

$$(s\bullet I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}s+1 & -2\\ 0 & s-2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\mathrm{Adj}(s\bullet I-A)}{\det(s\bullet I-A)}=\frac{\begin{bmatrix}s-2 & 1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}}{(s+1)\bullet(s-2)}$$

<u>Βήμα 3</u>

Αντικαθιστούμε στην (1) τον αντίστροφο πίνακα που υπολογίσαμε και προκύπτει:

$$H(s)=\underline{c}^T\bullet(s\bullet I-A)^{-1}\bullet\underline{b}\Rightarrow H(s)=[3\quad -1]\bullet\frac{\begin{bmatrix}s-2 & 1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}}{(s+1)\bullet(s-2)}\bullet\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(s)=[3\quad -1]\bullet\begin{bmatrix}s-2 & 1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}\bullet\frac{1}{(s+1)\bullet(s-2)}\Rightarrow H(s)=[3\quad -1]\bullet\begin{bmatrix}3s-6+1\\ s+1\quad +\end{bmatrix}\bullet\frac{1}{(s+1)\bullet(s-2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(s)=\frac{9s-15-s-1}{(s+1)\bullet(s-2)}\Rightarrow H(s)=\frac{8s-16}{(s+1)\bullet(s-2)}\Rightarrow H(s)=\frac{8(s-2)}{(s+1)\bullet(s-2)}$$

Προσοχή δεν απλοποιούμε ΠΟΤΕ τη συνάρτηση μεταφοράς γιατί «χάνουμε» πληροφορία. Εδώ συγκεκριμένα χάνουμε το 2 που είναι και μηδενικό και πόλος ταυτόχρονα.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση με 2 τρόπους:

<u>Α τρόπος υπολογισμού κρουστικής απόκρισης – Με αντίστροφο ML από τη συνάρτηση μεταφοράς</u>

$H(s)=\dfrac{8}{s+1}$ και επειδή το σύστημα είναι αιτιατό $h(t)=8e^{-t}u(t)$

<u>Β τρόπος υπολογισμού κρουστικής απόκρισης</u> – Με τον τύπο $h(t)=\underline{c}^T\bullet e^{At}\bullet\underline{b}+d\bullet\delta(t)$

Η κρουστική απόκριση δίνεται από τον τύπο: $h(t)=\underline{c}^T\bullet e^{At}\bullet\underline{b}+d\bullet\delta(t)$. Εδώ d=0 οπότε $h(t)=\underline{c}^T\bullet e^{At}\bullet\underline{b}$

<u>Βήμα 1</u>

Υπολογίζουμε πρώτα τον πίνακα $s\bullet I-A$

$$s\bullet I-A=\left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 0 & s-2\end{bmatrix}$$

<u>Βήμα 2</u>

Μετά υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα $(s\bullet I\text{-}A)^{-1}$

$$(s\bullet I-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+1 & -2\\ 0 & s-2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{\mathrm{Adj}(s\bullet I-A)}{\det(s\bullet I-A)}=\frac{\begin{bmatrix}s-2 & 1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}}{(s+1)\bullet(s-2)}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{(s+1)\bullet(s-2)}\\ 0 & \dfrac{1}{s-2}\end{bmatrix}$$

<u>Βήμα 3</u>

Μετά υπολογίζουμε το μητρώο καταστατικής μετάβασης $e^{At}=L^{-1}\left((s\bullet I-A)^{-1}\right)\Rightarrow e^{At}=L^{-1}\left(\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{(s+1)\bullet(s-2)}\\ 0 & \dfrac{1}{s-2}\end{bmatrix}\right)$

Συγκεκριμένα για κάθε στοιχείο του πίνακα υπολογίζουμε τον αντίστροφο ML.

$$\frac{1}{(s+1)\bullet(s-2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-2}$$

$$A=\lim_{s\to -1}(s+1)\bullet\frac{1}{(s+1)\bullet(s-2)}=-\frac{1}{3}$$

$$B=\lim_{s\to 2}(s-2)\bullet\frac{1}{(s+1)\bullet(s-2)}=\frac{1}{3}$$

Άρα το μητρώο καταστατικής μετάβασης είναι: $e^{At}=\begin{bmatrix} e^{-t}u(t) & -\frac{1}{3}e^{-t}u(t)+\frac{1}{3}e^{2t}u(t) \\ 0 & e^{2t}u(t)\end{bmatrix}$

$$h(t)=\underline{c}^T\bullet e^{At}\bullet\underline{b}\Rightarrow h(t)=\begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} e^{-t}u(t) & -\frac{1}{3}e^{-t}u(t)+\frac{1}{3}e^{2t}u(t) \\ 0 & e^{2t}u(t)\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}3e^{-t}u(t)-\frac{1}{3}e^{-t}u(t)+\frac{1}{3}e^{2t}u(t)\\ 0+e^{2t}u(t)\end{bmatrix}=$$

$$=9e^{-t}u(t)-3\bullet\frac{1}{3}e^{-t}u(t)+3\bullet\frac{1}{3}e^{2t}u(t)-e^{2t}u(t)=8e^{-t}u(t)$$

Άρα και πάλι υπολογίζουμε ως h(t) την $h(t)=8e^{-t}u(t)$

<u>Β ερώτημα</u>

<u>Α Τρόπος</u>

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου Α

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\left(\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}-1-\lambda & 2\\ 0 & 2-\lambda\end{bmatrix}\right)=(\lambda+1)\bullet(\lambda-2)$$

Θέτουμε $P_A(\lambda)=0\Rightarrow(\lambda+1)\bullet(\lambda-2)=0\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=2\end{matrix}\right.$

Επειδή δεν έχουν όλες αρνητικό πραγματικό μέρος το σύστημα δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

<u>Β Τρόπος</u>

Παίρνουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=\frac{8(s-2)}{(s+1)\bullet(s-2)}$ στη μη απλοποιημένη μορφή της και σε αυτή τη μορφή οι ιδιοτιμές του μητρώου Α ταυτίζονται με τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς. Άρα οι **ιδιοτιμές του μητρώου Α είναι οι τιμές-1 και 2 (που είναι οι πόλοι -1 και 2 της συνάρτησης μεταφοράς) και επειδή δεν έχουν όλες αρνητικό πραγματικό μέρος το σύστημα δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.**

<u>Γ ερώτημα</u>

Επειδή το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ασταθές μπορούμε να το σταθεροποιήσουμε μεταβάλλοντας το μητρώο Α ώστε το νέο μητρώο Α' που θα προκύψει να έχει ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος. **ΒΕΒΑΙΑ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΗ ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΗ ΓΙΑ ΝΑ ΜΠΟΡΕΣΟΥΜΕ ΝΑ ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΣΟΥΜΕ ΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΕΛΕΓΞΙΜΟ**. Γιαυτό υπολογίζουμε πρώτα το μητρώο ελεγξιμότητας.

$$S=\begin{bmatrix}\underline{b} & A\bullet\underline{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

Επειδή det(S)=8≠0 το σύστημα είναι ελέγξιμο και ως εκ τούτου μπορεί να σταθεροποιηθεί.

Για τη σταθεροποίηση ορίζουμε ένα διάνυσμα σταθεροποίησης ή ανάδρασης $\underline{k}^T=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$ (ο λόγος που έχει 2 συντελεστές είναι διότι ο βαθμός του μητρώου Α είναι 2) έτσι ώστε το νέο μητρώο που προκύπτει: $A'=A+\underline{b}\bullet\underline{k}^T$ να έχει ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος. Συγκεκριμένα:

$$A'=A+\underline{b}\bullet\underline{k}^T\Rightarrow A'=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\Rightarrow A'=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1+3k_1 & 1+3k_2\\ k_1 & 2+k_2\end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου Α′

$$P_A(\lambda)=\det(A'-\lambda\bullet I)=\det\left(\begin{bmatrix}-1+3k_1 & 1+3k_2\\ k_1 & 2+k_2\end{bmatrix}-\lambda\bullet\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}-1+3k_1 & 1+3k_2\\ k_1 & 2+k_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix}-1+3k_1-\lambda & 1+3k_2\\ k_1 & 2+k_2-\lambda\end{bmatrix}\right)$$

Θέτουμε $P_{A'}(\lambda)=0$ και προκύπτει:

$$P_{A'}(\lambda)=0\Rightarrow(-1+3k_1-\lambda)\bullet(2+k_2-\lambda)-(1+3k_2)\bullet k_1=0\Rightarrow P_{A'}(\lambda)=0\Rightarrow\lambda^2-(1+3k_1+k_2)\bullet\lambda+(5k_1-k_2-2)\quad(1)$$

Ο γενικός τύπος για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο 2ης τάξης είναι: $\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\bullet\lambda+\lambda_1\bullet\lambda_2$ (2)

Επιλέγουμε από τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς (δηλ. τις ιδιοτιμές) το -1 ώστε να έχουμε ένα πόλο πολλαπλότητας 2 με αρνητικό πραγματικό μέρος. Άρα $\lambda_1=-1$ και $\lambda_2=-1$. Άρα ο γενικός τύπος για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο 2ης τάξης παίρνει τώρα τη μορφή $\lambda^2-(-1-1)\lambda+(-1)\bullet(-1)\Rightarrow\lambda^2-(-2)\lambda+1$ (3)

Μετά εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές των (1) και (3) και προκύπτει το σύστημα:

$$1+3k_1+k_2=-2$$
$$5k_1-k_2-2=1$$

Από τη λύση του συστήματος υπολογίζεται ότι $k_1=0$ και $k_2=-3$, άρα το διάνυσμα σταθεροποίησης ή ανάδρασης που υπολογίζεται είναι το εξής: $\underline{k}^T=[k_1 \quad k_2]$ είναι: $\underline{k}^T=[0 \quad -3]$

Παρατήρηση

Επειδή το αρχικό διάνυσμα κατάστασης είναι το μηδενικό διάνυσμα, αυτό σημαίνει ότι το σύστημα ξεκινά αρχικά από ηρεμία. Αν μας ζητούσαν να υπολογίσουμε την έξοδο του συστήματος y(t), τότε θα την υπολογίζαμε με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace από την Y(s) όπου Y(s)=H(s)•X(s).

4.8 Θέμα 4 Ιούνιος 2011 και Ιούνιος 2014

Θεωρείστε το ακόλουθο σύστημα στο χώρο κατάστασης:

A=$\begin{bmatrix}0 & \alpha\\ -\alpha & 0\end{bmatrix}$, $\underline{b}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $\underline{c}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, d=0 και $\underline{s}(0)=\begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\end{bmatrix}$ με α, β, γ ∈ R

Δώστε κατάλληλες τιμές στα α, β, γ ώστε y(t)=cos(2π100t)•u(t). Δικαιολογήστε τις επιλογές σας

<u>Λύση</u>

Επειδή δίνεται διάνυσμα αρχικής κατάστασης <u>s</u>(0) αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν ξεκινά αρχικά από ηρεμία και γιαυτό η έξοδος θα υπολογιστεί από τη 2η καταστατική εξίσωση. Αν δεν δινόταν διάνυσμα αρχικής κατάστασης ή αν <u>s</u>(0)=<u>0</u> τότε η έξοδος θα υπολογιζόταν με αντίστροφο Laplace από την Y(s).

Το διάνυσμα κατάστασης $\underline{s}(t)$ δίνεται από το γενικό τύπο: $\underline{s}(t)=e^{A(t-t_0)}\bullet\underline{s}(t_0)+\int_{t_0}^{t}{}^{A(t-r)}\bullet\underline{b}\bullet v(r)\bullet dr$. Θεωρώντας ως αρχική χρονική στιγμή t_0 το 0 ο τύπος παίρνει τη μορφή $\underline{s}(t)=e^{At}\bullet\underline{s}(0)+\int_{0}^{t}{}^{A(t-r)}\bullet\underline{b}\bullet v(r)\bullet dr$.

Το σύστημα είναι ομογενές διότι $\underline{b}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ οπότε το ολοκλήρωμα $\int_{t_0}^{t}{}^{A(t-r)}\bullet\underline{b}\bullet v(r)\bullet dr$ μηδενίζεται. Επιλέγουμε ως σημείο t_0 το 0 διότι το διάνυσμα <u>s</u>(0) που δίνεται αφορά τις αρχικές τιμές του συστήματος στο σημείο 0 και προκύπτει:

$$\underline{s}(t)=e^{At}\bullet\underline{s}(0)=e^{At}\bullet\begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\end{bmatrix}=L^{-1}\left((s\bullet I-A)^{-1}\right)\bullet\begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\end{bmatrix}$$

Αρχικά υπολογίζουμε το μητρώο $L^{-1}\left((s\bullet I-A)^{-1}\right)$ ως εξής:

$$L^{-1}\left\{\left(s\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&\alpha\\-\alpha&0\end{bmatrix}\right)^{-1}\right\}=L^{-1}\left\{\left(\begin{bmatrix}s&0\\0&s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&\alpha\\-\alpha&0\end{bmatrix}\right)^{-1}\right\}=L^{-1}\left\{\left(\begin{bmatrix}s&-\alpha\\\alpha&s\end{bmatrix}\right)^{-1}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix}s&\alpha\\-\alpha&s\end{bmatrix}}{s^2+\alpha^2}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\frac{s}{s^2+\alpha^2}&\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\\\frac{-\alpha}{s^2+\alpha^2}&\frac{s}{s^2+\alpha^2}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}\cos(\alpha t)\bullet u(t)&\sin(\alpha t)\bullet u(t)\\-\sin(\alpha t)\bullet u(t)&\cos(\alpha t)\bullet u(t)\end{bmatrix}$$

Άρα $\underline{s}(t)=\begin{bmatrix}\cos(\alpha t)\bullet u(t)&\sin(\alpha t)\bullet u(t)\\-\sin(\alpha t)\bullet u(t)&\cos(\alpha t)\bullet u(t)\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta\bullet\cos(\alpha t)\bullet u(t)+\gamma\bullet\sin(\alpha t)\bullet u(t)\\-\beta\bullet\sin(\alpha t)\bullet u(t)+\gamma\bullet\cos(\alpha t)\bullet u(t)\end{bmatrix}$

Επειδή δίνονται αρχικές συνθήκες η έξοδος του συστήματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$y(t)=\underline{c}^T\underline{s}(t)+dv(t)=\underline{c}^T\underline{s}(t)=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}\beta\bullet\cos(\alpha t)\bullet u(t)+\gamma\bullet\sin(\alpha t)\bullet u(t)\\-\beta\bullet\sin(\alpha t)\bullet u(t)+\gamma\bullet\cos(\alpha t)\bullet u(t)\end{bmatrix}=\beta\bullet\cos(\alpha t)\bullet u(t)+\gamma\bullet\sin(\alpha t)\bullet u(t)$$

Άρα $\cos(2\pi\bullet 100t)\bullet u(t)=\beta\bullet\cos(\alpha t)\bullet u(t)+\gamma\bullet\sin(\alpha t)\bullet u(t)\Rightarrow\cos(2\pi\bullet 100t)=\beta\bullet\cos(\alpha t)+\gamma\bullet\sin(\alpha t)$

Συνεπώς τα αποτελέσματα είναι: γ=0, α=200π και β=1

Παρατήρηση

Στο Θέμα του Ιουνίου υπήρχε επιπλέον το ερώτημα: Να χαρακτηρίσετε το σύστημα

<u>Απάντηση</u>

Πρέπει να εξετάσουμε αν το σύστημα είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο

<u>Μητρώο Ελεγξιμότητας</u>

$$S=\begin{bmatrix}\underline{b}&A\bullet\underline{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}0&\alpha\\-\alpha&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

Επειδή det(S)=0 το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο.

<u>Μητρώο Παρατηρησιμότητας</u>

$$V=\begin{bmatrix}c^T\\c^TA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&a\end{bmatrix}$$

Επειδή det(V)=α=200π≠0 το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

4.9 Θέμα 4 Ιούνιος 2012

Θεωρείστε το ακόλουθο σύστημα στο χώρο κατάστασης:

$\underline{s}^{(1)}(t)=\begin{bmatrix}-2&1\\2&0\end{bmatrix}\bullet\underline{s}(t)+\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\bullet x(t)$ και $y(t)=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\bullet\underline{s}(t)$

α)Εξετάστε αν το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές

β)Αν το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ασταθές, εξετάστε αν μπορούμε να το σταθεροποιήσουμε

<u>Λύση</u>

α)Υπολογίζουμε πρώτα τις ιδιοτιμές του μητρώου Α.

$$A-\lambda\bullet I=\begin{bmatrix}-2&1\\2&0\end{bmatrix}-\lambda\bullet\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\2&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2-\lambda&1\\2&-\lambda\end{bmatrix}$$

Μετά υπολογίζουμε το $\det(A-\lambda\bullet I)=\det\left(\begin{bmatrix}-2-\lambda&1\\2&-\lambda\end{bmatrix}\right)=-\lambda\bullet(-2-\lambda)-2=\lambda^2+2\lambda-2$ και το θέτουμε ίσο με μηδέν για να βρούμε τις ιδιοτιμές του μητρώου Α. Οι ιδιοτιμές που προκύπτουν είναι

$$\lambda_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2}=\frac{-2\pm 3{,}46}{2}=\left\langle\begin{matrix}-2{,}73\\ 0{,}73\end{matrix}\right.$$

Παρατηρούμε ότι δεν έχουν όλες αρνητικό πραγματικό μέρος, άρα το σύστημα ΔΕΝ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

β)**Προϋπόθεση για να σταθεροποιήσουμε ένα σύστημα είναι να είναι ελέγξιμο. Υπολογίζουμε το μητρώο ελεγξιμότητας ως εξής:**

$$S=\left[\underline{b}\quad A\underline{b}\right]=\left[\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}-2&1\\2&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right]=\left[\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}0&2\\2&0\end{bmatrix}$$

Το det(S)=-4≠0, άρα το σύστημα είναι ελέγξιμο και συνεπώς μπορεί να σταθεροποιηθεί.

4.10 Θέμα 4 Νοέμβριος 2010 Άτυπη

Δίνεται το ακόλουθο σύστημα:

$$\dot{\underline{s}}(t)=\begin{bmatrix}-2&0\\2&2\end{bmatrix}\bullet\underline{s}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\bullet v(t)\ \text{και}\ y(t)=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\bullet\underline{s}(t)$$

Να εξετάσετε αν το σύστημα είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο

<u>Λύση</u>

- Υπολογίζουμε το μητρώο ελεγξιμότητας:

$$S=\left[b\ \ Ab\right]=\left[\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}-2&0\\2&2\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}0&0\\1&2\end{bmatrix}$$

Η det(S)=0 άρα το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο

- Υπολογίζουμε το μητρώο παρατηρησιμότητας:

$$V=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0\\2&2\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\2&2\end{bmatrix}$$

Η det(V)≠0 άρα το σύστημα είναι παρατηρήσιμο

4.11 Θέμα 4 Ιούνιος 2010

Θεωρείστε το ακόλουθο σύστημα στο χώρο κατάστασης:

$$A=\begin{pmatrix}-1&1+r\,\mathrm{mod}(2)\\0&2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix},\quad d=1/10\quad\text{και}\quad s(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

α) (10%) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση του συστήματος.

β) (5%) Είναι το σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές;

γ) (5%) Αν είναι ασυμπτωτικά ασταθές θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την ανατροφοδότηση κατάστασης για να το σταθεροποιήσουμε; Αν ναι, σταθεροποιήστε το σύστημα έτσι ώστε να έχει έναν πόλο πολλαπλότητας 2.

<u>Λύση</u>

α) Είναι γνωστό από τη θεωρία ότι η συνάρτηση μεταφοράς υπολογίζεται από τη σχέση

$$H(s) = c^T (sI - A)^{-1} b + d\ .$$

Αρχικά ας υπολογίσουμε το μητρώο $(sI - A)^{-1}$.

Έχουμε $sI - A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 + r\bmod(2) \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+1 & -(1+r\bmod(2)) \\ 0 & s-2 \end{pmatrix}$

Από την Γραμμική Άλγεβρα είναι γνωστός ο εξής τύπος για τον υπολογισμό του αντιστρόφου ενός μητρώου 2×2:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Άρα έχουμε

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s+1 & -(1+r\bmod(2)) \\ 0 & s-2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s-2)} \begin{pmatrix} s-2 & 1+r\bmod(2) \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1+r\bmod(2)}{(s+1)(s-2)} \\ 0 & \frac{1}{s-2} \end{pmatrix}$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς υπολογίζεται ως εξής:

$$H(s) = c^T (sI - A)^{-1} b + d = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1+r\bmod(2)}{(s+1)(s-2)} \\ 0 & \frac{1}{s-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{9(s-2) + 3(1+r\bmod(2)) - (s+1)}{(s+1)(s-2)} + \frac{1}{10} = \frac{8s - 16 + 3r\bmod(2)}{(s+1)(s-2)} + \frac{1}{10}$$

Όπως είναι γνωστό, η κρουστική απόκριση είναι ο αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης μεταφοράς. Δηλαδή $h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$.

Έχουμε

$$H(s) = \frac{8s - 16 + 3r\bmod(2)}{(s+1)(s-2)} + \frac{1}{10} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{1}{10}$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές A και B:

$$A = \lim_{s \to -1} \frac{8s - 16 + 3r\bmod(2)}{s-2} = \frac{-8 - 16 + 3r\bmod(2)}{-3} = 8 - r\bmod(2)$$

$$B = \lim_{s \to 2} \frac{8s - 16 + 3r\bmod(2)}{s+1} = \frac{0 - 0 + 3r\bmod(2)}{3} = r\bmod(2)$$

Άρα $\quad h(t) = Ae^{-t}u(t) + Be^{2t}u(t) + \frac{1}{10}\delta(t)$

Πίνακας Παρατηρήσεων

<table>
<tr><td colspan="2">Για περιττό μητρώο η συνάρτηση μεταφοράς είναι η $\mathrm{H(s)} = \frac{8s - 13}{(s+1)\bullet(s-2)} + \frac{1}{10}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Η συνάρτηση μεταφοράς είναι μη συρρικνούμενη άρα⇒</td><td>1)Το σύστημα είναι ταυτόχρονα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο</td></tr>
<tr><td>2)Η ασυμπτωτική ευστάθεια ταυτίζεται με τη ΦΕΦΕ ευστάθεια</td></tr>
<tr><td>3)Οι ιδιοτιμές του μητρώου A ταυτίζονται με τους πόλους της ΣΜ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Για άρτιο μητρώο η συνάρτηση μεταφοράς είναι η $\mathrm{H(s)} = \frac{8s - 16}{(s+1)\bullet(s-2)} + \frac{1}{10} \Rightarrow \mathrm{H(s)} = \frac{8}{s+1} + \frac{1}{10}$</td></tr>
</table>

β)Για να είναι το σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές πρέπει όλες οι ιδιοτιμές του μητρώου A να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Οι ιδιοτιμές είναι το -1 και το 2 δεν έχουν όλες αρνητικό πραγματικό μέρος άρα το σύστημα δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

γ)Για να το σταθεροποιήσουμε πρέπει το σύστημα να είναι ελέγξιμο. Για να εξετάσουμε αν είναι ελέγξιμο πρέπει το μητρώο ελεγξιμότητας S να είναι αντιστρέψιμο δηλ. det (A)≠0. Ας εξετάσουμε αν είναι ελέγξιμο.

$S = \left[\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right]$ Παίρνουμε την det(s)=7≠0, άρα το σύστημα είναι ελέγξιμο και μπορεί να σταθεροποιηθεί.

Το νέο σταθεροποιημένο μητρώο θα είναι:

$$A' = A + \underline{b}\bullet\underline{k}^T \Rightarrow A' = \begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3k_1 & 3k_2\\k_1 & k_2\end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix}-1+3k_1 & 2+3k_1\\k_1 & 2+k_2\end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου A′

$$P_A(\lambda) = \det(A' - \lambda\bullet I) = \det\left(\begin{bmatrix}-1+3k_1 & 2+3k_2\\k_1 & 2+k_2\end{bmatrix} - \lambda\bullet\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix}-1+3k_1 & 2+3k_2\\k_1 & 2+k_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{bmatrix}\right) =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix}-1+3k_1-\lambda & 2+3k_2\\k_1 & 2+k_2-\lambda\end{bmatrix}\right) = (-1+3k_1-\lambda)\bullet(2+k_2-\lambda) - (1+3k_2)k_1 = 0 =$$

$$= -2-k_2+\lambda+6k_1+3k_1k_2-3\lambda k_1-2\lambda-\lambda k_2+\lambda^2-k_1-3k_1k_2 = 0 = \lambda^2-(3k_1+k_2+1)\bullet\lambda+(5k_1-k_2-2) =$$

Ο γενικός τύπος για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο 2ης τάξης είναι: $\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\bullet\lambda+\lambda_1\bullet\lambda_2$ (2)

Επιλέγουμε από τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς (δηλ. τις ιδιοτιμές) το -1 ώστε να έχουμε ένα πόλο πολλαπλότητας 2 με αρνητικό πραγματικό μέρος. Άρα $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = -1$. Άρα ο γενικός τύπος για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο 2ης τάξης παίρνει τώρα τη μορφή $\lambda^2-(-1-1)\bullet\lambda+(-1)\bullet(-1) \Rightarrow \lambda^2-(-2)\bullet\lambda+1$ (3)

Μετά εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές των (1) και (3) και προκύπτει το σύστημα:

$$1+3k_1+k_2 = -2$$
$$5k_1-k_2-2 = 1$$

Από τη λύση του συστήματος υπολογίζεται ότι $k_1 = 0$ και $k_2 = -3$, άρα το διάνυσμα σταθεροποίησης ή ανάδρασης που υπολογίζεται είναι το εξής: $\underline{k}^T = \begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}$ είναι: $\underline{k}^T = \begin{bmatrix}0 & -3\end{bmatrix}$

Παρατήρηση

Αν ή άσκηση ζητούσε τον υπολογισμό της εξόδου y(t) επειδή το σύστημα ξεκινά αρχικά από ηρεμία (αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι το διάνυσμα αρχικής κατάστασης είναι το μηδενικό διάνυσμα), τότε θα υπολογίζαμε την έξοδο y(t) από τον τύπο: $y(t) \leftrightarrow Y(s) = X(s)\bullet H(s)$

4.12 Θέμα 4 Σεπτέμβριος 2010

Θεωρείστε το ακόλουθο σύστημα στο χώρο κατάστασης:

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\quad c = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix},\quad d = 2$$

α) Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση του συστήματος.

β) Είναι το σύστημα ΦΕΦΕ και ασυμπτωτικά ευσταθές; Τι θα άλλαζε στην απάντησή σας αν $b = [1 \;\; 1]^t$; Αιτιολογήστε.

Λύση

α) Είναι γνωστό από τη θεωρία ότι η συνάρτηση μεταφοράς υπολογίζεται από τη σχέση

$$H(s) = c^T(sI-A)^{-1}b+d\,.$$

Αρχικά ας υπολογίσουμε το μητρώο $(sI-A)^{-1}$.

Έχουμε $sI-A = \begin{pmatrix}s & 0\\0 & s\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s-2 & -1\\-1 & s-2\end{pmatrix}$

$$(sI-A)^{-1}=\begin{pmatrix} s-2 & -1 \\ -1 & s-2 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s-2)^2-1}\begin{pmatrix} s-2 & 1 \\ 1 & s-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{s-2}{(s-2)^2-1} & \frac{1}{(s-2)^2-1} \\ \frac{1}{(s-2)^2-1} & \frac{s-2}{(s-2)^2-1} \end{pmatrix}.$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς υπολογίζεται ως εξής:

$$H(s)=c^T(sI-A)^{-1}b+d=\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{s-2}{(s-2)^2-1} & \frac{1}{(s-2)^2-1} \\ \frac{1}{(s-2)^2-1} & \frac{s-2}{(s-2)^2-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}+2 \quad \Rightarrow$$

$$H(s)=8\frac{s-2}{(s-2)^2-1}+2=8\frac{s-2}{(s-3)(s-1)}+2$$

Παρατήρηση: Επειδή η συνάρτηση μεταφοράς είναι μη συρρικνούμενη η ασυμπτωτική και η ΦΕΦΕ ευστάθεια ταυτίζονται.

Έχουμε $H(s)=8\frac{s-2}{(s-3)(s-1)}+2=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s-1}+2$

Υπολογίζουμε τις σταθερές A και B:

$A=\lim\limits_{s\to 3}\frac{8(s-2)}{(s-1)}=4,\qquad B=\lim\limits_{s\to 1}\frac{8(s-2)}{(s-3)}=-4$

Άρα $\quad h(t)=4e^{3t}u(t)-4e^{t}u(t)+2\delta(t)$

β)

Όσον αφορά την ασυμπτωτική ευστάθεια.

Για να είναι το σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές πρέπει όλες οι ιδιοτιμές του μητρώου A να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Έχουμε βρει προηγουμένως ότι οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1, \lambda_2=3$. Άρα το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ασταθές.

Αν $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ δεν θα άλλαζε τίποτε επειδή αυτό το διάνυσμα δεν επηρεάζει το μητρώο A και επομένως δεν επηρεάζει τις ιδιοτιμές του A.

Για ΦΕΦΕ ευστάθεια πρέπει η συνάρτηση μεταφοράς να περιλαμβάνει το 0 (δηλ. τον φανταστικό άξονα) στην Περιοχή Σύγκλισης (Π.Σ.).

Βλέπουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς έχει δύο πόλους $p_1=1, p_2=3$. Άρα η Π.Σ. είναι $\mathrm{Re}(s)>3$.

Άρα το σύστημα είναι ασταθές.

Αν $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ για τον έλεγχο της ΦΕΦΕ ευστάθειας ας βρούμε τη νέα συνάρτηση μεταφοράς.

Έχουμε

$$H(s)=c^T(sI-A)^{-1}b+d=\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{s-2}{(s-2)^2-1} & \frac{1}{(s-2)^2-1} \\ \frac{1}{(s-2)^2-1} & \frac{s-2}{(s-2)^2-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+2 \quad \Rightarrow$$

$$H(s)=\frac{2(s-2)+2}{(s-2)^2-1}+2=\frac{2(s-1)}{(s-3)(s-1)}+2=\frac{2}{s-3}+2$$

Βλέπουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς έχει έναν πόλο $p_1=3$. Άρα η Π.Σ. είναι και πάλι $\mathrm{Re}(s)>3$.

Άρα το σύστημα είναι ασταθές.

Τώρα η κρουστική απόκριση είναι $h(t)=2e^{3t}u(t)+2\delta(t)$

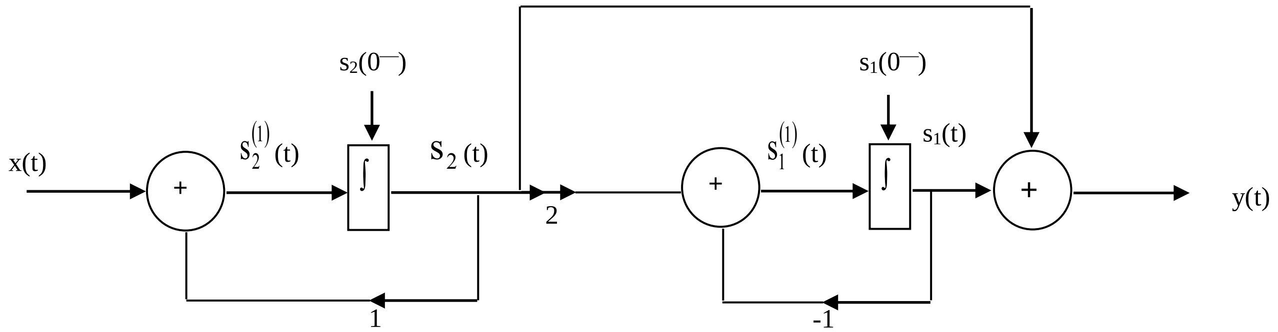
Παρατήρηση

- Για τη μελέτη της ασυμπτωτικής ευστάθειας στο β) ερώτημα κοιτάμε την μη απλοποιημένη συνάρτηση μεταφοράς. $H(s)=\frac{2(s-1)}{(s-1)\bullet(s-3)}+2$. Εδώ οι ιδιοτιμές ταυτίζονται με τους πόλους και είναι οι $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=3$ κ' επειδή δεν έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος άρα το σύστημα ΔΕΝ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
- Για τη μελέτη της ασυμπτωτικής ευστάθειας στο β) ερώτημα θα μπορούσαμε εναλλακτικά να πούμε ότι το διάνυσμα b που τροποποιείται δεν επηρεάζει τις ιδιοτιμές του μητρώου A και συνεπώς το σύστημα παραμένει ασυμπτωτικά ασταθές

  Για τη μελέτη της ΦΕΦΕ ευστάθειας στο β) ερώτημα κοιτάμε την απλοποιημένη συνάρτηση μεταφοράς. $H(s)=\frac{2}{(s-3)}+2$. Εδώ ο μοναδικός πόλος είναι το 3. Έχει θετικό πραγματικό μέρος άρα το σύστημα δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.
- Στην ασυμπτωτική ευστάθεια ΔΕΝ ΑΠΛΟΠΟΙΟΥΜΕ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ, ενώ στη ΦΕΦΕ ΤΗΝ ΑΠΛΟΠΟΙΟΥΜΕ

4.13 Θέμα Άτυπης Μάρτιος 2010

α) Περιγράψτε στο χώρο κατάστασης το ακόλουθο αιτιατό σύστημα (δηλ. κατασκευάστε τις καταστατικές εξισώσεις του συστήματος)



β) Υπολογίστε το μητρώο καταστατικής μετάβασης

γ) Εξετάστε αν το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

<u>Λύση</u>

α) Μεθοδολογία Κατασκευής Καταστατικών Εξισώσεων: Πηγαίνουμε σε κάθε αθροιστή και γράφουμε Έξοδος=Είσοδος

Αρχικά θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix}\dot{s}_1(t)\\ \dot{s}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}s_1(t)\\ s_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}\bullet x(t) \text{ και } y(t)=\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}s_1(t)\\ s_2(t)\end{bmatrix}$$

Εμείς θα πρέπει να προσδιορίσουμε το μητρώο A και τα διανύσματα $\underline{b}$ και $\underline{c}^T$

Από το σχήμα προκύπτουν το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων (από κάθε αθροιστή προκύπτει μια καταστατική εξίσωση με τη λογική ότι η έξοδος ενός αθροιστή ισούται με την είσοδο του)

$$\dot{s}_1(t)=s_1^{(1)}(t)=(-1)\bullet s_1(t)+2\bullet s_2(t)$$

$$\dot{s}_2(t)=s_2^{(1)}(t)=s_2(t)+x(t)$$

$$y(t)=s_1(t)+s_2(t)$$

Από τα παραπάνω συστήματα προκύπτουν οι ακόλουθες δυναμικές εξισώσεις

$$\begin{bmatrix}\dot{s}_1(t)\\ \dot{s}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}s_1(t)\\ s_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\bullet x(t) \text{ και } y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}s_1(t)\\ s_2(t)\end{bmatrix}$$

Ο γενικός τύπος των καταστατικών είναι:

$$\dot{\underline{x}}(t)=A\bullet\underline{x}(t)+\underline{b}\bullet v(t)$$

$$y(t)=\underline{c}^T\bullet\underline{x}(t)+d\bullet v(t)$$

β) Για να υπολογίσουμε το μητρώο καταστατικής μετάβασης:

$$e^{At}=L^{-1}\left((s\bullet I - A)^{-1}\right)=L^{-1}\left\{\left(\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)^{-1}\right\}=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}s+1 & -2\\ 0 & s-1\end{bmatrix}^{-1}\right\}$$

Είναι:

$$\begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)\bullet(s-1)}\begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+1)\bullet(s-1)} & \frac{2}{(s+1)\bullet(s-1)} \\ 0 & \frac{s+1}{(s+1)\bullet(s-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{(s+1)\bullet(s-1)} \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{2}{(s+1)\bullet(s-1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} = \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s-1}$$

Άρα: $\frac{1}{s+1} \leftrightarrow e^{-t}\bullet u(t)$ και $\frac{1}{s-1} \leftrightarrow e^{t}\bullet u(t)$. Επίσης $\frac{2}{(s+1)\bullet(s-1)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s-1} \leftrightarrow -e^{-t}\bullet u(t) + e^{t}\bullet u(t)$

Δηλαδή $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{t}-e^{-t} \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}\bullet u(t)$

γ) Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A:

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda\bullet I) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -(1+\lambda)\bullet(1-\lambda)\right)$$

Θέτουμε $P_A(\lambda)=0$ οπότε οι ιδιοτιμές (ιδιοσυχνότητες) είναι: $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$

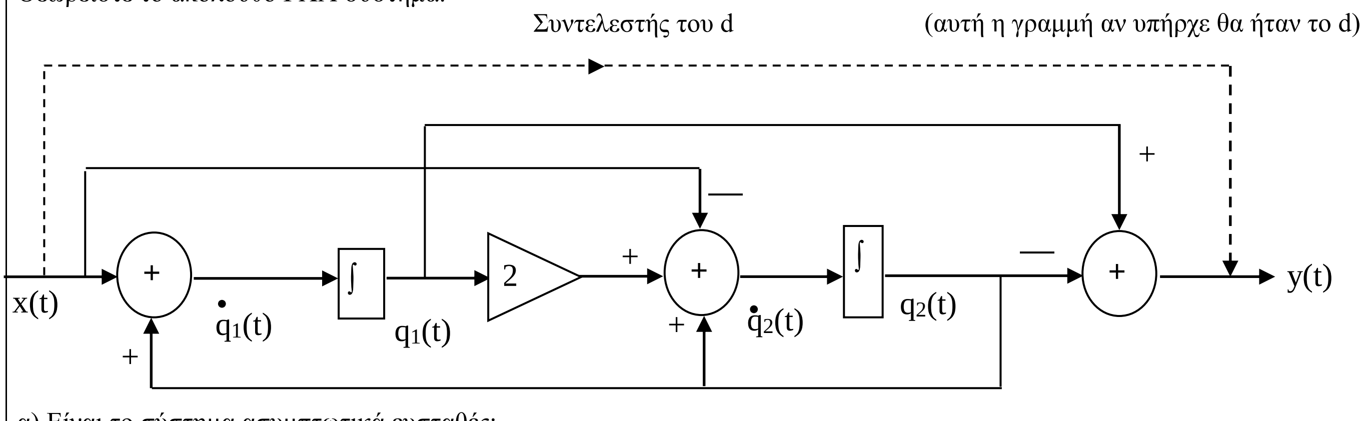
Επειδή η ιδιοτιμή $\lambda_1=1$ δεν έχει αρνητικό πραγματικό μέρος, το σύστημα δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Βασική Παρατήρηση

Όταν το μητρώο A είναι τριγωνικό (είτε άνω είτε κάτω) τότε οι ιδιοτιμές του μητρώου A είναι οι ρίζες της ορίζουσας του s•I-A. Η ορίζουσα ενός τριγωνικού μητρώου ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Εναλλακτικά σε ένα τριγωνικό μητρώο οι ιδιοτιμές του βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο.

4.14 1η Άσκηση με Κύκλωμα

Θεωρείστε το ακόλουθο ΓΧΑ σύστημα:



α) Είναι το σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές;

β) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς H(s)

γ) Είναι το σύστημα BIBO ευσταθές;

__**Λύση**__

Αρχικά θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \bullet x(t) \text{ και } y(t) = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

Εμείς θα πρέπει να προσδιορίσουμε το μητρώο A και τα διανύσματα $\underline{b}$ και $\underline{c}^T$

Εξετάζουμε το σύστημα στους αθροιστές του:

$$\dot{q}_1(t) = q_2(t) + x(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = 2\bullet q_1(t) + q_2(t) - x(t)$$

$$y(t) = q_1(t) - q_2(t)$$

Από αυτό το σύστημα προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \bullet x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

α) Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του μητρώου A από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου A:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \bullet I) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = -\lambda \bullet (1-\lambda) - 2$$

Θέτουμε $P_A(\lambda) = 0$ οπότε $-\lambda(1-\lambda) - 2 = 0 \Rightarrow -\lambda + \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Οι ιδιοτιμές (ιδιοσυχνότητες) είναι λ_1= -1 και λ_2=2. Επειδή Re(λ_2)>0 το σύστημα δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

β) Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τον τύπο:

$$H(s) = \underline{c}^T \cdot (s \bullet I - A)^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & -1 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1) \bullet (s-2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 2 & s \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{2(s-2)}{(s+1) \bullet (s-2)}$$

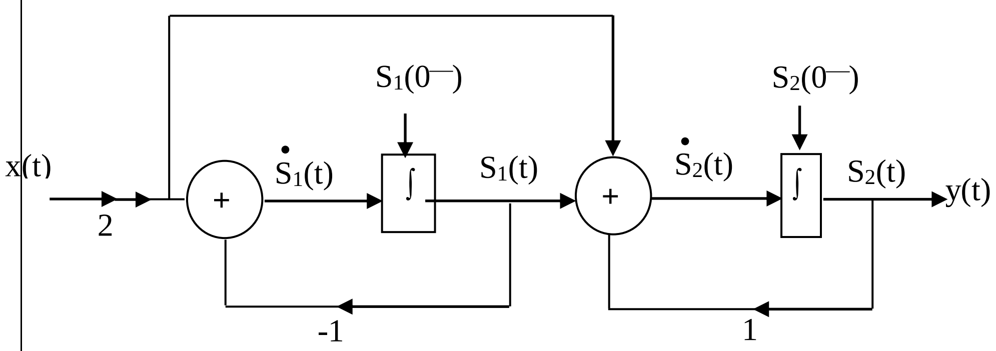
Για την ΦΕΦΕ Ευστάθεια ΑΠΛΟΠΟΙΟΥΜΕ τη συνάρτηση μεταφοράς και στον τελικό απλοποιημένο τύπου βρίσκουμε τους πόλους. Εδώ ο τελικός πόλος είναι το -1, είναι στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο άρα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές. Για την ασυμπτωτική ευστάθεια ΔΕΝ ΑΠΛΟΠΟΙΟΥΜΕ και οι ιδιοτιμές είναι οι -1, 2 (οι πόλοι της μη απλοποιημένης συνάρτησης μεταφοράς).

Παρατήρηση

Επειδή η συνάρτηση μεταφοράς έχει το 2 ως μηδενικό και πόλο ταυτόχρονα, το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο, οπότε στην περίπτωση αυτή δεν ταυτίζονται οι ορισμοί ασυμπτωτικής και BIBO ευστάθειας. Όταν η συνάρτηση μεταφοράς είναι μη συρρικνούμενη τότε ταυτίζεται η BIBO με την ασυμπτωτική ευστάθεια. Εδώ λοιπόν που δεν ταυτίζονται εξετάζω την BIBO ευστάθεια όπως την περιγράφει ο ML δηλαδή ένα σύστημα είναι BIBO ευσταθές, αν όλοι οι πόλοι της **συνάρτησης μεταφοράς** βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο.

4.15 2η Άσκηση με Κύκλωμα

α) Περιγράψτε στο χώρο κατάστασης το ακόλουθο αιτιατό σύστημα:



β) Υπολογίστε το μητρώο καταστατικής μετάβασης

γ) Εξετάστε αν το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

<u>Λύση</u>

α)

Αρχικά θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1(t) \\ \dot{s}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \bullet x(t) \text{ και } y(t) = \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix}$$

Εμείς θα πρέπει να προσδιορίσουμε το μητρώο A και τα διανύσματα $\underline{b}$ και $\underline{c}^T$

Από το σχήμα έχουμε τις εξισώσεις:

$$\dot{s}_1(t) = -s_1(t) + 2 \bullet x(t) \text{ και } \dot{s}_2(t) = s_2(t) + s_1(t) + 2x(t) = s_1(t) + s_2(t) + 2x(t) \text{ και } y(t) = s_2(t)$$

από τις οποίες προκύπτουν οι ακόλουθες δυναμικές εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1(t) \\ \dot{s}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \bullet x(t) \text{ και } y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix}$$

β) Για να υπολογίσουμε το μητρώο καταστατικής μετάβασης:

$$e^{At} = L^{-1}\{(s \bullet I - A)^{-1}\} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix}\right\}$$

Είναι:

$$\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(s \bullet I - A)} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \bullet \frac{1}{(s+1) \bullet (s-1)} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s-1) \bullet (s+1)} & 0 \\ \frac{1}{(s-1) \bullet (s+1)} & \frac{s+1}{(s-1) \bullet (s+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1) \bullet (s+1)} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

Άρα: $\frac{1}{s+1} \leftrightarrow e^{-t} \bullet u(t)$ και $\frac{1}{s-1} \leftrightarrow e^{t} \bullet u(t)$ $\quad \frac{1}{(s+1)(s-1)} \leftrightarrow \frac{1}{2}e^{-t} \cdot u(t) - \frac{1}{2}e^{-t} \cdot u(t)$ γιατί

$$\frac{1}{(s-1) \bullet (s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{s+1}$$

Δηλαδή $\frac{1}{(s-1) \bullet (s+1)} = \frac{1/2}{s-1} + \frac{-1/2}{s+1}$

Τελικά $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} & e^{t} \end{bmatrix} \bullet u(t)$

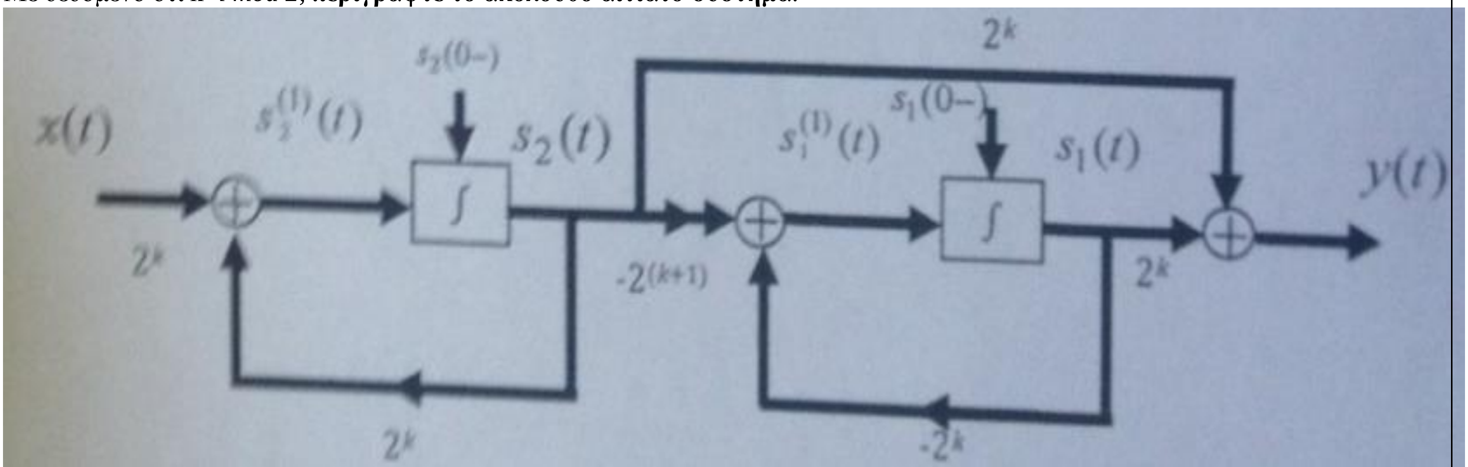
γ) Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \bullet I) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -(1+\lambda) \bullet (1-\lambda) = (\lambda+1) \bullet (\lambda-1)$$

Θέτουμε $P_A(\lambda)=0$ οπότε προκύπτουν οι ιδιοτιμές $\lambda_1=-1, \lambda_2=1$, άρα το σύστημα δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

4.16 Θέμα 4 Ιούνιος 2013

Με δεδομένο ότι k=*l mod 2*, **περιγράψτε το ακόλουθο αιτιατό σύστημα**:

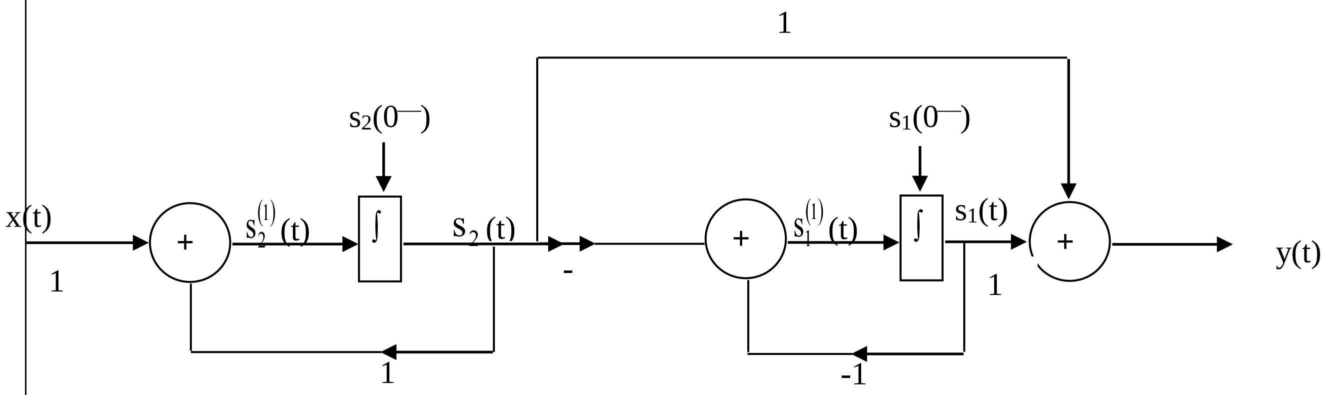


στο χώρο κατάστασης. **Εξετάστε αν το σύστημα είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο**. Αποφανθείτε αν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. **Αν δεν είναι, επιχειρηματολογήστε για τη δυνατότητα σταθεροποίησης του**. Αιτιολογήστε όλες τις απαντήσεις σας

Λύση

l mod 2 =1

α) Περιγράψτε: **στο χώρο κατάστασης το ακόλουθο αιτιατό σύστημα (δηλ. να κατασκευάσετε τις καταστατικές εξισώσεις του συστήματος)**



<u>Λύση</u>
α)
Αρχικά θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix}\dot{s}_1(t)\\ \dot{s}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}s_1(t)\\ s_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}\bullet x(t) \text{ και } y(t)=\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}s_1(t)\\ s_2(t)\end{bmatrix}$$

Από το σχήμα προκύπτουν το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\dot{s}_2(t)=s_2(t)+x(t)$$

$$\dot{s}_1(t)=(-1)\bullet s_1(t)-2\bullet s_2(t)$$

$$y(t)=s_1(t)+s_2(t)$$

Από τα παραπάνω συστήματα προκύπτουν οι ακόλουθες δυναμικές εξισώσεις

$$\begin{bmatrix}\dot{s}_1(t)\\ \dot{s}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}s_1(t)\\ s_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\bullet x(t) \text{ και } y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}s_1(t)\\ s_2(t)\end{bmatrix}$$

Μητρώο ελεγξιμότητας

$$S=\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Το det(S)=2 διάφορο από το μηδέν άρα έχουμε ελέγξιμο σύστημα

- Υπολογίζουμε το μητρώο παρατηρησιμότητας:

$$V=\begin{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

Η det(V)=0 άρα το σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο

Οι ιδιοτιμές του μητρώου Α είναι:

$$A-\lambda\bullet I=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\lambda\bullet\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-\lambda & -2\\ 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}$$

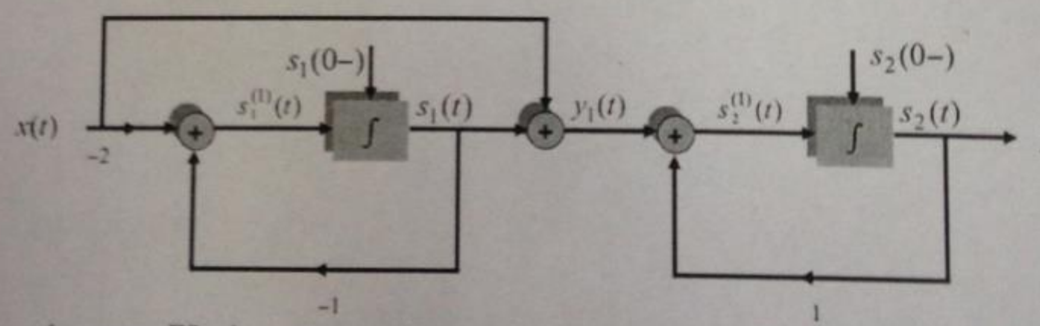
Μετά υπολογίζουμε το $\det(A-\lambda\bullet I)=\det\left(\begin{bmatrix}-1-\lambda & -2\\ 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}\right)=-(1+\lambda)\bullet(1-\lambda)=\left\langle\begin{matrix}-1\\ 1\end{matrix}\right.$

Οι ιδιοτιμές είναι το 1 και το -1, δεν έχουν όλες αρνητικό πραγματικό μέρος άρα το σύστημα δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Το σύστημα μπορεί να σταθεροποιηθεί γιατί είναι ελέγξιμο.

Παρατήρηση
Με τη φράση «επιχειρηματολογήστε για τη δυνατότητα σταθεροποίησης του συστήματος» ΔΕΝ ζητάει να κάνουμε και σταθεροποίησης του συστήματος. Επίσης αν ζητούσε σταθεροποίησης του συστήματος θα έπρεπε οπωσδήποτε να δίνει και τις νέα ιδιοτιμές του μητρώου Α.

4.17 Θέμα 4 Σεπτέμβριος 2013

ΘΕΜΑ 4: (15%).
Περιγράψτε το ακόλουθο αιτιατό σύστημα



στο χώρο κατάστασης. Εξετάστε αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο και ελέγξιμο. Αποφανθείτε αν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Αν δεν είναι, επιχειρηματολογήστε για τη δυνατότητα σταθεροποίησής του. Αιτιολογήστε όλες σας τις απαντήσεις.

<u>**Λύση**</u>

ΘΕΜΑ 4(15%). Από το σχηματικό διάγραμμα που σας δίνεται, προκύπτει ότι οι εξόδοι των αθροιστών και η έξοδος του συστήματος, ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} s_1^{(1)}(t) &= -s_1(t) - 2x(t) \\ s_2^{(1)}(t) &= s_1(t) + s_2(t) + x(t) \\ y(t) &= s_2(t). \end{aligned}$$

Επομένως, το σύστημα περιγράφεται στο χώρο κατάστασης από την ακόλουθη τετράδα:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d = 0. \qquad (2)$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τα μητρώα ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= [b\ Ab] = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{O} &= \begin{bmatrix} c^t \\ c^t A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

και να αποφανθούμε σχετικά με την ελεγξιμότητα και παρατηρησιμότητα του συστήματος από την αντιστρεψιμότητα ή μη (ή ισοδύναμα από τον μηδενισμό ή μη της ορίζουσας) των παραπάνω μητρώων. Πράγματι:

$$\begin{aligned} det\,\{\mathcal{C}\} &= 0 \\ det\,\{\mathcal{O}\} &= -1 \end{aligned}$$

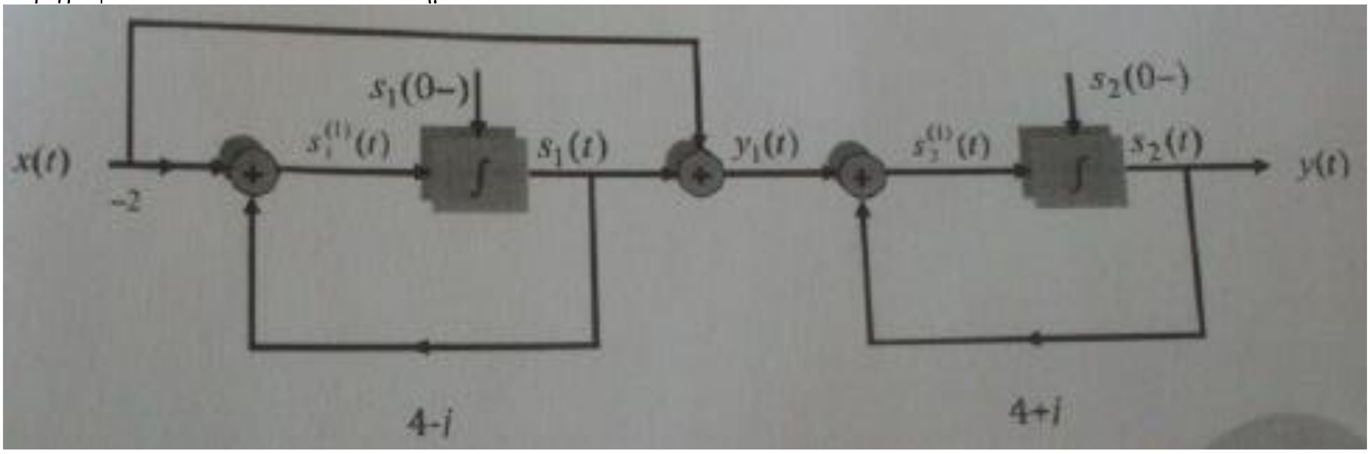
και επομένως το σύστημα είναι παρατηρήσιμο αλλά μη ελέγξιμο.

Αφού το σύστημα είναι μη ελέγξιμο είναι υποχρεωτικά και ασυμπτωτικά ασταθές. Επιπλέον, εξαιτίας της μη ελεγξιμότητάς του δεν μπορούμε να το σταθεροποιήσουμε.

Παρατήρηση
Ένα ΜΗ ελέγξιμο σύστημα είναι 1)ΠΑΝΤΑ ασυμπτωτικά ασταθές (δε χρειάζεται να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του μητρώου A) και 2)ΔΕΝ μπορούμε να το σταθεροποιήσουμε.

4.18 Θέμα 3 Φεβρουάριος 2015

Περιγράψτε το ακόλουθο αιτιατό σύστημα:



στο χώρο κατάστασης **Εξετάστε αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο και ελέγξιμο**. **Αποφανθείτε αν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές**. Αν δεν είναι, επιχειρηματολογήστε για τη δυνατότητα σταθεροποίησης του και σταθεροποιήστε το. Αιτιολογήστε όλες τις απαντήσεις σας

<u>Απάντηση</u>

α)

Αρχικά θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1(t) \\ \dot{s}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \bullet x(t) \text{ και } y(t) = \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix}$$

Από το σχήμα προκύπτουν το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\dot{s}_1(t) = (4-i) \bullet s_1(t) - 2 \bullet x(t)$$

$$\dot{s}_2(t) = (4+i) \bullet s_2(t) + s_1(t) + x(t)$$

$$y(t) = s_2(t)$$

Από τα παραπάνω συστήματα προκύπτουν οι ακόλουθες δυναμικές εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1(t) \\ \dot{s}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-i & 0 \\ 1 & 4+i \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet x(t) \text{ και } y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix}$$

Για να δούμε αν το σύστημα είναι ελέγξιμο ορίζουμε το μητρώο ελεγξιμότητας C(A,b):

$$C(A,b) = \begin{bmatrix} \underline{b} & A \bullet \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4-i & 0 \\ 1 & 4+i \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -8+2i \\ 1 & 2+i \end{bmatrix}$$

$\det(C(A,b)) = 4-4i \neq 0$ **άρα το σύστημα είναι ελέγξιμο**

Για να δούμε αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο ορίζουμε το μητρώο παρατηρησιμότητας O(A,C):

$$O(A,c) = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \bullet A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4-i & 0 \\ 1 & 4+i \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4+i \end{bmatrix}$$

$\det(O(A,C)) = -1 \neq 0$ **άρα το σύστημα είναι παρατηρήσιμο**

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του μητρώου Α από τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του μητρώου Α

$$\det(A - \lambda \bullet I) = 0 \Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 4-i & 0 \\ 1 & 4+i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 4-i-\lambda & 0 \\ 1 & 4+i-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} \lambda_1 = 4+i \\ \lambda_2 = 4-i \end{matrix} \right.$$

Το σύστημα δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές γιατί το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών δεν είναι αρνητικό.

<u>Παρατήρηση</u>

Εναλλακτικά παρατηρώντας ότι το **μητρώο κατάστασης Α** είναι τριγωνικό μητρώο μπορούμε να βρούμε τις ιδιοτιμές του από την κύρια διαγώνιο του Α. Συγκεκριμένα οι ιδιοτιμές του Α είναι 4-i και 4+i.

Το σύστημα είναι ελέγξιμο άρα μπορούμε να το σταθεροποιήσουμε. Σε αντίθεση με προηγούμενες ασκήσεις εδώ ΔΕΝ δίνονται οι νέες ιδιοτιμές που θα έχει το σταθεροποιημένο μητρώο Α′.

Το νέο σταθεροποιημένο μητρώο θα είναι:

$$A' = A + \underline{b} \bullet \underline{k}^T \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 4-i & 0 \\ 1 & 4+i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 4-i & 0 \\ 1 & 4+i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2k_1 & -2k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A' = \begin{bmatrix} -4-i-2k_1 & -2k_2 \\ 1+k_1 & 4+i+k_2 \end{bmatrix}$$

Αφού το αρχικό μητρώο A είναι τριγωνικό άρα και το τελικό μητρώο A′ είναι τριγωνικό και οι ιδιοτιμλες του θα είναι στην κύρα διαγώνιο. Επιλέγουμε $k_1+1=0 \Rightarrow k_1=-1$. Το μητρώο A′ θα έχει τη μορφή: $A' = \begin{bmatrix} -4-i+2 & -2k_2 \\ 0 & 4+i+k_2 \end{bmatrix}$

Η $1^η$ ιδιοτιμή είναι $\lambda_1 = -2-i$ έχει αρνητικό πραγματικό μέρος. Επιλέγω ότι θέλω ως k_2 αρκεί η $2^η$ ιδιοτιμή που είναι το $4+i+k_2 < 0$. Αν επιλέξουμε π.χ. $k_2 = -5$ τότε η $2^η$ ιδιοτιμή είναι το $\lambda_2 = -1-i$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου A′

$$P_A(\lambda) = \det(A' - \lambda \bullet I) = \det\left(\begin{bmatrix} -4-i-2k_1 & -2k_2 \\ 1+k_1 & 4+i+k_2 \end{bmatrix} - \lambda \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -4-i-2k_1 & -2k_2 \\ 1+k_1 & 4+i+k_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} -4-i-2k_1-\lambda & -2k_2 \\ 1+k_1 & 4+i+k_2-\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \lambda(8-2k_1+k_2) + (17+6k_1-k_2 i-8k_2-2k_1 i) = 0$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Επειδή δεν δίνονται οι ιδιοτιμές του σταθεροποιημένου μητρώου, μπορούμε να επιλέξουμε οποιεσδήποτε τιμές για το διάνυσμα ανάδρασης $\underline{k}^T$ αρκεί οι ιδιοτιμές του μητρώου A′ να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Πιο συγκεκριμένα οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του μητρώου A′ είναι οι εξής:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(8-2k_1+k_2) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

Θα πρέπει το $\frac{(8-2k_1+k_2)}{2} < 0 \Rightarrow 4-k_1+\frac{k_2}{2} < 0$. Μπορούμε να επιλέξουμε οποιεσδήποτε τιμές για τα k_1, k_2 αρκεί να ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη. Π.χ. για $k_1=5$, $k_2=1$ οι ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος και συγκεκριμένα έχουν ως πραγματικό μέρος το -1/2. Άρα το διάνυσμα ανάδρασης που επιλέγουμε είναι το $\underline{k}^T = [5 \quad 1]$.

4.19 Θέμα 4 Σεπτέμβριος 2009

Θεωρείστε το ακόλουθο σύστημα στο χώρο κατάστασης

$$s^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} s(t) + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x(t), \quad y(t) = c^t s(t)$$

(α): (10%). Υπολογίστε το μητρώο καταστατικής μετάβασης του συστήματος.

(β): (15%). Εξετάστε αν το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Αν όχι, εξετάστε αν χρησιμοποιώντας ανατροφοδότηση κατάστασης μπορούμε να το σταθεροποιήσουμε και μάλιστα έτσι ώστε αυτό να έχει διαφορετικές ιδιοσυχνότητες.

<u>Λύση</u>

(α)

Το μητρώο καταστατικής μετάβασης είναι:

$$e^{At} = L^{-1}\left((s \bullet I - A)^{-1}\right) \Rightarrow e^{At} = L^{-1}\left(s \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\right) \Rightarrow e^{At} = L^{-1}\left(\left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\right) \Rightarrow$$

$$e^{At} = L^{-1}\begin{bmatrix} s-3 & 0 & 0 \\ -4 & s-2 & 0 \\ -2 & -3 & s-1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Γενικά $\left(s\bullet I-A\right)^{-1}=\dfrac{Adj(s\bullet I-A)}{\det(s\bullet I-A)}$. **Όταν ένας πίνακας είναι τριγωνικός (είτε άνω η είτε κάτω) τότε ο Adj πίνακας αυτού είναι ο συμμετρικός του ως προς την κύρια διαγώνιο** δηλ:

$$Adj(s\bullet I-A)=\begin{bmatrix} s-3 & -4 & -2 \\ 0 & s-2 & -3 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

και η ορίζουσα του τριγωνικού πίνακα είναι το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου δηλ:

$$\det(s\bullet I-A)=\left(s-3\right)\bullet\left(s-2\right)\bullet\left(s-1\right)$$

$$e^{At}=\frac{\begin{bmatrix} s-3 & -4 & -2 \\ 0 & s-2 & -3 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}}{\left(s-3\right)\bullet\left(s-2\right)\bullet\left(s-1\right)}=\begin{bmatrix} \dfrac{s-3}{\left(s-3\right)\bullet\left(s-2\right)\bullet\left(s-1\right)} & \dfrac{-4}{\left(s-3\right)\bullet\left(s-2\right)\bullet\left(s-1\right)} & \dfrac{-2}{\left(s-3\right)\bullet\left(s-2\right)\bullet\left(s-1\right)} \\ 0 & \dfrac{s-2}{\left(s-3\right)\bullet\left(s-2\right)\bullet\left(s-1\right)} & \dfrac{-3}{\left(s-3\right)\bullet\left(s-2\right)\bullet\left(s-1\right)} \\ 0 & 0 & \dfrac{s-1}{\left(s-3\right)\bullet\left(s-2\right)\bullet\left(s-1\right)} \end{bmatrix}$$

Με αντίστροφο ML υπολογίζουμε ότι :

$$e^{At}=\begin{bmatrix} e^{2t}-e^{t} & -2e^{3t}+4e^{2t}-2e^{t} & -e^{3t}+2e^{2t}-e^{t} \\ 0 & \frac{1}{2}\left(e^{3t}-e^{t}\right) & -3\left(\frac{1}{2}e^{3t}-e^{2t}+\frac{1}{2}e^{t}\right) \\ 0 & 0 & e^{3t}-e^{2t} \end{bmatrix}\bullet u(t)$$

(β)

Όταν ο πίνακας είναι τριγωνικός τότε οι ιδιοτιμές του μητρώου A είναι στην κύρια διαγώνιο του A δηλαδή $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$.

Επειδή $Re(\lambda_1)>0$, $Re(\lambda_2)>0$ και $Re(\lambda_3)>0$ το σύστημα δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Για να το σταθεροποιήσουμε πρέπει πρώτα να εξετάσουμε αν είναι ελέγξιμο, οπότε υπολογίζουμε το μητρώο ελεγξιμότητας S ως εξής:

$S=\left[b \quad Ab \quad A^2b\right]$ όπου:

$$A\bullet b=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 16 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$A^2\bullet b=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 20 & 4 & 0 \\ 20 & 9 & 1 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 27 \\ 68 \\ 79 \end{bmatrix}$$

Άρα: $S=\begin{bmatrix} 3 & 9 & 27 \\ 2 & 16 & 68 \\ 1 & 13 & 79 \end{bmatrix}$ και $\det(S)=3\bullet\begin{vmatrix} 16 & 68 \\ 13 & 79 \end{vmatrix}-9\bullet\begin{vmatrix} 2 & 68 \\ 1 & 79 \end{vmatrix}+27\bullet\begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 1 & 13 \end{vmatrix}=600\neq 0$ άρα το σύστημα είναι ελέγξιμο και συνεπώς μπορεί να σταθεροποιηθεί. Για τη σταθεροποίηση του χρησιμοποιούμε το διάνυσμα ανάδρασης ή σταθεροποίησης $k^T=\left[k_1 \quad k_2 \quad k_3\right]$ ώστε το σταθεροποιημένο μητρώο $A'=A+\underline{b}\bullet\underline{k}^T$ να έχει όλες τις ιδιοτιμές του με αρνητικό πραγματικό μέρος.

$$A' = A + \underline{b} \bullet \underline{k}^T \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k_1 & 3k_2 & 3k_3 \\ 2k_1 & 2k_2 & 2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+3k_1 & 3k_2 & 3k_3 \\ 4+2k_1 & 2+2k_2 & 2k_3 \\ 2+k_1 & 3+k_2 & 1+k_3 \end{bmatrix}$$

Προσπαθώ να διατηρήσω τριγωνική μορφή και στον τελικό πίνακα A' δηλ:

$$\left.\begin{matrix} 4+2k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = -2 \\ 3+k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = -3 \\ 2+k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = -2 \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & x & x \\ 0 & -4 & x \\ 0 & 0 & 1+k_3 \end{bmatrix}$$

Πρέπει $1+k_3 \neq -3$ και επίσης $1+k_3 \neq -4$ και $1+k_3 < 0$ ώστε το μητρώο A' να είναι τριγωνικό μητρώο και οι ιδιοτιμές του (ιδιοσυχνότητες), που προσδιορίζονται από την κύρια διαγώνιο, να είναι διαφορετικές μεταξύ τους και αρνητικές. Αν π.χ. $k_3 = -2$ τότε η 3η ιδιοτιμή είναι το -1 που ικανοποιεί τις συνθήκες της εκφώνησης. Άρα το διάνυσμα ανάδρασης ή σταθεροποίησης $\underline{k}$ θα είναι το: $\begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

Παρατηρήσεις

- Όταν ένα μητρώο είναι είτε άνω είτε κάτω τριγωνικό τότε οι ιδιοτιμές του μητρώου Α είναι οι τιμές της κύριας διαγωνίου και δεν χρειάζεται ο υπολογισμός τους με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.
- Όταν ένα μητρώο Α είναι είτε άνω είτε κάτω τριγωνικό και το σταθεροποιήσουμε, τότε το σταθεροποιημένο μητρώο A' που προκύπτει πρέπει επίσης να είναι τριγωνικό χωρίς απαραίτητα να διατηρεί την ίδια μορφή τριγωνικότητας
- **ΠΡΟΣΟΧΗ: ΑΝ ΕΠΙΛΕΓΑΜΕ ΝΑ ΜΗΔΕΝΙΣΟΥΜΕ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΥΡΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΟ ΤΟΤΕ ΘΑ ΠΡΟΕΚΥΠΤΕ ΟΤΙ $k_2 = 0$ ΚΑΙ $k_3 = 0$. ΜΕ ΑΥΤΕΣ ΟΜΩΣ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΟΤΙ ΟΙ 2 ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΤΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ Α′ ΘΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟ 1 ΚΑΙ ΤΟ 2 ΟΙ ΟΠΟΙΕΣ ΑΠΟΡΡΙΠΤΟΝΤΑΙ ΔΙΟΤΙ ΕΧΟΥΝ ΘΕΤΙΚΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΚΑΙ ΩΣ ΕΚ ΤΟΥΤΟΥ ΔΙΝΟΥΝ ΕΝΑ ΜΗΤΡΩΟ Α ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΑΣΤΑΘΕΣ**.

4.20 Θέμα 4 Ιούλιος 2008

Δίνεται ο παρακάτω καταστατικός πίνακας: $A = \begin{bmatrix} \sigma_0 & -\Omega_0 \\ \Omega_0 & \sigma_0 \end{bmatrix}$

α)Χρησιμοποιώντας **το μετασχηματισμό Laplace υπολογίστε τον πίνακα καταστατικής μετάβασης**
β)Θεωρείστε ένα αιτιατό σύστημα που περιγράφεται στο χώρο κατάστασης από την **ομογενή καταστατική εξίσωση** που βασίζεται στον παραπάνω πίνακα και την εξίσωση εξόδου με c^T=[1 0], d=0. Σχολιάστε τη μορφή της εξόδου του συστήματος **(θεωρείστε μη μηδενικές τις τιμές της μηδενικής κατάστασης**)

Λύση

$$e^{At} = L^{-1}\left((s \bullet I - A)^{-1}\right) \Rightarrow e^{At} = L^{-1}\left(\left(s \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_0 & -\Omega_0 \\ \Omega_0 & \sigma_0 \end{bmatrix}\right)^{-1}\right) \Rightarrow e^{At} = L^{-1}\left(\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_0 & -\Omega_0 \\ \Omega_0 & \sigma_0 \end{bmatrix}\right)^{-1}\right) \Rightarrow$$

$$e^{At} = L^{-1}\left(\begin{bmatrix} s-\sigma_0 & \Omega_0 \\ -\Omega_0 & s-\sigma_0 \end{bmatrix}^{-1}\right) \quad (1)$$

Υπολογίζουμε πρώτα τον αντίστροφο πίνακα:

$$\begin{bmatrix} s-\sigma_0 & \Omega_0 \\ -\Omega_0 & s-\sigma_0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s-\sigma_0 & -\Omega_0 \\ \Omega_0 & s-\sigma_0 \end{bmatrix}}{(s-\sigma_0)^2 + \Omega_0^2} = \begin{bmatrix} \frac{s-\sigma_0}{(s-\sigma_0)^2+\Omega_0^2} & -\frac{\Omega_0}{(s-\sigma_0)^2+\Omega_0^2} \\ \frac{\Omega_0}{(s-\sigma_0)^2+\Omega_0^2} & \frac{s-\sigma_0}{(s-\sigma_0)^2+\Omega_0^2} \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στη σχέση (1)

$$e^{At} = L^{-1}\left(\begin{bmatrix} \frac{s-\sigma_0}{(s-\sigma_0)^2+\Omega_0^2} & -\frac{\Omega_0}{(s-\sigma_0)^2+\Omega_0^2} \\ \frac{\Omega_0}{(s-\sigma_0)^2+\Omega_0^2} & \frac{s-\sigma_0}{(s-\sigma_0)^2+\Omega_0^2} \end{bmatrix}\right) \Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\sigma_0 t}\bullet\cos(\Omega_0 t) & -e^{\sigma_0 t}\bullet\sin(\Omega_0 t) \\ e^{\sigma_0 t}\bullet\sin(\Omega_0 t) & e^{\sigma_0 t}\bullet\cos(\Omega_0 t) \end{bmatrix}\bullet u(t)$$

β) Το διάνυσμα κατάστασης δίνεται από τον τύπο $\underline{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \bullet \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-r)} \underline{b} \bullet v(r)dr$. Θέτουμε ως αρχική χρονική στιγμή πάντα το σημείο 0 δηλ $t_0=0$ και ο προηγούμενος τύπος παίρνει τη μορφή: $\underline{x}(t) = e^{At} \bullet \underline{x}(0) + \int_{0}^{t} e^{A(t-r)} \underline{b} \bullet v(r)dr$. Το σύστημα είναι ομογενές άρα $\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και ο προηγούμενος τύπος παίρνει τη μορφή $\underline{x}(t) = e^{At} \bullet \underline{x}(0)$. Άρα το διάνυσμα κατάστασης θα είναι:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\sigma_o t} \bullet \cos(\Omega_0 t) & -e^{\sigma_o t} \bullet \sin(\Omega_0 t) \\ e^{\sigma_o t} \bullet \sin(\Omega_0 t) & e^{\sigma_o t} \bullet \cos(\Omega_0 t) \end{bmatrix} \bullet u(t) \bullet \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_0 \bullet e^{\sigma_o t} \bullet \cos(\Omega_0 t) - x_1 \bullet e^{\sigma_o t} \bullet \sin(\Omega_0 t) \\ x_0 \bullet e^{\sigma_o t} \bullet \sin(\Omega_0 t) + x_1 \bullet e^{\sigma_o t} \bullet \cos(\Omega_0 t) \end{bmatrix} \bullet u(t)$$

και το σήμα εξόδου θα είναι:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_0 \bullet e^{\sigma_o t} \bullet \cos(\Omega_0 t) - x_1 \bullet e^{\sigma_o t} \bullet \sin(\Omega_0 t) \\ x_0 \bullet e^{\sigma_o t} \bullet \sin(\Omega_0 t) + x_1 \bullet e^{\sigma_o t} \bullet \cos(\Omega_0 t) \end{bmatrix} \bullet u(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \left(x_0 \bullet e^{\sigma_o t} \bullet \cos(\Omega_0 t) - x_1 \bullet e^{\sigma_o t} \bullet \sin(\Omega_0 t)\right) \bullet u(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \left(x_0 \bullet \cos(\Omega_0 t) - x_1 \bullet \sin(\Omega_0 t)\right) \bullet u(t) \bullet e^{\sigma_o t}$$

Χαρακτηρισμός Εξόδου

- Θεωρώντας $\sigma_0>0$ και $t>0$ το $\lim_{t\to\infty} y(t)= \infty-\infty$=απροσδιόριστο και για $\sigma_0>0$ και $t<0$ τότε $\lim_{t\to\infty} y(t)=0-0=0$
- Θεωρώντας το $\sigma_0<0$ και $t>0$ το $\lim_{t\to\infty} y(t)=0$ και για $\sigma_0<0$ και $t<0$ τότε $\lim_{t\to\infty} y(t)= \infty-\infty$=απροσδιόριστο

Παρατήρηση
Επειδή θεωρούμε μη μηδενικές τις τιμές της μηδενικής κατάστασης, αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν ξεκινά αρχικά από ηρεμία και γιαυτό η έξοδος του συστήματος υπολογίζεται από τη 2η καταστατική εξίσωση, αλλιώς η έξοδος θα υπολογιζόταν με αντίστροφο ML από την Y(s).

4.21 Χαρακτηρισμός Εξόδου

Θεωρούμε το σύστημα που περιγράφεται από τις ακόλουθες δυναμικές (καταστατικές) εξισώσεις:

$$\dot{\underline{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\bullet\underline{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\bullet v(t) \text{ και } y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\bullet\underline{x}(t)$$

Η είσοδος v(t) είναι η **βηματική συνάρτηση u(t)** και υποθέτουμε ότι το σύστημα **ξεκινά αρχικά από ηρεμία**, δηλαδή $\underline{x}(0)=\underline{0}$

α)Να δειχτεί ότι η **έξοδος τείνει ασυμπτωτικά σε μία σταθερά**.

β)Υπάρχει τρόπος να **επιταχυνθεί η μετάβαση της εξόδου στη μόνιμη κατάσταση** της;

<u>Λύση</u>

α) Επειδή το σύστημα ξεκινά από ηρεμία, η έξοδος υπολογίζεται με αντίστροφο ML από την Y(s) δηλ. Y(s)=H(s)•X(s). Δίνεται ότι η είσοδος είναι η βηματική συνάρτηση u(t), άρα X(s)=V(s)=1/s και μένει να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς..

Υπολογίζουμε πρώτα τη συνάρτηση μεταφοράς από τον τύπο:

$$H(s)=\underline{c}^T\bullet(s\bullet I - A)^{-1}\bullet\underline{b}+d\Rightarrow H(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\bullet\left(s\bullet\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\right)^{-1}\bullet\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+d\Rightarrow$$

$$H(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1}\bullet\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Rightarrow H(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\bullet\frac{1}{s^2+3\bullet s+2}\Rightarrow \qquad (1)$$

$$H(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}\Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{V(s)}\Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{\frac{1}{s}}\Rightarrow Y(s)=\frac{H(s)}{s}\Rightarrow Y(s)=\frac{s+3}{s(s^2+3s+2)}$$

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{s+3}{s(s^2+3s+2)}\right\}\Rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{\frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}\right\}\Rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+2}\right\}$$

$$\Rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{\frac{s+3}{s\bullet(s+1)\bullet(s+2)}\right\}\Rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+2}\right\}$$

$$\Rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{\frac{3}{2}\frac{1}{s}-2\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{3}{2}u(t)-2e^{-t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)=\left(\frac{3}{2}-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)\bullet u(t). \text{ Άρα } \lim_{t\to\infty}y(t)=\frac{3}{2}$$

β) **Η ταχύτητα με την οποία η έξοδος τείνει στη μόνιμη κατάσταση της καθορίζεται από τις ιδιοσυναρτήσεις e^{-t} και e^{-2t} που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1=-1 και λ_2=-2**. Όταν δεν έχουμε απαλοιφή μηδενικών και πόλων στη συνάρτηση μεταφοράς H(s) οι ιδιοτιμές συμπίπτουν με τους πόλους της H(s).

Η ιδιοσυνάρτηση e^{-t} που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ιδιοτιμή δηλαδή στη λ_1 = -1 παίζει τον καθοριστικό ρόλο και ονομάζεται επικρατούσα ιδιοτιμή. <u>Για να επιταχύνουμε τη μετάβαση της εξόδου στη μόνιμη κατάστασή της (δηλ. στη σταθερά 3/2), θα πρέπει να μετατοπίσουμε τις ιδιοτιμές αριστερότερα στο αρνητικό ημιεπίπεδο s. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση ανάδρασης κατάστασης $\underline{k}^T$</u>.

$$A'=A+\underline{b}\bullet\underline{k}^T=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_1 & k_2\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1 & 1+k_2\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

Το A' που επιταχύνει τη μετάβαση στη μόνιμη κατάσταση. Οι ιδιοτιμές του A' προκύπτουν από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$P_{A'}=\det\left(\begin{bmatrix}k_1 & k_2+1\\ -2 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right)=(\lambda-k_1)\bullet(\lambda+3)+2(k_2+1)$$

Πρέπει $P_{A'}=0\Rightarrow\lambda^2-(3-k_1)\bullet\lambda+(2k_2+2-3k_1)=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\dfrac{k_1-3\pm\sqrt{(3-k_1)^2-8k_2-8+12k_1}}{2}$

Πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλα k_1, k_2 ώστε $\lambda_{1,2}$<-1. Για k_1 = -4 και k_2 = -1 προκύπτει ότι λ_1 = -4 και λ_2 = -3

Το καινούργιο σύστημα με ανάδραση κατάστασης είναι: $\dot{\underline{x}}(t)=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ -2 & -3\end{bmatrix}\bullet\underline{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\bullet\underline{v}(t)$ και $y(t)=\underline{c}^T\bullet\underline{x}(t)$. Με βάση το νέο μητρώο A' υπολογίζουμε τη νέα συνάρτηση μεταφοράς.

Παρατήρηση

- **Οι συναρτήσεις $e^{\lambda_i t}$ ονομάζονται ιδιοσυναρτήσεις και τα λ_i ονομάζονται ιδιοτιμές.**
- Εφόσον το σύστημα ξεκινά από ηρεμία, δηλαδή $\underline{x}(0)=\underline{0}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς για να υπολογίσουμε την έξοδο του συστήματος. Σε διαφορετική περίπτωση η έξοδος θα δινόταν από το ζεύγος:

$$\underline{x}(t)=e^{A(t-t_0)}\bullet\underline{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-r)}\bullet\underline{b}\bullet v(r)\bullet dr \quad \text{και} \quad y(t)=\underline{c}^T\bullet x(t)+d\bullet v(t)$$

- **Το διάνυσμα ανάδρασης ή σταθεροποίησης $\underline{k}^T$ χρησιμοποιείται σε δύο περιπτώσεις: α) Για να σταθεροποιήσουμε ένα ασυμπτωτικά ασταθές μητρώο A και β)Για να επιταχύνουμε τη μετάβαση της εξόδου ενός συστήματος στη μόνιμη κατάσταση της**

4.22 Θέμα 4 Φεβρουάριος 2014

ΘΕΜΑ 4: (35%). Θεωρήστε ότι {A, b, c, d}, είναι μια υλοποίηση ενός συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς H(*s*) στο χώρο κατάστασης.
(*α*): (10%). Εκφράστε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος συναρτήσει των {A, b, c, d}.
(*β*): (5%). Ορίστε τους όρους «ελέγξιμο σύστημα» και «παρατηρήσιμο σύστημα».
(*γ*): (20%). Αποδείξτε την αναγκαία και ικανή συνθήκη που εξασφαλίζει την παρατηρησιμότητα ενός συστήματος.

__Απάντηση__

(α) **Πρέπει να αποδείξουμε τη συνάρτηση μεταφοράς** $H(s)=\underline{c}^T\bullet(s\bullet I-A)^{-1}\bullet\underline{b}+d$

Η αφετηρία μας είναι το ζεύγος των καταστατικών (δυναμικών) εξισώσεων:

$$\dot{\underline{x}}(t)=A\bullet\underline{x}(t)+\underline{b}\bullet v(t)$$

$$y(t)=\underline{c}^T\bullet\underline{x}(t)+d\bullet v(t)$$

Παίρνοντας το ML και στα δύο μέρη και των δύο προηγούμενων καταστατικών εξισώσεων προκύπτει ότι:

$$(s\bullet I-A)\bullet\underline{X}(s)=\underline{x}(0)+\underline{b}\bullet V(s)$$

$$Y(s)=\underline{c}^T\bullet\underline{X}(s)+d\bullet V(s)$$

Για μηδενικές αρχικές συνθήκες (για τις οποίες έχει νόημα η συνάρτηση μεταφοράς) προκύπτει ότι:

$$\frac{\underline{X}(s)}{V(s)}=(s\bullet I-A)^{-1}\bullet\underline{b}\Rightarrow\frac{\underline{X}(s)}{(s\bullet I-A)^{-1}\bullet\underline{b}}=V(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{V(s)}=c^T\bullet(s\bullet I-A)^{-1}\bullet\underline{b}+d$$

Από το θεώρημα αντιστροφής πινάκων προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς: $H(s)=\underline{c}^T\bullet\dfrac{Adj(s\bullet I-A)}{\det(s\bullet I-A)}\bullet\underline{b}+d$

(β)Ένα σύστημα είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν το μητρώο n x n

$$S=\left[\underline{b}\quad A\bullet\underline{b}\quad A^2\bullet\underline{b}\quad ....\quad A^{n-1}\bullet\underline{b}\right]$$

έχει βαθμό ίσο με n δηλ. όταν το S είναι αντιστρέψιμο.

Ένα σύστημα είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν το μητρώο n x n

$$V=\begin{bmatrix}\underline{c}^T\\ \underline{c}^T\bullet A\\ \underline{c}^T\bullet A^2\\ ....\\ \underline{c}^T\bullet A^{n-1}\end{bmatrix}$$

έχει βαθμό ίσο με n δηλ. όταν το V είναι αντιστρέψιμο.

(γ) Από τις καταστατικές εξισώσεις $\dot{\underline{x}}(t) = A \bullet \underline{x}(t) + \underline{b} \bullet v(t)$ και $y(t) = \underline{c}^T \bullet \underline{x}(t) + d \bullet v(t)$ προκύπτει ότι:

$$y(t) = \underline{c}^T \bullet \underline{x}(t) + d \bullet v(t) \Rightarrow y'(t) = \underline{c}^T \bullet \underline{x}'(t) + d \bullet v'(t) = \underline{c}^T \bullet A \bullet \underline{x}(t) + \underline{c}^T \bullet \underline{b} \bullet v(t) + d \bullet v'(t)$$

Επίσης $y''(t) = \underline{c}^T \bullet A \bullet \underline{x}'(t) + \underline{c}^T \bullet \underline{b} \bullet v'(t) + d \bullet v''(t) = \underline{c}^T \bullet A^2 \bullet \underline{x}(t) + \underline{c}^T \bullet A \bullet \underline{b} \bullet v(t) + \underline{c}^T \bullet \underline{b} \bullet v'(t) + d \bullet v''(t)$

Επαγωγικά καταλήγουμε στο ότι: $Y(t) = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \bullet A \\ \underline{c}^T \bullet A^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{c}^T \bullet A^{n-1} \end{bmatrix} \bullet \underline{x}(t) + T \bullet \underline{V}(t)$ (1)

όπου $\underline{Y}(t) \equiv \begin{bmatrix} y(t) & \dfrac{dy(t)}{dt} & \ldots\ldots & \dfrac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^T$ και $\underline{V}(t) \equiv \begin{bmatrix} v(t) & \dfrac{dv(t)}{dt} & \ldots\ldots & \dfrac{d^{n-1}v(t)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^T$ και T είναι το κάτω τριγωνικό μητρώο:

$$T = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \underline{c}^T \bullet \underline{b} & d & 0 & & 0 \\ \underline{c}^T \bullet A \bullet \underline{b} & \underline{c}^T \bullet \underline{b} & d & & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ \underline{c}^T \bullet A^{n-2} \bullet \underline{b} & \underline{c}^T \bullet A^{n-3} \bullet \underline{b} & \ldots\ldots & \underline{c}^T \bullet \underline{b} & d \end{bmatrix}$$

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι για να υπολογίσουμε το $\underline{x}(t_0)$ από τα διανύσματα εισόδου $\underline{Y}(t)$ και $\underline{V}(t)$ το μητρώο της (1) θα πρέπει να είναι αντιστρέψιμο.

4.23 Θέμα 4 Σεπτέμβριος 2014

Θεωρείστε την οικογένεια των ΓΧΑ συστημάτων με τον ακόλουθο καταστατικό πίνακα:

$$A = \alpha \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \bullet \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbf{R} - \{-\infty, \infty\}$$

Μελετήστε την ασυμπτωτική ευστάθεια των συστημάτων και εξηγείστε το ρόλο κάθε παραμέτρου του καταστατικού πίνακα σε αυτήν (εξετάστε όλες τις περιπτώσεις και δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας)

<u>Απάντηση</u>

Υπολογίζουμε τον πίνακα A ως εξής

$$A = \alpha \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \bullet \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Για να μελετήσουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια θα πρέπει να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του μητρώου A. Οι ιδιοτιμές του μητρώου A υπολογίζονται από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου A όπως φαίνεται ακολούθως:

$$\det(A - \lambda \bullet I) = \det\left(\left[\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right] - \lambda \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\left[\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\right] - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} \alpha - \lambda & -\beta \\ \beta & \alpha - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (\alpha - \lambda)^2 + \beta^2$$

Μετά θέτουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου A ίσο με μηδέν και προκύπτουν οι ιδιοτιμές του:

$$(\alpha - \lambda)^2 + \beta^2 = 0 \Rightarrow (\lambda - \alpha)^2 = -\beta^2 \Rightarrow (\lambda - \alpha)^2 = (\beta j)^2 \Rightarrow \lambda - \alpha = \pm \beta j \Rightarrow \left\langle \begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + \beta j \\ \lambda_2 &= \alpha - \beta j \end{aligned} \right.$$

Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Αν $\alpha<0$ το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές γιατί όλες οι ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος
- Αν $\alpha>0$ το σύστημα ΔΕΝ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές γιατί όλες οι ιδιοτιμές έχουν θετικό πραγματικό μέρος
- Αν $\alpha=0$ το σύστημα είναι οριακά ευσταθές

Η παράμετρος α καθορίζει την ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος. Από την άλλη μεριά η παράμετρος β καθορίζει τη συχνότητα "ταλάντωσης" του συστήματος και δεν επηρεάζει την ασυμπτωτική του ευστάθεια

Παρατήρηση

Όταν οι ιδιοτιμές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του μητρώου A είναι μιγαδικές της μορφής α±βj τότε το πραγματικό μέρος κάθε ιδιοτιμής καθορίζει την ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος, ενώ το φανταστικό μέρος κάθε ιδιοτιμής καθορίζει τη συχνότητα "ταλάντωσης" του συστήματος και δεν επηρεάζει την ασυμπτωτική του ευστάθεια.

5 Πέμπτο Κεφάλαιο – Μετασχηματισμός Z

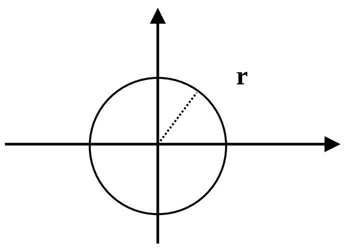
Ο μετασχηματισμός Z είναι η μεταφορά ενός σήματος **διακριτού χρόνου** από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο συχνότητας. Ορίζεται τυπικά ως εξής:

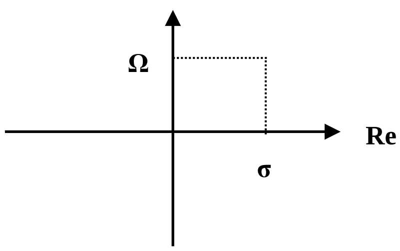
$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \bullet z^{-n}$$ **Αμφίπλευρος ΜΖ (αφορά όλες τις ακολουθίες διακριτού χρόνου)**

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \bullet z^{-n}$$ **Μονόπλευρος ΜΖ (αφορά μόνο τις αιτιατές ακολουθίες διακριτού χρόνου)**

Παρατήρηση

Το z είναι μιγαδική σταθερά αντίστοιχη με τη μιγαδική σταθερά s του μετασχηματισμού Laplace. Στο μετασχηματισμό Laplace η μιγαδική σταθερά s συμβολίζεται ως s=σ+jΩ όπου σ το πραγματικό μέρος και Ω το φανταστικό μέρος. Στο μετασχηματισμό Z η μιγαδική σταθερά z συμβολίζεται ως $z=r \bullet e^{j\omega}$ όπου r η ακτίνα ενός κύκλου και ω η γωνία που σχηματίζει ο μιγαδικός με τον άξονα X. Ουσιαστικά η μιγαδική σταθερά s αναπαριστάνεται σε καρτεσιανή μορφή ενώ η μιγαδική σταθερά z αναπαριστάνεται σε πολική μορφή. Κάθε σήμα διακριτού χρόνου έχει μετασχηματισμό Z όπως αντίστοιχα κάθε σήμα συνεχούς χρόνου έχει μετασχηματισμό Laplace.





5.1 Συμβολισμοί μετασχηματισμού Z

Ο μετασχηματισμός Z αφορά αποκλειστικά **σήματα διακριτού χρόνου ή αλλιώς ψηφιακά σήματα** και συμβολίζεται με τους εξής τρόπους:

$$x(n) \leftrightarrow X(z)$$

Z{X(n)}=X(z)

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}$$

Ένα σήμα διακριτού χρόνου συμβολίζεται ως x(n) όπου n είναι η παράμετρος του χρόνου.

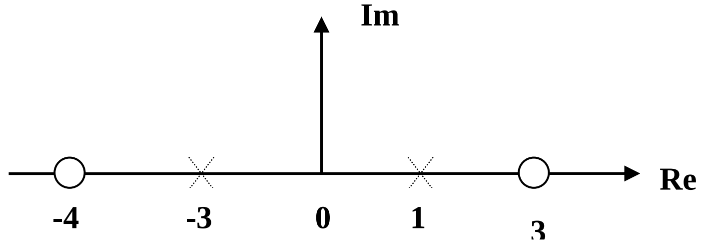
5.2 Ομοιότητες και Διαφορές Μετασχηματισμών Laplace και Z

Μετασχηματισμός Z	**Μετασχηματισμός Laplace**
Αφορά αποκλειστικά σήματα διακριτού χρόνου (ακολουθίες) και τα μεταφέρει από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των ψηφιακών συχνοτήτων	Αφορά αποκλειστικά σήματα συνεχούς χρόνου και τα μεταφέρει από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των αναλογικών συχνοτήτων
Η περιοχή σύγκλισης στο ΜΖ συμβολίζεται με |z| και είναι η περιοχή που βρίσκεται έξω από ένα κύκλο ή η περιοχή εντός ενός κύκλου	Η περιοχή σύγκλισης στο ML συμβολίζεται με Re(s) και είναι η ορθογώνια περιοχή που βρίσκεται δεξιά ή αριστερά ενός πόλου
Οι πόλοι στο ΜΖ είναι ακτίνες κύκλων και τους παίρνουμε κατά απόλυτη τιμή.	Οι πόλοι στο ML είναι σημεία στο μιγαδικό επίπεδο και τους παίρνουμε κανονικά με το πρόσημο τους.
Το κοινό χαρακτηριστικό και των δύο μετασχηματισμών είναι ότι μεταφέρουν ένα σήμα από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο συχνότητας	
Ένα άλλο κοινό χαρακτηριστικό είναι ο ΜΖ υπάρχει πάντα για σήματα διακριτού χρόνου ενώ ο ML υπάρχει πάντα για σήματα συνεχούς χρόνου	

5.3 Περιοχή Σύγκλισης μετασχηματισμού Z

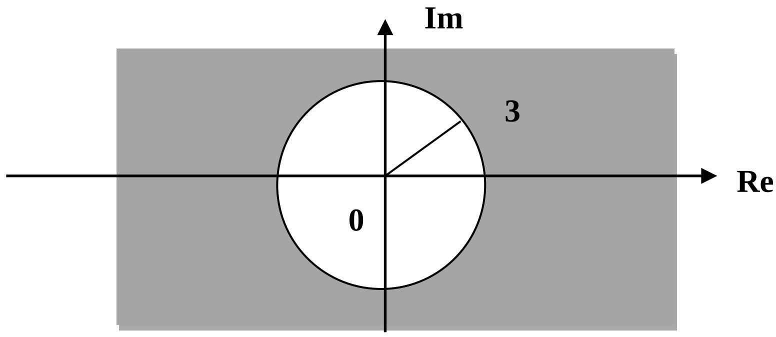
- ✓ Αν ο μετασχηματισμός Z είναι της μορφής $X(z) = \dfrac{\text{Αριθμητής}(z)}{\text{Παρονομαστής}(z)}$ τότε οι **τιμές που μηδενίζουν τον αριθμητή ονομάζονται μηδενικά, ενώ αυτές που μηδενίζουν τον παρονομαστή ονομάζονται πόλοι**. Για παράδειγμα στο μετασχηματισμό Z

$X(z) = \frac{(z-3)\bullet(z+4)}{(z+3)\bullet(z-1)}$ τα μηδενικά είναι οι τιμές 3 και -4 και οι πόλοι είναι οι τιμές -3 και 1. Γραφικά οι πόλοι και τα μηδενικά απεικονίζονται όπως φαίνεται στην επόμενη εικόνα: Ο οριζόντιος άξονας είναι ο πραγματικός άξονας και συμβολίζεται ως Re και ο κάθετος άξονας είναι ο φανταστικός άξονας και συμβολίζεται ως Im.

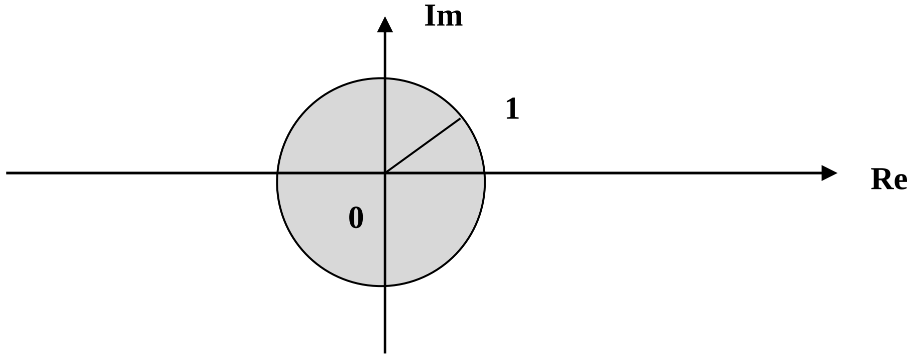


✓ Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Ζ είναι η περιοχή ΠΟΥ ΔΕΝ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΠΟΛΟΥΣ και συμβολίζεται ως |z|. (μέτρο του μιγαδικού z). Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για την περιοχή σύγκλισης:

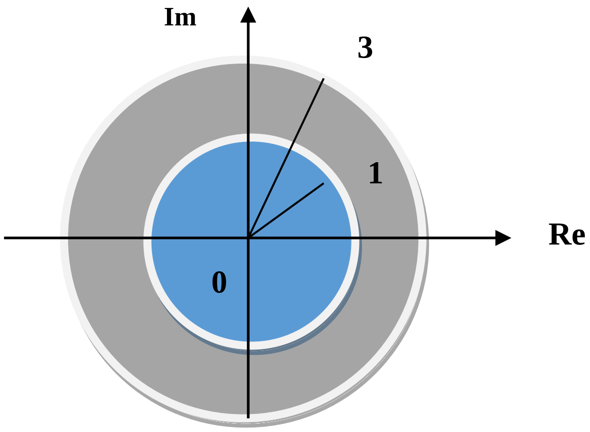
- Αν **το σήμα είναι αιτιατό,** τότε η περιοχή σύγκλισης του ΜΖ **βρίσκεται έξω (δηλαδή δεξιά) από ένα κύκλο με κέντρο το 0 και ακτίνα το μεγαλύτερο πόλο κατά απόλυτη τιμή** δηλ. $|z|>\max(|r_1|,|r_2|,\ldots,|r_n|)$. Στο προηγούμενο παράδειγμα με $X(z) = \frac{(z-3)\bullet(z+4)}{(z+3)\bullet(z-1)}$ αν **το σήμα είναι αιτιατό** τότε η περιοχή σύγκλισης βρίσκεται έξω από ένα κύκλο με κέντρο το μηδέν και ακτίνα 3. Στο ακόλουθο σχήμα η περιοχή σύγκλισης είναι η σκούρα περιοχή έξω από τον κύκλο ακτίνας 3 και συμβολίζεται ως |z|>3.



- Αν **το σήμα είναι μη αιτιατό,** τότε η περιοχή σύγκλισης του ΜΖ **βρίσκεται μέσα (δηλαδή στο εσωτερικό) ενός κύκλου με κέντρο το 0 και ακτίνα το μικρότερο πόλο κατά απόλυτη τιμή** δηλ. $|z|<\min(|r_1|,|r_2|,\ldots,|r_n|)$. Στο προηγούμενο παράδειγμα με $X(z) = \frac{(z-3)\bullet(z+4)}{(z+3)\bullet(z-1)}$ αν **το σήμα είναι μη αιτιατό** τότε η περιοχή σύγκλισης βρίσκεται εντός ενός κύκλου με κέντρο το μηδέν και ακτίνα 1. Στο ακόλουθο σχήμα η περιοχή σύγκλισης είναι η σκούρα περιοχή μέσα στον κύκλο ακτίνας 1 και συμβολίζεται ως |z|<1.



- **Αν το σήμα έχει και αιτιατό και μη αιτιατό τμήμα** τότε η περιοχή σύγκλισης του ΜΖ **είναι ανάμεσα στους πόλους δηλ.** max(|r$_1$|,|r$_2$|,…..,|r$_n$|)<|z|<min(|r$_1$|,|r$_2$|,…..,|r$_n$|) . Στο προηγούμενο με παράδειγμα $X(z)=\frac{(z-3)\bullet(z+4)}{(z+3)\bullet(z-1)}$ αν **το σήμα έχει και μη αιτιατό και αιτιατό τμήμα** τότε η περιοχή σύγκλισης βρίσκεται ανάμεσα σε 2 κύκλους με ακτίνα 1 και 3 αντίστοιχα και συμβολίζεται . Είναι συγκεκριμένα ο δακτύλιος ανάμεσα στους 2 κύκλους και συμβολίζεται ως 1<|z|<3



Παρατηρήσεις

- ***Ένα σήμα είναι αιτιατό αν x(n)=0 για n<0 δηλαδή αν ορίζεται μόνο σε θετικές χρονικές στιγμές ή στο μηδέν***. Οποιοδήποτε σήμα περιλαμβάνει με τη μορφή γινομένου τη βηματική ακολουθία u(n) είναι αιτιατό **δηλ. x(n)•u(n) είναι αιτιατό**. Αντίστοιχα στο συνεχή χρόνο ένα σήμα της μορφής . x(t)•u(t) είναι αιτιατό
- ***Ένα σήμα είναι μη αιτιατό αν x(n)=0 για n≥0 δηλαδή αν ορίζεται μόνο σε αρνητικές χρονικές στιγμές.*** Οποιοδήποτε σήμα περιλαμβάνει με τη μορφή γινομένου τη βηματική ακολουθία u(-n-1) είναι μη αιτιατό **δηλ. x(n)•u(-n-1) είναι μη αιτιατό**. Αντίστοιχα στο συνεχή χρόνο ένα σήμα της μορφής . x(t)•u(-t) είναι μη αιτιατό
- Ένα σήμα της μορφής . x(n)•u(-n) έχει και αιτιατό και μη αιτιατό τμήμα
- Ένα ΓΧΑ **σύστημα διακριτού χρόνου είναι αιτιατό αν h(n)=0** αν n<0
- Ένα **σήμα διακριτού χρόνου ονομάζεται και ακολουθία**
- **Με Ω συμβολίζουμε τις αναλογικές συχνότητες ενώ με ω συμβολίζουμε τις ψηφιακές συχνότητες**

5.4 Παραδείγματα Υπολογισμού Μετασχηματισμού Ζ Βασικών Σημάτων

Υπολογισμός ΜΖ της κρουστικής ακολουθίας $\delta(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\bullet z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)\bullet z^{-n}=1$$

Η περιοχή σύγκλισης της κρουστικής ακολουθίας δ(n) είναι |z|>0 δηλ. όλο το μιγαδικό επίπεδο διότι ο ΜΖ της δ(n) ΔΕΝ έχει πόλους.

Υπολογισμός ΜΖ της βηματικής ακολουθίας $u(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\bullet z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n)\bullet z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{z}{z-1}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι η εξής: Από τον τύπο σειράς $\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}=\frac{1}{1-a}$ ισχύει ότι $|a|<1$ άρα επειδή το a είναι $\frac{1}{z}$ θα πρέπει $\left|\frac{1}{z}\right|<1\Rightarrow|z|>1$.

Υπολογισμός ΜΖ της ακολουθίας a^n•u(n)

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\bullet z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{n}\bullet u(n)\bullet z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}\bullet z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{a}{z}}=\frac{z}{z-a},\ |z|>|a|$$

Υπολογισμός ΜΖ της ακολουθίας $(-a)^n\bullet u(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\bullet z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-a)^{n}\bullet u(n)\bullet z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-a)^{n}\bullet z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{a}{z}\right)^{n}=\frac{1}{1-\left(-\frac{a}{z}\right)}=\frac{z}{z+a},|z|>|a|$$

Υπολογισμός ΜΖ της ακολουθίας a^{-n}•u(n)

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\bullet z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{-n}\bullet u(n)\bullet z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{az}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{az}}=\frac{az}{az-1},|z|>\frac{1}{|a|}$$

Παρατηρήσεις

- Η κρουστική ακολουθία δ(n) ορίζεται ως $\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$ ενώ η κρουστική συνάρτηση ορίζεται ως: $\delta(t)=\begin{cases}\uparrow & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$
- Η βηματική ακολουθία u(n) ορίζεται ως $u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$ ενώ η βηματική συνάρτηση ορίζεται ως: $u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$
- Η μη αιτιατή βηματική ακολουθία $u(-n)$ ορίζεται ως $u(-n)=\begin{cases}0 & n\geq 0\\ 1 & n\leq -1\end{cases}$ ενώ η μη αιτιατή βηματική συνάρτηση $u(-t)$ ορίζεται ως $u(-t)=\begin{cases}0 & t>0\\ 1 & t<0\end{cases}$

- Προσέξτε τη διαφορά μεταξύ των δύο τύπων σειράς: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, |a|<1$ και $\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} \frac{1-a^N}{1-a} & a \neq 1 \\ N & a = 1 \end{cases}$

- **Στην περιοχή σύγκλισης του MZ οι πόλοι λαμβάνονται πάντα κατά απόλυτη τιμή** διότι αντιπροσωπεύουν την ακτίνα ενός κύκλο και η ακτίνα δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές. Για παράδειγμα το σήμα $(-3)^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z+3}, |z| > |3|$ ο πόλος είναι το -3 αλλά η περιοχή σύγκλισης είναι δεξιά του |-3|

5.5 Χαρακτηριστικά Μετασχηματισμού Z

Συνάρτηση Μεταφοράς H(z) ονομάζεται ο Μετασχηματισμός Z της κρουστικής απόκρισης h(n), ενώ Απόκριση Συχνότητας $H(e^{j\omega})$ ονομάζεται ο Μετασχηματισμός Fourier (DTFT) της κρουστικής απόκρισης h(n). Υπενθυμίζουμε ότι η Συνάρτηση Μεταφοράς H(s) ονομάζεται ο Μετασχηματισμός Laplace της κρουστικής απόκρισης h(t), ενώ Απόκριση Συχνότητας H(jΩ) ονομάζεται ο Μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης h(t)

Μετασχηματισμός Z	**Μετασχηματισμός Laplace**
Ένα ΓΧΑ Σύστημα Διακριτού Χρόνου είναι ΦΕΦΕ (BIBO) Ευσταθές **αν και μόνο αν η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς H(z) περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο** π.χ. αν $\|z\| > \frac{1}{2}$ ή $\|z\| < 2$ τότε το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές	Ένα ΓΧΑ Σύστημα Συνεχούς Χρόνου είναι ΦΕΦΕ (BIBO) ευσταθές **αν και μόνο αν η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς H(s) περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα** π.χ. αν $\mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{2}$ ή $\mathrm{Re}(s) < 2$ τότε το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές**.**
Ένα ΓΧΑ Σύστημα **Διακριτού Χρόνου** είναι **ταυτόχρονα Αιτιατό και ΦΕΦΕ (BIBO) Ευσταθές αν και μόνο αν ΟΛΟΙ οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται ΕΝΤΟΣ του μοναδιαίου κύκλου** (δηλ. του κύκλου με κέντρο το 0 και ακτίνα 1) π.χ. το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = \frac{(z-3)\bullet(z+4)}{\left(z+\frac{1}{3}\right)\bullet\left(z-\frac{1}{2}\right)}$ είναι ΦΕΦΕ ευσταθές ενώ το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = \frac{(z-3)\bullet(z+4)}{(z+3)\bullet\left(z-\frac{1}{2}\right)}$ ΔΕΝ είναι ΦΕΦΕ ευσταθές	Ένα **ΓΧΑ Σύστημα Συνεχούς Χρόνου είναι ταυτόχρονα Αιτιατό και ΦΕΦΕ (BIBO) Ευσταθές αν και μόνο ΟΛΟΙ οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς H(s) έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος π.χ.** το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \frac{(s-3)\bullet(s+4)}{(s+3)\bullet\left(s+\frac{1}{2}\right)}$ είναι ΦΕΦΕ ευσταθές ενώ το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \frac{(s-3)\bullet(s+4)}{(s+3)\bullet\left(s-\frac{1}{2}\right)}$ ΔΕΝ είναι ΦΕΦΕ ευσταθές
Ο μετασχηματισμός Z υπάρχει για κάθε σήμα διακριτού χρόνου (ακολουθία) και το μεταφέρει στο πεδίο συχνότητας, ενώ ο μετασχηματισμός Fourier για ένα σήμα διακριτού χρόνου υπάρχει μόνο όταν η περιοχή σύγκλισης του MZ περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Π.χ. το σύστημα με $H(z) = \frac{(z-3)\bullet(z+4)}{\left(z+\frac{1}{3}\right)\bullet\left(z-\frac{1}{2}\right)}, \|z\| > \frac{1}{2}$ έχει μετασχηματισμό	Ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει για κάθε σήμα συνεχούς χρόνου και το μεταφέρει στο πεδίο συχνότητας, ενώ ο μετασχηματισμός Fourier για ένα σήμα συνεχούς χρόνου υπάρχει μόνο όταν η περιοχή σύγκλισης του ML περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα Π.χ. το σύστημα με $H(s) = \frac{(s-3)\bullet(s+4)}{\left(s+\frac{1}{3}\right)\bullet(s-2)}, \mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{3}$ έχει μετασχημα-

Fourier ο οποίος προκύπτει θέτοντας όπου z το $e^{j\omega}$ άρα $H(e^{j\omega}) = \frac{(e^{j\omega}-3)\bullet(e^{j\omega}+4)}{\left(e^{j\omega}+\frac{1}{3}\right)\bullet\left(e^{j\omega}-\frac{1}{2}\right)}$. Ο ΜFΔΧ ονομάζεται DTFT,	τισμό Fourier ο οποίος προκύπτει θέτοντας όπου s το jΩ άρα $H(j\Omega) = \frac{(j\Omega-3)\bullet(j\Omega+4)}{\left(j\Omega+\frac{1}{3}\right)\bullet\left(j\Omega-\frac{1}{2}\right)}$ Ο ΜFΣΧ ονομάζεται CTFT

5.6 Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT)

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier ή μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) από τον τύπο:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \bullet e^{-j\omega n}$$

Εναλλακτικά ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου μπορεί να προκύψει από το ΜΖ θέτοντας όπου z το $e^{j\omega}$.

Βασική Προϋπόθεση
Η προϋπόθεση για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου για ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι η περιοχή σύγκλισης του ΜΖ να περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο, δηλ. τον κύκλο με κέντρο το 0 και ακτίνα 1.

5.6.1 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$	Το σήμα $x(n)$ έχει ως DTFT τον $X(e^{j\omega})$
$x(n-n_0) \leftrightarrow e^{-j\omega n_0} \bullet X(e^{j\omega})$	Δεξιά Χρονική Ολίσθηση
$x(n+n_0) \leftrightarrow e^{j\omega n_0} \bullet X(e^{j\omega})$	Αριστερή Χρονική Ολίσθηση
$e^{j\omega_0 n} \bullet x(n) \leftrightarrow X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$	Δεξιά Συχνοτική Ολίσθηση
$e^{-j\omega_0 n} \bullet x(n) \leftrightarrow X\left(e^{j(\omega+\omega_0)}\right)$	Αριστερή Συχνοτική Ολίσθηση
$x(n) * y(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \bullet Y(e^{j\omega})$	Συνέλιξη στο Χρόνο
$x(-n) \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$	Ανάκλαση
$x^*(n) \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$	Συζυγία στο χρόνο
$x^*(-n) \leftrightarrow X^*(e^{j\omega})$	Συζυγία στη συχνότητα

5.7 Αντιαιτιατά Σήματα

Δύο σήματα ονομάζονται Αντιαιτιατά όταν το ένα είναι το αντίστοιχο μη αιτιατό σήμα του άλλου και έχουν ως χαρακτηριστικό ότι έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό ΜΖ και αντίθετες περιοχές σύγκλισης. Για να κατασκευάσουμε το αντιαιτιατό σήμα θέτουμε στο σήμα αντίθετο πρόσημο και στη θέση της u(n) την u(-n-1) διότι τα αντιαιτιατά σήματα ορίζονται μόνο για αρνητικές χρονικές στιγμές. Παραδείγματα αντιαιτιατών σημάτων δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Αιτιατό Σήμα $\leftrightarrow$ΜΖ	**Π.Σ.**	**Αντιαιτιατό Σήμα $\leftrightarrow$ΜΖ**	**Π.Σ.**
$a^n \bullet u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$	$-a^n \bullet u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$a^{n-1} \bullet u(n-1) \leftrightarrow \frac{1}{z-a}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$	$-a^{n-1} \bullet u(-(n-1)-1) = -a^{n-1} \bullet u(-n) \leftrightarrow \frac{1}{z-a}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$(-a)^{n-1} \bullet u(n-1) \leftrightarrow \frac{1}{z+a}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$	$-(-a)^{n-1} \bullet u(-n) \leftrightarrow \frac{1}{z+a}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$n \bullet a^n \bullet u(n) \leftrightarrow \frac{a \bullet z}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$	$-n \bullet a^n \bullet u(-n-1) \leftrightarrow \frac{a \bullet z}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$n \bullet (-a)^n \bullet u(n) \leftrightarrow \frac{-a \bullet z}{(z+a)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$	$-n \bullet (-a)^n \bullet u(-n-1) \leftrightarrow \frac{-a \bullet z}{(z+a)^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$

Υπενθύμιση

Αιτιατό Σήμα $\leftrightarrow$ML	Π.Σ.
$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s+a}$	Re(s)>-a
$e^{at}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s-a}$	Re(s)>a
Μη Αιτιατό Σήμα $\leftrightarrow$ML	**Π.Σ.**
$-e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s+a}$	Re(s)<-a
$e^{at}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s-a}$	Re(s)<a

5.8 Πίνακας Γνωστών Μετασχηματισμών Z

Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Z

Σήμα $x(n)$	ΜΖ $X(z)$	ΠΣ
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$nu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\| > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
$na^n u(n)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\| < \|a\|$
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\| < \|a\|$
$(\cos\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^2 - z\cos\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}$	$\|z\| > 1$
$(\sin\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z\sin\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}$	$\|z\| > 1$
$(a^n\cos\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^2 - az\cos\omega_0}{z^2 - 2az\cos\omega_0 + a^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$(a^n\sin\omega_0 n)u(n)$	$\frac{az\sin\omega_0}{z^2 - 2az\cos\omega_0 + a^2}$	$\|z\| > \|a\|$

5.9 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Ζ

5.9.1 Γραμμικότητα-Αρχή Υπέρθεσης

		Π.Σ.
$x_1(n) \leftrightarrow X_1(z)$	Το σήμα $x_1(n)$ έχει ως ΜΖ τον $X_1(z)$	$r_1 < \lvert z \rvert < r_1'$
$x_2(n) \leftrightarrow X_2(z)$	Το σήμα $x_2(n)$ έχει ως ΜΖ τον $X_2(z)$	$r_2 < \lvert z \rvert < r_2'$
$ax_1(n) + bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z)$	Ο γραμμικός συνδυασμός $ax_1(n) + bx_2(n)$ έχει ως ΜΖ τον $aX_1(z) + bX_2(z)$ για οποιεσδήποτε σταθερές a και b	Τομή Π.Σ.

Παρατήρηση: Η Π.Σ. είναι η τομή των περιοχών σύγκλισης των $X_1(z)$ και $X_2(z)$ Μάλιστα αυτή ΕΙΝΑΙ Η ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ. Για παράδειγμα $X_1(z) = \frac{z-1}{z-2}, |z| > 2$ και $X_2(z) = -\frac{1}{z-2}, |z| > 2$. Αν πάρουμε το άθροισμα των 2 ΜΖ προκύπτει ότι ο ΜΖ είναι ο $X(z) = 1, |z| > 0$ και έχει ως περιοχή σύγκλισης όλο το μιγαδικό επίπεδο.

5.9.1.1 Παράδειγμα Γραμμικότητας

Να βρεθεί ο ΜΖ του σήματος $x(n) = 2\delta(n) + (-3)^n \bullet u(n) + 2^n \bullet u(n)$

Απάντηση

		Π.Σ.
$\delta(n) \leftrightarrow 1$	ΜΖ της δ(n)	$\lvert z \rvert > 0$
$2\delta(n) \leftrightarrow 2$	Ιδιότητα Γραμμικότητας	$\lvert z \rvert > 0$
$(-3)^n \bullet u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z+3}$	ΜΖ της $(-3)^n \bullet u(n)$	$\lvert z \rvert > \lvert -3 \rvert = 3$
$2^n \bullet u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-2}$	ΜΖ της 2^n u(n)	$\lvert z \rvert > 2$
$2\delta(n) + (-3)^n \bullet u(n) + 2^n \bullet u(n) \leftrightarrow 2 + \frac{z}{z+3} + \frac{z}{z-2}$	Ιδιότητα Γραμμικότητας	$\lvert z \rvert > 3$

5.9.2 Δεξιά Χρονική Ολίσθηση (Καθυστέρηση)

		Π.Σ.
$x(n) \leftrightarrow X(z)$	Το σήμα $x(n)$ έχει ως ΜΖ τον $X(n)$	$\lvert z \rvert > \max(r_1, r_2, \ldots r_n)$
$x(n-k) \leftrightarrow z^{-k} \bullet X(z) + z^{-k+1} \bullet x(-1) + z^{-k+2} \bullet x(-2) + \ldots + x(-k)$	Ιδιότητα Δεξιάς Ολίσθησης	$\lvert z \rvert > \max(r_1, r_2, \ldots r_n)$

Βασική Παρατήρηση: Οι αρχικές τιμές $x(-1)$, $x(-2)$,… $x(-k)$ εφόσον υπάρχουν θα δίνονται αλλιώς είναι μηδέν. Όταν δεν δίνονται αρχικές τιμές τότε η ιδιότητα δεξιάς χρονικής ολίσθησης του μονόπλευρου ΜΖ ταυτίζεται με την ιδιότητα δεξιάς χρονικής ολίσθησης του αμφίπλευρου ΜΖ.

5.9.2.1 1ο Παράδειγμα Δεξιάς Χρονικής Ολίσθησης

Να βρεθεί ο ΜΖ του σήματος x(n-2) όπου $x(n)=3^n \bullet u(n)$ με x(-1)=1 και x(-2)=3

Απάντηση

	Π.Σ.
$x(n-2) \leftrightarrow z^{-2} \bullet \frac{z}{z-3} + z^{-1} \bullet 1 + 3$	$\lvert z \rvert > 3$

5.9.2.2 2ο Παράδειγμα Δεξιάς Χρονικής Ολίσθησης

Να βρεθεί ο ΜΖ του σήματος $x(n)=3^{n-1} \bullet u(n-1)$

Απάντηση

		Π.Σ.

$3^n \bullet u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-3}$	ΜΖ της $3^n \bullet u(n)$	$\lvert z\rvert > 3$
$3^{n-1} \bullet u(n-1) \leftrightarrow z^{-1} \bullet \frac{z}{z-3} = \frac{1}{z-3}$	ΜΖ της $3^{n-1} \bullet u(n-1)$	$\lvert z\rvert > 3$

5.9.3 Αριστερή Χρονική Ολίσθηση (Προήγηση)

		Π.Σ.
$x(n) \leftrightarrow X(z)$	Το σήμα $x(n)$ έχει ως ΜΖ τον $X(z)$	$\lvert z\rvert > \max(r_1, r_2, ... r_n)$
$x(n+k) \leftrightarrow z^k \bullet X(z) - z^k \bullet x(0) - z^{k-1} \bullet x(1) - ... - z \bullet x(k-1)$	Ιδιότητα Αριστερής Ολίσθησης	$\lvert z\rvert > \max(r_1, r_2, ... r_n)$

Βασική Παρατήρηση: Οι αρχικές τιμές $x(0)$, $x(1)$, … $x(k-1)$ εφόσον υπάρχουν θα δίνονται αλλιώς είναι μηδέν. Όταν δεν δίνονται αρχικές συνθήκες τότε η ιδιότητα αριστερής χρονικής ολίσθησης του μονόπλευρου ΜΖ ταυτίζεται με την ιδιότητα αριστερής χρονικής ολίσθησης του αμφίπλευρου ΜΖ

5.9.3.1 Παράδειγμα Αριστερής Χρονικής Ολίσθησης

Να βρεθεί ο ΜΖ του σήματος $x(n) = 4^{n+4} \bullet u(n+4)$

$4^n \bullet u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-4}$	ΜΖ της 4^n u(n)	$\lvert z\rvert > 4$
$4^{n+4} \bullet u(n+4) \leftrightarrow z^4 \bullet \frac{z}{z-4} = \frac{z^5}{z-4}$	ΜΖ της 4^{n+4} u(n+4)	$\lvert z\rvert > 4$

ΠΡΟΣΟΧΗ: ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ Ή ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΤΟ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΌΝΟ

5.9.4 Παραγώγιση στη μιγαδική συχνότητα

		Π.Σ.
$x(n) \leftrightarrow X(z)$	Το σήμα $x(n)$ έχει ως ΜΖ τον $X(n)$	$r_1 < \lvert z\rvert < r_2$
$n \bullet x(n) \leftrightarrow -z \bullet \frac{dX(z)}{dz}$	Ιδιότητα Παραγώγισης στη συχνότητα	$r_1 < \lvert z\rvert < r_2$

Παρατηρήσεις

- **Στην Ιδιότητα Παραγώγισης στη συχνότητα η Π.Σ. δεν αλλάζει.**
- **ΠΡΟΣΟΧΗ: ΣΤΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ Ζ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΥΧΝΟΤΙΚΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗ**

5.9.4.1 1ο Παράδειγμα Παραγώγισης στη μιγαδική συχνότητα

Να βρεθεί ο ΜΖ του σήματος $n \bullet a^n \bullet u(n)$

Απάντηση

		Π.Σ.
$a^n \bullet u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}$	Το σήμα $a^n \bullet u(n)$έχει ως ΜΖ τον $\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > a$
$n \bullet a^n \bullet u(n) \leftrightarrow -z \bullet \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right) = \frac{az}{(z-a)^2}$	Ιδιότητα Παραγώγισης στο πεδίο z	$\lvert z\rvert > a$

5.9.4.2 2ο Παράδειγμα Παραγώγισης στη μιγαδική συχνότητα

Να βρεθεί ο ΜΖ του σήματος $n \bullet u(n)$

Απάντηση

		Π.Σ.
$u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$	Το σήμα $u(n)$ έχει ως ΜΖ τον $\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$

$n \bullet u(n) \leftrightarrow -z \bullet \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2}$	Ιδιότητα Παραγώγισης στο πεδίο z	$\lvert z \rvert > 1$

5.9.5 Ιδιότητα Συνέλιξης στο Χρόνο

		Π.Σ.
$x_1(n) \leftrightarrow X_1(z)$	Το σήμα $x_1(n)$ έχει ως ΜΖ τον $X_1(z)$	$r_1 < \lvert z \rvert < r_1'$
$x_2(n) \leftrightarrow X_2(z)$	Το σήμα $x_2(n)$ έχει ως ΜΖ τον $X_2(z)$	$r_2 < \lvert z \rvert < r_2'$
$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(z) \bullet X_2(z)$	Ιδιότητα Συνέλιξης στο Χρόνο	$\min(r_1, r_1') < \lvert z \rvert < \max(r_2, r_2')$

Παρατήρηση: Η περιοχή σύγκλισης είναι όπως και στη γραμμικότητα δηλ. η τομή των περιοχών σύγκλισης.

5.9.5.1 Παράδειγμα Συνέλιξης στο Χρόνο

Να βρεθεί ο ΜΖ του σήματος $2^n \bullet u(n) * 3^{n-1} \bullet u(n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-2} \bullet \frac{1}{z-3}$

__Απάντηση__

		Π.Σ.
$2^n \bullet u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-2}$	Το σήμα $2^n \bullet u(n)$ έχει ως ΜΖ τον $\frac{z}{z-2}$	$\lvert z \rvert > 2$
$3^{n-1} \bullet u(n-1)$	Το σήμα $3^{n-1} \bullet u(n-1)$ έχει ως ΜΖ τον $\frac{1}{z-3}$	$\lvert z \rvert > 3$
$2^n \bullet u(n) * 3^{n-1} \bullet u(n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-2} \bullet \frac{1}{z-3}$	Ιδιότητα Συνέλιξης στο Χρόνο	$\lvert z \rvert > 3$

5.9.6 Θεώρημα Αρχικής Τιμής

		Παρατηρήσεις
$x(n) \leftrightarrow X(z)$	Το σήμα $x(n)$ έχει ως ΜΖ τον $X(n)$	$r_1 < \lvert z \rvert < r_2$
$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$	Θεώρημα Αρχικής Τιμής στο ΜΖ	
$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s \bullet X(s)$	Θεώρημα Αρχικής Τιμής στο ML	Υπενθύμιση

5.9.7 Θεώρημα Τελικής Τιμής

		Παρατηρήσεις
$x(n) \leftrightarrow X(z)$	Το σήμα $x(n)$ έχει ως ΜΖ τον $X(n)$	$r_1 < \lvert z \rvert < r_2$
$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1) \bullet X(z)$	Θεώρημα Τελικής Τιμής στο ΜΖ	Το Θεώρημα Τελικής τιμής εφαρμόζεται με την προϋπόθεση ότι το (z-1)•X(z) περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο
$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s \bullet X(s)$	Θεώρημα Τελικής Τιμής στο ML	Υπενθύμιση

5.9.8 Γενικευμένο Θεώρημα Αρχικής Τιμής

Το Γενικευμένο Θεώρημα Αρχικής Τιμής υπολογίζει την τιμή της ακολουθίας x(n) στο σημείο n=1 και είναι:

$$x(1)=\lim_{z\to\infty} z \bullet [X(z)-x(0)]$$

Υπενθύμιση

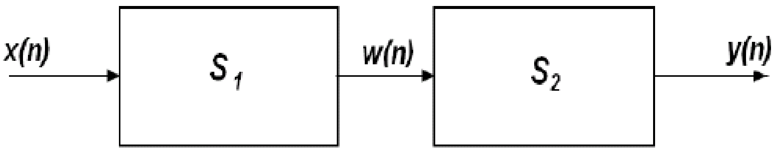
Το «αντίστοιχο» θεώρημα στο μετασχηματισμό Laplace είναι ο Υπολογισμός της παραγώγου $y'(0^+)$ στο θεώρημα Αρχικής Τιμής. Για να υπολογίσουμε το $y'(0^+)$ πρέπει να εφαρμόσουμε την παράγωγο στο θεώρημα Αρχικής Τιμής σύμφωνα με το οποίο:

$$y'(0^+) = \lim_{s\to\infty} s \bullet [s \bullet Y(s) - y(0^-)]$$

5.10 Λύσεις Ασκήσεων 5ου Σετ

5.10.1 Άσκηση 1.2

1.2 Θεωρείστε τη σύνδεση σε σειρά (cascade) δύο συστημάτων S_1 και S_2 όπως φαίνονται στο σχήμα



α) Αν και τα δύο συστήματα S_1 και S_2 είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, αιτιατά και ευσταθή, θα αποτελεί και η σύνδεση σε σειρά ένα σύστημα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο, αιτιατό και ευσταθές;

β) Αν και τα δύο συστήματα S_1 και S_2 είναι μη γραμμικά, θα αποτελεί και η σύνδεση σε σειρά ένα σύστημα μη γραμμικό;

γ) Αν και τα δύο συστήματα είναι χρονικά αμετάβλητα, θα αποτελεί η σύνδεση σε σειρά ένα σύστημα επίσης χρονικά αμετάβλητο;

Λύση

1)

α) **γραμμικότητα**

Επειδή S_1 γραμμικό αυτό σημαίνει ότι με είσοδο $\alpha \cdot x_1(n) + \beta \cdot x_2(n)$ η έξοδος του θα είναι $\alpha \cdot w_1(n) + \beta \cdot w_2(n)$. Μετά επειδή και το S2 είναι γραμμικό με είσοδο το $\alpha \cdot w_1(n) + \beta \cdot w_2(n)$ η έξοδος του θα είναι $\alpha \cdot y_1(n) + \beta \cdot y_2(n)$. Άρα στο συνολικό σύστημα με είσοδο $\alpha \cdot x_1(n) + \beta \cdot x_2(n)$ η έξοδος θα είναι $\alpha \cdot y_1(n) + \beta \cdot y_2(n)$. Συνεπώς το συνολικό σύστημα είναι γραμμικό.

β) **αιτιατότητα**

Επειδή S_1 αιτιατό αυτή σημαίνει ότι η έξοδος w(n) δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου x(n). Ομοίως επειδή S_2 αιτιατό η έξοδος Y(n) δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου w(n). Άρα η έξοδος y(n) δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου x(n). Συνεπώς το συνολικό σύστημα είναι αιτιατό.

γ) **χρονική αμεταβλητότητα**

Επειδή S_1 χρονικά αμετάβλητο αυτό σημαίνει ότι αν εφαρμόσουμε χρονική ολίσθηση n_0 στο σήμα εισόδου δηλαδή $x(n-n_0)$ η ίδια χρονική ολίσθηση μεταφέρεται και στην έξοδο, άρα το σήμα εξόδου είναι $w(n-n_0)$. Ομοίως επειδή S_2 χρονικά αμετάβλητο αυτό σημαίνει ότι με είσοδο $w(n-n_0)$ η έξοδος είναι $y(n-n_0)$. Άρα στο συνολικό σύστημα ισχύει ότι με είσοδο $x(n-n_0)$ η έξοδος θα είναι $y(n-n_0)$. Συνεπώς το συνολικό σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

δ) **BIBO ευστάθεια**

Επειδή S_1 BIBO ευσταθές αυτό σημαίνει ότι με φραγμένο σήμα εισόδου x(n) και η έξοδος w(n) είναι επίσης φραγμένο σήμα. Ομοίως επειδή S_2 BIBO ευσταθές αυτό σημαίνει ότι με φραγμένο σήμα εισόδου w(n) και η έξοδος y(n) είναι επίσης φραγμένο σήμα. Άρα στο συνολικό σύστημα ισχύει ότι με φραγμένο σήμα εισόδου x(n) θα έχουμε και φραγμένο σήμα εξόδου y(n). Συνεπώς το συνολικό σύστημα θα είναι BIBO ευσταθές.

Άρα η γραμμικότητα, η αιτιατότητα, η χρονική αμεταβλητότητα και η BIBO ευστάθεια διατηρούνται στη συνδεσμολογία σειράς.

2) Αν τα S1 και S2 είναι μη γραμμικά τότε δεν είναι απαραίτητο και η σύνδεση τους σε σειρά να είναι μη γραμμικό σύστημα. Για παράδειγμα:

x(n) ⟶ $\boxed{S_1}$ ⟶ $e^{x(n)} = w(n)$

w(n) ⟶ $\boxed{S_2}$ ⟶ $\ln(w(n)) = \ln(e^{x(n)}) = x(n) = y(n)$.

Άρα ακόμα και αν τα S1 και S2 είναι μη γραμμικά η σύνδεσή τους σε σειρά είναι ταυτοτικό σύστημα (διότι η έξοδος ταυτίζεται με την είσοδο) οπότε ως ταυτοτικό σύστημα είναι και γραμμικό.

3) Αν τα S_1 και S2 είναι χρονικά μεταβαλλόμενα τότε δεν είναι απαραίτητο η σύνδεσή τους σε σειρά να είναι χρονικά μεταβαλλόμενο. Για παράδειγμα:

$x(n) \longrightarrow \boxed{S_1} \longrightarrow w(n) = x(n) \cdot e^{jnw_0}$ (διαμορφωτής)

$w(n) \longrightarrow \boxed{S_2} \longrightarrow y(n) = w(n) \cdot e^{-jnw_0} \Rightarrow y(n) = x(n)e^{jnw_0} \cdot e^{-jnw_0} = x(n)$

(αποδιαμορφωτής)

Το συνολικό σύστημα ως ταυτοτικό είναι χρονικά αμετάβλητο. Άρα ακόμα και αν τα S_1 και S_2 είναι χρονικά μεταβαλλόμενα η σύνδεση τους σε σειρά είναι χρονικά αμετάβλητο σύστημα.

5.10.2 Άσκηση 1.3

1.3 Να εξετάσετε ως προς την ευστάθεια τα παρακάτω συστήματα, τα οποία περιγράφονται είτε μέσω της σχέσης εισόδου-εξόδου, είτε μέσω της κρουστικής τους απόκρισης.

α) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

β) $y(n) = \log(1 + |x(n)|)$

γ) $h(n) = \dfrac{1}{1 + n^2 + \log(n^4 + 1) + |\sin(n)|}$

δ) $h(n) = 0.5^n u(n) + 2^n u(-n)$

<u>Λύση</u>

α) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \sum_{k=0}^{n} u(k) = 1 + 1 + \ldots + 1 = n + 1$

Παρατηρούμε ότι με είσοδο τη βηματική ακολουθία, η οποία είναι φραγμένη ακολουθία, η έξοδος είναι y(n)=n+1 που δεν είναι φραγμένη ακολουθία, διότι αν το n→∞ τότε και η y(n)→ ∞ άρα το σύστημα δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

β) $y(n) = \log(1 + |x(n)|)$

Λόγω της μαθηματικής ανισότητας: $\log(1 + x) \leq x$ προκύπτει ότι: $y(n) = \log(1 + |x(n)|) \leq |x(n)|$

Αν υποθέσουμε ότι το σήμα εισόδου x(n) είναι φραγμένη ακολουθία, τότε και το σήμα εξόδου y(n) είναι φραγμένο (αφού φράσσεται από φραγμένη ακολουθία). Άρα το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

γ) $h(n) = \dfrac{1}{1 + n^2 + \log(n^4 + 1) + |\sin(n)|}$

Είναι $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \dfrac{1}{1 + n^2 + \log(n^4 + 1) + |\sin(n)|} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{1 + n^2} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{1 + n^2} - 1 \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{1 + n^2} < \infty$

Άρα το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές διότι $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

δ) $h(n) = 0.5^n u(n) + 2^n u(-n)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |0.5^n u(n) + 2^n u(-n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |0.5^n u(n)| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |2^n u(-n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=-\infty}^{0} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} =$$

$$= 2 \bullet \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 4 < \infty$$

Άρα το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές διότι $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

Παρατήρηση

Όταν αλλάζουμε τα όρια ολοκληρώματος γράφουμε ένα πρόσημο μείον έξω από το ολοκλήρωμα, ενώ όταν αλλάζουμε τα όρια αθροίσματος αλλάζουμε το πρόσημο στη μεταβλητή.

Γενική Παρατήρηση

Όταν ένα σύστημα περιγράφεται από σχέση εσόδου-εξόδου, όπως τα δύο πρώτα συστήματα, τότε ο έλεγχος για ΦΕΦΕ ευστάθεια γίνεται με τη λογική ότι για φραγμένο σήμα εισόδου θα πρέπει να είναι φραγμένο και το σήμα εξόδου, ενώ αν το σύστημα περιγράφεται από την κρουστική του απόκριση, όπως το 3ο και 4ο σύστημα, τότε ο έλεγχος για ΦΕΦΕ ευστάθεια γίνεται από τον τύπο: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$

5.10.3 Άσκηση 1.4

1.4 Αν η απόκριση ενός γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος στη μοναδιαία βηματική ακολουθία είναι

$$s(n)=n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

να βρεθεί η κρουστική απόκριση h(n).

<u>Λύση</u>

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΑΠΟ ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ (h(n) από s(n))

$$u(n) \longrightarrow \boxed{\text{σύστημα}} \longrightarrow s(n)$$

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{\text{σύστημα}} \longrightarrow h(n)$$

- ✓ **Όταν η είσοδος σε ένα σύστημα είναι η βηματική ακολουθία u(n) τότε η έξοδος είναι η βηματική απόκριση δηλ. u(n)→s(n)**
- ✓ **Όταν η είσοδος σε ένα σύστημα είναι η κρουστική ακολουθία δ(n), τότε η έξοδος είναι η κρουστική απόκριση δηλ. δ(n)→h(n)**
- ✓ **Επειδή: δ(n) = u(n) – u(n-1) προκύπτει αντίστοιχα ότι h(n) = s(n) – s(n-1)**
- ✓ $h(n)=s(n)-s(n-1)\Rightarrow h(n)=n\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^n\bullet u(n)-(n-1)\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\bullet u(n-1)\Rightarrow$

$$h(n)=n\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^n\bullet u(n)-(n-1)\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^n\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\bullet u(n-1)\Rightarrow h(n)=n\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^n\bullet u(n-1)-(n-1)\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^n\bullet 2\bullet u(n-1)\Rightarrow$$

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\bullet u(n-1)\cdot(n-2\bullet(n-1))=\left(\frac{1}{2}\right)^n\bullet u(n-1)\bullet(-n+2)$$

Παρατήρηση

Ο όρος $n\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^n\bullet u(n)$ είναι ίσος με τον όρο $n\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^n\bullet u(n-1)$ διότι ναι μεν λείπει το σημείο n=0, αλλά στο σημείο αυτό μηδενίζεται ο όρος $n\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^n\bullet u(n)$ οπότε δεν έχει καμία διαφορά.

5.10.4 Άσκηση 1.5

1.5 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z και όπου υπάρχει, ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου, καθεμιάς από τις παρακάτω ακολουθίες και να δοθεί το διάγραμμα πόλων-μηδενικών στο z-επίπεδο

α) $x(n) = \delta(n-1)$

β) $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$, (δεξιάς επέκτασης)

γ) $x(n) = -(\frac{1}{2})^n u(-n-1)$, (αριστερής επέκτασης)

δ) $x(n) = \left[(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{4})^n\right] u(n)$

<u>Λύση</u>

α)Εφαρμόζουμε τον ορισμό του ΜΖ και προκύπτει: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1) \bullet z^{-n} = z^{-1} = \frac{1}{z}$. Εναλλακτικά μπορούμε να εφαρμόσουμε ιδιότητα γραμμικότητας δηλαδή:

$\delta(n) \leftrightarrow 1$	$\lvert z \rvert > \infty$
$\delta(n-1) \leftrightarrow z^{-1} \bullet 1 = \frac{1}{z}$	Η περιοχή σύγκλισης είναι $\lvert z \rvert > 0$ επειδή μπορούμε να θεωρήσουμε σήμα ως αιτιατό διότι είναι μηδέν σε αρνητικές χρονικές στιγμές

Επειδή η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο, υπάρχει ο DTFT της ακολουθίας x(n) και είναι ο ακόλουθος:

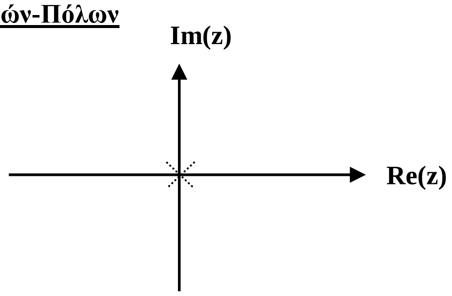
<u>Α τρόπος υπολογισμού DTFT (σύμφωνα με τον ορισμό του)</u>

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \bullet e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1) \bullet e^{-j\omega n} = e^{-j\omega}$$

<u>Β τρόπος υπολογισμού DTFT (με αντικατάσταση)</u>

Θέτω όπου z το $e^{j\omega}$ και προκύπτει ο DTFT: $X(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{e^{j\omega}}\right)^{-1} = \frac{1}{e^{j\omega}} = e^{-j\omega}$

<u>Διάγραμμα Μηδενικών-Πόλων</u>



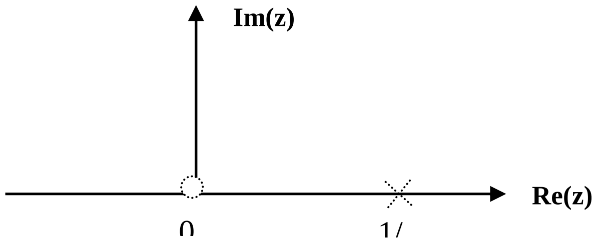
β) Η ακολουθία x(n) είναι αιτιατή ακολουθία γιατί x(n)=0 για n<0.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \bullet u(n) \bullet z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{2z}{2z-1} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}, \lvert z \rvert > \frac{1}{2}$$

Ο πόλος είναι το $z = \frac{1}{2}$ άρα Π.Σ.: $\lvert z \rvert > \frac{1}{2}$ και το μηδενικό είναι το z=0

Επειδή το σήμα είναι αιτιατό, η περιοχή σύγκλισης είναι δεξιά του μεγαλύτερου πόλου. Επειδή η Π.Σ. περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο ή αλλιώς ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην Π.Σ., τότε υπάρχει και ο διακριτός MF της ακολουθίας x(n)

<u>Διάγραμμα Μηδενικών-Πόλων</u>



<u>Α τρόπος υπολογισμού DTFT (σύμφωνα με τον ορισμό του)</u>

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\bullet e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\bullet u(n)\bullet e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2e^{j\omega}}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2e^{j\omega}}}=\frac{1}{1-\frac{e^{-j\omega}}{2}}$$

<u>Β τρόπος υπολογισμού DTFT (με αντικατάσταση)</u>

Θέτουμε στο ΜΖ που έχουμε βρει δηλ. στο $X(z)=\frac{2z}{2z-1}$ όπου z το $z=e^{j\omega}$ και προκύπτει ο DTFT $X(e^{j\omega})=\frac{2e^{j\omega}}{2e^{j\omega}-1}$

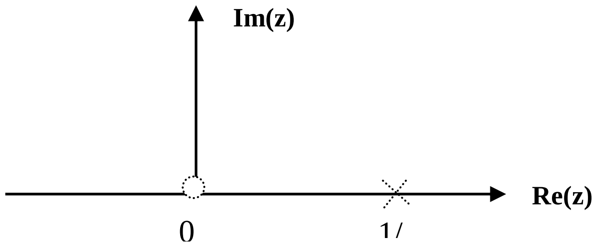
Παρατήρηση: Η περιοχή σύγκλισης είναι $|z|>\frac{1}{2}$ για δύο λόγους; Α)διότι το σήμα είναι αιτιατό και η περιοχή σύγκλισης είναι δεξιά του πόλου και β)διότι από τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}=\frac{1}{1-a},|a|<1$ πρέπει $\left|\frac{1}{2z}\right|<1\Rightarrow|z|>\frac{1}{2}$

γ) $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\bullet u(-n-1)\bullet z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\bullet z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\bullet z^{n}$

$$=1-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\bullet z\right]^{n}=1-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2z}\right)^{-1}\right]^{n}=1-\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2z}\right)^{-1}}=1-\frac{1}{1-2z}=\frac{1-2z-1}{1-2z}=\frac{-2z}{1-2z}=\frac{2z}{2z-1}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}},|z|<\frac{1}{2}$$

Επειδή η Π.Σ. δεν περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο, άρα δεν υπάρχει ο MF διακριτού χρόνου (DTFT) για την ακολουθία $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\bullet u(n)$

<u>Διάγραμμα Μηδενικών-Πόλων</u>



Παρατήρηση: Η περιοχή σύγκλισης είναι $|z|<\frac{1}{2}$ διότι το σήμα είναι μη αιτιατό και η περιοχή σύγκλισης είναι αριστερά του πόλου

<u>Β τρόπος υπολογισμού ΜΖ</u>

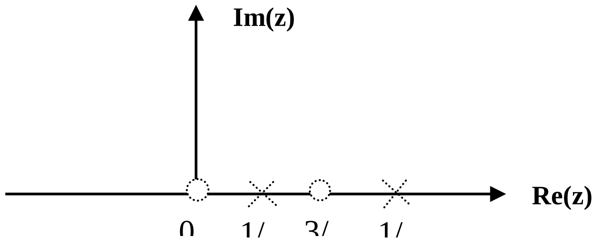
Το σήμα που δίνεται είναι η μη αιτιατή ακολουθία της $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\bullet u(n)$. Επειδή γνωρίζουμε ότι το σήμα (ακολουθία) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\bullet u(n)$ έχει ως ΜΖ τον $\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$ τότε και το σήμα $-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\bullet u(-n-1)$ που είναι το αντιαιτιατό του σήμα, θα έχει τον ίδιο ακριβώς ΜΖ, αλλά η ΠΣ θα είναι $|z|<\frac{1}{2}$. Ο πόλος είναι το $z=\frac{1}{2}$ και το μηδενικό είναι το z=0.

δ) $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\bullet z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\bullet u(n)\bullet z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\bullet u(n)\bullet z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4z}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2z}}+\frac{1}{1-\frac{1}{4z}}=$

$$=\frac{2z}{2z-1}+\frac{4z}{4z-1}=\frac{2z(4z-1)+4z(2z-1)}{(2z-1)\bullet(4z-1)}=\frac{8z^2-2z+8z^2-4z}{(2z-1)\bullet(4z-1)}=\frac{16z^2-6z}{(2z-1)\bullet(4z-1)}=\frac{2z\bullet(8z-3)}{(2z-1)\bullet(4z-1)}$$

Οι πόλοι είναι οι: $z_1=\frac{1}{2},z_2=\frac{1}{4}$ και τα μηδενικά είναι τα $z_1'=0,z_2'=\frac{3}{8}$

<u>Διάγραμμα Μηδενικών-Πόλων</u>



<u>Β τρόπος υπολογισμού ΜΖ</u>

Επειδή και τα δύο σήματα $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\bullet u(n)$ και $\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\bullet u(n)$ είναι αιτιατά, τότε σύμφωνα με την ιδιότητα της γραμμικότητας, η περιοχή σύγκλισης του γραμμικού συνδυασμού $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right]\bullet u(n)$ είναι η $|z|>\max\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$

<u>Α τρόπος υπολογισμού DTFT (σύμφωνα με τον ορισμό του)</u>

Ο DTFT της ακολουθίας x(n) υπάρχει διότι η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο και δίνεται από την σχέση:

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\bullet e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\bullet u(n)\bullet e^{-j\omega n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\bullet u(n)\bullet e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2e^{-j\omega n}}\right)^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4e^{-j\omega n}}\right)^{n}=$$

$$=\frac{2-\frac{3}{4}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\bullet\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

<u>Β τρόπος υπολογισμού DTFT</u>

Θέτουμε στο ΜΖ $X(z)=\frac{2z\bullet(8z-3)}{(2z-1)\bullet(4z-1)}$ όπου z το $e^{j\omega}$ και προκύπτει ο DTFT: $X(e^{j\omega})=\frac{2e^{j\omega}\bullet(8e^{j\omega}-3)}{\left(2e^{j\omega}-1\right)\bullet\left(4e^{j\omega}-1\right)}$

Παρατήρηση

Στις ακολουθίες όπου περιλαμβάνεται ο μοναδιαίος κύκλος μέσα στην περιοχή σύγκλισης υπάρχει ο DTFT.

5.10.5 Άσκηση 1.6

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Z της y(n) συναρτήσει του μετασχηματισμού Z της x(n)

$\alpha)\ y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)$

$\beta)\ y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-kN),$ όπου $x(n)$ μια ακολουθία μήκους με μη μηδενικές τιμές στο διάστημα $0 \le n \le N-1$

<u>Λύση</u>

α)Δίνεται $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$. Η ακολουθία y(n) μπορεί να γραφτεί ως εξής: $x(n) = y(n)-y(n-1)$ διότι:

- $y(n) = ...+x(-1)+x(0)+x(1)+....+x(n)$
- $y(n-1) = ...+x(-1)+x(0)+x(1)+....+x(n-1)$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι: $x(n) = y(n)-y(n-1)$. Μετά εφαρμόζουμε ΜΖ και στα δύο μέλη και προκύπτει ότι $X(z) = Y(z)-z^{-1}\bullet Y(z) \Rightarrow X(z) = Y(z)\bullet\left(1-z^{-1}\right) \Rightarrow Y(z) = \dfrac{X(z)}{1-z^{-1}}$

β)Δίνεται $y(n)=\sum_{k=0}^{\infty} x\left(n-kN\right)$. Ακολουθούμε τους μετασχηματισμούς:

$x(n) \leftrightarrow X(z)$	
$x\left(n-kN\right) \leftrightarrow z^{-kN}\bullet X(z)$	
$\sum_{k=0}^{\infty} x\left(n-kN\right) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^{-kN}\bullet X(z)$	
$y(n) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^{-kN}\bullet X(z) = X(z)\bullet\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^{-N}\right)^{k} = X(z)\bullet\dfrac{1}{1-z^{-N}}$	Π.Σ. $\left\lvert z^{-N}\right\rvert < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{z^{N}} < 1 \Rightarrow \left\lvert z^{N}\right\rvert > 1 \Rightarrow \lvert z\rvert > 1$ Αυτό ισχύει διότι το y(n) είναι αιτιατό σήμα αφού ορίζεται για τιμές ≥0

<u>Παρατήρηση</u>

- **Ιδιότητες Συνέλιξης για σήματα διακριτού χρόνου**

$x(n) * \delta(n) = x(n)$
$x(n) * \delta(n-k) = x(n-k)$
$x(n) * \sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)$

- Η x(n) είναι αιτιατή ακολουθία πεπερασμένου μήκους N

5.10.6 Άσκηση 1.7

1.7 Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγώγισης στη συχνότητα, υπολογίστε τον μετασχηματισμό Z των ακολουθιών

$\alpha)\ x(n) = n(\tfrac{1}{2})^{n}u(n-2)$

$\beta)\ x(n) = \tfrac{1}{n}(-2)^{-n}u(-n-1)$

<u>Λύση</u>

α)

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \bullet u(n-2)$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \bullet u(n-2) \leftrightarrow z^{-2} \bullet \frac{z}{z-\frac{1}{2}}=\frac{z^{-1}}{z-\frac{1}{2}}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \bullet u(n-2) \leftrightarrow \bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \bullet \frac{z^{-1}}{z-\frac{1}{2}}$
$n \bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \bullet u(n-2)=n \bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \bullet u(n-2) \leftrightarrow -z \bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \bullet \frac{d}{dz}\left(\frac{z^{-1}}{z-\frac{1}{2}}\right)=\frac{4z-1}{2z \bullet(2z-1)^{2}},\lvert z\rvert>\frac{1}{2}$

β) Θέτουμε ως $y(n)=n \bullet x(n)=n \bullet \frac{1}{n} \bullet(-2)^{-n} \bullet u(-n-1)=(-2)^{-n} \bullet u(-n-1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \bullet u(-n-1)$

Γνωρίζουμε ότι $-a^{n} \bullet u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-a},\lvert z\rvert<a$, άρα $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \bullet u(-n-1) \leftrightarrow -\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$

Συνεπώς: $y(n)=n \bullet x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \bullet u(-n-1) \leftrightarrow -\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$ (1) και $y(n)=n \bullet x(n)=\leftrightarrow -z \bullet \frac{dX(z)}{dz}$ (2)

Επειδή τα αριστερά μέλη των (1) και (2) είναι ίσα μεταξύ τους, θα είναι ίσα και τα δεξιά μέλη, συνεπώς:

$$-z \bullet \frac{dX(z)}{dz}=-\frac{z}{z+\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dX(z)}{dz}=\frac{1}{z+\frac{1}{2}} \Rightarrow X(z)=\ln\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

Παρατήρηση

Στο μετασχηματισμό $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \bullet u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z+\frac{1}{2}}$ ο πόλος είναι το $-\frac{1}{2}$ αλλά η περιοχή σύγκλισης είναι δεξιά του πόλου κατά απόλυτη τιμή διότι ο πόλος είναι η ακτίνα ενός κύκλου και ο κύκλος δεν μπορεί να έχει αρνητική ακτίνα

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z+\frac{1}{2}},\lvert z\rvert>\left\lvert-\frac{1}{2}\right\rvert=\left\lvert\frac{1}{2}\right\rvert$
$-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z+\frac{1}{2}},\lvert z\rvert<\left\lvert-\frac{1}{2}\right\rvert=\left\lvert\frac{1}{2}\right\rvert$
$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) \leftrightarrow \frac{1}{z+\frac{1}{2}},\lvert z\rvert>\left\lvert-\frac{1}{2}\right\rvert=\left\lvert\frac{1}{2}\right\rvert$
$-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(-n) \leftrightarrow \frac{1}{z+\frac{1}{2}},\lvert z\rvert<\left\lvert-\frac{1}{2}\right\rvert=\left\lvert\frac{1}{2}\right\rvert$

5.10.7 Άσκηση 1.9

1.9 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $X(z) = \dfrac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| > \dfrac{1}{2}$

β) $X(z) = \dfrac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}, \quad |z| < \dfrac{1}{2}$

γ) $X(z) = \dfrac{z+2}{z+1}$

δ) $X(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z+3)^2}$, αιτιατή ακολουθία

Λύση

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΜΖ

1.Όταν έχουμε αρνητικούς εκθέτες πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με το μεγαλύτερο όρο του z κατά απόλυτη τιμή
2.Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με το βαθμό του παρονομαστή δεν κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων αλλά «κατεβάζουμε» χιαστί το z του αριθμητή ώστε να γίνει σε ανάλυση σε απλά κλάσματα και μετά αφού την κάνουμε το επαναφέρουμε.

α) Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με το z^2 (με το μεγαλύτερο όρο του z κατά απόλυτη τιμή ώστε να έχουμε μόνο θετικούς εκθέτες) και προκύπτει: $X(z) = \dfrac{z^2 - z}{z^2 - \frac{1}{4}} = \dfrac{z \bullet (z-1)}{z^2 - \frac{1}{4}}$. Ο τελευταίος όρος δεν αναλύεται σε απλά κλάσματα γιατί ο βαθμός του αριθμητή και του παρονομαστή είναι ίσοι. Γιαυτό κάνουμε το εξής:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z-1}{z^2 - \frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{z-1}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \bullet \left(z + \frac{1}{2}\right)} \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{A}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} + \frac{B}{\left(z + \frac{1}{2}\right)}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές A και B.

$$A = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2}\right) \bullet \frac{z-1}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \bullet \left(z + \frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{2}\right) \bullet \frac{z-1}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \bullet \left(z + \frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{2}$$

Άρα $\dfrac{X(z)}{z} = -\dfrac{1}{2} \bullet \dfrac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} + \dfrac{3}{2} \bullet \dfrac{1}{\left(z + \frac{1}{2}\right)} \Rightarrow X(z) = -\dfrac{1}{2} \bullet \dfrac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} + \dfrac{3}{2} \bullet \dfrac{z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)}$

Άρα το τελικό σήμα είναι: $x(n) = -\dfrac{1}{2} \bullet \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \bullet u(n) + \dfrac{3}{2} \bullet \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \bullet u(n)$

β) Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με το z^2 (με το μεγαλύτερο όρο του z κατά απόλυτη τιμή ώστε να έχουμε μόνο θετικούς εκθέτες) και προκύπτει: $X(z) = \dfrac{z - \frac{1}{2}z^2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 \bullet z^2} = \dfrac{z - \frac{1}{2}z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}$. Ο τελευταίος όρος δεν αναλύεται σε απλά κλάσματα γιατί ο βαθμός του αριθμητή και του παρονομαστή είναι ίσοι. Γιαυτό κάνουμε το εξής:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1 - \frac{z}{2}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{A}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} + \frac{B}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές A και B.

$$A = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1}{(2-1)!} \bullet \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \bullet \frac{1-\frac{z}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}\right] = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1}{(2-1)!} \bullet \frac{d}{dz}\left(1-\frac{z}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1}{(2-2)!} \bullet \frac{d^{2-2}}{dz^{2-2}}\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \bullet \frac{1-\frac{z}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}\right] = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

Άρα $\frac{X(z)}{z} = -\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{4} \bullet \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow X(z) = -\frac{1}{2} \bullet \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{4} \bullet \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}$

Το τελικό σήμα είναι: $x(n) = \frac{1}{2} \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^n \bullet u(-n-1) - \frac{3}{2} \bullet n \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^n \bullet u(-n-1)$

γ) Ο μετασχηματισμός Z γράφεται ως εξής: $X(z) = \frac{z}{z+1} + \frac{2}{z+1}$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση 1</u>

Αν το σήμα είναι αιτιατό δηλ. $|z| > 1$ **τότε** $x(n) = (-1)^n \bullet u(n) + 2 \bullet (-1)^{n-1} \bullet u(n-1)$

<u>Περίπτωση 2</u>

Αν το σήμα είναι μη αιτιατό δηλ. $|z| < 1$ **τότε** $x(n) = -(-1)^n \bullet u(-n-1) - 2 \bullet (-1)^{n-1} \bullet u(-n)$

δ) $X(z) = \frac{z^2}{(z-1)\bullet(z+3)^2}$, αιτιατή ακολουθία

Παρόλο που ο βαθμός του αριθμητή είναι καθαρά μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή και η ανάλυση σε απλά κλάσματα είναι εφικτή, εντούτοις για να κάνουμε πιο απλή την ανάλυση σε απλά κλάσματα, κάνουμε το εξής:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)\bullet(z+3)^2} \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+3} + \frac{\Gamma}{(z+3)^2}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Α και Β.

$$A = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\bullet \frac{z}{(z-1)\bullet(z+3)^2}\right] = \frac{1}{16}$$

$$B = \lim_{z\to -3} \frac{1}{(2-1)!} \bullet \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z+3)^2 \bullet \frac{z}{(z-1)\bullet(z+3)^2}\right] = \lim_{z\to -3} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = -\frac{1}{16}$$

$$\Gamma = \lim_{z\to -3} \frac{1}{(2-2)!} \bullet \frac{d^{2-2}}{dz^{2-2}}\left[(z+3)^2 \bullet \frac{z}{(z-1)\bullet(z+3)^2}\right] = \lim_{z\to -3}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{3}{4}$$

Άρα $\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{16} \bullet \frac{1}{z-1} - \frac{1}{16} \bullet \frac{1}{z+3} + \frac{3}{4} \bullet \frac{1}{(z+3)^2} \Rightarrow X(z) == \frac{1}{16} \bullet \frac{z}{z-1} - \frac{1}{16} \bullet \frac{z}{z+3} + \frac{3}{4} \bullet \frac{z}{(z+3)^2}$

Το τελικό σήμα είναι: $x(n) = \frac{1}{16} \bullet u(n) - \frac{1}{16} \bullet (-3)^n \bullet u(n) - \frac{1}{4} \bullet n \bullet (-3)^n \bullet u(n)$

Παρατηρήσεις

- Στην ανάλυση σε απλά κλάσματα στο ΜΖ εφόσον υπάρχουν αρνητικοί εκθέτες πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους του ΜΖ με το μεγαλύτερο όρο του z κατά απόλυτη τιμή ώστε να έχουμε μόνο θετικούς εκθέτες
- Στην ανάλυση σε απλά κλάσματα στο ΜΖ είτε μπορούμε να αναλύσουμε σε απλά κλάσματα είτε όχι (λόγω των βαθμών αριθμητή και παρονομαστή) διαιρούμε το $X(z)$ με το z δηλαδή $\frac{X(z)}{z}$ και μετά γίνεται η ανάλυση

- Ισχύουν οι εξής μετασχηματισμοί:

$n \bullet a^n \bullet u(n) \leftrightarrow \frac{a \bullet z}{(z-a)^2}$
$(n-1) \bullet a^{n-1} \bullet u(n-1) \leftrightarrow \frac{a}{(z-a)^2}$
$n \bullet (-a)^n \bullet u(n) \leftrightarrow \frac{-a \bullet z}{(z+a)^2}$
$n \bullet (-a)^n \bullet u(n) \leftrightarrow \frac{-a \bullet z}{(z+a)^2}$
$(n-1) \bullet (-a)^{n-1} \bullet u(n-1) \leftrightarrow \frac{a}{(z+a)^2}$
$n \bullet (-3)^n \bullet u(n) \leftrightarrow \frac{-3 \bullet z}{(z+3)^2}$
$-\frac{1}{3} \bullet n \bullet (-3)^n \bullet u(n) \leftrightarrow \frac{-3 \bullet z}{(z+3)^2} \bullet -\frac{1}{3}$
$\frac{3}{4} \bullet \left(-\frac{1}{3} \bullet n \bullet (-3)^n \bullet u(n)\right) \leftrightarrow \frac{3}{4} \bullet \left(\frac{-3 \bullet z}{(z+3)^2} \bullet -\frac{1}{3}\right)$

5.10.8 Άσκηση 1.10

1.10 Ένα πρωτης τάξης ψηφιακό χαμηλοπερατό φίλτρο περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = \frac{1}{3}x(n) + \frac{1}{6}x(n-1)$$

α) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου

β) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Z, βρείτε την κρουστική απόκριση του φίλτρου

γ) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Z, βρείτε τη βηματική απόκριση του φίλτρου

δ) Δώστε το διάγραμμα μηδενικών-πόλων στο z-επίπεδο

ϵ) Εξηγήστε αν το φίλτρο είναι ευσταθές και γιατι

Λύση

α)Η συνάρτηση μεταφοράς βρίσκεται παίρνοντας ΜΖ και στα δύο μέλη της εξίσωσης διαφορών:

$$Z\left\{y(n) - \frac{1}{2}y(n-1)\right\} = Z\left\{\frac{1}{3}x(n) + \frac{1}{6}x(n-1)\right\} \Rightarrow Y(z) - \frac{1}{2} \bullet z^{-1} \bullet Y(z) = \frac{1}{3} \bullet X(z) + \frac{1}{6} \bullet z^{-1} \bullet X(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) \bullet \left[1 - \frac{1}{2} \bullet z^{-1}\right] = X(z) \bullet \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \bullet z^{-1}\right] \Rightarrow H(z) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \bullet z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} \bullet z^{-1}}$$

β)Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή της H(z) με το z (με το μεγαλύτερο όρο του z κατά απόλυτη τιμή ώστε να έχουμε μόνο θετικούς εκθέτες) και προκύπτει: $H(z)=\dfrac{\frac{1}{3}z+\frac{1}{6}}{z-\frac{1}{2}} \Rightarrow H(z)=\dfrac{1}{3}\bullet\dfrac{z}{z-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{6}\bullet\dfrac{1}{z-\frac{1}{2}}$. Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό η κρουστική του απόκριση είναι $h(n)=\dfrac{1}{3}\bullet\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\bullet u(n)+\dfrac{1}{6}\bullet\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\bullet u(n-1)$

γ)Η βηματική απόκριση είναι η έξοδος του συστήματος με είσοδο τη βηματική ακολουθία δηλ. u(n)→s(n). Η βηματική απόκριση δίνεται από τον τύπο:

$$s(n)=h(n)*u(n)\leftrightarrow S(z)=H(z)\bullet U(z)\Rightarrow S(z)=\left(\frac{\frac{1}{3}z+\frac{1}{6}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\bullet}\right)\bullet\frac{z}{z-1}\Rightarrow\frac{S(z)}{z}=\frac{\frac{z}{3}+\frac{1}{6}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\bullet(z-1)}\Rightarrow$$

$$\frac{S(z)}{z}=\frac{\frac{z}{3}+\frac{1}{6}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\bullet(z-1)}\Rightarrow\frac{S(z)}{z}=\frac{A}{z-\frac{1}{2}}+\frac{B}{z-1}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές A και B

$$A=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\bullet\frac{\frac{z}{3}+\frac{1}{6}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\bullet(z-1)}=\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}-1}=\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3}$$

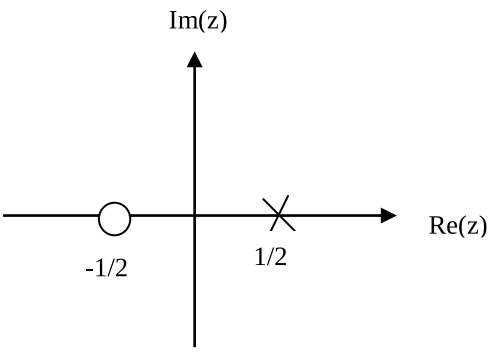
$$B=\lim_{z\to1}(z-1)\bullet\frac{\frac{z}{3}+\frac{1}{6}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\bullet(z-1)}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{6}}{\frac{1}{2}}=1$$

$$\frac{S(z)}{z}=-\frac{2}{3}\bullet\frac{1}{z-\frac{1}{2}}-\frac{1}{z-1}\Rightarrow S(z)=-\frac{2}{3}\bullet\frac{z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{z}{z-1}\leftrightarrow s(n)=-\frac{2}{3}\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\bullet u(n)-u(n)$$

$$\frac{S(z)}{z}=-\frac{2}{3}\bullet\frac{1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{1}{z-1}\Rightarrow S(z)=-\frac{2}{3}\bullet\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{z}{z-1}$$

Με αντίστροφο ΜΖ παίρνουμε τη βηματική απόκριση που είναι η εξής: $s(n)=-\dfrac{2}{3}\bullet\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}u(n)+u(n)$

δ) **Το διάγραμμα μηδενικών-πόλων προκύπτει πάντα από τη συνάρτηση μεταφοράς**



ε) Το σύστημα είναι αιτιατό και για να είναι ταυτόχρονα ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου. Ο ένας και μοναδικός πόλος είναι το $z=\frac{1}{2}$ που βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου οπότε το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

Παρατήρηση

- Ένα φίλτρο θεωρείται αιτιατό σύστημα
- Τα συστήματα Συνεχούς Χρόνου περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις ενώ τα συστήματα διακριτού χρόνου περιγράφονται από Εξισώσεις Διαφορών

5.10.9 Άσκηση 1.11

1.11 Η έξοδος ενός διακριτού ΓΧΑ συστήματος είναι

$$y(n)=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)u(n)$$

όταν η είσοδος σε αυτό είναι η βηματική ακολουθία $x(n)=u(n)$. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Z, βρείτε την κρουστική απόκριση $h(n)$

Λύση

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΑΠΟ ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ (h(n) από s(n))

$$u(n) \longrightarrow \boxed{\text{σύστημα}} \longrightarrow s(n)$$

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{\text{σύστημα}} \longrightarrow h(n)$$

- ✓ **Όταν η είσοδος σε ένα σύστημα είναι η βηματική ακολουθία u(n) τότε η έξοδος είναι η βηματική απόκριση δηλ. u(n)→s(n)**
- ✓ **Όταν η είσοδος σε ένα σύστημα είναι η κρουστική ακολουθία δ(n), τότε η έξοδος είναι η κρουστική απόκριση δηλ. δ(n)→h(n)**
- ✓ **Επειδή: δ(n) = u(n) – u(n-1) προκύπτει αντίστοιχα ότι h(n) = s(n) – s(n-1)**

Δίνεται ότι:

$$h(n)=s(n)-s(n-1)\Rightarrow h(n)=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\bullet u(n)-\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\bullet u(n-1)\Rightarrow$$

$$h(n)=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\bullet u(n-1)-\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\bullet u(n-1)\Rightarrow h(n)=u(n-1)\bullet\left[\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\Rightarrow$$

$$h(n)=u(n-1)\bullet\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\Rightarrow h(n)=u(n-1)\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

5.10.10 Άσκηση 1.12

1.12 Να γενικευτεί το θεώρημα αρχικής τιμής ώστε να βρεθεί η τιμή μιας αιτιατής ακολουθίας $x(n)$ για $n=1$ και να υπολογιστεί η τιμή $x(1)$, όταν

$$X(z)=\frac{2+6z^{-1}}{4-2z^{-2}+13z^{-3}}$$

Λύση

Ο μετασχηματισμός Z μιας αιτιατής ακολουθίας δίνεται από τον τύπο: $X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)\bullet z^{-n}$. Αναπτύσσοντας τους όρους του ΜΖ προκύπτει:

$$X(z)=x(0)+x(1)\bullet z^{-1}+x(2)\bullet z^{-2}+x(3)\bullet z^{-3}+\dots\dots\Rightarrow X(z)-x(0)=x(1)\bullet z^{-1}+x(2)\bullet z^{-2}+x(3)\bullet z^{-3}+\dots\dots \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) με z και προκύπτει ότι:

$$z\bullet\left[X(z)-x(0)\right]=x(1)+x(2)\bullet z^{-1}+x(3)\bullet z^{-2}+\dots\dots \quad (2)$$

Παίρνουμε το όριο της (2) και προκύπτει:

$$\lim_{z\to\infty} z\bullet\left[X(z)-x(0)\right]=\lim_{z\to\infty}\left(x(1)+x(2)\bullet z^{-1}+x(3)\bullet z^{-2}+.......\right)\Rightarrow \lim_{z\to\infty} z\bullet\left(X(z)-x(0)\right)=x(1) \quad (3)$$

Η σχέση (3) ονομάζεται ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ με n=1. Στη σχέση αυτή το $x(0)$ **είναι άγνωστο και θα υπολογιστεί από το Θεώρημα Αρχικής Τιμής:** $x(0)=\lim_{z\to\infty} X(z)\Rightarrow x(0)=\lim_{z\to\infty}\dfrac{2+6z^{-1}}{4-2z^{-2}+13z^{-3}}\Rightarrow x(0)=\dfrac{1}{2}$

Αντικαθιστούμε το $x(0)$ στην (3) και προκύπτει:

$$\lim_{z\to\infty} z\bullet\left(X(z)-x(0)\right)=x(1)\Rightarrow \lim_{z\to\infty} z\bullet\left(\frac{2+6z^{-1}}{4-2z^{-2}+13z^{-3}}-\frac{1}{2}\right)=x(1)\Rightarrow$$

$$\lim_{z\to\infty}\left(\frac{2z+6}{4-2z^{-2}+13z^{-3}}-\frac{z}{2}\right)=x(1)\Rightarrow \lim_{z\to\infty}\left(\frac{4z+12-4z+2z^{-1}-13z^{-2}}{2\bullet\left(4-2z^{-2}+13z^{-3}\right)}\right)=x(1)\Rightarrow$$

$$\lim_{z\to\infty}\left(\frac{12+2z^{-1}-13z^{-2}}{8-4z^{-2}+26z^{-3}}\right)=x(1)\Rightarrow x(1)=\frac{3}{2}$$

5.10.11 Άσκηση 1.13

1.13 Έστω $h(n)$ η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος. Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας όταν

α) $h(n)=\delta(n)+6\delta(n-1)+3\delta(n-2)$

β) $h(n)=(\frac{1}{3})^{n+2}u(n-2)$

<u>Λύση</u>

α)

Παίρνουμε ΜΖ και στα δύο μέλη της h(n) και προκύπτει $H(z)=1+6z^{-1}+3z^{-2}$. **Το ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό διότι η κρουστική απόκριση h(n) είναι μηδέν σε αρνητικές χρονικές στιγμές** άρα η περιοχή σύγκλισης είναι $|z|>0$ και περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο άρα υπάρχει ο DTFT της h(n) (που ονομάζεται απόκριση συχνότητας) και προκύπτει θέτοντας όπου z το $z=e^{j\omega}$ δηλαδή $H(e^{j\omega})=1+6e^{-j\omega}+3e^{-2j\omega}$

β)

Γράφουμε την h(n) ως εξής:

- $h(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\bullet\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\bullet u(n-2)\Rightarrow h(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\bullet u(n-2)\bullet\left(\frac{1}{3}\right)^{4}$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\bullet u(n-2)\leftrightarrow z^{-2}\bullet\dfrac{z}{z-\frac{1}{3}}=\dfrac{z^{-1}}{z-\frac{1}{3}}$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\bullet\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\bullet u(n-2)\leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\bullet\dfrac{z^{-1}}{z-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\bullet\dfrac{1}{z\bullet\left(z-\frac{1}{3}\right)}$

Οι πόλοι είναι $z_1=0$ **και** $z_2=\frac{1}{3}$**. Το σήμα είναι αιτιατό και η περιοχή σύγκλισης είναι δεξιά του μεγαλύτερου πόλου δηλ.** $|z|>\frac{1}{3}$**. Επειδή η περιοχή σύγκλισης του ΜΖ περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλου υπάρχει ο DTFT της h(n) και είναι ο ακόλουθος:**

$$H(e^{j\omega})=\bullet\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\bullet\frac{e^{-j\omega}}{e^{-j\omega}-\frac{1}{3}}$$

Βασικές Έννοιες

$h(n)$	$H(z)$ **Συνάρτηση Μεταφοράς Διακριτού Χρόνου**
$h(n)$	$H(e^{j\omega})$ **Απόκριση Συχνότητας Διακριτού Χρόνου**
$h(t)$	$H(s)$ **Συνάρτηση Μεταφοράς Συνεχούς Χρόνου**
$h(t)$	$H(j\Omega)$ **Απόκριση Συχνότητας Συνεχούς Χρόνου**
$h(t)=\frac{\sin(\Omega_0 t)}{\pi\bullet t}$ **Κρουστική Απόκριση Κατωπερατού Φίλτρου Συνεχούς Χρόνου**	$H(j\Omega)=\begin{cases}1 & \lvert\Omega\rvert<\Omega_0\\ 0 & \lvert\Omega\rvert>\Omega_0\end{cases}$ **Απόκριση Συχνότητας Κατωπερατού Φίλτρου Συνεχούς Χρόνου**
$h(n)=\frac{\sin(\omega_0 n)}{\pi\bullet n}$ **Κρουστική Απόκριση Κατωπερατού Φίλτρου Διακριτού Χρόνου**	$H(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & \lvert\omega\rvert<\omega_0\\ 0 & \lvert\omega\rvert>\omega_0\end{cases}$ **Απόκριση Συχνότητας Κατωπερατού Φίλτρου Διακριτού Χρόνου**

Παρατήρηση

Όταν ένα σήμα παίρνει μηδενικές τιμές σε αρνητικές χρονικές στιγμές είναι αιτιατό. Αν το σήμα αυτό είναι η κρουστική απόκριση τότε το σύστημα είναι αιτιατό.

5.10.12 Άσκηση 1.14

1.14 Η είσοδος που εφαρμόζεται σε ένα ΓΧΑ σύστημα είναι

$$x(n)=2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+3\sin\left(\frac{3n\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$$

Να προσδιορισθεί η έξοδος του συστήματος, αν η κρουστική του απόκριση είναι

$$h(n)=2\frac{\sin[(n-1)\pi/2]}{(n-1)\pi}$$

<u>**Λύση**</u>

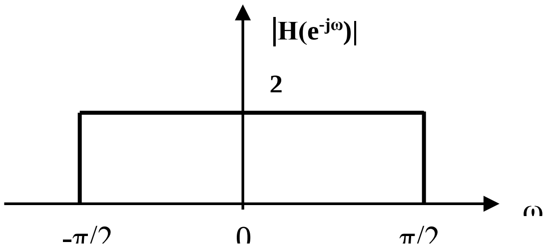
Η κρουστική απόκριση $h(n)$ ενός κατωπερατού φίλτρου και η αντίστοιχη απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ δίνονται γενικά από τον τύπο: $h(n)=\frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi}\leftrightarrow H(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\ 0 & \lvert\omega\rvert>\omega_c\end{cases}$ (1) **όπου** ω_c **η συχνότητα αποκοπής του κατωπερατού φίλτρου**

Στη συγκεκριμένη άσκηση η κρουστική απόκριση του συστήματος δίνεται ως $h(n)=2\frac{\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n-1)\pi}$ (2)

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η συχνότητα αποκοπής του συγκεκριμένου συστήματος (που θεωρείται κατωπερατό φίλτρο) είναι $\omega_c=\frac{\pi}{2}$ και επίσης το φίλτρο έχει δεξιά χρονική ολίσθηση (ή αλλιώς καθυστέρηση) κατά μια χρονική στιγμή, άρα η αντίστοιχη απόκριση συχνότητας του φίλτρου θα είναι $H(e^{j\omega})=\begin{cases}2e^{-j\omega} & \lvert\omega\rvert\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & \lvert\omega\rvert>\frac{\pi}{2}\end{cases}$

Σύμφωνα με το γενικό τύπο $H(e^{j\omega})=\lvert H(e^{j\omega})\rvert\bullet e^{j\varphi(\omega)}$ το 2 είναι το $\lvert H(e^{j\omega})\rvert$ δηλ. το μέτρο της απόκρισης συχνότητας και το φ(ω)=-ω είναι η φάση της απόκρισης συχνότητας.

Αναπαριστάνοντας γραφικά την απόκριση συχνότητας $H\left(e^{j\omega}\right)$ **χωρίς την ολίσθηση** προκύπτει ότι:
e



Παρατηρούμε ότι στο σήμα εισόδου $x(n)=2\bullet\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+3\bullet\sin\left(\frac{3n\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$ υπάρχουν δύο όροι, ο πρώτος όρος είναι το $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ με συχνότητα $\omega_1=\frac{\pi}{4}$ που είναι μέσα στη ζώνη διέλευσης του φίλτρου και συνεπώς περνά στην έξοδο του συστήματος και ο δεύτερος όρος είναι το $\sin\left(\frac{3n\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$ με συχνότητα $\omega_2=\frac{3\pi}{4}$ και φάση $\varphi=\frac{\pi}{8}$ που βρίσκεται ΕΞΩ από τη ζώνη διέλευσης του φίλτρου και συνεπώς ΔΕΝ ΠΕΡΝΑ στην έξοδο του συστήματος. Το γεγονός ότι ο δεύτερος όρος έχει φάση $\frac{\pi}{8}$ δεν έχει καμία επίδραση στο σήμα αναφορικά με τη διέλευση του μέσα από το φίλτρο. Αν η απόκριση συχνότητας ήταν ένας σταθερός όρος π.χ.

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}2 & |\omega|\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & |\omega|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

τότε η έξοδος θα ήταν η είσοδος πολλαπλασιασμένη με την απόκριση συχνότητας. Επειδή όμως η απόκριση συχνότητας συμβολίζεται ως συνάρτηση η έξοδος υπολογίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

- **Όταν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου είναι ένα τριγωνομετρικό σήμα της μορφής** $x(n)=A\bullet\cos(n\omega_0)$ **ή** $x(n)=A\bullet\sin(n\omega_0)$, **τότε η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος είναι ένα σήμα της μορφής** $y(n)=A\bullet\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\bullet\cos(n\omega_0+\varphi(\omega_0))$ **ή αλλιώς** $y(n)=A\bullet\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\bullet\sin(n\omega_0+\varphi(\omega_0))$ **αντίστοιχα, δηλ. η έξοδος είναι το μέτρο της απόκρισης συχνότητας στη συχνότητα της εισόδου επί το σήμα εισόδου, το οποίο διατηρεί α-ναλλοίωτη τη συχνότητα του και στο σήμα εισόδου έχει προστεθεί μια φάση που είναι προσαρμοσμένη στη συχνότητα της εισόδου.**

Σύμφωνα με την προηγούμενη θεωρία η έξοδος του φίλτρου με είσοδο το σήμα $x(n)=2\bullet\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+3\bullet\sin\left(\frac{3n\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$ είναι η ακόλουθη:

$$y(n)=2\bullet\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\bullet\cos\left(\frac{n\pi}{4}+\tan^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\Rightarrow y(n)=2\bullet 2\bullet\cos\left(\frac{n\pi}{4}+\tan^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

όπου η φάση είναι $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)=\tan^{-1}(-1)$

Παρατήρηση: Η φάση του συστήματος είναι –π/4. Αυτό προκύπτει διότι η απόκριση συχνότητας δίνεται σε πολική μορφή $H\left(e^{j\omega}\right)=2e^{-j\frac{\pi}{4}}$. Όμως εμείς πρέπει να βρούμε τη φάση του συστήματος προσαρμοσμένη στη συχνότητα της εισόδου που είναι π/4. Άρα είναι διαφορετικά μεγέθη η φάση του συστήματος γενικά και η φάση του συστήματος που είναι προσαρμοσμένη στη συχνότητα της εισόδου

Βασικές Έννοιες

$h(n)=\dfrac{\sin(\omega_c \bullet n)}{n\pi}$ + Κρουστική Απόκριση Κατωπερατού Φίλτρου Διακριτού Χρόνου	$H(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\ 0 & \lvert\omega\rvert>\omega_c\end{cases}$ Απόκριση Συχνότητας Κατωπερατού Φίλτρου Διακριτού Χρόνου
$h(t)=\dfrac{\sin(\Omega_c \bullet t)}{\pi t}$ Κρουστική Απόκριση Κατωπερατού Φίλτρου Συνεχούς Χρόνου	$H(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\ 0 & \lvert\omega\rvert>\omega_c\end{cases}$ Απόκριση Συχνότητας Κατωπερατού Φίλτρου Διακριτού Χρόνου

Παρατήρηση-Υποθετική Εκφώνηση

Με είσοδο $x(n)=2\bullet\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)+3\bullet\sin\left(\dfrac{3n\pi}{4}+\dfrac{\pi}{8}\right)$

και με κρουστική απόκριση $h(n)=2\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)}{\pi n}$ να βρεθεί η έξοδος

<u>Απάντηση</u>

Η κρουστική απόκριση h(n) είναι κατωπερατού φίλτρου με απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})=\begin{cases}2 & \lvert\omega\rvert<\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$.

Η έξοδος του φίλτρου είναι: $y(n)=4\cos\left(\dfrac{\pi}{4}n\right)=$

5.10.13 Έξοδος ΓΧΑ Συστημάτων Διακριτού και Συνεχούς Χρόνου

5.10.13.1 Έξοδος ΓΧΑ Συστημάτων από την Απόκριση Συχνότητας

- Όταν η **είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου είναι μια ιδιοσυνάρτηση της μορφής** $x(n) = A \bullet e^{j\omega_0 n}$ τότε η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος είναι ένα σήμα της μορφής: $y(n) = A \bullet \left|H(e^{j\omega_0})\right| \bullet e^{j(\omega_0 n + \varphi(\omega_0))}$ δηλ. η έξοδος είναι το μέτρο της απόκρισης συχνότητας στη συχνότητα της εισόδου επί το σήμα εισόδου, το οποίο διατηρεί αναλλοίωτη τη συχνότητα του και στο σήμα εισόδου έχει προστεθεί μια φάση που είναι προσαρμοσμένη στη συχνότητα της εισόδου.

- **Όταν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου είναι μια ιδιοσυνάρτηση της μορφής** $x(t) = A \bullet e^{jt\Omega_0}$ τότε η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος είναι ένα σήμα της μορφής: $y(t) = A \bullet \left|H(j\Omega_0)\right| \bullet e^{j(t\Omega_0 + \varphi(\Omega_0))}$ δηλ. η έξοδος είναι το μέτρο της απόκρισης συχνότητας στη συχνότητα της εισόδου επί το σήμα εισόδου, το οποίο διατηρεί αναλλοίωτη τη συχνότητα του και στο σήμα εισόδου έχει προστεθεί μια φάση που είναι προσαρμοσμένη στη συχνότητα της εισόδου.

- **Όταν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου είναι ένα τριγωνομετρικό σήμα (ημιτονοειδές σήμα)** της μορφής $x(n) = A \bullet \cos(\omega_0 n)$ ή $x(n) = A \bullet \sin(\omega_0 n)$, τότε η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος είναι ένα σήμα της μορφής: $y(n) = A \bullet \left|H(e^{j\omega_0})\right| \bullet \cos(\omega_0 n + \varphi(\omega_0))$ ή $y(n) = A \bullet \left|H(e^{j\omega_0})\right| \bullet \sin(\omega_0 n + \varphi(\omega_0))$ αντίστοιχα, δηλ. η έξοδος είναι το μέτρο της απόκρισης συχνότητας στη συχνότητα της εισόδου επί το σήμα εισόδου, το οποίο διατηρεί αναλλοίωτη τη συχνότητα του και στο σήμα εισόδου έχει προστεθεί μια φάση που είναι προσαρμοσμένη στη συχνότητα της εισόδου.

- **Όταν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου είναι ένα τριγωνομετρικό σήμα)** ή (αλλιώς ημιτονοειδές) της μορφής $x(t) = A \bullet \cos(\Omega_0 t)$ ή $x(t) = A \bullet \sin(\Omega_0 t)$, τότε η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος είναι ένα σήμα της μορφής: $y(t) = A \bullet \left|H(j\Omega_0)\right| \bullet \cos(\Omega_0 t + \varphi(\Omega_0))$ ή $y(n) = A \bullet \left|H(j\Omega_0)\right| \bullet \sin(\Omega_0 t + \varphi(\Omega_0))$ αντίστοιχα, δηλ. η έξοδος είναι το μέτρο της απόκρισης συχνότητας στη συχνότητα της εισόδου επί το σήμα εισόδου, το οποίο διατηρεί αναλλοίωτη τη συχνότητα του και στο σήμα εισόδου έχει προστεθεί μια φάση που είναι προσαρμοσμένη στη συχνότητα της εισόδου

5.10.13.2 Έξοδος ΓΧΑ Συστημάτων από την Συνάρτηση Μεταφοράς

- **Όταν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου είναι μια ιδιοσυνάρτηση της μορφής** $x(t) = A \bullet e^{s_0 t}$ τότε η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος, εφόσον γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του H(s), είναι ένα σήμα της μορφής: $y(t) = A \bullet H(s_0) \bullet e^{s_0 t}$ δηλ. η έξοδος είναι η συνάρτηση μεταφοράς θέτοντας όπου s το s_0 επί το σήμα εισόδου

<u>**Παρατήρηση**</u>

Το χαρακτηριστικό ενός ΓΧΑ συστήματος είτε συνεχούς είτε διακριτού χρόνου είναι ότι δεν προσθέτει νέες συχνότητες στο εισερχόμενο σήμα (δεν "γεννά" νέες συχνότητες). Είτε περνάει αναλλοίωτη τις συχνότητα της εισόδου είτε κόβει συχνότητες της εισόδου είτε "κόβει" συχνότητες της εισόδου.

5.10.14 Άσκηση 1.16

1.16 Ένα *φίλτρο κινητού μέσου όρου* **(moving average)** L**-τάξης, είναι ένα ΓΧΑ σύστημα το οποίο, για μια είσοδο** $x(n)$**, παράγει έξοδο της μορφής**

$$y(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{k=0}^{L} x(n-k)$$

Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος αυτού.

<u>Λύση</u>

Αν η είσοδος στο φίλτρο κινητού μέσου όρου είναι η $x(n) = \delta(n)$, η έξοδος θα είναι η κρουστική απόκριση. Επομένως,

$$h(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{k=0}^{L} \delta(n-k)$$

και

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{L+1}\sum_{k=0}^{L} e^{-jk\omega}$$

Με χρήση γεωμετρικών προόδων, έχουμε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{L+1}\frac{1-e^{-j(L+1)\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

και βγάζοντας κοινό παράγοντα τον όρο $e^{-j(L+1)\omega/2}$ από τον αριθμητή και τον όρο $e^{-j\omega/2}$ από τον παρονομαστή, καταλήγουμε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{L+1}e^{-jL\omega/2}\frac{e^{j(L+1)\omega/2} - e^{-j(L+1)\omega/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega}/2}$$

ή

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{L+1}e^{-jL\omega/2}\frac{\sin\left(\frac{(L+1)\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

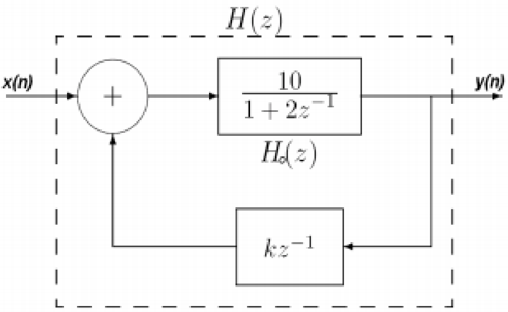
Παρατήρηση

Προσοχή στις διαφορές των δύο τύπων σειράς:

$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \frac{1-a^N}{1-a}, a \neq 1$	$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \lvert a\rvert < 1$

5.10.15 Άσκηση 1.17

1.17 Δίνεται η παρακάτω συνδεσμολογία συστημάτων διακριτού χρόνου



α) Βρείτε τη συνολική συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ της συνδεσμολογίας.

β) Αν τα δύο υποσυστήματα καθώς και το συνολικό σύστημα είναι αιτιατά, βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου k είναι το συνολικό σύστημα $H(z)$ ευσταθές.

γ) Αν σας ζητούσαν να επιλέξετε μια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου k ποια θα διαλέγατε και γιατί;

Λύση

α)Συμβολίζουμε ως r(n) το σήμα που μπαίνει ως είσοδος στο σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H_0(z)=\frac{10}{1+2z^{-1}}$$

Από το σχήμα προκύπτει ότι $r(n)=x(n)+k\bullet y(n-1)$. Παίρνουμε ΜΖ και στα δύο μέλη της r(n) και προκύπτει ότι:

$R(z)=k\bullet z^{-1}Y(z)+X(z)$ (1). Η έξοδος είναι $y(n)=r(n)*h_0(n)$ συνεπώς $Y(z)=R(z)\bullet H_0(z)$ (2).

Αντικαθιστούμε την (1) στην (2) και προκύπτει ότι:

$$Y(z)=\left(kz^{-1}Y(z)+X(z)\right)\bullet H_0(z)\Rightarrow Y(z)\bullet\left(1-kz^{-1}\bullet H_0(z)\right)=X(z)\bullet H_0(z)\Rightarrow Y(z)=\frac{X(z)\bullet H_0(z)}{1-kz^{-1}\bullet H_0(z)}\Rightarrow$$

$$Y(z)=\frac{X(z)\bullet H_0(z)}{1-k\bullet z^{-1}\bullet H_0(z)}\Rightarrow\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{H_0(z)}{1-k\bullet z^{-1}\bullet H_0(z)}\Rightarrow H(z)=\frac{H_0(z)}{1-k\bullet z^{-1}\bullet H_0(z)}\Rightarrow H(z)=\frac{\frac{10kz^{-1}}{1+2z^{-1}}}{1-k\bullet z^{-1}\bullet\frac{10kz^{-1}}{1+2z^{-1}}}\Rightarrow$$

$$H(z)=\frac{\frac{10kz^{-1}}{1+2z^{-1}}}{\frac{1+2z^{-1}-kz^{-1}\bullet 10kz^{-1}}{1+2z^{-1}}}\Rightarrow H(z)=\frac{10kz^{-1}}{1+\left(2-10k\right)\bullet kz^{-1}\bullet z^{-1}}\Rightarrow H(z)=\frac{10}{1+\left(2-10k\right)\bullet z^{-1}}$$

β)**Αφού το σύστημα είναι αιτιατό θα είναι ταυτόχρονα και ΦΕΦΕ ευσταθές αν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι εντός το μοναδιαίου κύκλου**. Από τη συνάρτηση μεταφοράς προκύπτει ότι ο μοναδικός της πόλος είναι :

$$1+\left(2-10k\right)\bullet z^{-1}=0\Rightarrow\left(2-10k\right)\bullet z^{-1}=-1\Rightarrow z=10k-2$$

Για να βρίσκεται ο πόλος $z=10k-2$ **εντός του μοναδιαίου κύκλου πρέπει:** $\left|10k-2\right|<1\Rightarrow -1<10k-2<1\Rightarrow 0.1<k<0.3$

γ)**Η επιλογή του k θα πρέπει να οδηγεί τον πόλο όσο πιο κοντά στο κέντρο του μοναδιαίου κύκλου γιατί εκεί εξαφανίζεται κάθε είδους ταλάντωση από το σύστημα**. Άρα η τιμή που επιλέγουμε είναι το k=0.2 και σύμφωνα με αυτή προκύπτει:

$$H(z)=\frac{10}{1+\left(2-10\frac{2}{10}\right)\bullet z^{-1}}=10$$

Παρατήρηση

Η διάταξη z^{-1} **ονομάζεται καθυστερητής και καθυστερεί την είσοδο του κατά μια χρονική στιγμή.**

5.11 Ασκήσεις και Θέματα με Μετασχηματισμό Ζ

5.11.1 Άσκηση με Έλεγχο Αιτιατότητας και ΦΕΦΕ Ευστάθειας Συστήματος

Δίνεται το σύστημα με σχέση εισόδου-εξόδου (διαφορο-εξίσωση) $y(n)-\frac{7}{2}\bullet y(n-1)+\frac{3}{2}\bullet y(n-2)=x(n-2)$.

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος ώστε το σύστημα να είναι i)Αιτιατό και ii)ΦΕΦΕ Ευσταθές

<u>Λύση</u>

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος παίρνοντας ΜΖ και στα δύο μέλη:

$$Y(z)-\frac{7}{2}z^{-1}\bullet Y(z)+\frac{3}{2}z^{-2}\bullet Y(z)=z^{-2}\bullet X(z)\Rightarrow Y(z)\bullet\left(1-\frac{7}{2}z^{-1}+\frac{3}{2}z^{-2}\right)=z^{-2}\bullet X(z)\Rightarrow \quad H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-2}}{1-\frac{7}{2}z^{-1}+\frac{3}{2}z^{-2}}$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{z^{-2}}{1-\frac{7}{2}z^{-1}+\frac{3}{2}z^{-2}}\Rightarrow H(z)=\frac{1}{z^{2}-\frac{7}{2}z+\frac{3}{2}}\Rightarrow H(z)=\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\bullet(z-3)}\Rightarrow H(z)=\frac{A}{z-\frac{1}{2}}+\frac{B}{z-3}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Α και Β ως εξής:

$$A=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\bullet\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\bullet(z-3)}=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{1}{z-3}=\frac{1}{\frac{1}{2}-3}=-\frac{2}{5}$$

$$B=\lim_{z\to 3}(z-3)\bullet\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\bullet(z-3)}=\lim_{z\to 3}\frac{1}{z-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3-\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς είναι η $H(z)=-\frac{2}{5}\bullet\frac{1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{2}{5}\bullet\frac{1}{z-3}$

α)**Για να το σύστημα αιτιατό πρέπει η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Ζ να είναι δεξιά του μεγαλύτερου πόλου** δηλ. έξω από τον κύκλο με ακτίνα το μεγαλύτερο πόλο δηλ. $|z|>\max\left(\frac{1}{2},3\right)=3$ οπότε η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(n)=-\frac{2}{5}\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\bullet u(n-1)+\frac{2}{5}\bullet 3^{n-1}\bullet u(n-1)$$

β)**Για να το σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Ζ να περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο** δηλ. η Π.Σ. είναι $\frac{1}{2}<|z|<3$ οπότε η κρουστική απόκριση είναι: $h(n)=-\frac{2}{5}\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\bullet u(n-1)-\frac{2}{5}\bullet 3^{n-1}\bullet u(-n)$

Παρατηρήσεις

- Το σύστημα δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα αιτιατό και ευσταθές διότι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι το ½ και το 3 και ΔΕΝ βρίσκονται και οι δύο εντός του μοναδιαίου κύκλου
- Τα συστήματα περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις όπου παίρνουμε συνήθως ML και στα δύο μέρη της διαφορικής, ενώ τα συστήματα διακριτού χρόνου περιγράφονται με εξισώσεις διαφορών όπου παίρνουμε συνήθως ΜΖ και στα δύο μέρη της διαφοροεξίσωσης.
- Αν θέλαμε το σύστημα να είναι μη αιτιατό θα έπρεπε η περιοχή σύγκλισης του ΜΖ να είναι αριστερά του μικρότερου πόλου κατά απόλυτη τιμή εδώ |z|<1/2 και η κρουστική απόκριση θα ήταν

$$h(n)=\frac{2}{5}\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\bullet u(-n)-\frac{2}{5}\bullet 3^{n-1}\bullet u(-n)$$

ΒΑΣΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ Z ΚΑΙ LAPLACE ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Αιτιατό Σύστημα	**MZ → η Π.Σ. του MZ να είναι:** $\lvert z\rvert > \max\{\lvert p_1\rvert, \lvert p_2\rvert, ..., \lvert p_n\rvert\}$ **δηλ. έξω από τον κύκλο με ακτίνα το μεγαλύτερο πόλο κατά απόλυτη τιμή**
	ML →η Π.Σ. του ML να είναι: $\mathrm{Re}(s) > \max\{p_1, p_2, ..., p_n\}$
Μη-Αιτιατό Σύστημα	**MZ→ η Π.Σ. του MZ να είναι:** $\lvert z\rvert < \min\{\lvert p_1\rvert, \lvert p_2\rvert, ..., \lvert p_n\rvert\}$ **δηλ. μέσα στον κύκλο με ακτίνα το μικρότερο πόλο κατά απόλυτη τιμή**
	ML→ η Π.Σ. του ML να είναι: $\mathrm{Re}(s) < \min\{p_1, p_2, ..., p_n\}$
ΦΕΦΕ Ευσταθές	**MZ → η Π.Σ. του MZ να περιλαμβάνει το ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΚΥΚΛΟ (ΤΟΤΕ Υ-ΠΑΡΧΕΙ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ ΚΑΙ Ο DTFT)**
	ML→ η Π.Σ. του ML να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα(ΤΟΤΕ ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ ΚΑΙ Ο CTFT)
Αιτιατό και ΦΕΦΕ Ευσταθές	**MZ→ ΟΛΟΙ ΟΙ ΠΟΛΟΙ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΝΑ ΕΙΝΑΙ Ε-ΝΤΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΚΥΚΛΟΥ**
	ML→ΟΛΟΙ ΟΙ ΠΟΛΟΙ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΝΑ ΕΧΟΥΝ ΑΡΝΗΤΙΚΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ
Μη Αιτιατό και ΦΕΦΕ Ευσταθές	**MZ → ΟΛΟΙ ΟΙ ΠΟΛΟΙ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΝΑ ΕΙΝΑΙ Ε-ΚΤΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΚΥΚΛΟΥ**
	ML → ΟΛΟΙ ΟΙ ΠΟΛΟΙ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΝΑ ΕΧΟΥΝ ΘΕΤΙΚΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

5.11.2 Άσκηση Υπολογισμού Κρουστικής Απόκρισης από Βηματική Απόκριση

Η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος με είσοδο το x(n)=u(n) είναι $y(n) = 2\bullet\left(\frac{1}{3}\right)^n \bullet u(n)$. Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Λύση

$$u(n) \longrightarrow \boxed{\textbf{σύστημα}} \longrightarrow s(n)$$

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{\textbf{σύστημα}} \longrightarrow h(n)$$

Η δ(n)=u(n)-u(n-1) άρα και η h(n)=s(n)-s(n-1)

$$h(n) = 2\bullet\left(\frac{1}{3}\right)^n \bullet u(n) - 2\bullet\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \bullet u(n-1) \Rightarrow h(n) = 2\bullet\left(\frac{1}{3}\right)^n \bullet u(n-1) + 2 - 2\bullet\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \bullet u(n-1) \Rightarrow$$

$$h(n) = 2\bullet\left(\frac{1}{3}\right)^n \bullet u(n-1)\bullet\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right) + 2 \Rightarrow h(n) = -4\bullet\left(\frac{1}{3}\right)^n \bullet u(n-1) + 2$$

5.11.3 Θέμα 2 – Ιούνιος 2011

Χαρακτηρίστε ως προς την ΦΕΦΕ και Ασυμπτωτική ευστάθεια το αιτιατό σύστημα με την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z)=\frac{z^2-3.4z+1.2}{z^2-3.8z+2.4}.$$

Υπολογίστε τις τιμές $h(0)$ και $h(\infty)$ της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Δικαιολογήστε όλες τις απαντήσεις σας.

Λύση

Πρώτα υπολογίζουμε τις ρίζες του αριθμητή (μηδενικά) και του παρονομαστή (πόλοι). Οι ρίζες του αριθμητή είναι 3 και 0.4, ενώ του παρονομαστή είναι 3 και 0.8.

$$\boxed{H(z)=\frac{(z-3)\bullet(z-0.4)}{(z-3)\bullet(z-0.8)}}$$

Σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα:

Ασυμπτωτική Ευστάθεια στο Διακριτό Χρόνο	**Όλοι οι πόλοι της ΜΗ ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ συνάρτησης μεταφοράς να είναι ΕΝΤΟΣ του μοναδιαίου κύκλου για ΑΙΤΙΑΤΟ σύστημα**
	Όλοι οι πόλοι της ΜΗ ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ συνάρτησης μεταφοράς να είναι ΕΚΤΟΣ του μοναδιαίου κύκλου για ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ σύστημα
ΦΕΦΕ Ευστάθεια στο Διακριτό Χρόνο	**Όλοι οι πόλοι της ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ συνάρτησης μεταφοράς να είναι ΕΝΤΟΣ του μοναδιαίου κύκλου για ΑΙΤΙΑΤΟ σύστημα**
	Όλοι οι πόλοι της ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ συνάρτησης μεταφοράς να είναι ΕΚΤΟΣ του μοναδιαίου κύκλου για ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ σύστημα
Ασυμπτωτική Ευστάθεια στο Συνεχή Χρόνο	**Όλοι οι πόλοι της ΜΗ ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ συνάρτησης μεταφοράς να ΕΧΟΥΝ ΑΡΝΗΤΙΚΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ για ΑΙΤΙΑΤΟ σύστημα**
	Όλοι οι πόλοι της ΜΗ ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ συνάρτησης μεταφοράς να ΕΧΟΥΝ ΘΕΤΙΚΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ για ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ σύστημα
ΦΕΦΕ Ευστάθεια στο Συνεχή Χρόνο	**Όλοι οι πόλοι της ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ συνάρτησης μεταφοράς να Ε-ΧΟΥΝ ΑΡΝΗΤΙΚΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ για ΑΙΤΙΑΤΟ σύστημα**
	Όλοι οι πόλοι της ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ συνάρτησης μεταφοράς να Ε-ΧΟΥΝ ΘΕΤΙΚΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ για ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ σύστημα

προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- **Επειδή το σύστημα είναι εξορισμού αιτιατό (από εκφώνηση) για να είναι και ΦΕΦΕ ευσταθές <u>πρέπει όλοι οι πόλοι ΤΗΣ ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ (ΕΦΟΣΟΝ ΕΙΝΑΙ ΣΥΡΡΙΚΝΟΥΜΕΝΗ) να είναι ΕΝΤΟΣ του μοναδιαίου κύκλου</u> κάτι που ισχύει αφού ο μοναδικός πόλος μετά την απλοποίηση είναι το 0.8 και είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου (ΣΤΗ ΦΕΦΕ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΠΑΝΤΑ ΑΠΛΟΠΟΙΟΥΜΕ ΤΗ Σ.Μ. ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΤΕΛΙΚΗ ΣΥΡΡΙΚΝΟΥΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΤΟΥΣ ΠΟΛΟΥΣ)**.
- Στην ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ **ΔΕΝ ΑΠΛΟΠΟΙΟΥΜΕ ΠΟΤΕ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΕΣΤΩ ΚΑΙ ΑΝ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΣΥΡΡΙΚΝΟΥΜΕΝΗ** και εδώ οι πόλοι της ΜΗ απλοποιημένης συνάρτησης μεταφοράς είναι το 3 και το 0.8. Επειδή δεν ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΚΥΚΛΟΥ άρα το σύστημα **<u>ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΕΥΣΤΑΘΕΣ. Ο ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΥΤΟΣ ΓΙΝΕΤΑΙ ΓΙΑΤΙ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΙΝΑΙ ΕΞΟΡΙΣΜΟΥ ΑΙΤΙΑΤΟ</u>**

Η κρουστική απόκριση του αιτιατού συστήματος είναι: $H(z)=\frac{z}{z-0.8}-\frac{0.4}{z-0.8}$

Και η κρουστική απόκριση είναι $h(n)=(0.8)^n u(n)-0.4\bullet(0.8)^{n-1}u(n-1)$

Για να βρούμε την <u>τιμή h(0) εφαρμόζουμε το θεώρημα αρχικής τιμής</u> και προκύπτει:

$$h(0)=\lim_{z\to\infty}H(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z^2-3.4z+1.2}{z^2-3.8z+2.4}=\lim_{z\to\infty}\frac{z^2\bullet\left(1-\frac{3.4}{z}+\frac{1.2}{z^2}\right)}{z^2\bullet\left(1-\frac{3.8}{z}+\frac{2.4}{z^2}\right)}=1$$

Για να βρούμε την <u>τιμή h(∞) εφαρμόζουμε το θεώρημα τελικής τιμής</u> και προκύπτει:

$$h(\infty)=\lim_{n\to\infty}h(n)=\lim_{z\to 1}(z-1)\bullet H(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\bullet\frac{z-0.4}{z-0.8}=0$$

Παρατήρηση
Αν το σύστημα δεν ήταν αιτιατό τότε η περιοχή σύγκλισης θα ήταν |z|<0.8. Αυτή η περιοχή σύγκλισης ΔΕΝ περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο οπότε το σύστημα δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΛΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ ΣΤΟ ΜΖ ΚΑΙ ΣΤΟ ML ΚΑΙ ΟΙ ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ

Θ.Α.Τ. ΣΤΟ ΜΖ	$h(0)=\lim_{z\to\infty}H(z)$
Θ.Α.Τ. ΣΤΟ ML	$h(0^+)=\lim_{s\to\infty}s\bullet H(s)$
Θ.Τ.Τ. ΣΤΟ ΜΖ	$h(\infty)=\lim_{n\to\infty}h(n)=\lim_{z\to 1}(z-1)\bullet H(z)$
Θ.Τ.Τ. ΣΤΟ ML	$h(\infty)=\lim_{t\to\infty}h(t)=\lim_{s\to 0}s\bullet H(s)$
ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΣΤΟ Θ.Α.Τ. ΣΤΟ ΜΖ	$h(1)=\lim_{z\to\infty}z\bullet\left(H(z)-h(0)\right)$
ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΣΤΟ Θ.Α.Τ. ΣΤΟ ML	$y'(0^+)=\lim_{s\to\infty}s\bullet[s\bullet Y(s)-y(0^-)]$

5.11.4 Θέμα 3 Ιούνιος 2012 και Θέμα 3 Φεβρουάριος 2014

ΘΕΜΑ 3: (20%). Ποιών σημάτων διακριτού χρόνου ο Μετασχηματισμός-Ζ είναι ο $X(z)=\frac{z}{z-a}$; Αν τα παραπάνω σήματα θεωρηθούν κρουστικές αποκρίσεις συστημάτων διακριτού χρόνου, σχολιάστε την (ΦΕΦΕ) ευστάθεια των συστημάτων σε σχέση με τις τιμές της παραμέτρου *α*. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

<u>Λύση</u>

- Αν το σήμα x(n) είναι αιτιατό τότε $\alpha^n u(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-\alpha}\ |z|>|\alpha|$.
- **Για να είναι ταυτόχρονα και ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει όλοι οι πόλοι της ΣΜ να βρίσκονται ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΚΥΚΛΟΥ. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει:** $|\alpha|<1$

- Αν το σήμα x(n) είναι μη αιτιατό τότε $-\alpha^n u(-n-1)\leftrightarrow\frac{z}{z-\alpha},|z|<|\alpha|$.
- **Για να είναι ταυτόχρονα και ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς να βρίσκονται ΕΚΤΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΚΥΚΛΟΥ**. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει: $|\alpha|>1$

5.11.5 Θέμα 1γ – Ιούνιος 2010

(γ) (10%) Δίνεται η ακόλουθη αναδρομική σχέση: $x[n+1]-\sum_{k=0}^{n}x[k]a^{n-k}=\beta^n,\ a\in\mathbb{R}$ και $\beta=2+r\bmod(2)$. Να βρεθεί η αιτιατή ακολουθία $x[n]$ που ικανοποιεί την παραπάνω αναδρομή και επί πλέον $x[0]=0$ (Διερευνήστε όλες τις περιπτώσεις).

<u>Λύση</u>
i)**<u>r mod 2=1</u>**

- $\sum_{k=0}^{n}x[k]\bullet\alpha^{n-k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\bullet u[k]\bullet\alpha^{n-k}\bullet u[n-k]=x[n]\bullet u[n]*\alpha^n\bullet u[n]=x[n]*\alpha^n u[n]$ διότι η x[n] είναι αιτιατή ακολουθία

- $\beta^{n} = 3^{n}$

Παίρνουμε ΜΖ και στα δύο μέλη της ισότητας που δίνεται.

- $x[n+1] \leftrightarrow z \bullet X(z)$

Προσοχή όταν υπάρχει ολίσθηση πρέπει να εξετάσουμε αν δίνονται αρχικές συνθήκες. Στην περίπτωση αυτή ισχύουν οι εξής τύποι:

$$x(n+k) \leftrightarrow z^{k}X(z) - z^{k}x(0) - z^{k-1}x(1) - ..... - zx(k-1)$$
$$x(n-k) \leftrightarrow z^{-k}X(z) + z^{-k+1}x(-1) + z^{-k+2}x(-2) + ... + zx(-k)$$

- $x[n] * \alpha^{n}u[n] \leftrightarrow X(z) \bullet \dfrac{z}{z-\alpha}$
- $3^{n} \leftrightarrow \dfrac{z}{z-3}$

οπότε ο τελικός τύπος είναι:

$$z \bullet X(z) - X(z) \bullet \frac{z}{z-\alpha} = \frac{z}{z-3} \Rightarrow X(z) \bullet \left(z - \frac{z}{z-\alpha}\right) = \frac{z}{z-3} \Rightarrow X(z) \bullet z\left(1 - \frac{1}{z-\alpha}\right) = \frac{z}{z-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(z) \bullet \left(1 - \frac{1}{z-\alpha}\right) = \frac{1}{z-3} \Rightarrow X(z) = \frac{\dfrac{1}{z-3}}{\left(1 - \dfrac{1}{z-\alpha}\right)} \Rightarrow X(z) = \frac{\dfrac{1}{z-3}}{\dfrac{z-\alpha-1}{z-\alpha}} \Rightarrow X(z) = \frac{\dfrac{1}{z-3}}{\dfrac{z-(\alpha+1)}{z-\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{z-\alpha}{(z-3) \bullet (z-(\alpha+1))}$$

1η περίπτωση: $\alpha + 1 \neq 3 \Rightarrow \alpha \neq 2$ **δηλαδή υπάρχουν δύο διακριτοί Πόλοι** $z_1 = 3$ **και** $z_2 = \alpha + 1$

$$X(z) = \frac{z-\alpha}{(z-3) \bullet (z-(\alpha+1))} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-(\alpha+1)}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Α και Β

$$A = \lim_{z \to 3}(z-3) \bullet \frac{z-\alpha}{(z-3) \bullet (z-(\alpha+1))} = \frac{3-\alpha}{2-\alpha}$$

$$B = \lim_{z \to \alpha+1}(z-(\alpha+1)) \bullet \frac{z-\alpha}{(z-3) \bullet (z-(\alpha+1))} = \frac{1}{\alpha-2}$$

$$X(z) = \frac{z-\alpha}{(z-3) \bullet (z-(\alpha+1))} = \frac{3-\alpha}{2-\alpha} \bullet \frac{1}{z-3} + \frac{1}{\alpha-2} \bullet \frac{1}{z-(\alpha+1)}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι |z|>max{(α+1), 3}

Επειδή η ακολουθία x(n) είναι αιτιατή προκύπτει:

$$x(n) = \frac{3-\alpha}{2-\alpha} \bullet 3^{n-1} + \frac{1}{\alpha-2} \bullet (\alpha+1)^{n-1}$$

2η περίπτωση: $\alpha + 1 = 3 \Rightarrow \alpha = 2$ **δηλαδή υπάρχει μόνο ένας πόλος, το 3, με πολλαπλότητα 2**

$$X(z) = \frac{z-2}{(z-3)^{2}} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{(z-3)^{2}}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Α και Β

$$A = \lim_{z \to 3} \frac{1}{(2-1)!} \bullet \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \bullet \left[(z-3)^{2} \bullet \frac{z-\alpha}{(z-3)^{2}}\right] = \lim_{z \to 3}(z-\alpha)' = 1$$

$$B=\lim_{z\to 3}\frac{1}{(2-2)!}\bullet\frac{d^{2-2}}{dz^{2-2}}\bullet\left[(z-3)^2\bullet\frac{z-\alpha}{(z-3)^2}\right]=\lim_{z\to 3}(z-\alpha)=3-2=1$$

$$X(z)=\frac{1}{z-3}+\frac{1}{(z-3)^2}$$

Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς:

$a^n u(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-a}$ και $a^{n-1}u(n-1)\leftrightarrow\frac{1}{z-a}$ προκύπτει ότι $3^{n-1}u(n-1)\leftrightarrow\frac{1}{z-3}$ και τους μετασχηματισμούς $na^n u(n)\leftrightarrow\frac{az}{(z-a)^2}$ και $(n-1)a^{n-1}u(n-1)\leftrightarrow\frac{a}{z-a}$ και $\frac{(n-1)a^{n-1}u(n-1)}{a}\leftrightarrow\frac{1}{z-a}$ και $\frac{(n-1)3^{n-1}u(n-1)}{3}\leftrightarrow\frac{1}{z-3}\Rightarrow(n-1)3^{n-2}u(n-1)\leftrightarrow\frac{1}{z-3}$ προκύπτει ότι η αιτιατή ακολουθία x(n) είναι η

$$x(n)=3^n u(n)+(n-1)3^{n-2}u(n-1)$$

i)**<u>r mod 2=0</u>**

- $\sum_{k=0}^{n}x[k]\bullet\alpha^{n-k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\bullet u[k]\bullet\alpha^{n-k}\bullet u[n-k]=x[n]\bullet u[n]*\alpha^n\bullet u[n]=x[n]*\alpha^n u[n]$ διότι η x[n] είναι αιτιατή ακολουθία
- $\beta^n=2^n$

Παίρνουμε ΜΖ και στα δύο μέλη της ισότητας που δίνεται.

- $x[n+1]\leftrightarrow z\bullet X(z)$
- $x[n]*\alpha^n u[n]\leftrightarrow X(z)\bullet\frac{z}{z-\alpha}$
- $2^n\leftrightarrow\frac{z}{z-2}$

οπότε ο τελικός τύπος είναι:

$$z\bullet X(z)-X(z)\bullet\frac{z}{z-\alpha}=\frac{z}{z-2}\Rightarrow X(z)\bullet\left(z-\frac{z}{z-\alpha}\right)=\frac{z}{z-2}\Rightarrow X(z)\bullet z\left(1-\frac{1}{z-\alpha}\right)=\frac{z}{z-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(z)\bullet\left(1-\frac{1}{z-\alpha}\right)=\frac{1}{z-2}\Rightarrow X(z)=\frac{\frac{1}{z-2}}{\left(1-\frac{1}{z-\alpha}\right)}\Rightarrow X(z)=\frac{\frac{1}{z-2}}{\frac{z-\alpha-1}{z-\alpha}}\Rightarrow X(z)=\frac{\frac{1}{z-2}}{\frac{z-(\alpha+1)}{z-\alpha}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{z-\alpha}{(z-2)\bullet(z-(\alpha+1))}$$

1η περίπτωση: $\alpha+1\neq 2\Rightarrow\alpha\neq 1$ **δηλαδή υπάρχουν δύο διακριτοί Πόλοι** $z_1=2$ **και** $z_2=\alpha+1$

Η περιοχή σύγκλισης είναι :

$$|z|>\max(2,\alpha+1)$$

$$X(z)=\frac{z-\alpha}{(z-2)\bullet(z-(\alpha+1))}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-(\alpha+1)}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Α και Β

$$A=\lim_{z\to 2}(z-2)\bullet\frac{z-\alpha}{(z-2)\bullet(z-(\alpha+1))}=\frac{2-\alpha}{1-\alpha}$$

$$B=\lim_{z\to\alpha+1}(z-(\alpha+1))\bullet\frac{z-\alpha}{(z-2)\bullet(z-(\alpha+1))}=\frac{1}{\alpha-1}$$

$$X(z)=\frac{z-\alpha}{(z-2)\bullet(z-(\alpha+1))}=\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\bullet\frac{1}{z-2}+\frac{1}{\alpha-1}\bullet\frac{1}{z-(\alpha+1)}$$

Επειδή η ακολουθία x(n) είναι αιτιατή προκύπτει: $x(n)=\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\bullet 2^{n-1}u(n-1)+\frac{1}{\alpha-1}\bullet(\alpha+1)^{n-1}u(n-1)$

2η περίπτωση: $\alpha+1=2\Rightarrow\alpha=1$ **δηλαδή υπάρχουν ένας πόλος το 2 με πολλαπλότητα 2 και η περιοχή σύγκλισης είναι** $|z|>2$

$$X(z)=\frac{z-\alpha}{(z-2)^2}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{(z-2)^2}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές A και B

$$A=\lim_{z\to 2}\frac{1}{(2-1)!}\bullet\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\bullet\left[(z-2)^2\bullet\frac{z-\alpha}{(z-2)^2}\right]=\lim_{z\to 2}(z-\alpha)'=1$$

$$B=\lim_{z\to 2}\frac{1}{(2-2)!}\bullet\frac{d^{2-2}}{dz^{2-2}}\bullet\left[(z-2)^2\bullet\frac{z-\alpha}{(z-2)^2}\right]=\lim_{z\to 2}(z-\alpha)=2-1=1$$

Ο μετασχηματισμός Z που προκύπτει είναι:

$$X(z)=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}$$

Με βάση τον επόμενο πίνακα μετασχηματισμών:

$n\bullet a^n\bullet u(n)\leftrightarrow\frac{az}{(z-a)^2}$
$n\bullet 2^n\bullet u(n)\leftrightarrow\frac{2z}{(z-2)^2}$
$\frac{1}{2}\bullet n\bullet 2^n\bullet u(n)\leftrightarrow\frac{z}{(z-2)^2}$
$\frac{1}{2}\bullet(n-1)\bullet 2^{n-1}\bullet u(n-1)\leftrightarrow\frac{1}{(z-2)^2}$

προκύπτει το σήμα $x(n)=2^{n-1}\bullet u(n-1)+(n-1)\bullet 2^{n-2}\bullet u(n-1)$

Παρατήρηση

Επειδή η x[n] είναι αιτιατή ακολουθία θα έπρεπε στον υπολογισμό του ΜΖ της x[n+1] να εφαρμόσουμε την ιδιότητα αριστερής ολίσθησης του μονόπλευρου ΜΖ δηλ. την ιδιότητα: $x(n+k)\leftrightarrow z^k\bullet X(z)-z^k\bullet x(0)-z^{k-1}\bullet x(1)-...-z\bullet x(k-1)$. Επειδή όμως μας δίνεται ότι x[0]=0 δηλ. δεν μας δίνονται αρχικές συνθήκες γιαυτό όλοι οι υπόλοιποι όροι εκτός του $z^k\bullet X(z)$

Επιπλέον Έλεγχος Περιπτώσεων

Αν δεν δινόταν ότι η ακολουθία x(n) είναι αιτιατή τότε στην περίπτωση που έχουμε 2 διακριτούς πόλους το (α+1) και το 2 θα παίρναμε τις εξής περιπτώσεις στον αντίστροφο ΜΖ

1) $|z|>\max\{2,\alpha+1\}$ Είναι η περίπτωση που αναλύσαμε προηγουμένως

2) $|z|<\min\{2,\alpha+1\}$

Επειδή η ακολουθία x(n) είναι μη αιτιατή προκύπτει: $x(n)=-\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\bullet 2^{n-1}u(-n)-\frac{1}{\alpha-1}\bullet(\alpha+1)^{n-1}u(-n)$

3) $\alpha+1<|z|<2$

Επειδή η ακολουθία x(n) περιλαμβάνει και αιτιατό και μη αιτιατό μέρος προκύπτει ότι:

$$x(n) = -\frac{2-\alpha}{1-\alpha} \bullet 2^{n-1} u(-n) + \frac{1}{\alpha-1} \bullet (\alpha+1)^{n-1} u(n-1)$$

4) $2 < |z| < \alpha+1$

Επειδή η ακολουθία x(n) περιλαμβάνει και αιτιατό και μη αιτιατό μέρος προκύπτει ότι:

$$x(n) = \frac{2-\alpha}{1-\alpha} \bullet 2^{n-1} \bullet u(n-1) - \frac{1}{\alpha-1} \bullet (\alpha+1)^{n-1} u(-n)$$

5.11.6 Θέμα 1 – Ιούνιος 2008

Δίνεται το σύστημα

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(a+b)^{n-m}} x(m)$$

α) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

β) Είναι το σύστημα αιτιατό;

γ) Γράψτε τη σχέση εισόδου-εξόδου σε μια διαφορετική μορφή κατάλληλη για υλοποίησή του σε μικροϋπολογιστικό σύστημα. Ποιες οι απαιτήσεις σας σε μνήμη;

δ) Υπολογίστε την Απόκριση Συχνότητας του Συστήματος.

ε) Είναι το σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές;

<u>Λύση</u>

α)Η έξοδος είναι:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(a+b)^{n-m}} \bullet x(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+b)^{n-m}} \bullet u(n-m) \bullet x(m) \bullet u(m) = x(n) \bullet u(n) * \frac{1}{(a+b)^{n}} \bullet u(n)$$

Άρα η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι $h(n) = \frac{1}{(a+b)^n} \bullet u(n)$. Παρατηρούμε ότι και η είσοδος x(n) και η κρουστική απόκριση h(n) είναι αιτιατά σήματα

β) Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ένα ΓΧΑ σύστημα είναι *αιτιατό* αν και μόνο αν η κρουστική του απόκριση είναι *αιτιατό* σήμα.

Το σήμα $h(n) = \frac{1}{(a+b)^n} u(n)$ που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα είναι αιτιατό, αφού ισχύει $h(n) = 0$ για $n < 0$.

Άρα και το σύστημα είναι αιτιατό.

γ)

Ξεκινάμε από την αρχική σχέση

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(a+b)^{n-m}} x(m) \qquad (1)$$

Απομονώνουμε τον τελευταίο όρο του αθροίσματος. Δηλαδή τον όρο για τον οποίο $m = n$.

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(a+b)^{n-m}} x(m) + \frac{1}{(a+b)^{n-n}} x(n) \quad \Rightarrow$$

$$y(n) = \frac{1}{a+b} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(a+b)^{n-1-m}} x(m) + x(n) \quad \Rightarrow$$

$$y(n) = \frac{1}{a+b} y(n-1) + x(n)$$

Στο τελευταίο βήμα αντικαταστήσαμε $\sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(a+b)^{n-1-m}} x(m) = y(n-1)$. Αυτό προκύπτει από τη σχέση (1) αντικαθιστώντας $n \leftarrow n-1$.

Η σχέση

$$y(n) = \frac{1}{a+b} y(n-1) + x(n) \qquad (2)$$

στην οποία καταλήξαμε είναι κατάλληλη για υλοποίηση σε μικροϋπολογιστικό σύστημα. Λόγω του $y(n-1)$ χρειαζόμαστε μια θέση μνήμης.

δ)

Αρχικά ας βρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

Εφαρμόζουμε στη σχέση (2) τον Μετασχηματισμό Ζ. Προκύπτει

$$Y(z) = \frac{1}{a+b} z^{-1} Y(z) + X(z) \quad \Rightarrow \quad Y(z)(1 - \frac{1}{a+b} z^{-1}) = X(z) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a+b} z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{a+b}}$$

Βλέπουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς έχει έναν πόλο $p = \frac{1}{a+b}$.

Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, η Περιοχή Σύγκλισης της $H(z)$ είναι $|z| > \frac{1}{|a+b|}$

Για να βρούμε την απόκριση συχνότητας, αντικαθιστούμε στην συνάρτηση μεταφοράς $z \leftarrow e^{j\omega}$.

Επομένως, η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - \frac{1}{a+b}}$$

Ο Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT) υπάρχει εφόσον η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Για να τον περιλαμβάνει στη συγκεκριμένη περίπτωση πρέπει $\left|\frac{1}{\mathrm{a+b}}\right| < 1$

ε)**Το σύστημα είναι αιτιατό. Για να είναι και ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς να βρίσκονται ΕΝΤΟΣ του μοναδιαίου κύκλου, άρα πρέπει** $\left|\frac{1}{\mathrm{a+b}}\right| < 1$

5.11.7 Θέμα 2 – Ιούνιος 2002

Δίνεται το σύστημα

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{2^{n-m}} x(m)$$

α) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

β) Είναι το σύστημα αιτιατό;

γ) Γράψτε τη σχέση εισόδου-εξόδου σε μια διαφορετική μορφή κατάλληλη για υλοποίησή του σε μικροϋπολογιστικό σύστημα. Ποιες οι απαιτήσεις σας σε μνήμη;

δ) Υπολογίστε την Απόκριση Συχνότητας του Συστήματος.

ε) Είναι το σύστημα ευσταθές;

ΛΥΣΗ 2.

Το Θέμα αυτό είναι ειδική περίπτωση του Θέματος 1 για $a+b=2$.

α) $h(n) = \frac{1}{2^n} u(n)$

β) Η κρουστική απόκριση $h(n) = \frac{1}{2^n} u(n)$ είναι αιτιατό σήμα. Άρα και το σύστημα είναι αιτιατό.

γ) $y(n) = \frac{1}{2} y(n-1) + x(n)$ Χρειαζόμαστε μια θέση μνήμης.

δ) Συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$, Π.Σ. $|z| > \frac{1}{2}$

Απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - \frac{1}{2}}$

ε) Επειδή ο πόλος $p = \frac{1}{2}$ της συνάρτησης μεταφοράς έχει μέτρο μικρότερο της μονάδας, το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

5.11.8 Θέμα 3 – Σεπτέμβριος 2004

Χρησιμοποιείστε τις ακόλουθες παραδοχές για να υπολογίσετε τη ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ και την κρουστική απόκριση $h(n)$ του συστήματος:

- Η $H(z)$ έχει δύο πόλους στο $z = \frac{1}{2}$ και $z = -1$
- $h(1) = 1$ και $h(-1) = 1$
- Η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει το σημείο $z = \frac{3}{4}$

<u>Λύση</u>

Επειδή η συνάρτηση μεταφοράς έχει δύο πόλους $p_1=\frac{1}{2}$ και $p_2=-1$, θα είναι της μορφής

$$H(z)=\frac{az+b}{(z-p_1)(z-p_2)}=\frac{az+b}{(z-0.5)(z+1)}$$

Παρατήρηση: Θεωρήσαμε ότι στην $H(z)$ ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι το πολύ 1. Αλλιώς, τα στοιχεία που μας δίνονται δεν επαρκούν για την εύρεση της $H(z)$.

Λόγω των δύο πόλων, οι δυνατές Περιοχές Σύγκλισης είναι τρεις:

$|z|<0.5,\quad 0.5<|z|<1\quad$ και $\quad|z|>1$

Μας δίνεται η πληροφορία ότι η Π.Σ. περιλαμβάνει το σημείο $z=\frac{3}{4}$.

Άρα η Π.Σ. είναι $0.5<|z|<1$

Πριν βρούμε τους αγνώστους a και b, πάμε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση $h(n)$. Αυτή, όπως ξέρουμε, μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας αντίστροφο Μετασχηματισμό Ζ (ΜΖ) στη συνάρτηση μεταφοράς.

Έχουμε

$$H(z)=\frac{az+b}{(z-0.5)(z+1)}=\frac{A}{z-0.5}+\frac{B}{z+1}$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές A και B.

$$A=\lim_{z\to 0.5}[H(z)(z-0.5)]=\lim_{z\to 0.5}[\frac{az+b}{z+1}]=\frac{0.5a+b}{1.5}\qquad(1)$$

$$B=\lim_{z\to -1}[H(z)(z+1)]=\lim_{z\to 0.5}[\frac{az+b}{z-0.5}]=\frac{-a+b}{-1.5}\qquad(2)$$

Συνεχίζουμε

$$H(z)=\frac{Az}{z-0.5}z^{-1}+\frac{Bz}{z+1}z^{-1}$$

Τώρα εφαρμόζουμε αντίστροφο ΜΖ.

Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της χρονικής ολίσθησης του ΜΖ.

Επίσης θα χρησιμοποιηθούν οι ακόλουθοι αντίστροφοι ΜΖ:

$$\frac{z}{z-a},\ \Pi.\Sigma.\ |z|>|a| \quad \leftrightarrow \quad a^n u(n)$$

$$\frac{z}{z-a},\ \Pi.\Sigma.\ |z|<|a| \quad \leftrightarrow \quad -a^n u(-n-1)$$

Προκύπτει

$$h(n)=A\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)-B(-1)^{n-1}u(-(n-1)-1) \ \Rightarrow$$

$$h(n)=A\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)-B(-1)^{n-1}u(-n) \qquad (3)$$

Τώρα ας εκμεταλλευτούμε την πληροφορία ότι $h(1)=1$ και $h(-1)=1$.

Από την (3) έχουμε:

$$h(1)=A\left(\frac{1}{2}\right)^{0}u(0)-B(-1)^{0}u(-1) \quad \Rightarrow \quad 1=A\times1\times1-B\times1\times0 \ \Rightarrow \quad A=1$$

$$h(-1)=A\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}u(-2)-B(-1)^{-2}u(3) \quad \Rightarrow \quad 1=A\times4\times0-B\times1\times1 \ \Rightarrow \quad B=-1$$

Ας αντικαταστήσουμε τις τιμές αυτές στις σχέσεις (1) και (2):

$$\left.\begin{array}{l} 1=\dfrac{0.5a+b}{1.5} \\ -1=\dfrac{-a+b}{-1.5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1.5=0.5a+b \\ 1.5=-a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=0 \\ b=1.5 \end{array}\right\}$$

Άρα τελικά έχουμε:

Συνάρτηση μεταφοράς $H(z)=\dfrac{1.5}{(z-0.5)(z+1)}$, Π.Σ. $0.5<|z|<1$

Κρουστική απόκριση $h(n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)+(-1)^{n-1}u(-n)$

5.11.9 Θέμα 2 – Φεβρουαρίου 2004

Ένα σύστημα το οποίο περιγράφεται από μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Το σύστημα είναι αιτιατό.
- Η $H(z)$ έχει δύο πόλους $\pm\frac{j}{2}$ και ακριβώς ένα μηδενικό.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} h(n)3^{-n} = 0$
- $h(1) = -6$

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ και η κρουστική απόκριση $h(n)$ του συστήματος.

ΛΥΣΗ 6.

Λόγω της δεύτερης ιδιότητας η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ θα είναι:

$$H(z) = \frac{A(z-z_0)}{(z+\frac{j}{2})(z-\frac{j}{2})} \qquad (1)$$

όπου z_0 είναι το μηδενικό (άγνωστο) και A μια άγνωστη σταθερά.

Επομένως, για να βρεθεί η $H(z)$ πρέπει να βρούμε τους αγνώστους z_0 και A.

Μετά, για να βρούμε την κρουστική απόκριση $h(n)$, θα εφαρμόσουμε τον αντίστροφο Μετασχηματισμό Ζ (ΜΖ) στη συνάρτηση $H(z)$.

Η τρίτη ιδιότητα μας λέει ότι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h(n)3^{-n} = 0 \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της (2) είναι $H(3)$.

Αυτό προκύπτει από τον ορισμό του ΜΖ ως εξής.

Όπως είναι γνωστό, ο ΜΖ του σήματος $h(n)$ (δηλ. η συνάρτηση μεταφοράς) είναι

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n} \qquad (3)$$

Λόγω της αιτιατότητας του συστήματος (πρώτη ιδιότητα), η κρουστική απόκριση $h(n)$ είναι μηδενική σε αρνητικές χρονικές στιγμές. Δηλαδή $h(n) = 0$ για $n < 0$. Άρα

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)z^{-n} \qquad (4)$$

Επομένως, από τις σχέσεις (2) και (4) συμπεραίνουμε ότι $H(3) = 0$.

Άρα, λόγω της (1) έχουμε:

$$\frac{A(3-z_0)}{(3+\frac{j}{2})(3-\frac{j}{2})} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = 3$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(z) = \frac{A(z-3)}{(z+\frac{j}{2})(z-\frac{j}{2})} \qquad (5)$$

Για τον προσδιορισμό της άγνωστης σταθεράς A, θα εφαρμόσουμε αντίστροφο ΜΖ.

Αρχικά κάνουμε διάσπαση σε απλά κλάσματα:

$$(5) \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{a}{z+\frac{j}{2}} + \frac{b}{z-\frac{j}{2}}$$

Οι άγνωστοι a, b υπολογίζονται ως εξής:

$$a = \lim_{z \to -\frac{j}{2}} H(z)(z+\frac{j}{2}) = \lim_{z \to -\frac{j}{2}} \frac{A(z-3)}{z-\frac{j}{2}} = \frac{A(-\frac{j}{2}-3)}{-\frac{j}{2}-\frac{j}{2}} = A(\frac{1}{2}-3j)$$

$$b = \lim_{z \to \frac{j}{2}} H(z)(z-\frac{j}{2}) = \lim_{z \to \frac{j}{2}} \frac{A(z-3)}{z+\frac{j}{2}} = \frac{A(\frac{j}{2}-3)}{\frac{j}{2}+\frac{j}{2}} = A(\frac{1}{2}+3j)$$

Οπότε έχουμε

$$H(z) = A(\frac{1}{2}-3j)\frac{1}{z+\frac{j}{2}} + A(\frac{1}{2}+3j)\frac{1}{z-\frac{j}{2}} = A(\frac{1}{2}-3j)z^{-1}\frac{z}{z+\frac{j}{2}} + A(\frac{1}{2}+3j)z^{-1}\frac{z}{z-\frac{j}{2}} \qquad (6)$$

Για να εφαρμόσουμε αντίστροφο ΜΖ χρειαζόμαστε την Περιοχή Σύγκλισης (ΠΣ) της $H(z)$. Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, γνωρίζουμε ότι η ΠΣ θα είναι της μορφής $|z| > r_{\max}$, όπου $r_{\max}$ είναι το μέτρο του πόλου με το μεγαλύτερο μέτρο. Η συγκεκριμένη $H(z)$ έχει δύο πόλους που και οι δύο έχουν μέτρο $\frac{1}{2}$. Άρα η ΠΣ είναι $|z| > \frac{1}{2}$.

Τώρα εφαρμόζουμε αντίστροφο ΜΖ στη συνάρτηση της σχέσης (6). Έχουμε

$$h(n) = A(\frac{1}{2}-3j)\left(-\frac{j}{2}\right)^{n-1} u(n-1) + A(\frac{1}{2}+3j)\left(\frac{j}{2}\right)^{n-1} u(n-1) \qquad (7)$$

όπου $u(n)$ είναι η γνωστή μοναδιαία βηματική ακολουθία.

Παραπάνω χρησιμοποιήθηκε η Ιδιότητα της Χρονικής Ολίσθησης του ΜΖ.

Η εκφώνηση αναφέρει ότι $h(1)=-6$. Άρα λόγω της (7) έχουμε:

$$-6 = A(\frac{1}{2}-3j)\left(-\frac{j}{2}\right)^0 u(0) + A(\frac{1}{2}+3j)\left(\frac{j}{2}\right)^0 u(0) = A(\frac{1}{2}-3j)+A(\frac{1}{2}+3j) \quad \Rightarrow \quad A=-6$$

Άρα τελικά

$$H(z)=\frac{-6(z-3)}{(z+\frac{j}{2})(z-\frac{j}{2})}, \quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$h(n) = -6(\frac{1}{2}-3j)\left(-\frac{j}{2}\right)^{n-1} u(n-1) - 6(\frac{1}{2}+3j)\left(\frac{j}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

5.11.10 Θέμα 2 – Σεπτέμβριος 2002

α) Δίνεται ο Μετασχηματισμός Ζ:

$$X(z)=\frac{1}{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}}$$

Να βρεθεί η ακολουθία $x(n)$, $n=0,1,\ldots$. Επαληθεύστε τις τιμές $x(0)$, $x(\infty)$ με τη χρήση των Θεωρημάτων Αρχικής και Τελικής Τιμής.

β) Έστω σύστημα το οποίο βρίσκεται σε ηρεμία και τη χρονική στιγμή $n=0$ διεγείρεται από την ακολουθία εισόδου

$$x(n)=\delta(n)-\frac{1}{3}\delta(n-1),$$

η δε απόκριση του $y(n)$ δίνεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n)=\frac{5}{6}y(n-2)-\frac{1}{6}y(n-1)+x(n).$$

Να υπολογιστεί η απόκριση $y(n)$ για $n\geq 0$.

ΛΥΣΗ 8.

α) Για την εύρεση της ακολουθίας $x(n)$ θα εφαρμόσουμε αντίστροφο ΜΖ στη συνάρτηση $X(z)$.

Αρχικά πρέπει να φέρουμε τη $X(z)$ σε μια μορφή που είναι κατάλληλη για αντιστροφή. Έχουμε

$$X(z)=\frac{1}{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2-1.2z+0.2}$$

Ας κάνουμε την παραγοντοποίηση του παρανομαστή. Βρίσκουμε τις ρίζες του παρανομαστή.

Η διακρίνουσα είναι: $\Delta=(-1.2)^2-4\times 1\times 0.2=0.64$

Άρα οι ρίζες είναι:

$$z_1 = \frac{1.2+0.8}{2} = 1, \quad z_2 = \frac{1.2-0.8}{2} = 0.2$$

Επομένως: $X(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z-0.2)}$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με z και κάνουμε διάσπαση σε απλά κλάσματα :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0.2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.2} = \frac{1.25}{z-1} + \frac{-0.25}{z-0.2} \quad \Rightarrow$$

$$X(z) = 1.25\frac{z}{z-1} - 0.25\frac{z}{z-0.2}$$

Τώρα εφαρμόζουμε αντίστροφο ΜΖ:

$$x(n) = 1.25u(n) - 0.25\ (0.2)^n u(n) \qquad (1)$$

Τώρα ας υπολογίσουμε τις τιμές $x(0)$ και $x(\infty)$.

Από τη σχέση (1) έχουμε

$$x(0) = 1.25u(0) - 0.25\ (0.2)^0 u(0) = 1$$

$$x(\infty) = \lim_{n\to+\infty} x(n) = \lim_{n\to+\infty} (1.25u(n) - 0.25\ (0.2)^n u(n)) = 1.25$$

Ας κάνουμε επαλήθευση των παραπάνω τιμών με χρήση των Θεωρημάτων Αρχικής και Τελικής Τιμής.

Το Θεώρημα Αρχική Τιμής λέει ότι $x(0) = \lim\limits_{z\to+\infty} X(z)$

Ενώ το Θεώρημα Τελικής Τιμής λέει $\lim\limits_{n\to+\infty} x(n) = \lim\limits_{z\to1}(z-1)X(z)$.

Επομένως

$$x(0) = \lim_{z\to+\infty} X(z) = \lim_{z\to+\infty} \frac{1}{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}} = \frac{1}{1-0+0} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} x(n) = \lim_{z\to1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to1}(z-1)\frac{z^2}{(z-1)(z-0.2)} = \lim_{z\to1}\frac{z^2}{z-0.2} = \frac{1}{0.8} = 1.25$$

Άρα οι τιμές $x(0)$ και $x(\infty)$ επαληθευτήκαν.

Παρατήρηση

Η ακολουθία x(n) είναι αιτιατή διότι ορίζεται μόνο σε θετικές χρονικές στιγμές

β)

Μας δίνεται η είσοδος

$$x(n) = \delta(n) - \frac{1}{3}\delta(n-1) \qquad (1)$$

και η εξίσωση διαφορών για την έξοδο

$$y(n) = \frac{5}{6}y(n-2) - \frac{1}{6}y(n-1) + x(n) \qquad (2)$$

Αντικαθιστούμε την (1) στην (2):

$$y(n) = \frac{5}{6}y(n-2) - \frac{1}{6}y(n-1) + \delta(n) - \frac{1}{3}\delta(n-1)$$

Εφαρμόζουμε τον Μετασχηματισμό Ζ και στα δύο μέλη:

$$Y(z) = \frac{5}{6}Y(z)z^{-2} - \frac{1}{6}Y(z)z^{-1} + 1 - \frac{1}{3}z^{-1} \quad \Rightarrow \quad Y(z) - \frac{5}{6}Y(z)z^{-2} + \frac{1}{6}Y(z)z^{-1} = 1 - \frac{1}{3}z^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{5}{6}z^{-2}} = \frac{z^2 - \frac{1}{3}z}{z^2 + \frac{1}{6}z - \frac{5}{6}} \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \frac{z(z - \frac{1}{3})}{(z+1)(z - \frac{5}{6})}$$

Τώρα διαιρούμε και τα δύο μέλη με z και κάνουμε διάσπαση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z - \frac{1}{3}}{(z+1)(z - \frac{5}{6})} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z - \frac{5}{6}} = \frac{8/11}{z+1} + \frac{3/11}{z - \frac{5}{6}} \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{8}{11}\frac{z}{z+1} + \frac{3}{11}\frac{z}{z - \frac{5}{6}}$$

Τώρα εφαρμόζουμε αντίστροφο ΜΖ:

$$y(n) = \frac{8}{11}(-1)^n u(n) + \frac{3}{11}\left(\frac{5}{6}\right)^n u(n)$$

Έτσι η ζητούμενη απόκριση (έξοδος) έχει βρεθεί.

5.11.11 Θέμα 2 – Φεβρουάριος 2005

α) Χαρακτηρίστε ως προς την ευστάθειά του το αιτιατό σύστημα με την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{z^2 - 2.4z + 0.8}{z^2 - 2.8z + 1.6}$$

<u>Λύση</u>

α) Είναι γνωστό ότι ένα αιτιατό σύστημα διακριτού χρόνου είναι ΦΕΦΕ ευσταθές αν και μόνο αν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται μέσα στον μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου. Δηλαδή όλοι οι πόλοι πρέπει να έχουν μέτρο μικρότερο από την μονάδα.

Ας βρούμε τους πόλους.

Οι πόλοι είναι οι ρίζες του πολυωνύμου του παρανομαστή. Δηλαδή του $z^2 - 2.8z + 1.6$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = (-2.8)^2 - 4 \times 1 \times 1.6 = 7.84 - 6.4 = 1.44$

Οι ρίζες είναι $p_1 = \frac{2.8 - \sqrt{1.44}}{2} = \frac{2.8 - 1.2}{2} = 0.8$, $\quad p_2 = \frac{2.8 + \sqrt{1.44}}{2} = \frac{2.8 - 1.2}{2} = 2$

Υπάρχει όμως η περίπτωση κάποιος *πόλος* να συμπέσει με κάποιο *μηδενικό* και να εξαφανιστεί.
Γι' αυτό ας βρούμε και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς.

Τα μηδενικά είναι οι ρίζες του πολυωνύμου του αριθμητή. Δηλαδή του $z^2 - 2.4z + 0.8$

Η διακρίνουσα είναι: $\Delta = (-2.4)^2 - 4 \times 1 \times 0.8 = 5.76 - 3.2 = 2.56$

Οι ρίζες είναι $z_1 = \frac{2.4 - \sqrt{2.56}}{2} = \frac{2.4 - 1.6}{2} = 0.4$, $\quad z_2 = \frac{2.4 + \sqrt{2.56}}{2} = \frac{2.4 + 1.6}{2} = 2$

Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H(z) = \frac{z^2 - 2.4z + 0.8}{z^2 - 2.8z + 1.6} = \frac{(z-2)(z-0.4)}{(z-2)(z-0.8)} = \frac{z-0.4}{z-0.8}$$

Βλέπουμε ότι ο πόλος $p_2 = 2$ διαγράφτηκε λόγω του μηδενικού $z_2 = 2$.

Άρα τελικά η συνάρτηση μεταφοράς έχει μόνο έναν πόλο, τον $p_1 = 0.8$.

Ισχύει $|p_1| < 1$. Άρα το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

5.11.12 Θέμα 1 – Σεπτέμβριος 2009

Ο Μετασχηματισμός Z μιας αιτιατής ακολουθίας $x(n)$ δίνεται από τη σχέση

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \frac{1+\sqrt{1+r\,\mathrm{mod}(2)}\,z^{-1}}{\sqrt{1+r\,\mathrm{mod}(2)}-\sqrt{2+r\,\mathrm{mod}(2)}\,z^{-2}+\sqrt{3+r\,\mathrm{mod}(2)}z^{-3}}$$

Να υπολογιστεί η τιμή της ακολουθίας τη χρονική στιγμή $n=1$.

<u>Λύση</u>

Για $r=0,2,4,...$ έχουμε $r\,\mathrm{mod}(2)=0$. Άρα $X(z)=\dfrac{1+z^{-1}}{1-\sqrt{2}\,z^{-2}+\sqrt{3}z^{-3}}$

Από το Θεώρημα Αρχικής Τιμής (ΘΑΤ) έχουμε

$$x(0)=\lim_{z\to+\infty} X(z)=\frac{1+0}{1-\sqrt{2}\times 0+\sqrt{3}\times 0}=1$$

Από τη γενίκευση του ΘΑΤ έχουμε

$$x(1)=\lim_{z\to+\infty}[zX(z)-zx(0)]$$

Προκύπτει

$$x(1)=\lim_{z\to+\infty}[z\times\frac{1+z^{-1}}{1-\sqrt{2}\,z^{-2}+\sqrt{3}z^{-3}}-z]=\lim_{z\to+\infty}[\frac{z+1}{1-\sqrt{2}\,z^{-2}+\sqrt{3}z^{-3}}-z]\Rightarrow$$

$$x(1)=\lim_{z\to+\infty}[\frac{z+1-z(1-\sqrt{2}\,z^{-2}+\sqrt{3}z^{-3})}{1-\sqrt{2}\,z^{-2}+\sqrt{3}z^{-3}}]=\lim_{z\to+\infty}[\frac{z+1-z+\sqrt{2}\,z^{-1}-\sqrt{3}z^{-2}}{1-\sqrt{2}\,z^{-2}+\sqrt{3}z^{-3}}]\Rightarrow$$

$$x(1)=\lim_{z\to+\infty}[\frac{1+\sqrt{2}\,z^{-1}-\sqrt{3}z^{-2}}{1-\sqrt{2}\,z^{-2}+\sqrt{3}z^{-3}}]=\frac{1+\sqrt{2}\times 0-\sqrt{3}\times 0}{1-\sqrt{2}\times 0+\sqrt{3}\times 0}=1$$

Για $r=1,3,5,...$ έχουμε $r\,\mathrm{mod}(2)=1$. Άρα $X(z)=\dfrac{1+\sqrt{2}z^{-1}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,z^{-2}+\sqrt{4}z^{-3}}$

Από το ΘΑΤ έχουμε

$$x(0)=\lim_{z\to+\infty} X(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Από τη γενίκευση του ΘΑΤ έχουμε

$$x(1)=\lim_{z\to+\infty}[zX(z)-zx(0)]$$

Προκύπτει

$$x(1)=\lim_{z\to+\infty}[z\times\frac{1+\sqrt{2}z^{-1}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,z^{-2}+\sqrt{4}z^{-3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}z]=\lim_{z\to+\infty}[\frac{z+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,z^{-2}+\sqrt{4}z^{-3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}z]\Rightarrow$$

$$x(1)=\lim_{z\to+\infty}[\frac{z+\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}z(\sqrt{2}-\sqrt{3}\,z^{-2}+\sqrt{4}z^{-3})}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,z^{-2}+\sqrt{4}z^{-3}}]=\lim_{z\to+\infty}[\frac{z+\sqrt{2}-z+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}z^{-1}-\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}z^{-2})}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,z^{-2}+\sqrt{4}z^{-3}}]\Rightarrow$$

$$x(1)=\lim_{z\to+\infty}[\frac{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}z^{-1}-\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}z^{-2})}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,z^{-2}+\sqrt{4}z^{-3}}]=1$$

Συνοψίζοντας

Για $r=0,2,4,...$ $\quad x(0)=\lim\limits_{z\to+\infty} X(z)=1 \quad x(1)=\lim\limits_{z\to+\infty}[zX(z)-zx(0)]=1$

Για $r=1,3,5,...$ $\quad x(0)=\lim\limits_{z\to+\infty} X(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad x(1)=\lim\limits_{z\to+\infty}[zX(z)-zx(0)]=1$

Παρατήρηση

Υπενθυμίζουμε τον τρόπο απόδειξης για το **Γενικευμένο Θεώρημα Αρχικής Τιμής Στο Μετασχηματισμό Ζ**

$$X(z)=x(0)+x(1)\bullet z^{-1}+x(2)\bullet z^{-2}+x(3)\bullet z^{-3}+.............\Rightarrow X(z)-x(0)=x(1)\bullet z^{-1}+x(2)\bullet z^{-2}+x(3)\bullet z^{-3}+....... \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) με z και προκύπτει ότι:

$$z\bullet\left(X(z)-x(0)\right)=x(1)+x(2)\bullet z^{-1}+x(3)\bullet z^{-2}+....... \quad (2)$$

Παίρνουμε το όριο της (2) και προκύπτει:

$$\lim_{z\to\infty} z\bullet\left(X(z)-x(0)\right)=x(1) \quad (3)$$

5.11.13 Θέμα 1 –Ιούνιος 2007 και Ιούνιος 2009

Δίνεται η ακόλουθη αναδρομική σχέση $x(n+1)-\sum_{k=0}^{n} x(k)\bullet a^{n-k}=2^n$. Να βρεθεί η αιτιατή ακολουθία x[n] που ικανοποιεί την αναδρομή και επιπλέον x(0)=0.

<u>Λύση</u>

- $x(n+1)$

Η ακολουθία x(n) είναι αιτιατή. Από τον τύπο της αριστερής ολίσθησης

$x(n+k)\leftrightarrow z^k\bullet X(z)-z^k\bullet x(0)-z^{k-1}\bullet x(1)-...-z\bullet x(k-1)$ θέτοντας όπου $k=1$ προκύπτει ότι:

$$x(n+1)\leftrightarrow z^1\bullet X(z)-z^1\bullet x(0)=z\bullet X(z) \quad (1)$$

- $\sum_{k=0}^{\infty} x(k)\bullet a^{n-k}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x(k)\bullet a^{n-k}=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)\bullet u(k)\bullet a^{n-k}\bullet u(n-k)=x(n)\bullet u(n)*a^n\bullet u(n)\leftrightarrow X(z)\bullet\frac{z}{z-a}} \quad (2)$$

- 2^n

$$\boxed{2^n\leftrightarrow\frac{z}{z-2}} \quad (3)$$

Παίρνουμε μονόπλευρο ΜΖ και στα δύο μέλη της αναδρομικής σχέσης και συνδυάζοντας τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$z\bullet X(z)-X(z)\bullet\frac{z}{z-a}=\frac{z}{z-2}\Rightarrow X(z)\bullet\left(z-\frac{z}{z-a}\right)=\frac{z}{z-2}\Rightarrow X(z)=\frac{\frac{z}{z-2}}{\frac{z^2-az-z}{z-a}}\Rightarrow X(z)=\frac{z\bullet(z-a)}{(z-2)\bullet(z^2-az-z)}\Rightarrow$$

$$X(z)=\frac{z\bullet(z-a)}{(z-2)\bullet z\bullet(z-a-1)}\Rightarrow X(z)=\frac{(z-a)}{(z-2)\bullet(z-a-1)}\Rightarrow X(z)=\frac{(z-a)}{(z-2)\bullet(z-(a+1))}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις για τους πόλους:

<u>Περίπτωση 1: Δύο διακριτοί πόλοι δηλαδή</u> $a+1\neq 2\Rightarrow a\neq 1$

Επειδή το σήμα x(n) είναι αιτιατό η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού z είναι: $|z|>\max(2,a+1)$

$$X(z)=\frac{(z-a)}{(z-2)\bullet(z-(a+1))}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-(a+1)}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Α και Β ως εξής:

$$A=\lim_{z\to 2}(z-2)\bullet\frac{(z-a)}{(z-2)\bullet(z-(a+1))}=\lim_{z\to 2}\frac{(z-a)}{(z-(a+1))}=\frac{2-a}{2-a-1}=\frac{2-a}{1-a}$$

$$B=\lim_{z\to 2}(z-(a+1))\bullet\frac{(z-a)}{(z-2)\bullet(z-(a+1))}=\lim_{z\to 2}\frac{((a+1)-a)}{((a+1)-2)}=\frac{1}{a-1}$$

Άρα $X(z)=\frac{2-a}{1-a}\bullet\frac{1}{z-2}+\frac{1}{a-1}\bullet\frac{1}{z-(a+1)}\leftrightarrow x(n)=\frac{2-a}{1-a}\bullet 2^{n-1}\bullet u(n-1)+\frac{1}{a-1}\bullet(a+1)^{n-1}\bullet u(n-1)$

<u>Περίπτωση 2: Ένας πόλος με πολλαπλότητα 2 δηλαδή</u> $a+1=2\Rightarrow a=1$

Επειδή το σήμα x(n) είναι αιτιατό η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού z είναι: $|z|>2$

$$X(z)=\frac{(z-1)}{(z-2)^2}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{(z-2)^2}$$

$$A=\lim_{z\to 2}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left((z-2)^2\bullet\frac{(z-1)}{(z-2)^2}\right)=\lim_{z\to 2}(z-1)'=1$$

$$B=\lim_{z\to 2}\frac{1}{(2-2)!}\frac{d^{2-2}}{ds^{2-2}}\left((z-2)^2\bullet\frac{(z-1)}{(z-2)^2}\right)=\lim_{z\to 2}(z-1)=2-1=1$$

$$X(z)=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}\leftrightarrow x(n)=2^{n-1}\bullet u(n-1)+(n-1)\bullet 2^{n-2}\bullet u(n-1)$$

Άρα

<u>Παρατήρηση</u>

Χρησιμοποιήσαμε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς Z:

$a^n\bullet u(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-a}$
$a^{n-1}\bullet u(n-1)\leftrightarrow\frac{1}{z-a}$
$n\bullet a^n\bullet u(n)\leftrightarrow\frac{az}{(z-a)^2}$

5.11.14 Άσκηση με ΦΕΦΕ Ευστάθεια και κρουστική απόκριση

Χαρακτηρίστε ως προς την ΦΕΦΕ ευστάθεια το αιτιατό σύστημα με την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς: $H(z)=\frac{2(z-3)}{z^2-2.5z+1.5}$ και βρείτε την κρουστική του απόκριση.

<u>Λύση</u>

Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό για να είναι ταυτόχρονα και ευσταθές θα πρέπει ΟΛΟΙ ΟΙ ΠΟΛΟΙ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΝΑ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΚΥΚΛΟΥ. Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(z)=\frac{2(z-3)}{z^2-2.5z+1.5}=\frac{2(z-3)}{(z-1.5)\bullet(z-1)}$$

Παρατηρούμε ότι κανένας πόλος της δεν βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου, άρα το σύστημα ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΦΕΦΕ ΕΥ-ΣΤΑΘΕΣ.

Ο μετασχηματισμός z έχει περιοχή σύγκλισης $|z|>1.5$ διότι το σήμα είναι αιτιατό.

Η κρουστική απόκριση του συστήματος υπολογίζεται με αντίστροφο μετασχηματισμό z ως εξής:

$$H(z)=\frac{2(z-3)}{(z-1.5)\bullet(z-1)}=\frac{A}{(z-1.5)}+\frac{B}{(z-1)}$$

Οι συντελεστές A και B υπολογίζονται ως εξής:

$$A=\lim_{z\to 1.5}(z-1.5)\bullet\frac{2\bullet(z-3)}{(z-1.5)\bullet(z-1)}=\lim_{z\to 1.5}\frac{2\bullet(z-3)}{(z-1)}=\frac{3}{0.5}=6$$

$$B=\lim_{z\to 1}(z-1)\bullet\frac{2\bullet(z-3)}{(z-1.5)\bullet(z-1)}=\lim_{z\to 1}\frac{2\bullet(z-3)}{(z-1.5)}=\frac{-6}{-0.5}=12$$

Άρα $H(z)=\frac{6}{(z-1.5)}+\frac{12}{(z-1)}$ και η κρουστική απόκριση είναι: $h(n)=6\bullet(1.5)^{n-1}u(n-1)+12\bullet 1^{n-1}\bullet u(n-1)$

Παρατήρηση

Αν θέλαμε να εξετάσουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια επειδή η συνάρτηση μεταφοράς είναι μη συρρικνούμενη η ασυμπτωτική και η ΦΕΦΕ ευστάθεια ταυτίζονται. Επειδή δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές δεν είναι ούτε ασυμπτωτικά ευσταθές.

5.11.15 Θέμα 2 Ιούνιος 2007

Χαρακτηρίστε ως προς την **ΦΕΦΕ ευστάθεια το αιτιατό σύστημα** με την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς: $H(z)=\dfrac{z^2-2.4z+0.8}{z^2-2.8z+1.6}$ και βρείτε την κρουστική του απόκριση.

<u>Λύση</u>

Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό για να είναι ταυτόχρονα και ευσταθές θα πρέπει ΟΛΟΙ ΟΙ ΠΟΛΟΙ ΝΑ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΚΥΚΛΟΥ. Η συνάρτηση μεταφοράς είναι: $H(z)=\dfrac{z^2-2.4z+0.8}{z^2-2.8z+1.6}=\dfrac{(z-2)\bullet(z-0.4)}{(z-2)\bullet(z-0.8)}=\dfrac{z-0.4}{z-0.8}$.

Για τη ΦΕΦΕ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΑΠΛΟΠΟΙΟΥΜΕ ΠΑΝΤΑ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ, ΕΦΟΣΟΝ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΣΥΡΡΙΚΝΟΥΜΕΝΗ, ΟΠΩΣ ΕΔΩ, ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΤΕΛΙΚΗ ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ Η $\dfrac{z-0.4}{z-0.8}$ **ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΤΗ ΦΕΦΕ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ. ΠΙΟ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ ΓΙΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΑΙΤΙΑΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΦΕΦΕ ΕΥΣΤΑΘΕΣ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΟΛΟΙ ΟΙ ΠΟΛΟΙ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΝΑ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΚΥΚΛΟΥ. Ο ΜΟΝΑΔΙΚΟΣ ΠΟΛΟΣ ΕΙΝΑΙ ΤΟ 0.8, ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΟΝΤΩΣ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΚΥΚΛΟΥ, ΑΡΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΙΝΑΙ ΦΕΦΕ ΕΥΣΤΑΘΕΣ.**

Για τον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης διασπάμε την H(z) σε δύο κλάσματα: $H(z)=\dfrac{z-0.4}{z-0.8}=\dfrac{z}{z-0.8}-\dfrac{0.4}{z-0.8}$.

Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό η κρουστική απόκριση είναι: $h(n)=0.8^n u(n)-0.4\bullet 0.8^{n-1}u(n-1)$

5.11.16 Θέμα 1β Ιούνιος 2006

Ένα σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία και τη χρονική στιγμή n=0 διεγείρεται από την ακολουθία $x(n)=\delta(n)-\dfrac{1}{3}\delta(n-1)$, ενώ η απόκριση του συστήματος δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών: $y(n)=\dfrac{5}{6}\bullet y(n-2)-\dfrac{1}{6}\bullet y(n-1)+x(n)$. Να υπολογιστεί η απόκριση y(n) για $n\geq 0$.

<u>Λύση</u>

Παίρνουμε μονόπλευρο ΜΖ και στα δύο μέλη της εξίσωσης διαφορών

$$Y(z)=\frac{5}{6}\bullet z^{-2}Y(z)-\frac{1}{6}\bullet z^{-1}Y(z)+X(z)$$

Επειδή το σήμα εισόδου είναι το $x(n)=\delta(n)-\dfrac{1}{3}\delta(n-1)$ και έχει ως ΜΖ τον $X(z)=1-\dfrac{1}{3}z^{-1}$

Αντικαθιστώντας τον X(z) στη σχέση (3) προκύπτει ότι

$$\Rightarrow Y(z)\bullet\left(1-\frac{5}{6}\bullet z^{-2}+\frac{1}{6}\bullet z^{-1}\right)=1-\frac{1}{3}z^{-1}\Rightarrow Y(z)=\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{6}\bullet z^{-1}-\frac{5}{6}\bullet z^{-2}}\Rightarrow Y(z)=\frac{z^2-\frac{1}{3}z}{z^2+\frac{1}{6}z-\frac{5}{6}}\Rightarrow$$

$$Y(z)=\frac{z^2-\frac{1}{3}z}{(z+1)\bullet\left(z-\frac{5}{6}\right)}\Rightarrow Y(z)=\frac{z\bullet\left(z-\frac{1}{3}\right)}{(z+1)\bullet\left(z-\frac{5}{6}\right)}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: ΔΕΝ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΚΑΝΟΥΜΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΔΙΟΤΙ Ο ΒΑΘΜΟΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΗ ΚΑΙ ΤΟΥ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ. ΓΙΑΥΤΟ ΕΦΑΡΜΟΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΕΞΗΣ ΜΕΘΟΔΟ:

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{\left(z-\frac{1}{3}\right)}{(z+1)\bullet\left(z-\frac{5}{6}\right)}$$

Τώρα είναι δυνατή η ανάλυση σε απλά κλάσματα διότι ΒΑΘΜΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΗ=1<ΒΑΘΜΟ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ=2

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-\frac{5}{6}}$$

Οι συντελεστές A και B υπολογίζονται ως εξής:

$$A=\lim_{z\to-1}(z+1)\bullet\frac{\left(z-\frac{1}{3}\right)}{(z+1)\bullet\left(z-\frac{5}{6}\right)}=\frac{24}{33}=\frac{8}{11}$$

$$B=\lim_{z\to\frac{5}{6}}\left(z-\frac{5}{6}\right)\bullet\frac{\left(z-\frac{1}{3}\right)}{(z+1)\bullet\left(z-\frac{5}{6}\right)}=\frac{3}{11}$$

Άρα $\frac{Y(z)}{z}=\frac{8}{11}\bullet\frac{1}{z+1}+\frac{3}{11}\bullet\frac{1}{z-\frac{5}{6}}\Rightarrow Y(z)=\frac{8}{11}\bullet\frac{z}{z+1}+\frac{3}{11}\bullet\frac{z}{z-\frac{5}{6}}$

και η απόκριση (έξοδος) είναι: $y(n)=\frac{8}{11}\bullet(-1)^n+\frac{3}{11}\bullet\left(\frac{5}{6}\right)^n\bullet u(n)$

5.11.17 Θέμα 1-Σεπτέμβριος 2011

Δίνεται η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος ως:

$$y(n)=n\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

με είσοδο την u(n). Να βρεθεί η κρουστική απόκριση h(n)

Λύση

Προφανώς η y(n) που δίνεται είναι η βηματική απόκριση δηλ. η έξοδος του συστήματος με είσοδο τη βηματική συνάρτηση. Γνωρίζουμε ότι:

u(n)↔s(n)
δ(n)↔h(n)

Επειδή δ(n)=u(n)-u(n-1) προκύπτει ότι:

$$h(n)=s(n)-s(n-1)=n\bullet\left(\frac{1}{4}\right)^n\bullet u(n)-(n-1)\bullet\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\bullet u(n-1)=n\left(\frac{1}{4}\right)^n\bullet u(n-1)-(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\bullet u(n-1)=$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^n\bullet u(n-1)\bullet[n-(n-4]=\left(\frac{1}{4}\right)^n\bullet u(n-1)\bullet(-3n+4)$$

5.11.18 Τελευταίο Φροντιστήριο 2013 στο μετασχηματισμό Z

Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)=\frac{z\bullet(z+0.5)}{z^2+z+a}$ ενός αιτιατού συστήματος. Ζητούνται τα εξής:

i) Για **ποιες τιμές του a είναι το σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές**;

iii) Αν x (n) =u (n) να βρεθεί η $y(\infty)$

iii) Βρείτε το $a^+=\min_a|y(\infty)-x(\infty)|$

Λύση

i)

Το σύστημα είναι αιτιατό και συνεπώς για να είναι και ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς να είναι ΕΝΤΟΣ του μοναδιαίου κύκλου. Οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι:

$$z_1=\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}\ \textbf{και}\ z_2=\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$$

Για να είναι το σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- **Αν Δ>0 δηλ. αν** $1-4a>0\Rightarrow a<0.25$ **τότε οι δύο πόλοι είναι πραγματικοί (αφού η διακρίνουσα είναι θετική) και πρέπει να βρίσκονται ΕΝΤΟΣ του μοναδιαίου κύκλου (και μάλιστα δεν χρειάζεται να πάρουμε το μέτρο κάθε πόλου αφού είναι πραγματικός αριθμός) οπότε:**

$$\left|\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}\right|<1\Rightarrow -1+\sqrt{1-4a}<2\Rightarrow \sqrt{1-4a}<3\Rightarrow 1-4a<9\Rightarrow a>-2$$

$$\left|\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}\right|<1\Rightarrow -1-\sqrt{1-4a}<2\Rightarrow -\sqrt{1-4a}<3\Rightarrow 1-4a<9\Rightarrow a>-2$$

Άρα το διάστημα τιμών του a είναι: $-2<a<0.25$

- **Αν Δ<0 δηλ. αν** $1-4a<0\Rightarrow a>0.25$ **τότε οι δύο πόλοι είναι μιγαδικοί (αφού η διακρίνουσα είναι αρνητική) και πρέπει να βρίσκονται ΕΝΤΟΣ του μοναδιαίου κύκλου (και μάλιστα ΠΡΕΠΕΙ να πάρουμε το μέτρο τους αφού είναι μιγαδικές ρίζες) οπότε:**

$$\left|\frac{-1\pm j\sqrt{4a-1}}{2}\right|<1\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4a-1}}{2}\right)^2}<1\Rightarrow \sqrt{a}<1\Rightarrow a<1$$

Άρα το διάστημα τιμών του a είναι: $0.25<a<1$

- **Αν Δ=0 τότε α=0.25 και εξορισμού ισχύει ότι** $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$ **άρα το σύστημα είναι εξορισμού ΦΕΦΕ ευσταθές**

Άρα η τιμή του a είναι: $a=0.25$

ii)
Η έξοδος είναι:

$$y(n)=u(n)*h(n)\leftrightarrow Y(z)=U(z)\bullet H(z)\Rightarrow Y(z)=U(z)\bullet H(z)\Rightarrow Y(z)=\frac{z}{z-1}\bullet\frac{z\bullet(z+0.5)}{z^2+z+a}\Rightarrow$$

$$Y(z)=\frac{z^2\bullet(z+0.5)}{(z-1)\bullet(z^2+z+a)}$$

Υπολογίζουμε το $y(\infty)$ από το θεώρημα τελικής τιμής:

$$y(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)\bullet Y(z)=\lim_{z\to1}(z-1)\bullet\frac{z^2\bullet(z+0.5)}{(z-1)\bullet(z^2+z+a)}=\lim_{z\to1}\frac{z^2\bullet(z+0.5)}{z^2+z+a}=\frac{1.5}{2+a}$$

iii)
Υπολογίζουμε το $x(\infty)$ από το θεώρημα τελικής τιμής:

$$x(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)\bullet U(z)=\lim_{z\to1}(z-1)\bullet\frac{z}{(z-1)}=1$$

Η μικρότερη τιμή για το a προκύπτει θέτοντας όπου $a^+=0^+$

$$a^+=\min_a|y(\infty)-x(\infty)|=\min_a\left|\frac{1.5}{2+a}-1\right|=\min_a\left(1-\frac{1.5}{2+a}\right)=1-\frac{1.5}{2+0^+}$$

5.11.19 Θέμα 3a Άτυπη Φεβρουάριος 2013

Να χαρακτηρίστε ως προς τη ΦΕΦΕ Ευστάθεια τα συστήματα με την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς:

α)$H(s)=s^2$

β) $H(z)=\dfrac{2z^2-6.6z+5.2}{z^2-2z+0.91}$

<u>Λύση</u>

α)Η κρουστική απόκριση είναι $\delta''(t)\leftrightarrow s^2$. Έστω ότι η είσοδος είναι το σήμα x(t)=u(t) το οποίο είναι φραγμένο σήμα. Η έξοδος του συστήματος δίνεται από τον τύπο y(t)=x(t)*h(t)= $u(t)*\delta''(t)=(-1)^2\bullet u''(t)=\delta'(t)$ άρα το σύστημα δεν είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

β)Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(z)=\frac{2z^2-6.6z+5.2}{z^2-2z+0.91}=\frac{(z-1.3)\bullet(z-2)}{(z-1.3)\bullet(z-0.7)}$$

- ✓ **Το σύστημα Δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές διότι δεν βρίσκονται όλοι οι πόλοι της μη απλοποιημένης συνάρτησης μεταφοράς εντός του μοναδιαίου κύκλου**
- ✓ Για να είναι το σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει η Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς να περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Αν το σύστημα είναι αιτιατό (h(n)≥0) τότε η Περιοχή Σύγκλισης είναι |z|>0.7. Στην περίπτωση αυτή η Περιοχή Σύγκλισης περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο άρα το σύστημα είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές. Αν το σύστημα δεν είναι αιτιατό (h(n)<0) τότε η Περιοχή Σύγκλισης ΔΕΝ περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο άρα το σύστημα ΔΕΝ είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές

5.11.20 Θέμα 3β – Ιούνιος 2013

Δίνεται η ακόλουθη αναδρομική σχέση: $x[n+1]-\sum_{m=0}^{n}x[n-m]\bullet a^m=2^n, a\neq 1$. Να βρεθεί η αιτιατή ακολουθία x[n] που ικανοποιεί την αναδρομή και επι πλέον x[0]=0. Τι συμβαίνει αν α=1;

<u>Λύση</u>

Αναπτύσσουμε τον όρο του αθροίσματος:

$$\sum_{m=0}^{n}x[n-m]\bullet a^m=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[n-m]\bullet u[n-m]\bullet a^m\bullet u[m]=x[n]\bullet u[n]*a^n\bullet u[n]=x[n]*a^n\bullet u[n]$$

Παρατήρηση

Επειδή ο όρος u[m] κάνει 1 για m≥0, μπορώ να διώξω το κάτω όριο του αθροίσματος που είναι το -∞ και να το αντικαταστήσω με το μηδέν. Ομοίως ο όρος u[n-m] κάνει 1 για n-m≥0⇒n≥m, μπορώ να διώξω το άνω όριο του αθροίσματος που είναι το ∞ και να το αντικαταστήσω με το n.

Υπολογίζουμε ΜΖ για κάθε όρο της σχέσης που δίνεται.

- $x[n+1]\leftrightarrow z\bullet X(z)$
- $x[n]*\alpha^n u[n]\leftrightarrow X(z)\bullet\frac{z}{z-\alpha}$
- $2^n\leftrightarrow\frac{z}{z-2}$

οπότε προκύπτει:

$$z\bullet X(z)-X(z)\bullet\frac{z}{z-a}=\frac{z}{z-2}\Rightarrow X(z)\left(z-\frac{z}{z-a}\right)=\frac{z}{z-2}\Rightarrow X(z)\left(1-\frac{1}{z-a}\right)=\frac{1}{z-2}\Rightarrow$$

$$X(z)=\frac{\frac{1}{z-2}}{1-\frac{1}{z-a}}\Rightarrow X(z)=\frac{z-a}{(z-2)(z-(a+1))}$$

1η περίπτωση: Δύο Διακριτοί Πόλοι δηλ. αν $\alpha+1\neq 2\Rightarrow\alpha\neq 1$ **τότε οι πόλοι είναι** $z_1=2$ **και** $z_2=a+1$

Η περιοχή σύγκλισης είναι: |z|>max(2, α+1)

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο ΜΖ με ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$X(z)=\frac{z-\alpha}{(z-2)\bullet(z-(\alpha+1))}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-(\alpha+1)}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Α και Β

$$A=\lim_{z\to 2}(z-2)\bullet\frac{z-\alpha}{(z-2)\bullet(z-(\alpha+1))}=\frac{2-\alpha}{1-\alpha}$$

$$B = \lim_{z\to\alpha+1}\left(z-(\alpha+1)\right)\bullet\frac{z-\alpha}{\left(z-2\right)\bullet\left(z-(\alpha+1)\right)} = \frac{1}{\alpha-1}$$

$$X(z) = \frac{z-\alpha}{\left(z-2\right)\bullet\left(z-(\alpha+1)\right)} = \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\bullet\frac{1}{z-2}+\frac{1}{\alpha-1}\bullet\frac{1}{z-(\alpha+1)}$$

Επειδή η ακολουθία x(n) είναι αιτιατή προκύπτει: $x(n) = \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\bullet 2^{n-1}u(n-1)+\frac{1}{\alpha-1}\bullet\left(\alpha+1\right)^{n-1}u(n-1)$

2η περίπτωση:

$\alpha+1=2 \Rightarrow \alpha=1$ **δηλαδή υπάρχουν ένας πόλος το 2 με πολλαπλότητα 2 και η περιοχή σύγκλισης είναι** $|z|>2$

Υπολογίζουμε πάλι τον αντίστροφο ΜΖ με ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$X(z) = \frac{z-\alpha}{\left(z-2\right)^2} = \frac{A}{z-2}+\frac{B}{\left(z-2\right)^2}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Α και Β

$$A = \lim_{z\to 2}\frac{1}{(2-1)!}\bullet\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\bullet\left[\left(z-2\right)^2\bullet\frac{z-\alpha}{\left(z-2\right)^2}\right] = \lim_{z\to 2}\left(z-\alpha\right)' = 1$$

$$B = \lim_{z\to 2}\frac{1}{(2-2)!}\bullet\frac{d^{2-2}}{dz^{2-2}}\bullet\left[\left(z-2\right)^2\bullet\frac{z-\alpha}{\left(z-2\right)^2}\right] = \lim_{z\to 2}\left(z-\alpha\right) = 2-1 = 1$$

Ο μετασχηματισμός Ζ που προκύπτει είναι:

$$X(z) = \frac{1}{z-2}+\frac{1}{\left(z-2\right)^2}$$

Λόγω των μετασχηματισμών:

- ✓ $a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}$
- ✓ $a^{n-1}u(n-1) \leftrightarrow \frac{1}{z-a}$
- ✓ $2^{n-1}u(n-1) \leftrightarrow \frac{1}{z-2}$
- ✓ $n\bullet a^n u(n) \leftrightarrow \frac{az}{\left(z-a\right)^2}$
- ✓ $n\bullet 2^n u(n) \leftrightarrow \frac{2z}{\left(z-2\right)^2}$
- ✓ $n\bullet 2^{n-1}u(n) \leftrightarrow \frac{z}{\left(z-2\right)^2}$
- ✓ $\left(n-1\right)\bullet 2^{n-2}u(n) \leftrightarrow z^{-1}\bullet\frac{z}{\left(z-2\right)^2} = \frac{1}{\left(z-2\right)^2}$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Ζ δίνει το σήμα: $x(n) = 2^{n-1}u(n-1)+\left(n-1\right)\bullet 2^{n-2}u(n)$

5.11.21 Θέμα 3 Σεπτέμβριος 2014

Θεωρήστε το ακόλουθο ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου: y(n)=x(n)+ax(n-1). **Προσδιορίστε το αιτιατό αντίστροφο σύστημα** το οποίο **θα ανακτά το σήμα x(n) από το y(n)** και αναφέρετε κάτω από ποιές προϋποθέσεις μπορεί να επιτευχθεί αυτό.

<u>Απάντηση</u>

Θέλουμε ένα σύστημα το οποίο με είσοδο το y(n)=x(n)+ax(n-1) να δίνει ως έξοδο το x(n) δηλ.

$$x(n) = h(n) * y(n) = h(n) * (x(n) + ax(n-1)) = h(n) * x(n) + h(n) * x(n-1)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι:

$$X(z) = H(z) \bullet X(z) + H(z) \bullet z^{-1} \bullet X(z) \Rightarrow X(z) = H(z) \bullet \left(X(z) + \alpha z^{-1} \bullet X(z)\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{H(z) = \frac{1}{1 + \alpha z^{-1}}}$$

Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό η κρουστική απόκριση του είναι: $h(n) = (-a)^n u(n)$

Αν το σύστημα ήταν μη αιτιατό η κρουστική απόκριση του είναι: $h(n) = -(-a)^n u(-n-1)$

Η προϋπόθεση για να γίνει αυτό είναι οι συχνότητες των x(n) και αx(n-1) να είναι πλήρως διαχωρίσιμες. Επίσης για να υπάρχει ο MF των x(n) και αx(n-1) πρέπει η Π.Σ. της H(z) να είναι |z|>|α| και |α|<1. Επίσης οι 2 MF $X(e^{j\omega})$ και α $e^{-j\omega}$ $X(e^{j\omega})$ θα πρέπει να είναι πλήρως διαχωρίσιμοι δηλ. να μην έχουν κοινές συχνότητες. Έτσι μπορούμε να μπορούμε να προσαρμόσουμε την απόκριση συχνότητας του φίλτρου στον MF $X(e^{j\omega})$ ώστε να περάσει μόνο αυτός και να κοπεί ο α $e^{-j\omega}$ $X(e^{j\omega}$.

Να γράψει τους τύπους των καταστατικών
Ποια η σχέση MF , ML και MZ
Γιατί προτιμούμε τον ML και όχι τον MF; Σε ποιες πράξεις βοηθά ο ML →Βοηθά στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt =;$ πόσο κάνει

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)x(t)dt =;$ πόσο κάνει το ολοκλήρωμα και Για να είναι ΦΕΦΕ τι πρέπει να αλλάξω;

Απάντηση

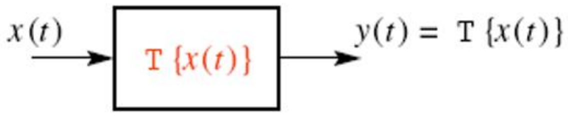
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)u(t)dt =;$$

Ποια ιδιότητα έχει ο MF που δεν έχει ο ML;→Δυϊκότητα
Γιατί ο πίνακας Α είναι nxn

6 Σημειώσεις Μαθήματος και Πιθανές Ερωτήσεις

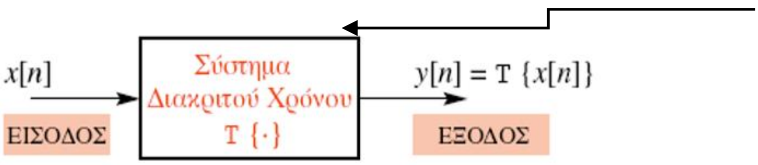
6.1 Εισαγωγή και Μετασχηματισμός Fourier

Διαγράμματα Συστημάτων

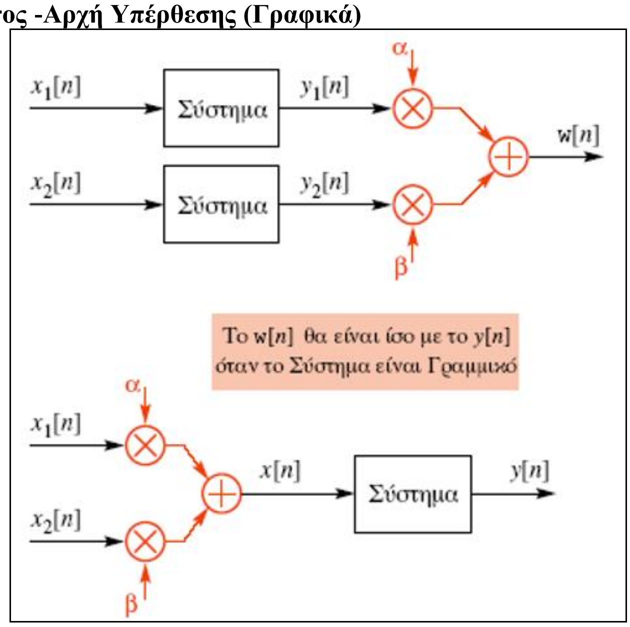


Σύστημα Συνεχούς Χρόνου

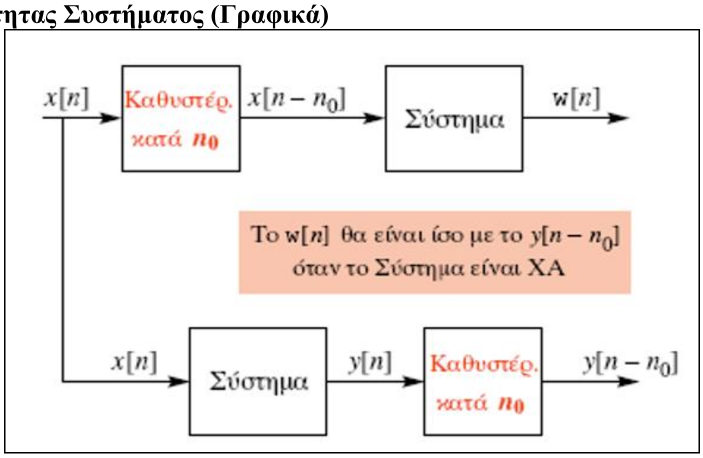
Σύστημα Διακριτού Χρόνου



Έλεγχος Γραμμικότητας Συστήματος -Αρχή Υπέρθεσης (Γραφικά)



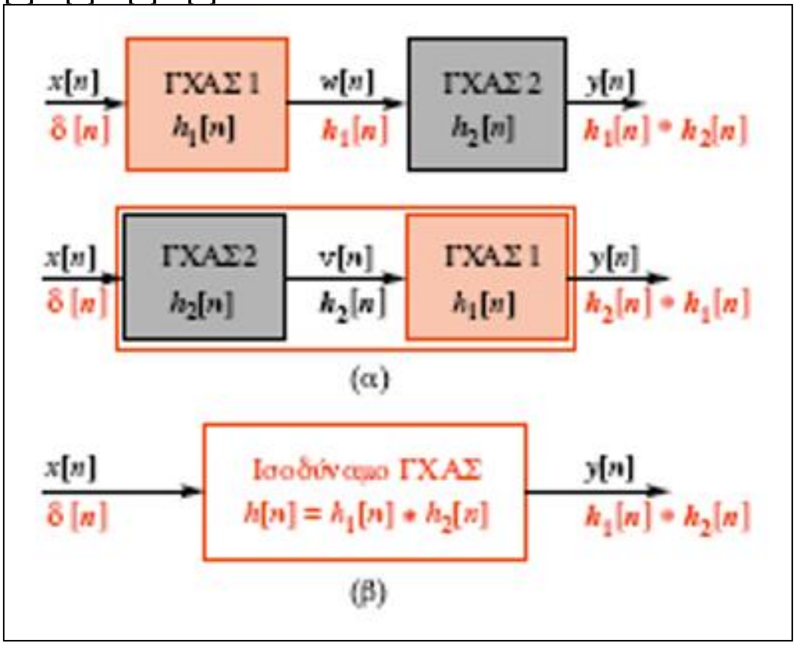
Έλεγχος Χρονικής Αμεταβλητότητας Συστήματος (Γραφικά)



Ερ. Ποιες οι ιδιότητες των ΓΧΑ Συστημάτων;

<u>Απάντηση</u>

Αντιμεταθετική Ιδιότητα: x[n]*h[n]=h[n]*x[n]



Παρατήρηση

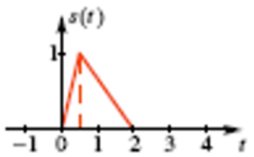
Όταν έχουμε 2 συστήματα σε σειρά τότε μπορούμε να ταααντικαταστήσουμε από ένα σύστημα με κρουστική απόκριση τη συνέλιξη των 2 επιμέρους κρουστικών αποκρίσεων

Προσεταιριστική Ιδιότητα: (x[n]*h[n])*z[n]=x[n]*(h[n])*z[n])

Ερ. Ποιες οι χρονικές Ολισθήσεις Σήματος; (Σχηματικά)

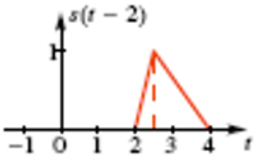
<u>Απάντηση</u>

$$s(t) = \begin{cases} 2t & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}(4-2t) & \frac{1}{2} \le t \le 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



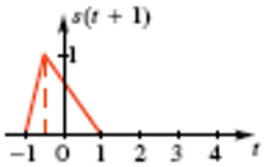
(α)

Καθυστέρηση:



(β)

Προήγηση:



(γ)

Ερ. Τι ονομάζεται **ταυτοτικό σύστημα**; Αν h(t)=δ(t-t_0) τι συμβαίνει με την έξοδο; Αν h(t)=δ(t+t_0) τι συμβαίνει με την έξοδο;

<u>Απάντηση</u>

1.Ταυτοτικό σύστημα ονομάζεται το σύστημα στο οποίο η κρουστική του απόκριση είναι η κρουστική συνάρτηση δηλ. h(t)=δ(t). Το σύστημα **αυτό μεταβιβάζει στην έξοδο ακριβώς το σήμα εισόδου**

2.Αν h(t)=δ(t-t_0) τότε το σύστημα καθυστερεί να περάσει το σήμα εισόδου στην έξοδο κατά t_0

3.Αν h(t)=δ(t+t_0) τότε το σύστημα περνά το σήμα εισόδου στην έξοδο κατά νωρίτερα κατά t_0

Ερ. Τι είναι **Σήμα**

<u>Απάντηση</u>

Ένα πρότυπο μεταβολών μιας ποσότητας που μπορεί να:

1. επεξεργαστεί
2. αποθηκευτεί
3. μεταδοθεί

Ερ. Τι ονομάζεται **Σύστημα**;

<u>Απάντηση</u>

Σύστημα είναι οτιδήποτε μπορεί να

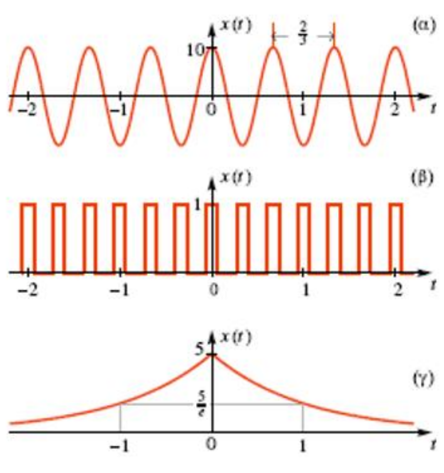
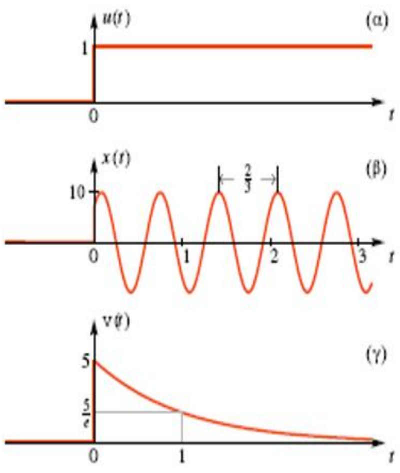
1. Χειριστεί σήματα
2. Καταγράψει σήματα
3. Μεταδώσει σήματα

Ερ. Ποιες **κατηγοριοποιήσεις σημάτων** γνωρίζετε;

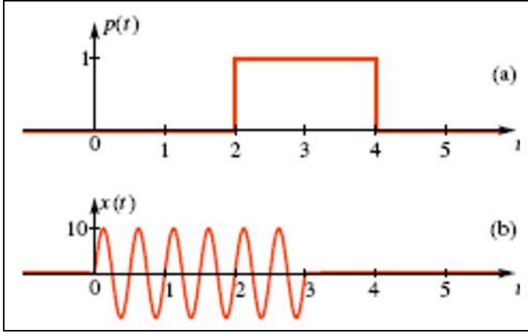
<u>Απάντηση</u>

Α) Κατηγοριοποίηση των σημάτων σε σχέση με τη διάρκεια τους

Εδώ έχουμε 3 κατηγορίες σημάτων σε σχέση με τη διάρκεια:

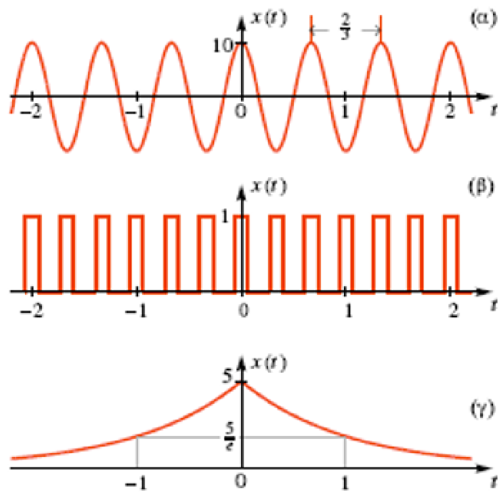
i). Δίπλευρα Σήματα Άπειρης Διάρκειας	**ii). Μονόπλευρα Σήματα Άπειρης Διάρκειας**
	$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ $x(t)=10\cos(3\pi t-\pi/4)u(t)$ $v(t)=5e^{-at}u(t)$ 

iii). Σήματα Πεπερασμένης Διάρκειας



β)Κατηγοριοποίηση των σημάτων σε σχέση με την επαναληψιμότητα ή μη ενός προτύπου

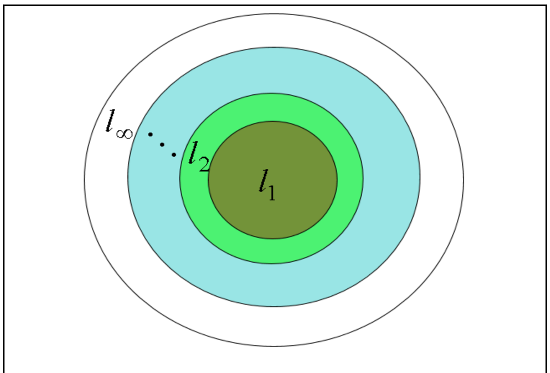
Περιοδικά και μη –Περιοδικά Σήματα



γ)

1. **Κατηγοριοποίηση των σημάτων διακριτού χρόνου σε σχέση με το αν υπάρχει ή όχι η lp μετρική τους με 1≤p<∞**

2. **Κατηγοριοποίηση των σημάτων συνεχούς χρόνου σε σχέση με το αν υπάρχει ή όχι η Lp μετρική τους με 1≤p<∞**



Παρατηρήσεις

1. Ο χώρος l_1 είναι υποχώρος του l_2, ο l_2 του υποχώρος του l_3 κ.ο.κ. Ο χώρος l_∞ δεν είναι ο μέγιστος χώρος (είναι μετρήσιμος χώρος και ας συμβολίζεται με το άπειρο)

2. Ο χώρος **l_1 περιέχει όλα τα ΦΕΦΕ Ευσταθή σήματα**

3. **Ο χώρος l_2 είναι ο χώρος Hilbert**. Στο χώρο Hilbert ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο και με βάση αυτό ορίζουμε βάσεις για τους χώρους σημάτων αλλιώς δεν μπορούμε να ορίσουμε βάσεις που να περιγράφουν όλο το χώρο.

4. Όταν ο χώρος **είναι πλήρης περιλαμβάνει όλα τα σήματα αυτής της διάστασης**

Ερ. Ποιές οι **φασματικές γραμμές του ακόλουθου σήματος**. Να κάνετε γραφική **παράσταση του φάσματος**

$$x(t) = 10 + 14\cos(200\pi t - \pi/3) + 8\cos(500\pi t + \pi/2)$$

Απάντηση

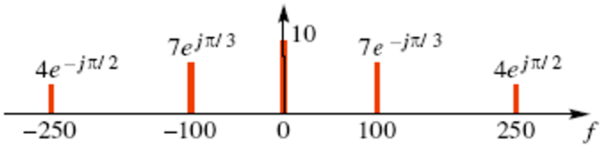
Φασματικές γραμμές:

$$\{\,(0, X_0)\,,\ (f_1, \tfrac{1}{2}X_1)\,,\ (-f_1, \tfrac{1}{2}X_1^*)\,, \ldots\ \ (f_k, \tfrac{1}{2}X_k)\,,\ (-f_k, \tfrac{1}{2}X_k^*)\,, \ldots\,\}$$

Άρα:

$$\{(0,\ 10),\ (100,\ 7e^{-j\pi/3}),\ (-100,\ 7e^{j\pi/3}),\ (250,\ 4e^{j\pi/2}),\ (-250,\ 4e^{-j\pi/2})\}$$

Γραφική παράσταση Φάσματος

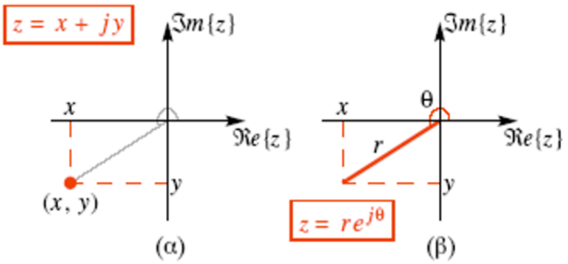


Ερ. Ποια η **καρτεσιανή και η πολική αναπαράσταση** ενός μιγαδικού;

Απάντηση

Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα: $z(t) = A\,e^{j(\omega_0 t + \phi)}$

Καρτεσιανή και πολική αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού



Ερ. Τι είναι ο **φάσορας**;

Απάντηση

Στα μιγαδικά εκθετικά σήματα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} z(t) &= A\,e^{j(\omega_0 t + \phi)} \\ &= A\cos(\omega_0 t + \phi) + jA\sin(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

$$z(t) = X\,e^{j\omega_0 t} = Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t} = Ae^{j\theta(t)}$$

$$\theta(t) = \omega_0 t + \phi$$

Φάσορας

Ερ. Πως κάνουμε **πρόσθεση ημιτονοειδών σημάτων ίδιας συχνότητας με φάσορες**;

Απάντηση

$$x(t)=\sum_{k=1}^{N} A_k\cos(\omega_0 t+\phi_k)=A\cos(\omega_0 t+\phi)$$

(i) Εύρεση της αναπαράστασης φάσορα $X_k = A_k e^{j\phi_k}$ καθενός σήματος.

(ii) Πρόσθεση των φασόρων για να βρούμε το $X = X_1 + X_2 + \cdots = Ae^{j\phi}$. Η υλοποίηση του βήματος αυτού, προϋποθέτει τη μετατροπή από πολική σε Καρτεσιανή και από Καρτεσιανή σε πολική αναπαράσταση.

(iii) Πολλαπλασιασμός του X με $e^{j\omega_0 t}$ για να πάρουμε το $z(t) = Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t}$.

(iv) Απομόνωση του πραγματικού μέρους για να πάρουμε $x(t) = \Re e\{Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t}\} = A\cos(\omega_0 t+\phi) = x_1(t) + x_2(t) + \ldots$.

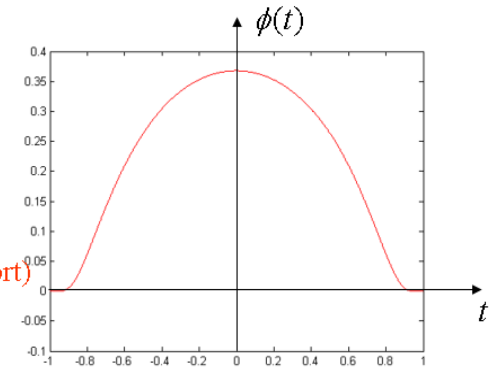
Ερ. Τι ονομάζεται **συνάρτηση δοκιμών**;

<u>**Απάντηση**</u>

Ο Schwartz θεώρησε ως «συναρτήσεις δοκιμών» όλες τις «απείρως ομαλές» συναρτήσεις και οι οποίες μηδενίζονται έξω από ένα πεπερασμένο διάστημα.

$$\phi(t)=\begin{cases} e^{\frac{|ab|}{(x-a)(x-b)}}, x\in(a,b) \\ 0, \textit{διαφορετικά} \end{cases}$$

Το κλειστό διάστημα $[a, b]$ ονομάζεται περιοχή υποστήριξης (support) της $\varphi(t)$.



Ερ. Τι ονομάζουμε **γενικευμένη συνάρτηση ή συναρτησιοειδές**;

<u>**Απάντηση**</u>

Έστω $\phi(t)$ συνάρτηση που ανήκει σε μία κλάση την οποία θα ονομάζουμε κλάση «συναρτήσεων δοκιμών». Αν το εσωτερικό γινόμενο:

$$\tau(\phi) = <\tau,\phi> = \int_{-\infty}^{\infty}\tau(t)\phi(t)dt$$

συγκλίνει, η $\tau(t)$ είναι μία γενικευμένη συνάρτηση, ή συναρτησοειδές, στο χώρο των «συναρτήσεων δοκιμών».

Ερ. Τι **ονομάζεται κατανομή και ποιες οι ιδιότητες** της;

<u>Απάντηση</u>

Η κατανομή ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\tau(\phi) = <\tau,\phi> = \int_{-\infty}^{\infty}\tau(t)\phi(t)dt}$$

όπου φ(t) μια συνάρτηση δοκιμών και τ(t) μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Ιδιότητες Κατανομής
α)Ολίσθηση Κατανομής

$$\tau_{t_0}(\varphi) = <\tau_{t_0},\varphi> = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t-t_0)\varphi(t)\,dt = \tau(\varphi_{t_0})$$

β)Αλλαγή Κλίμακας Κατανομής

Αν $\hat{\tau}(t) = \tau(at), a \in R$ τότε:

$$\hat{\tau}(\phi) = <\hat{\tau},\phi> = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(at)\phi(t)dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \tau(t)\phi(\frac{t}{a})dt = \frac{1}{|a|}\tau(\hat{\phi})$$

όπου: $\hat{\phi}(t) = \phi(\frac{t}{a})$

γ)Πολλαπλασιασμός Κατανομών
Αν τ(t) κατανομή και α(t) μια συνάρτηση τότε

$$<\tau a,\phi> = \int_{-\infty}^{\infty} (\tau(t)a(t))\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t)(a(t)\phi(t))dt = <\tau, a\phi>$$

δ)Παράγωγος Κατανομής
Η παράγωγος μιας κατανομής είναι μια νέα κατανομή

$$\tau^{(1)}(\phi) = <\tau^{(1)},\phi> \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{(1)}(t)\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \tau(t)\phi^{(1)}(t)dt = -<\tau,\phi^{(1)}> = -\tau(\phi^{(1)})$$

ε)Συνέλιξη Κατανομών

$$<\tau_1 * \tau_2,\phi> = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tau_1(\hat{t})\tau_2(\hat{t}-t)d\hat{t}\phi(t)dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau_1(\hat{t})[\int_{-\infty}^{\infty} \tau_2(\hat{t}-t)\phi(t)dt]d\hat{t}$$

Άσκηση με υπολογισμό εξόδου ΓΧΑ συστήματος
Δίνεται το ακόλουθο σύστημα:

$$x(t)=A\bullet e^{j(\Omega_0 t+\varphi_0)} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Ποια η έξοδος του συστήματος αυτού;
<u>Απάντηση</u>

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(r)\bullet h(t-r)dr=\int_{-\infty}^{\infty}h(r)\bullet x(t-r)dr=\int_{-\infty}^{\infty}h(r)\bullet A\bullet e^{j(\Omega_0(t-r)+\varphi_0)}dr=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(r)\bullet A\bullet e^{j\Omega_0 t}\bullet e^{-j\Omega_0 r}\bullet e^{-j\varphi_0}dr=\int_{-\infty}^{\infty}h(r)\bullet e^{-j\Omega_0 r}\left(A\bullet e^{j\Omega_0 t}\bullet e^{-j\varphi_0}\right)dr=\int_{-\infty}^{\infty}h(r)\bullet e^{-j\Omega_0 r}\bullet x(t)\bullet dr=H(j\Omega_0)\bullet x(t)=$$

$$=\left|H(j\Omega_0)\right|\bullet e^{-j\theta_0}\bullet A\bullet e^{j(\Omega_0(t-r)+\varphi_0)}=A\bullet\left|H(j\Omega_0)\right|\bullet e^{j(\Omega_0(t-r)+\varphi_0+\theta_0)}$$

όπου φ_0 είναι η φάση της εισόδου και θ_0 η φάση του συστήματος
Παρατήρηση
Το $H(j\Omega)$ ονομάζεται ιδιοτιμή και το $x(t)$ ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα.

Υπενθύμιση
1. **Όταν η είσοδος σε ένα ΓΧΑ είναι ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα (ιδιοσυνάρτηση ή ιδιοδιάνυσμα) χωρίς φάση** της μορφής:

$$x(t)=A\bullet e^{j\Omega_0 t} \text{ ή } x(t)=A\bullet e^{-j\Omega_0 t}$$

τότε το σήμα εξόδου θα είναι της μορφής:

$$y(t)=A\bullet|H(j\Omega_0)|e^{j(\Omega_0 t+<H(j\Omega_0))} \text{ ή αντίστοιχα } y(t)=A\bullet|H(j\Omega_0)|e^{-j(\Omega_0 t+<H(j\Omega_0))}$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος έχει ενισχυμένο πλάτος $A\bullet|H(j\Omega_0)|$, διατηρεί αναλλοίωτη τη συχνότητα της εισόδου και προσθέτει επιπλέον φάση στο σήμα εισόδου.

2. **Όταν η είσοδος στο ΓΧΑ είναι ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα (ιδιοσυνάρτηση ή ιδιοδιάνυσμα) με φάση** της μορφής

$$x(t)=A\bullet e^{j(\Omega_0 t+\varphi)} \text{ ή } x(t)=A\bullet e^{-j(\Omega_0 t+\varphi)}$$

τότε το σήμα εξόδου θα είναι της μορφής:

$$y(t)=A\bullet|H(j\Omega_0)|e^{j(\Omega_0 t+\varphi+<H(j\Omega_0))} \text{ ή } y(t)=A\bullet|H(j\Omega_0)|e^{-j(\Omega_0 t+\varphi+<H(j\Omega_0))} \text{ αντίστοιχα}$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος έχει ενισχυμένο πλάτος $A\bullet|H(j\Omega_0)|$, διατηρεί αναλλοίωτη τη συχνότητα και τη φάση της εισόδου και προσθέτει επιπλέον φάση στο σήμα εισόδου.

Άσκηση με υπολογισμό ολοκληρωμάτων
Ποιες οι τιμές των ακόλουθων ολοκληρωμάτων;

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t^2-1)\bullet dt$$

$$I_2=\int_{0}^{\infty}\delta(t^2-1)\bullet dt$$

$$I_3=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t^2-1)\bullet\varphi(t)\bullet dt$$

<u>Απάντηση</u>

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t^2-1)\bullet dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta((t-1)\bullet(t+1))\bullet dt=\varphi(-1)+\varphi(1)=2$$

$$I_2=\int_{0}^{\infty}\delta(t^2-1)\bullet dt=\int_{0}^{\infty}\delta((t-1)\bullet(t+1))\bullet dt=\varphi(-1)+\varphi(1)=1$$

$$I_3=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t^2-1)\bullet\varphi(t)\bullet dt=\varphi(-1)+\varphi(1)$$

Παρατήρηση

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \bullet \varphi(t)dt = \varphi(t_0)$ όπου $\varphi(t)$ η συνάρτηση στο χώρο δοκιμών.

Ορισμός: Αν $u^{(1)}(t)=\delta(t)$ είναι η **ασθενής ισότητα κατανομών** τότε η $\int_{-\infty}^{\infty} u^{(1)}(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt$ είναι η **ισχυρή ισότητα** κατανομών.

<u>Άσκηση με Υπολογισμό Μετασχηματισμού Fourier</u>

Να βρεθεί ο MF της συνάρτησης προσήμου sign(t) με θεωρία κατανομών

<u>Απάντηση</u>

Γνωρίζουμε ότι

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sign}(t) \Rightarrow \mathrm{sign}(t) = 2u(t) - 1 \Rightarrow x(t) = 2u(t) - 1$$

Παίρνουμε παράγωγο ως προς t και στα 2 μέλη της sign(t) και προκύπτει ότι:

$$x'(t) = \mathrm{sign}^{(1)}(t) = (2u(t)-1)' = 2\delta(t). \text{ Άρα } F\{x'(t)\} = F\{\mathrm{sign}'(t)\} = 2$$

Από ιδιότητα παραγώγισης στο χρόνο προκύπτει ότι:

$$F\{x'(t)\} = (j\Omega)^1 \bullet X(j\Omega) \Rightarrow F\{\mathrm{sign}^{(1)}(t)\} = (j\Omega) \bullet X(j\Omega) \Rightarrow X(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega} F\{\mathrm{sign}^{(1)}(t)\} \Rightarrow X(j\Omega) = \frac{2}{j\Omega} \quad (1)$$

1. Έστω οι κατανομές f και g.
2. Ισχύει ότι $t \bullet f(t) = t \bullet g(t)$ (ασθενής ισότητα κατανομών)
3. $j \bullet \Omega \bullet F(j\Omega) = j \bullet \Omega \bullet G(j\Omega)$ (ιδιότητα δυϊκότητας στην ασθενή ισότητα κατανομών)
4. Ισχύει ότι $f(t) = g(t) + \lambda\delta(t)$ (ισχυρή ισότητα κατανομών)
5. $F(j\Omega) = G(j\Omega) + \lambda\delta(\Omega)$ (ιδιότητα δυϊκότητας στην ισχυρή ισότητα κατανομών)

Α Τρόπος

Πολλαπλασιάζουμε και τα 2 μέλη της (1) με το $j \bullet \Omega$ και προκύπτει ότι:

$$\underbrace{(j \bullet \Omega)}_{(j\Omega)} \bullet \underbrace{X(j\Omega)}_{F(j\Omega)} = (j \bullet \Omega) \bullet \underbrace{\frac{2}{j\Omega}}_{G(j\Omega)}$$

Προσθέτουμε το $\lambda\delta(\Omega)$ για να δημιουργήσουμε την ισχυρή ισότητα κατανομών και προκύπτει ότι:

$$(j \bullet \Omega) \bullet X(j\Omega) = (j \bullet \Omega) \bullet \frac{2}{j\Omega} + \lambda\delta(\Omega)$$

Τώρα πρέπει να βρούμε την τιμή του λ.

Η $\mathrm{sign}(t)$ είναι περιττή συνάρτηση άρα και ο MF της δηλ. το $X(j\Omega)$ είναι επίσης περιττή συνάρτηση. Το $\frac{2}{j\Omega}$ είναι περιττή συνάρτηση ενώ το $\delta(\Omega)$ είναι άρτια συνάρτηση. Άρα για να ισχύει η ισότητα πρέπει το λ=0. Συνεπώς

$$X(j\Omega) = \frac{2}{j\Omega}$$

Εναλλακτικά:

Άρα πρέπει να υπολογίσουμε το λ. που είναι το πραγματικό μέρος του MF της sign(t). Παίρνουμε το MF της sign(t).

$$F\{\mathrm{sign}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sign}(t) \bullet e^{-jt\Omega} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sign}(t) \bullet (\cos(\Omega t) - j\sin(\Omega t))dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sign}(t) \bullet \cos(\Omega t)dt - j\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sign}(t) \bullet \cos(\Omega t)dt$$

Ο ΄2ος όρος αγνοείται διότι το λ είναι πραγματικός..

Παίρνουμε τον 1ο όρο του ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sign}(t) \bullet \cos(\Omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} odd \bullet even = \int_{-\infty}^{\infty} odd = 0$.Άρα $\mathrm{Re}\{F\{\mathrm{sign}(t)\}\} = 0$. Συνεπώς προκύπτει ότι $\boxed{X(j\Omega) = \frac{2}{j\Omega}}$

Ερ. Αν t•f(t)=t•g(t) όπου f(t) και g(t) κατανομές τότε $f(t) = g(t) + \lambda\delta(t)$ με λ∈R (**Απόδειξη της ισχυρής ισότητας κατανομών**)

<u>Απάντηση</u>

Δεχόμαστε ότι ισχύει η ισχυρή ισότητα κατανομών και πολλαπλασιάζουμε και τα 2 μέλη με μια συνάρτηση του χώρου δοκιμών και ολοκληρώνουμε.

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \bullet f(t) \bullet \varphi(t) \bullet dt = \int_{-\infty}^{\infty} t \bullet g(t) \bullet \varphi(t) \bullet dt + \lambda \bullet \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{t \bullet \delta(t) \bullet \varphi(t)}_{\varphi(0)=0} \bullet dt$$

Άρα $\int_{-\infty}^{\infty} t \bullet f(t) \bullet \varphi(t) \bullet dt = \int_{-\infty}^{\infty} t \bullet g(t) \bullet \varphi(t) \bullet dt$ και συνεπώς ισχύει ότι $t \bullet f(t) = t \bullet g(t)$. Καταλήγουμε στην ασθενή ισότητα κατανομών που εξορισμού ισχύει

Ερ. Πότε ένας **MF ορίζεται καλώς (δηλ. δεν απειρίζεται)**

<u>Απάντηση</u>

Για να ορίζεται ένας MF πρέπει να είναι καλά ορισμένο το ολοκλήρωμα. Το ολοκλήρωμα εξαρτάται από το x(t) το οποίο πρέπει να έχει κάποιες ιδιότητες.

$$|X(j\Omega)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bullet e^{-j\Omega t} dt\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t) \bullet e^{-j\Omega t}\right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \bullet \left|e^{-j\Omega t}\right| dt$$

Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $e^{-j\Omega t}$ δηλ. το $\left|e^{-j\Omega t}\right|$ είναι η τετραγωνική ρίζα του αριθμού με το συζυγή του δηλ. $\sqrt{e^{-j\Omega t} \bullet e^{j\Omega t}} = 1$

Άρα $|X(j\Omega)| = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$. Αν $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \|x\|_1^1 = l_1$ στάθμη σήματος. Άρα μας αρκεί η στάθμη σήματος να είναι φραγμένη δηλ.

$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ **δηλ. ο MF ορίζεται καλώς αν το σήμα συνεχούς χρόνου είναι ΦΕΦΕ ευσταθές**

Προσοχή: Η συνθήκη αυτή είναι ικανή και όχι αναγκαία!

<u>Άσκηση με αρχή Υπέρθεσης</u>

Να εξετάσετε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση y(n)=log(x(n)) είναι γραμμικό ή όχι/

<u>Απάντηση</u>

Εφαρμόζουμε την αρχή της υπέρθεσης για να ελέγξουμε αν το σύστημα είναι γραμμικό ή όχι

$y_A(n) = \log(ax_1(n) + bx_2(n))$

$y_B(n) = ay_1(n) + by_2(n) = a\log(x_1(n)) + b\log(x_2(n))$

Επειδή $y_A(n) \neq y_B(n)$ το σύστημα ΔΕΝ είναι γραμμικό

Ερ. Τι πρέπει να συμβαίνει ώστε το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση y(n)=x(n)*h(n) να **είναι αιτιατό**;

<u>Απάντηση</u>

Το σύστημα είναι ΓΧΑ αφού η έξοδος είναι η συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης **και συνεπώς για να είναι αιτιατό πρέπει η h(n)=0 για n<0**. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της συνέλιξης στα σήματα διακριτού χρόνου προκύπτει ο εξής τύπος:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \bullet x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{-1} h(m) \bullet x(n-m) + h(0) \bullet x(n-0) + \sum_{m=1}^{\infty} h(m) \bullet x(n-m)$$

- Οι όροι $\sum_{m=-\infty}^{-1} h(m) \bullet x(n-m)$ αντιπροσωπεύουν το παρελθόν
- Ο όρος $h(0) \bullet x(n-0)$ αντιπροσωπεύει το παρόν
- Οι όροι $\sum_{m=1}^{\infty} h(m) \bullet x(n-m)$ αντιπροσωπεύουν το μέλλον

Συνεπώς πρέπει όλοι οι όροι $\sum_{m=-\infty}^{-1} h(m) \bullet x(n-m)$ **που αντιπροσωπεύουν το παρελθόν να είναι μηδέν ώστε το σύστημα να είναι αιτιατό.**

Παρατήρηση

- Ένα σύστημα είναι αιτιατό όταν α)**η έξοδος δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου και β)σε ΓΧΑ σύστημα η κρουστική απόκριση να είναι μηδέν σε αρνητικές χρονικές στιγμές (για t<0 ή για n<0)**
- Η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος διακριτού χρόνου ορίζεται ως εξής $H\left(e^{j\bullet\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \bullet e^{-j\bullet\omega\bullet n}$
- Η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος συνεχούς χρόνου ορίζεται ως εξής $H(j \bullet \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \bullet e^{-j\bullet\Omega\bullet t} dt$

<u>Απόδειξη Ιδιότητας Συνέλιξης</u>

Να αποδείξετε την ιδιότητα ότι η συνέλιξη στο χρόνο αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό στη μιγαδική συχνότητα δηλ.

$$F\{x(n) * h(n)\} = F\{x(n)\} \bullet F\{h(n)\} \Rightarrow F\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) * h(n-m)\right\} = F\{x(n)\} \bullet F\{h(n)\} = X\left(e^{j\bullet\omega}\right) \bullet H\left(e^{j\bullet\omega}\right)$$

<u>Απάντηση</u>

Έστω $y(n) = x(n) * h(n)$. Ο μετασχηματισμός Fourier της y(n) ορίζεται ως εξής:

$$Y\left(e^{j\bullet\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \bullet e^{-j\bullet\omega\bullet n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x(n) * h(n)) \bullet e^{-j\bullet\omega\bullet n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \bullet h(n-m) \right) \bullet e^{-j\bullet\omega\bullet n} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \bullet 1 \bullet \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-m) \bullet e^{-j\bullet\omega\bullet n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \bullet e^{-j\bullet\omega\bullet m} \bullet e^{j\bullet\omega\bullet m} \bullet \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-m) \bullet e^{-j\bullet\omega\bullet n} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \bullet e^{-j\bullet\omega\bullet m} \bullet \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-m) \bullet e^{-j\bullet\omega\bullet n} \bullet e^{j\bullet\omega\bullet m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \bullet e^{-j\bullet\omega\bullet m} \bullet \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-m) \bullet e^{-j\bullet\omega\bullet(n-m)} =$$

$$= X\left(e^{j\bullet\omega}\right) \bullet H\left(e^{j\bullet\omega}\right)$$

Άρα $Y\left(e^{j\bullet\omega}\right) = X\left(e^{j\bullet\omega}\right) \bullet H\left(e^{j\bullet\omega}\right)$

<u>Άσκηση με Περιοδικότητα σήματος</u>

Να δείξετε ότι ο **μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος διακριτού χρόνου** που ορίζεται από τον τύπο $F\{x(n)\} = X\left(e^{j\bullet\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \bullet e^{-j\bullet\omega\bullet n}$ είναι **περιοδική συνάρτηση** με περίοδο 2π.

<u>Απάντηση</u>

Ο ορισμός της περιοδικής συνάρτησης είναι $\varphi(x) = \varphi(x+k), \forall x \in R$. Θα δείξουμε ότι:

$$X\left(e^{j\bullet\omega}\right) = X\left(e^{j\bullet(\omega+k)}\right) \Rightarrow X\left(e^{j\bullet\omega}\right) = X\left(e^{j\bullet(\omega+2\pi)}\right), k = 2\pi$$

$$X\left(e^{j\bullet(\omega+2\pi)}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \bullet e^{-j\bullet n\bullet(\omega+2\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \bullet e^{-j\bullet n\bullet\omega} \bullet e^{-j\bullet n\bullet 2\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \bullet e^{-j\bullet n\bullet\omega} = X\left(e^{j\bullet\omega}\right)$$

Παρατήρηση

$e^{-j2\pi n}$ =cos(2πn)-jsin(2πn)=1

Ορισμοί: Ενέργεια και Ισχύς Σήματος

1. **Η ενέργεια ενός σήματος διακριτού χρόνου x(n)** ορίζεται ως εξής: $\|x\|_2 = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

2. **Η ενέργεια ενός σήματος συνεχούς χρόνου x(t)** ορίζεται ως εξής: $\|x\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$

3. Η **ισχύς ενός σήματος x(t)** ορίζεται ως εξής: $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$

4. **Ο χώρος** $l_1 = \left\{ x(n) \in l : \|x\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \right\}$ **περιλαμβάνει όλα τα ΦΕΦΕ Ευσταθή Σήματα**

5. **Ο χώρος** $l_2 = \left\{ x(n) \in l : \|x\|_2 = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$ **περιλαμβάνει όλα τα ενεργειακά σήματα. Στο χώρο αυτό μπορούμε να ορίσουμε βάσεις για όλους τους υπόλοιπους χώρους**

6. **Το l είναι ο γενικός χώρος όλων των σημάτων στο διακριτό χρόνο και L ο γενικός χώρος όλων των σημάτων στο συνεχή χρόνο**

7. Αν έχουμε τους χώρους l_p και l_q με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ τότε αυτοί οι χώροι ονομάζονται συζυγείς

8. **Αν όλα τα σήματα που ανήκουν σε ένα χώρο συγκλίνουν τότε ο χώρος αυτός ονομάζεται πλήρης**

9. Ο χώρος l_p για διακριτό χρόνο ορίζεται γενικά ως: $l_p = \{x(n) \in l : \|x\|_p < \infty\}$όπου $\|x\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ (Γενικός Τύπος)

10. Ο χώρος L_p για συνεχή χρόνο ορίζεται γενικά ως: $L_p = \{x(t) \in L : \|x\|_p < \infty\}$όπου $\|x\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$ (Γενικός Τύπος)

11. Ο χώρος l_∞ για διακριτό χρόνο ορίζεται ως: $l_\infty = \{x(n) \in l : \max|x(n)| < \infty\}$. Είναι ο μεγαλύτερος πεπερασμένος χώρος αλλά επειδή τον συμβολίζουμε με άπειρο δεν σημαίνει ότι είναι και άπειρος (είναι μετρήσιμος)

12. Ισχύει ότι $l_1 < l_2 < l_3 < ..... < l_\infty$

13. **Ένα σύστημα είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές όταν** $\|h\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

14. $< x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \bullet y(n)$

15. $< x, x >= \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \bullet x(n) = \|x\|_2^2$

<u>Άσκηση με Σύγκλιση</u>

Δίνεται η ακολουθία $x_N(n)=\begin{cases} x(n) & |n|\le N \\ 0 & |n|>N \end{cases}$

Να δείξετε ότι η ακολουθία $x_N(n)$ συγκλίνει στο $x(n)$

<u>Απάντηση</u>

Για να συγκλίνει η ακολουθία $x_N(n)$ πρέπει το $\lim_{N\to\infty} x_N(n)=x(n)$ ή αλλιώς επειδή $x(n)\in l_p \Rightarrow \|x\|_p^p<\infty$ για να συγκλίνει η ακολουθία $x_N(n)$ θα πρέπει $\lim_{N\to\infty}\|x-x_N\|_p^p\to 0$

$$\|x-x_N\|_p^p=\|x\|_p^p-\|x_N\|_p^p=\|x\|_p^p-\sum_{|n|\le N}|x(n)|^p=\sum_{|n|\le N}|x(n)|^p+\sum_{|n|>N}|x(n)|^p-\sum_{|n|\le N}|x(n)|^p=\sum_{|n|>N}|x(n)|^p=0$$

Άρα επειδή $\lim_{N\to\infty}\|x-x_N\|_p^p\to 0$ η ακολουθία $x_N(n)$ συγκλίνει.

<u>Παρατήρηση</u>

Πότε θα είναι συνεχές το σύστημα $S(x_N(n))=y_N(n)$

<u>Απάντηση</u>

Όταν $\lim_{N\to\infty}S(x_N(n))=\lim_{N\to\infty}y_N(n)\Rightarrow S(\lim_{N\to\infty}x_N(n))=\lim_{N\to\infty}y_N(n)$

Άσκηση 1 στο χώρο l_1 (ΦΕΦΕ Ευστάθεια)

Να εξετάσετε αν το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση

$$h(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{N} & n=0,1,2,...N-1\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

είναι **ΦΕΦΕ Ευσταθές**.

<u>Απάντηση</u>

Για να είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές πρέπει $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$ δηλ. η κρουστική απόκριση να είναι πεπερασμένος αριθμός

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{N-1}\left|\frac{1}{N}\right|=\left|\frac{1}{N}\right|\sum_{n=0}^{N-1}1=N\frac{1}{N}=1$$

άρα το σύστημα είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές.

Άσκηση 2 στο χώρο l_1 (ΦΕΦΕ Ευστάθεια)

Δίνεται το σήμα: $x(n)=\frac{1}{n}, n\ge 1$. Το $x(n)\in l_1$;

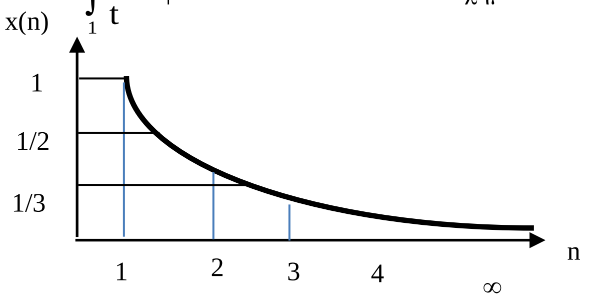
<u>Απάντηση</u>

Για να δείξουμε ότι ένα σήμα $\in l_1$ πρέπει να δείξουμε ότι $\|x\|_1<\infty$. Υπολογίζουμε την $\|x\|_1$ ως εξής:

$$\boxed{\|x\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}x(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}>\int_1^{\infty}\frac{1}{t}dt=[\ln(t)]_1^{\infty}=\ln(\infty)-\ln(1)=\ln(\infty)\to\infty}$$

Άρα $\|x\|_1>\infty$ (το σήμα δεν φράσσεται) και συνεπώς το σήμα $x(n)\notin l_1$ άρα δεν είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές.

Ο λόγος που $\sum_{n=1}^{\infty}x(n)>\int_1^{\infty}\frac{1}{t}dt$ φαίνεται από το ακόλουθο σχήμα:



Ορισμοί

1. $\delta_k(n) = \delta(n-k)$

2. $$x(n) = x(n) * \delta(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \bullet \delta(n-k)$$

3. $$<\delta_k, \delta_l> = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Άσκηση με περιοδικότητα

Ορίζουμε το $f_k(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ με n=0,1,2,…,N-1 και k=0,1,2,…,N-1. Να δείξτε ότι η ακολουθία $f_k(n)$ είναι περιοδική με περίοδο lN δηλ. $f_k(n) = f_k(n + lN)$.

<u>Απάντηση</u>

$$f_k(n + lN) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n+lN)} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \bullet e^{j2\pi l} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = f_k(n)$$ με $e^{j2\pi l}=\cos(2\pi l)+j\sin(2\pi l)=1$

Άσκηση 1 με εσωτερικό γινόμενο

Να υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο $<f_k, f_l>$ όπου $f_k(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

<u>Απάντηση</u>

$$<f_k, f_l> = f_k^T \bullet f_l^* = \sum_{n=0}^{N-1} f_k(n) \bullet f_l^*(n) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}ln} \right) = \frac{1}{N} \bullet \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \bullet e^{-j\frac{2\pi}{N}ln} \right) =$$

$$= \frac{1}{N} \bullet \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-l)n} = \frac{1}{N} \bullet \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j\frac{2\pi}{N}(k-l)} \right)^n =$$

$$= \frac{1}{N} \bullet \begin{cases} \dfrac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k-l)N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k-l)}} & k \neq l \\ N & k = l \end{cases}$$

$$= \frac{1}{N} \bullet \begin{cases} \dfrac{1 - e^{j2\pi(k-l)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k-l)}} & k \neq l \\ N & k = l \end{cases}$$

$$= \frac{1}{N} \bullet \begin{cases} 0 & k \neq l \\ N & k = l \end{cases} \Rightarrow$$

$$= \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases} = <\delta_k, \delta_l>$$

Άσκηση 2 με εσωτερικό γινόμενο

$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1} a_k \bullet f_k(n), n=0,1,\ldots,N-1$. Αυτό ονομάζεται **σχέση σύνθεσης**. Να υπολογίσετε το $<x,f_l>$

<u>Απάντηση</u>

$$<x,f_l>=x^T \bullet f_l^* = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\bullet f_l^*(n)=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k \bullet f_k(n)\right)\bullet f_l^*(n)=\sum_{k=0}^{N-1} a_k \bullet\left(\sum_{n=0}^{N-1} f_k(n)\bullet f_l^*(n)\right)=\sum_{k=0}^{N-1} a_k \bullet <f_k,f_l>$$

Πριν αποδείξαμε ότι $<f_k,f_l>=\begin{cases}0 & k\neq l\\ 1 & k=l\end{cases}$

Άρα προκύπτει ότι:

1. **Αν** $k=l$ τότε $<x,f_l>=\sum_{k=0}^{N-1} a_k$

2. **Αν** $k\neq l$ τότε $<x,f_l>=0$

Παρατήρηση

$a(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\bullet f_k^*(n)$ **Αυτό ονομάζεται σχέση ανάκτησης.**

Ορισμοί

Ακολουθία Kronecker $\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$

Ποια είναι η Συνάρτηση που αποτελεί, στο συνεχή χρόνο, το ανάλογο της Ακολουθίας Kronecker;

$$\delta(t)=\begin{cases}1 & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$ ΟΧΙ!

Ορισμός «Συνάρτησης» δέλτα από τον Dirac:

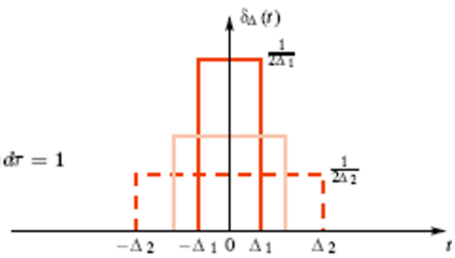
$$\delta(t)=0 \quad \text{για } t\neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

Η «Συνάρτηση» δέλτα ως όριο ακολουθίας συναρτήσεων:

$$\delta_\Delta(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\Delta} & -\Delta<t<\Delta\\ 0 & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

Είναι προφανές ότι $\forall\ \Delta$ ισχύει: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\Delta(\tau)d\tau=1$



Μπορούμε να ορίσουμε την «Συνάρτηση» δέλτα ως ακολούθως: $\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$

<u>Ορισμοί</u>

1. $x(n) = x(n) * \delta(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \bullet \delta(n-k)$. **Κάθε σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να γραφεί ως συνέλιξη με την δ(n)**

2. $x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(k) \bullet \delta(t-k) dk$ **Κάθε σήμα συνεχούς χρόνου μπορεί να γραφεί ως συνέλιξη με την δ(t)**

3. $< \varphi, \delta > = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \bullet \delta(t) dt = \varphi(0)$

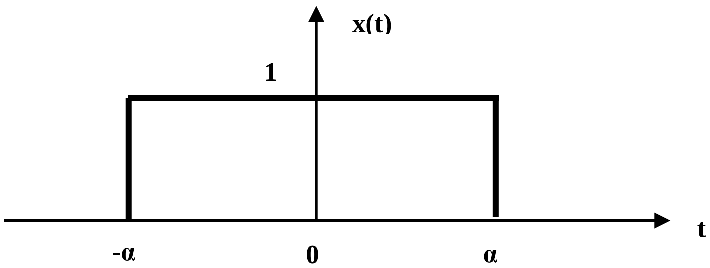
4. $< \tau, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 > = \alpha < \tau, \varphi_1 > + \beta < \tau, \varphi_2 >$ όπου τ κατανομή και φ_1, φ_2 συναρτήσεις δοκιμών

5. Αν $\tau_1(t) = \tau_2(t), \forall t \neq t_0$ **τότε οι κατανομές τ_1 και τ_2 ονομάζονται συναρτησιακά ισοδύναμες**

Άσκηση με υπολογισμό MF μιας ορθογώνιας συνάρτησης στο χρόνο δηλ. μιας συνάρτησης με πεπερασμένη χρονική διάρκεια

Να βρεθεί ο MF της συνάρτησης: $x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \alpha \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$

<u>Απάντηση</u>



$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-j\Omega t} dt \, \frac{1}{-j\Omega} \left[e^{-j\Omega t} \right]_{-\alpha}^{\alpha} = -\frac{1}{j\Omega} \left(e^{-j\Omega\alpha} - e^{j\Omega\alpha} \right) = \frac{\left(e^{-j\Omega\alpha} - e^{j\Omega\alpha} \right)}{2j} \bullet \frac{2}{\Omega} = \sin(\Omega\alpha) \bullet \frac{2}{\Omega} =$$

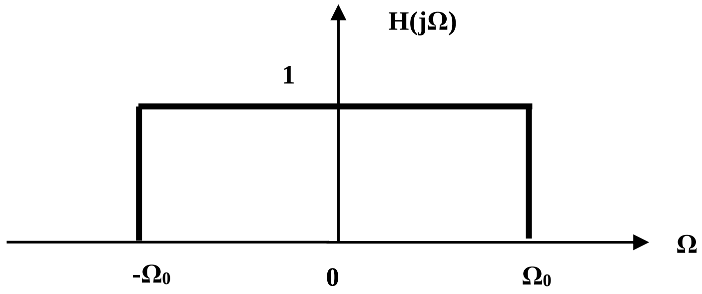
$$= \frac{\sin(\Omega\alpha)}{\Omega\alpha} \bullet 2\alpha = \operatorname{sinc}(\Omega\alpha) \bullet 2\alpha$$

Παρατηρήσεις

1. $x(t) \in l_1$ διότι στο χώρο l_1 ανήκουν όλα τα ΦΕΦΕ Ευσταθή Σήματα
2. $X(j\Omega) \notin l_1$ διότι η συνάρτηση sinc δεν έχει μέγιστη συχνότητα δηλ. δεν είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές Σήμα
3. $X(j\Omega) \in l_\infty$ διότι η συνάρτηση sinc δεν έχει μέγιστη συχνότητα (η συχνότητα της τείνει στο άπειρο)

Άσκηση με υπολογισμό σήματος που ο MF του είναι μια ορθογώνια συνάρτηση στη συχνότητα δηλ. μια συνάρτηση με πεπερασμένο εύρος ζώνης

<u>Απάντηση</u>



$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_0}^{\Omega_0}e^{j\Omega t}\bullet d\Omega=\frac{1}{2\pi}\bullet\frac{1}{jt}\left[e^{-j\Omega t}\right]_{-\Omega_0}^{\Omega_0}=\frac{1}{2\pi jt}\left(e^{j\Omega_0 t}-e^{-j\Omega_0 t}\right)=\frac{\left(e^{j\Omega_0 t}-e^{-j\Omega_0 t}\right)}{2j}\bullet\frac{1}{\pi t}=$$

$$=\sin(\Omega_0 t)\bullet\frac{1}{\pi t}=\frac{\sin(\Omega_0 t)}{\pi t}=\frac{\sin(\Omega_0 t)}{\pi t}\bullet\frac{\Omega_0}{\Omega_0}=\frac{\sin(\Omega_0 t)}{\Omega_0 t}\bullet\frac{\Omega_0}{\pi}=\sin c(\Omega_0 t)\bullet\frac{\Omega_0}{\pi}$$

Άρα $h(t)=\frac{\sin(\Omega_0 t)}{\Omega_0 t}\bullet\frac{\Omega_0}{\pi}=\sin c(\Omega_0 t)\bullet\frac{\Omega_0}{\pi}\leftrightarrow h(j\Omega)=\left\langle\begin{matrix}1 & |\Omega|\le\Omega_0\\ 0 & |\Omega|>\Omega_0\end{matrix}\right.$

<u>Απόδειξη Θεωρήματος Parseval</u>

Να δείξετε ότι: $\int_{-\infty}^{\infty}|x_1(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X_1(j\Omega)|^2d\Omega$ **(ΑΔΕ-Αρχή Διατήρηση Ενέργειας)**

<u>Απάντηση</u>

Σύμφωνα με την ιδιότητα $F\{x_1(t)\bullet x_2(t)\}=\frac{1}{2\pi}\left(X_1(j\Omega)*X_2(j\Omega)\right)$ προκύπτει ότι:

$$F\{x_1(t)\bullet x_2(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)\bullet x_2(t)\bullet e^{-j\Omega\bullet t}dt=\frac{1}{2\pi}\bullet\int_{-\infty}^{\infty}X_1(j\bullet\theta)\bullet X_2\left(j\bullet(\Omega-\theta)\right)d\theta$$

1.Θέτουμε το Ω=0

2.Θέτουμε όπου $x_2(t)$ το $x_1^*(t)$ και προκύπτει ότι. $\boxed{x_1(t)\bullet x_1^*(t)=|x_1(t)|^2}$

Με αυτές τις αντικαταστάσεις προκύπτει ότι: $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)\bullet x_1^*(t)\bullet e^{-j\Omega\bullet t}dt=\frac{1}{2\pi}\bullet\int_{-\infty}^{\infty}X_1(j\theta)\bullet X_2(-j\theta)d\theta}$

Υπολογίζουμε το $X_2(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_2(t)e^{-j\Omega\bullet t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x_1^*(t)e^{-j\Omega\bullet t}dt=\left(\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)e^{j\Omega\bullet t}dt\right)^*=X_1^*(-j\Omega)$

Άρα $X_2(j\Omega)=X_1^*(-j\Omega)\Rightarrow X_2(-j\Omega)=X_1^*(j\Omega)$

Συνεπώς:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}|x_1(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\bullet\int_{-\infty}^{\infty}X_1(j\bullet\theta)\bullet X_1^*(j\bullet\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\bullet\int_{-\infty}^{\infty}|X_1(j\theta)|^2d\theta}$$

Παρατήρηση

1. **Ο τύπος $\|x_1\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\|X_1\|_2^2$ ονομάζεται και Αρχή Διατήρηση Ενέργειας (ΑΔΕ).Αυτός είναι εναλλακτικός τρόπος διατύπωσης του θεωρήματος Parseval**
2. Ορίζοντας το MF ως εσωτερικό γινόμενο σήματος με μιγαδική συνάρτηση από το χώρο δοκιμών μπορούμε να ορίσουμε την ενέργεια ενός σήματος ως προς τη συχνότητα.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bullet e^{-j\Omega t} = < x, \varphi_{\Omega} >$$

Ερ. Να βρεθεί ο MF της συνάρτησης $\cos(\Omega_0 t) = \dfrac{e^{j\Omega_0 \bullet t} + e^{-j\Omega_0 \bullet t}}{2}$

Απάντηση

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega) = \frac{e^{j\Omega_0 \bullet t} + e^{-j\Omega_0 \bullet t}}{2}$$

$$e^{j\Omega_0 \bullet t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$$

$$\frac{1}{2} e^{j\Omega_0 \bullet t} \leftrightarrow \pi\delta(\Omega - \Omega_0)$$

$$e^{-j\Omega_0 \bullet t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega + \Omega_0)$$

$$\frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 \bullet t} \leftrightarrow \pi\delta(\Omega + \Omega_0)$$

$$\cos(\Omega_0 \bullet t) = \frac{e^{j\Omega_0 \bullet t} + e^{-j\Omega_0 \bullet t}}{2} \leftrightarrow \pi\delta(\Omega - \Omega_0) + \pi\delta(\Omega + \Omega_0)$$

Ορισμός: Ιδιότητα Κλιμάκωσης ή Βάθμωσης στο μετασχηματισμό Fourier

$$x(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X\left(j\frac{\Omega}{\alpha}\right) \text{ ή } F\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} X\left(j\frac{\Omega}{\alpha}\right)$$

Για 0<α<1 έχουμε επιμήκυνση της διάρκειας του σήματος στο χρόνο και συμπίεση στη συχνότητα

Για α>1 έχουμε συμπίεση τ3ης διάρκειας του σήματος στο χρόνο και επιμήκυνση στη συχνότητα

Απόδειξη ιδιότητας Κλιμάκωσης ή Βάθμωσης

$$F\{x(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t) e^{-j\Omega \bullet t} dt$$

Θέλουμε ο παράγοντας ως προς τον οποίο παραγωγίζουμε να είναι ο αt και όχι ο t, γιαυτό πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε το ολοκλήρωμα με α (θεωρούμε α>0). Επίσης πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε τον εκθέτη του e με α.

Άρα $F\{x(\alpha t)\} = \dfrac{1}{|\alpha|} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t) \bullet e^{-j\frac{\Omega}{\alpha}\alpha t} \bullet \alpha \bullet d(t) = \dfrac{1}{|\alpha|} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t) \bullet e^{-j\frac{\Omega}{\alpha}\alpha t} \bullet d(\alpha t)$

Θέτουμε $\varphi = \alpha t$ και προκύπτει ότι: $F\{x(\alpha t)\} = \dfrac{1}{|\alpha|} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\varphi) \bullet e^{-j\frac{\Omega}{\alpha}\varphi} \bullet d\varphi = \dfrac{1}{|\alpha|} X\left(j\dfrac{\Omega}{\alpha}\right)$

Ορισμός: **Ιδιότητα διαφόρισης (παραγώγισης) στη μιγαδική συχνότητα** $F\{t^n \bullet f(t)\} = j^n \bullet F^{(n)}(j\Omega)$

Απόδειξη ιδιότητας Διαφόρισης

Έστω ότι $F(j\Omega) = F\{f(t)\}$

$$F^{(1)}(j\Omega) = \frac{dF(j\Omega)}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bullet e^{-jt\Omega} dt\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bullet (-jt) \bullet e^{-jt\Omega} dt = -j\int_{-\infty}^{\infty} t \bullet f(t) \bullet e^{-jt\Omega} dt = -j \bullet F\{t \bullet f(t)\}$$

$$F^{(2)}(j\Omega) = \frac{d^2}{d\Omega^2} F(j\Omega) = -j\frac{d}{d\Omega}\int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-jt\Omega} dt = -j \bullet \int_{-\infty}^{\infty} -j \bullet t^2 \bullet f(t) \bullet e^{-jt\Omega} dt = (-j)^2 \bullet F\{t^2 \bullet f(t)\}$$

……

$$F^{(n)}(j\Omega)=(-j)^n F\{t^n f(t)\} \Rightarrow F\{t^n \bullet f(t)\}=\frac{F^{(n)}(j\Omega)}{(-j)^n} \Rightarrow F\{t^n \bullet f(t)\}=\frac{F^{(n)}(j\Omega)}{(-1)^n \bullet j^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\{t^n \bullet f(t)\}=\frac{F^{(n)}(j\Omega)\bullet j^n}{(-1)^n \bullet j^n \bullet j^n} \Rightarrow F\{t^n \bullet f(t)\}=\frac{F^{(n)}(j\Omega)\bullet j^n}{(-1)^n \bullet \left(j^{2^n}\right)} \Rightarrow F\{t^n \bullet f(t)\}=\frac{F^{(n)}(j\Omega)\bullet j^n}{(-1)^n \bullet (-1)^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\{t^n \bullet f(t)\}= j^n \bullet F^{(n)}(j\Omega)$$

Ορισμός: Σειρά Fourier

1. Η εκθετική σειρά Fourier δίνεται από τον τύπο: $\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bullet e^{jk\Omega_0 t}$ Δείχνει τη σχέση k συντελεστών και μιγαδικών εκθετικών σημάτων. Το $\tilde{x}(t)$ είναι ένα περιοδικό σήμα. **Τα περιοδικά σήματα δεν ανήκουν στο χώρο L_2. Έχουν σταθερή ενέργεια ανά περίοδο αλλά καταναλώνουν ενέργεια που → ∞**

2. Οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier δίνονται από τον τύπο: $c_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{x}(t)\bullet e^{-jk\Omega_0 t}\bullet dt$. Τα c_k (συντελεστές της σειράς Fourier) είναι οι προβολές ενός περιοδικού σήματος επάνω στην ορθοκανονική βάση που εκφράζεται από τα $e^{-jk\Omega_0 t}$

3. Ορίζουμε $<c_k,\varphi_k>$ με $\varphi_k=e^{jk\Omega_0 t}$ δηλ. $\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}< c_k,\varphi_k >$

4. Υπολογίζουμε $<\varphi l,\varphi k>$ $<\varphi_l,\varphi_k>=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\varphi_l(t)\bullet\varphi_k^*(t)\bullet dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jl\Omega_0 t}\bullet e^{-jk\Omega_0 t}\bullet dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j(l-k)\Omega_0 t}dt$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

1. Για $l=k$ τότε $<\varphi_l,\varphi_k>=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^0 dt = T$
2. Για $l\neq k$ τότε:

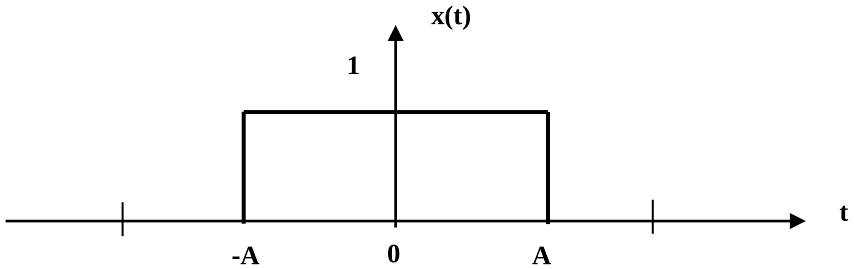
$$<\varphi_l,\varphi_k>=\frac{1}{j(l-k)\Omega_0}\left[e^{j(l-k)\Omega_0 t}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}=\frac{1}{j(l-k)\Omega_0}\left(e^{j(l-k)\Omega_0\frac{T}{2}}-e^{-j(l-k)\Omega_0\frac{T}{2}}\right)=\frac{2}{(l-k)\Omega_0}\sin\left((l-k)\Omega_0\frac{T}{2}\right).$$

Για $\Omega_0=\frac{2\pi}{T}$ προκύπτει ότι $<\varphi_l,\varphi_k>=\frac{2}{(l-k)\Omega_0}\sin((l-k)\pi)=0$

<u>Θέμα με Σειρά Fourier ενός Τετραγωνικού Παλμού</u>

α. Πως μπορούμε από ένα **τετραγωνικό παλμό να δημιουργήσουμε ένα περιοδικό σήμα με περίοδο Α**;

<u>Απάντηση</u>



Παίρνουμε την περιοδική επέκταση του τετραγωνικού παλμού x(t) και δημιουργούμε το ακόλουθο περιοδικό σήμα:

$$\boxed{\tilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)*\delta(t-nT)=x(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=x(t)*\Delta(t)}$$

όπου $\Delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ είναι το **λεγόμενο τραίνο Poisson δηλαδή ένα σύνολο κρουστικών συναρτήσεων δ που είναι τοποθετημένες σε σειρά σε απόσταση Τ η μία από την άλλη**.

β. Να βρεθεί η **σειρά Fourier της περιοδικής επέκτασης του τετραγωνικού παλμού.**

<u>Απάντηση</u>

Οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι οι ακόλουθοι:

$$c_k=\frac{1}{T}\bullet\int_{-A}^{A}x(t)\bullet e^{-jk\Omega_0 t}\bullet dt=\frac{1}{T}\bullet\int_{-A}^{A}e^{-jk\Omega_0 t}\bullet dt=\frac{1}{T}\bullet\int_{-A}^{A}e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\bullet dt=\frac{1}{T}\bullet\frac{1}{-jk\frac{2\pi}{T}}\left[e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\right]_{-A}^{A}=$$

$$=\frac{1}{T}\bullet\frac{1}{-jk\frac{2\pi}{T}}\left(e^{-jk\frac{2\pi}{T}A}-e^{jk\frac{2\pi}{T}A}\right)=\frac{1}{-k\bullet\pi}\bullet\left(\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{T}A}-e^{jk\frac{2\pi}{T}A}}{2j}\right)=\frac{1}{k\bullet\pi}\bullet\left(\frac{e^{jk\frac{2\pi}{T}A}-e^{-jk\frac{2\pi}{T}A}}{2j}\right)=$$

$$=\frac{\sin\left(k\frac{2\pi}{T}A\right)}{k\bullet\pi}=\frac{\bullet\sin\left(k\frac{2\pi}{2A}A\right)}{k\bullet\pi}=\frac{\sin(k\pi)}{k\pi}=\sin c(k\pi),k\neq 0$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά το συντελεστή $c_0=\frac{1}{T}\bullet\int_{-A}^{A}\tilde{x}(t)\bullet dt=\frac{1}{T}\int_{-A}^{A}dt=\frac{2A}{T}=\frac{2A}{2A}=1$

Η σειρά Fourier είναι η ακόλουθη:

$$\boxed{\tilde{x}(t)=c_0+\sum_{k=-\infty\wedge k\neq 0}^{\infty}c_k\bullet e^{jk\Omega_0 t}=1+\sum_{k=-\infty\wedge k\neq 0}^{\infty}\frac{\sin(k\pi)}{k\pi}\bullet e^{jk\frac{\pi}{A}t}=1+\sum_{k=-\infty\wedge k\neq 0}^{\infty}\sin c(k\pi)\bullet e^{jk\frac{\pi}{A}t}}$$

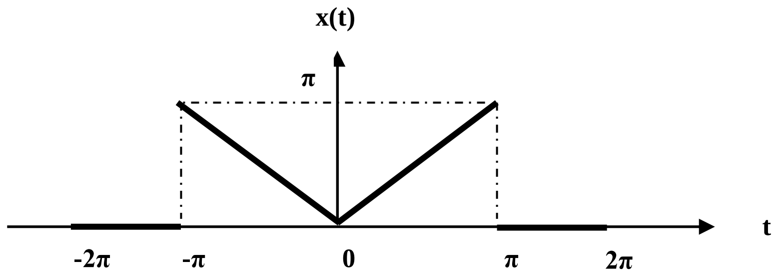
Παρατήρηση

Η παράγωγος περιοδικού σήματος θα είναι και αυτή περιοδικό σήμα

Άσκηση με σειρά Fourier

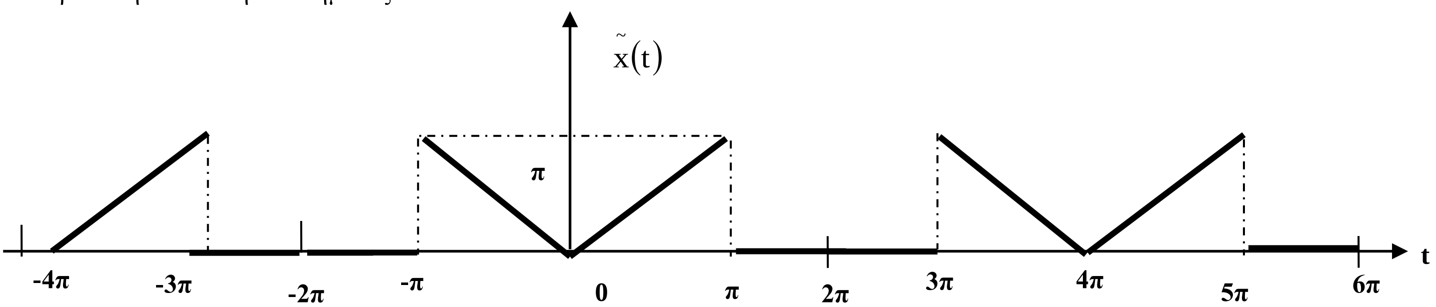
Να βρεθεί η **σειρά Fourier της περιοδικής επέκτασης του σήματος** $x(t)=\begin{cases}-t & -\pi \le t<0 \\ t & 0\le t\le \pi \\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$ με περίοδο T=4π.

Το σήμα αυτό σχηματικά έχει την ακόλουθη μορφή:

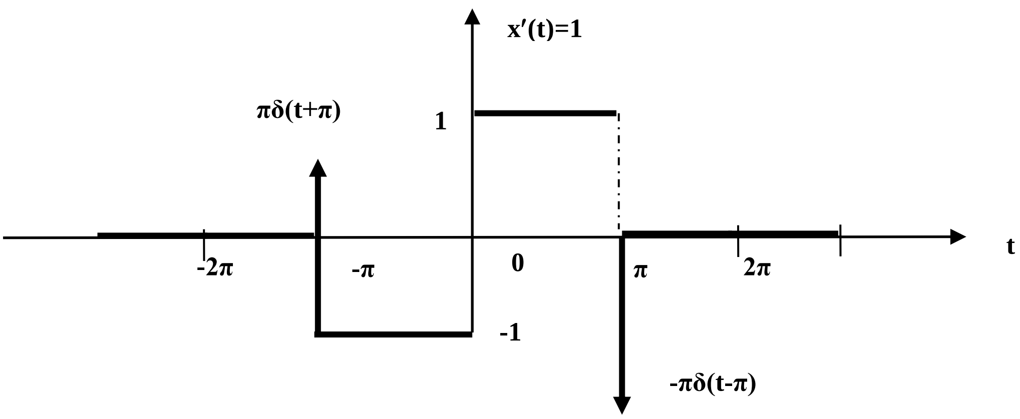


Απάντηση

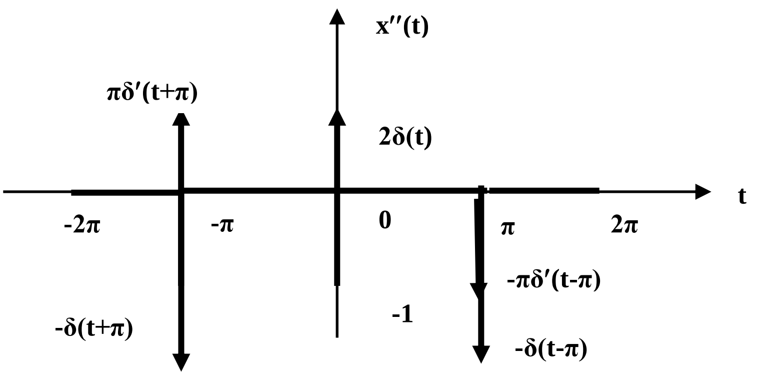
Η περιοδική επέκταση του σήματος είναι:



Η 1η παράγωγος του σήματος x(t) είναι η ακόλουθη:



Η 2η παράγωγος του σήματος x(t) είναι η ακόλουθη:



Οι συντελεστές της $2^{ης}$ παραγώγου είναι οι εξής:

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{T}\int_{-2\pi}^{2\pi} x''(t)\bullet e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{4\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi}\left(\pi\delta'(t+\pi)-\delta(t+\pi)+2\delta(t)-\delta(t-\pi)-\pi\delta'(t-\pi)\right)e^{-jn\frac{1}{2}t}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-2\pi}^{2\pi}\delta'(t+\pi)e^{-jn\frac{1}{2}t}dt - \frac{1}{4\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi}\delta(t+\pi)e^{-jn\frac{1}{2}t}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi}\delta(t)e^{-jn\frac{1}{2}t}dt - \frac{1}{4\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi}\delta(t-\pi)e^{-jn\frac{1}{2}t}dt - \frac{1}{4}\int_{-2\pi}^{2\pi}\delta'(t-\pi)e^{-jn\frac{1}{2}t}dt =$$

$$= \frac{1}{4}(-1)\left(e^{-jn\frac{1}{2}(-\pi)}\right)_{t=-\pi} - \frac{1}{4\pi}e^{-jn\frac{1}{2}(-\pi)} + \frac{1}{2\pi}e^{-jn\frac{1}{2}0} - \frac{1}{4\pi}e^{-jn\frac{1}{2}(\pi)} - \frac{1}{4}(-1)\left(e^{-jn\frac{1}{2}(\pi)}\right)_{t=\pi} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-\frac{jn}{2}e^{jn\frac{\pi}{2}}\right) - \frac{1}{4\pi}e^{jn\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{4\pi}e^{-jn\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\left(-\frac{jn}{2}e^{-jn\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{4}\frac{jn}{2}e^{jn\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4\pi}e^{jn\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{4\pi}e^{-jn\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\frac{jn}{2}e^{-jn\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4}\frac{jn}{2}\left(e^{jn\frac{\pi}{2}} - e^{-jn\frac{\pi}{2}}\right) - \frac{1}{4\pi}\left(e^{jn\frac{\pi}{2}} + e^{-jn\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2\pi} + \frac{2j}{4}\bullet\frac{jn}{2}\left(\frac{e^{jn\frac{\pi}{2}} + e^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2j}\right) - \frac{2}{4\pi}\left(\frac{e^{jn\frac{\pi}{2}} + e^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} - \frac{n}{4}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\pi}\bullet\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) - \frac{n}{4}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \frac{n}{4}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Οι κανονικοί συντελεστές είναι οι εξής:

$$c_n = \frac{c_n^{(k)}}{(jn\Omega_0)^k} = \frac{c_n^{(2)}}{\left(\frac{jn}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\pi}\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \frac{n}{4}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{-\frac{n^2}{4}} = \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{\pi n^2}\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right), n \neq 0$$

Αυτοί οι συντελεστές ισχύουν μόνο για n≠0, οπότε θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τον όρο c_0.

Ο όρος

$$c_0 = \frac{1}{4\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi}x(t)dt = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{0}-t\bullet dt + \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\pi}t\bullet dt = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{\pi} =$$

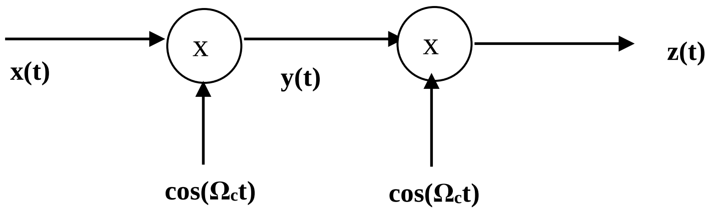
$$= -\frac{1}{4\pi}\left(0-\frac{\pi^2}{2}\right) + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}-0\right) = \frac{\pi^2}{8\pi} + \frac{\pi^2}{8\pi} = \frac{2\pi^2}{8\pi} = \frac{\pi}{4}$$

Άρα η **ζητούμενη σειρά Fourier** είναι:

$$\boxed{x(t) = c_0 + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty}c_n e^{jn\Omega_0 t} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=-\infty \wedge n\neq 0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{\pi n^2}\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\bullet e^{jn\frac{t}{2}}}$$

Άσκηση με υπολογισμό MF Εξόδου

Να βρεθεί ο MF του σήματος z(t) από το ακόλουθο σχήμα:



Απάντηση

$$y(t)=x(t)\bullet\cos(\Omega_c t)\leftrightarrow Y(j\Omega)=\frac{1}{2}\left[X(j(\Omega-\Omega_c))+X(j(\Omega+\Omega_c))\right]$$

ή εναλλακτικά

$$F\{y(t)\}=F\{x(t)\bullet\cos(\Omega_c t)\}=Y(j\Omega)=\frac{1}{2}\left[X(j(\Omega-\Omega_c))+X(j(\Omega+\Omega_c))\right]$$

$$z(t)=y(t)\bullet\cos(\Omega_c t)\leftrightarrow Z(j\Omega)=\frac{1}{2}\left[Y(j(\Omega-\Omega_c))+Y(j(\Omega+\Omega_c))\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\bullet\left(X(j(\Omega-\Omega_c-\Omega_c))+X(j(\Omega-\Omega_c+\Omega_c))\right)+\frac{1}{2}\bullet\left(X(j(\Omega+\Omega_c-\Omega_c))+X(j(\Omega+\Omega_c+\Omega_c))\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\bullet X(j(\Omega-2\Omega_c))+\frac{1}{4}\bullet X(j(\Omega+2\Omega_c))+\frac{1}{2}\bullet X(j(\Omega))$$

ή εναλλακτικά:

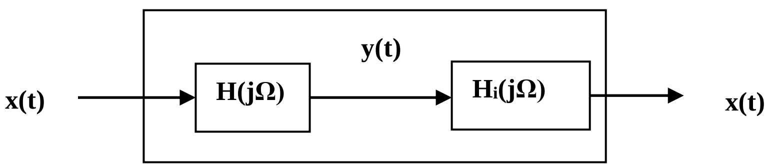
$$F\{z(t)\}=F\{y(t)\bullet\cos(\Omega_c t)\}=Z(j\Omega)=\frac{1}{2}\left[Y(j(\Omega-\Omega_c))+Y(j(\Omega+\Omega_c))\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\bullet\left(X(j(\Omega-\Omega_c-\Omega_c))+X(j(\Omega-\Omega_c+\Omega_c))\right)+\frac{1}{2}\bullet\left(X(j(\Omega+\Omega_c-\Omega_c))+X(j(\Omega+\Omega_c+\Omega_c))\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\bullet X(j(\Omega-2\Omega_c))+\frac{1}{4}\bullet X(j(\Omega+2\Omega_c))+\frac{1}{2}\bullet X(j(\Omega))$$

Άσκηση με υπολογισμό Κρουστικής Απόκρισης

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος ώστε η τελική έξοδος να είναι ίση με την αρχική είσοδο.



Απάντηση

Τα 2 συστήματα που είναι σε σειρά μπορούν να αντικατασταθούν από ένα σύστημα με κρουστική απόκριση τη συνέλιξη των 2 κρουστικών δηλ. **$h(t)*h_i(t)$** και απόκριση συχνότητας **$H(j\Omega)\bullet H_i(j\Omega)$. Για να πάρουμε ως έξοδο την αρχική είσοδο πρέπει η κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος να είναι $h(t)=\delta(t)$** (ταυτοτικό σύστημα) και η απόκριση συχνότητας του συνολικού συστήματος δηλ. **το $H(j\Omega)\bullet H_i(j\Omega)$ να είναι ίση με 1 που είναι ο MF της $\delta(t)$**

Άσκηση με ΦΕΦΕ Ευστάθεια (Απόδειξη Συνθήκης για ΦΕΦΕ Ευστάθεια σε ΓΧΑ σύστημα)

Τι πρέπει να ισχύει ώστε το σύστημα να είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές;

Απάντηση

Υποθέτουμε ότι το σήμα x(n) είναι φραγμένο δηλ. $|x(n)|=M<\infty$. Θέλουμε $|y(n)|<\infty\ \forall n$.

$$|y(n)| = \left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)\bullet h(m)\right| \le \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x(n-m)\bullet h(m)| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x(n-m)|\bullet|h(m)| \le M\bullet \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| < \infty$$

πρέπει δηλ. η κρουστική απόκριση να είναι πεπερασμένη δηλ. θα πρέπει να ανήκει στο χώρο l1.

<u>Ιδιότητες ΜF</u>

1. Συνέλιξη και Συνεχούς Μετασχηματισμού Fourier

Συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε γινόμενο στο πεδίο συχνότητας

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

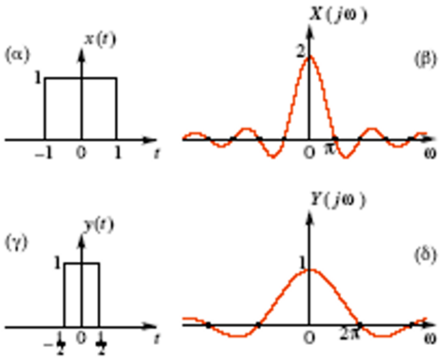
2. Ιδιότητα Κλιμάκωσης

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$y(t) = x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = \frac{1}{|a|}X(j\omega/a)$$

Το χρονικό άπλωμα ενός σήματος θα συμπιέσει το μετασχηματισμό Fourier του.

Η χρονική συμπίεση ενός σήματος θα απλώσει το μετασχηματισμό Fourier του.



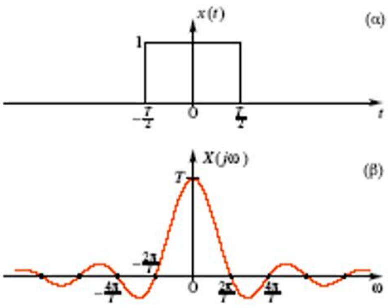
Α περίπτωση
όταν a<1 τότε ο **άξονας του χρόνου διαστέλλεται ενώ ο αντίστοιχος άξονας των συχνοτήτων συστέλλεται**.
όταν a>1 τότε ο **άξονας του χρόνου συστέλλεται ενώ ο αντίστοιχος άξονας των συχνοτήτων διαστέλλεται**.

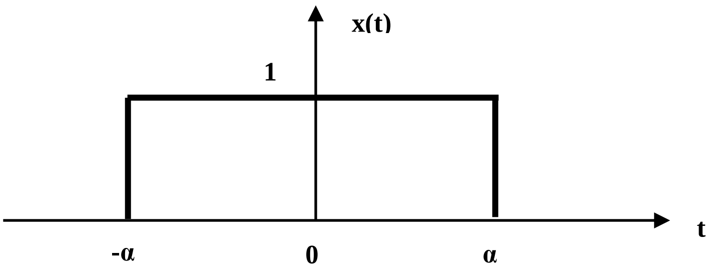
3. Σήματα Περιορισμένης Χρονικής Διάρκειας

•Τετραγωνικός Παλμός:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2}T \le t < \frac{1}{2}T \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$X(j\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}$$



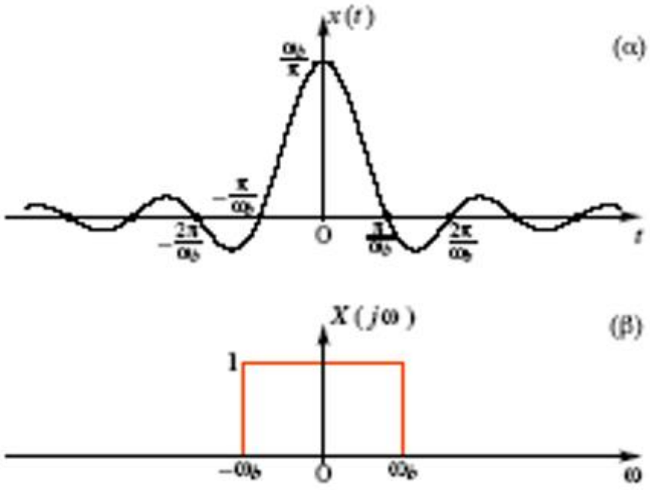


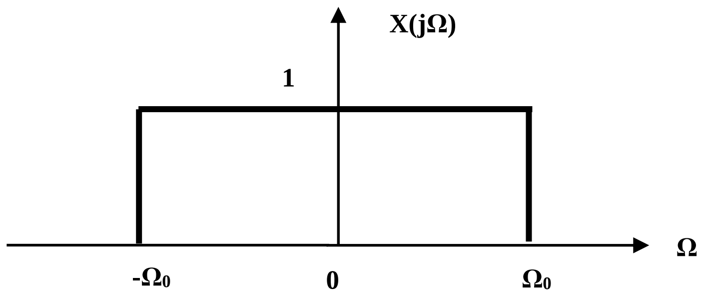
$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-j\Omega t}dt\, \frac{1}{-j\Omega}\left[e^{-j\Omega t}\right]_{-\alpha}^{\alpha} = -\frac{1}{j\Omega}\left(e^{-j\Omega\alpha} - e^{j\Omega\alpha}\right) = \frac{\left(e^{-j\Omega\alpha} - e^{j\Omega\alpha}\right)}{2j}\bullet\frac{2}{\Omega} = \sin(\Omega\alpha)\bullet\frac{2}{\Omega} =$$

$$= \frac{\sin(\Omega\alpha)}{\Omega\alpha}\bullet 2\alpha = \operatorname{sinc}(\Omega\alpha)\bullet 2\alpha$$

4. Σήματα Περιορισμένου Εύρους Ζώνης

•Συνθήκη: $X(j\omega) = 0$ για $|\omega| > \omega_b$ με $\omega_b < \infty$.





$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} e^{j\Omega t}\bullet d\Omega = \frac{1}{2\pi}\bullet\frac{1}{jt}\left[e^{-j\Omega t}\right]_{-\Omega_0}^{\Omega_0} = \frac{1}{2\pi jt}\left(e^{j\Omega_0 t} - e^{-j\Omega_0 t}\right) = \frac{\left(e^{j\Omega_0 t} - e^{-j\Omega_0 t}\right)}{2j}\bullet\frac{1}{\pi t} =$$

$$= \sin(\Omega t)\bullet\frac{1}{\pi t} = \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega_0 t}\bullet\frac{\Omega_0}{\pi} = \sin c(\Omega t)\bullet\frac{\Omega_0}{\pi}$$

5. Συνέλιξη και Συνεχούς Χρόνου Μετασχηματισμός Fourier

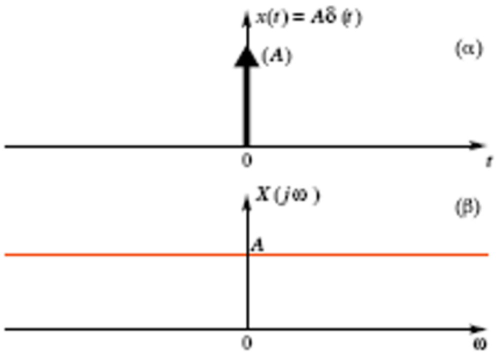
Ο πολλαπλασιασμός συναρτήσεων στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε συνέλιξη των μετασχηματισμών Fourier.

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$y(t) = p(t)x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * P(j\omega)$$

6. Μετασχηματισμός Κρουστικών Σημάτων

Πεδίο-Χρόνου		*Πεδίο-Συχνότητας*
1	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$2\pi\delta(\omega)$

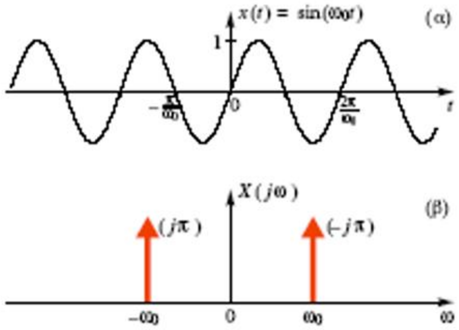


7. Μετασχηματισμός Μιγαδικών Εκθετικών Σημάτων

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$e^{j\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

8. Μετασχηματισμός Ημιτονικών Σημάτων



Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$A\cos(\omega_0 t+\phi) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi A e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0)+\pi A e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0)$$

9. Χρονική Αναστροφή

Ιδιότητα Χρονικής Αντιστροφής F{x(-t)}

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$x(-t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(-j\omega)$$

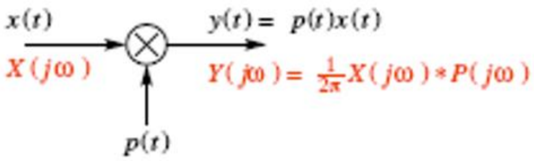
10. Ιδιότητα Διαφόρισης στο Χρόνο

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} (j\omega)^k X(j\omega)$$

11. Διαμόρφωση Πλάτους

•Διαμόρφωση Πλάτους



Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j(\omega-\omega_0))$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Γραμμικότητα	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)$
Συζυγηκότητα	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Χρονική-Αναστροφή	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Βάθμωση	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X(j(\omega/a))$
Καθυστέρηση	$x(t-t_d)$	$e^{-j\omega t_d} X(j\omega)$
Διαμόρφωση	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(j(\omega-\omega_0))$
Διαμόρφωση	$x(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}X(j(\omega-\omega_0)) + \frac{1}{2}X(j(\omega+\omega_0))$
Παραγώγιση	$\frac{d^k x(t)}{dt^k}$	$(j\omega)^k X(j\omega)$
Συνέλιξη	$x(t) * h(t)$	$X(j\omega)H(j\omega)$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)p(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$

<u>Άσκηση με ίδια σήματα</u>

Παίρνουμε 2 σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$. Θεωρούμε ότι $x_1(t) \equiv x(t)$ και $x_2(t) \equiv x(t - t_0)$. Ποια η χρονική διαφορά των $x_1(t)$ και $x_2(t)$;

<u>Απάντηση</u>

$$F\{x_1(t)\} = X_1(j\Omega) = X(j\Omega)$$

$$F\{x(t_2)\} = X_2(j\Omega) = e^{-j\Omega \bullet t_0} \bullet X(j\Omega)$$

$$\frac{X_2(j\Omega)}{X_1(j\Omega)} = e^{-j\Omega \bullet t_0} \Rightarrow \ln\left(\frac{X_2(j\Omega)}{X_1(j\Omega)}\right) = \ln\left(e^{-j\Omega \bullet t_0}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{X_2(j\Omega)}{X_1(j\Omega)}\right) = -j\Omega \bullet t_0 \Rightarrow j \bullet \ln\left(\frac{X_2(j\Omega)}{X_1(j\Omega)}\right) = \Omega \bullet t_0$$

Το πηλίκο των 2 Fourier ορίζεται ως μια συνάρτηση $L(\Omega \bullet t_0) = \Omega \bullet t_0$ και αντιπροσωπεύει μια ευθεία. Αν παραγωγίσουμε την $L(\Omega \bullet t_0)$ ως προς Ω τότε βρίσκουμε τη χρονική διαφορά t_0 που είναι η ακόλουθη: $L'(\Omega \bullet t_0) = t_0$

Παρατήρηση

1. Η χρονική διαφορά t_0 μεταξύ των 2 σημάτων υπολογίζεται μέσω του πηλίκου των 2 MF
2. Η κανονικοποίηση ενός σήματος γίνεται διαιρώντας το σήμα με τη 1η νόρμα ή τη 2η νόρμα.

<u>Θεωρία για Σειρές Fourier με άρτια και περιττή συμμετρία</u>

Να απλοποιηθεί η σειρά Fourier $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bullet e^{jk\Omega_0 t}$ στην περίπτωση που το περιοδικό σήμα είναι άρτιο ή περιττό.

<u>Απάντηση</u>

Έστω ότι το $\tilde{x}(t)$ είναι άρτιο. Αυτό σημαίνει ότι $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(-t)$. Εξισώνουμε τις αντίστοιχες σειρές Fourier:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bullet e^{jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bullet e^{-jk\Omega_0 t} \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cos(k\Omega_0 t) + j\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \sin(k\Omega_0 t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cos(k\Omega_0 t) - j\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \sin(k\Omega_0 t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2j \bullet \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bullet \sin(k\Omega_0 t) = 0$$

Πρέπει το $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bullet \sin(k\Omega_0 t) = 0$. Αναπτύσσουμε το άθροισμα αυτό σε όρους:

$$\ldots\ldots\ldots + c_{-2} \bullet \sin(-2\Omega_0 t) + c_{-1} \bullet \sin(-1\Omega_0 t) + c_0 \bullet \sin(0\Omega_0 t) + c_1 \bullet \sin(1\Omega_0 t) + c_2 \bullet \sin(2\Omega_0 t) + \ldots\ldots\ldots = 0 \Rightarrow$$

$$\ldots\ldots - c_{-2} \bullet \sin(2\Omega_0 t) - c_{-1} \bullet \sin(1\Omega_0 t) + c_0 \bullet \sin(0\Omega_0 t) + c_1 \bullet \sin(1\Omega_0 t) + c_2 \bullet \sin(2\Omega_0 t) + \ldots\ldots\ldots = 0 \Rightarrow$$

Για να είναι το άθροισμα ίσο με μηδέν πρέπει $c_k = c_{-k}$

Άρα για **άρτια συμμετρία σήμα** $c_{-k} = c_k$ η σειρά Fourier παίρνει τη μορφή:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bullet e^{jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cos(k\Omega_0 t) + j\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \sin(k\Omega_0 t) = \ldots. + c_{-1} \bullet \cos(-1\Omega_0 t) + c_0 \bullet \cos(0\Omega_0 t) + c_1 \bullet \cos(1\Omega_0 t) + \ldots..$$

$$+ j(\ldots\ldots + c_{-1} \bullet \sin(1\Omega_0 t) + c_0 \bullet \sin(0\Omega_0 t) + c_1 \bullet \sin(1\Omega_0 t) + \ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots + 2c_2 \bullet \cos(2\Omega_0 t) + 2c_1 \bullet \cos(\Omega_0 t) + c_0 =$$

$$= c_0 + 2 \bullet \sum_{k=1}^{\infty} c_k \bullet \cos(k\Omega_0 t)$$

Άρα: $\boxed{\tilde{x}(t) = c_0 + 2 \bullet \sum_{k=1}^{\infty} c_k \bullet \cos(k\Omega_0 t)}$

και για **περιττή συμμετρία** $c_{-k} = -c_k$ η σειρά Fourier παίρνει τη μορφή:

$$\boxed{\tilde{x}(t) = 2j \bullet \sum_{k=1}^{\infty} c_k \bullet \sin(k\Omega_0 t)}$$

Συμπέρασμα

- Άρτια συμμετρία στο περιοδικό σήμα $\tilde{x}(-t)=\tilde{x}(t)$ σημαίνει και άρτια συμμετρία στους συντελεστές c_k της σειράς Fourier δηλαδή $c_k = c_{-k}$
- Περιττή συμμετρία στο περιοδικό σήμα $\tilde{x}(-t)=-\tilde{x}(t)$ σημαίνει και περιττή συμμετρία στους συντελεστές c_k. της σειράς Fourier δηλ $-c_k = c_{-k}$

<u>Άσκηση με σειρά Fourier περιττής συμμετρίας</u>

Δίνονται τα ακόλουθα:

1. $\tilde{x}(t)$ περιττής συμμετρίας, πραγματικό

2. T=4

3. $c_k, \forall k>1$

4. $\frac{1}{4}\int_0^4 \left|\tilde{x}(t)\right|^2 dt = 1$

Να βρεθεί το σήμα.

<u>Απάντηση</u>

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bullet e^{jk\Omega_0 t} = 2j\bullet\sum_{k=1}^{\infty} c_k \bullet \sin(k\Omega_0 t) = 2j\bullet\sum_{k=1}^{\infty} c_k \bullet \sin\left(k\frac{2\pi}{4}t\right) = 2j\bullet c_1 \bullet \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

Πρέπει ο συντελεστής $j\bullet c_1$ να είναι πραγματικός.. Για να συμβεί αυτό πρέπει $c_1 = j\hat{c}_1$ όπου $\hat{c}_1 \in R$. Βρίσκουμε την ακριβή τιμή του c_1.

$$\frac{1}{4}\int_0^4 \left|\tilde{x}(t)\right|^2 dt = \left|c_1\right|^2$$

<u>Άσκηση με Έλεγχο Γραμμικότητας, Χρονικής Αμεταβλητότητας και Ιδιοσήματα</u>

Δίνεται η ακόλουθη **διαφορική εξίσωση με μη σταθερούς συντελεστές**: $y(t)=t^4 \bullet x^{(4)}(t)+5t\bullet x^{(1)}(t)$

a) Είναι το σύστημα γραμμικό;
b) Είναι το σύστημα Χ.Α.;
c) Να δείξετε ότι τα $f_k(t)=t^k$ είναι **ιδιοσήματα** του συστήματος.

<u>Απάντηση</u>

a) Θέτοντας στην είσοδο ένα γραμμικό συνδυασμό 2 εισόδων δηλ. $x(t)=a\bullet x_1(t)+b\bullet x_2(t)$ προκύπτει ότι:

$$y_A(t)=t^4\bullet\left(a\bullet x_1^{(4)}(t)+b\bullet x_2^{(4)}(t)\right)+5t\left(a\bullet x_1^{(1)}(t)+b\bullet x_2^{(1)}(t)\right)$$

Μετά παίρνουμε ένα γραμμικό συνδυασμό 2 εξόδων και προκύπτει ότι:

$$y_B(t)=a\bullet y_1(t)+b\bullet y_2(t)\Rightarrow y_B(t)=a\bullet\left(t^4x_1^{(4)}(t)+5t\bullet x_1^{(1)}(t)\right)+b\bullet\left(t^4x_2^{(4)}(t)+5t\bullet x_2^{(1)}(t)\right)$$

Επειδή $y_A(t)=y_B(t)$ το σύστημα είναι γραμμικό.

b) Εφαρμόζουμε χρονική ολίσθηση στην είσοδο δηλ. όπου x(t) το $x(t-t_0)$ προκύπτει ότι:

$$y_A(t)=t^4\bullet x^{(4)}(t-t_0)+5t\bullet x^{(1)}\bullet(t-t_0)$$

Μετά εφαρμόζουμε χρονική ολίσθηση στην έξοδο και προκύπτει ότι:

$$y_B(t)=(t-t_0)^4\bullet x^{(4)}(t-t_0)+5(t-t_0)\bullet x^{(1)}(t-t_0)$$

Επειδή $y_A(t)=y_B(t)$ το σύστημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο.

c)

Ορισμός: **Το ξ(t) ονομάζεται ιδιοσήμα ή ιδιοσυνάρτηση ενός συστήματος ανν T(ξ(t))=y(t)=λ•ξ(t)**

Για να δείξουμε αν το $f_k(t)=t^k$ είναι ιδιοσήμα θα πρέπει να εξετάσουμε αν ικανοποιείται αυτός ο ορισμός.

Το σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση $y(t)=t^4x^{(4)}(t)+5tx^{(1)}(t)$.

Θεωρούμε ως σήμα εισόδου το $x(t)=f_k(t)=t^k$ (Πάντα ένα ιδιοσήμα είναι σήμα εισόδου)

$$x^{(1)}(t)=f_\kappa^{(1)}(t)=\left(t^k\right)'=k\bullet t^{k-1}$$
$$x^{(4)}(t)=f_k^{(4)}(t)=k\bullet(k-1)\bullet(k-2)\bullet(k-3)\bullet t^{k-4}$$

Άρα ή έξοδος του συστήματος είναι:

$$y(t)=t^4\left(k\bullet(k-1)\bullet(k-2)\bullet(k-3)\bullet t^{k-4}\right)+5t\bullet\left(k\bullet t^{k-1}\right)=$$
$$=t^k\bullet k\bullet(k-1)\bullet(k-2)\bullet(k-3)+5\bullet k\bullet t^k=\left(k\bullet(k-1)\bullet(k-2)\bullet(k-3)+5\bullet k\right)\bullet t^k=\left(\prod_{m=0}^{3}(k-m)+5k\right)\bullet t^k$$

Άρα η έξοδος είναι της μορφής $y(t)=\lambda\bullet t^k$ οπότε το $f_k(t)=t^k$ είναι ιδιοσήμα

<u>Άσκηση με Έξοδο Φίλτρου</u>

Δίνεται ένα περιοδικό σήμα με περίοδο $T_0=\dfrac{\pi}{4}$ που περιγράφεται από τη σειρά Fourier $\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\bullet e^{jk\Omega_0 t}$. Το σήμα αυτό μπαίνει ως είσοδος σε ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας:

$$H(j\Omega)=\begin{cases}1 & |\Omega|\le 75\text{rad/sec}\\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

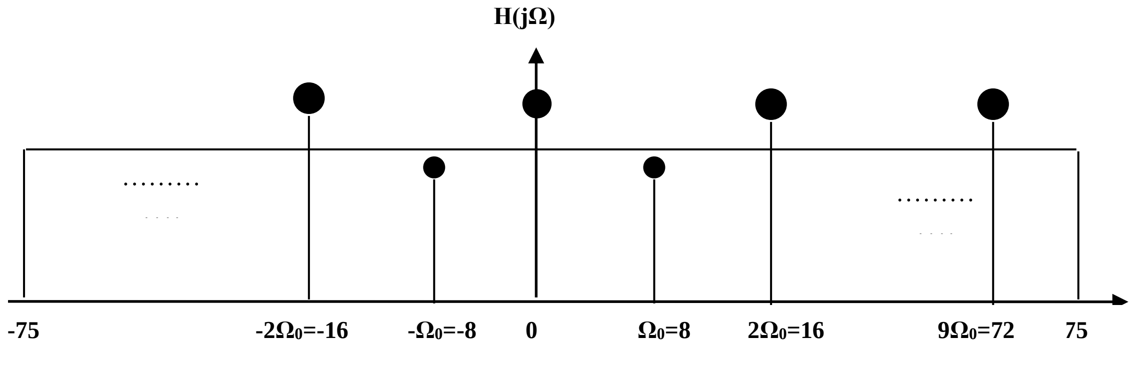
Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος.

<u>Απάντηση</u>

Η έξοδος του συστήματος είναι: $y(t)=\tilde{x}(t)*h(t)\leftrightarrow Y(j\Omega)=\tilde{X}(j\Omega)\bullet H(j\Omega)$

Η συχνότητα του σήματος εισόδου είναι: $\Omega_0=\dfrac{2\pi}{T_0}=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8\text{rad/sec}$

Για να βρούμε το σήμα εξόδου πρέπει να δούμε ποιοι όροι από το σήμα εισόδου, που είναι περιοδικό, περνάνε μέσα από το φίλτρο. Πιο συγκεκριμένα θα περάσουν όλοι οι όροι της εισόδου που η συχνότητα τους είναι στο [-75,75]. Ο κεντρικός όρος της εισόδου για k=0 έχει συχνότητα 0 και περνά από το φίλτρο. Ο όρος για k=1 έχει συχνότητα 8 και επίσης περνά από φίλτρο. Επίσης ο όρος για k=-1 έχει συχνότητα -8 και περνά από φίλτρο. Συνολικά όλοι οι όροι της εισόδου που περνάνε από το φίλτρο είναι από k=-9 (με συχνότητα -72 rad/sec) μέχρι k=9 (με συχνότητα 72 rad/sec), δηλαδή η 9η αρμονική είναι η τελευταία αρμονική που θα περάσει από το φίλτρο. (Οι συντελεστές c_k της σειράς Fourier ονομάζονται αρμονικές).

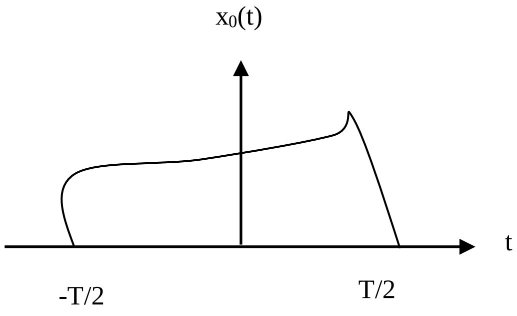


Άρα η έξοδος του φίλτρου είναι:

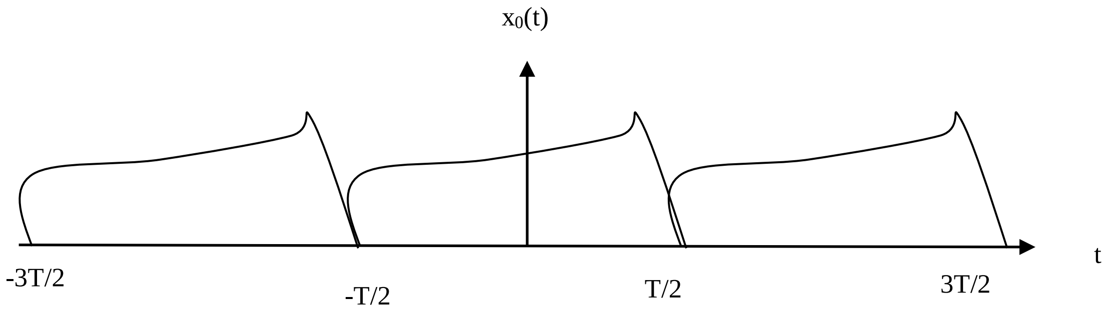
$$\boxed{y(t)=\sum_{k=-9}^{9}c_k\bullet e^{jk\Omega_0 t}}$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος του φίλτρου είναι επίσης ένα περιοδικό σήμα με συγκεκριμένους όρους (όσοι περνάνε από το φίλτρο)

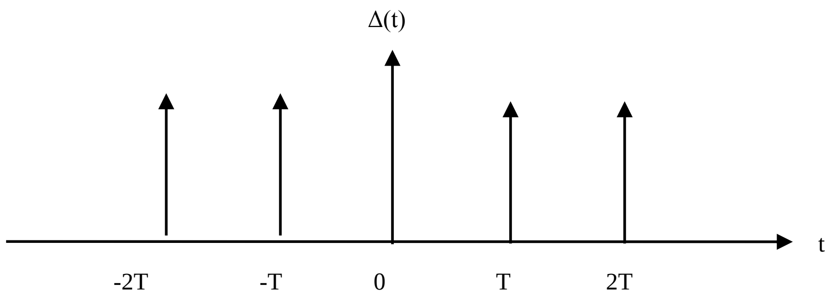
<u>Άσκηση με Περιοδική Επέκταση Σήματος και MF Περιοδικής Επέκτασης Σήματος</u>
α)Δίνεται το σήμα $x_0(t)$ που ορίζεται στο διάστημα [-T/2, T/2]. **Ποια είναι η περιοδική επέκταση του σήματος**;
<u>Απάντηση</u>
Το αρχικό σήμα $x_0(t)$ είναι ένα τυχαίο σήμα στο διάστημα [-T/2, T/2] όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Η περιοδική επέκταση του $x_0(t)$ είναι το $\tilde{x}(t)$ και φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Το σήμα $\Delta(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$ είναι το **λεγόμενο τραίνο Poisson δηλαδή ένα σύνολο κρουστικών συναρτήσεων δ που είναι τοποθετημένες σε σειρά σε απόσταση Τ η μία από την άλλη** όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα



Η περιοδική επέκταση του σήματος είναι:

$$\boxed{\tilde{x}(t)=x_0(t)*\Delta(t)=x_0(t)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_0(t)*\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_0(t-kT)}$$

Απόδειξη του τύπου $\tilde{x}(t)=\Delta(t)*x_0(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_0(t-kT)$

$$\tilde{x}(t)=x_0(t)*\Delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\Delta(r)\bullet x_0(t-r)dr=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(r-kT)\bullet x_0(t-r)\right)dr=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(r-kT)\bullet x_0(t-r)dr=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_0(t-kT)$$

Παρατήρηση

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\bullet\delta(n-k)$$

β) Να δείξετε ότι ο **MF (φάσμα) της περιοδικής επέκτασης του σήματος είναι ο ακόλουθος**:

$$\tilde{X}(j\Omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\bullet\delta(\Omega-k\Omega_0)$$

<u>Απάντηση</u>

$$\tilde{X}(j\Omega)=F\left\{\tilde{x}(t)\right\}=F\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\bullet e^{jk\Omega_0 t}\right\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\bullet F\left\{e^{jk\Omega_0 t}\right\}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\bullet\delta(\Omega-k\Omega_0)$$

<u>Προσοχή</u>

Ο MF (φάσμα) της περιοδικής επέκτασης του σήματος <u>εναλλακτικά</u> είναι ο ακόλουθος

Δίνεται το σήμα συνεχούς χρόνου $x_0(t)$ που είναι διάφορο του μηδενός στο διάστημα $|t|\leq T_0/2$ και η περιοδική επέκταση του $\tilde{x}_0(t)=x_0(t)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_0)$, όπου δ(.) η γενικευμένη συνάρτηση δέλτα. **Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος μπορεί να εκφραστεί ως** $\tilde{X}_0(j\Omega)=\dfrac{2\pi}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_0(j\Omega)\bullet\delta(\Omega-k\Omega_0)$.

γ) Να δείξετε ότι οι συντελεστές της σειράς Fourier είναι $c_k=\dfrac{2\pi}{T}\bullet X_0(jk\Omega_0)$

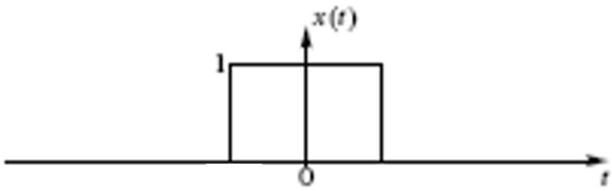
<u>Απάντηση</u>

$$X_0(j\Omega)=F\{x_0(t)\}$$

$$c_k=\frac{1}{T}\bullet\int_T\tilde{x}(t)\bullet e^{-jk\Omega_0 t}dt=\frac{2\pi}{\Omega_0}\int_T x_0(t)\bullet e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

Ερ. Ποια είναι η **συνθήκη που περιγράφει τα σήματα πεπερασμένης χρονικής διάρκειας**;

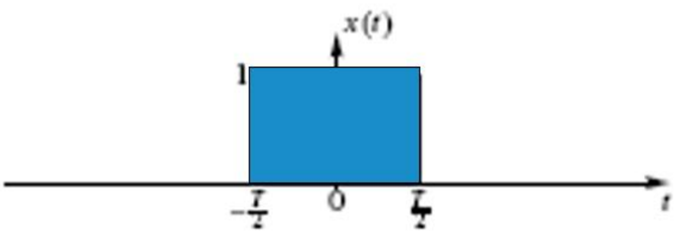
•Συνθήκη: $x(t)=0,\forall\,|t|>t_b\,με\;t_b<\infty$



Ερ. Ποιο είναι το **πιο αντιπροσωπευτικό σήμα πεπερασμένης χρονικής διάρκειας**;

<u>Απάντηση</u>

•Τετραγωνικός Παλμός: $x(t)=\begin{cases}1 & -\frac{1}{2}T\leq t<\frac{1}{2}T\\ 0 & \text{διαφορετικά}\end{cases}$



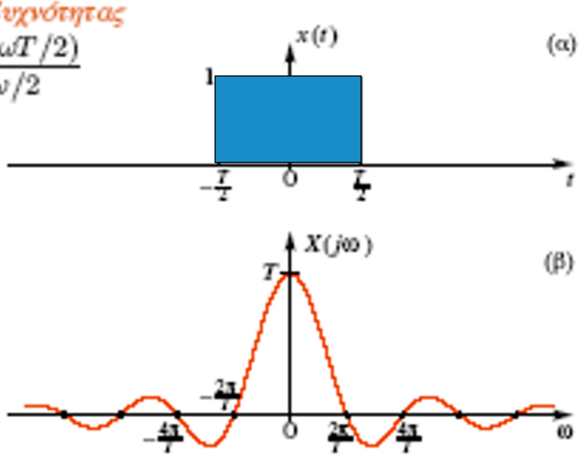
Ερ. Ποιος είναι ο **MF ενός σήματος πεπερασμένης χρονικής διάρκειας**;

<u>Απάντηση</u>

•Σήματα Πεπερασμένης Χρονικής Διάρκειας-Μετασχηματισμός

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

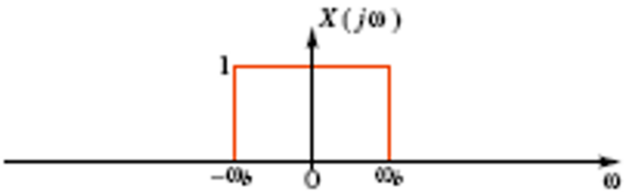
$$[u(t+\tfrac{1}{2}T)-u(t-\tfrac{1}{2}T)] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}$$



Ερ. Ποια είναι η **συνθήκη που περιγράφει τα σήματα πεπερασμένου εύρους ζώνης;**

<u>Απάντηση</u>

•Συνθήκη: $X(j\omega)=0$ για $|\omega|>\omega_b$ με $\omega_b<\infty$.



Ερ. Ποιο είναι το **πιο αντιπροσωπευτικό σήμα πεπερασμένου εύρους ζώνης;**

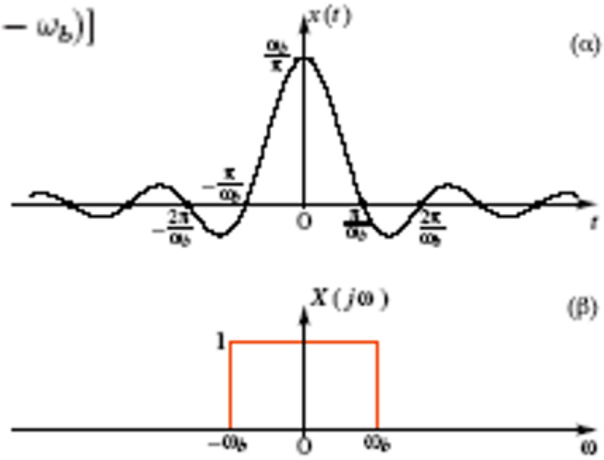
<u>Απάντηση</u>

Η κρουστική απόκριση κατωπερατού φίλτρου όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα:

•Σήματα Περιορισμένου Εύρους Ζώνης: $X(j\omega)=\begin{cases}1 & -\omega_b\le\omega\le\omega_b\\ 0 & \text{διαφορετικά}\end{cases}$

Πεδίο-Χρόνου *Πεδίο-Συχνότητας*

$$\frac{\sin(\omega_b t)}{\pi t} \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} [u(\omega+\omega_b)-u(\omega-\omega_b)]$$



6.2 Μετασχηματισμός Laplace

Προϋπόθεση Ύπαρξης Μετασχηματισμού Fourier

Για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier θα πρέπει το σήμα να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο δηλ. το μέτρο του να μην απειρίζεται δηλ. $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt < \infty$ που σημαίνει το σήμα να μην έχει άπειρη ενέργεια, αλλιώς δεν μπορούμε να επεξεργαστούμε ένα τέτοιο σήμα.

Χαρακτηριστικά μετασχηματισμού Laplace

- Διευρύνει την κλάση των σημάτων για τα οποία μπορεί να επιτευχθεί η μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας
- Παρέχει τη δυνατότητα μελέτης συστημάτων που δεν βρίσκονται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας
- Δίνει τη δυνατότητα εναλλακτικών τρόπων παράστασης των συστημάτων
- Μετατροπή των Δ.Ε. σε αλγεβρικές εξισώσεις
- Ο μετασχηματισμός Laplace είναι μια γενίκευση του του μετασχηματισμού Fourier και ισχύει **και για σήματα που δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμα όπως το $x(t)=\cos(\Omega_0 t)$**
- Όταν έχουμε αμφίπλευρο Laplace το κάτω όριο είναι το -∞
- Όταν έχουμε μονόπλευρο Laplace το κάτω όριο είναι το 0
- Προσοχή: Στα αιτιατά σήματα ο μονόπλευρος και ο αμφίπλευρος Laplace ταυτίζονται επειδή τα σήματα αυτά ορίζονται μόνο γα θετικές χρονικές στιγμές
- Ο **μετασχηματισμός Fourier ορίζεται μόνο στο φανταστικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου ενώ ο μετασχηματισμός Laplace σε όλο το μιγαδικό επίπεδο**.

Διαφορές μετασχηματισμού Laplace από μετασχηματισμό Fourier

- Ο μετασχηματισμός Laplace είναι μια γενίκευση του του μετασχηματισμού Fourier και ισχύει **και για σήματα που δεν απολύτως ολοκληρώσιμα όπως το $\cos(\Omega_0 t)$, ενώ ο** μετασχηματισμός Fourier **ισχύει μόνο για σήματα που είναι απολύτως ολοκληρώσιμα**
- Ο **μετασχηματισμός Fourier ορίζεται μόνο στο φανταστικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου ενώ ο μετασχηματισμός Laplace σε όλο το μιγαδικό επίπεδο**.

<u>Παρατήρηση</u>

Όταν δίνεται ένας ML χωρίς περιοχή σύγκλισης τότε πρέπει να πάρουμε περιπτώσεις για αιτιατό και μη αιτιατό σήμα

<u>Παράδειγμα</u>

Δίνεται $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$. Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ο: $X(s) = X_1(s) + X_2(s)$. Ποια η περιοχή σύγκλισης του X(s);

<u>Απάντηση</u>

Η περιοχή σύγκλισης του X(s) είναι η εξής: ΠΣ = ΠΣ1 ∩ ΠΣ2

Ερ. Κάτω από **ποιές προϋποθέσεις υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier**;

<u>Απάντηση</u>

1.Όταν η **περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα**.

2. Όταν **το σήμα είναι απολύτως ολοκληρώσιμο** δηλ. το μέτρο του να μην απειρίζεται δηλ. $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt < \infty$ που σημαίνει το σήμα να μην έχει άπειρη ενέργεια

Άσκηση με Αντιαιτιατά Σήματα

Πόσα και ποια είναι τα διαφορετικά σήματα από τα οποία μπορεί να προκύψει ο μετασχηματισμός Laplace;

<u>Απάντηση</u>

Αιτιατό Σήμα ↔ML	**Π.Σ.**
$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$	Re(s)>-a
$e^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}$	Re(s)>a

$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$	Re(s)>0
Μη Αιτιατό Σήμα ↔ML	**Π.Σ.**
$-e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$	Re(s)<-a
$-e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}$	Re(s)<a
$-u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$	Re(s)<0

Άσκηση 1 με Περιοχές Σύγκλισης

Να βρεθεί ο **μετασχηματισμός Laplace του σήματος** $x(t) = \left(e^{-2t} - \cos(3t)e^{-t}\right) \bullet u(t)$

Απάντηση

$$x(t) = e^{-2t} \bullet u(t) - \cos(3t) \bullet e^{-t} \bullet u(t) = e^{-2t} \bullet u(t) - \left(\frac{e^{3jt} + e^{-3jt}}{2}\right) \bullet e^{-t} \bullet u(t) =$$

$$= e^{-2t} \bullet u(t) - \frac{e^{3jt} \bullet e^{-t} \bullet u(t) - e^{-3jt}e^{-t} \bullet u(t)}{2} = e^{-2t} \bullet u(t) - \frac{e^{-t(1-3j)}}{2} \bullet u(t) - \frac{e^{-t(1+3j)}}{2} \bullet u(t)$$

Άρα το σήμα x(t) διασπάται σε 3 σήματα:

$x_1(t) = e^{-2t} \bullet u(t)$ → πραγματικό εκθετικό σήμα

$x_2(t) = -\frac{e^{-t(1-3j)} \bullet u(t)}{2}$ → μιγαδικό εκθετικό σήμα

$x_3(t) = -\frac{e^{-t(1+3j)} \bullet u(t)}{2}$ → μιγαδικό εκθετικό σήμα

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ο ακόλουθος:

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{s+(1-3j)} - \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{s+(1+3j)} \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{(s+1)-3j} - \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{(s+1)+3j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{2} \bullet \frac{2s+2}{(s+1)^2 - (3j)^2} \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 9} \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{s+1}{s^2 + 2s + 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{s^2 + s + 9}{(s+2) \bullet (s^2 + 2s + 10)} \Rightarrow X(s) = \frac{s^2 + s + 9}{(s+2) \bullet (s - (-1+3j)) \bullet (s - (-1-3j))}$$

Οι πόλοι του μετασχηματισμού Laplace είναι: $s_1 = -2$, $s_2 = -1+3j$, $s_3 = -1-3j$

Επειδή το σήμα είναι αιτιατό η περιοχή σύγκλισης είναι δεξιά του μεγαλύτερου πόλου δηλ. Re(s)>-1

Άσκηση 2 με Περιοχές Σύγκλισης

Πόσες **διαφορετικές περιοχές σύγκλισης** υπάρχουν στον ακόλουθο μετασχηματισμό Laplace:

$$X(s) = \frac{-s^2 - 4s + 6}{(s+2) \bullet \left(s - \left(\frac{-1+3j}{2}\right)\right) \bullet \left(s - \left(\frac{-1-3j}{2}\right)\right)}$$

Απάντηση

Οι πόλοι είναι: $s_1 = -2$, $s_2 = \left(\frac{-1+3j}{2}\right)$, $s_3 = \left(\frac{-1-3j}{2}\right)$

Οι περιοχές σύγκλισης είναι οι ακόλουθες:

- Π.Σ.1: Re{s}>-1/2 αν το σήμα είναι αιτιατό
- Π.Σ.2: Re{s}<-2 αν το σήμα είναι μη αιτιατό
- Π.Σ.3: -2<Re{s}<-1/2 αν το σήμα είναι αιτιατό στο -2 και μη αιτιατό στο -1/2

Ορισμός

Μια συνάρτηση x(t) είναι **εκθετικής τάξης λ** αν $\exists$ M>0, λ, t_0 : $|e^{-\lambda t} \bullet x(t)| < M$, $\forall\ t \geq t_0$

<u>Θεώρημα Ύπαρξης του ML</u>

Εάν η συνάρτηση x(t) είναι 1)τμηματικά συνεχής σε ένα πεπερασμένο διάστημα $0 \le t \le b$ και 2)εκθετικής τάξης α για t>b, τότε ο ML της x(t) υπάρχει για Re(s)>α. Οι συνθήκες αυτές είναι μόνο ικανές και όχι αναγκαίες.

<u>Ιδιότητες Περιοχής σύγκλισης</u>

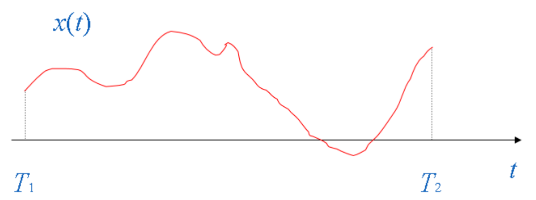
Ιδιότητα 1: Η ΠΣ του $X(s)$ συντίθεται από λωρίδες παράλληλες στον άξονα $-j\Omega$.

•Μια συνάρτηση $x(t)$ είναι εκθετικής τάξης λ αν:

$$\exists M > 0, \lambda, t_0 : |e^{-\lambda t} x(t)| < M, \forall t \ge t_0$$

‘

Ιδιότητα 2: Αν το $x(t)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας και ολοκληρώσιμο (κατ’ απόλυτη τιμή), η ΠΣ του $X(s)$ είναι ολόκληρο το επίπεδο-s.

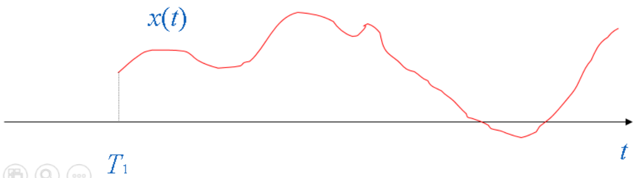


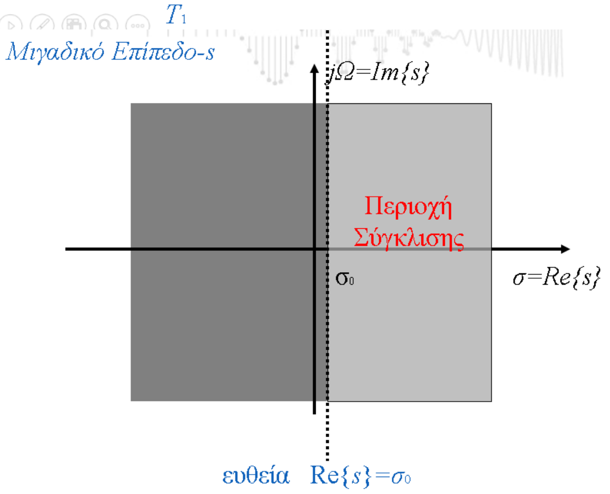
Ιδιότητα 3: Αν το $x(t)$ είναι ένα σήμα δεξιάς επέκτασης και η ευθεία

$$\mathrm{Re}\{s\} = \sigma_0$$

ανήκει στη ΠΣ του $X(s)$, τότε:

κάθε s: $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$ θα ανήκει στην ΠΣ του.



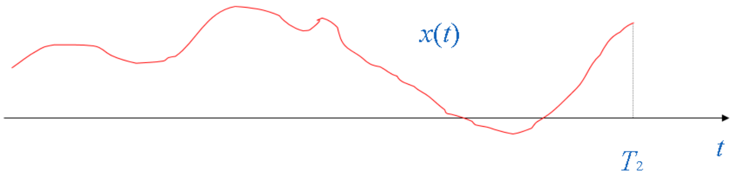


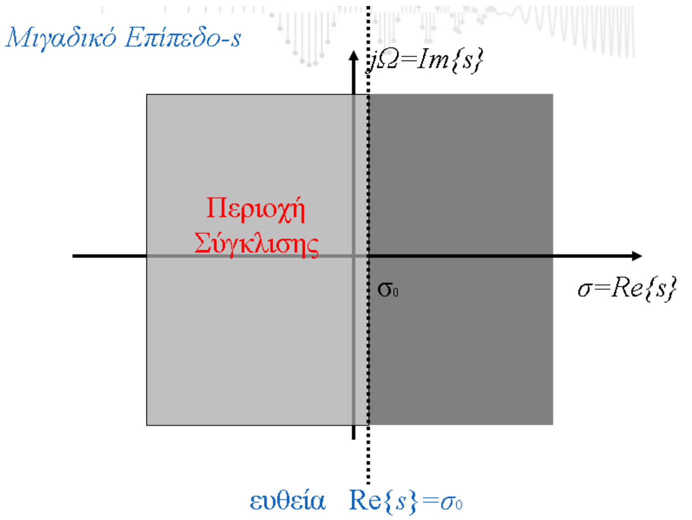
Ιδιότητα 4: Αν το $x(t)$ είναι ένα σήμα αριστερής επέκτασης και η ευθεία:

$$\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$$

ανήκει στη ΠΣ του $X(s)$, τότε:

κάθε s: $\mathrm{Re}\{s\}<\sigma_0$ θα ανήκει στην ΠΣ του.



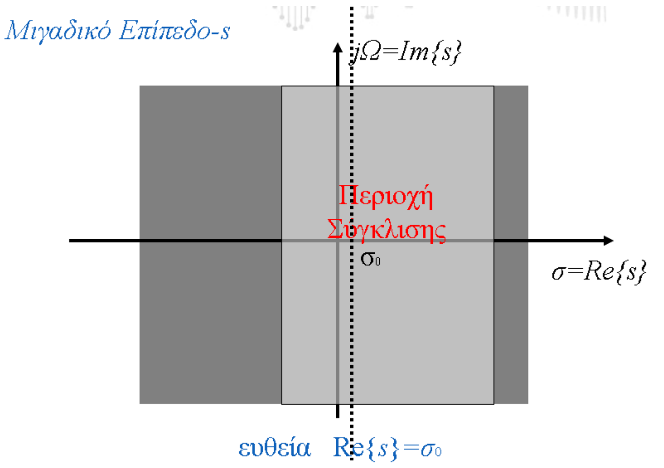


Ιδιότητα 5: Αν το $x(t)$ είναι ένα σήμα αμφίπλευρης επέκτασης και η ευθεία:

$$\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$$

ανήκει στη ΠΣ του $X(s)$, τότε:

Η ΠΣ θα είναι μια λωρίδα στο επίπεδο- s που θα περιλαμβάνει την ευθεία $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$.



Ιδιότητα 6: Η ΠΣ μιας ρητής $X(s)$ δεν περιέχει πόλους.

Ιδιότητα 7: Η ΠΣ μιας ρητής $X(s)$ ή εκτείνεται ως το άπειρο ή περιορίζεται από τους πόλους της.

Απόδειξη μετασχηματισμού Laplace

Να αποδειχτεί ότι $L\left\{\frac{t^n}{n!}e^{-at}u(t)\right\}=\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$

<u>Απάντηση</u>

$$x(t)=e^{-at}\bullet u(t)\leftrightarrow X(s)=\frac{1}{s+a},\mathrm{Re}(s)>-a$$

Η ιδιότητα παραγώγισης στη μιγαδική συχνότητα είναι: $(-1)^n\bullet t^n\bullet e^{-at}\bullet u(t)\leftrightarrow\left(\frac{1}{s+a}\right)^{(n)}$

$$\left(\frac{1}{s+a}\right)^{(1)}=-\frac{1}{(s+a)^2}$$

$$\left(\frac{1}{s+a}\right)^{(2)}=\frac{2}{(s+a)^3}$$

$$\left(\frac{1}{s+a}\right)^{(3)}=-\frac{2\bullet 3}{(s+a)^4}$$

…………………………………….

$$\left(\frac{1}{s+a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n\bullet n!}{(s+a)^{n+1}}$$

$$(-1)^n\bullet t^n\bullet e^{-at}\bullet u(t)\leftrightarrow\frac{(-1)^n\bullet n!}{(s+a)^{n+1}}\Rightarrow\frac{t^n\bullet e^{-at}\bullet u(t)}{n!}\leftrightarrow\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$$

Αντίστροφος ML

Ο τύπος του αντίστροφου ML είναι ο εξής:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}X(s)\bullet e^{st}d\Omega$$

Ορισμός Συνάρτησης Μεταφοράς (Απόδειξη ότι η συνάρτηση μεταφοράς είναι ρητή συνάρτηση)

Η **σχέση που συνδέει την είσοδο με την έξοδο** είναι η εξής: $\sum_{n=0}^{N}a_n\bullet y^{(n)}(t)=\sum_{n=0}^{M}b_n\bullet x^{(n)}(t)$

Παίρνουμε ML και στα δύο μέλη και προκύπτει ότι:

$$L\left\{\sum_{n=0}^{N}a_n\bullet y^{(n)}(t)\right\}=L\left\{\sum_{n=0}^{M}b_n\bullet x^{(n)}(t)\right\}\Rightarrow\sum_{n=0}^{N}a_n\bullet s^n\bullet Y(s)=\sum_{n=0}^{M}b_n\bullet s^n\bullet X(s)\Rightarrow\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\sum_{n=0}^{M}b_n\bullet s^n}{\sum_{n=0}^{N}a_n\bullet s^n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=L\{h(t)\}=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_m\bullet s^m}{\sum_{n=0}^{N}a_n\bullet s^n}=\frac{B_M(s)}{A_N(s)}$$

- **Η φυσική σημασία της συνάρτησης μεταφοράς είναι ότι δείχνει ποιο μέρος του σήματος εισόδου μεταφέρεται στην έξοδο**
- **Η φυσική σημασία της απόκρισης συχνότητας είναι ότι δείχνει ποιες συχνότητες διέρχονται μέσα από ένα σύστημα**

Παρατήρηση

Εξετάζουμε συστήματα που ο βαθμός του αριθμητή είναι το πολύ ίσος με το βαθμό του παρονομαστή. Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή το σύστημα δεν υλοποιείται γιατί απαιτεί άπειρη ενέργεια

Άσκηση 1 με Διαφορική

Έστω το ΓΧΑ για το οποίο ισχύει: $y^{(1)}(t)+3y(t)=x(t)$. Να βρεθεί η **κρουστική απόκριση h(t)**

<u>Απάντηση</u>

Εφαρμόζουμε ML και στα 2 μέρη της διαφορικής και προκύπτει:

$$L\{y^{(1)}(t)+3y(t)\}=L\{x(t)\}\Rightarrow (s+3)\bullet Y(s)=X(s)\Rightarrow H(s)=\frac{1}{s+3}$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις για την κρουστική απόκριση h(t)

$$\boxed{h(t)=\left\langle \begin{array}{ll} e^{-3t}u(t) & Re(s)>-3 \\ -e^{-3t}u(-t) & Re(s)<-3 \end{array}\right.}$$

Άσκηση 2 με Διαφορική

Έστω το ΓΧΑ με $x(t)=e^{-3t}u(t)$ και $y(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$

Χαρακτηρίστε το **σύστημα ως προς την ευστάθεια του και προσδιορίστε τη Δ.Ε. που ικανοποιεί**

<u>Απάντηση</u>

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{L\{y(t)\}}{L\{x(t)\}}=\frac{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}}{\frac{1}{s+3}}=\frac{s+3}{(s+1)\bullet(s+2)}$$

Το σύστημα είναι αιτιατό επειδή η είσοδος και η έξοδος σε αυτό είναι αιτιατά σήματα. Για να είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές πρέπει όλοι της συνάρτησης μεταφοράς H(s) να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Οι πόλοι της H(s) είναι το -1 και το -2, έχουν και οι δύο αρνητικό πραγματικό μέρος άρα το σύστημα είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές.

Για να βρούμε τη Διαφορική Εξίσωση που ικανοποιεί κάνουμε τα εξής:

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\Rightarrow (s+1)\bullet(s+2)\bullet Y(s)=X(s)\bullet(s+3)\Rightarrow \left(s^2+3s+2\right)\bullet Y(s)=X(s)\bullet(s+3)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{(2)}(t)+3y^{(1)}(t)+2y(t)=x^{(1)}(t)+3x(t)$$

Άσκηση 3 με Διαφορική

Να λυθεί η Δ.Ε. $x^{(1)}(t)+2x(t)=\delta(t)$ με $x(0^-)=1$, $t>0^-$ και να επαληθευτεί το $x(0^+)$

<u>Απάντηση</u>

Εφαρμόζουμε ML και στα 2 μέρη της διαφορικής και προκύπτει:

$$sX(s)-x(0^-)+2X(s)=1\Rightarrow X(s)=\frac{1+x(0^-)}{s+2}\Rightarrow X(s)=\frac{2}{s+2}$$. Άρα $x(t)=2e^{-2t}\bullet u(t)$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Αρχικής Τιμής:

$$x(0^+)=\lim_{s\to\infty}s\bullet X(s)=\lim_{s\to\infty}s\bullet\frac{2}{s+2}=\lim_{s\to\infty}\frac{2s}{s+2}=\lim_{s\to\infty}\frac{2s}{s\bullet\left(1+\frac{2}{s}\right)}=\lim_{s\to\infty}\frac{2}{1+\frac{2}{s}}=2$$

Η επαλήθευση στο Θ.Α.Τ. γίνεται ως εξής: $x(0^+)=2e^{-20^+}u(0^+)=2$

Απόδειξη Θ.Α.Τ. για σήματα που είναι συνεχή στο t=0

Το Θ.Α.Τ. είναι το ακόλουθο: $x(0^+)=\lim_{s\to\infty}s\bullet X(s)$

Η σειρά Taylor είναι η εξής: $x(t)=x(0)+\sum_{n=1}^{\infty}x^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}$

Παίρνουμε ML και στα δύο μέρη της σειράς Taylor και προκύπτει ότι: $X(s)=\sum_{n=0}^{\infty}L\left\{x^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{(n)}(0)L\left\{\frac{t^n}{n!}\right\}$ (1)

Γνωρίζουμε και τον ακόλουθο ML: $L\left\{\frac{t^n}{n!}e^{-at}u(t)\right\}=\frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}}$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει με α=0 ότι:

$$X(s)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{(n)}(0)L\left\{\frac{t^n}{n!}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{(n)}(0)\frac{1}{s^{n+1}}\Rightarrow s\bullet X(s)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{(n)}(0)\frac{1}{s^n}\Rightarrow s\bullet X(s)=x(0)+\frac{x^{(1)}(0)}{s}+\frac{x^{2}(0)}{s}+\ldots.$$

<u>Περιπτώσεις για το ΘΑΤ</u>

Περίπτωση 1
Αν πάρουμε το όριο για s→∞ τότε όλοι οι όροι εκτός από το x(0) μηδενίζονται . Επειδή το σήμα είναι συνεχές στο 0 όσες φορές και να παραγωγίσουμε δεν μας πειράζει αν έχουμε $x(0^+)$ή $x(0^-)$.

Περίπτωση 2
Για σήματα που είναι συνεχή στο 0 ισχύει ότι $x(0^+)=\lim_{s\to\infty} s\bullet X(s)$ και $x(0^-)=\lim_{s\to\infty} s\bullet X(s)$ είναι ακριβώς τα ίδια διότι το $x(0^+) = x(0^-)$.

Περίπτωση 3
Για σήματα που είναι ασυνεχή στο 0 για να αποδείξουμε το Θ.Α.Τ. εξετάζουμε μόνο την περίπτωση το x(t) να παίρνει τιμές στο 0^+

Περίπτωση 4
Η Γενίκευση του Θεωρήματος Αρχικής Τιμής για σήματα που περιέχουν κρουστικές συναρτήσεις στο t=0 είναι η ακόλουθη: παίρνουμε μόνο την περίπτωση για t στο 0^-γιατί στο 0^+ μηδενίζεται το ολοκλήρωμα της κρουστικής συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα ο μηδενισμός του ολοκληρώματος $\int_0^{\infty}\delta(t)\phi(t)dt$ της γίνεται μόνο στο 0 οπότε το 0^+ to 0 εκτός των ορίων του ολοκληρώματος οπότε όλο το ολοκλήρωμα μηδενίζεται

<u>Διατύπωση Θ.Τ.Τ.</u>

$$x(\infty)=\lim_{s\to 0} s\bullet X(s)$$

<u>Περιοδικά Αιτιατά Σήματα</u>

Δίνεται ένα περιοδικό σήμα $x_T(t)$. Η **αιτιατή περιοδική επέκταση του σήματος** αυτού είναι η εξής: $\tilde{x}(t)=\sum_{k=0}^{\infty} x_T(t-kT)$

Ο ML της **αιτιατής περιοδικής επέκτασης του σήματος** είναι ο ακόλουθος:

$$L\left\{\tilde{x}(t)\right\}=\int_{t=-\infty}^{\infty}\tilde{x}(t)e^{-st}dt=\int_{t=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}x_T(t-kT)e^{-st}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{t=-\infty}^{\infty}x_T(t-kT)e^{-st}e^{-skT}e^{skT}dt=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{-skT}\bullet\int_{t=-\infty}^{\infty}x_T(t-kT)e^{-s(t-kT)}dt=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-skT}\bullet X_T(s)=X_T(s)\bullet\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-sT}\right)^k=\frac{X_T(s)}{1-e^{-sT}}$$

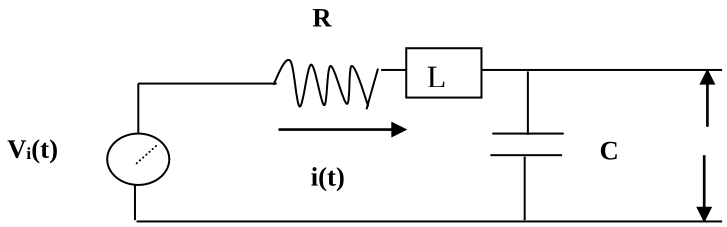
Στη συνέχεια **υπολογίσουμε τους πόλους της** X(s).

$-e^{-sT}=0\Rightarrow e^{-sT}=1\Rightarrow e^{-(\sigma+j\Omega)T}=1\Rightarrow e^{-T\sigma}\bullet e^{-Tj\Omega}=1$.
Άρα $e^{-T\sigma}=1\Rightarrow\sigma=0$ και. $e^{-Tj\Omega}=1\Rightarrow\cos(\Omega T)-j\sin(\Omega T)=1$

Για να συμβεί αυτό θέτουμε όπου Ω το Ω_k με $\Omega_k=\frac{2k\pi}{T}$ για k=0,±1,±2,…..και προκύπτει ότι $\cos\left(\frac{2k\pi}{T}T\right)-j\sin\left(\frac{2k\pi}{T}T\right)=1\Rightarrow\cos(2k\pi)-j\sin(2k\pi)=1$. **Συμπέρασμα: Οι άπειροι πόλοι είναι** $\boxed{0+j\frac{2k\pi}{T}}$
Η περιοχή σύγκλισης του X(s) είναι Re(s)>0

Παρατήρηση
Ο ML της αιτιατής περιοδικής επέκτασης ενός περιοδικού σήματος έχει άπειρους πόλους στο φανταστικό άξονα (άξονας jΩ). Αυτό ισχύει για οποιοδήποτε αιτιατό περιοδικό σήμα.

Άσκηση 1 με Κύκλωμα
Δίνεται το κύκλωμα RLC του ακόλουθου σχήματος. Θεωρώντας γνωστή την τάση εισόδου $V_i(t)$, το αρχικό ρεύμα i(0) του πηνίου και την αρχική τάση $V_C(0)$ του πυκνωτή. Να βρεθεί η **συνάρτηση μεταφοράς** του κυκλώματος μεταξύ της πηγής $V_i(t)$ (είσοδος) και του ρεύματος i(t) (έξοδος)



<u>Απάντηση</u>

$$V_i(t)=V_R(t)+V_L(t)+V_C(t)\Rightarrow V_i(t)=R\bullet i(t)+i^{(1)}(t)\bullet L+V_C(t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_i(t)=R\bullet i(t)+L\bullet\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{t}i(r)dr$$

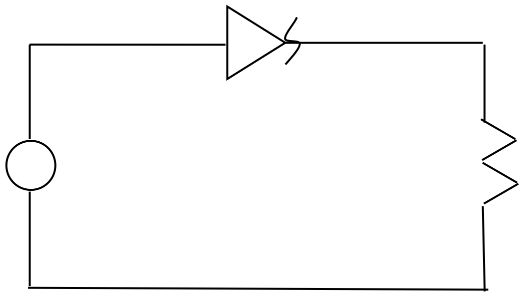
Εφαρμόζουμε ML και στα 2 μέρη

$$X(s)=R\bullet Y(s)+L\bullet s\bullet Y(s)+\frac{Y(s)}{s}\Rightarrow s\bullet C\bullet X(s)=Y(s)\bullet\left(R\bullet C\bullet s+C\bullet L\bullet s^2+1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{R\bullet C\bullet s+C\bullet L\bullet s^2+1}$$

<u>Άσκηση 2 με Κύκλωμα</u>

Να βρεθεί η **έξοδος του συστήματος με είσοδο το σήμα x(t)=cos(Ω$_0$t).** (Η δίοδος κόβει τις αρνητικές τιμές). **Ως έξοδο** θεωρείστε το **ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα**.



Παρατήρηση: Μπορούμε να θεωρήσουμε ως σήμα εισόδου το cos(Ω$_0$t)•u(t) αφού η δίοδος κόβει τις αρνητικές τιμές

<u>Απάντηση</u>

Η εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα είναι η ακόλουθη: $V_{πηγή}(t)=V_R(t)+V_C(t)=R\bullet i(t)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{t}i(r)dr$ η οποία μπορεί να γραφεί στη μορφή $R\bullet y(t)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{t}y(r)dr=x(t)$ θεωρώντας την τάση ως το σήμα εισόδου και το ρεύμα ως σήμα εξόδου. Παίρνουμε ML και στα 2 μέρη της διαφορικής εξίσωσης και προκύπτει ότι:

$$R\bullet Y(s)+\frac{1}{C}\bullet\frac{Y(s)}{s}=X(s)\Rightarrow\frac{R\bullet Y(s)\bullet C\bullet s+Y(s)}{C\bullet s}=X(s)\Rightarrow R\bullet Y(s)\bullet C\bullet s+Y(s)=C\bullet s\bullet X(s)\Rightarrow$$

$$Y(s)\bullet(R\bullet C\bullet s+1)=C\bullet s\bullet X(s)\Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{C\bullet s}{R\bullet C\bullet s+1}$$

Η έξοδος με είσοδο το cos(Ω$_0$t)•u(t) είναι η ακόλουθη:

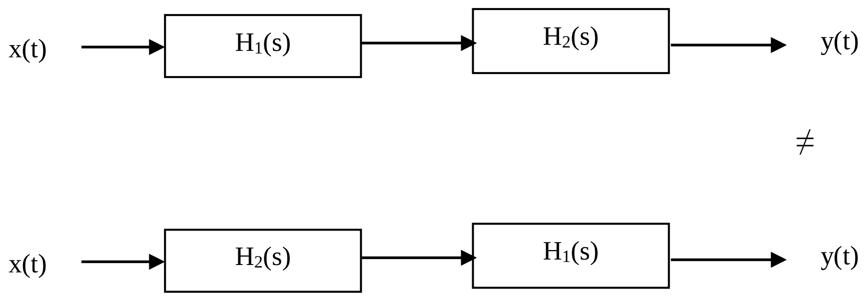
$$\boxed{y(t)=\cos(\Omega_0 t)\bullet H(s_0)\Rightarrow y(t)=\frac{1}{2}e^{j\Omega_0 t}\frac{C\bullet j\Omega_0}{C\bullet j\Omega_0\bullet R+1}+\frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 t}\frac{C\bullet(-j\Omega_0)}{C\bullet(-j\Omega_0)\bullet R+1}}$$

Παρατήρηση

Προσοχή πρέπει το s_0 της εισόδου να βρίσκεται μέσα στην περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς. Εδώ ο πόλος της συνάρτησης μεταφοράς είναι $s=-\frac{1}{R\bullet C}$ και η περιοχή σύγκλισης είναι $\mathrm{Re}(s)>-\frac{1}{R\bullet C}$. Τα s_0 της εισόδου είναι τα $\pm j\Omega_0$, βρίσκονται επάνω στο φανταστικό άξονα άρα μέσα στην περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς.

6.3 Καταστατικές Εξισώσεις- Χώρος Κατάστασης

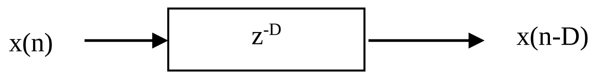
Προσοχή μέχρι τώρα ίσχυε $x_1(t)*x_2(t)=x_2(t)*x_1(t)$ (δηλ. η αντιμεταθετική ιδιότητα στη συνέλιξη). Όμως στο χώρο κατάστασης **δεν** ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα **στη συνέλιξη των κρουστικών αποκρίσεων δύο συστημάτων δηλ. $h_1(t)*h_2(t) \neq h_2(t)*h_1(t)$.**



Σχόλια για το χώρο κατάστασης
Οι καταστατικές εξισώσεις ενός συστήματος το περιγράφουν **στο χώρο κατάστασης δηλ. δείχνουν τη χρονική εξέλιξη κάποιων μεγεθών**. **Ορίζουμε ως κατάσταση του συστήματος** τη χρονική στιγμή t_0 το σύνολο της ελάχιστης πληροφορίας (τη χρονική στιγμή t_0) η οποία μαζί με τη γνώση της εισόδου v(t) καθορίζει πλήρως τη συμπεριφορά του συστήματος για $t \geq t_0$. **Ως συμπεριφορά του συστήματος εννοούμε τις μεταβολές που αυτό υφίσταται ως συνάρτηση του χρόνου**.
Το σύνολο των μεταβλητών που καθορίζουν την κατάσταση ενός συστήματος ονομάζονται μεταβλητές κατάστασης και αποτελούν τις συνιστώσες ενός διανύσματος που ονομάζεται **διάνυσμα κατάστασης** και συμβολίζεται ως

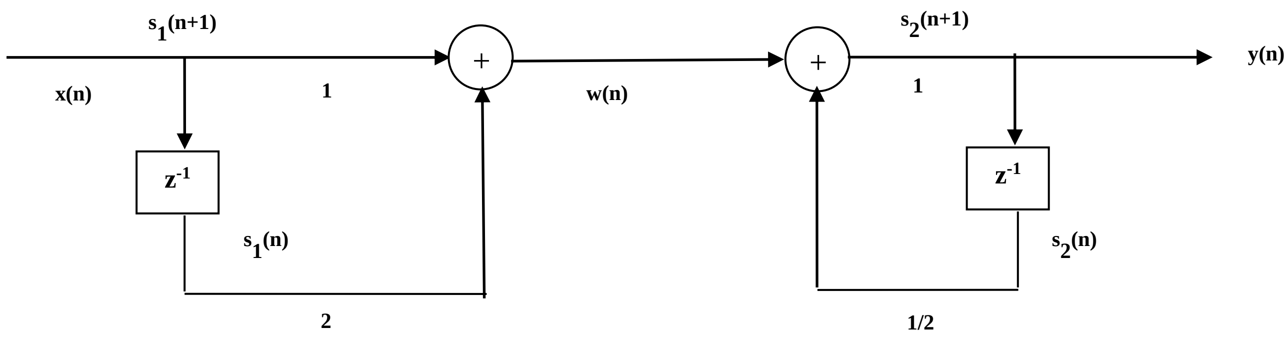
Βασικά στοιχεία υλοποίησης στο διακριτό χρόνο
Βασικά στοιχεία υλοποίησης είναι τα ακόλουθα:

- Αθροιστής
- Πολλαπλασιαστής
- Καθυστερητής
- Διακλάδωση



Ο Καθυστερητής καθυστερεί την είσοδο για τόσες χρονικές στιγμές όσο είναι ο εκθέτης του.

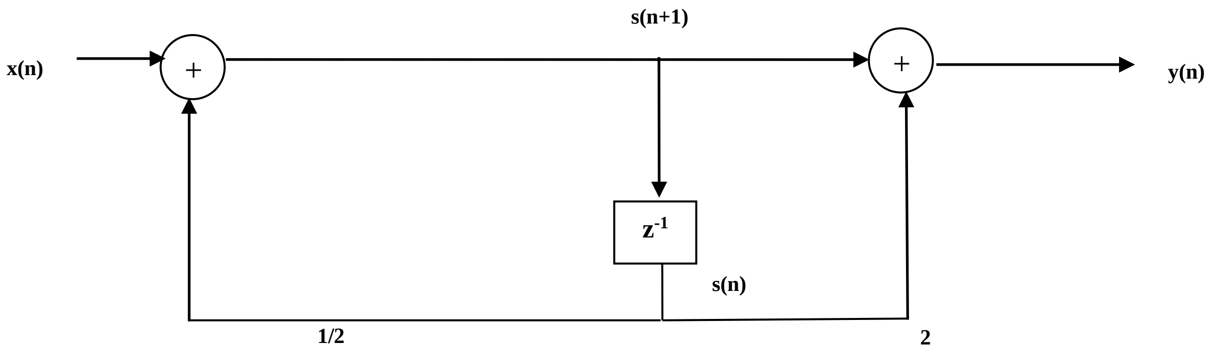
<u>Διακριτός Χρόνος</u>
Ευθεία Υλοποίηση (Μορφή Ι)
Να γράψετε μια εξίσωση διαφορών που περιγράφει το σύστημα
<u>Απάντηση</u>
Προσπαθώ να κατασκευάσω μια εξίσωση διαφορών (αν είναι εφικτό) που θα περιέχει μόνο τα σήματα εισόδου και εξόδου



Οι εξισώσεις που περιγράφουν τους αθροιστές είναι οι ακόλουθες:
$y(n)=s_2(n+1)$
$w(n)=s_1(n+1)+2s_1(n)=x(n)+2\bullet x(n-1)$
$y(n)= w(n)+1/2\bullet s_2(n) \Rightarrow \boxed{y(n)=x(n)+2\bullet x(n-1)+y(n-1)}$

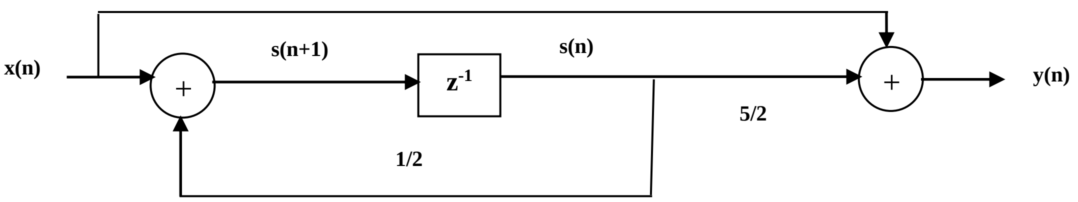
Παρατηρούμε ότι η τελευταία σχέση είναι μια αναδρομική σχέση και χρειάζεται 2 θέσεις μνήμης για να υλοποιηθεί (μια για την προηγούμενη είσοδο και μια για την προηγούμενη έξοδο). Χωρίς καθυστερητές θα χρειαζόταν n θέσεις μνήμης.

Ευθεία Υλοποίηση (Μορφή ΙΙ)
Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα
Απάντηση



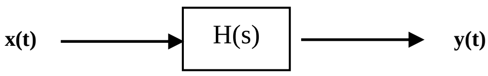
Οι εξισώσεις που περιγράφουν τους αθροιστές
s(n+1)=1/2•s(n)+x(n)→ **Εξίσωση κατάστασης (περιγράφει μια ενδιάμεση έξοδο του συστήματος)**
y(n)=s(n+1)+2•s(n)⇒y(n)=5/2•s(n)+x(n)→**Εξίσωση εξόδου του συστήματος (περιγράφει την έξοδο του συστήματος)**

Παράδειγμα 3
Να γράψετε εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα



s(n+1)=1/2•s(n)+x(n) → **Εξίσωση κατάστασης**
y(n)=5/2•s(n)+x(n) → **Εξίσωση εξόδου του συστήματος**

Συνεχής Χρόνος

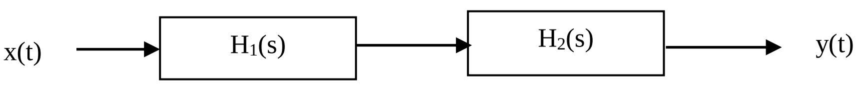


Έχουμε 2 ΓΧΑ συστήματα που περιγράφονται από τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:
Σ1: $y^{(1)}(t)+y(t)=x^{(1)}(t)-x(t)$. Η συνάρτηση μεταφοράς του 1ου συστήματος είναι $H_1(s)=\frac{s-1}{s+1}$,αιτιατό άρα Π.Σ. Re(s)>-1
Σ2: $y^{(1)}(t)-y(t)=x(t)$. Η συνάρτηση μεταφοράς του 2ου συστήματος είναι $H_2(s)=\frac{1}{s-1}$, αιτιατό άρα Π.Σ. Re(s)>1

Ανεξάρτητα από τη σειρά σύνδεσης των 2 συστημάτων η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος είναι η:

$$\boxed{H(s)=H_1(s)\bullet H_2(s)=\frac{s-1}{s+1}\bullet\frac{1}{s-1}=\frac{1}{s+1}}$$

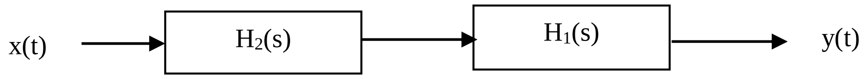
1η περίπτωση-Συνδέουμε **την έξοδο του 1ου συστήματος ως είσοδο στο 2ο σύστημα η έξοδος του συνολικού συστήματος είναι:**



$$y(t)=\left(y(0)\bullet e^{t}+\frac{1}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)\bullet y_1(0)+e^{-t}*x(t)\right)\bullet u(t)$$

Αν το σύστημα είναι αρχικά σε ηρεμία πριν την εφαρμογή της εισόδου x(t) (δηλ. y(0)=0 και $y_1(0)=0$) τότε η έξοδος δίνεται ως συνέλιξη εισόδου και κρουστικής απόκρισης και είναι φραγμένη για φραγμένη είσοδο x(t). Εάν όμως το σύστημα έχει αρχικά αποθηκευμένη ενέργεια (δηλ. y(0)≠0 και $y_1(0)\neq0$) τότε η έξοδος τείνει στο άπειρο ανεξάρτητα από την είσοδο που εφαρμόζουμε. Στην πράξη ένα τέτοιο σύστημα είναι πάντα ασταθές.

2η περίπτωση-Συνδέουμε **την έξοδο του 2ου συστήματος ως είσοδο στο 1ο σύστημα η έξοδος του συνολικού συστήματος είναι:**



Η έξοδος παραμένει πάντα φραγμένη ανεξάρτητα από αρχικές συνθήκες. Όμως μια ενδιάμεση έξοδος είναι η $y_1(t)=\left(y_1(0)\bullet e^{t}+e^{-t}*x(t)\right)\bullet u(t)$ που δεν είναι φραγμένη και θα οδηγήσει αναπόφευκτα το σύστημα σε καταστροφή.

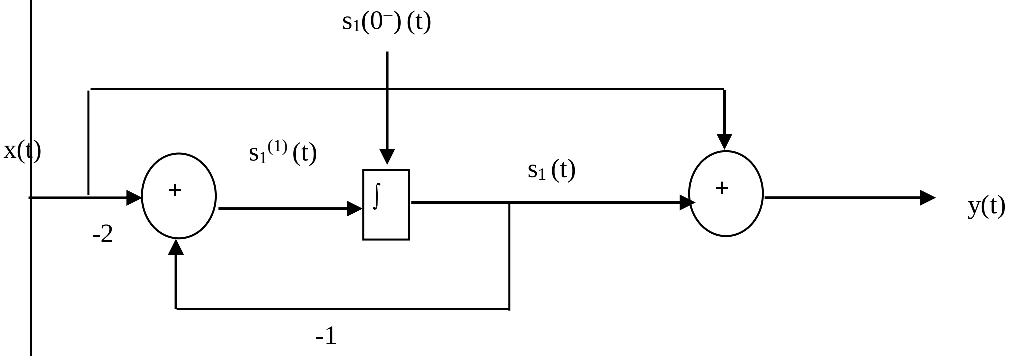
Όπως παρατηρούμε παίρνουμε διαφορετική έξοδο ανάλογα με τον τρόπο που συνδέουμε τα 2 συστήματα. Αυτό δείχνει ότι δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στη συνέλιξη των 2 συστημάτων

Παρατηρήσεις

- **Στη συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος, ανεξάρτητα από τη σειρά σύνδεσης των δύο συστημάτων, η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος, αφού απλοποιήθηκε ο προβληματικός πόλος, είναι η** $H(s)=H_1(s)\bullet H_2(s)=\dfrac{1}{s+1}$ **που κάνει το τελικό σύστημα να είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές. Όμως η απλοποίηση πόλων από τη συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να οδηγήσει σε καταστροφή του συστήματος** όπως φάνηκε από το προηγούμενο παράδειγμα, γιαυτό στην πράξη δεν απλοποιούμε ποτέ τη συνάρτηση μεταφοράς
- Για **να δούμε αν ένα σύστημα είναι υλοποιήσιμο δεν πρέπει να απλοποιούμε τη συνάρτηση μεταφοράς**

Άσκηση

Θεωρείστε το ακόλουθο ΓΧΑ σύστημα:



Οι σχέσεις που περιγράφουν το σύστημα είναι οι εξής:

$$s_1^{(1)}(t)=-s_1(t)-2x(t)$$

$$y(t)=s_1(t)+x(t)=x(t)+x^{(1)}(t)-2x(t)-y^{(1)}(t)\Rightarrow y(t)=x^{(1)}(t)-x(t)-y^{(1)}(t)$$

Ερ. Ποιος είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του $(sI-A)^{-1}$;

<u>Απάντηση</u>

$e^{At}\bullet u(t)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{A^n\bullet t^n}{n!}\right)u(t)$.(1) Αυτό προκύπτει από το γενικό τύπο $e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$

Παίρνουμε ML και στα δύο μέρη της (1) και προκύπτει ότι: $L\left\{e^{At}\bullet u(t)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}L\left\{\dfrac{A^n\bullet t^n}{n!}u(t)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n\bullet L\left\{\dfrac{t^n}{n!}u(t)\right\}$

Από το γνωστό τύπο $L\left\{\dfrac{t^n}{n!}e^{-\alpha t}\bullet u(t)\right\}=\dfrac{1}{(s+\alpha)^{n+1}},\operatorname{Re}(s)>-\alpha$ προκύπτει ότι:

$$L\left\{e^{At}\bullet u(t)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n\bullet\frac{1}{n+1}=\frac{1}{s}\bullet\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{s}\right)^n=\frac{1}{s}\bullet\left(\frac{1}{1-\frac{A}{s}}\right)=\frac{1}{s}\bullet\left(\frac{s}{s-A}\right)=\frac{1}{s-A}=\frac{1}{sI-A}=(sI-A)^{-1}$$

Άρα ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του $(sI-A)^{-1}$ **είναι το μητρώο καταστατικής μετάβασης** $e^{At}\bullet u(t)$ **δηλ.** $L^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}=e^{At}\bullet u(t)$

Ορισμός Ομογενούς καταστατικής εξίσωσης

Η 1η καταστατική εξίσωση έχει τη μορφή: $\underline{s}^{(1)}(t)=A\bullet\underline{s}(t)+\underline{b}\bullet x(t)$. Αν το **σήμα εισόδου x(t) (που ονομάζεται διέγερση) είναι μηδέν, τότε η 1η καταστατική εξίσωση ονομάζεται ομογενής καταστατική εξίσωση**. Αυτός ο ορισμός δεν έχει καμία σχέση με το **ομογενές σύστημα στο οποίο το διάνυσμα b των συντελεστών είναι το μηδενικό διάνυσμα**.

Ασυμπτωτική Ευστάθεια

- Ένα δυναμικό σύστημα είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν** $\lim_{t\to\infty}\underline{s}(t)=0, \forall s(t_0)$. Αυτό συμβαίνει διότι $\underline{s}(t)=\Phi(t)\bullet\underline{s}(0)$ και όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο θέλουμε οι τιμές του διανύσματος κατάστασης $\underline{s}(t)$ να μηδενιστούν δηλ. το διάνυσμα κατάστασης να είναι ανεξάρτητο από το αρχικό διάνυσμα $\underline{s}(0)$
- Ένα δυναμικό σύστημα είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν** $\lim_{t\to\infty}\Phi(t)=0$
- Ένα δυναμικό σύστημα είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν** όλες οι ιδιοτιμές του μητρώου Α έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος δηλ. $Re(\lambda_i)<0\ \forall\lambda_i$

Διαφορές Ασυμπτωτικής και ΦΕΦΕ Ευστάθειας

- Η **διαφορά της Ασυμπτωτικής από τη ΦΕΦΕ Ευστάθεια** είναι ότι στη ΦΕΦΕ Ευστάθεια επιβάλλουμε μια συγκεκριμένη μορφή εισόδου και βλέπουμε τι ιδιότητες πρέπει να έχει το σύστημα (αναφορικά με την κρουστική απόκριση h(t)) προκειμένου να είναι φραγμένη και η Έξοδος (κοιτάμε το σύστημα εξωτερικά), ενώ στην Ασυμπτωτική Ευστάθεια εξετάζουμε το σύστημα ανεξάρτητα από την είσοδο και για οποιοδήποτε διάνυσμα κατάστασης
- Η **Ασυμπτωτική ευστάθεια σε αντίθεση με τη ΦΕΦΕ Ευστάθεια έχει να κάνει με τις αρχικές συνθήκες και το διάνυσμα κατάστασης και είναι ανεξάρτητη από την είσοδο και την έξοδο**
- **Η Ασυμπτωτική ευστάθεια συνεπάγεται ΠΑΝΤΑ τη ΦΕΦΕ Ευστάθεια**. **Το αντίθετο ΔΕΝ ισχύει**. Ο λόγος είναι ότι στο μητρώο καταστατικής μετάβασης Φ(t) μπορεί να υπάρχουν απλοποιήσεις οι οποίες μπορεί να κρύβουν καταστροφή του συστήματος
- Η **κρουστική απόκριση** $h(t)=\underline{c}^T\bullet e^{At}\bullet\underline{b}+d\bullet\delta(t)$ **σχετίζεται πάντα με τη ΦΕΦΕ Ευστάθεια**
- **Ο πίνακας (μητρώο) καταστατικής μετάβασης** $\Phi(t)=e^{At}=L^{-1}\left((s\bullet I-A)^{-1}\right)$ **σχετίζεται πάντα με την Ασυμπτωτική Ευστάθεια**

Ιδιότητες Μητρώου καταστατικής μετάβασης Φ(t)=e^At^

Ποια η **μορφή του μητρώου καταστατικής μετάβασης** $\Phi(t)=e^{At}$ ώστε το $\lim_{t\to\infty}\Phi(t)=0$ δηλ. **το σύστημα να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές**;

Απάντηση

Προκειμένου το $\lim_{t\to\infty}\Phi(t)=0$ **και το σύστημα να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές πρέπει το μητρώο καταστατικής μετάβασης** $\Phi(t)u(t)=e^{At}u(t)=e^{Dt}u(t)$ **να είναι διαγώνιο και επιπλέον οι συνιστώσες του διανύσματος D δηλ. οι ιδιοτιμές του μητρώου Α να είναι αρνητικές.**

$$e^{Dt}\bullet u(t)\bullet\underline{s}(0)=\begin{bmatrix} e^{t\bullet d_{11}}\bullet u(t) & & & \\ & e^{t\bullet d_{22}}\bullet u(t) & & \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ & & & e^{t\bullet d_{NN}}\bullet u(t)\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} s_1(0)\\ s_2(0)\\ s_3(0)\\ \ldots\ldots\\ s_N(0)\end{bmatrix}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(e^{t\bullet d_{11}}\bullet u(t)\bullet s_1(0)\right)=0$$
$$\lim_{t\to\infty}\left(e^{t\bullet d_{22}}\bullet u(t)\bullet s_2(0)\right)=0$$
………………………
$$\lim_{t\to\infty}\left(e^{t\bullet d_{NN}}\bullet u(t)\bullet s_N(0)\right)=0$$

Όλα αυτά συμβαίνουν όταν $d_{ii}<0$ ***για*** **i=1,2…,N. *Τα*** d_{ii} ***είναι οι συνιστώσες του διανύσματος D δηλ. οι ιδιοτιμές του μητρώου Α.***

Επιπλέον ιδιότητες του μητρώου καταστατικής μετάβασης Φ(t)=e^{At}

1) Φ(0)=Ι όπου Ι ο ταυτοτικός πίνακας

2) Φ(-t)=$\Phi^{-1}(t)$ όπου $\Phi^{-1}(t)$ αντίστροφος πίνακας

3) Φ $(t-t_0)$ =Φ(t)-Φ (t_0) =$e^{At} - e^{A(t-t0)}$

Από την 3η ιδιότητα προκύπτει ότι επειδή $\underline{s}(t)=\Phi(t)\bullet \underline{s}(t_0)$, αν θέσουμε όπου t το $t-t_0$ προκύπτει ότι $s(t-t_0)=\Phi(t-t_0)\bullet s(t_0)$ άρα προκύπτει μια μορφή χρονικής αμεταβλητότητας δηλ. **αν κάνουμε μια χρονική ολίσθηση στο μητρώο καταστατικής μετάβασης τότε αυτή μεταφέρεται και στο διάνυσμα κατάστασης.**

Υπενθύμιση-Επανάληψη

- Το μητρώο καταστατικής μετάβασης είναι το Φ(t)=e^{At}
- Ένα δυναμικό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές 1)αν και μόνο αν $\lim_{t\to\infty} s(t)=0, \forall s(t_0)$ ή 2)αν και μόνο αν $\lim_{t\to\infty}\Phi(t)=0$
- Αν το A~D (δηλ. αν το A είναι όμοιο με το D) όπου D διαγώνιο μητρώο (2 μητρώα είναι όμοια αν έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές), τότε και το μητρώο $\Phi(t)=e^{At}u(t)\sim e^{Dt}u(t)$ (δηλ. και το e^{At} είναι όμοιο με το e^{Dt})
- Κάθε στοιχείο του διαγώνιου μητρώου D μπορεί να γραφεί είτε με πολική μορφή $d_{ii}=\lambda\bullet e^{j\theta}$ όπου λ μέτρο και θ φάση είτε με καρτεσιανή μορφή $d_{ii}=d_{ii_R}+d_{ii_{IM}}$
- Για να είναι το $\lim_{t\to\infty}\Phi(t)=0$ θα πρέπει το $d_{ii_R}<0$

Φυσική σημασία Παρατηρησιμότητας

- Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται η τριάδα {A, b, c} που περιγράφει το σύστημα στο χώρο κατάστασης. Επίσης ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται το σήμα εισόδου x(t). Αν μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα κατάστασης $\underline{s}(t)$ **τότε το σύστημα είναι παρατηρήσιμο**. Το σύνολο των μεταβλητών που καθορίζουν την κατάσταση ενός συστήματος ονομάζονται μεταβλητές κατάστασης και αποτελούν τις συνιστώσες ενός διανύσματος που ονομάζεται **διάνυσμα κατάστασης**
- Η έννοια της **παρατηρησιμότητας** σχετίζεται **με τη δυνατότητα να μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές που έχουν οι μεταβλητές κατάστασης (δηλ. να υπολογίσουμε το διάνυσμα κατάστασης που περιέχει τις μεταβλητές κατάστασης) σε κάθε χρονική στιγμή από αντίστοιχη γνώση των σημάτων εισόδου-εξόδου**
- Ένα σύστημα είναι **παρατηρήσιμο** αν $\det(O(A,C))\neq 0$

Φυσική σημασία Ελεγξιμότητας

- Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε την αρχική κατάσταση $\underline{s}(0)$ (δηλ το αρχικό διάνυσμα κατάστασης). Αν μπορούμε να βρούμε ένα σήμα το οποίο εφαρμόζοντας το στην είσοδο του συστήματος να οδηγήσουμε το σύστημα στην κατάσταση $\underline{s}(t)$ σε πεπερασμένο χρόνο **τότε το σύστημα είναι ελέγξιμο**
- Για να είμαστε σε θέση να εκμεταλλευτούμε ένα σύστημα και να οδηγήσουμε την έξοδο του εκεί που θέλουμε, θα πρέπει να έχουμε τη δυνατότητα να επιλέγουμε εμείς τις αρχικές συνθήκες και να οδηγούμε όλες τις μεταβλητές κατάστασης στις τιμές που θέλουμε εφαρμόζοντας κατάλληλη είσοδο. Εάν αυτό είναι δυνατό **τότε το σύστημα είναι ελέγξιμο**
- Ένα σύστημα είναι **ελέγξιμο** αν $\det(C(A,b))\neq 0$

Παρατήρηση

Η Ελεγξιμότητα ενός συστήματος είναι ανεξάρτητη από την Παρατηρησιμότητα. Αυτό σημαίνει ότι ένα σύστημα μπορεί να είναι ελέγξιμο και όχι παρατηρήσιμο ή το αντίστροφο. Επίσης να είναι ταυτόχρονα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο

Μητρώα Ελεγξιμότητας και Παρατηρησιμότητας

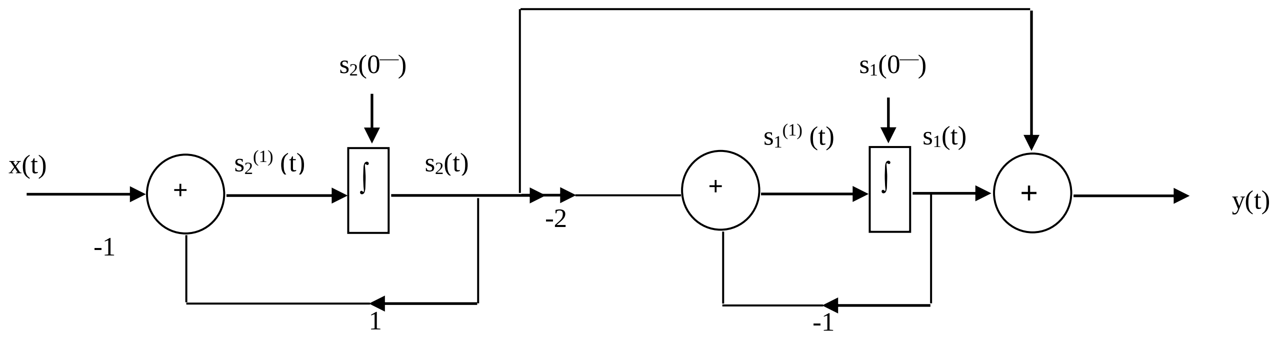
Μητρώο Παρατηρησιμότητας: $O(A,C)=\begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T A \\ \underline{c}^T A^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \underline{c}^T A^{n-1} \end{bmatrix}$. Αν $\det(O(A,C))\neq 0$ τότε το σύστημα είναι **παρατηρήσιμο**

Μητρώο Ελεγξιμότητας: $C(A,b)=[\underline{b} \quad A\underline{b} \quad A^2\underline{b} \quad \ldots \quad A^{n-1}\underline{b}]$. Αν $\det(C(A,b))\neq 0$ τότε το σύστημα είναι **ελέγξιμο**

Γενικά ένα βέλτιστο σύστημα είναι ταυτόχρονα και ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.

<u>Παράδειγμα με κατασκευή καταστατικών εξισώσεων και έλεγχο ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας</u>

Περιγράψτε στο χώρο κατάστασης το ακόλουθο αιτιατό σύστημα (δηλ. κατασκευάστε τις καταστατικές εξισώσεις του συστήματος)



α) Μεθοδολογία Κατασκευής Καταστατικών Εξισώσεων: Πηγαίνουμε σε κάθε αθροιστή και γράφουμε Έξοδος=Είσοδος

Αρχικά θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1(t) \\ \dot{s}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \bullet x(t) \text{ και } y(t) = \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix}$$

Εμείς θα πρέπει να προσδιορίσουμε το μητρώο A και τα διανύσματα $\underline{b}$ και $\underline{c}^T$

Από το σχήμα προκύπτουν το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων (από κάθε αθροιστή προκύπτει μια καταστατική εξίσωση με τη λογική ότι η έξοδος ενός αθροιστή ισούται με την είσοδο του)

$$\dot{s}_1(t) = s_1^{(1)}(t) = -s_1(t) - 2s_2(t)$$

$$\dot{s}_2(t) = s_2^{(1)}(t) = s_2(t) + x(t)$$

$$y(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

Από τα παραπάνω συστήματα προκύπτουν οι ακόλουθες δυναμικές εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1(t) \\ \dot{s}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet x(t) \text{ και } y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix}$$

Ο γενικός τύπος των καταστατικών είναι:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \bullet \underline{x}(t) + \underline{b} \bullet v(t)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \bullet \underline{x}(t) + d \bullet v(t)$$

Για να δούμε αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο ορίζουμε το μητρώο παρατηρησιμότητας O(A,C):

$$O(A,c) = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \bullet A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\det(O(A,C)) = 0$ **άρα το σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο**

Για να δούμε αν το σύστημα είναι ελέγξιμο ορίζουμε το μητρώο ελεγξιμότητας C(A,b):

$$C(A,b) = \begin{bmatrix} \underline{b} & A \bullet \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(C(A,b)) = 2 \neq 0$ **άρα το σύστημα είναι ελέγξιμο**

Παρατήρηση

Όταν το σύστημα είναι ελέγξιμο τότε μπορούμε να το τροποποιήσουμε ώστε να γίνει και παρατηρήσιμο. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Αν **αλλάξουμε τη σειρά των 2 υποσυστημάτων τότε θα έχουμε ότι**:

$$\dot{s}_1(t) = s_1^{(1)}(t) = -s_1(t) - 2x(t)$$

$$\dot{s}_2(t) = s_2^{(1)}(t) = s_2(t) + s_1(t) + x(t)$$

$$y(t) = s_2(t)$$

Από τα παραπάνω συστήματα προκύπτουν οι ακόλουθες δυναμικές εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1(t) \\ \dot{s}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet x(t) \text{ και } y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix}$$

Για να δούμε αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο ορίζουμε το μητρώο παρατηρησιμότητας O(A,C):

$$O(A,c) = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \bullet A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(O(A,C)) = -1 \neq 0$ **άρα το σύστημα είναι παρατηρήσιμο**

Για να δούμε αν το σύστημα είναι ελέγξιμο ορίζουμε το μητρώο ελεγξιμότητας C(A,b):

$$C(A,b) = \begin{bmatrix} \underline{b} & A \bullet \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\det(C(A,b)) = 0$ **άρα το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο**

<u>Σταθεροποίηση Συστήματος</u>

Ο γενικός τύπος των καταστατικών είναι:

$$\dot{\underline{s}}(t) = A \bullet \underline{s}(t) + \underline{b} \bullet x(t)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \bullet \underline{s}(t) + d \bullet x(t)$$

Έστω ότι έχουμε ένα ελέγξιμο και ασυμπτωτικά ασταθές σύστημα και θέλουμε με κάποιο τρόπο να το σταθεροποιήσουμε.

Υπολογίζουμε ένα νέο μητρώο $\hat{A} = A + \underline{b} \bullet \underline{k}^T(t)$ το οποίο λόγω του διανύσματος ανάδρασης ή σταθεροποίησης $\underline{k}^T$ έχει όλες τις ιδιοτιμές του με αρνητικό πραγματικό μέρος. **Γενικά αν το σύστημα είναι ελέγξιμο τότε πάντα μπορούμε να πειράξουμε τις ιδιοτιμές του μητρώου A**.

Ερ. Πότε η αναπαράσταση στο χώρο κατάστασης είναι χρήσιμη;

<u>Απάντηση</u>

Όταν το διάνυσμα κατάστασης έχει **πεπερασμένο αριθμό στοιχείων**.

<u>Όμοια Συστήματα</u>

Ο γενικός τύπος των καταστατικών είναι:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \bullet \underline{x}(t) + \underline{b} \bullet v(t) \quad (1)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \bullet \underline{x}(t) + d \bullet v(t) \quad (2)$$

- Έστω P **ένα αντιστρέψιμο μητρώο nxn**. **Ορίζουμε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς ομοιότητας**:

$\hat{A} = P^{-1}AP$ (3) Το P επιλέγεται έτσι ώστε το $\hat{A} = D$.

$\hat{b} = P^{-1}b$ (4)

$\hat{c} = P^T c$ (5)

Το σύστημα που περιγράφεται τώρα από τις εξισώσεις:

$$\dot{\underline{x}}'(t) = \hat{A} \bullet \underline{x}(t) + \hat{\underline{b}} \bullet v(t) \quad (6)$$

$$y(t) = \hat{\underline{c}}^T \bullet \hat{\underline{x}}(t) + d \bullet v(t) \quad (7)$$

έχει **την ίδια συνάρτηση μεταφοράς με το αρχικό σύστημα που ορίζεται από τις σχέσεις (1) και (2).** Άρα υπάρχει μια **απειρία συστημάτων που αντιστοιχούν στην ίδια συνάρτηση μεταφοράς**. Τα συστήματα αυτά σχετίζονται μέσα από τους μετασχηματισμούς ομοιότητας (3), (4) και (5) και ονομάζονται **όμοια συστήματα**.

Ιδιότητες Όμοιων Συστημάτων

- Αν A, b, c ελέγξιμα τότε και τα $\left\{\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}\right\}$ είναι ομοίως ελέγξιμα

- Αν A, b, c παρατηρήσιμα τότε και τα $\left\{\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}\right\}$ είναι ομοίως παρατηρήσιμα

- Αν $\hat{b}(n) = 0$ (δηλ αν κάποιο στοιχείο του $\hat{b}$ είναι 0) το **σύστημα είναι μη ελέγξιμο**. Αυτό συμβαίνει διότι στο μητρώο ελεγξιμότητας $C(A,b) = \left[\hat{b} \quad D \bullet \hat{b} \quad .....D^{n-1} \bullet \hat{b}\right]$ αν το n–οστό στοιχείο του $\hat{b} = 0$ τότε και η n–οστή γραμμή του $\hat{b}$ θα είναι μηδέν. **Όμως έτσι η ορίζουσα θα είναι μηδέν και συνεπώς το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο**

- Αν $\hat{c}(n) = 0$ (δηλ αν κάποιο στοιχείο του $\hat{c}$ είναι 0) το σύστημα είναι **μη παρατηρήσιμο**. Αυτό συμβαίνει διότι στο μητρώο παρατηρησιμότητας $O(A,c) = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \bullet D \\ .... \\ \underline{c}^T \bullet D^{n-1} \end{bmatrix}$ αν το n–οστό στοιχείο του $\hat{c} = 0$ τότε και η n–οστή στήλη του $\hat{c}$ θα είναι μηδέν.

  Όμως έτσι η ορίζουσα θα είναι μηδέν και συνεπώς το σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο

Παρατήρηση

- Όταν το **μητρώο κατάστασης A δύο διαφορετικών συστημάτων είναι όμοιο τότε και τα συστήματα είναι όμοια ακόμα και αν το μητρώο κατάστασης A δεν είναι διαγώνιο**
- Ο λόγος που **κάνουμε διαγώνιο το μητρώο κατάστασης A είναι για να έχουμε λιγότερες πράξεις**.

Άσκηση 1 με Σταθεροποίηση

Θεωρείστε το ακόλουθο σύστημα στο χώρο κατάστασης:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $d = 0$ και $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

α)Να βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση του συστήματος

β)Είναι το σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές;

γ)Αν το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ασταθές θα μπορούσαμε χρησιμοποιώντας ανατροφοδότηση κατάστασης να το σταθεροποιήσουμε; Αν ναι σταθεροποιήστε το ώστε να έχει τους πόλους λ_1=-1 και λ_2=-3/2.

Απάντηση

Βήμα 1: Πρώτα υπολογίζουμε το μητρώο $A - \lambda \bullet I = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix}$

Βήμα 2: Μετά υπολογίζουμε την ορίζουσα του μητρώου αυτού δηλ. την det(A-λ•I). Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου A συμβολίζεται ως $P_A(\lambda)$=det(A-λ•I)=λ^2-1. Θέτουμε την ορίζουσα ίση με μηδέν και οι ιδιοτιμές του μητρώου A είναι λ_1=-2, λ_2=2. **Παρατηρούμε ότι το σύστημα ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ Ασυμπτωτικά Ευσταθές**, διότι το πραγματικό μέρος του λ_2 είναι θετικός.

Βήμα 3: Ελεγξιμότητα

- Υπολογίζουμε το μητρώο ελεγξιμότητας S

$$C(A,b) = \left[\underline{b} \quad A \bullet \underline{b}\right] = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή det(S)=-2 το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο.

Βήμα 4: Υπολογίζουμε το σταθεροποιημένο μητρώο ως εξής:

$$\hat{A} = A + \underline{b} \bullet \underline{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ k_1 + 2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Βήμα 5: Υπολογίζουμε μετά τις ιδιοτιμές του σταθεροποιημένου μητρώου

$$\det(\hat{A} - \lambda \bullet I) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ k_1 + 2 & k_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ k_1 + 2 & k_2 - \lambda \end{bmatrix}\right) \Rightarrow -\lambda \bullet (k_2 - \lambda) - 2(k_1 + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - k_2 \lambda + (-2(k_1 + 2)) = 0$$

Βήμα 6: Το Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο β' βαθμού $\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \bullet \lambda + \lambda_1 \bullet \lambda_2$

Άρα

$$k_2 = -1 - \frac{3}{2} = -2.5$$

$$-2(k_1 + 2) = (-1) \bullet \left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow -2k_1 = \frac{11}{2} \Rightarrow k_1 = -\frac{11}{4} \Rightarrow k_1 = -2.75$$

Συνεπώς το διάνυσμα ανάδρασης (σταθεροποίησης) είναι: $\underline{k}^T = [-2.75 \;\; -2.5]$

<u>Άσκηση 2 με Σταθεροποίηση</u>

Θεωρείστε το ακόλουθο σύστημα στο χώρο κατάστασης:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad d = 2$$

α) Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση του συστήματος.

β) Είναι το σύστημα ΦΕΦΕ και ασυμπτωτικά ευσταθές; Τι θα άλλαζε στην απάντησή σας αν $b = [1 \;\; 1]^t$; Αιτιολογήστε.

<u>Λύση</u>

α) Είναι γνωστό από τη θεωρία ότι η συνάρτηση μεταφοράς υπολογίζεται από τη σχέση

$$H(s) = c^T (sI - A)^{-1} b + d \,.$$

Αρχικά ας υπολογίσουμε το μητρώο $(sI - A)^{-1}$.

Έχουμε $sI - A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-2 & -1 \\ -1 & s-2 \end{pmatrix}$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s-2 & -1 \\ -1 & s-2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-2)^2 - 1} \begin{pmatrix} s-2 & 1 \\ 1 & s-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s-2}{(s-2)^2 - 1} & \frac{1}{(s-2)^2 - 1} \\ \frac{1}{(s-2)^2 - 1} & \frac{s-2}{(s-2)^2 - 1} \end{pmatrix}.$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς υπολογίζεται ως εξής:

$$H(s) = c^T (sI - A)^{-1} b + d = (3 \;\; -1) \begin{pmatrix} \frac{s-2}{(s-2)^2 - 1} & \frac{1}{(s-2)^2 - 1} \\ \frac{1}{(s-2)^2 - 1} & \frac{s-2}{(s-2)^2 - 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \quad \Rightarrow$$

$$H(s) = 8 \frac{s-2}{(s-2)^2 - 1} + 2 = 8 \frac{s-2}{(s-3)(s-1)} + 2$$

Παρατήρηση: Επειδή η συνάρτηση μεταφοράς είναι μη συρρικνούμενη η ασυμπτωτική και η ΦΕΦΕ ευστάθεια ταυτίζονται.

Έχουμε $H(s)=8\dfrac{s-2}{(s-3)(s-1)}+2=\dfrac{A}{s-3}+\dfrac{B}{s-1}+2$

Υπολογίζουμε τις σταθερές A και B:

$A=\lim\limits_{s\to 3}\dfrac{8(s-2)}{(s-1)}=4,\qquad B=\lim\limits_{s\to 1}\dfrac{8(s-2)}{(s-3)}=-4$

Άρα $\quad h(t)=4e^{3t}u(t)-4e^{t}u(t)+2\delta(t)$

β)

Όσον αφορά την ασυμπτωτική ευστάθεια.

Για να είναι το σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές πρέπει όλες οι ιδιοτιμές του μητρώου A να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Έχουμε βρει προηγουμένως ότι οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1,\lambda_2=3$. Άρα το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ασταθές.

Αν $b=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ δεν θα άλλαζε τίποτε επειδή αυτό το διάνυσμα δεν επηρεάζει το μητρώο A και επομένως δεν επηρεάζει τις ιδιοτιμές του A.

Για ΦΕΦΕ ευστάθεια πρέπει η συνάρτηση μεταφοράς να περιλαμβάνει το 0 (δηλ. τον φανταστικό άξονα) στην Περιοχή Σύγκλισης (Π.Σ.).

Βλέπουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς έχει δύο πόλους $p_1=1,p_2=3$. Άρα η Π.Σ. είναι $\mathrm{Re}(s)>3$.

Άρα το σύστημα είναι ασταθές.

Αν $b=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ για τον έλεγχο της ΦΕΦΕ ευστάθειας ας βρούμε τη νέα συνάρτηση μεταφοράς.

Έχουμε

6.4 Μετασχηματισμός Ζ

Διαφορά Μετασχηματισμού Fourier Συνεχούς Χρόνου (Continuous Time Fourier Transform-CTFT) από Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου (Discrete Time Fourier Transform-DTFT)

- *Συνεχούς Χρόνου Μετασχηματισμός Fourier*

$$F\{x(t)\} = X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

- *Διακριτού Χρόνου Μετασχηματισμός Fourier*

$$F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$

Διαφορά Απόκρισης Συχνότητας Συστημάτων Συνεχούς Χρόνου από Απόκριση Συχνότητας Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

- *Απόκριση Συχνότητας Συστήματος Συνεχούς Χρόνου*

$$F\{h(t)\} = H(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\Omega t}dt$$

- *Απόκριση Συχνότητας Συστήματος Διακριτού Χρόνου*

$$F\{h[n]\} = H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-jn\omega}$$

Ορισμός Μετασχηματισμού Ζ

- Ορισμός: $Z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=N_0}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z = re^{j\omega}$

- Αν N_0=-∞, τότε έχουμε τον Αμφίπλευρο Μετασχηματισμό-z

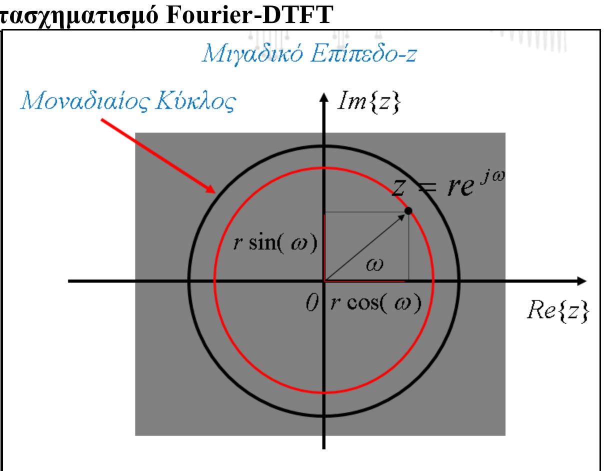
- Αν N_0 =0, τότε έχουμε το Μονόπλευρο Μετασχηματισμό-z

Σχέση ΜΖ με Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier-DTFT

$$F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$

$$X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = F\{x[n]\} = X(e^{j\omega})$$

$$X(re^{j\omega}) = F\{x[n]r^{-n}\}$$

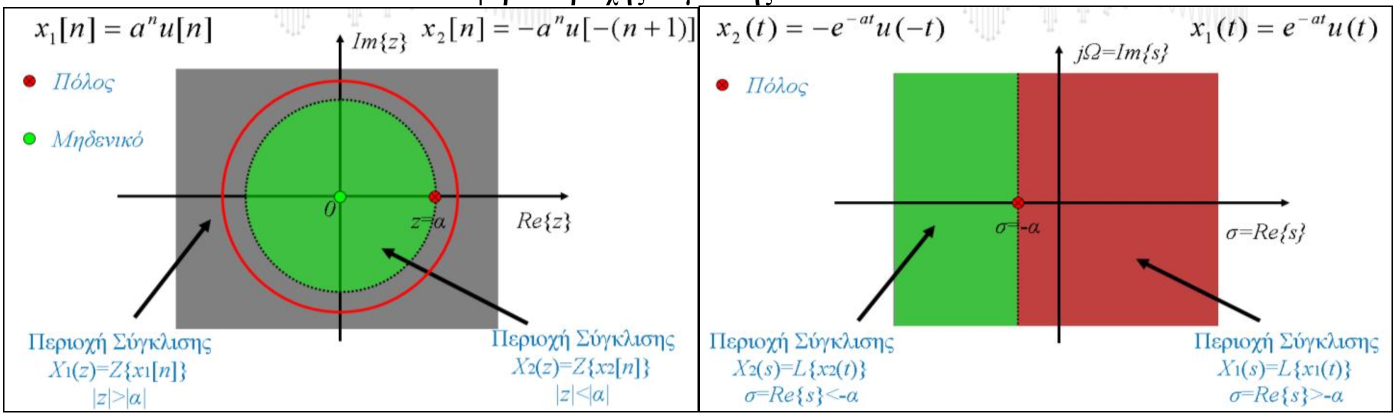


Αιτιατά και Αντι-αιτιατά Σήματα

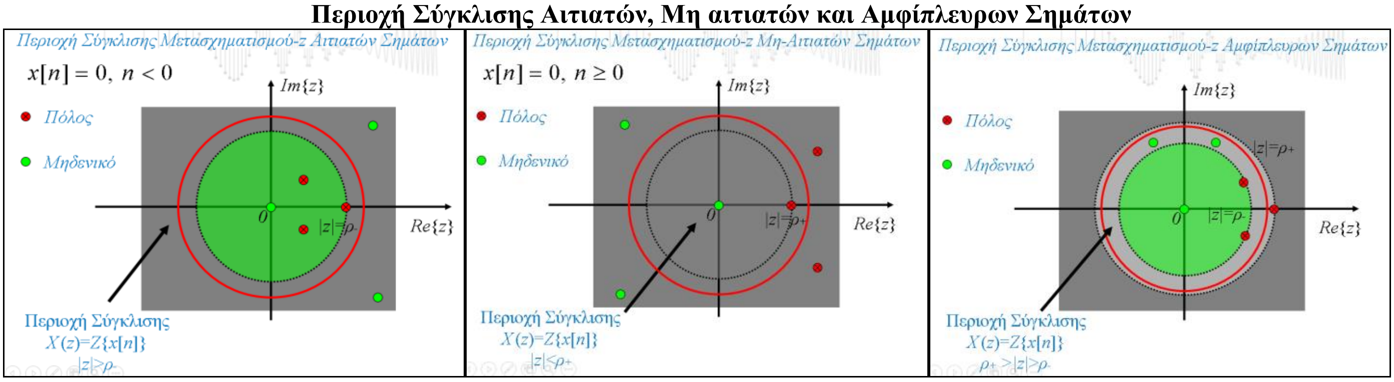
$$x_1[n] = a^n u[n] \quad \overset{z}{\longleftrightarrow} \quad X_1(z) = \frac{z}{z-a}, \ |z| > |a|$$

$$x_2[n] = -a^n u[-(n+1)] \overset{z}{\longleftrightarrow} \quad X_2(z) = \frac{z}{z-a}, \ |z| < |a|$$

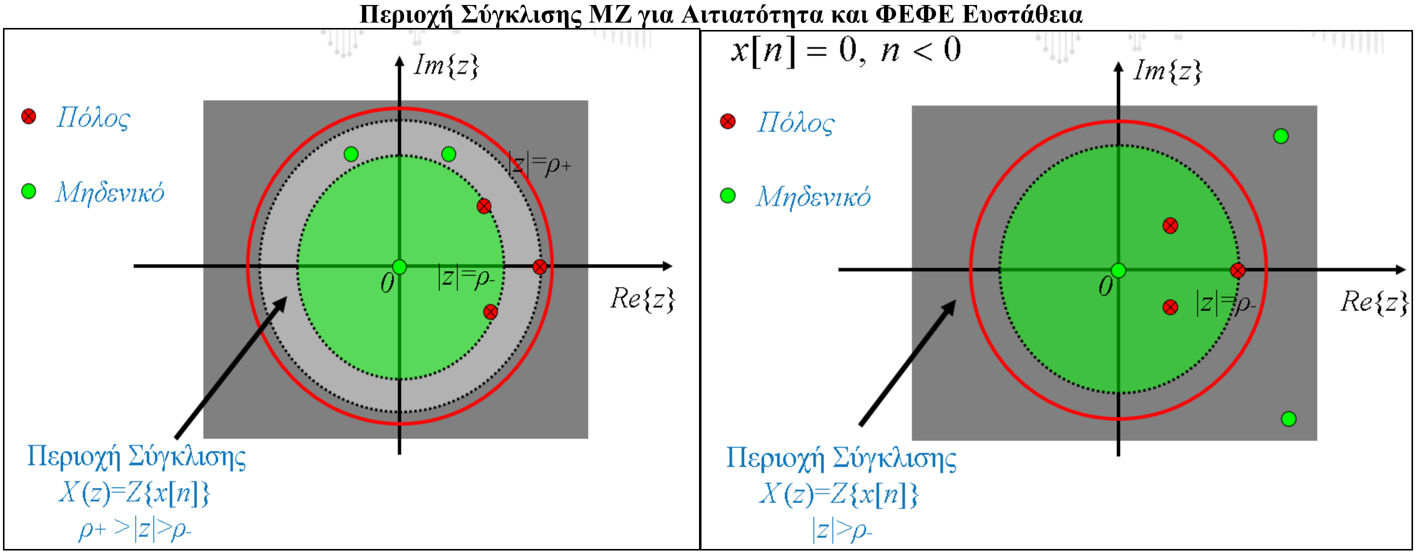
Διαφορά Περιοχής Σύγκλισης στο ΜΖ και στο ML



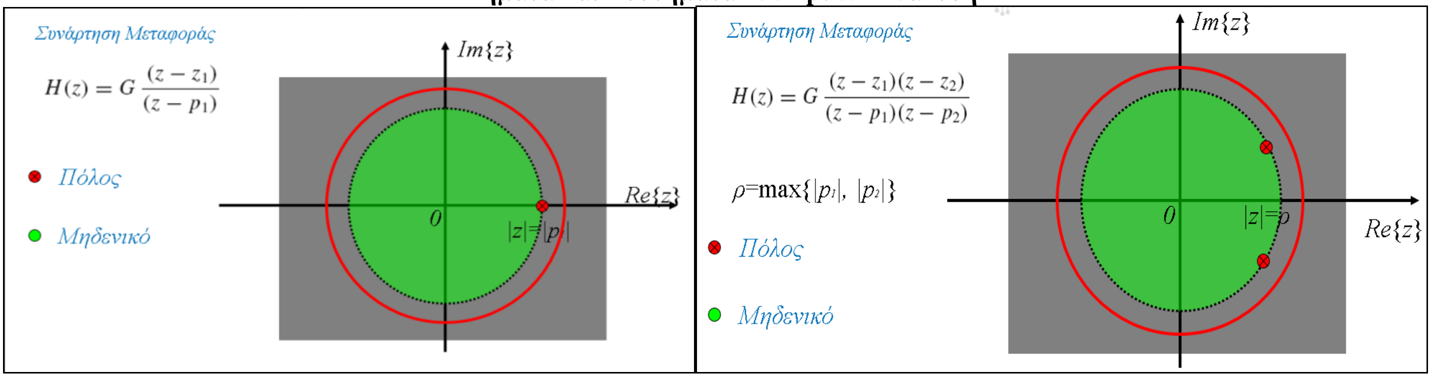
Περιοχή Σύγκλισης Αιτιατών, Μη αιτιατών και Αμφίπλευρων Σημάτων



Περιοχή Σύγκλισης ΜΖ για Αιτιατότητα και ΦΕΦΕ Ευστάθεια



Περιοχή Σύγκλισης ΜΖ Αιτιατών και Ευσταθών Συστημάτων 1η και 2ης τάξης



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

Μια ειδική μορφή σειράς συναρτήσεων είναι η:

$$\alpha_0+\alpha_1(z-\alpha)+\alpha_2(z-\alpha)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-\alpha)^n \qquad (6.2)$$

η οποία ονομάζεται **σειρά δυνάμεων** ή **δυναμοσειρά** του z-α. Η σειρά (6.2) είναι φανερό ότι συγκλίνει για z=α. Ενδέχεται όμως η σειρά να συγκλίνει και σε αλλά σημεία εκτός από

το α. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένας θετικός αριθμός R, τέτοιος ώστε για $|z-\alpha|<R$ η σειρά (6.2) να συγκλίνει και να αποκλίνει για $|z-\alpha|>R$, ενώ στα σημεία της περιφέρειας $|z-\alpha|=R$ μπορεί να συγκλίνει, αλλά μπορεί και να αποκλίνει. Το R ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** και ο αντίστοιχος κύκλος, **κύκλος σύγκλισης**. Εάν R=0, τότε μόνο στο σημείο α η σειρά (6.2) συγκλίνει, ενώ εάν $R=\infty$, τότε συγκλίνει για κάθε z με $|z|<\infty$.

Για τις δυναμοσειρές ισχύουν τα εξής θεωρήματα:

Θεώρημα 1: Κάθε δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα σε κάθε τόπο που βρίσκεται μέσα στον κύκλο σύγκλισης της.

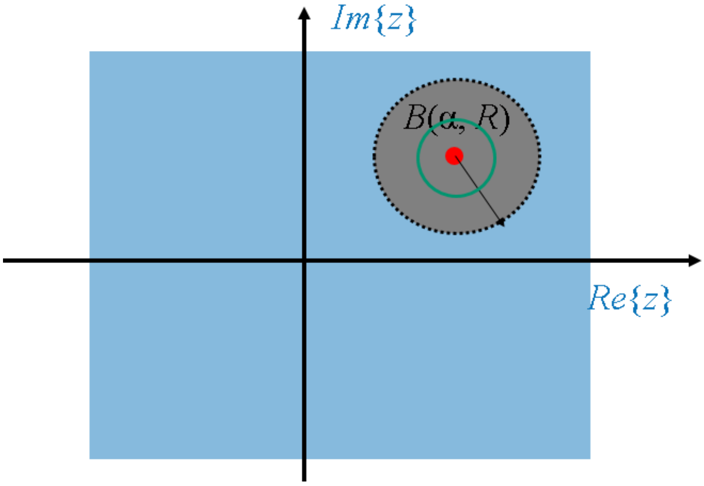
Θεώρημα 2: α) Μια δυναμοσειρά μπορεί να παραγωγιθεί κατά όρους σε κάθε τόπο που βρίσκεται μέσα στον κύκλο σύγκλισης της.

β) Μια δυναμοσειρά μπορεί να ολοκληρωθεί κατά όρους κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης C που βρίσκεται μέσα στον κύκλο σύγκλισης της.

γ) Το άθροισμα μιας δυναμοσειράς είναι συνεχής συνάρτηση σε κάθε τόπο που βρίσκεται μέσα στον κύκλο σύγκλισης της.

Αναλυτικές Συναρτήσεις-Θεώρημα του Cauchy

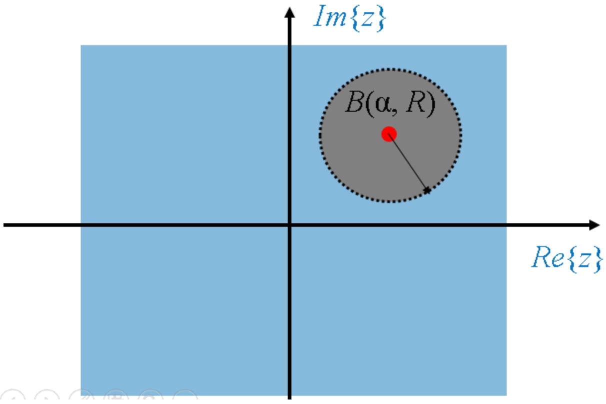
Έστω $f(z)$ μία αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο $B(\alpha, R)$ & έστω γ μία κλειστή καμπύλη που κείται εντός του δίσκου. Τότε:



$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης

Μια Μιγαδική Συνάρτηση $f(z)$ έχει μία απομονωμένη ανωμαλία στο σημείο $z=\alpha$ αν $\exists\ R > 0:$ η $f(z)$ να ορίζεται και να είναι αναλυτική στον κύκλο $B(\alpha, R)$-$\{\alpha\}$ αλλά όχι στον $B(\alpha, R)$.



Παραδείγματα

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$$f(z) = e^{z^{-1}}$$

Απαλειφόμενα Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης

Αν η Μιγαδική Συνάρτηση $f(z)$ έχει μία απομονωμένη ανωμαλία στο σημείο $z=\alpha$, τότε το σημείο $z=\alpha$ είναι ένα απαλείψιμο σημείο ανωμαλίας αν και μόνο αν:

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0$$

Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης- Πόλοι

Αν η Μιγαδική Συνάρτηση $f(z)$ έχει μία απομονωμένη ανωμαλία στο σημείο z=α, τότε το σημείο z=α είναι ένας πόλος της $f()$ αν :

1. $$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$$

2. Αν η Μιγαδική Συνάρτηση $f(z)$ έχει ένα πόλο στο σημείο z=α και m είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο το ακόλουθο όριο :

$$\lim_{z \to a} (z-a)^m f(z)$$

είναι πεπερασμένο, τότε θα λέμε ότι η $f(z)$έχει ένα πόλο τάξης m στο $z=a$

Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης- Πόλοι

Η Μιγαδική Συνάρτηση $f(z)$ μπορεί να γραφεί ως

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

όπου $g(z)$ η ακόλουθη αναλυτική συνάρτηση:

$$g(z) = A_{-m} + A_{-(m-1)}(z-a) + A_{-(m-2)}(z-a)^2 + \ldots$$
$$+ A_{-1}(z-a)^{m-1} + (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης- Πόλοι

Το τμήμα:

$$S_a(z) = A_{-m} + A_{-(m-1)}(z-a) + \ldots + A_{-1}(z-a)^{m-1}$$

της $g(z)$ ονομάζεται ανώμαλο ή κύριο τμήμα της $f(z)$ στο z=α.

Υπολογισμός των $A_{-(m-k)}$, $k=0,1,\ldots,m-1$

$$A_{-(m-k)} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k} S_a(z)|_{z=a} \equiv \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\{(z-a)^m f(z)\}_{z=a}$$

Ολοκληρωτικό Υπόλοιπο Μιγαδικής Συνάρτησης

Στροφικός Αριθμός ή Δείκτης Καμπύλης ως προς σημείο

$$n(C,a) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{dz}{z-a}$$

Ο $n(C,a)$ είναι ΑΚΕΡΑΙΟΣ!!

Θεώρημα Cauchy

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^k} = \begin{cases} 2\pi j, & k=1 \\ 0, & k\neq 1 \end{cases}$$

Ας υποθέσουμε ότι η μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ έχει ένα πόλο, πολλαπλότητας m, στο σημείο α, μίας περιοχής του μιγαδικού επιπέδου-z δηλαδή:

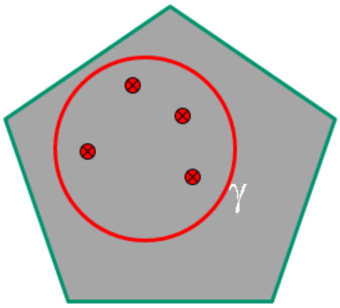
$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

Τότε ορίζουμε σαν ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z)$ στο σημείο a την παρακάτω ποσότητα:

$$\operatorname{Res}\{f(z),a\} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}}g(z)]_{z=a} = A_{-1}$$

Ολοκληρωτικά Υπόλοιπά Μιγαδικής Συνάρτησης

Ας υποθέσουμε ότι η μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος μεμονωμένων ανώμαλων σημείων $z_1, z_2, \ldots z_N$ και έστω καμπύλη γ



Ανάπτυγμα σε Απλά Κλάσματα

Αν $R(z)$ είναι μια ρητή μιγαδική συνάρτηση με N πόλους στα σημεία α_i, $i=1,2,\ldots N$, τότε:

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{i=1}^{N} S_i(z) + P(z)$$

Όπου $S_i(z)$ το ανώμαλο τμήμα της ρητής μιγαδικής συνάρτησης $R(z)$ στο $z=\alpha_i$ και $P(z)$ Πολυώνυμο.

Ουσιώδη Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης

Αν μια απομονωμένη ανωμαλία δεν είναι ούτε απαλείψιμη ούτε πόλος, θα λέμε ότι είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της συνάρτησης.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

‘’k

Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης- Σύνοψη

Έστω $z=\alpha$ μία απομονωμένη ανωμαλία της μιγαδικής συνάρτησης $f(z)$ και έστω

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

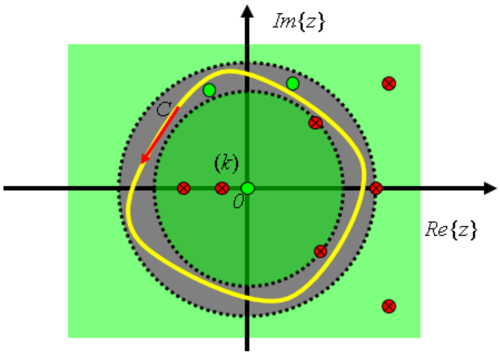
η σειρά *Laurent*. Τότε:

- το $z=\alpha$ είναι ένα απαλείψιμο ανώμαλο σημείο αν και μόνο αν $a_n = 0,\ n \le -1$
- το $z=\alpha$ είναι ένας πόλος τάξης m αν και μόνο αν $a_{-m} \neq 0$ & $a_n = 0, n \le -(m+1)$
- το $z=\alpha$ είναι ένα ουσιώδες ανώμαλο σημείο αν $a_n \neq 0$ για μια απειρία αρνητικών τιμών του n.

Αντίστροφος Μετασχηματισμός - z

Έστω κλειστή καμπύλη C η οποία περικλείει N πόλους (στα σημεία z_i, i=0,1,…N-1), της μιγαδικής ρητής συνάρτησης $X(z)z^{n-1}$ και ανήκει εξ ολοκλήρου στην Περιοχή Σύγκλισης της μιγαδικής συνάρτησης, τότε:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$



Ολοκληρωτικό Υπόλοιπο Μιγαδικής Συνάρτησης

Ας υποθέσουμε ότι η μιγαδική ρητή συνάρτηση $X(z)z^{n-1}$ έχει ένα πόλο, πολλαπλότητας m, στο σημείο α, δηλαδή:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

Τότε ορίζουμε σαν ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $X(z)z^{n-1}$ στο σημείο a την παρακάτω ποσότητα:

$$\operatorname{Re} s\{X(z)z^{n-1}, a\} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}}g(z)]_{z=a}$$

Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Αν υποθέσουμε ότι μία κλειστή καμπύλη *C*, που ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του περικλείει *N* πόλους (στα σημεία z_i , i=0,1,…*N*-1), της μιγαδικής ρητής συνάρτησης $X(z)z^{n-1}$, τότε:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Res}\{X(z)z^{n-1}, z_i\}$$

6.5 Πιθανές Multiple Choice Ερωτήσεις

Άσκηση 1

Δίνεται το σύστημα

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{(a+b)^{n-m}}x(m)$$

α) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

β) Είναι το σύστημα αιτιατό;

γ) Γράψτε τη σχέση εισόδου-εξόδου σε μια διαφορετική μορφή κατάλληλη για υλοποίησή του σε μικροϋπολογιστικό σύστημα. Ποιες οι απαιτήσεις σας σε μνήμη;

δ) Υπολογίστε την Απόκριση Συχνότητας του Συστήματος.

ε) Είναι το σύστημα ΦΕΦΕ ευσταθές;

Λύση

α)Η έξοδος είναι:

$$y[n]=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{(a+b)^{n-m}}\bullet x(m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a+b)^{n-m}}\bullet u(n-m)\bullet x(m)\bullet u(m)=x(n)\bullet u(n)*\frac{1}{(a+b)^{n}}\bullet u(n)$$

Άρα η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι $h(n)=\frac{1}{(a+b)^{n}}\bullet u(n)$. Παρατηρούμε ότι και η είσοδος x(n) και η κρουστική απόκριση h(n) είναι αιτιατά σήματα

β) Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ένα ΓΧΑ σύστημα είναι *αιτιατό* αν και μόνο αν η κρουστική του απόκριση είναι *αιτιατό* σήμα.

Το σήμα $h(n)=\frac{1}{(a+b)^{n}}u(n)$ που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα είναι αιτιατό, αφού ισχύει $h(n)=0$ για $n<0$.

Άρα και το σύστημα είναι αιτιατό.

γ)

Ξεκινάμε από την αρχική σχέση

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{(a+b)^{n-m}}x(m) \qquad (1)$$

Απομονώνουμε τον τελευταίο όρο του αθροίσματος. Δηλαδή τον όρο για τον οποίο $m=n$.

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{(a+b)^{n-m}}x(m)+\frac{1}{(a+b)^{n-n}}x(n) \quad\Rightarrow$$

$$y(n)=\frac{1}{a+b}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{(a+b)^{n-1-m}}x(m)+x(n) \quad\Rightarrow$$

$$y(n)=\frac{1}{a+b}y(n-1)+x(n)$$

Στο τελευταίο βήμα αντικαταστήσαμε $\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{(a+b)^{n-1-m}}x(m)=y(n-1)$. Αυτό προκύπτει από τη σχέση (1) αντικαθιστώντας $n\leftarrow n-1$.

Η σχέση

$$y(n)=\frac{1}{a+b}y(n-1)+x(n) \qquad (2)$$

στην οποία καταλήξαμε είναι κατάλληλη για υλοποίηση σε μικροϋπολογιστικό σύστημα. Λόγω του $y(n-1)$ χρειαζόμαστε μια θέση μνήμης.

δ)

Αρχικά ας βρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

Εφαρμόζουμε στη σχέση (2) τον Μετασχηματισμό Ζ. Προκύπτει

$$Y(z)=\frac{1}{a+b}z^{-1}Y(z)+X(z) \quad \Rightarrow \quad Y(z)(1-\frac{1}{a+b}z^{-1})=X(z) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{1}{a+b}z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad H(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{a+b}}$$

Βλέπουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς έχει έναν πόλο $p=\frac{1}{a+b}$.

Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, η Περιοχή Σύγκλισης της $H(z)$ είναι $|z|>\frac{1}{|a+b|}$

Για να βρούμε την απόκριση συχνότητας, αντικαθιστούμε στην συνάρτηση μεταφοράς $z \leftarrow e^{j\omega}$.

Επομένως, η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-\frac{1}{a+b}}$$

Ο Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT) υπάρχει εφόσον η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Για να τον περιλαμβάνει στη συγκεκριμένη περίπτωση πρέπει $\left|\frac{1}{a+b}\right|<1$

ε)**Το σύστημα είναι αιτιατό. Για να είναι και ΦΕΦΕ ευσταθές πρέπει όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς να βρίσκονται ΕΝΤΟΣ του μοναδιαίου κύκλου, άρα πρέπει** $\left|\frac{1}{a+b}\right|<1$

<u>Άσκηση 2</u>

Δίνεται το σύστημα

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{2^{n-m}} x(m)$$

α) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

β) Είναι το σύστημα αιτιατό;

γ) Γράψτε τη σχέση εισόδου-εξόδου σε μια διαφορετική μορφή κατάλληλη για υλοποίησή του σε μικροϋπολογιστικό σύστημα. Ποιες οι απαιτήσεις σας σε μνήμη;

δ) Υπολογίστε την Απόκριση Συχνότητας του Συστήματος.

ε) Είναι το σύστημα ευσταθές;

ΛΥΣΗ 2.

Το Θέμα αυτό είναι ειδική περίπτωση του Θέματος 1 για $a+b=2$.

α) $h(n) = \frac{1}{2^n} u(n)$

β) Η κρουστική απόκριση $h(n) = \frac{1}{2^n} u(n)$ είναι αιτιατό σήμα. Άρα και το σύστημα είναι αιτιατό.

γ) $y(n) = \frac{1}{2} y(n-1) + x(n)$ Χρειαζόμαστε μια θέση μνήμης.

δ) Συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = \dfrac{z}{z - \frac{1}{2}}$, Π.Σ. $|z| > \frac{1}{2}$

Απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega}) = \dfrac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - \frac{1}{2}}$

ε) Επειδή ο πόλος $p = \frac{1}{2}$ της συνάρτησης μεταφοράς έχει μέτρο μικρότερο της μονάδας, το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

<u>Άσκηση 3</u>

Να λυθεί η Δ.Ε. $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}u(t)$. Να υπολογίσετε το $x(0^+)$

<u>Απάντηση</u>

Εφαρμόζουμε ML και στα 2 μέρη της διαφορικής και προκύπτει ότι: $X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1}, \operatorname{Re}\{s\} > -1$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Αρχικής Τιμής:

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s \bullet X(s) = \lim_{s\to\infty} s \bullet \left(\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} \right) = \lim_{s\to\infty} \left(\frac{s}{s+2} + \frac{s}{s+1} \right) = \lim_{s\to\infty} \left(\frac{s}{s\left(1+\frac{2}{s}\right)} + \frac{s}{s\left(1+\frac{1}{s}\right)} \right) =$$

$$\lim_{s\to\infty} \left(\frac{1}{\left(1+\frac{2}{s}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{s}\right)} \right) = 2$$

6.5.1 Θέματα 2015

Ποιά η περιοχή σύγκλισης του Μετασχηματισμού $\mathbb{Z}$ του σήματος διακριτού χρόνου

$$x(n) = -(\alpha^n + \beta^n)\, u(-(n+1))$$

(a) $z : |\alpha| < z < |\beta|$

(b) $z : |\beta| < z < |\alpha|$

(c) $z : |z| > \max\{|\alpha|, |\beta|\}$

(d) $z : |z| < \min\{|\alpha|, |\beta|\}$

Full Image

Question 4

Αν

$$j \ln\left[\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}\right] = t_0 \Omega$$

Ποιά η σχέση ανάμεσα στα σήματα $y(t)$ και $x(t)$;
Θεωρήστε ότι $\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} > 0,\ \forall \Omega \in \mathbb{R}$.

(a) $y(t) = t_0 x(t)$

(b) $y(t) = x(t - t_0)$

(c) $y(t) = x(t + t_0)$

(d) $y(t) = e^{-t_0} x(t)$

(a) $y(t) = t_0 x(t)$

(b) $y(t) = x(t - t_0)$

(c) $y(t) = x(t + t_0)$

(d) $y(t) = e^{-t_0} x(t)$

Question 5

*

Τι εκφράζει η ακόλουθη σχέση

$$h(t) = c^T L^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\} b + d\delta(t)$$

Full Image

- ○ Απόκριση συχνότητας
- ○ Κρουστική απόκριση
- ○ Απόκριση μηδενικής κατάστασης
- ○ Απόκριση μηδενικής εισόδου
- ● Συνάρτηση μεταφοράς

Question 6

•

Αν

$$H(z) = \frac{z}{z-\alpha},\ 0 < \alpha < 1,\ |z| < |\alpha|$$

ποιό από τα παρακάτω ισχύει;

Full Image

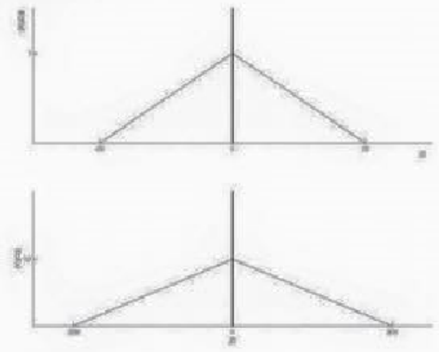
- ○ Το σύστημα είναι αιτιατό
- ● Το σύστημα είναι αντιαιτιατό
- ○ Το σύστημα είναι μη γραμμικό
- ○ Το σύστημα είναι ΓΧΑ και αιτιατό

Question 7

Υποθέστε ότι σε ένα ΓΧΑ ΦΕΦΕ ευσταθές σύστημα αντιμεταθέτουμε το σήμα εισόδου x(t) με την κρουστική απόκριση h(t). Τι από τα παρακάτω ισχύει;

- ○ Το σύστημα δεν είναι πλέον χρονικά αμετάβλητο
- ○ Τίποτα απο τα υπόλοιπα δεν ισχύει
- ○ Το σύστημα δεν είναι πλέον γραμμικό
- ● Η έξοδος σίγουρα εξακολουθεί να είναι φραγμένη

Από την εφαρμογή ποιάς ιδιότητας στο σήμα x(t) του οποίου το μέτρο του ΜF φαίνεται στο πρώτο σχήμα, προκύπτει το σήμα y(t) με μέτρο του ΜF αυτό του δεύτερου σχήματος;



Full Image

- ○ Κλιμάκωση στο χρόνο κατά παράγοντα 1/2
- ○ Χρονική Ολίσθηση
- ○ Συχνοτική Ολίσθηση
- ● Κλιμάκωση στο χρόνο κατά παράγοντα 2

Question 9

*

Το σύστημα με τον ακόλουθο καταστατικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

είναι:

Full Image

- ○ Ασυμπτωτικά ευσταθές
- ◉ Ασυμπτωτικά ασταθές
- ○ Κρίσιμα ασυμπτωτικά ευσταθές

Question 10

*

Το παρακάτω σύστημα

$$y(t) = \frac{1}{\alpha x(t) + \beta}, \ \alpha x(t) + \beta \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

είναι:

Full Image

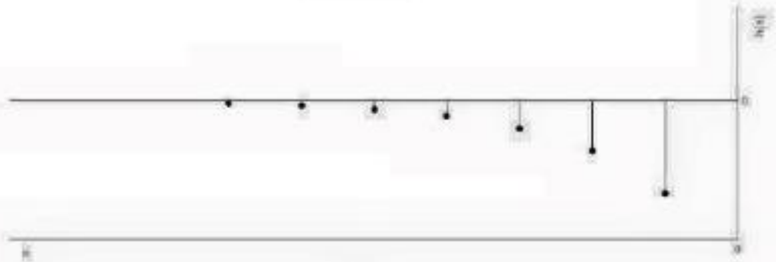
- ○ Γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο
- ○ Γραμμικό και χρονικά μεταβαλλόμενο
- ○ Μη γραμμικό και χρονικά μεταβαλλόμενο
- ○ Μη γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο

Αν

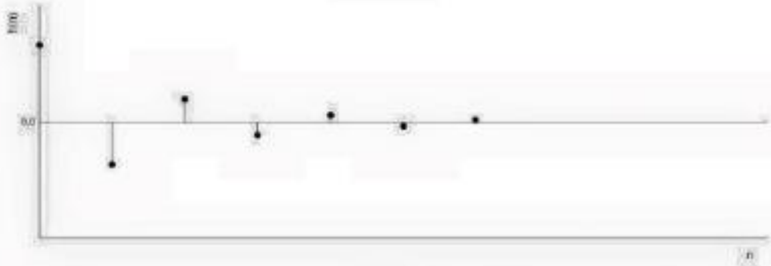
$$H(z) = \frac{z}{z-\alpha},\ 0 < \alpha < 1,\ |z| > |\alpha|$$

ποιό σχήμα από τα παρακάτω αντιστοιχεί στην χρουστική απόκριση $h(n)$ του διακριτού χρόνου συστήματος;

(g)



(h)

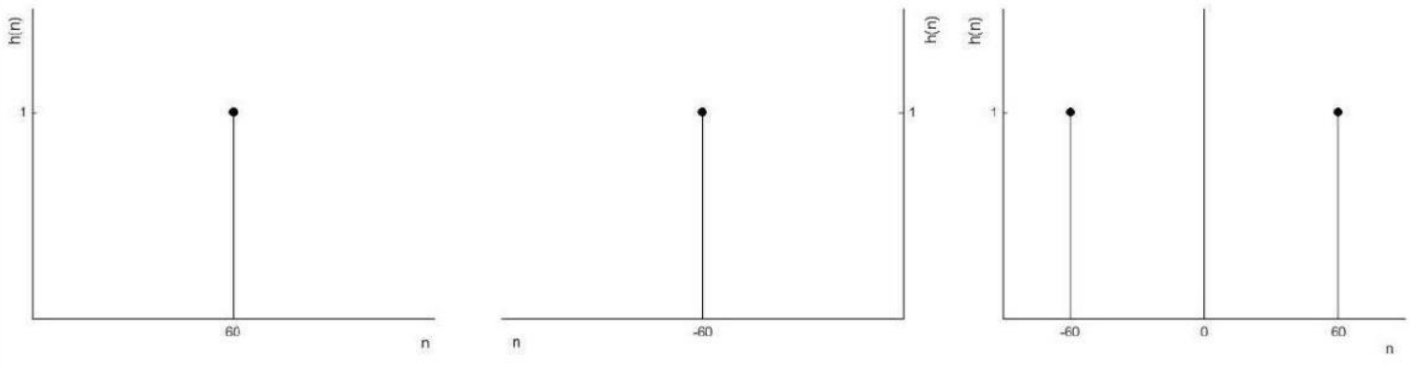


(i)

Αν

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j60\omega}$$

ποιό σχήμα από τα παρακάτω αντιστοιχεί στην κρουστική απόκριση $h(n)$ του διακριτού χρόνου συστήματος;



Αν

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; b = 2\begin{bmatrix} b_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 3 \\ c_2 \end{bmatrix}, \; d = 2$$

Ποιά από τις παρακάτω τιμές εξασφαλίζει ότι το σύστημα είναι παρατηρήσιμο και ελέγξιμο;

(a) $b_1 > \frac{1}{3}$ και $c_2 > -1$

(b) $b_1 < \frac{1}{2}$ και $c_2 > -1$

(c) $b_1 < \frac{3}{2}$ και $c_2 > -1$

(d) $b_1 > \frac{1}{3}$ και $c_2 < 0$

Πώς θα χαρακτηρίζατε από την ακόλουθη σχέση

$$\left[c^t \left(sI - A\right)^{-1} b + d\right] X(s) = Y(s)$$

την απόκριση του συστήματος;

Να εξετάσετε αν το σύστημα είναι ΓΧΑ

$$y(t)=\frac{1}{T}\int_{t_{0_1}}^{t_0+T} x(t-r)dr$$

Απάντηση

Βάζουμε ως είσοδο **ένα γραμμικό συνδυασμό δύο εισόδων δηλ.** $x(t)=a\bullet x_1(t)+b\bullet x_2(t)$ **και προκύπτει ως έξοδος το σήμα**:

$$y_\alpha(t)=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a\bullet x_1(t-r)+b\bullet x_2(t-r)dr=a\bullet\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x_1(r)dr+b\bullet\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x_2(r)dr$$

Μετά παίρνουμε το γραμμικό συνδυασμό 2 εξόδων δηλ $a\bullet y_1(t)+b\bullet y_2(t)$ και **προκύπτει:**

$y_b(t)=a\bullet y_1(t)+b\bullet y_2(t)=a\bullet\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x_1(r)dr+b\bullet\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x_2(r)dr$. Επειδή $y_a(t)=y_b(t)$ **το σύστημα είναι γραμμικό**.

Χρονικά Αμετάβλητο

Εφαρμόζουμε πρώτα χρονική ολίσθηση στην είσοδο δηλ $x(t-t_0)$ και προκύπτει η έξοδος $y_a(t)=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t-t_0-r)dr$

Μετά εφαρμόζουμε χρονική ολίσθηση στην έξοδο και προκύπτει:

$$y_b(t)=y(t-t_0)=\frac{1}{T}\int_{t-t_0}^{t-t_0+T} x(t-r)dr=\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} x(t-t_0-r)dr$$

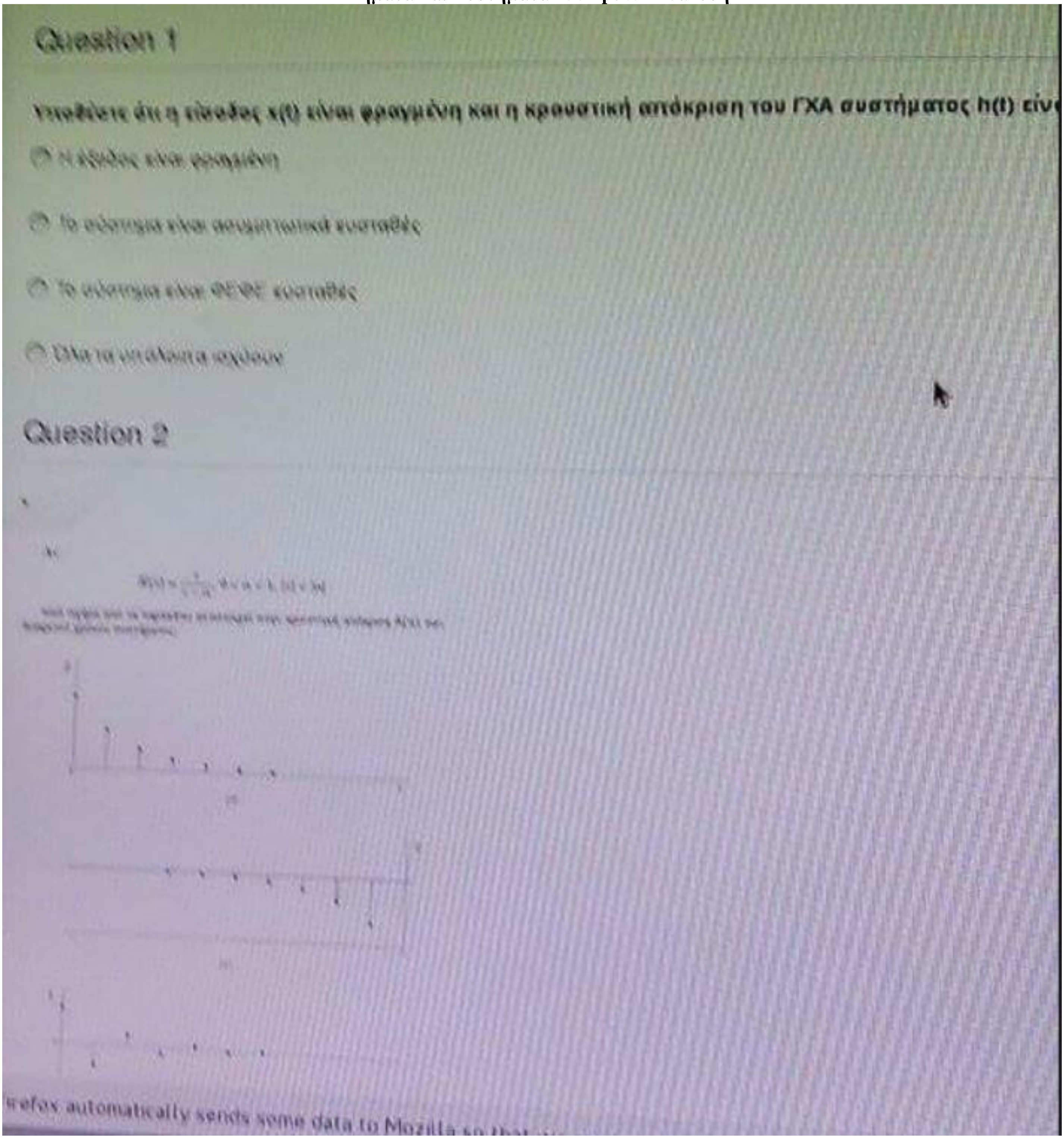
Επειδή $y_a(t)=y_b(t)$ το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Παρατήρηση

Η κρουστική απόκριση h(t) είναι η έξοδος του συστήματος με είσοδο την κρουστική συνάρτηση δ(t). Για να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση θέτουμε ως είσοδο x(t) το δ(t) και προκύπτει: $h(t)=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\delta(t-r)dr$.

Επειδή τα όρια του ολοκληρώματος είναι πεπερασμένα, αν η ολίσθηση της δ(r) (που είναι μηδέν) είναι μέσα στα όρια του ολοκληρώματος τότε η κρουστική απόκριση θα είναι: $y(t)=\frac{1}{T}$ αν ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι συνθήκες: $t-r<t_0+T\Rightarrow t<t_0+T+r$, $t_0<t-r\Rightarrow t_0+r<t$, ενώ η κρουστική απόκριση θα είναι μηδέν αν ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ Η ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ $-r_2<t<r_1$. Άρα συνοψίζοντας έχουμε:

$$h(t)=\begin{cases}\frac{1}{T} & t_0+r<t<t_0+T+r\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$


Question 1
Υποθέστε ότι η είσοδος x(t) είναι φραγμένη και η κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος h(t) είν
Question 2
refox automatically sends some data to Mozilla so that

Αν

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j8\omega}$$

ποιό από τα παρακάτω ισχύει;

Full Image

- Το σύστημα είναι αιτιατό και μη γραμμικό
- Το σύστημα είναι ΓΧΑ και αιτιατό
- Το σύστημα είναι μη γραμμικό
- Το σύστημα είναι ανταιτιατό

Αν

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ 1 \end{bmatrix}, c = 2\begin{bmatrix} 3 \\ c_2 \end{bmatrix}, d = 2$$

Ποιά από τις παρακάτω τιμές εξασφαλίζει ότι το σύστημα είναι παρατηρήσιμο και ελέγξιμο;

(a) $b_1 > \frac{1}{2}$ και $c_2 > -1$

(b) $b_1 < \frac{1}{2}$ και $c_2 > -1$

(c) $b_1 < \frac{3}{2}$ και $c_2 > -1$

(d) $b_1 > \frac{1}{2}$ και $c_2 < 0$

Full Image

- a
- b
- c
- d

Question 3

Το σύστημα με τον ακόλουθο καταστατικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -\text{[illegible]} & \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} & -\text{[illegible]} \end{bmatrix}$$

είναι:

Full Image

- Κρίσιμα Ασυμπτωτικά ευσταθές
- Ασυμπτωτικά ασταθές
- Ασυμπτωτικά ευσταθές

Αν

$$j \ln \left[\frac{y(t)}{x(t)}\right] = t\Omega_0$$

Ποιά η σχέση ανάμεσα στους μετασχηματισμούς Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$;

Θεωρήστε ότι $\frac{y(t)}{x(t)} > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

(a) $Y(j\Omega) = \Omega_0 X(j\Omega)$

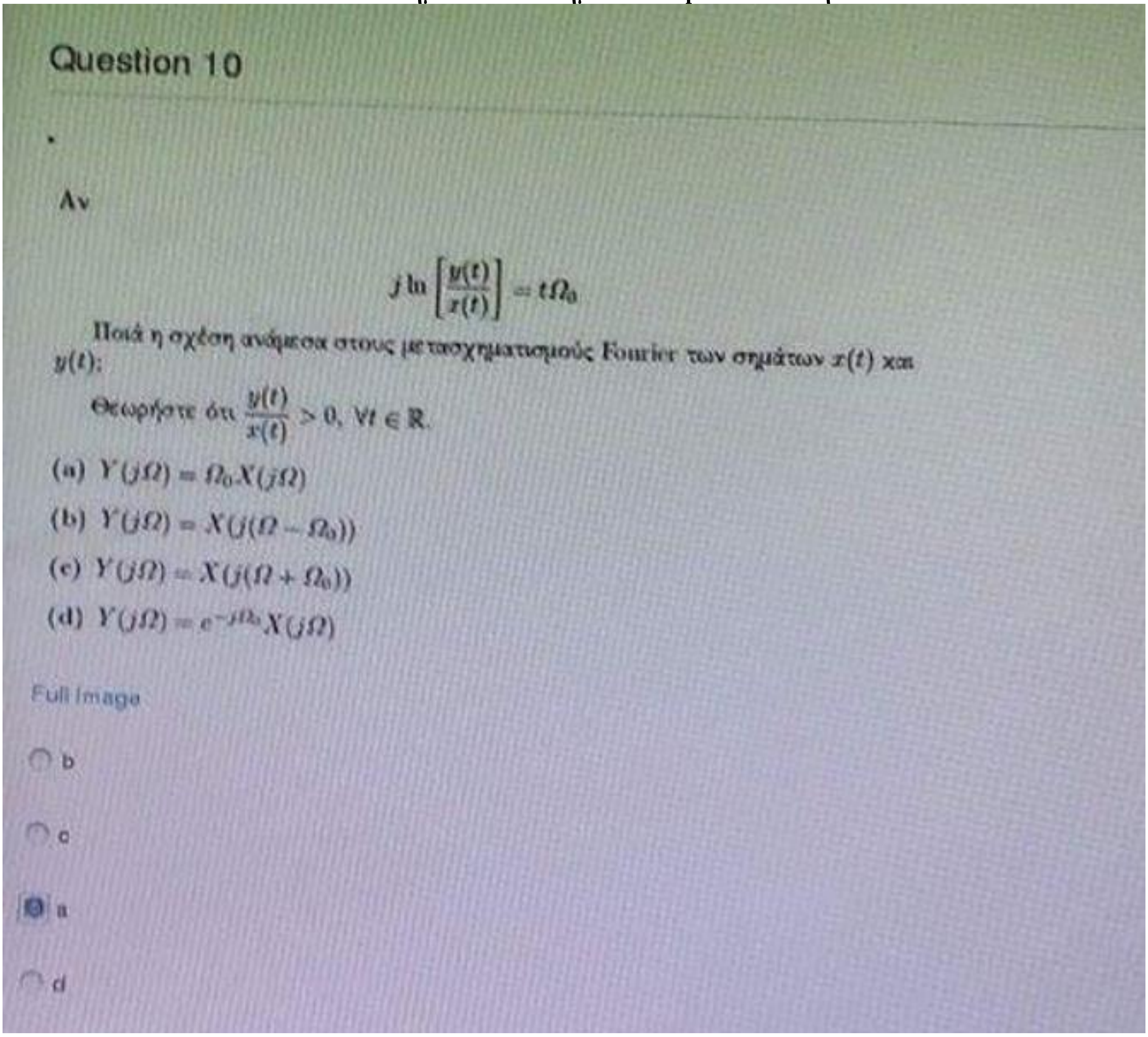
(b) $Y(j\Omega) = X(j(\Omega - \Omega_0))$

(c) $Y(j\Omega) = X(j(\Omega + \Omega_0))$

(d) $Y(j\Omega) = e^{-j\Omega_0} X(j\Omega)$

Full image

- b
- c
- a
- d



Question 10

Αν

$$j \ln\left[\frac{y(t)}{x(t)}\right] = t\Omega_0$$

Ποιά η σχέση ανάμεσα στους μετασχηματισμούς Fourier των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$;

Θεωρήστε ότι $\frac{y(t)}{x(t)} > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

(a) $Y(j\Omega) = \Omega_0 X(j\Omega)$

(b) $Y(j\Omega) = X(j(\Omega - \Omega_0))$

(c) $Y(j\Omega) = X(j(\Omega + \Omega_0))$

(d) $Y(j\Omega) = e^{-j\Omega_0}X(j\Omega)$

Full image

- b
- c
- a
- d

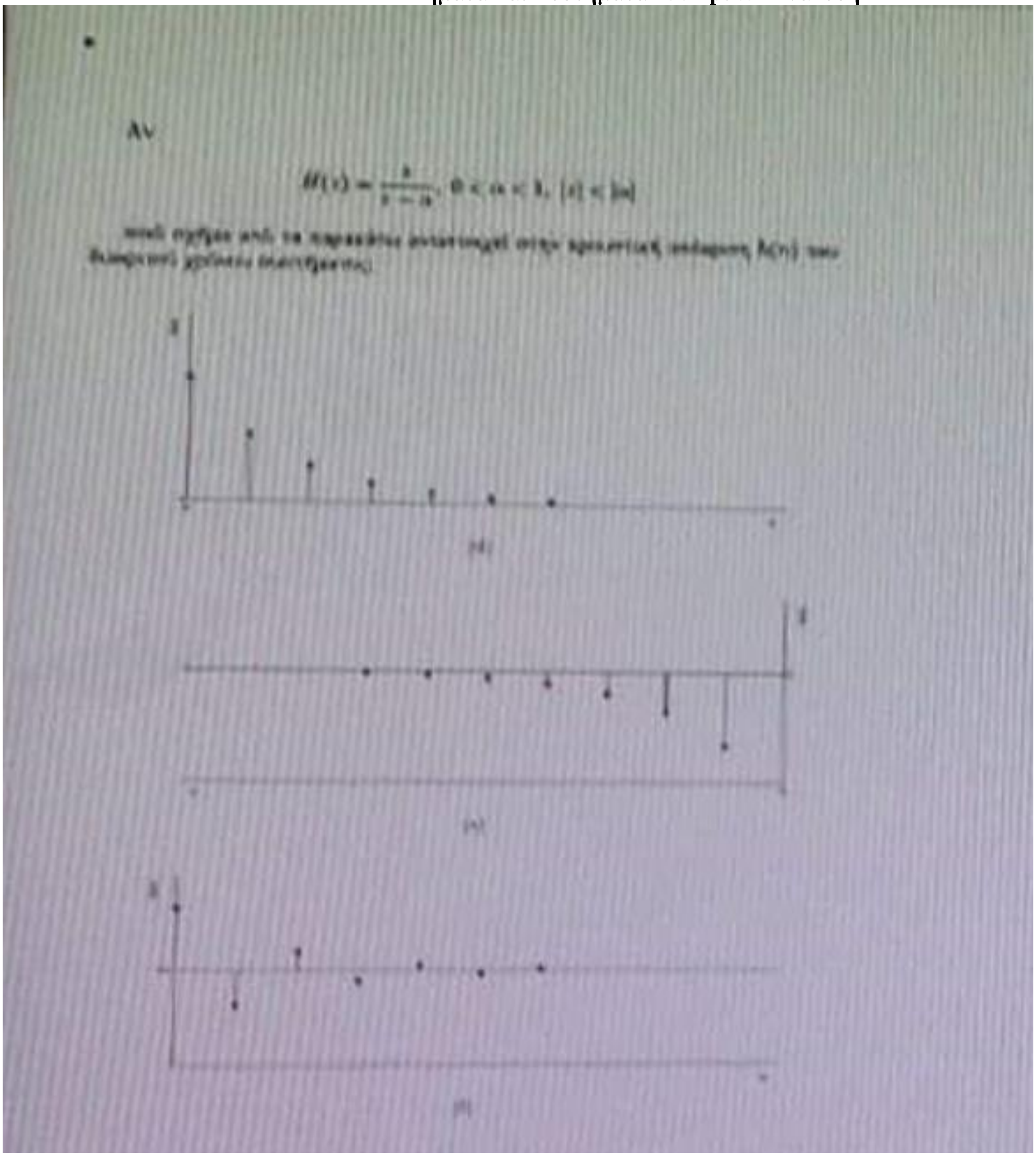
Πώς θα χαρακτηρίζατε από την ακόλουθη σχέση

$$\left[c^T (sI - A)^{-1} b + d\right] X(s) = Y(s)$$

την απόκριση του συστήματος;

Full Image

- Κρουστική απόκριση
- Απόκριση συχνότητας
- Απόκριση μηδενικής εισόδου
- Απόκριση μηδενικής κατάστασης
- Συνάρτηση Μεταφοράς



•

Αν

$$H(z) = \frac{z}{z-a},\ 0 < a < 1,\ |z| < |a|$$

ποιό σχήμα από τα παρακάτω αντιστοιχεί στην κρουστική απόκριση $h(n)$ του διακριτού χρόνου συστήματος;

Question 4

•

Ποιά η περιοχή σύγκλισης του Μετασχηματισμού Ζ του σήματος διακριτού χρόνου

$$x(n) = \alpha^n u(n) + \beta^n u(n)$$

(a) $z : |\alpha| < z < |\beta|$

(b) $z : |\beta| < z < |\alpha|$

(c) $z : |z| > \max\{|\alpha|, |\beta|\}$

(d) $z : |z| < \min\{|\alpha|, |\beta|\}$

Full Image

○ b

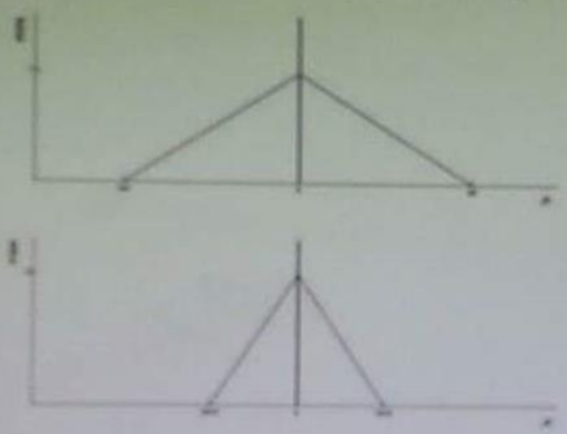
○ d

○ a

○ c

Question 9

Από την εφαρμογή ποιάς ιδιότητας στο σήμα x(t) του οποίου το μέτρο του ΜΓ φαίνεται στο πρώτο σχήμα προκύπτει το σήμα y(t) με



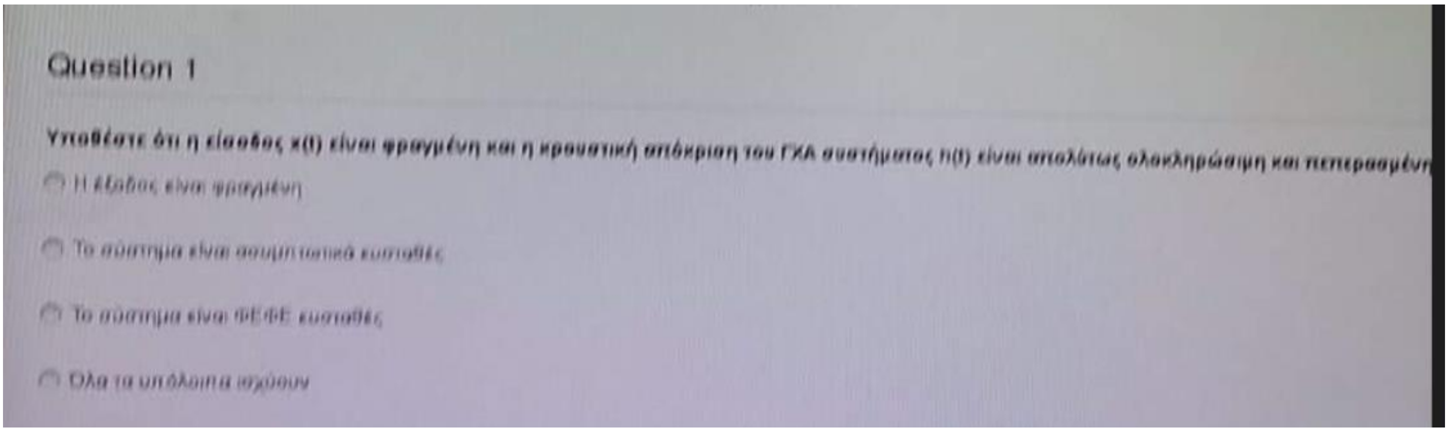
Full Image

○ Κλιμάκωση στο χρόνο κατά παράγοντα 1/2

○ Κλιμάκωση στο χρόνο κατά παράγοντα 2

○ Συχνοτική ολίσθηση

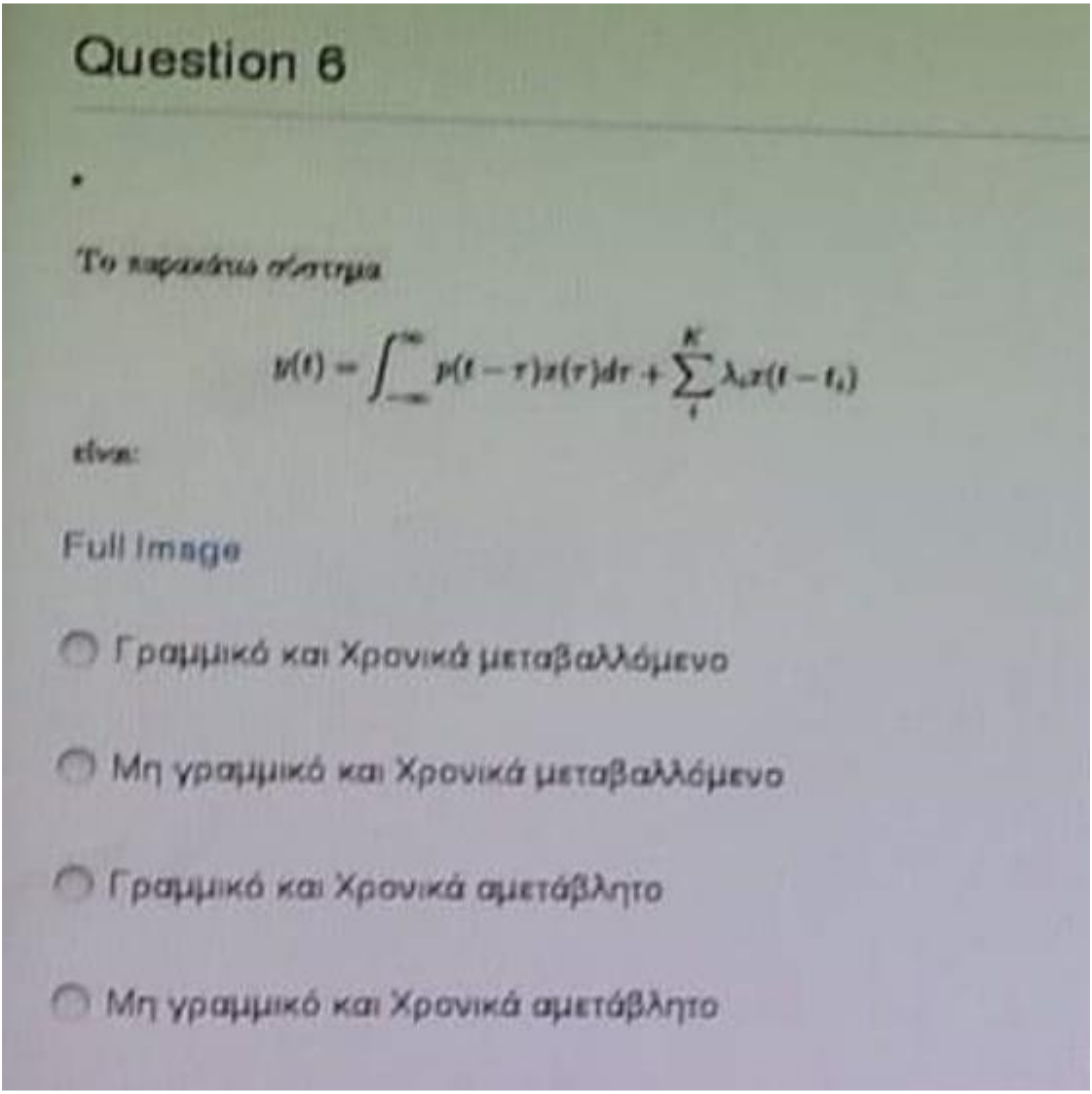
○ Χρονική ολίσθηση



Question 1

Υποθέστε ότι η είσοδος x(t) είναι φραγμένη και η κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος h(t) είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και πεπερασμένη

- Η έξοδος είναι φραγμένη
- Το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές
- Το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές
- Όλα τα υπόλοιπα ισχύουν



Question 6

•

Το παρακάτω σύστημα

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau + \sum_{i}^{K} \lambda_i x(t-t_i)$$

είναι:

Full Image

- Γραμμικό και Χρονικά μεταβαλλόμενο
- Μη γραμμικό και Χρονικά μεταβαλλόμενο
- Γραμμικό και Χρονικά αμετάβλητο
- Μη γραμμικό και Χρονικά αμετάβλητο

1. Αν σε ένα γραμμικό σύστημα ανταλλάξουμε την h(t) με την x(t) το σύστημα παραμένει ΦΕΦΕ Ευσταθές ή όχι;

<u>Απάντηση</u>

ΔΕΝ Παραμενει γραμμικό.

Παράδειγμα

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)=\delta(t)} \longrightarrow y(t)$$

Αν |x(t)|<∞ τότε η y(t)=x(t)*δ(t)=x(t) είναι ίση με την είσοδο άρα φραγμένη, συνεπώς το σύστημα είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές.

Αν κάνουμε την εναλλαγή μεταξύ εισόδου και κρουστικής απόκρισης τότε:

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)=x(t)} \longrightarrow y(t)$$

Η είσοδος δεν είναι φραγμένο σήμα άρα και η έξοδος δεν είναι φραγμένο σήμα,συνεπώς το σύστημα δεν είναι ΦΕΦΕ Ευσταθές.

2. Αν $j\ln\left(\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}\right)=t\bullet\Omega_0$ ποια η σχέση ανάμεσα στα σήματα x(t) και y(t);

<u>Απάντηση</u>

$$j\bullet\ln\left(\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}\right)=t\bullet\Omega_0 \Rightarrow \ln\left(\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}\right)=\frac{t\bullet\Omega_0}{j} \Rightarrow \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}=e^{\frac{t\bullet\Omega_0}{j}} \Rightarrow \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}=e^{\frac{t\bullet\Omega_0}{j}} \Rightarrow Y(j\Omega)=X(j\Omega)\bullet e^{\frac{t\bullet\Omega_0}{j}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(j\Omega)=e^{-j\bullet\Omega_0\bullet t}\bullet X(j\Omega) \leftrightarrow y(t)=x(t-t_0)$$

3. Αν $j\bullet\ln\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)=t\bullet\Omega_0$ ποια η σχέση ανάμεσα στους μεταχηματισμούς Fourier των σημάτων x(t) και y(t); Θεωρήστε ότι $\frac{y(t)}{x(t)}>0, \forall t\in R$

<u>Απάντηση</u>

$$j\bullet\ln\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)=t\bullet\Omega_0 \Rightarrow \ln\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)=\frac{t\bullet\Omega_0}{j} \Rightarrow \frac{y(t)}{x(t)}=e^{\frac{t\bullet\Omega_0}{j}} \Rightarrow \frac{y(t)}{x(t)}=e^{\frac{t\bullet\Omega_0}{j}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=x(t)\bullet e^{\frac{t\bullet\Omega_0}{j}} \Rightarrow y(t)=e^{-j\bullet\Omega_0\bullet t}\bullet x(t) \leftrightarrow Y(j\bullet\Omega)=X(j(\Omega-\Omega_0))$$

Ποια η περιοχή σύγκλισης του ΜΖ του σήματος διακριτού χρόνου:

$$x(n) = -\left(a^n + b^n\right) \bullet u(-(n+1))$$

(a) z: |a|<z<|b|
(b) z: |b|<z<|a|
(c) z: |z|>max{|a|,|b|}
(d) z: |z|<min{|a|,|b|}

<u>Απάντηση</u>

(d) z: |z|<min{|a|,|b|}

$$x(n) = -\left(a^n + b^n\right) \bullet u(-(n+1)) = -a^n u(-n-1) - b^n u(-n-1) \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b}$$ με Π.Σ.|z|<min{|a|,|b|}