Επαναληπτικές ασκήσεις για το μάθημα
“Οικονομική Θεωρία και Αλγόριθμοι”

1 Κοινωνική Επιλογή

Άσκηση 1. Να αποδείξετε ότι ο κανόνας ψηφοφορίας του Borda είναι χειραγωγίσιμος.

Απάντηση. Γενικά, για να δείξουμε ότι ένας κανόνας ψηφορορίας μπορεί να χειραγωγηθεί, πρέπει να ορισουμε ένα προφίλ ψήφων τέτοιο ώστε να υπάρχει ένας ψηφοφόρος ο οποίος μπορεί να αλλάξει τη ψήφο του και να επηρεάσει το αποτέλεσμα της ψηφοφορίας υπερ ενός υποψηφίου που προτιμά περισσότερο από τον νικητή.

Για τον κανόνα Borda, έστω το εξής προφίλ ψήφων με 3 ψηφοφόρους και 4 υποψήφιους:

Ψηφοφόρος	Ψήφος
#1	$a \succ b \succ c \succ d$
#2	$d \succ c \succ a \succ b$
#3	$d \succ c \succ b \succ a$

Σύμφωνα με αυτό το προφίλ, οι βαθμοί των υποψήφιων a, b, c και d είναι 4, 3, 5 και 6, αντίστοιχα. Επομένως, νικητής είναι ο d. Ο πρώτος ψηφοφόρος μπορεί να χειραγωγήσει τον κανόνα αλλάζοντας τη ψήφο του σε $c \succ a \succ b \succ d$ έτσι ώστε οι βαθμοί των υποψηφίων να γίνουν 3, 2, 7 και 6. Δηλαδή, νικητής είναι τώρα ο υποφήφιος c τον οποίο ο ψηφοφόρος προτιμά περισσότερο από τον d. $\square$

Άσκηση 2. Μια εταιρεία αποφασίζει μεταξύ εναλλακτικών (υποψήφιων) στρατηγικών χρησιμοποιώντας τον εξής κανόνα ψηφοφορίας. Αν τα $2/3$ των μελών του Διοικητικού Συμβουλίου (ΔΣ) της εταιρείας προτιμά μια συγκεκριμένη στρατηγική, τότε αυτή η στρατηγική είναι νικήτρια, διαφορετικά την απόφαση την λαμβάνει ο πρόεδρος της εταιρείας.

(A) Είναι δυνατόν η ψηφοφορία να χειραγωγηθεί από τον πρόεδρο;

(B) Είναι δυνατόν να χειραγωγηθεί από κάποιο άλλο μέλος του ΔΣ;

Απάντηση.

(A) Ο πρόεδρος δεν μπορεί να χειραγωγήσει τον κανόνα ψηφοφορίας. Υπάρχουν δυο περιπτώσεις. Πρώτον, ο νικητής είναι ο υποψήφιος που προτιμά ο πρόεδρος. Τότε, προφανώς, ο πρόεδρος δεν έχει λόγο να αλλάξει τη ψήφο του. Δεύτερον, τουλάχιστον $2/3$ μέλη του ΔΣ, διαφορετικά του προέδρου, προτιμούν κάποιον άλλο υποψήφιο (ο οποίος δεν αποτελεί την πρώτη επιλογή του προέδρου). Τότε, ο πρόεδρος και πάλι δεν μπορεί να αλλάξει το τελικό αποτέλεσμα, αφού ακόμη και αν αλλάξει τη ψήφο του, τα $2/3$ του ΔΣ συνεχίζουν να εκλέγουν τον ίδιο υποψήφιο.

(B) Ναι, για παράδειγμα, έστω το εξής προφίλ:

Πρόεδρος	$a \succ b \succ c$
Μέλος 1	$b \succ c \succ a$
Μέλος 2	$c \succ a \succ b$

Εφόσον όλα τα μέλη του ΔΣ προτιμούν διαφορετικούς υποψήφιους, ο νικητής καθορίζεται από την ψήφο του προέδρου και είναι ο a. Ωστόσο, ο δεύτερος ψηφορόρος (μέλος 1) μπορεί να αλλάξει τη ψήφο του σε $c \succ b \succ a$ έτσι ώστε να υπάρχουν $2/3$ μέλη του ΔΣ που να προτιμούν τον c, ο οποίος είναι ο νέος νικητής της ψηφορορίας.

□

Άσκηση 3.

(A) Φτιάξτε προφίλ με 3 υποψήφιους έτσι ώστε ο νικητής κατά πλειοψηφία, Borda και δικτατορία του πρώτου ψηφοφόρου να είναι διαφορετικός και μοναδικός.

(B) Φτιάξτε προφίλ με 3 υποψήφιους έτσι ώστε ο νικητής κατά πλειοψηφία, Borda και Veto να είναι διαφορετικός και μοναδικός.

Απάντηση.

(A) Έστω το εξής προφίλ με 4 ψηφοφόρους:

Ψηφοφόρος	Ψήφος
#1	$c \succ b \succ a$
#2	$a \succ b \succ c$
#3	$a \succ b \succ c$
#4	$b \succ c \succ a$

Ο υποψήφιος a είναι ο νικητής κατά πλειοψηφία καθώς υπάρχει ένας παραπάνω ψηφοφόρος που τον προτιμά σε σχέση με τους άλλους δυο υποψήφιους. Ο υποψήφιος b είναι ο νικητής κατά Borda καθώς έχει 5 βαθμούς, ενώ οι a και c έχουν 4 και 3, αντίστοιχα. Τέλος, ο c είναι προφανώς ο νικητής κατά δικτατορία του πρώτου ψηφοφόρου.

(B) Έστω ένα προφίλ με 13 ψηφοφόρους οι οποίοι έχουν τις εξής ψήφους:

Πλήθος	Ψήφος
3	$a \succ b \succ c$
4	$a \succ c \succ b$
6	$b \succ c \succ a$

Ο υποψήφιος a είναι ο νικητής κατά πλειοψηφία καθώς 'εχει τις περισσότερες πρώτες θέσεις. Ο υποψήφιος b είναι ο νικητής κατά Borda καθώς έχει $6 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 15$ βαθμούς, ενώ οι a και c έχουν $7 \cdot 2 = 14$ και $10 \cdot 1 = 10$, αντίστοιχα. Τέλος, ο c είναι ο νικητής κατά Veto καθώς έχει τις λιγότερες τελευταίες θέσεις.

$\square$

2 Αμιγείς και μικτές ισορροπίες

Άσκηση 4. Θεωρήστε ένα παιχνίδι δύο παικτών με δύο στρατηγικές ανά παίκτη το οποίο αναπαρίσταται από τον εξής πίνακα κέρδους:

	A	B
C	3 2	4 0
D	5 0	4 1

(A) Βρείτε όλες τις αμιγείς ισορροπίες του παιχνιδιού.

(B) Βρείτε όλες τις μικτές ισορροπίες του παιχνιδιού.

Απάντηση.

(A) Για να βρούμε όλες τις αμιγείς ισορροπίες, αρκεί να σχεδιάσουμε το Nash dynamics γράφημα, το οποίο για το συγκεκριμένο παιχνίδι είναι το εξής:

$$\begin{tikzcd} A, C \arrow[r] & B, C \arrow[d] \\ A, D \arrow[u] & B, D \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Εφόσον, υπάρχει κύκλος μεταξύ των καταστάσεων του παιχνιδιού, δεν υπάρχουν αμιγείς ισορροπίες.

(B) Για να βρούμε τις μικτές ισορροπίες του παιχνιδιού, έστω ότι ο παίκτης που παίζει κατά στήλες (παίκτης 1) επιλέγει την στρατηγική A με πιθανότητα p (και την στρατηγική B με πιθανότητα $1-p$), ενώ ο παίκτης που παίζει κατά γραμμές (παίκτης 2) επιλέγει την στραγητική C με πιθανότητα q και την στρατηγική D με πιθανότητα $1-q$. Τότε, το μέσο κέρδος του παίκτη 1 είναι

$$\begin{aligned} K_1(p,q) &= 3pq + 4(1-p)q + 5p(1-q) + 4(1-p)(1-q) \\ &= -2pq + p + 4 \\ &= p(1-2q) + 4. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, το μέσο κέρδος του παίκτη 2 είναι

$$\begin{aligned} K_2(p,q) &= 2pq + (1-p)(1-q) \\ &= q(3p-1) + 1 - p. \end{aligned}$$

Τώρα, εφόσον τα μέσα κέρδη των παικτών είναι γραμμικές συναρτήσεις ως προς τις μεταβλητές p και q, αντίστοιχα, διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με τις κλίσεις τους. Πιο συγκεκριμένα, αρκεί να μελετήσουμε την κλίση της συνάρτησης $K_1(p, q)$.

Περίπτωση 1: $1 - 2q > 0 \Leftrightarrow q < 1/2$**.** Τότε, το μέσο κέρδος του παίκτη 1, $K_1(p, q)$, είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς p και, επομένως, μεγιστοποιείται για $p = 1$. Αυτό συνεπάγεται ότι το μέσο κέρδος του παίκτη 2 είναι $K_2(1, q) = 2q$, δηλαδή, το $K_2(1, q)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς q και μεγιστοποιείται για $q = 1$. Άτοπο.

Περίπτωση 2: $1 - 2q < 0 \Leftrightarrow q > 1/2$**.** Τότε, το μέσο κέρδος του παίκτη 1 είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς p και μεγιστοποιείται για $p = 0$. Συνεπώς, το μέσο κέρδος του παίκτη 2 γίνεται $K_2(0, q) = -q + 1$ και, εφόσον είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς q, μεγιστοποιείται για $q = 0$. Άτοπο.

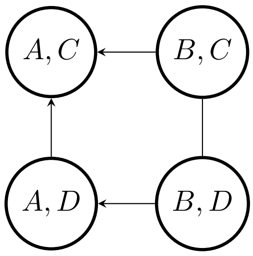
Περίπτωση 3: $q = 1/2$**.** Τότε το μέσο κέρδος του παίκτη 1 είναι $K_1(p, 1/2) = 4$ και, εφόσον είναι σταθερό, η πιθανότητα p μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή έτσι ώστε να μεγιστοποιείται ταυτόχρονα και το μέσο κέρδος του παίκτη 2. Εφόσον $q = 1/2$, το μέσο κέρδος του παίκτη 2 θα πρέπει επίσης να είναι σταθερό (ανεξάρτητο της μεταβλητής q) και, άρα, πρέπει $p = 1/3$.

Καταλήγουμε ότι η μοναδική μικτή ισορροπία είναι το ζευγάρι $(p, q) = (1/3, 1/2)$. $\square$

Άσκηση 5. Έστω x ένας πραγματικός αριθμός. Θεωρήστε το παρακάτω παιχνίδι δύο παικτών με δύο στρατηγικές ανά παίκτη και βρείτε όλες τις αμιγείς και μικτές του ισορροπίες.

	A	B
C	1 1	0 0
D	1 0	0 x

Απάντηση. Για να βρούμε όλες τις αμιγείς ισορροπίες πρέπει να σχεδιάσουμε το Nash dynamics γράφημα. Ωστόσο, δεν ξέρουμε την ακριβή τιμή της παραμέτρου x και, επομένως, δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για την ακμή μεταξύ των καταστάσεων (B, C) και (B, D). Παρόλα αυτά, η γενική μορφή του Nash dynamics είναι:



Παρατηρήστε ότι η στρατηγική A είναι κυρίαρχη για τον παίκτη που παίζει κατά στήλες. Επομένως, ανεξάρτητα από την τιμή της μεταβλητής x, η μοναδική αμιγής (και μικτή) ισορροπία του παιχνιδιού είναι η κατάσταση (A, C) καθώς ο παίκτης που παίζει κατά γραμμές επιλέγει την στρατηγική C κάθε φορά που ο παίκτης που παίζει κατά στήλες επιλέγει την στρατηγική A. $\square$

Άσκηση 6. Να αποδείξετε ότι κάθε συμμετρικό παιχνίδι μεταξύ δυο παικτών με δυο στρατηγικές ανά παίκτη έχει τουλάχιστον μια αμιγή ισορροπία.

Απάντηση. Έστω ότι το παιχνίδι περιγράφεται από τον εξής πίνακα κέρδους:

	A	B
A	a a	d c
B	c d	b b

Για να μην υπάρχει αμιγής ισορροπία, θα πρέπει να υπάρχει κύκλος μεταξύ των καταστάσεων του παιχνιδιού. Παρατηρήστε ότι μια ακμή πρέπει να εισέρχεται στην κατάσταση (A, A) και μια να εξέρχεται. Και οι δυο πιθανοί τρόποι που μπορεί αυτό να γίνεται μας οδηγούν σε άτοπο καθώς θα πρέπει να ισχύει ταυτόχρονα ότι $d > a$ και $a > d$. □

3 Κόστος της αναρχίας και της ευστάθειας

Άσκηση 7. Κατασκευάστε τον πίνακα κέρδους παιχνιδιού με δυο παίκτες και δυο στρατηγικές ανά παίκτη όπου το κόστος της αναρχίας και της ευστάθειας είναι 2 και $3/2$ αντίστοιχα, ενώ τα κέρδη των παικτών σε κάθε κατάσταση είναι αυστηρά θετικά.

Απάντηση. Αρχικά, ας θυμηθούμε τις έννοιες του κόστους της αναρχίας και της ευστάθειας. Αν ορίσουμε το κοινωνικό κέρδος $\mathrm{SW}(S)$ μιας κατάστασης S σαν το ολικό κέρδος των παικτών στην κατάσταση αυτή, τότε το κόστος της αναρχίας (PoA) είναι ο χειρότερος λόγος μεταξύ του βέλτιστου κοινωνικού κέρδους OPT και του κοινωνικού κέρδους σε κατάσταση ισορροπίας, ενώ το κόστος της ευστάθειας (PoS) είναι ο καλύτερος τέτοιος λόγος. Δηλαδή,

$$\mathrm{PoA} = \max_{S \text{ ισορροπία}} \frac{\mathrm{OPT}}{\mathrm{SW}(S)}$$

και

$$\mathrm{PoS} = \min_{S \text{ ισορροπία}} \frac{\mathrm{OPT}}{\mathrm{SW}(S)}.$$

Προσέξτε ότι οι δυο αυτοί λόγοι ορίζονται έτσι ώστε να είναι πάντα μεγαλύτεροι του 1, καθώς σε παιχνίδι κέρδους έχουμε ότι $\mathrm{SW}(S) \leq \mathrm{OPT}$ για κάθε κατάσταση S. Πως θα έπρεπε να ορίσουμε το κόστος της αναρχίας και της ευστάθειας για παιχνίδια κόστους;

Μια απάντηση στη συγκεκριμένη άσκηση είναι το εξής παιχνίδι:

	A	B
A	1 $5/3$	1 1
B	3.1 0.1	3 1

Παρατηρήστε ότι οι καταστάσεις (A, A) και (B, A) είναι αμιγείς ισορροπίες με κοινωνικό κέρδος $8/3$ και 2, αντίστοιχα. Ωστόσο, η κατάσταση (B, B) έχει βέλτιστο κοινωνικό κέρδος 4 και, επομένως, το κόστος της αναρχίας είναι 2 (από την κατάσταση (B, A)) και το κόστος της ευστάθειας είναι $3/2$ (από την κατάσταση (A, A)). $\square$

Άσκηση 8. Κατασκευάστε τον πίνακα κέρδους παιχνιδιού με δυο παίκτες και δυο στρατηγικές ανά παίκτη το οποίο έχει δυο ισορροπίες κατά Nash και όπου τόσο το κόστος της αναρχίας όσο και το κόστος της ευστάθειας είναι τουλάχιστον 100, ενώ τα κέρδη των παικτών σε κάθε κατάσταση είναι αυστηρά θετικά.

Απάντηση. Ένα παιχνίδι με τα ζητούμενα χαρακτηριστικά είναι το εξής:

	A	B
A	1 1	1 1
B	199.5 0.1	199 1

Παρατηρήστε ότι οι καταστάσεις (A, A) και (B, A) είναι αμιγείς ισορροπίες με κοινωνικό κέρδος 2 και οι δυο. Ωστόσο, η κατάσταση (B, B) έχει βέλτιστο κοινωνικό κέρδος 200 και, επομένως, το κόστος της αναρχίας και της ευστάθειας είναι 100. $\square$

4 Συναρτήσεις δυναμικού

Άσκηση 9.

(A) Πότε ένα παιχνίδι δεν επιδέχεται συνάρτηση δυναμικού;

(B) Είναι δυνατόν ένα παιχνίδι που δεν επιδέχεται συνάρτηση δυναμικού να έχει αμιγή ισορροπία;

Απάντηση.

(A) Ένα παιχνίδι δεν επιδέχεται συνάρτηση δυναμικού όταν το γράφημα Nash dynamics περιέχει κύκλο.

(B) Ναι, αρκεί να υπάρχει μια κατάσταση του παιχνιδιού από την οποία κανένας παίκτης να μην έχει κίνητρο να αποκλίνει. Δηλαδή, αρκεί το γράφημα Nash dynamics να περιέχει έναν κόμβο με μόνο εισερχόμενες ακμές (αυτό είναι ανεξάρτητο του αν περιέχει κύκλο). Για παράδειγμα, θεωρήστε το παιχνίδι:

	A	B	C
D	0 1	1 0	2 2
E	1 0	0 1	2 0

Μεταξύ των καταστάσεων (A, D), (B, D), (B, E) και (A, E) υπάρχει κύκλος. Ωστόσο, η κατάσταση (C, D) είναι αμιγής ισορροπία.

□

Άσκηση 10. Θεωρήστε ένα παιχνίδι μεταξύ δυο παικτών με δυο στρατηγικές ανά παίκτη το οποίο αναπαρίσταται από τον πίνακα κέρδους:

	A	B
C	1, 4	1, 5
D	3, 2	0, 4

Υπολογίστε ακριβές δυναμικό για το συγκεκριμένο παιχνίδι ή δικαιολογήστε γιατί κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό.

Απάντηση. Πρώτα θυμηθείτε ότι μια συνάρτηση δυναμικού λέγεται ακριβής όταν για κάθε δυο καταστάσεις του παιχνιδιού οι οποίες διαφέρουν στη στρατηγική μόνο ενός παίκτη, η διαφορά μεταξύ των τιμών της συνάρτησης δυναμικού είναι ακριβώς ίση με τη διαφορά κέρδους που έχει ο παίκτης στις δυο καταστάσεις.

Επομένως, ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση δυναμικού Φ για το συγκεκριμένο παιχνίδι έτσι ώστε $\Phi(A,C) = \alpha$, $\Phi(B,C) = \beta$, $\Phi(B,D) = \gamma$ και $\Phi(A,D) = \delta$. Θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι εξής σχέσεις:

- $\beta - \alpha = 5 - 4$
- $\beta - \gamma = 1 - 0$
- $\gamma - \delta = 4 - 2$
- $\delta - \alpha = 3 - 1$

Αυτές μας οδηγούν σε άτοπο καθώς οι πρώτες δυο μας λένε ότι πρέπει $\alpha = \gamma$ και, άρα, οι δυο τελευταίες γίνονται $\alpha = \delta + 2$ και $\delta = \alpha + 2$. Άρα, δεν γίνεται να ορίσουμε ακριβές δυναμικό για το συγκεκριμένο παιχνίδι. $\square$

Άσκηση 11. Κατασκευάστε παιχνίδι δύο παικτών με δυο στρατηγικές A και B ανά παίκτη το οποίο έχει τη μικτή ισορροπία $(p, q) = (1/3, 2/3)$ και επιδέχεται τη συνάρτηση δυναμικού Φ με $\Phi(A, A) = 10$, $\Phi(A, B) = 4$, $\Phi(B, A) = 6$ και $\Phi(B, B) = 8$.

Απάντηση. Για να κατασκευάσουμε το παιχνίδι πρέπει να ορίσουμε τα κέρδη των παικτών σε όλες τις πιθανές καταστάσεις του παιχνιδιού, φτιάχνοντας τον αντίστοιχο πίνακα κέρδους. Οι απαιτήσεις της συνάρτησης δυναμικού στην ουσία μας λένε την δομή του γραφήματος Nash dynamics το οποίο πρέπει να είναι ως εξής:

$$
\begin{tikzcd}
A, A & B, A \arrow[l] \arrow[d] \\
A, B \arrow[u] \arrow[r] & B, B
\end{tikzcd}
$$

Ένα παιχνίδι με τις απαιτούμενες προδιαγραφές είναι το εξής:

	A	B
A	1 2	0 0
B	0 0	2 1

Παρατηρήστε ότι το μέσο κέρδος του παίκτη 1 (που παίζει κατά στήλες) είναι

$$K_1(p, q) = pq + 2(1 - p)(1 - q) = p(3q - 2) + 2 - 2q$$

ενώ το μέσο κέρδος του παίκτη 2 (που παίζει κατά γραμμές) είναι

$$K_2(p, q) = 2pq + (1 - p)(1 - q) = q(3p - 1) + 1 - 2p.$$

Συνεπώς, όντως το ζευγάρι $(p, q) = (1/3, 2/3)$ είναι μια μικτή ισορροπία του παιχνιδιού. □

Άσκηση 12. Θεωρήστε ένα παιχνίδι ανάθεσης ενός συνόλου εργασιών J σε ένα σύνολο μηχανών M. Κάθε παίκτης έχει τον έλεγχο μιας δουλειάς την οποία μπορεί να αναθέσει σε μια από τις διαθέσιμες μηχανές. Η δουλειά που ελέγχει ο παίκτης $i \in J$ έχει θετικό βάρος w_i. Οι μηχανές έχουν ίδιες ταχύτητες επεξεργασίας. Συμβολίζοντας με $m_i(S)$ τη μηχανή που επιλέγει ο παίκτης i για τη δουλειά του στην κατάσταση S, το φορτίο της μηχανής $j \in M$ είναι το συνολικό βάρος των δουλειών που έχουν ανατεθεί στη μηχανή j, δηλαδή,

$$L_j(S) = \sum_{i \in J: m_i(S)=j} w_i.$$

Το κόστος του παίκτη i στην κατάσταση S είναι το φορτίο της μηχανής όπου έχει αναθέσει τη δουλειά του, δηλαδή, $\text{cost}_i(S) = L_{m_i(S)}(S)$. Ως κοινωνικό κόστος μιας κατάστασης ορίζουμε το άθροισμα των τετραγώνων των φορτίων των μηχανών, δηλαδή,

$$\text{SC}(S) = \sum_{j \in M} L_j(S)^2.$$

(Α) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\Phi(S) = \sum_{j \in M} L_j(S)^2$$

είναι συνάρτηση δυναμικού.

(Β) Δώστε μικτή (μη αμιγή) ισορροπία κατά Nash.

(Γ) Δείξτε ότι το κόστος της ευστάθειας είναι 1.

Απάντηση.
(Α) Έστω δυο κατάστασεις S και S' του παιχνιδιού οι οποίες διαφέρουν μόνο στη στρατηγική ενός παίκτη π. Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση Φ είναι συνάρτηση δυναμικού, αρκεί να δείξουμε ότι οι ποσότητες $\Phi(S) - \Phi(S')$ και $\text{cost}_\pi(S) - \text{cost}_\pi(S')$ έχουν το ίδιο πρόσημο.

Στη κατάσταση S ο παίκτης π έχει επιλέξει τη μηχανή $m_\pi(S)$, ενώ στη κατάσταση S' έχει επιλέξει τη μηχανή $m_\pi(S')$, και ισχύει ότι $m_\pi(S) \neq m_\pi(S')$. Εφόσον οι στρατηγικές των άλλων παικτών είναι ίδιες και στις δυο καταστάσεις, έχουμε ότι

$$L_{m_\pi(S)}(S') = L_{m_\pi(S)}(S) - w_\pi \Leftrightarrow L_{m_\pi(S)}(S') = \text{cost}_\pi(S) - w_\pi \tag{1}$$

και

$$L_{m_\pi(S')}(S') = L_{m_\pi(S')}(S) + w_\pi \Leftrightarrow L_{m_\pi(S')}(S) = \text{cost}_\pi(S') - w_\pi \tag{2}$$

Συνεπώς,

$$\Phi(S) - \Phi(S') = \sum_{j \in M} L_j(S)^2 - \sum_{j \in M} L_j(S')^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j \neq m_\pi(S), m_\pi(S')} L_j(S)^2 + L_{m_\pi(S)}(S)^2 + L_{m_\pi(S')}(S)^2 \\
&\quad - \sum_{j \neq m_\pi(S), m_\pi(S')} L_j(S)^2 - L_{m_\pi(S)}(S')^2 - L_{m_\pi(S')}(S')^2 \\
&= \Big(L_{m_\pi(S)}(S)^2 - L_{m_\pi(S)}(S')^2 \Big) + \Big(L_{m_\pi(S')}(S)^2 - L_{m_\pi(S')}(S')^2 \Big) \\
&= \mathrm{cost}_\pi(S)^2 - \Big(\mathrm{cost}_\pi(S) - w_\pi \Big)^2 + \Big(\mathrm{cost}_\pi(S') - w_\pi \Big)^2 - \mathrm{cost}_\pi(S')^2 \\
&= 2w_\pi \Big(\mathrm{cost}_\pi(S) - \mathrm{cost}_\pi(S') \Big),
\end{aligned}
$$

όπου στην δεύτερη ισότητα έχουμε διακρίνει τις μηχανές $m_\pi(S)$ και $m_\pi(S')$ από τις υπόλοιπες μηχανές στα αθροίσματα. Στην τρίτη ισότητα έχουμε ομαδοποιήσει το φορτία των δύο αυτών μηχανών στις δυο καταστάσεις, και έπειτα χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (1) και (2) για να φέρουμε το κόστος του παίκτη π στην έκφραση. Το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει με πράξεις και έχουμε τελειώσει καθώς το βάρος w_π του παίκτη π είναι θετικό και άρα οι δυο ποσότητες έχουν το ίδιο πρόσημο.

(Β) Μια μικτή ισορροπία είναι όλοι οι παίκτες να επιλέγουν όλες τις μηχανές ισοπίθανα. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε παίκτης βλέπει το ίδιο μέσο φορτίο σε όλες τις μηχανές και επομένως τον συμφέρει να ισομοιράσει και αυτός το βάρος του σε όλες τις μηχανές.

(Γ) Πρώτα, παρατηρήστε ότι $\Phi(S) = \mathrm{SC}(S)$ και θυμηθείτε ότι μια κατάσταση S^* όπου η συνάρτηση δυναμικού ελαχιστοποιείται αποτελεί ισορροπία του παιχνιδιού (διότι κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς). Συνεπώς, το κοινωνικό κόστος ελαχιστοποιείται σε ισορροπία και το κόστος της ευστάθειας είναι 1. $\square$

Άσκηση 13. Δίνεται ένα παιχνίδι συμφόρησης με μη φθίνουσες συναρτήσεις καθυστέρησης όπου οι στρατηγικές των παικτών είναι τέτοιες ώστε κανένας πόρος να μην χρησιμοποιείται ποτέ (δηλαδή, σε καμμιά κατάσταση) από περισσότερους από λ παίκτες. Δείξτε ότι το κόστος της ευστάθειας του παιχνιδιού είναι το πολύ λ. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της συνάρτησης δυναμικού και τη συνάρτηση δυναμικού του Rosenthal.

Απάντηση. Πρώτα ας θυμηθούμε μερικά πράγματα για τα παιχνίδια συμφόρησης: υπάρχει ένα σύνολο πόρων E και κάθε παίκτης i επιλέγει ένα υποσύνολο $s_i \subseteq E$ από αυτούς ως τη στρατηγική του. Κάθε πόρος e συσχετίζεται με μια συνάρτηση καθυστέρησης f_e η οποία εξαρτάται από το πλήθος των παικτών $n_e(S)$ που χρησιμοποιούν τον πόρο στην κατάσταση S του παιχνιδιού. Το κόστος του παίκτη i στη κατάσταση S είναι

$$\text{cost}_i(S) = \sum_{e \in s_i} f_e(n_e(S))$$

και το κοινωνικό κόστος είναι το ολικό κόστος όλων των παικτών

$$\text{SC}(S) = \sum_{i=1}^{n} \text{cost}_i(S).$$

Τέλος, η συνάρτηση του Rosenthal ορίζεται ως

$$\Phi(S) = \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{n_e(S)} f_e(i).$$

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, θα πρέπει να συσχετίσουμε (με κατάλληλες ανισότητες) την συνάρτηση δυναμικού με το κοινωνικό κόστος. Πρώτα, ας μετασχηματίσουμε λίγο το κοινωνικό κόστος ως εξής:

$$\text{SC}(S) = \sum_{i=1}^{n} \text{cost}_i(S) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in s_i} f_e(n_e(S)) = \sum_{e \in E} \sum_{i: e \in s_i} f_e(n_e(S)) = \sum_{e \in E} n_e(S) f_e(n_e(S))$$

Εφόσον σε όλες τις καταστάσεις του παιχνιδιού και για κάθε πόρο e ισχύει ότι $n_e(S) \leq \lambda$, έχουμε ότι

$$\text{SC}(S) = \sum_{e \in E} n_e(S) f_e(n_e(S)) \leq \lambda \sum_{e \in E} f_e(n_e(S)) \leq \lambda \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{n} f_e(i) = \lambda \Phi(S). \tag{3}$$

Ακόμη, έχουμε ότι

$$\Phi(S) = \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{n_e(S)} f_e(i) \leq \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{n_e(S)} f_e(n_e(S)) = \sum_{e \in E} n_e(S) f_e(n_e(S)) = \text{SC}(S). \tag{4}$$

Τώρα, για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, εφαρμόζουμε την μέθοδο της συνάρτησης δυναμικού ως εξής. Ξεκινάμε απο μια κατάσταση S^* με βέλτιστο κοινωνικό κόστος. Αν η S^* είναι ισορροπία τότε το κόστος της ευστάθειας είναι 1. Διαφορετικά, αφήνουμε τους παίκτες να παίξουν και να αλλάξουν στρατηγικές μέχρις ότου να φτάσουν σε μια ισορροπία S. Εφόσον η Φ είναι συνάρτηση δυναμικού, ξέρουμε ότι $\Phi(S) \leq \Phi(S^*)$ (καθώς σε κάθε κίνηση κάποιος παίκτης βελτιώνει το κόστος του). Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε ότι

$$\mathrm{SC}(S) \leq \lambda\Phi(S) \leq \lambda\Phi(S^*) \leq \lambda\mathrm{SC}(S^*)$$

και επομένως το κόστος της ευστάθειας είναι το πολύ λ. $\square$

Άσκηση 14. Έστω ένα σύνολο παικτών N και ένα σύνολο διαφορετικών στρατηγικών M. Κάθε παίκτης μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε στρατηγική από το σύνολο M. Για κάθε στρατηγική $e \in M$, το κόστος ενός παίκτη που χρησιμοποιεί αυτή τη στρατηγική είναι $c_e/k + d_e$ όταν k παίκτες χρησιμοποιούν την e (οι πόσότητες c_e και d_e είναι μη αρνητικές). Με $n_e(S)$ συμβολίζουμε τον αριθμό των παικτών που επιλέγουν την στρατηγική e στην κατάσταση S.

(A) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\Phi(S) = \sum_{e \in M} \Big(c_e \cdot H_{n_e(S)} + d_e \cdot n_e(S) \Big)$$

είναι (ακριβής) συνάρτηση δυναμικού για το παιχνίδι.

(B) Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της συνάρτησης δυναμικού, δείξτε ότι το κόστος της ευστάθειας του παιχνιδιού είναι το πολύ H_n, θεωρώντας ως κοινωνικό κόστος το συνολικό κόστος των παικτών.

Απάντηση.

(A) Έστω δυο καταστάσεις S και S' του παιχνιδιού οι οποίες διαφέρουν μόνο στην στρατηγική ενός παίκτη i. Για να δείξουμε ότι η Φ είναι ακριβής συνάρτηση δυναμικού πρέπει να δείξουμε ότι $\Phi(S) - \Phi(S') = \mathrm{cost}_i(S) - \mathrm{cost}_i(S')$. Ας θεωρήσουμε ότι ο παίκτης i χρησιμοποιεί την στρατηγική x στην κατάσταση S και την στρατηγική y στην κατάσταση S'. Τότε, εφόσον οι υπόλοιποι παίκτες έχουν τις ίδιες στρατηγικές στις δυο αυτές καταστάσεις, έχουμε ότι

$$n_x(S') = n_x(S) - 1 \Rightarrow H_{n_x(S)} = H_{n_x(S')} + \frac{1}{n_x(S)} \tag{5}$$

και

$$n_y(S') = n_y(S) + 1 \Rightarrow H_{n_y(S)} = H_{n_y(S')} - \frac{1}{n_y(S')} \tag{6}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\Phi(S) &= \sum_{e \in M} \Big(c_e \cdot H_{n_e(S)} + d_e \cdot n_e(S) \Big) \\
&= \sum_{e \neq x,y} \Big(c_e \cdot H_{n_e(S)} + d_e \cdot n_e(S) \Big) + \Big(c_x \cdot H_{n_x(S)} + d_x \cdot n_x(S) \Big) + \Big(c_y \cdot H_{n_y(S)} + d_y \cdot n_y(S) \Big) \\
&= \sum_{e \neq x,y} \Big(c_e \cdot H_{n_e(S')} + d_e \cdot n_e(S') \Big) \\
&\quad + c_x \Big(H_{n_x(S')} + \frac{1}{n_x(S)} \Big) + d_x \Big(n_x(S') + 1 \Big) \\
&\quad + c_y \Big(H_{n_y(S')} - \frac{1}{n_y(S')} \Big) + d_y \Big(n_y(S') - 1 \Big) \\
&= \sum_{e \neq x,y} \Big(c_e \cdot H_{n_e(S')} + d_e \cdot n_e(S') \Big) + \Big(c_x \cdot H_{n_x(S')} + d_x \cdot n_x(S') \Big) + \Big(c_y \cdot H_{n_y(S')} + d_y \cdot n_y(S') \Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{c_x}{n_x(S)}+d_x\right)-\left(\frac{c_y}{n_y(S')}+d_y\right)\\
&=\Phi(S')+\mathrm{cost}_i(S)-\mathrm{cost}_i(S'),
\end{aligned}
$$

όπου στην πρώτη ισότητα έχουμε απλώς σπάσει το άθροισμα για τις στρατηγικές $e \notin \{x, y\}$, x και y. Στη δεύτερη ισότητα αξιοποιούμε το γεγονός ότι για τις στρατηγικές $e \neq x, y$ δεν υπάρχει διαφορά από την S στην S', και χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (5) και (6) για να αντικαταστήσουμε τις αντίστοιχες ποσότητες για τις στρατηγικές x και y. Το αποτέλεσμα προκύπτει παρατηρώντας ότι πλέον έχουμε ορίσει τις ποσότητες $\Phi(S')$, $\mathrm{cost}_i(S)$ και $\mathrm{cost}_i(S')$ με κατάλληλη ομαδοποίηση.

(B) Πρώτα, θα προσπαθήσουμε να συσχετίσουμε το κοινωνικό κόστος με τη συνάρτηση δυναμικού. Παρατηρήστε ότι το κοινωνικό κόστος είναι

$$
\mathrm{SC}(S)=\sum_{i\in N}\mathrm{cost}_i(S)=\sum_{e\in M}\left(\frac{c_e}{n_e(S)}+d_e\right)n_e(S)=\sum_{e\in M}(c_e+n_e(S)\cdot d_e)\leq\Phi(S). \tag{7}
$$

Επίσης, για την συνάρτηση δυναμικού, έχουμε

$$
\Phi(S)=\sum_{e\in M}\left(c_e\cdot H_{n_e(S)}+d_e\cdot n_e(S)\right)\leq\sum_{e\in M}\left(c_e\cdot H_n+d_e\cdot n_e(S)\cdot H_n\right)=H_n\cdot\mathrm{SC}(S). \tag{8}
$$

Τώρα εφαρμόζουμε τη μέθοδο της συνάρτησης δυναμικού ως εξής. Ξεκινάμε απο μια κατάσταση S^* με βέλτιστο κοινωνικό κόστος. Αν η S^* είναι ισορροπία τότε το κόστος της ευστάθειας είναι 1. Διαφορετικά, αφήνουμε τους παίκτες να παίξουν και να αλλάξουν στρατηγικές μέχρις ότου να φτάσουν σε μια ισορροπία S. Εφόσον η Φ είναι συνάρτηση δυναμικού, ξέρουμε ότι $\Phi(S)\leq\Phi(S^*)$. Από τις σχέσεις (7) και (8) έχουμε ότι

$$
\mathrm{SC}(S)\leq\Phi(S)\leq\Phi(S^*)\leq H_n\cdot\mathrm{SC}(S^*)
$$

και επομένως το κόστος της ευστάθειας είναι το πολύ H_n. □