Anton Soto Martinez

1. Trabajo de la asignatura Curvas y superficies sobre ángulos orientados

1.1. Resumen de las propiedades de la función exponencial

La función exponencial está definida para todo número complejo y se expresa como el siguiente sumatorio:

$$exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Esta serie converge absolutamente para cualquier numero real y complejo y converge uniformemente para cualquier subconjunto acotado de los números complejos.

Además la función exponencial es una función continua y que cumple la siguiente propiedad para cualquier $a, b \in \mathbb{C}$:

$$exp(a) * exp(b) = exp(a+b) \tag{1}$$

La función exponencial cumple con las siguientes propiedades:

1. Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ tenemos que $exp(z) \neq 0$
2. $exp'(z) = exp(z)$
3. $$exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} (+\infty)$$
4. $$exp(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} (0)$$
5. Existe un numero positivo π tal que exp(π*i/2)=i
6. exp(z)=1 si y solo si $z/(2*n*i)$ es un entero, siendo $n \in \mathbb{N}$
7. exp is una función periódica con periodo $2n\pi$
8. Sea $z = x + iy$, su conjugado $\overline{z} = x - iy$

$$exp(\overline{z}) = \overline{exp(z)} \tag{2}$$

Es decir, la imagen por la exponencial compleja del eje vertical {iy; $y \in \mathbb{R}$} está contenida en la circunferencia de radio 1. Euler demostró que para todo $\theta \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad: $exp(i\theta) = cos(\theta) + isen(\theta)$ Identificando el cuerpo $\mathbb{C}$ de los complejos con $\mathbb{R}^2$,lo anterior se escribe:

$$exp(i\theta) = (cos(\theta), sen(\theta)). \tag{3}$$

Así que para todo $a, b \in \mathbb{R}$, las propiedades

$$cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b), \tag{4}$$

$$sen(a+b) = sen(a)cos(b) + cos(a)sen(b) \tag{5}$$

son consecuencia de que

$$exp(i(a+b)) = exp(ia) * exp(ib)$$

La demostración de las anteriores propiedades está en el **Rudin**

1.2. Ángulos orientados

Definition 1. *Un ángulo orientado es la región del plano descrita por el giro de una semirrecta. El sentido del giro es **positivo** si es contrario al desplazamiento de las agujas del reloj.*

*El sentido de giro es **negativo** si es el mismo que el de las agujas del reloj.*

Observación

Cabe destacar que cuando nos referimos al plano en la anterior definición estamos refiriéndonos a $\mathbb{R}^2$.

Además siempre conviene saber que cuando hablemos de $\mathbb{C}$ hay que tener en cuenta que $\mathbb{R}^2$ es isomorfo a $\mathbb{C}$.

Definition 2. *Se llama circunferencia unidad al conjunto:*

$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$

Podemos decir que un ángulo orientado en $\mathbb{R}^2$ es un par ordenado (a, b) de vectores $a, b \in \mathbb{S}^1$

Por lo tanto para $a = (cos\theta, sen\theta)$ y $b = (cos\sigma, sen\sigma)$, el ángulo orientado que forman es:

$\angle_{or}\ (a, b) = |\theta - \sigma|$

EJERCICIO

Pruébese que si z es un número complejo no nulo entonces $< (za, zb) =< (a, b) >$

SOL:

Para demostrar que $\langle(za, zb)\rangle = \langle(a, b)\rangle$ para cualquier número complejo no nulo z, podemos usar las propiedades de los argumentos y la definición de ángulo orientado.

Primero, sabemos que el argumento de un vector multiplicado por un escalar complejo no nulo se desplaza por el argumento del escalar. En otras palabras, para cualquier vector no nulo $a \in \mathbb{C}$ y cualquier número complejo no nulo $z \in \mathbb{C}$, tenemos:

$arg(za) = arg(z) + arg(a)$

De manera similar, para cualquier vector no nulo $b \in \mathbb{C}$ y cualquier número complejo no nulo $z \in \mathbb{C}$, tenemos:

$arg(zb) = arg(z) + arg(b)$

Ahora podemos calcular el angulo de orientación entre los vectores za y zb:

$\angle(za, zb) = arg(zb) - arg(za) = (arg(z) + arg(b)) - (arg(z) - arg(a)) = arg(b) - arg(a) = \angle(a, b)$

Por lo tanto, hemos demostrado que el ángulo de orientación entre los vectores za y zb es igual al ángulo de orientación entre los vectores a y b, como se quería demostrar.