1. Champ résultant de Z_1

Q1. L'observateur O est supposé inertiel et l'effet Doppler considéré est non-relativiste, par conséquent la fréquence perçue par l'observateur ν est transformée par rapport à ν_e selon :

$$\nu = \nu_e \left(1 + \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right)$$

Q2. Les vecteurs vitesses de chaque ions sont indépendants et identiquement distribués.

On note $p_{\vec{v}}(\vec{v})$ la densité de probabilité du vecteur vitesse d'un ion.

D'après le cours sur la théorie cinétique du GPM :

$$\underline{p_{\vec{v}}(\vec{v}) = \varphi(v_x) \cdot \varphi(v_y) \cdot \varphi(v_z)}$$

ie : chaque composante de $\vec{v}$ est indépendante et identiquement distribuée par φ qui est une gaußienne :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma_v^2} \quad \text{où } \sigma_v^2 = \frac{k_B T}{m}$$

Q3. On traite le changement $\nu \leftrightarrow \vec{n}.\vec{v}$ comme un changement de variable classique (ce qui est légitime en vertu du corollaire du théorème de transformation des V.A.) :

$$\nu = \nu_e \left(1 + \frac{1}{c}\,\vec{n}.\vec{v}\right) \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{v} = \frac{c}{\nu_e}\nu - c$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\vec{n}.\vec{v})}{\partial \nu} = \frac{c}{\nu_e}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_\nu(\nu) = P_{\vec{n}.\vec{v}}\left(\frac{c}{\nu_e}\nu - c\right) . \frac{c}{\nu_e}}$$

Q4. On a : $p_{\vec{n}.\vec{v}}(x) = \frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma_v^2}$

ainsi avec le résultat de la Q3 il vient :

$$P_\nu(\nu) = \frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c^2}{\nu_e^2}(\nu-\nu_e)^2/2\sigma_v^2} \cdot \frac{c}{\nu_e}$$

soit en posant $\sigma_\nu = \frac{\nu_e}{c}\sigma_v$;

$$\boxed{P_\nu(\nu) = \frac{1}{\sigma_\nu\sqrt{2\pi}} e^{-(\nu-\nu_e)^2/2\sigma_\nu^2}}$$

Q5. L'effet des collisions induit un saut de phase qui se traduit par un terme "$e^{i\varphi_{\ell,t}}$" dans le champ de l'ion ℓ perçu par O.
L'effet Doppler induit un changement de fréquence : $\nu_e \to \nu_\ell$

D'où : $$\boxed{\mathcal{E}_\ell(t) = \frac{E_0}{\sqrt{N}} e^{i\varphi_{\ell,t}} e^{-2i\pi\nu_\ell t}}$$

De plus la fréquence possède des fluctuations du fait des fluctuations de vitesse dues au mouvement brownien ;

$$\delta\nu_\ell := \nu_\ell - \nu_e \iff \underline{\nu_\ell = \nu_e + \delta\nu_\ell}$$

où ν_ℓ a une densité donnée par le résultat de la Q4 ($\langle\nu_\ell\rangle = \nu_e$), c'est une V.A. normale centrée à chaque instant ($\vec{V_\ell}$ dépend de $t \Rightarrow \nu_\ell$ dépend de t)

$\Rightarrow$ <u>$\delta\nu_\ell$ suit une loi normale centrée</u> (à chaque instant)

On peut donc écrire :

$$\boxed{\mathcal{E}_\ell(t) = \frac{E_0}{\sqrt{N}} e^{i\varphi_{\ell,t}} e^{-2i\pi\delta\nu_\ell t} e^{-2i\pi\nu_e t}}$$

Q6. Le théorème de superposition donne le champ $\mathcal{E}_1$ comme la somme des oscillateurs browniens :

$$\mathcal{E}_1(t) = \sum_{\ell=1}^{N} \mathcal{E}_\ell(t).$$

En notant : $A(t) = \sum_{\ell=1}^{N} a_\ell(t)$, avec : $a_\ell(t) = \frac{E_0}{\sqrt{N}} e^{i\varphi_{\ell,t}} e^{-2i\pi\delta\nu_\ell t}$

il vient :

$$\boxed{\mathcal{E}_1(t) = A(t)\, e^{-2i\pi\nu_e t}}$$

2. Champ résultant de Z_1 et Z_2

Q7. Le théorème de superposition s'applique encore une fois ; le champ total à l'endroit où se trouve G est la somme des champs résultants de Z_1 et Z_2 :

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_1(t) + \mathcal{E}_2(t),$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{E}(t) = \left(E_\beta e^{i\phi} + A(t)\right) e^{-2i\pi\nu_e t}.}$$

3. Quelques propriétés préliminaires avant le calcul des corrélations

Q8.

$$\forall \ell, \quad \langle a_\ell(t) \rangle = \left\langle \frac{E_0}{\sqrt{N}} e^{i\varphi_{\ell,t}} e^{-2i\pi\delta\nu_\ell t} \right\rangle$$

$$\langle a_\ell(t) \rangle = \frac{E_0}{\sqrt{N}} \langle e^{i\varphi_{\ell,t}} \rangle \langle e^{-2i\pi\delta\nu_\ell t} \rangle$$

puisque $\varphi_{\ell,t}$ et $\delta\nu_\ell$ sont indépendantes $\forall t$

or, $\varphi_{\ell,t} \rightsquigarrow \mathcal{U}[0;2\pi]$ $\forall t$, donc :

$$\langle e^{i\varphi_{\ell,t}} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix} \, dx = \frac{1}{2i\pi} \left[e^{2i\pi} - 1 \right] = 0$$

donc : $\boxed{\forall \ell, \quad \langle a_\ell(t) \rangle = 0}$

Q9.

$$\forall (\ell,m), \quad \langle a_\ell^*(t)\, a_m(t)\rangle = \frac{E_0^2}{N} \langle e^{i(\varphi_{m,t}-\varphi_{\ell,t})}\, e^{-2i\pi(\delta\nu_m-\delta\nu_\ell)t}\rangle$$

puisque les $(\varphi_{\ell,t})_\ell$ et les $(\delta\nu_\ell)$ sont indépendants

$$\langle a_\ell^*(t)\, a_m(t)\rangle = \frac{E_0^2}{N} \langle e^{i(\varphi_{m,t}-\varphi_{\ell,t})}\rangle \langle e^{-2i\pi(\delta\nu_m-\delta\nu_\ell)t}\rangle$$

si $\ell \neq m$, alors $\langle e^{i(\varphi_{m,t}-\varphi_{\ell,t})}\rangle = \langle e^{i\varphi_{m,t}}\rangle \langle e^{-i\varphi_{\ell,t}}\rangle$

$$= 0 \cdot 0$$

$$\langle e^{i(\varphi_{m,t}-\varphi_{\ell,t})}\rangle = 0$$

et donc $\langle a_\ell^*(t)\, a_m(t)\rangle = 0$

si $\ell = m$, alors : $\langle a_\ell^*(t)\, a_m(t)\rangle = \dfrac{E_0^2}{N}$

On en conclut : $\langle a_\ell^*(t)\, a_m(t)\rangle = \dfrac{E_0^2}{N} \delta_\ell^m$

et puisque $\dfrac{E_0^2}{N}\delta_\ell^m \in \mathbb{R}$, $\langle a_\ell^*(t)\, a_m(t)\rangle^* = \dfrac{E_0^2}{N}\delta_\ell^m$

soit $\langle a_\ell(t)\, a_m^*(t)\rangle = \dfrac{E_0^2}{N}\delta_\ell^m$

d'où :

$$\boxed{\forall (\ell,m), \quad \langle a_\ell^*(t)\, a_m(t)\rangle = \langle a_\ell(t)\, a_m^*(t)\rangle = \frac{E_0^2}{N}\delta_\ell^m}$$

Q10.

Calculons $\varphi(\tau) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{2i\pi x\tau} dx$

$$\varphi(\tau) = \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2 + \left[\frac{1}{\sigma^2}\mu + 2i\pi\tau\right]x} dx$$

en posant $a = \frac{1}{2\sigma^2}$ et $b = \frac{\mu}{\sigma^2} + 2i\pi\tau$

il vient : $4a = \frac{2}{\sigma^2}$ et $b^2 = \frac{\mu^2}{\sigma^4} + 4i\pi\tau\frac{\mu}{\sigma^2} - 4\pi^2\tau^2$

et $\begin{cases} \frac{b^2}{4a} = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + 2i\pi\tau\mu - 2\pi^2\sigma^2\tau^2 \\ \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sigma\sqrt{2\pi} \end{cases}$

d'où : $\underline{\varphi(\tau)} = \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx} dx = \underline{e^{2i\pi\tau\mu} e^{-2\sigma^2\pi^2\tau^2}}$

Q11.

La probabilité qu'il y ait un saut de phase durant τ est par définition donnée par la fonction de répartition de W notée F_W :

$$\underline{F_W(\tau) := \mathbb{P}\{W \leq \tau\}}$$

Or $F_W(\tau) = \int_0^{\tau} p_W(\tau')\,d\tau'$, où : $p_W(\tau') = \frac{1}{\tau_c} e^{-\tau'/\tau_c}$

donc : $\boxed{F_W(\tau) = 1 - e^{-\tau/\tau_c}}$

Q12.

La probabilité qu'aucun saut de phase n'ait lieu durant τ est donnée par le complémentaire de $F_W(\tau) := \mathbb{P}\{W \leq \tau\}$; càd :

$$\mathbb{P}\{W > \tau\} = 1 - F_W(\tau)$$

Soit, en utilisant le résultat de la question précédente

$$\underline{\mathbb{P}\{W > \tau\} = e^{-\tau/\tau_c}}$$

Q13.

$$\text{Mq} : \forall m, \ \langle e^{i(\varphi_{m,\tau} - \varphi_{m,0})} \rangle = e^{-|\tau|/\tau_c}$$

•) Soit aucun saut de phase n'a lieu durant τ

et alors : $\varphi_{m,\tau} = \varphi_{m,0}$ et $\langle e^{i(\varphi_{m,\tau} - \varphi_{m,0})} \rangle = 1$

•) Soit un saut de phase occurre durant τ et alors

$\varphi_{m,\tau} \neq \varphi_{m,0}$ et puisque $\varphi_{m,\tau}$ et $\varphi_{m,0}$ sont

indépendants : $\langle e^{i(\varphi_{m,\tau} - \varphi_{m,0})} \rangle = \langle e^{i\varphi_{m,\tau}} \rangle . \langle e^{-i\varphi_{m,0}} \rangle$

et puisqu'ils sont uniformément distribués sur $[0;2\pi]$,

$$\langle e^{i(\varphi_{m,\tau} - \varphi_{m,0})} \rangle = 0 \cdot 0 = 0.$$

Ainsi : $\langle e^{i(\varphi_{m,\tau} - \varphi_{m,0})} \rangle = \mathbb{P}\{W > \tau\} \cdot 1 + \mathbb{P}\{W \leq \tau\} \cdot 0$

On utilise alors le résultat de la question précédente,

et il vient : $\underline{\langle e^{i(\varphi_{m,\tau} - \varphi_{m,0})} \rangle = e^{-\tau/\tau_c}}$

Seule la notion de durée intervient dans le raisonnement

et dans les calculs on peut donc remplacer τ par $|\tau|$

pour considérer une variable $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\langle e^{i(\varphi_{m,\tau} - \varphi_{m,0})} \rangle = e^{-|\tau|/\tau_c}}$$

Q14. Mq : $\forall m, \langle e^{-2i\pi \delta\nu_m \tau} \rangle = e^{-2\pi^2 \sigma_\nu^2 \tau^2}$

Par définition, $\langle e^{-2i\pi\delta\nu_m \tau}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi x \tau} p_{\delta\nu_m}(x)\, dx$

or $p_{\delta\nu_m}(x) = \frac{1}{\sigma_\nu\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\nu^2}}$ d'après la Q4.

avec (P3) il vient, puisque $\mu = 0$ ($p_{\delta\nu_m}$ est centrée en 0)

$$\boxed{\forall m, \langle e^{-2i\pi\delta\nu_m\tau}\rangle = e^{-2\sigma_\nu^2\pi^2\tau^2}}$$

Q15. Déterminons $\langle a_\ell^*(t) a_m(t+\tau)\rangle$.

- Si $\tau = 0$, alors d'après (P2), $\langle a_\ell^*(t) a_m(t)\rangle = \delta_\ell^m \frac{E_0^2}{N}$

Supposons maintenant $\tau \neq 0$.

- En vertu de (P0) : $\langle a_\ell^*(t) a_m(t+\tau)\rangle = \langle a_\ell^*(0) a_m(\tau)\rangle$

de plus, $\langle a_\ell^*(0) a_m(\tau)\rangle = \frac{E_0^2}{N} \langle e^{i(\varphi_{m,\tau} - \varphi_{m,0})} e^{-2i\pi\delta\nu_m \tau}\rangle$

Avec l'indépendance des $(\varphi_{\ell,t})_\ell$ et des $(\delta\nu_m)_m$ $\forall t$,

il vient :
$$\langle a_\ell^*(0) a_m(\tau)\rangle = \frac{E_0^2}{N} \langle e^{i(\varphi_{m,\tau} - \varphi_{\ell,0})}\rangle . \langle e^{-2i\pi\delta\nu_m \tau}\rangle$$

* Si $m \neq \ell$, alors :
$$\langle e^{i(\varphi_{m,\tau} - \varphi_{\ell,0})}\rangle = \langle e^{i\varphi_{m,\tau}}\rangle . \langle e^{-i\varphi_{\ell,0}}\rangle = 0.0 = 0$$

en vertu de l'indépendance de $\varphi_{m,t}$ et $\varphi_{\ell,t}$ $\forall t$, et de la distribution uniforme de $(\varphi_{m,t})$ $\forall m,t$ sur $[0;2\pi]$. Donc $\langle a_\ell^*(0) a_m(\tau)\rangle = 0$.

* Si $m = \ell$ alors avec les résultats de la Q13 et 14 on obtient :
$$\langle a_m^*(0) a_m(\tau)\rangle = \frac{E_0^2}{N} e^{-|\tau|/\tau_c} e^{-2\sigma_\nu^2 \pi^2 \tau^2}$$

- Ainsi on conclut en combinant les résultats pour les différents cas :

$$\boxed{\begin{array}{l} \langle a_\ell^*(t) a_m(t+\tau)\rangle = \delta_\ell^m \frac{E_0^2}{N} r(\tau) \qquad (P5) \\ \text{où } r(\tau) = e^{-|\tau|/\tau_c} e^{-2\sigma_\nu^2 \pi^2 \tau^2} \end{array}}$$

16.

$$\langle a_\ell(t)\, a_m(t+\tau)\rangle = \langle a_\ell(0)\, a_m(\tau)\rangle$$ en vertu de (P0)

de plus : $\langle a_\ell(0)\, a_m(\tau)\rangle = \dfrac{E_0^2}{N} \left\langle e^{i(\varphi_{\ell,0}+\varphi_{m,\tau})} e^{-2i\pi\delta\nu_m\tau} \right\rangle$

Avec l'indépendance des $(\varphi_{\ell,t})_\ell$ et des $(\delta\nu_m)_m$ $\forall t$,

$$\langle a_\ell(0)\, a_m(\tau)\rangle = \frac{E_0^2}{N} \left\langle e^{i(\varphi_{\ell,0}+\varphi_{m,\tau})}\right\rangle \left\langle e^{-2i\pi\delta\nu_m\tau}\right\rangle$$

et $\left\langle e^{i(\varphi_{\ell,0}+\varphi_{m,\tau})}\right\rangle = \left\langle e^{i\varphi_{\ell,0}}\right\rangle \cdot \left\langle e^{i\varphi_{m,\tau}}\right\rangle$

en vertu de l'indépendance de $\varphi_{\ell,0}$ et $\varphi_{m,\tau}$ $\forall\tau$

et avec $\varphi_{\ell,0} \sim \mathcal{U}[0;2\pi]$ et $\varphi_{m,\tau} \sim \mathcal{U}[0;2\pi]$

il vient : $\langle a_\ell(0)\, a_m(\tau)\rangle = 0$

et donc : $\underline{\langle a_\ell(t)\, a_m(t+\tau)\rangle = 0}$ $\forall \ell, m$

le conjugué $\underline{\langle a_\ell^*(t)\, a_m^*(t+\tau)\rangle = 0}$ également.

4. Calcul de $g^{(1)}(\tau)$

Q17. On a déjà rencontré $g^{(1)}$ dans le cours d'optique ondulatoire, c'est le degré de cohérence temporelle.
Sa transformée de Fourier est une densité de probabilité, appellée densité spectrale des fluctuations ou "spectre".

Q18. $g^{(1)}$ fait intervenir un moment de ε d'ordre 2.

Q 19.

$$\langle A^*(t)\, A(t+\tau)\rangle = \left\langle \sum_{\ell=1}^{N} a_\ell^*(t) \sum_{m=1}^{N} a_m(t+\tau)\right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{\ell,m=1}^{N} a_\ell^*(t) a_m(t+\tau)\right\rangle$$

$$= \sum_{\ell,m=1}^{N} \langle a_\ell^*(t)\, a_m(t+\tau)\rangle$$

or d'après la Q 15, $\langle a_\ell^*(t)\, a_m(t+\tau)\rangle = \delta_\ell^m \frac{E_0^2}{N} r(\tau)$

d'où :

$$\langle A^*(t)\, A(t+\tau)\rangle = \frac{E_0^2}{N} r(\tau) \sum_{\ell,m=1}^{N} \delta_\ell^m$$

$$= \frac{E_0^2}{N} r(\tau) \cdot N$$

$$\langle A^*(t)\, A(t+\tau)\rangle = E_0^2 r(\tau)$$

$\underline{\langle A(t)\, A^*(t+\tau)\rangle} = \langle A^*(t)\, A(t+\tau)\rangle^* = \underline{E_0^2 r(\tau)}$ car $E_0^2 r(\tau) \in \mathbb{R}$

$\langle \underline{|A(t)|^2}\rangle = \langle A(t)\, A^*(t+0)\rangle = E_0^2 r(0) = \underline{E_0^2}$

$$\langle A(t)\rangle = \sum_\ell \langle a_\ell(t)\rangle$$

et $\langle a_\ell(t)\rangle = 0$ d'après (P1)

$\Rightarrow \underline{\langle A(t)\rangle = 0}$

$\underline{\langle A^*(t)\rangle} = \langle A(t)\rangle^* = \underline{0}$

20. Par définition $G^{(1)}(\tau) := \langle \mathcal{E}^*(t)\,\mathcal{E}(t+\tau)\rangle$

or $\mathcal{E}^*(t)\,\mathcal{E}(t+\tau) = \left(E_\beta e^{-i\phi} + A^*(t)\right)\left(E_\beta e^{i\phi} + A(t+\tau)\right) e^{-2i\pi\nu_e\tau}$

soit $\mathcal{E}^*(t)\,\mathcal{E}(t+\tau) = \left(E_\beta^2 + A^*(t)A(t+\tau) + 2E_\beta \,\mathrm{Re}\{A^*(t)e^{i\phi}\}\right) e^{-2i\pi\nu_e\tau}$

d'où : $G^{(1)}(\tau) = E_\beta^2 + \langle A^*(t)A(t+\tau)\rangle + 2E_\beta \langle \mathrm{Re}\{A^*(t)e^{i\phi}\}\rangle) e^{-2i\pi\nu_e\tau}$

$$G^{(1)}(\tau) = \left(E_\beta^2 + \langle A^*(t)A(t+\tau)\rangle + 2E_\beta \mathrm{Re}\{\langle A^*(t)\rangle e^{i\phi}\}\right) e^{-2i\pi\nu_e\tau}$$

Avec les résultats de la question précédente, on obtient :

$$G^{(1)}(\tau) = \left(E_\beta^2 + E_0^2 r(\tau)\right) e^{-2i\pi\nu_e\tau}$$

Si $s := E_0^2/E_\beta^2$ alors $G^{(1)}(\tau) = E_\beta^2\left(1 + s\,r(\tau)\right) e^{-2i\pi\nu_e\tau}$

21.

$$I(t) := \mathcal{E}^*(t)\,\mathcal{E}(t)$$

$$I(t) = \left(E_\beta e^{-i\phi} + A^*(t)\right)\left(E_\beta e^{i\phi} + A(t)\right) = E_\beta^2 + |A(t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left\{A^*(t)\,e^{i\phi}\right\}$$

d'où : $$\langle I(t)\rangle = E_\beta^2 + \underbrace{\langle |A(t)|^2\rangle}_{\substack{= E_0^2 r(0) \\ = E_0^2}} + 2\,\mathrm{Re}\left\{\underbrace{\langle A^*(t)\rangle}_{=0} e^{i\phi}\right\}$$

$$\underline{\langle I(t)\rangle = E_\beta^2(1+S)}$$

22. Avec les questions précédentes on peut déduire l'expression de $g^{(1)}(\tau)$:

$$\boxed{g^{(1)}(\tau) = \frac{G^{(1)}(\tau)}{\langle I(t)\rangle} = \frac{1 + s\,r(\tau)}{1+s}\, e^{-2i\pi\nu_e\tau}}$$

où $s = E_0^2 / E_\beta^2$ et $r(\tau) = e^{-|\tau|/\tau_c} e^{-2\sigma_\nu^2\pi^2\tau^2}$

23.

$$\boxed{|g^{(1)}(\tau)|^2 = \frac{(1+s\,r(\tau))^2}{(1+s)^2}}$$

5. Calcul de $g^{(2)}(\tau)$

24. $I = |\mathcal{E}|^2$ or $\frac{|\mathcal{E}|^2}{2\varepsilon_0} = J.m^{-3}$

$\Rightarrow I \propto J$

$g^{(2)}$ s'interprète comme la corrélation de l'énergie du champ.

$g^{(2)}$ fait intervenir un moment d'ordre 4 de $\mathcal{E}$.

25.

$$A = \lim_{N \to +\infty} \left[\sum_{l=1}^{N} a_l(t) \right]$$

$$\langle A \rangle = \lim_{N \to +\infty} \left[\sum_{l=1}^{N} \langle a_l(t) \rangle \right]$$

or $\langle a_l(t) \rangle = 0$ d'après (P1)

$\Rightarrow$ $\underline{\langle A \rangle = 0}$ (cela ne change pas p/r à la Q 19)

26.

Calculons $\langle A^*(t)A(t+\tau)\rangle$:

$$\langle A^*(t)A(t+\tau)\rangle = \left\langle \lim_{N\to+\infty}\left[\sum_{\ell=1}^{N} a_\ell^*(t)\right] \lim_{N\to+\infty}\left[\sum_{\ell=1}^{N} a_\ell(t+\tau)\right]\right\rangle$$

$$\langle A^*(t)\,A(t+\tau)\rangle = \lim_{N\to+\infty}\left[\sum_{\ell,m}^{N} \langle a_\ell^*(t)\, a_m(t+\tau)\rangle\right]$$

or d'après (PS), $\langle a_\ell^*(t)\, a_m(t+\tau)\rangle = \delta_\ell^m \frac{E_0^2}{N}\, r(\tau)$

donc :

$$\underline{\langle A^*(t)\,A(t+\tau)\rangle} = \lim_{N\to+\infty}\left[E_0^2\, r(\tau)\right] = \underline{E_0^2\, r(\tau)}$$

le résultat ne change pas avec (L)

$\Rightarrow$ $g^{(1)}$ ne change pas avec (L)

27.

$$\langle A(t)A(t+\tau)\rangle = \lim_{N\to+\infty}\left[\sum_{l,m=1}^{N}\langle a_l(t)\,a_m(t+\tau)\rangle\right]$$

or d'après (P6), $\langle a_l(t)\,a_m(t+\tau)\rangle = 0$, $\forall l,m$ $\forall \tau$

donc $\underline{\langle A(t)\,A(t+\tau)\rangle = 0}$

le complexe conjugué : $\langle A(t)\,A(t+\tau)\rangle^* = \langle A^*(t)\,A^*(t+\tau)\rangle$ vaut également 0.

$$\underline{\langle A^*(t)\,A^*(t+\tau)\rangle = 0}$$

28. d'après (P7) ;

$$\langle Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 \rangle = \langle Y_1 Y_2 \rangle \langle Y_3 Y_4 \rangle + \langle Y_1 Y_3 \rangle \langle Y_2 Y_4 \rangle + \langle Y_1 Y_4 \rangle \langle Y_2 Y_3 \rangle$$

Posons : $Y_1 = A^*(t)$; $Y_2 = A(t)$; $Y_3 = A^*(t+\tau)$; $Y_4 = A(t+\tau)$

D'après la Q27, $\langle Y_1 Y_3 \rangle = \langle Y_2 Y_4 \rangle = 0$

de plus : $Y_1 Y_2 = |A(t)|^2 \Rightarrow \langle Y_1 Y_2 \rangle = E_0^2 r(0) = E_0^2$

avec Q26

$Y_3 Y_4 = |A(t+\tau)|^2 \Rightarrow \langle Y_3 Y_4 \rangle = E_0^2 r(0) = E_0^2$

$Y_1 Y_4 = A^*(t) A(t+\tau) \Rightarrow \langle Y_1 Y_4 \rangle = E_0^2 r(\tau)$

$Y_2 Y_3 = (Y_1 Y_4)^* \Rightarrow \langle Y_2 Y_3 \rangle = \langle Y_1 Y_4 \rangle^* = E_0^2 r(\tau)$

d'où : $\underline{\langle A^*(t) A(t) A^*(t+\tau) A(t+\tau) \rangle = E_0^4 (1 + r^2(\tau))}$

29.

$$I(t) = E_\beta^2 + |A(t)|^2 + 2E_\beta \,\mathrm{Re}\{A(t)e^{-i\phi}\}$$

$$\Rightarrow I(t)I(t+\tau) = E_\beta^4 + E_\beta^2|A(t+\tau)|^2 + \underbrace{\cancel{2E_\beta^3 \,\mathrm{Re}\{A(t+\tau)e^{-i\phi}\}}}_{\langle\rangle 1}$$
$$+ E_\beta^2|A(t)|^2 + A^*(t)A(t)A^*(t+\tau)A(t+\tau) + \underbrace{\cancel{2E_\beta|A(t)|^2\mathrm{Re}\{A(t+\tau)e^{-i\phi}\}}}_{\langle\rangle 3}$$
$$+ 4E_\beta^2\mathrm{Re}\{A(t)e^{-i\phi}\}\mathrm{Re}\{A(t+\tau)e^{-i\phi}\} + \underbrace{\cancel{2E_\beta|A(t+\tau)|^2\mathrm{Re}\{A(t)e^{-i\phi}\}}}_{\langle\rangle 3} + \underbrace{\cancel{2E_\beta^3\mathrm{Re}\{A(t)e^{-i\phi}\}}}_{\langle\rangle 1}.$$

Avec $\langle\ldots\rangle$ on ne garde que les moments joints d'ordre pair de A puisque c'est une V.A. normale centrée (complexe) à chaque instant. $\to$ $\cancel{}^{2q+1,\ q\in\mathbb{N}}$

$$G^{(2)}(\tau) = E_\beta^4 + E_\beta^2\left(\langle|A(t+\tau)|^2\rangle + \langle|A(t)|^2\rangle\right) + \langle A^*(t)A(t)A^*(t+\tau)A(t+\tau)\rangle$$
$$+ E_\beta^2 \underbrace{\left\langle\left(A(t)e^{-i\phi} + A^*(t)e^{i\phi}\right)\left(A(t+\tau)e^{-i\phi} + A^*(t+\tau)e^{i\phi}\right)\right\rangle}_{T_3}$$

$$T_3 = \langle A(t)A(t+\tau)\rangle e^{-i\phi} + \langle A^*(t)A^*(t+\tau)\rangle e^{i\phi} + \langle A(t)A^*(t+\tau)\rangle + \langle A^*(t)A(t+\tau)\rangle$$

or d'après la Q27, $\langle A(t)A(t+\tau)\rangle = \langle A^*(t)A^*(t+\tau)\rangle = 0$

et d'après la Q26 : $\langle A^*(t)A(t+\tau)\rangle = E_0^2\, r(\tau) = \langle A(t)A^*(t+\tau)\rangle$

d'où : $T_3 = 2E_0^2\, r(\tau)$

De plus avec la Q28,

$$\langle A^*(t)A(t)A^*(t+\tau)A(t+\tau)\rangle = E_0^4\left(1 + r^2(\tau)\right)$$

et la Q26 $\Rightarrow \langle|A(t+\tau)|^2\rangle = E_0^2 r(0) = \langle|A(t)|^2\rangle$

d'où :

$$\boxed{G^{(2)}(\tau) = E_\beta^4 + 2E_\beta^2E_0^2\left(1 + r(\tau)\right) + E_0^4\left(1 + r^2(\tau)\right)}$$

30. Déterminons enfin $g^{(2)}(\tau)$:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{G^{(2)}(\tau)}{\langle I(t)\rangle^2}$$

$$\langle I(t)\rangle^2 = E_\beta^4 (1+s)^2$$

et $G^{(2)}(\tau) = E_\beta^4\left(1 + 2s(1+r(\tau)) + s^2(1+r^2(\tau))\right)$

$$\Rightarrow \quad g^{(2)}(\tau) = \frac{1+2s(1+r(\tau)) + s^2(1+r^2(\tau))}{(1+s)^2}$$

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{1+2s+s^2+2sr(\tau)+s^2r^2(\tau)}{(1+s)^2}$$

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \frac{(1+sr(\tau))^2 - 1}{(1+s)^2}$$

or $|g^{(1)}(\tau)|^2 = \dfrac{(1+sr(\tau))^2}{(1+s)^2}$, d'après Q23.

$$\boxed{g^{(2)}(\tau) = 1 + |g^{(1)}(\tau)|^2 - \frac{1}{(1+s)^2}}$$

C'est ce que l'on peut appeler la relation de Siegert généralisée.
quand $s \to +\infty$ (ie $E_\beta \to 0$) $g^{(2)} = 1 + |g^{(1)}|^2$.

6. Calcul de $g^{(3/2)}(\tau)$

Q31. Le dénominateur doit être non nul autrement dit : $|\langle A_\varepsilon \rangle| \neq 0$!

Q32. Déterminons $|\langle A_\varepsilon \rangle|$.

$$A_\varepsilon = E_\beta e^{i\phi} + A$$, dans notre étude.

$$\langle A_\varepsilon \rangle = E_\beta e^{i\phi} + \langle A \rangle$$

or d'après Q25 $\langle A \rangle = 0$

donc $\underline{|\langle A_\varepsilon \rangle| = E_\beta}$

33. $Z(t) = I(t)\,\mathcal{E}^*(t+\tau)\,\mathcal{E}_L(t+\tau)$

$$I(t) = E_\beta^2 + |A(t)|^2 + 2E_\beta \,\mathrm{Re}\{A(t)e^{-i\phi}\}.$$

$$\mathcal{E}^*(t+\tau)\mathcal{E}_L(t+\tau) = \left(E_\beta e^{-i\phi} + A^*(t+\tau)\right)E_L e^{i\theta}$$
$$= E_L E_\beta e^{i(\theta-\phi)} + E_L e^{i\theta}A^*(t+\tau)$$

d'où :
$$Z(t) = E_\beta^3 E_L e^{i(\theta-\phi)} + \cancel{E_\beta^2 E_L e^{i\theta} A^*(t+\tau)}^{\langle\rangle 1}$$
$$+ |A(t)|^2 E_L E_\beta e^{i(\theta-\phi)} + \cancel{|A(t)|^2 A^*(t+\tau) E_L e^{i\theta}}^{\langle\rangle 3}$$
$$+ \cancel{2E_\beta^2 E_L \mathrm{Re}\{A(t)e^{-i\phi}\}}_{\langle\rangle 1} + 2E_\beta E_L e^{i\theta}\mathrm{Re}\{A(t)e^{-i\phi}\}A^*(t+\tau)$$

$\langle\ldots\rangle \rightarrow$ on ne garde que les moments joints de A d'ordre pair car A est à tout instant une V.A. normale centrée. $\rightarrow$ $\cancel{\langle\rangle}$

$$\langle E_\beta^3 E_L e^{i(\theta-\phi)}\rangle = E_\beta^3 E_L e^{i(\theta-\phi)}$$
$$\langle |A(t)|^2 E_L E_\beta e^{i(\theta-\phi)}\rangle = E_0^2 r(0)\, E_L E_\beta e^{i(\theta-\phi)} = E_L E_\beta E_0^2 e^{i(\theta-\phi)}$$

$$\langle 2E_\beta E_L e^{i\theta}\mathrm{Re}\{A(t)e^{-i\phi}\}A^*(t+\tau)\rangle = E_\beta E_L e^{i\theta}\Big[\underbrace{\langle A(t)A^*(t+\tau)\rangle}_{\substack{= E_0^2 r(\tau) \\ \text{cf Q26}}} e^{-i\phi} + \underbrace{\langle A^*(t)A^*(t+\tau)\rangle}_{\substack{=0 \\ \text{cf Q27}}} e^{i\phi}\Big]$$
$$= E_L E_\beta E_0^2\, r(\tau)\, e^{i(\theta-\phi)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle Z\rangle = \left[E_\beta^3 E_L + E_\beta E_L E_0^2\left(1 + r(\tau)\right)\right]e^{i(\theta-\phi)}}$$

34.

$$G^{(3/2)}(\tau) = \langle Z \rangle + \langle Z \rangle^*$$

$$G^{(3/2)}(\tau) = 2\cos(\theta-\phi)\left[E_\beta^3 E_L + E_\beta E_L E_0^2(1+r(\tau))\right]$$

Soit avec $s = E_0^2/E_\beta^2$

$$\boxed{G^{(3/2)}(\tau) = 2E_\beta^3 E_L \cos(\theta-\phi)\left[1+s(1+r(\tau))\right]}$$

35. Déterminons enfin $g^{(3/2)}(\tau)$:

le dénominateur vaut :

$$2\langle I\rangle |\langle A_\varepsilon\rangle| E_L = 2(E_\sigma^2 + E_\beta^2)\, E_\beta E_L$$
$$= 2 E_\beta^3 E_L (1+s)$$

d'où $g^{(3/2)}(\tau) = \dfrac{G^{(3/2)}(\tau)}{2\langle I\rangle |\langle A_\varepsilon\rangle| E_L} = \cos(\theta-\phi)\left[\dfrac{1+s+s\,r(\tau)}{1+s}\right]$

$$g^{(3/2)}(\tau) = \cos(\theta-\phi)\left(1+\frac{s}{1+s}\,r(\tau)\right)$$

or d'après Q22, $|g^{(1)}(\tau)| = \dfrac{1+s\,r(\tau)}{1+s}$

$$\Rightarrow \frac{s\,r(\tau)}{1+s} = |g^{(1)}(\tau)| - \frac{1}{1+s}$$

d'où : $\boxed{g^{(3/2)}(\tau) = \cos(\theta-\phi)\left[\dfrac{s}{1+s} + |g^{(1)}(\tau)|\right]}$

36. Il ne faut pas que $\mathcal{E}_L$ et $\mathcal{E}$ soient en quadrature de phase, car alors :

$$\theta - \phi \equiv \frac{\pi}{2} \, [\pi]$$

et $\cos(\theta - \phi) = 0$

et alors $\boxed{g^{(3/2)}(\tau) = 0 \,, \; \forall \tau}$

7. Discussions

37 . Les $g^{(n/2)}(\tau)$, $n = 2, 3, 4$ captent les constantes se trouvant dans $r(\tau)$

$$r(\tau) = e^{-|\tau|/\tau_c} e^{-2\pi^2\sigma_\nu^2\tau^2}$$

càd : τ_c et σ_ν

or $\sigma_\nu = \frac{\nu_e}{c}\sigma_v$, $\sigma_v = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$

$\Rightarrow$ les $g^{(n/2)}$, $n=2,3,4$, captent τ_c et σ_v

38. Si m, m_0 et ρ, ρ_0 sont connus alors
la capture de τ_c et σ_v forme un système
de 2 équations à deux inconnues : n_0^* et T
→ densité particulaire et température de Z_1.
de Z_1

39.

On pose $\tau_\nu = \dfrac{1}{2\pi\sigma_\nu}$ la constante de temps associée à l'élargissement spectral σ_ν par effet Doppler.

l'expression de $r(\tau)$ devient:

$$r(\tau) = e^{-|\tau|/\tau_c}\, e^{-\tau^2/2\tau_\nu^2}$$

$$\Rightarrow r^2(\tau) = e^{-|\tau|/\tau_c'}\, e^{-\tau^2/2\tau_\nu'^2}$$

où $\begin{cases} \tau_c' = \tau_c/2 \\ \tau_c' < \tau_c \end{cases}$ et $\begin{cases} \tau_\nu' = \tau_\nu/\sqrt{2} \\ \tau_\nu' < \tau_\nu \end{cases}$

$\Rightarrow$ les constantes de temps τ_c et τ_ν qui apparaissent dans $g^{(2)}(\tau)$ sont artificiellement réduites respectivement d'un facteur 2 et $\sqrt{2}$ du fait de la dépendance en $|g^{(1)}(\tau)|^2$ de $g^{(2)}(\tau)$.

Pour peu que la résolution temporelle de la mesure soit $\tau_c/2$, la mesure de $g^{(2)}(\tau)$ s'avérerait vaine tandis que celle de $g^{(3/2)}(\tau)$ qui dépend de $|g^{(1)}(\tau)|$ (donc de $r(\tau)$ et non de $r^2(\tau)$) permettrait de conclure.

$\longrightarrow$ Il vaut mieux mesurer $g^{(3/2)}$ que $g^{(2)}$ pour accéder à des petits τ_c et τ_ν compte tenu de la limite de résolution.

40.

- $g^{(2)}(\tau) = 1 + |g^{(1)}(\tau)|^2 - \frac{1}{(1+s)^2}$

et $|g^{(1)}(\tau)|^2 = \frac{(1+s\,r(\tau))^2}{(1+s)^2} \xrightarrow[\tau\to+\infty]{} \frac{1}{(1+s)^2}$

$\rightarrow \boxed{\lim_{\tau\to+\infty}\left[g^{(2)}(\tau)\right] = 1}$

À délai infiniment grand devant les temps de corrélations caractéristiques, $I(t)$ et $I(t+\tau)$ sont décorrélées : $\langle I(t)\,I(t+\tau)\rangle = \langle I(t)\rangle\langle I(t+\tau)\rangle$

et avec l'hypothèse de stationarité,

$$\langle I(t)\rangle = \langle I(t+\tau)\rangle,$$

et ainsi, $g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)\rangle^2}{\langle I(t)\rangle^2} = 1$

- si $\theta = \phi \Rightarrow g^{(3/2)}(\tau) = \frac{s}{1+s} + |g^{(1)}(\tau)|$

$\Rightarrow g^{(3/2)}(\tau) \xrightarrow{\tau\to+\infty} \frac{s}{1+s} + \frac{1}{1+s} = 1$

$\rightarrow \boxed{\lim_{\tau\to+\infty}\left[g^{(3/2)}(\tau)\right] = 1}$

idem à τ très grd devant les temps de corrélat° caractéristiques :

$$\langle I(t)\,\mathcal{E}^*(t+\tau)\,\mathcal{E}_L(t+\tau)\rangle = \langle I(t)\rangle\langle\mathcal{E}^*(t+\tau)\rangle\langle\mathcal{E}_L(t+\tau)\rangle$$

or $\langle\mathcal{E}^*\rangle\cdot\langle\mathcal{E}_L\rangle = E_\beta E_L e^{i(\theta-\phi)} \overset{\theta=\phi \text{ ici}}{=} E_\beta E_L$

$\Rightarrow G^{(3/2)} = 2\langle I\rangle E_\beta E_L$

$\Rightarrow g^{(3/2)} = 1$

41.

Comparons les valeurs de $g^{(2)}$ et $g^{(3/2)}$ en $\tau = 0$

On considère toujours $\theta = \phi$ pour $g^{(3/2)}$.

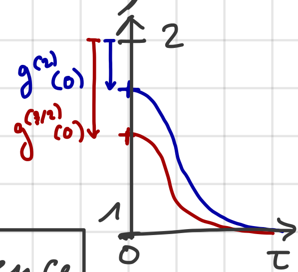
$$|g^{(1)}(0)| = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g^{(2)}(0) = 2 - \dfrac{1}{(1+s)^2} \\ g^{(3/2)}(0) = 1 + \dfrac{s}{1+s} = \dfrac{1+2s}{1+s} = \dfrac{2+2s-1}{1+s} = 2 - \dfrac{1}{1+s} \end{cases}$$

La présence de $E_\beta \neq 0$ donne une valeur finie à $s = E_0^2/E_\beta^2$ ce qui abaisse la valeur de 2 de $g^{(3/2)}(0)$ et $g^{(2)}(0)$. Cette baisse est $(1+s)$ fois plus significative sur $g^{(3/2)}(0)$ que sur $g^{(2)}(0)$.

Prenons un exemple : si $E_0^2 = E_\beta^2$, la composante "laser" a la m̂ intensité que la composante résultant de l'ensemble des oscillateurs browniens,

i.e. : $s = 1$, et alors $\begin{cases} g^{(2)}(0) = 2 - \dfrac{1}{4} = 1{,}75 \\ g^{(3/2)}(0) = 2 - \dfrac{1}{2} = 1{,}5 \end{cases}$



$\Rightarrow$ $\boxed{g^{(3/2)} \text{ est plus sensible que } g^{(2)} \text{ à la présence de } E_\beta \neq 0 \text{ que } g^{(2)}}$

$\Rightarrow$ il vaut mieux mesurer $g^{(3/2)}$ plutôt que $g^{(2)}$ pour dévoiler la radiation laser provenant de la zone Z_2 du Weigelt Blob B.