Λύση: Ερώτημα α)

Μια συνάρτηση $\phi: S \to R$ ονομάζεται συνάρτηση δυναμικού αν για οποιεσδήποτε δυο καταστάσεις, S_1 και S_2 που διαφέρουν στην στρατηγική ενος παίκτη i οι διαφορές $\phi(S_1) - \phi(S_2)$ και $cost_i(S_1) - cost_i(S_2)$ έχουν το ίδιο πρόσημο.

Απο το Θεώρημα το Rosenthal ξέρουμε οτι:

η συνάρτηση $\phi(S) = \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^{n_e(S)} f_e(j)$ είναι συνάρτηση δυναμικού για κάθε παιχνίδι συμφόρησης, η οποία καλείται και ακριβής συνάρτηση δυναμικού.

Απόδειξη $\to$ $\phi(S_1) - \phi(S_2) = \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^{n_e(S_1)} f_e(j) - \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^{n_e(S_2)} f_e(j)$

$$= \sum_{e \in E} \left(\sum_{j=1}^{n_e(S_1)} f_e(j) - \sum_{j=1}^{n_e(S_2)} f_e(j) \right)$$

$$= \sum_{e \in S_i \cap S_i'} \left(\sum_{j=1}^{n_e(S_1)} f_e(j) - \sum_{j=1}^{n_e(S_2)} f_e(j) \right) + \sum_{e \notin S_i \cup S_i'} \left(\sum_{j=1}^{n_e(S_1)} f_e(j) - \sum_{j=1}^{n_e(S_2)} f_e(j) \right)$$

$$+ \sum_{e \in S_i \setminus S_i'} \left(\sum_{j=1}^{n_e(S)} f_e(j) - \sum^{n_e(S_2)} f_e(j) \right) + \sum_{e \in S_i' \setminus S_i} \left(\sum_{j=1}^{n_e(S_1)} f_e(j) - \sum f_e(j) \right)$$

$$= \sum_{e \in S_i \cap S_i'} (f_e(n_e(S_1)) - f_e(n_e(S_2)) + \sum_{e \in S_i \setminus S_i'} (f_e(n_e(S_1))$$

$$- \sum_{e \in S_i' \setminus S_i} (f_e(n_e(S_2))) + 0 = \sum_{e \in S_i} f_e(n_e(S_1)) - \sum_{e \in S_i'} f_e(n_e(S_2))$$

$$= cost_i(S_1) - cost_i(S_2) \quad (1)$$

Απο την εκφώνηση έχουμε:

$$cost_i(x) = \sum_{j \in f_i} |x_i - x_j| - \sum_{j \in c_i} |x_i - x_j| \quad (2)$$

(1) $\xrightarrow{(2)}$

$$\left(\sum_{j \in f_1} |x_i - x_j| - \sum_{j \in c_1} |x_i - x_j|\right) - \left(\sum_{j \in f_2} |x_i - x_j| - \sum_{j \in c_2} |x_i - x_j|\right)$$

$$= \sum_{(i,j) \in f} |x_i - x_j| - \sum_{(i,j) \in c} |x_i - x_j|$$

καταλήξαμε στο ότι $\phi(x) = \sum_{(i,j) \in f} |x_i - x_j| - \sum_{(i,j) \in c} |x_i - x_j|$.

Ερώτημα β).

από Rosenthal: $\Phi(s) = \sum_{e\in E} \sum_{j=1}^{n_e(s)} f_e(j) = \sum_{e\in E} \sum_{j=1}^{n_e(s)} (a_e j + b_e)$

$= \sum_{e\in E} (a_e \sum_{j=1}^{n_e(s)} + \sum_{j=1}^{n_e(s)} b_e) = \sum_{e\in E} (a_e \frac{n_e(s)^2 + n_e(s)}{2} + b_e n_e)(s)$

$\Phi(s) = \sum_{e\in E} (a_e \frac{n_e(s)^2 + n_e(s)}{2} + b_e n_e(s)) = \cancel{\sum} \underbrace{\sum_{e\in E} (a_e n_e(s)^2 + b_e n_e(s))}_{SC(s)}$

$\sum_{e\in E} (a_e \frac{(s)^2 + n_e(s)}{2} + b_e n_e(s) \leq SC(s)$

$\Phi(s) = \sum_{e\in E} (a_e \frac{n_e(s)^2 + n_e(s)}{2} + b_e n_e(s) \geq \underbrace{\sum_{e\in E} a_e \frac{n_e(s)^2}{2} + \frac{n_e(s)}{2}}_{SC(s)/2}$

$= \sum_{e\in E} (a_e \frac{n_e(s)^2 + n_e(s)}{2} + b_e n_e(s) \leq \frac{1}{2} \sum_{e\in E} (a_e n_e(s)^2 + b_e n_e(s))$

$= \sum_{e\in E} (a_e \frac{n_e(s)^2 + n_e(s)}{2} + b_e n_e(s) \leq \frac{SC(s)}{2}$

$PoS = \min_{s\in NE} \frac{SC(s)}{SC(S_{opt})}$

A

Αποδειξη ($PoS \leq 2$)

Ξεκινάω απο την κατάσταση S_{opt}. Αν είναι ισσοροπία τοτε $PoS = 1$. Αλλιως αφήνω τους n παίκτες να παίξουν ωστε να βελτιώνουν τη στρατηγική τους μέχρι αυτο να μην είναι δυνατό (μέχρι να φτάσουν κάποια ισορροπία S_{eq})

Θα δείξω ότι $SC(S_{eq}) \leq 2\, SC(opt)$ κ' $PoS \leq 2$

$$SC(S_{opt}) \geq \Phi(S_{opt}) > \Phi(S_{eq}) \geq \frac{SC(S_{eq})}{2}$$

κάτω φράγμα για το κόστος της αναρχίας