A parfaire

# Théorie cinétique (L3, M1)

Elements de théorie cinétique ; distribution des vitesses, distribution de M.B.

## 1. Description (classique) d'un système en mécanique statistique

### a. Hypothèses générales

### b. Densité de proba de l'esp. des phases

### c. Hiérarchie BBGKY.

## 2. Situation d'équilibre canonique

## 3. Situation d'équilibre canonique pour un GPM

## 4. Maxwellienne des vitesses à l'équilibre canonique

## 5. Vérifications expérimentales de la Maxwellienne des vitesses

### a. Par effet Doppler-Fizeau

### b. Par effusion

## Introduction

C'est par des considérations générales de symétrie que Maxwell découvrit en 1860 la loi de répartition des vitesses des particules d'un gaz parfait monoatomique

→ voir TD thermodynamique sur ce sujet.

Boltzmann démontra ensuite en 1872 cette loi comme une distribution d'équilibre découlant de l'équation de Boltzmann, en supposant que les collisions binaires élastiques ne modifie pas la distribution d'équilibre.

→ voir complément IV E du Diu par ex.

On peut aussi démontrer cette distribution comme une conséquence directe de la distribution canonique, aussi appellée distribution de Boltzmann-Gibbs, en mécanique statistique classique.

→ c'est l'objet de ce TD.

Cette distribution est valable pour tous les fluides classiques : gaz réels ou fluide.

# 1. Description (classique) d'un système en mécanique statistique

## a. Hypothèses générales

Soit un fluide, un gaz ou un plasma, considéré comme un ensemble de N particules identiques (discernables ou indiscernables) contenues dans un volume V.

On suppose que les particules n'ont pas de structure interne (ie pas de volume propre) et sont donc ponctuelles.

On suppose que l'état individuel d'une particule "i" peut-être déterminé par un paramétrage continu $(\vec{q_i}, \vec{p_i})$ où $\vec{q_i}$ est la coordonnée généralisée et $\vec{p_i}$ l'impulsion généralisée, canoniquement conjuguées par les équations de Hamilton :

$$\dot{\vec{q_i}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p_i}} \quad \text{et} \quad \dot{\vec{p_i}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q_i}}$$

où $\mathcal{H}(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)})$ est l'hamiltonien du système de N particules. On suppose donc l'existence d'un hamiltonien pour le système. On aura noté :

$$\begin{cases} \vec{q}^{(N)} = (\vec{q_1}, \dots, \vec{q_N}) \\ \vec{p}^{(N)} = (\vec{p_1}, \dots, \vec{p_N}) \end{cases}$$

## b. Densité de proba de l'esp. des phases

L'état macroscopique du système fait intervenir un nombre élevé de particules dépendant du nombre de moles : $N = n\mathcal{N}_A$ avec $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\,mol^{-1}$.
Ce nombre $N \gg 1$ impose une description probabiliste.

On introduit donc une densité de probabilité sur l'espace des phases du système à $6N$ dimension. Un point de cet espace des phases est : $(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)})$, la d.p. est notée : $w(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)}; t)$, elle définit la probabilité $\boxed{dP(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)}; t) = w(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)}; t)\, d\vec{q}^{(N)} d\vec{p}^{(N)}}$ de trouver le système en $(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)})$ à la date $t$ à $d\vec{q}^{(N)} d\vec{p}^{(N)}$ près.

Les particules étant identiques, la densité $w$ est symétrique dans l'échange de deux couples $(\vec{q}_i, \vec{p}_i)$ et $(\vec{q}_j, \vec{p}_j)$.

Si les particules sont indiscernables, le paradoxe de Gibbs nous a appris qu'il faut diviser par $N!$ le volume de l'espace des phases. Ainsi la condition de normalisation sur $w$ s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{N!} \displaystyle\int w(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)}; t)\, d\vec{q}^{(N)} d\vec{p}^{(N)} = 1 \quad , \text{ indiscernables} \\ \displaystyle\int w(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)}; t)\, d\vec{q}^{(N)} d\vec{p}^{(N)} = 1 \quad , \text{ discernables} \end{cases}$$

Du fait de propriétés de normalisation de la probabilité $w$ vérifie une équation de continuité. La probabilité "s'écoule" dans l'espace des phases comme le ferait un fluide de densité $w$ obéissant à la loi de conservation locale (de la probabilité) :

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}(w\vec{v}) = 0,} \quad (1)$$

où la divergence est prise p/r aux $2N$ coord. $(q_i; p_i)$ de l'espace des phases, et où $\vec{v}$ a pour composantes $(\dot{q}_i; \dot{p}_i)$.

Cette équation (découle du théorème de Liouville) est appellée l'équation de Liouville, et on l'écrit aussi sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \{w, \mathcal{H}\} = 0} \quad (1\text{bis})$$

où : si $\left|\begin{matrix}\vec{A}\\ \vec{B}\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}\vec{A}\\ \vec{B}\end{matrix}\right.(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)}; t)$ , $\{A, B\} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial A}{\partial \vec{q}_i} \cdot \frac{\partial B}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial A}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{\partial B}{\partial \vec{q}_i}\right]$

## c. Hiérarchie BBGKY.

À partir de $w$ on peut définir une hiérarchie de densité de probabilité à des constantes près ; les fonctions de répartitions réduites à $n$ particules notées $(f_n)_n$

$$\boxed{n<N, \quad f_n(\vec{q}^{(n)}, \vec{p}^{(n)}; t) = \frac{1}{(N-n)!}\int w(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)}; t) \prod_{i=n+1}^{N} d\vec{q}_i \, d\vec{p}_i} \quad (2)$$

et

$$\boxed{\text{si } n=N, \quad f_N(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)}; t) := w(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)}; t)} \quad (2\text{bis})$$

$f_n$ est proportionnelle à la <u>densité de probabilité jointe d'ordre $n$</u> qui donne la probabilité de trouver à l'instant $t$ une particule en $\vec{q_1}$ avec l'impulsion généralisée $\vec{p_1}$, une autre en $\vec{q_2}$ avec $\vec{p_2}$, etc., et une nième en $\vec{q_n}$ avec $\vec{p_n}$. Pour cette raison $f_n$ est aussi appellée fonction de corrélation à $n$ particules.

$$\langle XY \rangle = \int xy \, P_{XY}(x,y) \, dx dy.$$

$f_n$ n'est pas tout à fait une densité de probabilité puisque :

$$\frac{1}{n!}\int f_n(\vec{q}^{(n)}, \vec{p}^{(n)}; t) d\vec{q}^{(n)} d\vec{p}^{(n)} = \frac{1}{n!(N-n)!}\underbrace{\int w(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)}; t) d\vec{q}^{(N)} d\vec{p}^{(N)}}_{=N!}$$

càd :

$$\boxed{\frac{1}{n!}\int f_n \, d\vec{q}^{(n)} d\vec{p}^{(n)} = \binom{N}{n}} \quad (3)$$

Cette hiérarchie $(f_n)_n$ de fonction de répartition réduite à n particules, est donc, à des constantes près, une hiérarchie de densité de probabilité jointes.
L'équation régissant l'évolution de la fonction de répartition à n particules, $f_n$, s'obtient en intégrant l'équation de Liouville sur les positions et impulsions généralisés des (N-n) autres particules.

---

Lorsque les coordonnées généralisées se réduisent à la position et les impulsions généralisées à l'impulsion :
$$\begin{cases} \vec{q_i} \leftrightarrow \vec{r_i} \\ \vec{p_i} \leftrightarrow m\vec{v_i} \end{cases}$$
et si les N particules interagissent seulement via des forces à 2 corps dérivant d'une énergie potentielle u ne dépendant que de la position relative des 2 particules : $u_{ij} = u(\vec{r_i} - \vec{r_j})$
Ces N particules peuvent éventuellement être soumises à un champ de force exterieur $\vec{F}$ dérivant d'un potentiel ne dépendant que de $(\vec{r_i})$ :
$$\vec{F}(\vec{r_i}) = -d_{\vec{r_i}}\,\Phi(\vec{r_i})$$
Autrement dit si l'Hamiltonien du système s'écrit :
$$\boxed{\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{m\vec{v_i}^2}{2} + \Phi(\vec{r_i})\right] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} u_{ij}} \quad (4)$$

Alors on peut montrer que les $(f_n)_n$ obéissent à une hiérarchie d'équations intégro-différentielles

Cette hiérarchie d'équation d'évolution des $(f_n)_n$

$$f_n \equiv f_n(\vec{r}^{(n)}, \vec{v}^{(n)}; t)$$

porte le nom de hiérarchie de BBGKY

(Bogolioubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon.)

$$\partial_t f_n + \{f_n, \mathcal{H}_n\} = \int \sum_{i=1}^{n} \left(\partial_{\vec{q}_i} u_{i\,n+1}\right) \cdot \left(\partial_{\vec{p}_i} f_{n+1}\right) d\vec{q}_{n+1}\, d\vec{p}_{n+1}$$

$$\text{où : } \mathcal{H}_n = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \Phi(\vec{q}_i)\right] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} u_{ij}$$

→ il faut connaître $f_{n+1}$ pour déduire l'évolut° de $f_n$.

## 2. Théorème des moments gaußiens

**Q.** On pose $I_p := \int_0^{+\infty} x^p e^{-x^2} \, dx$ , $p \in \mathbb{N}$

Montrer que : $I_{p+2} = \frac{p+1}{2} I_p$ , $\forall p \in \mathbb{N}$.

$$I_p = \int_0^{+\infty} \frac{d x^{p+1}}{dx} \cdot \frac{1}{p+1} \; e^{-x^2} \, dx$$

$$u'(x) = \frac{d x^{p+1}}{dx} \qquad v(x) = e^{-x^2}$$

$$u(x) = x^{p+1} \qquad v'(x) = -2x e^{-x^2}$$

$$+1) \; I_p = \underbrace{\cancel{\left[ x^{p+1} e^{-x^2} \right]_0^{+\infty}}}_{= 0} + 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} x^{p+2} e^{-x^2} dx}_{I_{p+2}}$$

par croissance comparée

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{p+1}{2} I_p = I_{p+2}} \qquad (5)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \qquad I_3 = I_1 \qquad I_4 = \frac{3}{2} I_2 \qquad I_5 = 2 I_3 \; \ldots$$

Q. Calculer $I_0$ et $I_1$

$$I_0 := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

calculons $I_0^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$

Posons : $r^2 = x^2+y^2$ , $\begin{cases} r\cos\theta = x \\ r\sin\theta = y \end{cases}$ , $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in [0; \pi/2]$

$$\varphi : \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} r\cos\theta = x \\ r\sin\theta = y \end{pmatrix}$$

le Jacobien à considérer est $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} =: J$

Soit $J = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$

$$\Rightarrow \quad (I_0)^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/2} r e^{-r^2} dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr$$

$$d_r e^{-r^2} = -2re^{-r^2} \Rightarrow (I_0)^2 = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \int_0^{+\infty} d_r e^{-r^2} dr$$

$$(I_0)^2 = -\frac{\pi}{4}\cdot \left[e^{-r^2}\right]_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{\pi}{4}\,[0-1]$$

$$(I_0)^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} \quad (6)$$

Calculons $I_1 := \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$

$$I_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\infty} d_x e^{-x^2} dx = \boxed{\frac{1}{2} = I_1} \quad (7)$$

## 3. Situation d'équilibre canonique

On considère que le système est à l'équilibre canonique.
Une situation d'équilibre implique la stationarité de la densité de proba de l'espace des phases du système : $w(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)}; t) \equiv w(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)})$.

Q. En introduisant un facteur de normalisation A que l'on précisera, donner l'expression de la distribution canonique $w(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)})$. On rappellera son origine.

La maximisation de l'entropie statistique :

$$S := -k_B \sum_{\ell=1}^{\Omega} P_\ell \ln P_\ell ,$$

où $P_\ell$ est la probabilité qu'a le syst. à occuper un micro-état individuel $(\ell)$ d'énergie $\mathcal{E}_\ell$ et $\Omega$ l'ensemble des micro-états possibles,

sous les contraintes :

$$\sum_{\ell=1}^{\Omega} \varepsilon_\ell P_\ell = \langle E \rangle , \quad \text{et} \quad \sum_{\ell=1}^{\Omega} P_\ell = 1 ,$$

donne comme solution la distribution de Boltzmann-Gibbs pour les $(P_\ell)_\ell$ :

$$P_\ell = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta \mathcal{E}_\ell} , \quad \text{où } Z(\beta) := \sum_{\ell=1}^{\Omega} e^{-\beta \mathcal{E}_\ell}$$

$$\text{et } \beta \text{ tq : } \quad -\partial_\beta \{ \ln (Z(\beta)) \} = \langle E \rangle$$

L'entropie $S$ s'écrit alors : $\frac{S}{k_B} = \beta\langle E\rangle + \ln(Z)$

en posant $\mathcal{S} := \frac{S}{k_B}$ et $\mathfrak{F} = \ln(Z)$ il vient un couple $(\mathfrak{F}, \mathcal{S})$ lié par TL :

$$\mathfrak{F} + \mathcal{S} = \beta\langle E\rangle$$

avec $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \beta} = \langle E\rangle$ et $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \langle E\rangle} = \beta$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \langle E\rangle} = \beta \Leftrightarrow \frac{\partial S}{\partial \langle E\rangle} = k_B\,\beta$$

or $\frac{\partial S}{\partial \langle E\rangle}$ correspond à la définition de la grandeur thermodynamique conjuguée de la variable d'état primitive $\langle E\rangle$ (énergie interne) imposée par le thermostat, qui est $\frac{1}{T} := \frac{\partial S}{\partial \langle E\rangle}$ Donc : $\boxed{\beta = \frac{1}{k_B T}}$

Si les $(\varepsilon_\ell)_\ell$ peuvent être décrits continuement (il faut pour cela que $\hbar$ soit négligeable devant les grandeurs physiques de même dimension associées au système), ici par les $(\vec{q}_i)_i$ et les $(\vec{p}_i)_i$, alors on peut introduire une densité de probabilité agissant sur l'espace des phases correspondant à la distribution des $(P_\ell)_\ell$ :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Correspondance discrète} \leftrightarrow \text{continue} \left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon_\ell)_\ell \leftrightarrow \mathcal{H}(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)}) \\ (P_\ell)_\ell \leftrightarrow w(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)}) = \frac{1}{A}\, e^{-\beta \mathcal{H}(\vec{q}^{(N)}, \vec{p}^{(N)})} \end{array}\right. \\ \text{avec} \quad A := \underbrace{N!}_{\text{si particules indiscernables}} \int e^{-\beta \mathcal{H}}\, d\vec{q}^{(N)} d\vec{p}^{(N)} \quad \text{de sorte que } \int w = 1 \end{array}} \quad (8)$$

Au regard de l'Hamiltonien (4) :

on note : $E_p(\vec{r}^{(N)}) := \sum_{i=1}^{N} \Phi(\vec{r_i}) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} u_{ij}$ , $u_{ij} := u(\vec{r_i} - \vec{r_j})$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H}(\vec{r}^{(N)}, \vec{v}^{(N)}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m\vec{v_i}^2}{2} + E_p(\vec{r}^{(N)}) . \quad (9)$$

on fait remarque que Ep ne dépend que des $(\vec{r_i})_i$ et que la position et la vitesse sont indépendants avec cet Hamiltonien.

( Ce qui n'est pas automatique puisque :

$$\vec{p_j} := \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{q}^{(N)}, \dot{\vec{q}}^{(N)}, t)}{\partial \dot{\vec{q_i}}} ,$$

où $\mathcal{L} = \vec{p}^{(N)} \dot{\vec{q}}^{(N)} - \mathcal{H}$. )

Q. Quelle forme prend $w(\vec{r}^{(N)}, \vec{v}^{(N)})$ ?

En appliquant la formule de la distribution canonique (1),

$$\boxed{w(\vec{r}^{(N)}, \vec{v}^{(N)}) = \frac{1}{A} e^{-\beta \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{N} \vec{v_i}^2} e^{-\beta E_p(\vec{r}^{(N)})}} \quad (10)$$

où : $A = \int e^{-\beta \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{N} \vec{v_i}^2} d\vec{v}^{(N)} \int e^{-\beta E_p(\vec{r}^{(N)})} d\vec{r}^{(N)} \times N!$

si particules indiscernables

car $\vec{v_i}$ et $\vec{r_i}$ sont indépendants $\forall i$.

Q. Montrer que les vecteurs vitesses des différentes particules sont des vecteurs aléatoires indépendants. Commenter les raisons physiques.

Pour cela il faut et suffit de montrer que :

$$dP(\vec{v}^{(N)}) = \prod_{i=1}^{N} dP(\vec{v_i})$$

où : $dP(\vec{v}^{(N)}) = \left(\int w(\vec{r}^{(N)}, \vec{v}^{(N)})\, d\vec{r}^{(N)}\right) d\vec{v}^{(N)}$

est la probabilité que la particule 1 ait la vitesse $\vec{v_1}$ à $d\vec{v_1}$ près, et la particule 2 $\vec{v_2}$ à $d\vec{v_2}$, ..., et la particule n $\vec{v_n}$ à $d\vec{v_n}$.

Avec (2) :

$$dP(\vec{v}^{(N)}) = \frac{\left(\int e^{-\beta E_p(\vec{r}^{(N)})\, d\vec{r}^{(N)}} d\vec{r}^{(N)}\right) e^{-\beta \frac{m}{2}\sum \vec{v_i}^2}}{\int e^{-\frac{m}{2}\beta \sum \vec{v_i}^2} d\vec{v}^{(N)} \int e^{-\beta E_p(\vec{r}^{(N)})} d\vec{r}^{(N)}}\, d\vec{v}^{(N)}$$

$$dP(\vec{v}^{(N)}) = \frac{e^{-\beta \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N} \vec{v_i}^2}}{\int e^{-\beta\frac{m}{2}\sum \vec{v_i}^2} d\vec{v}^{(N)}}\, d\vec{v}^{(N)} \qquad e^{\sum v_i} = \prod e^{v_i}$$

Posons $B := \int e^{-\beta \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N}\vec{v_i}^2} d\vec{v}^{(N)}$, il vient alors : ↓

$$\boxed{dP(\vec{v}^{(N)}) = \prod_{i=1}^{N} dP(\vec{v_i}) \quad , \quad \text{où } dP(\vec{v_i}) = \frac{1}{B^{1/N}} e^{-\beta\frac{m}{2}\vec{v_i}^2} d\vec{v_i}} \quad (3)$$

(3) ⇔ les $\vec{v_i}$ sont indépendants entre eux

La raison vient de 3 ptés :

1 - l'énergie cinétique d'une particule $\frac{1}{2} m \vec{v_i}^2$ est indépendante de la vitesse des autres particules par déf.

2 - les $(\vec{v_i})_i$ et les $(\vec{r_i})_i$ sont indép. par hypothèse ici.

3 - $V$ ne dépend pas des $(\vec{v_i})_i$ par hypothèse ici

Si tel était le cas on pourrait encore avoir l'indép des $(\vec{r_i})_i$ si :

$$V((\vec{r_i})_i, (\vec{v_i})_i) = V((\vec{r_i})_i) + \sum_{i=1}^{N} V_v((\vec{v_i})_i)$$

mais c'est un cas étrange.

à réfléchir.

Q. Montrer que les trois composantes du vecteur vitesse d'une particule sont indépendantes et identiquement distribuées par une densité $\varphi$ que l'on précisera.

D'après (11), la densité de probabilité du vecteur $\vec{v}$ d'une particule vaut :

$$\boxed{P_{\vec{v}}(\vec{v}) = \frac{1}{B^{1/N}}\, e^{-\beta \frac{m}{2} \vec{v}^2}} \qquad \left(\equiv \frac{dP(\vec{v})}{d\vec{v}}\right)$$

ce qui donne $\quad P_{\vec{v}}(\vec{v}) = \dfrac{1}{B^{1/N}}\, e^{-\beta \frac{m}{2} v_x^2}\, e^{-\beta \frac{m}{2} v_y^2}\, e^{-\beta \frac{m}{2} v_y^2}$

Or : $\quad P_{\vec{v}}(\vec{v}) \equiv P_{\vec{v}}(v_x, v_y, v_z)$

donc :

$$\boxed{\begin{aligned} &P_{\vec{v}}(v_x, v_y, v_z) = \varphi(v_x)\cdot\varphi(v_y)\cdot\varphi(v_z) \\ &\text{où} \quad \varphi(v_\alpha) = \frac{1}{B^{1/3N}}\, e^{-\beta \frac{m}{2} v_\alpha^2} \end{aligned}} \quad (12)$$

(4) $\Leftrightarrow$ $v_x, v_y, v_z$ sont indépendantes $\forall$ le vecteur vitesse considéré.

La condition de normalisation $\int P_{\vec{v}}(\vec{v})\, d\vec{v} = 1$ implique :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v_\alpha)\, dv_\alpha\right)^3 = 1 \iff \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v_\alpha)\, dv_\alpha = 1$$

or $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{m}{2} v_\alpha^2}\, dv_\alpha = 2\int_0^{+\infty} e^{-\beta \frac{m}{2} v_\alpha^2}\, dv_\alpha \underset{\substack{X = \sqrt{\frac{\beta m}{2}}\, v_\alpha \\ \sqrt{\frac{2}{\beta m}}\, dX = dv_\alpha}}{=} \frac{2\sqrt{2 k_B T}}{\sqrt{m}} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-X^2}\, dX}_{= I_0 = \sqrt{\pi}/2} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}\, \sqrt{2\pi}$$

En posant $\boxed{\sigma_{v_\alpha} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}}$ (13), il vient : $\boxed{\begin{aligned} B^{1/3N} &= \sigma_{v_\alpha}\sqrt{2\pi} \\ B &= \left(\sigma_{v_\alpha}\sqrt{2\pi}\right)^{3N} \end{aligned}}$

$\left(\sigma_{v_\alpha}^2 = \frac{1}{\beta m}\right)$

D'où :

$$\boxed{\varphi(v_\alpha) = \frac{1}{\sigma_{v_\alpha}\sqrt{2\pi}}\, e^{-v_\alpha^2/2\sigma_{v_\alpha}^2}} \quad (14)$$

$\forall \alpha = x, y, z$

et d'où :

$$\boxed{P_{\vec{v}}(\vec{v}) = \left(\frac{1}{\sigma_{v_\alpha}\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-\vec{v}^2/2\sigma_{v_\alpha}^2}} \quad (14 \text{ bis})$$

Graphe de $\varphi$

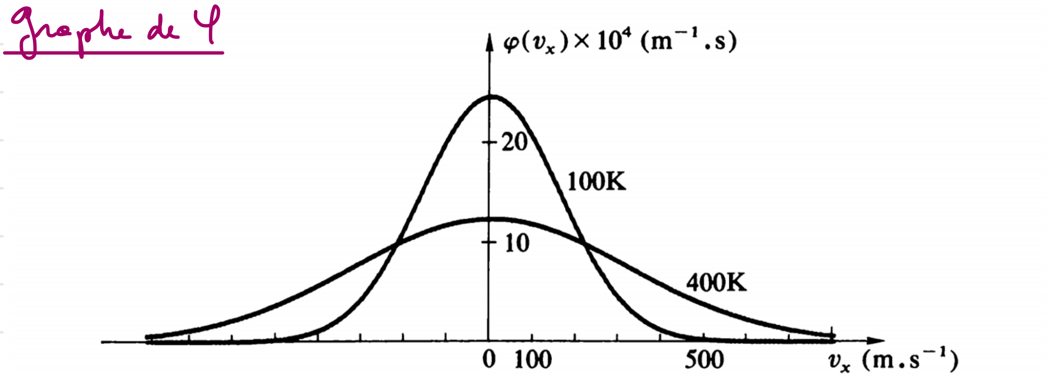



FIGURE 1
**Distribution statistique d'une composante de la vitesse pour deux valeurs de la température ($T_1 = 100$ K; $T_2 = 400$ K), dans un gaz d'oxygène ($m = 32 \times 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg).**

La masse d'une particule "$O_2$" correspond environ à la masse des 2 (8 neutrons + 8 protons). On considère $m_n \simeq m_p$

$$m = 32 \times m_p \simeq 32 \times 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

Q. Comment s'écrit le nombre de particule $dN(\vec{v})$ ayant la vitesse $\vec{v}$ à $d\vec{v}$ près ? Cette formule caractérise la distribution de Maxwell des vitesses.

$$dN(\vec{v}) = N \cdot p_{\vec{v}}(\vec{v})\, d\vec{v}$$

$$= N \cdot \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)\, dv_x dv_y dv_z$$

$$\boxed{dN(\vec{v}) = N \left(\frac{1}{\sigma_{v}\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2\sigma_{v_z}^2}}} \quad (15)$$

distribution de Maxwell des vitesses.

Q. Déterminer $\varphi$ en fonction du nombre de particules $dN(v_\alpha)$ ayant une composante $v_\alpha$ comprise entre $v_\alpha$ et $v_\alpha + dv_\alpha$.

On note $v_\beta$ et $v_\gamma$ les autres composantes :

$$dN(v_\alpha) = \iint_{v_\beta v_\gamma} dN(\vec{v})$$

On $dN(\vec{v}) = N\,\varphi(v_\alpha)\varphi(v_\beta)\varphi(v_\gamma)\,dv_\alpha\,dv_\beta\,dv_\gamma$ et $\int \varphi(v)\,dv = 1$

$$\Rightarrow \quad dN(v_\alpha) = N\,\varphi(v_\alpha)\,dv_\alpha$$

Ainsi : $$\boxed{\varphi(v_\alpha) = \frac{1}{N}\frac{dN(v_\alpha)}{dv_\alpha}} \quad (16)$$

Q. Donner un exemple physique de système à N particules ne donnant pas lieu à la distribution de Maxwell $dN(\vec{v})$.

Techniquement, il y a deux cas où la distribut° maxwellienne ne sera plus en vigueur :

1) $E_p$ dépend de $\vec{v}^{(N)}$

2) L'énergie cinétique ne prend pas une forme en " $\vec{v}_i^{\,2}$ ".

Pour le cas 1 on peut penser aux potentiels de Liénard-Wiechert créés par une particule chargée ($q_e$) relativiste ($\vec{\beta} = \vec{v}/c$), située à l'origine d'un repère à la date t, en un point M repéré par $\vec{r}$.

$$(17) \quad \boxed{V(\vec{r},\vec{v}) = k \left.\frac{q_e}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})r}\right|_{t_0}}$$

d'où l'appellat° de potentiel retardé : il est évalué en $t_0$

où : $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ , $\vec{r} = r\vec{n}$ et : $t_0 = t - \frac{r}{c}$

Pour info on rappelle que :

$$(18) \quad \boxed{A(\vec{r},\vec{v}) = \frac{k}{c} \cdot \left.\frac{q_e\vec{\beta}}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})r}\right|_{t_0}}$$

V dépend de $\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ l'énergie potentiel d'une particule dépend de $\vec{v}$

Pour le cas 2 on peut se rappeler l'Hamiltonien d'une particule chargée $(m, q_e)$ relativiste $(\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c})$ dans un chp électromagnétique caractérisé par des potentiels $(V, A)$ créés de manière non relativiste ($V(\vec{r}, t)$ et $A(\vec{r}, t)$) :

$$(\mathcal{H}_1 - q_e V)^2 + (\vec{p} - q_e A)^2 = m^2 c^4$$

où : $\vec{p}$ est l'impulsion généralisée définie par :

$$\vec{p} := \frac{\partial \mathcal{L}_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}{\partial \dot{\vec{r}}}$$

où : $\mathcal{L}_1$ est le Lagrangien de la particule :

$$\mathcal{L}_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} + q_e \left[\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - V(\vec{r}, t)\right]$$

on note $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, alors :

$$\partial_{\vec{v}} \mathcal{L}_1 = -mc^2 \frac{-2\frac{\vec{v}}{c^2}}{2\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} + q_e \vec{A} = m \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} + q_e \vec{A}$$

$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

donc $\underline{\vec{p} = \vec{p}(\vec{r}, \vec{v}, t) = m\,\Gamma(\vec{v})\vec{v} + q_e \vec{A}(\vec{r}, t)}$

→ l'impulsion généralisée dépend de $\vec{v}$ !

Ainsi :

$$(\mathcal{H}_1 - q_e V)^2 = m^2 \Gamma^2(\vec{v})\, \vec{v}^{\,2} + m^2 c^4$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{H}_1 = \sqrt{m^2c^4 + m^2\Gamma^2(\vec{v})\vec{v}^{\,2}} + q_e V(\vec{r}, t)} \quad (13)$$

→ on constate donc que $\mathcal{H}_1$ est séparable en une partie dépendant de $\vec{r}$ et une partie dépendant de $\vec{v}$, mais la partie dépendant de $\vec{v}$ n'est pas en "$\vec{v}^2$" mais en "$\sqrt{m^2c^4 + m^2\Gamma^2(\vec{v})\vec{v}^{\,2}}$" !

L'Hamiltonien des N particules sera obtenu en sommant les Hamiltonien individuels (19) en rajoutant un terme d'interaction entre particules dû à la répulsion coulombienne :

une charge $q_1$ se trouve en $O_1$

$q_2$ en $O_2$

$$O_1O_2 = r_{12}$$

⚠ le V dans (19) et dans (17) n'est pas le même

La charge $q_1$ est soumise au champ créé par $q_2$, $\vec{E}_2 = -\text{grad}(V_2)$ avec $V_2$ donné par (17)

L'énergie potentielle de $q_1$ s'écrit

$$E_p(\vec{r}_1, \vec{v}_{2/1}) = q_1 V_2 = k \left.\frac{q_1 q_2}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})\, r_{12}}\right|_{t_0}$$

où $\vec{v}_{2/1}$ est la vitesse de $q_2$ p/r à $q_1$, et $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}_{2/1}}{c}$

$\boxed{\text{Les interactions électromagnétiques entre particules chargées relativistes dépendent de leur vitesses relatives}}$ ♡

On a donc d'une part une énergie cinétique qui n'est pas en $\vec{v}^{\,2}$, et d'autre part un terme d'interaction dans l'Hamiltonien qui dépend de $\vec{v}$ et $\vec{r}$. La forme de

$$w(\vec{r}^{(N)}, \vec{v}^{(N)}) = \frac{1}{A} e^{-\beta \mathcal{H}}$$

ne sera pas simple et ne donnera pas une distribution maxwellienne des vitesses.

Conclusion : un plasma relativiste, plongé dans un champ EM extérieur ou non, n'obéira pas à la distribution maxwellienne des vitesses :

$$dN(\vec{v}) = N\left(\frac{1}{\sigma_{v_x}\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-\frac{v^2}{2\sigma_{v_x}^2}} d\vec{v}$$

où $\sigma_{v_x} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$ et $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

## 3. Situation d'équilibre canonique pour un GPM

Dans un GPM les particules sont indépendantes càd qu'il n'y a pas de forces d'interactions entre elles

i.e.: $\boxed{u_{ij} = 0}$

Q. Pourquoi dans ce cas la description de l'état macroscopique du système est entièrement déterminée par la donnée de la fonction réduite à une particule $f_1(\vec{r}, \vec{v}) \equiv f(\vec{r}, \vec{v})$ ?

Les particules sont identiques et indép., la densité de probabilité jointe d'ordre n qui donne la probabilité de trouver en $\vec{r_1}$ une particule avec la vitesse $\vec{v_1}$,

en $\vec{r_2}$ avec $\vec{v_2}$, etc...,

en $\vec{r_n}$ avec $\vec{v_n}$, se factorise alors en n produits de la densité de proba individuelle.

Autrement dit en notant $f = f_1$

$$f_n \propto f^n \quad \forall n$$

⇛ y compris pour $n = N$ : $\boxed{\overset{(2bis)}{f_N} = W \propto \prod_{i=1}^{N} f(\vec{r_i}, \vec{v_i})} \quad (20)$

On rappelle que : $\int f(\vec{r}, \vec{v})\, d\vec{r}\, d\vec{v} = N$

et que. $\frac{1}{n!} \int f_n \, d\vec{r}^{(n)} d\vec{v}^{(N)} = 1$

Les constantes sont déterminées en utilisant ces 2 conditions de normalisation. $\left( W = \frac{N!}{N^N} \prod_{i=1}^{N} f(\vec{r_i}, \vec{v_i}) \right)$

Q. Avec $u_{ij}=0$ que devient l'Hamiltonien (9)? Montrer qu'on vérifie bien :

$$W(\vec{r}^{(N)},\vec{v}^{(N)}) \propto \prod_{i=1}^{N} f(\vec{r_i},\vec{v_i})$$

où l'on précisera $f(\vec{r_i},\vec{v_i})$.

Comment s'appelle cette distribution?

On rappelle l'Hamiltonien (9):

$$\mathcal{H}(\vec{r}^{(N)},\vec{v}^{(N)}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m\vec{v_i}^2}{2} + E_p(\vec{r}^{(N)})$$

où :

$$E_p(\vec{r}^{(N)}) := \sum_{i=1}^{N} \Phi(\vec{r_i}) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} u_{ij}$$

si $u_{ij}=0$ alors :

$$\mathcal{H}(\vec{r}^{(N)},\vec{v}^{(N)}) = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{m\vec{v_i}^2}{2} + \Phi(\vec{r_i})\right] \quad (21)$$

Dans ce cas la distribution canonique devient:

$$W(\vec{r}^{(N)},\vec{v}^{(N)}) = \frac{1}{A}\, e^{-\beta\sum_{i=1}^{N} m\frac{v_i^2}{2}}\, e^{-\beta\sum_{i=1}^{N}\Phi(\vec{r_i})}, \quad \text{où : } A \overset{\text{car les } \vec{v_i} \text{ et les } \vec{r_i} \text{ sont indép.}}{=} \left(\int e^{-\beta\frac{m}{2}v^2} d\vec{v}\right)^N \left(\int e^{-\beta\Phi(\vec{r})} d\vec{r}\right)^N$$

soit

$$\boxed{\begin{aligned} &W(\vec{r}^{(N)},\vec{v}^{(N)}) \propto \prod_{i=1}^{N} f(\vec{r_i},\vec{v_i}) \\ &\text{où : } f(\vec{r},\vec{v}) \propto \frac{1}{A^{1/N}}\, e^{-\frac{\beta m}{2}\vec{v}^2}\, e^{-\beta\Phi(\vec{r})} \end{aligned}} \quad (22)$$

Cette distribution $f$ donnée par (22) est souvent appellée la distribution de Maxwell-Boltzmann.

On retrouve avec (22) la propriété générale (20) due à l'identité et l'indépendance des particules.

Q. Examiner dans quelle approximation $f$ est homogène.

AN : GPM de Volume $V = 1\,m^3$ à température ambiante $T = 298\,K$ soumis à la force de pesanteur terrestre.

Comment s'appelle alors la distribution $f(\vec{v})$ ?

Retrouve-t-on la distribution obtenue $p_{\vec{v}}(\vec{v})$ ?

Si $\beta\Phi(\vec{r}) \ll 1 \iff \frac{\Phi(\vec{r})}{k_B T} \ll 1$

alors (22) donne :

$$f(\vec{r},\vec{v}) = f(\vec{v}) = \frac{C}{A^{1/N}}\, e^{-\beta\frac{m}{2}v^2}, \quad C = \text{cste}$$

et : $A = \iint e^{-\beta H} d\vec{r}^{(N)} d\vec{v}^{(N)}$ devient : $A = \left(\int e^{-\beta\frac{m}{2}v^2} d\vec{v}\right)^N \left(\int d\vec{r}\right)^N$

car les $\vec{v_i}$ sont indépendants entre eux et avec les $\vec{r_i}$ qui sont aussi indép. entre eux

La condition de normalisation $\int f(\vec{r},\vec{v})\, d\vec{r}\, d\vec{v} = N$

permet de déterminer la constante de proportionalité $C$ :

$$\int f(\vec{v})\, d\vec{v}\, d\vec{r} = N \iff C = N$$

donc :

$$f(\vec{r},\vec{v}) \equiv f(\vec{v}) = \frac{N}{A^{1/N}}\, e^{-\beta\frac{m}{2}v^2},$$

or $A^{1/N} = V \cdot \sigma_{v_\alpha}\sqrt{2\pi}$, où : $\sigma_{v_\alpha}^2 = \frac{1}{m\beta} = \frac{k_B T}{m}$

et $\frac{N}{V} =: n^*$

d'où :

$$\boxed{f(\vec{v}) = n^* \frac{1}{\sigma_{v_\alpha}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{v^2}{2\sigma_{v_\alpha}^2}}} \quad (23)$$

c'est la fonction de répartition réduite à 1 particule pour un GPM à l'ETG dans un potentiel ext $\Phi \ll k_B T$.

Pour : $\vec{F} = m\vec{g} = -\vec{\mathrm{grad}}(\Phi)$, avec : $\Phi = +mgz$


$\downarrow \vec{g} = -g\vec{e_z}$

$\vec{\nabla}\Phi \equiv d_z\Phi\vec{e_z} = +mg\vec{e_z}$

$F = -\vec{\nabla}\Phi = -mg\vec{e_z}$, ok.

avec : $\begin{cases} \Delta z = 1\,m, \ T = 298K \\ m = 32 \times 1,67 \cdot 10^{-27}\,kg \end{cases}$, $mg\Delta z / k_B T \simeq 1,3 \cdot 10^{-4} \ll 1$

La masse d'une particule "$O_2$" correspond environ à la masse des 2(8 neutrons + 8 protons). On considère $m_n \simeq m_p$

$$m = 32 \times m_p \simeq 32 \times 1,67 \cdot 10^{-27}\,kg.$$

Donc un gP à l'eq dans un volume de $1\,m^3$ possède une fonction de répartition réduite à 1 particule $f$ homogène en très bonne approximation.

On retrouve $p_{\vec{v}}(\vec{v})$ à la normalisation près :

$\int p_{\vec{v}}(\vec{v})\,d\vec{v} = 1$ (véritable densité de probabilité)

$\int f(\vec{v})\,d\vec{r}\,d\vec{v} = N$ (fonction de répartition réduite)

(23) et (14 bis) $\Rightarrow$ $\boxed{f(\vec{v}) = n^* p_{\vec{v}}(\vec{v})}$ (24) si $\beta\Phi(\vec{r}) \ll 1$.

## 4. Maxwellienne des vitesses à l'équilibre canonique

Soit le cas où l'Hamiltonien du système de N particules identiques (indiscernables ou discernables) s'écrit : $\mathcal{H}(\vec{r}^{(N)}, \vec{v}^{(N)}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m}{2} \vec{v}_i^{\,2} + E_p(\vec{r}^{(N)})$

où le potentiel $E_p(\vec{r}^{(N)})$ ne dépend que de $\vec{r}^{(N)}$ et comprend un potentiel extérieur $\Phi$ et éventuellement un terme d'interaction.

Dans le cas du GPM à l'ETG : $E_p(\vec{r}^{(N)}) = \sum_{i=1}^{N} \Phi(\vec{r}_i)$

Alors, la distribution du module du vecteur vitesse d'une particule prend une forme particulière.

Avant de la déterminer, rappelons le prélude mathématique sur les intégrales gaussiennes du 2.)

### a. Théorème des moments gaussiens

On pose $I_p := \int_0^{+\infty} x^p e^{-x^2} dx \quad , p \in \mathbb{N}$

on a alors : $$I_{p+2} = \frac{p+1}{2} I_p \quad , \forall p \in \mathbb{N}.$$

et : $$I_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

donc : $I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad , \quad I_3 = I_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad I_4 = \frac{3}{2} I_2 = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}$

## b. Maxwellienne des vitesses.

Q. montrer que la densité de probabilité du module du vecteur vitesse $P_V(v)$ a pour expression :

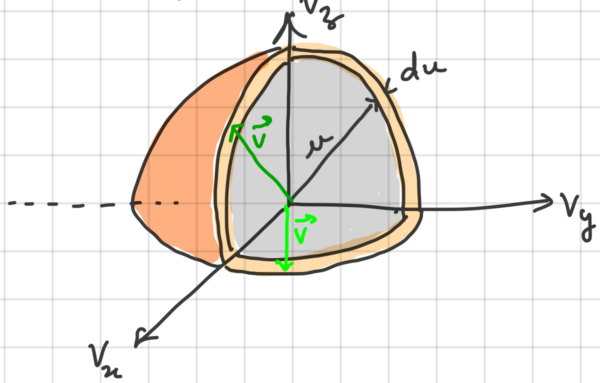
$$P_V(v) = \left(\frac{1}{\sigma_{v_\alpha}\sqrt{2\pi}}\right)^3 4\pi v^2 e^{-v^2/2\sigma_{v_\alpha}^2}$$

où l'on précisera $\sigma_{v_\alpha}$ en fonction de la température $T$ et de la masse $m$ des particules.

La densité de probabilité recherchée donne $\forall u \in \mathbb{R}_+$, la probabilité de trouver $\vec{v}$ tq :

$$u \leq \|\vec{v}\| < u + du$$

Dans l'espace des vitesses, cela correspond à déterminer la probabilité que $\vec{v}$ appartienne à une coquille sphérique de rayon $u$ et d'épaisseur $du$.



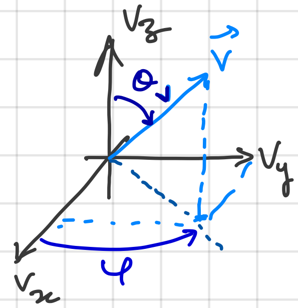

On va donc effectuer un changement de repérage du cartésien $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ au sphérique $\vec{v} = (v, \theta, \varphi)$.

Un corollaire du théorème de transformation des V.A. assure que :

$$P_{\vec{v}}(v, \theta, \varphi) = P_{\vec{v}}(v_x, v_y, v_z) \left|\frac{\partial v_x \partial v_y \partial v_z}{\partial v \partial \theta \partial \varphi}\right|$$

où $\left|\dfrac{\partial v_x \partial v_y \partial v_z}{\partial v\, \partial \theta\, \partial \varphi}\right|$ représente symboliquement le Jacobien

de la transformation :




$$\begin{pmatrix} v \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} v_x = v \sin\theta \cos\varphi \\ v_y = v \sin\theta \sin\varphi \\ v_z = v \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \varphi \in [0; 2\pi] \\ \theta \in [0; \pi] \\ v \in [0; +\infty[ \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial v_x \partial v_y \partial v_z}{\partial v\, \partial \theta\, \partial \varphi}\right| := \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial v} & \frac{\partial v_x}{\partial \theta} & \frac{\partial v_x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial v_y}{\partial v} & \frac{\partial v_y}{\partial \theta} & \frac{\partial v_y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial v_z}{\partial v} & \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = v^2 \sin\theta$$

$$P_{\vec{v}}(v, \theta, \varphi) = P_{\vec{v}}(v_x, v_y, v_z)\; v^2 \sin\theta$$

or $$P_v(v) := \iint_{\theta\varphi} P_{\vec{v}}(v, \theta, \varphi)\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{\sigma_{v_x}\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-\frac{v^2}{2\sigma_{v_x}^2}}\, v^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma_{v_x}\sqrt{2\pi}}\right)^3 v^2 e^{-v^2/2\sigma_{v_x}^2} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta}_{= [-\cos\theta]_0^{\pi} = 2} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}_{= 2\pi}$$

d'où : $$\boxed{P_v(v) = 4\pi \left(\frac{1}{\sigma_{v_x}\sqrt{2\pi}}\right)^3 v^2 e^{-v^2/2\sigma_{v_x}^2}} \quad (25)$$

On vérifie bien que $P_v$ est une densité de probabilité :

$$\int_0^{+\infty} P_v(v)\, dv = 4\pi \left(\frac{1}{\sigma_{v_x}\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_0^{+\infty} v^2 e^{-v^2/2\sigma_{v_x}^2}\, dv$$

or $$\int_0^{+\infty} v^2 e^{-v^2/2\sigma^2}\, dv \underset{\substack{\uparrow \\ x = \frac{v}{\sqrt{2}\sigma} \\ \sigma\sqrt{2}\, dx = dv}}{=} (\sigma\sqrt{2})^3 \underbrace{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx}_{I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}} = (\sigma\sqrt{2})^3 \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \sigma^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} P_v(v)\, dv = \frac{(2\pi)^{3/2}\, \sigma_{v_x}}{(2\pi)^{3/2}\, \sigma_{v_x}} = 1$$

Q. Comment appelle-t-on une telle densité de proba ?

$p_v(v)$ est une <u>densité de proba "maxwellienne"</u>.
On dit que c'est la maxwellienne des vitesses.

Q. Analyser $p_v$ pour tracer son graphe.
Déterminer ses extremums.
Comment appelle-t-on la vitesse $v_0 = \|\vec{v_0}\|$
correspond au max de $p_v$ ?

On pose : $C_0 = \left(\frac{1}{\sigma_{v_x}\sqrt{2\pi}}\right)^3 \cdot 4\pi$

On a : $p_v(v) = C_0 \, v^2 \, e^{-v^2/2\sigma_{v_x}^2}$

$$\Rightarrow \quad p_v'(v) = C_0 \left[ 2v\, e^{-v^2/2\sigma_{v_x}^2} + v^2 \cdot \frac{-2}{2\sigma_{v_x}^2} \, v \, e^{-v^2/2\sigma_{v_x}^2} \right]$$

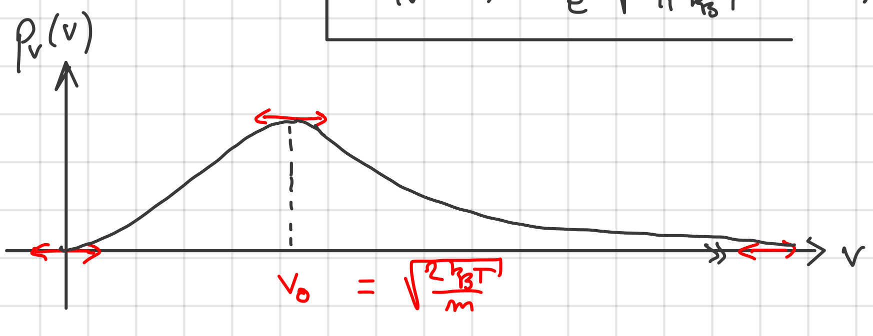
$$p_v'(v) = C_0 \, v \, e^{-v^2/2\sigma_{v_x}^2} \left[ 2 - \frac{v^2}{\sigma_{v_x}^2} \right]$$

$$p_v'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0 \text{ et } v^2 = 2\sigma_{v_x}^2 \text{ et } v \to +\infty$$

en $\boxed{v_0 = \sqrt{2}\,\sigma_{v_x} \quad (26)}$ $\quad p_v(v_0) = C \cdot 2\sigma_{v_x}^2 \, e^{-1}$

$$= \frac{e^{-1}}{\sigma_{v_x}} \cdot \frac{8\pi}{(2\pi)^{3/2}} = \frac{e^{-1}}{\sigma_{v_x}} \cdot \frac{2^{3/2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\boxed{p_v(v_0) = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{8m}{\pi k_B T}} \quad (27)}$$



$V_0$ correspond à la vitesse la plus probable.

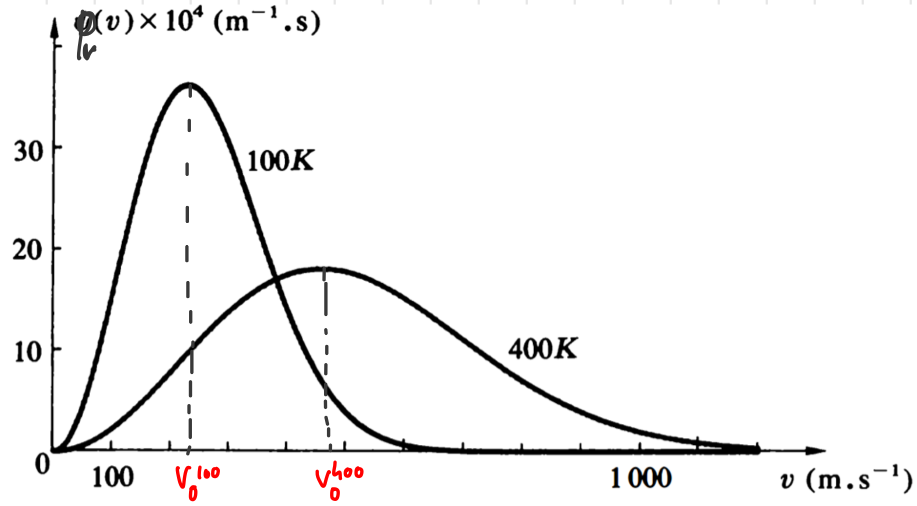



FIGURE 2

**Distribution statistique du module de la vitesse pour deux valeurs de la température ($T_1 = 100$ K; $T_2 = 400$ K) dans un gaz d'oxygène.**

Q Déterminer $\langle v \rangle$ et $v^* = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$

•) $$\langle v \rangle = \int_0^{+\infty} v\, p_v(v)\, dv = \int_0^{+\infty} v^3 e^{-v^2/2\sigma_v^2} dv \,.\, C_0$$

posons : $$\begin{cases} x = \dfrac{v}{\sigma_v\sqrt{2}} & dx \,.\, \sigma_v\sqrt{2} = dv \\ v^3 = \sigma_v^3\, 2^{3/2}\, x^3 \end{cases}$$

$$\langle v \rangle = 4\sigma_v^4 \,.\, \underbrace{\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx}_{I_3 = I_1 = \frac{1}{2}} \,.\, C_0$$

$$\langle v \rangle = 2\sigma_v^4 \frac{1}{\sigma_v^3 (2\pi)^{3/2}} \,.\, 4\pi = \boxed{\sqrt{\frac{8}{\pi}}\, \sigma_{v_\alpha} = \langle v \rangle} \quad (12)$$

soit avec $\sigma_{v_\alpha} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \equiv \sigma_v$ , $\boxed{\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}}}$ (13)

•) $$\langle v^2 \rangle = \int_0^{+\infty} v^2 p_v(v)\, dv = C \int_0^{+\infty} v^4 e^{-v^2/2\sigma_v^2} dv$$

Posons $x = v/\sqrt{2}\sigma_v \Rightarrow \sigma_v\sqrt{2}\, dx = dv$

et $v^4 = 4\sigma_v^4 x^4$

$$\langle v^2 \rangle = C \,.\, 4\sqrt{2}\, \sigma_v^5 \underbrace{\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dv}_{I_4 = \frac{3}{2} I_2 = \frac{3}{4} I_0 = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}} = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, C \,.\, \sigma_v^5$$

$$\langle v^2 \rangle = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, 4\pi \frac{1}{\sigma_v^3 (2\pi)^{3/2}} \,.\, \sigma_v^5 = \boxed{3\sigma_{v_\alpha}^2 = \langle v^2 \rangle} \quad (14)$$

soit $\boxed{\langle v^2 \rangle = 3\frac{k_B T}{m}}$ (15).

Q. Comparer $\langle v \rangle$, $v_0$ et $v^*$.

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\,\sigma_{v_x} \quad , \quad v_0 = \sigma_{v_x}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad v^* = \sigma_{v_x}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{v_0 \leqslant \langle v \rangle < v^*} \quad (16)$$

$$2 < \frac{8}{\pi} \simeq 2{,}55 < 3$$

## 5. Vérifications expérimentales de la Maxwellienne des vitesses

### a. Par effet Doppler-Fizeau

On suppose que les particules émettent une fréquence $\nu_0$ dans le réf. où elles sont au repos.

On considère un observateur $O$ dans le labo, inertiel, capable de mesurer le spectre de la radiation résultante de l'ensemble des particules.

Par effet Doppler-Fizeau, la fréquence reçue $\nu_i$ par $O$ suite à l'émission $\nu_0$ d'une particule $i$, s'écrit à chaque instant dans son réf.

$$\nu_i(t) = \frac{\nu_0}{\Gamma_i(t)\left[1 - \frac{\vec{n}_i(t)\cdot\vec{V}_i(t)}{c}\right]} \qquad (17)$$

où : $\vec{V}_i$ est la vitesse relative de $(i)$ p/r à $O$.

$\vec{n}_i$ est le vecteur unitaire qui déf. la dir entre $(i)$ et $O$.

$\Gamma_i$ est le facteur de Lorentz de $(i)$ p/r à $O$.

puisque $O$ est inertiel : $\Gamma_i = \left(1 - \frac{\vec{V}_i^{\,2}}{c^2}\right)^{-1/2}$

On suppose les conditions d'ergodicité réalisées : à chaque instant l'observateur reçoit une superposition de fréquences statistiquement reparties de la même façon que si l'obs. avait collectionné les chg^ts de fréquence d'une seule particule suivie durant une durée donnée (suffisamment longue devant le temps moyen entre 2 chocs).

On abandonnera donc l'indice $i$ dans la formule (17), et on cherche la distribution des fréquences pour une particule, notée $P_\nu(\nu)$.

Q. Comment se simplifie (17) à la limite non-relativiste ?

$$\Gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{\beta^2}{2} + o(\beta^2)$$

$$\Gamma(1 - \vec{n}\cdot\vec{\beta}) = \left(1+\frac{\beta^2}{2}\right)(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})$$

$$= 1 - \vec{n}\cdot\vec{\beta} + o(\beta)$$

$$\Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}}\,\nu_0 = \boxed{(1+\vec{n}\cdot\vec{\beta})\,\nu_0 = \nu} \quad (18)$$

limite non relativiste de (17).

→ On rappelle un corollaire du théorème de transformation des V.A. :

C1

Soit $n$ V.A. à densité : $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$

Soit $n$ V.A. transformées de $\vec{x}$ : $\vec{y}=\vec{f}(\vec{x})=(f_1(\vec{x}),\dots,f_n(\vec{x}))$

si $f_i$ est inversible i.e. : $y_i=f_i(\vec{x}) \Leftrightarrow x_i=f_i^{-1}(\vec{y})$

alors la densité jointe des $(y_i)$ est donnée par :

$$p_{\vec{y}}(\vec{y}) = p_x\left(\vec{f}^{-1}(\vec{y})\right)\left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}}\right| \leftarrow \text{Jacobien}$$

" $P_Y(y)dy = P_X(x)dx$ "

→ On rappelle le théorème de la transformat° linéaire d'une V.A. normale :

C2

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

$Y=\beta X+\lambda \rightsquigarrow \mathcal{N}(\beta\mu+\lambda,\ \beta^2\sigma^2)$

→ On rappelle le théorème de sommation des V.A. normales conséquence du théorème de transformation des V.A. :

C3

Si $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ et $X_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$

avec $X_1$ et $X_2$ indépendantes

alors $Y=X_1+X_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Fondamentalement cela vient du fait qu'une V.A. normale est infiniment divisible. (← voir Tome 1 de Shiryaev)

Q. Déterminer la densité de probabilité $P_\nu$. Conclusion.

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{1}{c}\vec{n}\cdot\vec{v}\right) \iff \vec{n}\cdot\vec{v} = \frac{c}{\nu_0}\nu - c$$

D'après C1, $\boxed{P_\nu(\nu) = P_{\vec{n}\cdot\vec{v}}\left(\frac{c\nu}{\nu_0} - c\right)\cdot\frac{c}{\nu_0}}$

Or $\vec{n}\cdot\vec{v} = \sum_{\alpha=1}^{3} n_\alpha v_\alpha$, $n_\alpha \in \mathbb{R}$ et les $(v_\alpha)_\alpha$ sont indépendantes et identiquement distribuées par une loi normale de moy. nulle et de var. $\sigma_v^2 = \frac{k_B T}{m}$ :

$\boxed{v_\alpha \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)}$ (voir l'expressº de $\varphi$ (3))

si l'on note $\alpha = n_\alpha v_\alpha$ $(X = n_x v_x,\ Y = n_y v_y)$

C2 $\Rightarrow \alpha \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, n_\alpha^2\sigma_v^2)$

de plus C3 $\Rightarrow \alpha + \beta \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, (n_\alpha^2 + n_\beta^2)\sigma_v^2)$

on en déduit en appliquant C3 une nouvelle fois que :

$$\vec{n}\cdot\vec{v} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \left(\sum_{\alpha=1}^{3} n_\alpha^2\right)\sigma_v^2\right)$$

or $\vec{n}$ est unitaire $\sum n_\alpha^2 = \|\vec{n}\| = 1$

donc $\boxed{\vec{n}\cdot\vec{v} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)}$

càd : $\boxed{P_{\vec{n}\cdot\vec{v}} = \varphi}$ (19)

Avec (3), il vient enfin :

$$P_\nu(\nu) = \frac{c}{\nu_0}\cdot\frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{c^2}{\nu_0^2}(\nu-\nu_0)^2/2\sigma_v^2}$$

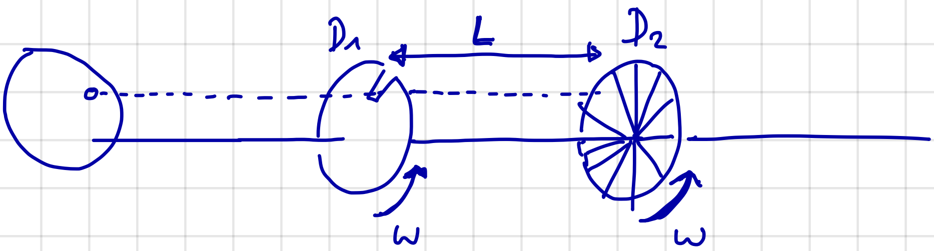
soit en posant $\sigma_\nu = \nu_0\frac{\sigma_v}{c}$,

$\nu \rightsquigarrow \mathcal{N}(\nu_0, \sigma_\nu^2) \iff$ $\boxed{P_\nu(\nu) = \frac{1}{\sigma_\nu\sqrt{2\pi}}\, e^{-(\nu-\nu_0)^2/2\sigma_\nu^2}}$ (20)

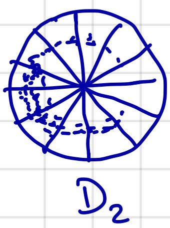
<u>Conclusion</u> : Le profil de raie observé reproduit la distribution des vitesses. $P_\nu(\nu)$ est donné entièrement par la densité $\varphi$, qui est la distribut° de $\vec{v}$ projeté sur la ligne de visée $\vec{n}$ (en fait par isotropie la distribution d'une composante de $\vec{v}$ suivant une direct° qcq est $\varphi$).

## b. Par effusion

On perce un trou fin dans la paroi d'un récipient contenant un gaz porté à une température connue.
On utilise ensuite un appareil à jet moléculaire




Les disques $D_1$ et $D_2$ tournent simultanément et $L$ est constant. Suivant le module de leur vitesse, les particules franchissent le disque $D_1$ et frappent le disque $D_2$ en différents endroits.




une vitesse $v_i$ correspond à un tps de vol $\tau_i = \frac{L}{v_i}$

qui correspond à un angle $\theta_i$ sur $D_2$ : $\theta_i = \omega \tau_i = \frac{\omega L}{v_i}$

la distribution des $\theta_i$ donne celle des $v_i$.