Лабораторная работа №4

Исследование симплекс метода решения задач оптимизации

1 Цель работы

Ознакомление с алгоритмом симплекс метода решения задач оптимизации.

Реализация симплексного алгоритма.

2 Теоретическая справка

2.1 Постановка задачи линейного программирования, приведение к канонической форме

Среди множества оптимизационных задач существуют особые задачи, которые называют задачами линейного программирования. Задачам линейного программирования присущи следующие специфические черты.

Целый ряд задач из разных областей практики может быть сформулирован как задачи линейного программирования. Все они характеризуются некоторыми общими чертами. В каждой из них элементы решения представляют собой ряд неотрицательных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Требуется так выбрать значения этих переменных, чтобы:

1) выполнялись некоторые ограничения, имеющие вид линейных неравенств или неравенств относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

2) некоторая линейная функция f тех же переменных обращалась в максимум (минимум).

Общей задачей линейного программирования (ОЗЛП) называют задачу, в которой функция цели, которую надо оптимизировать, представляет собой линейную комбинацию известных коэффициентов c_j ($i = \overline{1, n}$) и неизвестных переменных x_j ($j = \overline{1, n}$) вида:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

Функцию f называют также целевой функцией или критерием эффективности задачи. Неизвестные неотрицательные переменные x_j называются управляющими переменными.

Ограничения, накладываемые на область возможных решений, имеют вид линейных неравенств или равенств:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i\,,\ i = \overline{1, m_1} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \ge b_i\,, i = \overline{m_1+1, m_2} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i\,, i = \overline{m_2+1, m}, \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i – известные величины, причем величины a_{ij}, x_j, b_i ($j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$) положительные.

Решить задачу линейного программирования – это значит найти значения управляющих переменных x_j, удовлетворяющих ограничениям, при которых целевая функция (принимает минимальное или максимальное значение.

Допустимым решением задачи линейного программирования будем называть любую совокупность неотрицательных переменных, удовлетворяющих условиям:

$$x_j \ge 0\ , (j\ = \overline{1, n}).$$

Данное условие принято называть условиями неотрицательности.

Оптимальным решением $X_{opt} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ будем называть то из допустимых решений, для которого линейная функция f обращается в максимум (минимум).

В **классической постановке** математическая модель задачи ЛП представляет собой группу соотношений: целевую функцию, которую надо либо максимизировать, либо минимизировать, все ограничения, заданные неравенствами со знаком $\le$, при заданных условиях всех неотрицательных переменных.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1, m}\,.$$

Существуют *симметричные* формы записи ЗЛП:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1, m}\,,$$

$$x_j \ge 0\ , (j = \overline{1, n})$$

При **канонической форме** целевая функция стремится к максимуму, ограничения представлены уравнением и заданы условия неотрицательности переменных:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m}.$$

Если по условиям задачи требуется отыскать минимум функции f:

$$f = \sum_{j=1} c_j x_j \to \min.$$

то задачу можно свести к задаче максимизации функции f', связанной с функцией f следующим образом:

$$f' = -f = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Максимум функции и минимум функции будут достигаться при одном и том же наборе переменных (x_1, x_2, …, x_n), удовлетворяющих условиям неотрицательности переменных и уравнениям, задающим область допустимых решений.

Если в ограничениях задачи стоят неравенства вида:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1, m_1},$$

, то преобразовать их в уравнения можно следующим образом: прибавить в левой части неравенств новые переменные x_j, ($j = n+1, n+m_1$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots \\ a_{m_1 1}x_1 + a_{m_1 2}x_2 + \cdots + a_{m_1 n}x_n + x_{n+m_1} = b_{m_1}. \end{cases}$$

Если в ограничениях задачи стоят неравенства вида:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, i = \overline{m_1 + 1, m_2},$$

, то преобразовать их в уравнения можно следующим образом: вычесть из левой части неравенств новые переменные x_j, ($j = n+1, n+m_1$).

В результате подобных преобразований задача линейного программирования будет приведена к канонической форме записи.

Пример 1. Записать в канонической форме задачу:

$$f=5x_1+2x_2-3x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3 \geq 10, \\ x_1-8x_2-2x_3 \leq 7, \\ 5x_1+2x_2+7x_3=20. \end{cases}$$

Сначала заменим целевую функцию f на функцию $f\,'$, полученную следующим образом: $f\,' = -f = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3$,

тогда $f\,' = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$.

Теперь перейдем к ограничениям. Первое ограничение имеет знак неравенства «≥», значит в его правой части надо вычесть переменную x_4:

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 10.$$

Второе ограничение имеет знак неравенства «≤», значит в левой части данного неравенства надо прибавить переменную x_5:

$$x_1 - 8x_2 - 2x_3 + x_5 = 7.$$

Третье ограничение имеет форму уравнения, значит оно в преобразованиях не нуждается.

Таким образом, получим каноническую форму записи:

$$f\,' = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3-x_4 = 10, \\ x_1-8x_2-2x_3+x_5 = 7, \\ 5x_1+2x_2+7x_3 = 20. \end{cases}$$

2.2 Алгоритм симплекс метода

Симплексный метод применим к решению любой задачи линейного программирования. Из геометрического смысла задачи линейного программирования следует, что для ее решения необходимо вычислить координаты всех вершин многогранника ограничений и значения целевой функции в них. Решить задачу линейного программирования можно методом перебора. Действительно, перебором всех вершин можно найти такую вершину, где функция f приобретает экстремальное значение, однако при этом возможны две трудности:

если число неизвестных n больше числа ограничений m ($n > m$), система ограничений линейно зависима, то для построения многоугольника решений необходимо выделение всех линейно независимых систем уравнений и их решение;

число вершин многогранника резко возрастает с увеличением числа неизвестных n ($n > m$), и такой метод перебора всех вершин может оказаться слишком трудоемким.

Симплексный метод обеспечивает более рациональное решение задачи, чем метод перебора. Суть его состоит в том, что, отправляясь из некоторой произвольной вершины многогранника ограничений, переходят к вычислению только такой вершины, в которой значение линейной функции будет больше, чем в предыдущей. Остальные варианты не вычисляются. Тогда при конечном сравнительно малом числе шагов может быть найден оптимальный план. Таким образом, производится упорядоченный перебор вершин, при котором происходит постоянное увеличение линейной функции. Поэтому *симплексный метод* называется также *методом последовательного улучшения плана.*

Решение задачи симплексным методом включает в себя два этапа. Первый состоит в нахождении одной произвольной вершины многогранника ограничений, координаты которого определяют начальный опорный план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Второй этап состоит в последовательном упорядоченном переходе от одной вершины многогранника к другой, смежной данной. Так как прилегающих вершин много, то каждый раз выбирается такая вершина, при переходе к которой обеспечивается наибольшее возрастание целевой функции. На каждом шаге процесса улучшения плана производится проверка на оптимальность. Очевидно, что план будет оптимальным, если среди вершин, прилегающих к данной, нет такой, при переходе к которой происходит возрастание целевой функции.

Алгоритм симплексного метода:

Шаг 1. Получение начального решения.

Выбираются m переменных, называемых *базисными* и обладающих следующим свойством: они входят с коэффициентом 1 только в одно уравнение и с коэффициентом 0 – в остальные уравнения системы.

Остальные $n - m$ переменных называются свободными.

Все свободные переменные полагаются равными 0, а базисные переменные – равные правым частям соответствующих ограничений системы.

Пусть m базисных переменных – это переменные x_1, x_2, …, x_m (в противном случае переменные всегда можно перенумеровать). Тогда начальное решение X_0 имеет вид:

$$X_0 = \{x_1=b_1, x_2=b_2,\ldots, x_m=b_m, x_{m+1}=0, \ldots , x_n=0\}.$$

Если все $b_i \geq 0$, $i=\overline{1,m}$, то начальное решение является допустимым. Переходят к шагу 2. В противном случае используют алгоритм нахождения начального решения.

Шаг 2. Выражение функции f только через свободные переменные.

$$f=\sum_{j=m+1} c_j x_j .$$

Переход к шагу 3.

Шаг 3. Проверка решения на оптимальность.

Пример **1**. Максимизировать линейную целевую функцию:

$$Z_{\max} = -x_4 + x_5$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_4 - 2x_5 = 1,$$

$$_2 - 2x_4 + x_5 = 2,$$
$$x_3 + 3x_4 + x_5 = 3$$

и условиях неотрицательности:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\ \geq 0.$$

Решение:

Выразим, например, x_1, x_2, x_3 через x_4 и x_5 , т.е. приведем систему к единичному базису:

$$x_1 = 1 - x_4 + 2x_5,$$
$$x_2 = 2 + x_4 - x_5,$$
$$x_3 = 3 - 3x_4 - x_5.$$

Линейную функцию Z_{max} выразим через переменные x_4 и x_5 (в данном примере уже выражена). Теперь при $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ базисные переменные окажутся равными: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Таким образом, первое допустимое решение системы уравнений есть (1, 2, 3, 0, 0). При найденном допустимом решении линейная функция Z имеет значение 0, т.е. $Z_1 = 0$.

Теперь попытаемся увеличить значение Z_1: увеличение x_4 уменьшит Z_1 так как перед x_4 стоит отрицательный коэффициент, а увеличение x_5 дает увеличение и Z_1 . Поэтому увеличиваем x_5, так чтобы x_1, x_2, x_3 не стали отрицательными, оставив $x_4 = 0$. Из второго уравнения системы видим, что x_5 можно увеличивать до 2. Тогда значения переменных будут:

$x_1 = 5, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 0, x_5 = 2$ или (5, 0, 1, 0, 2).

Значение линейной функции Z при втором допустимом решении равно $Z_2 = 2$. Величина на втором шаге увеличилась.

Далее примем за свободные переменные x_2 и x_4, т.е. именно те, которые в новом решении имеют нулевые значения. С этой целью выразим из второго уравнения системы x_5 через x_2 и x_4. Получим, что

$$x_5 = 2 - x_2 + x_4.$$

Тогда

$$x_1 = 5 - 2\,x_2 + 3\,x_4,$$
$$x_3 = 1 + x_2 - 5x_4,$$
$$x_5 = 2 - x_2 + 2x_4.$$

$$Z = 2 - x_2 + x_4 .$$

Снова попытаемся увеличить значение Z : увеличение x_4 дает увеличение и Z, так как перед x_4 стоит положительный коэффициент. Поэтому увеличиваем x_4, так чтобы x_1, x_3, x_5 не стали отрицательными, оставив $x_2 = 0$. Из второго уравнения системы видим, что для неотрицательности x_3 значение x_4 можно увеличивать до

$$1 - 5x_4 \geq 0,$$

$$1 \geq 5x_4,$$

$$x_4 \leq \frac{1}{5}.$$

Т.е. возьмем $x_4 = 1/5$.

При этом условии новое решение будет: x_1 = 28/5, x_2 = 0, x_3 = 0,x_4 = 1/5, x_5 = 12/5. Значение Z_3 при третьем допустимом решении увеличилось до 11/5.

Выразим теперь x_1, x_3, x_5 через свободные x_2, x_3:

$$x_1 = \frac{28}{5} - \frac{5}{3} x_3 - \frac{7}{5} x_2,$$
$$x_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} x_3 + \frac{1}{5} x_2,$$
$$x_5 = \frac{11}{5} - \frac{1}{5} x_3 - \frac{3}{5} x_2$$

$$Z = \frac{11}{5} - \frac{1}{5} x_3 - \frac{4}{5} x_2.$$

Так как в последней линейной функции обе свободные переменные входят с отрицательными коэффициентами, то наибольшее значение Z достигается при $x_2 = 0, x_3 = 0$.

Это означает что третье допустимое решение Z_3 было оптимальным.

Симплексная таблица.

Для удобства перехода от одного опорного решения системы условий задачи линейного программирования, имеющей предпочтительный вид, к другому, на котором целевая функция принимает значение не меньшее, чем на предыдущем, составляют так называемую симплекс-таблицу.

Она имеет следующий вид: (n + 3) столбцов, где n – число переменных в предпочтительном виде, (m + 2) строк, где m – число ограничений равенств. Сверху записывают строку коэффициентов целевой функции, снизу находится индексная строка. В столбце БП записываются базисные переменные. Столбец $C_Б$

содержит коэффициенты целевой функции, стоящие при базисных переменных. Столбец A_0 – столбец свободных членов системы ограничений. Основное поле таблицы занимают коэффициенты a_{ij} системы ограничений.

Максимизировать целевую функцию

$$Z_{\max} = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 + c_4 \cdot x_4$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ \quad\quad x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \end{cases}$$

и условиях неотрицательности переменных: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

Предположим, что $b_1 \geq 0$ и $b_2 \geq 0$, т.е. система уравнений приведена к опорному решению $(b_1, b_2, 0, 0)$. Значение целевой функции на этом решении равно $Z_{\max} = c_1 \cdot b_1 + c_2 \cdot b_2$.

Заполним симплекс-таблицу:

№ итерации	БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	Симплексные отношения
				c_1	c_2	c_3	c_4	
0	x_1	c_1	b_1	1	0	a_{13}	a_{14}	b_i / a_{ij}
	x_2	c_2	b_2	0	1	a_{23}	a_{24}	
	$Z_j - c_j$		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	

Остановимся подробнее на заполнении индексной строки $Z_j - c_j$. Здесь расположены значение функции цели для начального опорного плана x_0, т.е. $Z(x_0) = \Delta_0 = C_Б \cdot A_0$ и оценки индексной строки $\Delta_j = C_Б \cdot A_j - c_j$.

По симплексной таблице четко видны результаты исследования, проведенные на предыдущей итерации:

Критерий оптимальности. Если индексная строка симплексной таблицы не содержит отрицательных элементов, то достигнутое опорное решение является оптимальным.

Критерий неразрешимости. Если индексная строка симплексной таблицы содержит отрицательный элемент, например $\Delta_j < 0$, и в соответствующем этому элементу столбце нет положительных элементов $a_{1j} < 0$ и $a_{2j} < 0$, то задача линейного программирования не имеет решения: $Z \to \infty$.

Критерий улучшения решения. Если индексная строка симплексной таблицы содержит отрицательный элемент, например $\Delta_j < 0$, и в соответствующем этому элементу столбце есть положительные элементы, то, совершив с помощью симплексных преобразований переход к новому базису (при соответствующем Δ_j разрешающем столбце), получим другое опорное решение, на котором целевая функция Z примет значение , не меньшее, чем на предыдущем опорном решении.

Примечание 1. Так как число опорных решений системы конечно, конечным будет и процесс решения задачи линейного программирования.

Примечание 2. Если в задаче линейного программирования необходимо найти минимум целевой функции Z, то вводится функция $F = -Z$. Вследствие равенства $Z + F = 0$, $Z_{\min} = -F_{\max}$, а поэтому , решая задачу максимизации F , мы одновременно решаем задачу минимизации Z.

3 Порядок выполнения работы

1) Изучить теоретическую справку о работе симплекс-метода
2) Ознакомиться с соответствующим номеру в журнале варианту задания.
3) Формализовать задачу и привести условия к канонической форме записи.
4) Решить задачу самостоятельно и реализовать на языке Python3 симплекс-методом.

4 Методические указания к выполнению работы

К пункту 2:

Общая форма задания для всех вариантов:

Для реализации трех групп товаров коммерческое предприятие располагает тремя видами ограниченных материально-денежных ресурсов в количестве b_1, b_2, b_3, единиц. При этом для продажи 1 группы товаров на 1 тыс. руб. товарооборота расходуется ресурса первого вида в количестве a_{11} единиц, ресурса второго вида в количестве a_{21} единиц, ресурса третьего вида в количестве a_{31} единиц. Для продажи 2 и 3 групп товаров на 1 тыс. руб. товарооборота расходуется соответственно ресурса первого вида в количестве a_{12}, a_{13} единиц, ресурсов второго вида в количестве a_{22}, a_{23} единиц, ресурсов третьего вида в количестве a_{32}, a_{33} единиц. Прибыль от продажи трех групп товаров на 1 тыс. руб. товарооборота составляет соответственно c_1, c_2, c_3 тыс. руб.

Необходимо, определить плановый объем и структуру товарооборота так, чтобы прибыль торгового предприятия была максимальной.

В Таблица 1 представлены соответствующие коэффициенты по $a_{11} \dots c_3$ по вариантам заданий.

Таблица 1 - Варианты заданий

№ Вар	a_{11}	a_{13}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
1	17	2	8	7	7	7	2	6	5	540	230	220	8	3	2
2	22	13	1	5	42	12	12	3	22	310	430	450	9	8	2
3	12	2	4	22	12	6	3	23	9	910	755	823	1	3	7
4	12	2	9	12	8	21	34	9	5	312	421	570	6	4	2
5	31	2	6	15	16	3	25	22	8	346	685	731	3	8	3
6	41	1	12	31	17	15	2	2	9	759	750	590	2	9	3
7	32	41	3	5	19	17	21	19	18	589	491	438	4	2	9
8	32	11	4	5	16	32	21	12	5	520	550	90	5	3	7
9	8	9	25	21	11	4	5	22	12	87	660	890	4	8	5
10	13	21	42	42	41	3	7	2	31	446	445	30	5	1	6
11	12	31	4	51	17	6	11	9	30	50	202	900	2	9	3
12	21	4	6	13	13	8	21	9	17	539	524	414	3	4	6
13	17	9	21	8	14	15	5	6	23	333	231	80	8	9	2
14	23	31	1	30	10	5	12	9	41	85	556	212	1	2	8
15	10	12	9	31	1	2	5	7	15	221	442	60	2	6	5
16	2	32	32	3	6	8	14	12	21	55	411	600	3	2	8
17	2	5	32	21	4	11	13	8	2	321	356	30	5	2	7
18	21	4	6	13	13	8	21	9	17	267	321	899	1	1	8
19	23	31	1	30	10	5	12	9	41	750	750	120	2	3	7
20	8	9	25	21	11	4	5	22	12	314	123	543	4	3	5
21	12	2	9	12	8	21	34	9	5	90	432	453	3	2	6

22	2	32	32	3	6	8	14	12	21	312	543	347	5	8	1
23	8	9	25	21	11	4	5	22	12	631	432	746	5	5	3
24	32	41	3	5	19	17	21	19	18	433	48	723	3	2	6
25	21	4	6	13	13	8	21	9	17	723	63	642	8	1	2
26	17	2	8	7	7	7	2	6	5	631	874	310	5	6	2
27	4	21	12	8	17	12	5	16	29	533	536	23	5	8	9
28	30	21	23	22	41	6	17	23	11	426	632	533	2	3	5
29	12	4	7	17	19	3	22	29	12	314	320	342	1	4	6
30	11	42	31	19	9	5	14	31	9	532	54	78	3	6	7

К пункту 3:

Необходимо привести исходные табличные данные к канонической форме, необходимой для решения задачи симплекс-методом. Все преобразования должны быть наглядно отображены с подробным разъяснением выполняемых действий. Приведение задачи к форме симплекс-таблицы желательно, ввиду простоты ее интерпретации.