



**MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS**

*Liberté
Égalité
Fraternité*

Concours externe spécial de l'agrégation de physique-chimie option physique, session 2025.

**Mise en perspective didactique d'un dossier de recherche.
Dossier scientifique.**

Cursus et parcours dans la recherche

Présentation des travaux de thèse

Mobilisation des acquis pour l'exercice du professorat

Le 02/05/2025, Antonin Siciak, candidat admissible n°02445909719-001.

1. Coursus académique

Mon cursus jusqu'au grade du Master2-recherche est résumé dans le tableau 1 ci-dessous, la suite de mon parcours dans la recherche est résumée dans le tableau 2 suivant.

J'ai soutenu ma thèse de doctorat intitulée : "Autour de $g(2)$ en astrophysique" (<https://theses.hal.science/tel-03406783v1>), le 5 juillet 2021, au site Sophia Antipolis de l'Institut de Physique de Nice (UMR 7010 CNRS-UCA), ex-Institut Non Linéaire de Nice.

Baccalauréat	CPGE	SupOptique-Double Diplôme en Physique Fondamentale d'Orsay (D2PFO)		
2012	2013-2014	2014-2015	2015-2016	2016-2017
Lycée Louis-le-Grand (75005). Spé Maths, option Latin.	Lycée Chaptal (75008) MPSI-PSI*	L3 (Physique fondamentale, Orsay) et 1A (élève ingénieur, IOGS). <u>Stage de recherche (3mois)</u> à l'Institut Non linéaire de Nice, UMR 7335 UNS-CNRS (06560, Valbonne). → <i>Etude de vols de Lévy de photons.</i>	M1 (Physique fondamentale, Orsay) et 2A (élève ingénieur, IOGS). <u>Stage de recherche (4 mois et 1/2)</u> dans le département EAPS du MIT (Cambridge, MA 02139, USA). → <i>Modélisation (2D et 3D) et simulations de quelques sections du courant circumpolaire antarctique.</i>	M2-recherche (Physique des plasmas et de la fusion, Université Paris-Saclay, CEA Cadarache) et 3A (élève ingénieur, IOGS). <u>Stage de recherche (7 mois)</u> au Laboratoire d'Optique Appliquée UMR 7639 ENSTA-X-CNRS (91762, Palaiseau). → <i>Modélisation et développement d'un accélérateur plasma hybride.</i>

Tableau 1 : cursus académique pré-doctorat

Doctorat	Centre de Préparation à l'agrégation	Ingénieur R&D
2018-2021	2021-2022	2022-2024
Lauréat du programme doctoral d'excellence 'action index UCA-JEDI 2017' (ministère). Thèse de doctorat encadrée par Robin Kaiser et Jean-Pierre Rivet. Titre de la thèse : « Autour de $g(2)$ en astrophysique », commencée le 1er février 2018 et soutenue le 5 juillet 2021 au site Sophia Antipolis (ex- INLN) de l'Institut de Physique de Nice (UMR 7010 CNRS-UCA).	Préparation de l'agrégation externe spécial de Physique-Chimie option Physique, session 2022, au centre de l'Université Rennes1, dirigé par Philippe Nouet. Non admissible.	Ingénieur-chercheur à Saint-Gobain Recherche (93300, Aubervilliers). Département <i>Couches Minces</i> , groupe <i>Couches Sous Vide</i> . Encadrement de deux stages (M2). Formation de techniciens de recherche.
Bénévole pour les fêtes de la Science de Mouans-Sartoux (06084), éditions 2018 et 2019. Intervenant en Mathématiques au collège du Rouret (06650) (2017/2018 et 2018/2019).		

Tableau 2 : parcours dans la recherche

2. Présentation des travaux de thèse

Contexte général

En 1960 une découverte des plus surprenantes a lieu en astronomie : il existe des molécules interstellaires (« nuages » interstellaires) ainsi que des raies d'émission micro-ondes, ultra intenses et fines spectralement, dans les parties denses de ces nuages interstellaires ; citons par exemple la raie intense de l'eau à 1,35 cm en plusieurs points du nuage d'Orion. Rappelons aussi que ces raies micro-ondes ultra intenses sont facilement observables, car l'atmosphère terrestre est transparente aux micro-ondes.

L'intensité de ces raies micro-ondes, si elles étaient émises par des systèmes de type corps noirs (H0) [=radiation chaotique classique], correspondrait à une température de celui-ci de l'ordre de $10^{12} - 10^{15}$ K tandis que leur largeur Doppler correspondrait, avec l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique de Boltzmann-Gibbs (H1) [=milieu interstellaire à l'équilibre canonique], à une température cinétique inférieure à 100K. Dès lors, l'hypothèse d'effet maser apparaît légitime pour lever la contradiction due au couplage entre les deux hypothèses (H0) et (H1), d'autant plus que les scénarios de pompage sont nombreux pour les micro-ondes : le pompage peut être opéré par le rayonnement continu infrarouge ou ultraviolet des étoiles voisines, par les collisions avec des particules énergétiques, ou encore par la compression ou les mouvements violents liés à la formation des étoiles.

Ainsi, dès le début des années 1990, une collection de « masers » interstellaires est répertoriée et l'appellation « maser » pour ces systèmes est communément admise. Citons par exemple J. Lequeux « Les masers interstellaires », le grand atlas Universalis de l'astronomie, Encyclopaedia Universalis France (Paris, 1993).

L'atmosphère est opaque à la quasi-totalité de l'infrarouge, et la spéculation sur l'existence de lasers naturels (rappelons que le laser aurait pu s'appeler le « maser optique ») née logiquement chez les astronomes, au moins dans l'infrarouge. Un important effort est alors mené pour tenter de découvrir de tels systèmes astrophysiques.

A la fin des années 1990, des raies infrarouges de CO₂ amplifiées (à 10,4 et 9,4 μ m) dans les atmosphères de Vénus et de Mars sont découvertes. Puis, à l'aide d'un spectromètre porté à haute altitude à bord de l'observatoire aéroporté Kuiper, une raie à 169 μ m six fois plus intense qu'elle ne le serait par émission spontanée à la même longueur d'onde, est détectée dans le disque d'hydrogène et de poussières entourant l'étoile MWC 349 (de la constellation du Cygne). Un scénario plausible est le suivant : le milieu amplificateur est l'hydrogène, qui est pompé optiquement par le rayonnement ultraviolet de l'étoile centrale, mais il n'y aurait pas d'oscillateur optique ; on observe simplement l'amplification, par émission stimulée, de rayonnement émis de façon spontanée.

Enfin, au début des années 2000, une autre raie ultra intense (plusieurs dizaines de fois le continuum) et ultra-fine (de l'ordre de la ps) est détectée dans l'infrarouge à 999,7nm dans l'un des nuages issu de l'explosion de l'étoile η Carinae. L'amplification de lumière serait due aux ions Fe II présents dans ce nuage, et cette fois, en théorie, les mécanismes de physique atomiques dans les plasmas spatiaux (plasma coronal) dans le milieu interstellaire donne la possibilité d'un effet laser (donc avec oscillateur optique et rétroaction) au sens d'un laser aléatoire (la diffusion multiple joue le rôle de cavité) !

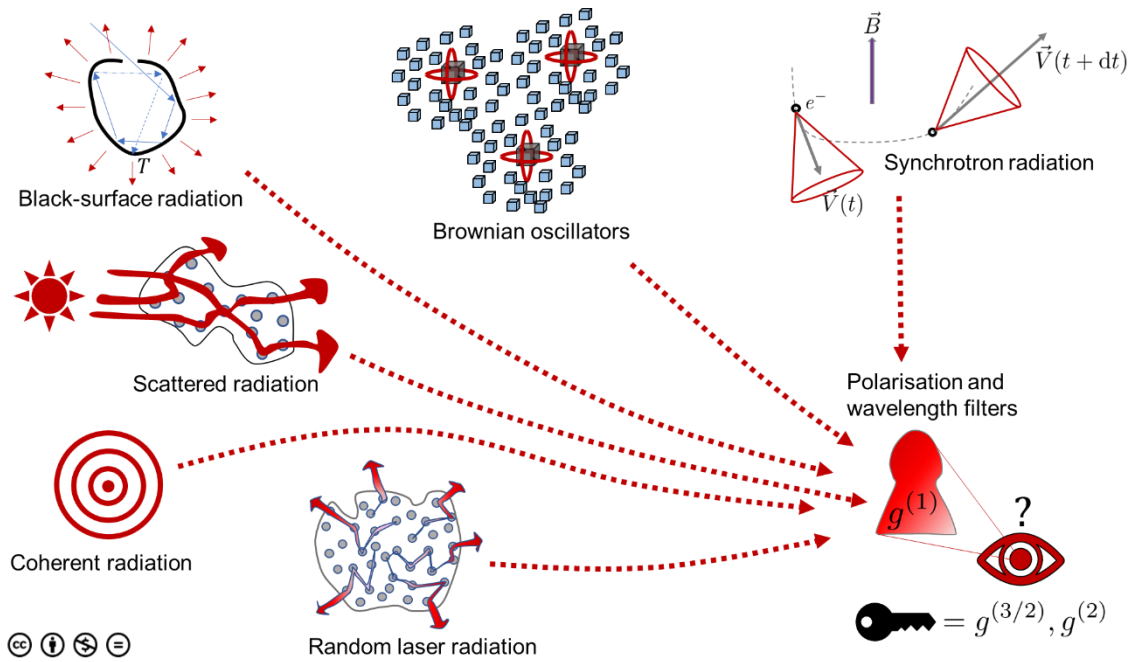


Figure 1 : Schématisation de la problématique concernant la quantité physique à mesurer pour démontrer la nature laser/maser des raies ultra intenses détectées depuis les années 1960 dans certains milieux interstellaires.

Pour l'instant seuls des spectres (dual de la fonction de corrélation du champ électrique d'ordre 1) ont été mesurés dans le domaine visible ou dans le domaine micro-ondes. L'électrodynamique quantique (dû aux travaux théorique de Glauber au début des années 1960, et aux expériences de Hanbury Brown et Twiss dans les années 1950) démontre que seul des ordres supérieurs à l'ordre 1 dans la corrélation du champ permettront de trancher sur la nature laser (et donc quantique) de ces raies ultra intenses. On dit qu'il faut accéder à *la statistique des photons* de la radiation. La figure 1 schématise l'impuissance de la seule mesure du spectre pour conclure. La table 3 donne les résultats d'électrodynamique quantique concernant la caractérisation de la radiation via les premières corrélations du champ électrique.

	$g^{(1)}(\tau)$	$g^{(3/2)}(\tau)$	$g^{(2)}(\tau)$
Moment joint du champ d'ordre n	n=2	n=3	n=4
Appellation	Corrélation champ-champ (dual = spectre)	Corrélation intensité-champ (dual = spectre de compression [les 2 quadratures du champ n'ont pas les mêmes fluctuations])	Corrélation intensité-intensité
Différencie une radiation chaotique (corps noir, classique) d'une radiation cohérente (laser, quantique) ?	non	oui	oui
Différencie une radiation chaotique (classique) d'une radiation chaotique comprimée (quantique) ?	non	oui	non

Table 3 : Résumé des caractéristiques des fonctions de corrélation du champ.

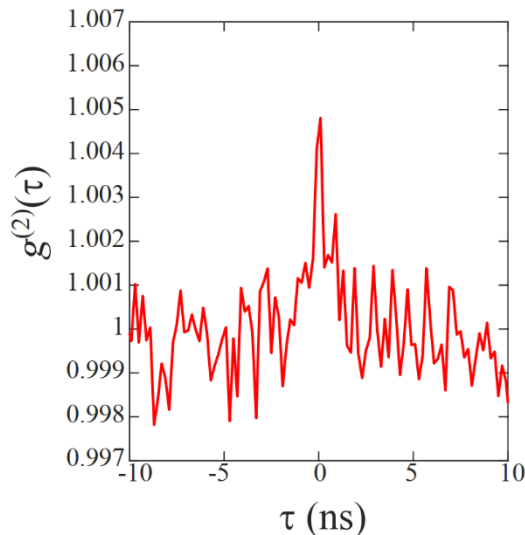


Figure 3 : résultat original de la mesure sur la raie H α de P-cygni. On en déduit la nature chaotique de la raie et son temps de cohérence.

des compteurs de photons) avaient été sélectionnés et leur pertinence pour des applications sur le ciel démontrée. Il restait à :

- caractériser le corrélogramme (meilleure figure de mérite et incertitude à déterminer),
- démontrer son opérabilité sur une raie « test » ultra-intense ultra-fine qui était observable dans l'hémisphère nord et dont la nature (classique en l'occurrence) ne faisait pas de doute,
- démontrer la pertinence de la mesure sur un laser aléatoire (en labo).

J'ai apporté des éléments de réponse sur ces trois points expérimentaux. Les deux premiers nous ont permis de caractériser la nature chaotique de la raie H α de l'étoile P-cygni (et de proposer une mesure de son temps de

cohérence). La mesure de $g^{(2)}(\tau)$ obtenue est présentée figure 3. Le troisième point aura permis de mieux comprendre le laser aléatoire en question.

J'ai ensuite fait un travail de modélisateur (analytique et numérique) pour tenter de répondre aux questions : Existe-t-il une quantité plus pertinente que $g^{(2)}$ pour identifier une nature non classique (non nécessairement laser) ? Mesurable en pratique ? Et peut-elle servir à tester l'hypothèse d'équilibre canonique (H1) introduite dans le contexte général précédent ? Sur une idée de mon directeur de thèse, Robin Kaiser, je me suis orienté vers $g^{(3/2)}$ qui est une fonctionnelle de l'électrodynamique quantique. Grâce à l'aide des Professeurs Luis Orozco et Howard Carmichael j'ai pu transposer la définition quantique $g^{(3/2)}$ vers un formalisme classique adapté à notre contexte expérimental. Ensuite, il me fallait comparer ces fonctions entre elles, à la fois pour tester (H0) et (H1) mais aussi en terme de rapport signal sur bruit. J'ai pour cela construit un modèle du nuage interstellaire d' η Carinae. Je l'ai basé sur un modèle simple de la théorie cinétique que j'ai analysé d'une manière originale, adaptée à notre contexte, qui permet de plus de considérer des situations de transport anormal pertinentes en astrophysique. Les calculs analytiques et la simulation Monte-Carlo se rejoignent et les conclusions que j'ai obtenues sont les suivantes : 1- $g^{(3/2)}$ est plus sensible à une action laser que $g^{(2)}$ (et ce d'autant plus que la raie suspecte est intense), 2- $g^{(3/2)}$ possède un meilleur rapport signal sur bruit statistique que $g^{(2)}$ (un gain d'au moins 7 sur le temps d'observation), 3- $g^{(3/2)}$ révèle plus sensiblement un écart du processus de transport des molécules émettrices au mouvement brownien, 4- La mesure de $g^{(3/2)}$ est plus difficile techniquement et plus onéreuse dans un contexte astronomique. Ces résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous.

	$g^{(1)}(\tau)$	$g^{(3/2)}(\tau)$	$g^{(2)}(\tau)$
Moment joint du champ d'ordre n	n=2	n=3	n=4
Sensibilité à l'action laser	nulle	+++	++
Potentiel pour capturer l'écart au transport normal des émetteurs ?	++	+++	+
Faisabilité expérimentale	oui	bases posées, meilleur RSB mais \$\$\$...	oui (démontrée sur la raie H α de Pcygni)

3. Mobilisation des acquis pour l'exercice du professorat

Je propose une activité didactique inspirée d'une partie de mes travaux de thèse, sous la forme d'un Devoir Maison, qui pourrait constituer un problème en filière MP. Ce sujet mobilise plusieurs concepts de la théorie des probabilités qui prend une place importante dans les programmes de mathématiques de CPGE depuis 2014. C'est un exemple d'application de la théorie des probabilités dans la modélisation des phénomènes physiques. Etant donné la limite de douze pages, je pourrai présenter des éléments de correction de mon sujet lors de l'entretien. J'espère aussi que ce sujet pourra éclairer quelques-uns de mes propos de la partie précédente.

DM : Laser astrophysique ? (Durée estimée 6heures)

Le milieu interstellaire *Weigelt Blob B* dans le voisinage du système stellaire η Carinae peut en toute première approximation être modélisé en deux zones distinctes. Une première zone Z_1 , comporte des ions Fe II maintenus dans un état excité d'intérêt noté E_e . Ces ions sont en mouvement brownien non-relativiste dans un gaz d'hydrogène atomique H I. Dans Z_1 les ions Fe II dans E_e sont minoritaires devant les atomes d'hydrogène.

Une deuxième zone Z_2 est supposée comporter des ions Fe II également maintenus dans E_e . Cependant, ils sont cette fois en grande majorité devant les atomes H I. Il est de plus supposé que dans Z_2 , et dans Z_2 seulement, la radiation émise par les ions Fe II est de nature cohérente (laser idéal). Par abus de langage on la qualifiera de « laser ».

Que ce soit dans Z_1 ou dans Z_2 les ions Fe II se dés excitent depuis E_e vers un même état E_1 , engendrant un photon $h\nu_e$ correspondant à une fréquence ν_e . Le mécanisme réexcitant continuellement les ions Fe II dans E_e n'est pas discuté ici. Le référentiel barycentrique de l'ensemble des particules de Z_2 est noté R_{wb} . Il est supposé galiléen pour notre étude et est considéré comme le référentiel attaché au milieu interstellaire.

Un observateur \mathcal{O} , supposé inertiel pour notre étude, de référentiel R_o , souhaite dévoiler l'existence de l'émission laser ayant lieu dans Z_2 . Les zones Z_1 et Z_2 sont non résolues par \mathcal{O} qui est situé à une trop grande distance du milieu interstellaire. Les rayonnements issus de Z_1 et Z_2 sont non discernables géométriquement et se superposent à l'endroit où se trouve \mathcal{O} . Cet observateur est supposé pouvoir accéder à une polarisation d'une composante vectorielle d'un mode du champ électrique correspondant à la transition $E_e \rightarrow E_1$. Cette quantité est supposée modélisable par une représentation complexe similaire à celle du modèle scalaire de la lumière. Par abus de langage on l'appellera « champ ».

Le champ résultant de Z_2 est noté dans R_o : $\mathcal{E}_2(t) = E_\beta e^{i\phi} e^{-2i\pi\nu_e t}$, où $E_\beta \in \mathbb{R}_+$ et $\phi \in \mathbb{R}$.

L'écriture du champ résultant de Z_1 constitue la première partie du sujet.

1. Champ résultant de Z_1

Du fait de leur faible nombre N devant les atomes H I, les ions Fe II dans Z_1 sont supposés indépendants entre eux. Le gaz d'hydrogène H I est supposé à l'équilibre thermodynamique à une température T . Les ions Fe II, de masse m , sont supposés dans l'état stable (i.e. la thermalisation est atteinte) d'un mouvement brownien relatif à R_{wb} . On rappelle qu'un mouvement brownien peut être vu comme un mouvement erratique d'une particule du fait des collisions avec un autre type de particules. Ce mouvement brownien est caractérisé, dans le

référentiel R_{wb} , par une durée d'attente moyenne entre deux collisions, et une distribution des vitesses pour une durée d'attente donnée.

Dans le référentiel R_{wb} , le champ émis par un ion Fe II entre deux collisions est supposé décrit par un oscillateur harmonique :

$$\mathcal{E}_{oh}(t') = \frac{E_0}{\sqrt{N}} e^{-2i\pi\nu_e t'},$$

où $E_0 \in \mathbb{R}_+$ et $N \in \mathbb{N}$, ce pré-facteur arbitraire en $1/\sqrt{N}$ trouvera sa justification plus tard.

L'effet des collisions dans R_{wb} est supposé induire un saut de phase $\varphi_{t'}$, apparaissant à la date t' de la collision. (Une collision est donc supposée localisable par une date donnée dans R_{wb}). Le saut de phase $\varphi_{t'}$ reste constant jusqu'à la prochaine collision. C'est supposé être une variable aléatoire uniforme entre $[0, 2\pi]$, indépendante de toute autre variable aléatoire y compris d'un saut de phase occurrent à une autre date. On suppose que les collisions induisent un saut de phase φ_t avec les mêmes propriétés dans R_o . Par abus de notation, on utilisera dorénavant « V.A. » pour variable aléatoire.

Dans R_o le champ apparait avec une pulsation modifiée à cause de l'effet Doppler-Fizeau, considéré ici non-relativiste.

1. Si \vec{n} est le vecteur unitaire de l'axe reliant \mathcal{O} à l'ion Fe II et c la vitesse de la lumière pour \mathcal{O} , rappeler le lien entre ν_e et la fréquence perçue par ν par \mathcal{O} .

Dans R_{wb} les ions Fe II sont non-relativistes, indépendants entre eux, leur mouvement de translation peut être décrit classiquement, et on suppose de plus qu'ils ne subissent pas d'interactions dépendant de leur vitesse. Dans ce cas on peut montrer, en physique statistique, qu'une fois l'équilibre atteint leur distribution des vitesses est la même que celle rencontrée dans le cadre de la théorie cinétique du gaz parfait.

2. Rappeler les propriétés portant sur la distribution des vitesses des ions Fe II de masse m . On notera $p_{\vec{v}}(\vec{v})$ la densité de probabilité d'un vecteur vitesse \vec{v} d'un ion donné. On explicitera $p_{\vec{v}}(\vec{v})$ en fonction de $\sigma_{\vec{v}} := \sqrt{k_B T/m}$, où k_B est la constante de Boltzmann.
3. En admettant que l'on puisse traiter le changement de représentation $\nu \leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}$ comme un changement de variable classique, obtenir :

$$p_\nu(\nu) = p_{\vec{n} \cdot \vec{v}}\left(c \frac{\nu}{\nu_e} - c\right) \cdot \frac{c}{\nu_e},$$

où p_X est la densité de probabilité associée à la V.A. X .

Le vecteur \vec{n} étant unitaire, et étant donné $p_{\vec{v}}(\vec{v})$, on peut montrer que « $\vec{n} \cdot \vec{v}$ » suit une loi normale centrée de variance σ_v^2 .

4. En déduire la densité de probabilité $p_\nu(\nu)$ de la fréquence ν en fonction de ν_e et d'une quantité σ_ν que l'on explicitera en fonction de σ_v .
5. Ecrire le champ d'un ion Fe II dans R_o , noté $\mathcal{E}_\ell(t)$, où ℓ est l'indice l'ion Fe II, en fonction des fluctuations de la fréquence ν_ℓ (dépendant de la vitesse \vec{v}_ℓ de l'ion ℓ),

$$\delta\nu_\ell := \nu_\ell - \nu_e,$$

et du saut de phase occurrent à la date t : $\varphi_{\ell,t}$.

Quelle loi suit $\delta\nu_\ell$?

On appellera $\mathcal{E}_\ell(t)$ dans ce qui suit, par abus de langage, un oscillateur brownien. On remarquera que du fait de l'indépendance des ions Fe II entre eux, les oscillateurs browniens sont indépendants les uns des autres.

6. En déduire le champ résultant de Z_1 noté $\mathcal{E}_1(t)$. On justifiera la réponse.

2. Champ résultant de Z_1 et Z_2

7. Ecrire le champ total reçu par \mathcal{O} noté $\mathcal{E}(t)$ en fonction de $A(t) := \sum_{\ell=1}^N a_\ell(t)$, où :

$$a_\ell(t) := \frac{E_0}{\sqrt{N}} e^{i\varphi_{\ell,t}} e^{-2i\pi\delta\nu_\ell t}.$$

3. Quelques propriétés préliminaires avant le calcul des corrélations

On note $\langle X \rangle$ l'espérance mathématique, réalisée sur les densités de probabilité en jeu dans X . Un « processus stochastique » $X(t)$ sera traité tel qu'en chaque instant de date t , $X(t)$ est une V.A..

On note l'autocorrélation de X sur le corps des complexes, de conjugué X^* :

$$\forall(t, \tau), \quad \langle X^*(t)X(t+\tau) \rangle.$$

On suppose de plus le régime stationnaire c'est-à-dire que ni $\langle X \rangle$, ni $\langle X^*(t)X(t+\tau) \rangle$, ne dépendent de t . On remarquera ainsi la propriété (P0) :

$$\forall \tau, \langle X^*(t)X(t+\tau) \rangle = \langle X^*(t-\tau)X(t) \rangle = \langle X^*(0)X(\tau) \rangle \Leftrightarrow (P0)$$

8. Expliquer pourquoi : $\forall \ell, \langle a_\ell(t) \rangle = 0 \Leftrightarrow (P1)$.
 9. Montrer que : $\langle a_\ell^*(t)a_m(t) \rangle = \delta_m^\ell E_0^2/N = \langle a_\ell^*(t)a_m(t) \rangle^* \Leftrightarrow (P2)$
 10. Calcul d'intégrale gaussienne. Soit :

$$\varphi(\tau) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{2i\pi x\tau} dx,$$

$$\text{on donne : } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2 + \beta x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \beta \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Montrer que : } \varphi(\tau) = e^{2i\pi\mu\tau} e^{-2\sigma^2\pi^2\tau^2} \Leftrightarrow (P3).$$

On note W la V.A. « durée d'attente entre deux collisions » dans R_{wb} . Dans l'état stable d'un mouvement brownien, et dans une certaine limite que nous ne discuterons pas ici, W suit une loi exponentielle de paramètre $\langle W \rangle$ (durée d'attente moyenne entre deux collisions successives). On suppose que cette loi exponentielle est maintenue avec un paramètre τ_c dans R_o , et on traitera tout ce qui suit dans R_o .

11. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un saut de phase (i.e. une collision) durant τ quelconque ?
 12. Qu'il n'y ait aucun saut de phase ?
 13. Soit $m \in \llbracket 1, N \rrbracket$, montrer que : $\langle e^{i(\varphi_{m,\tau} - \varphi_{m,0})} \rangle = e^{-|\tau|/\tau_c} \Leftrightarrow (P4)$.
 14. Montrer que : $\forall m, \langle e^{-2i\pi\delta\nu_m\tau} \rangle = e^{-2\sigma_v^2\pi^2\tau^2}$.
 15. Dédurre des questions 11 et 12 que : $\forall(\ell, m), \langle a_\ell^*(t)a_m(t+\tau) \rangle = \delta_\ell^m \frac{E_0^2}{N} r(\tau) \Leftrightarrow (P5)$, où l'on précisera la fonction $r(\tau)$.
 16. Montrer que : $\forall(\ell, m), \langle a_\ell(t)a_m(t+\tau) \rangle = 0 = \langle a_\ell^*(t)a_m^*(t+\tau) \rangle \Leftrightarrow (P6)$

4. Calcul de $g^{(1)}(\tau)$

Pour le champ $\mathcal{E}(t)$ d'intérêt décrit à la question 7, on pose :

$$I(t) := \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t), \text{ et } G^{(1)}(\tau) := \langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t+\tau) \rangle,$$

la fonction $g^{(1)}(\tau)$ est définie comme suit :

$$\forall \tau, \quad g^{(1)}(\tau) := \frac{G^{(1)}(\tau)}{\langle I(t) \rangle} \Leftrightarrow (g1),$$

17. Dans quel cours a-t-on déjà rencontré $g^{(1)}$? Comment l'avait-on appelée ? Comment appelle-t-on sa transformée de Fourier ?
18. Quel est l'ordre du moment du champ \mathcal{E} intervenant dans $g^{(1)}$?
19. A l'aide du résultat de la Q15, déterminer $\langle A^*(t)A(t+\tau) \rangle$. Que vaut $\langle A(t)A^*(t+\tau) \rangle$? $\langle |A(t)|^2 \rangle$? $\langle A(t) \rangle$ et $\langle A^*(t) \rangle$?
20. En déduire $G^{(1)}(\tau)$ en fonction de E_β , $r(\tau)$, et du paramètre : $s := E_0^2/E_\beta^2$.
21. Déterminer $\langle I(t) \rangle$ en fonction de s .
22. Déduire $g^{(1)}(\tau)$ en fonction de s et de $r(\tau)$.
23. Que vaut $|g^{(1)}(\tau)|^2$?

5. Calcul de $g^{(2)}(\tau)$

Pour le champ $\mathcal{E}(t)$ d'intérêt décrit à la question 7, on pose : $G^{(2)}(\tau) := \langle I(t)I(t+\tau) \rangle$, la fonction $g^{(2)}(\tau)$ est définie comme suit :

$$g^{(2)}(\tau) := \frac{G^{(2)}(\tau)}{\langle I(t) \rangle^2} \Leftrightarrow (g2),$$

Un montage de principe possible pour mesurer $g^{(2)}$ est donné à titre indicatif figure 1.

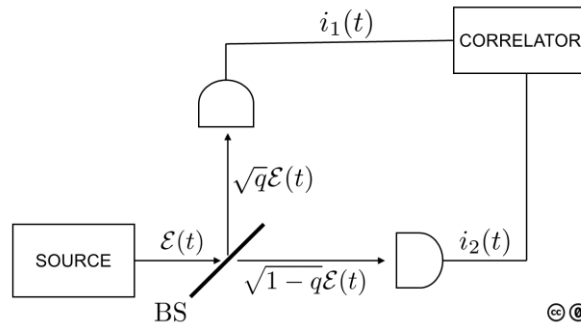


Figure 1. Montage de principe possible pour mesurer $g^{(2)}$ dans le visible, **donné à titre indicatif**. BS signifie lame séparatrice et i_1, i_2 sont les photo-courants qui sont ensuite corrélés.

24. A quelle dimension physique l'intensité I est-elle proportionnelle ? Comment s'interprète alors $g^{(2)}$? Quel est l'ordre du moment de \mathcal{E} que $g^{(2)}$ fait intervenir ?

Le calcul de $g^{(2)}$ pour le champ considéré est ici mené dans une certaine limite afin de faciliter les calculs. Cette limite est la suivante. Le nombre N des oscillateurs browniens est considérés très grand devant 1. Autrement dit :

$$A(t) \equiv \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{\ell=1}^N a_\ell(t) \right) \Leftrightarrow (L)$$

Par hypothèses les a_ℓ sont des V.A. indépendantes et identiquement distribuées (iid) à chaque instant. La version appropriée du Théorème Limite Central (cette appellation provient de l'allemand *zentraer Grenzwertsatz*, utilisé par le mathématicien Polyà, qui signifie « théorème fondamental sur les limites ») s'applique sur A qui est la limite d'une somme de V.A. iid à chaque instant. Ainsi A peut être traitée comme une V.A. normale à chaque instant.

25. Que vaut $\langle A(t) \rangle$?

26. Montrer que le résultat obtenu pour $\langle A^*(t)A(t+\tau) \rangle$ à la Q19 ne change pas avec $A(t)$ donné par (L). Que peut-on en conclure pour $g^{(1)}(\tau)$?

27. Que peut-on dire de $\langle A(t)A(t+\tau) \rangle$ et $\langle A^*(t)A^*(t+\tau) \rangle$?

Le théorème des moments gaussiens, conjecturé par Isserlis, mathématicien russe (anglais d'adoption), en 1917, connu en physique théorique sous le nom de théorème de Wick (1950), dû au physicien italien Wick, permet de simplifier le calcul de moments joints d'ordre $n \geq 4$ pour des V.A. normales. Nous n'en discutons pas plus en détail ici, retenons simplement que si Y_1, Y_2, Y_3 , et Y_4 , sont des V.A. normales alors :

$$\langle Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 \rangle = \langle Y_1 Y_2 \rangle \langle Y_3 Y_4 \rangle + \langle Y_1 Y_3 \rangle \langle Y_2 Y_4 \rangle + \langle Y_1 Y_4 \rangle \langle Y_2 Y_3 \rangle \Leftrightarrow (P7)$$

Retenons aussi que : si $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des V.A. (complexes ou non) suivant la même loi normale centrée alors : $\forall n$ impair, $\langle Y_1 \dots Y_n \rangle = 0 \Leftrightarrow (P8)$

28. A l'aide de (P7), montrer que : $\langle A^*(t)A(t)A^*(t+\tau)A(t+\tau) \rangle = E_0^2(1 + r^2(\tau))$, où la fonction r est celle précisée à la question 15.

29. Montrer ensuite que : $G^{(2)}(\tau) = E_\beta^4 + 2E_\beta^2 E_0^2(1 + r(\tau)) + E_0^4(1 + r^2(\tau))$

30. En déduire $g^{(2)}(\tau)$ en fonction de $|g^{(1)}(\tau)|^2$ et de $s := E_0^2/E_\beta^2$.

6. Calcul de $g^{(3/2)}$

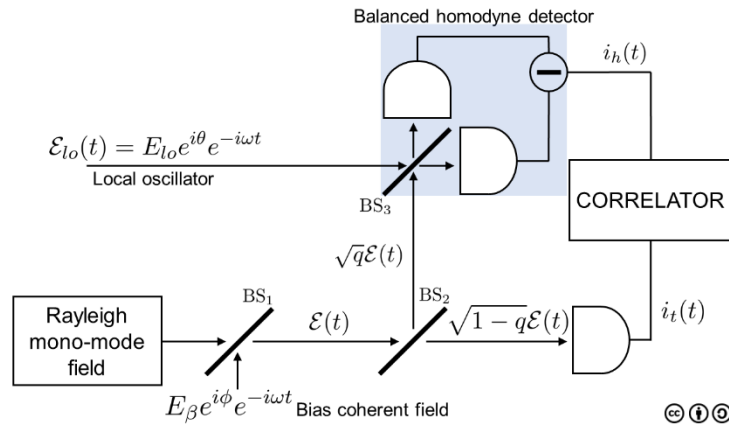


Figure 2. Montage de principe possible pour mesurer $g^{(3/2)}$ dans le visible, **donné à titre indicatif**. BS signifie lame séparatrice et i_h, i_t sont les photo-courants qui sont ensuite corrélés.

Soit un champ connu considéré comme un oscillateur harmonique dont la phase et la pulsation sont réglables : $\mathcal{E}_L = A_L e^{-2i\pi\nu_e t}$, où : $A_L = E_L e^{i\theta}$, $E_L \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Soit un champ inconnu $\mathcal{E} = A_\mathcal{E}(t)e^{-2i\pi\nu_e t}$, d'intensité $I(t) = \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t)$, considéré en régime stationnaire. La fonction la fonction $g^{(3/2)}(\tau)$ est définie comme suit :

$$g^{(3/2)}(\tau) := \frac{G^{(3/2)}(\tau)}{2\langle I \rangle \langle A_\mathcal{E} \rangle E_L} \Leftrightarrow (g32),$$

où : $G^{(3/2)}(\tau) := \langle I(t)\mathcal{E}^*(t+\tau)\mathcal{E}_L(t+\tau) \rangle + c.c.$, où "c.c." désigne le complexe conjugué.

31. Au vu de la définition (g32), donner une condition nécessaire pour que $g^{(3/2)}$ soit définie.

Un montage de principe permettant de mesurer $g^{(3/2)}$ lorsque $|\langle A_{\mathcal{E}} \rangle| = 0$ est donné à titre indicatif figure 2.

32. Avec le champ d'intérêt $\mathcal{E}(t)$ défini à la question 7, déterminer $|\langle A_{\mathcal{E}} \rangle|$.

On considère toujours A comme la limite (L). On note $Z := I(t)\mathcal{E}^*(t+\tau)\mathcal{E}_L(t+\tau)$.

33. Montrer que : $\langle Z \rangle = \left(E_{\beta}^2 E_L + E_{\beta} E_L E_0^2 (1 + r(\tau)) \right) e^{i(\theta-\phi)}$.

34. En déduire $G^{(3/2)}(\tau)$.

35. Déterminer alors $g^{(3/2)}(\tau)$ en fonction de θ , ϕ , $r(\tau)$, s , et $|g^{(1)}(\tau)|$.

36. A quelle condition sur la phase de \mathcal{E}_L on a : $g^{(3/2)}(\tau) \neq 0$?

7. Discussions

37. Quelle information sur le processus de transport, ici le mouvement brownien (qui est aussi appelé le processus de transport « normal »), les fonctions de corrélation permettent-elles de capturer en principe ?

Dans une première approximation, il peut être montré que τ_c est une fonction f des grandeurs physiques $m_o, n_o^*, \rho, \rho_o, T$:

$$\tau_c = f(m_o, n_o^*, \rho, \rho_o, T),$$

où m_o est la masse des atomes H I, et n_o^* est la densité particulière d'atomes H I dans Z_1 , et T la température de la zone Z_1 supposée à l'équilibre thermodynamique. Les extensions spatiales d'un ion Fe II et d'un atome H I sont notées respectivement ρ et ρ_o .

38. Les propriétés des espèces chimiques sont supposées connues. Quelles grandeurs physiques sur le milieu Z_1 les fonctions de corrélations permettent-elles de mesurer ?

On pose $\tau_v := 1/2\pi\sigma_v$.

D'après la question 23, la dépendance de $|g^{(1)}|$ en τ se fait via $r(\tau)$ et donc celle de $|g^{(1)}|^2$ via $r^2(\tau)$.

39. En admettant que la résolution temporelle de la mesure est limitée, vaut-il mieux mesurer $g^{(3/2)}$ ou $g^{(2)}$ pour accéder aux plus petits τ_c et τ_v possibles compte tenu de la limite de la mesure ?

On prendra $\theta = \phi$ dans $g^{(3/2)}$ dans tout ce qui suit.

40. Calculer les limites de $g^{(3/2)}$ et $g^{(2)}$ en $\tau \rightarrow +\infty$. Commenter.

Pour des raisons appartenant à la physique quantique, $g^{(1)}$ ne permet pas de conclure sur la nature « laser » ou non, d'un champ. On admet qu'en pratique, la figure de mérite de la mesure est la valeur en $\tau = 0$ de $g^{(2)}$ et $g^{(3/2)}$.

41. Afin de dévoiler la nature laser de la radiation en provenance du Weigelt Blob B, quelle fonction vaut-il mieux mesurer entre $g^{(2)}$ et $g^{(3/2)}$ (toutes considérations expérimentales omises) ?

Indication : on pourra considérer un exemple où l'amplitude « laser » a le même poids que l'amplitude du champ résultant des oscillateurs browniens.