

Ma Legge di Gravità è un complet

Così in 3

I. Interaction gravitationnelle

1. loi de gravitation.
2. Caractère conservatif et central exo
3. Vérification du principe de l'action et la réaction exo
4. Masses graves et masse inerte : le principe d'équivalence faible
5. Le principe d'équivalence d'Einstein (1916)

II. Le champ Gravitational

- 1 . Définition du champ \vec{G} et principe de superposition
2. Nature vectorielle et propriétés de symétrie exo, exo
3. Propriété du champ gravitationnel
 - a. Analogie formelle avec le champ électrostatique
 - b. \vec{G} dérivé d'un potentiel scalaire exo, exo
 - c. Conséquences sur la circulation, les lignes du champ et les équipotentielles
 - d. \vec{G} est irrotationnel exo
 - e. \vec{G} satisfait au théorème de Gauß
4. Calcul du champ
 - a. Via l'équation de Poisson
 - b. Via le théorème de Gauß (application aux corps à symétrie sphérique) exo, exo
 - c. Expression à grande distance (application aux \vec{D} à symétrie de révolution en exercice). exo

III . Énergie potentielle gravifique

1 . Définitions

- a. Pour deux particules
- b. Pour N particules
- c. Pour une distribution continue

2. Application: sur la nature de l'énergie du Soleil exo

IV. Mouvements newtoniens des planètes et des satellites

1. Rappels succincts et hypothèses

2. Lois de Kepler

a. Les 2 premières lois

b. La troisième loi exo: activité numérique

c. Utilisation de la 3^e loi de Kepler exo

3. Mouvement du centre attractif

4. Rôle des autres planètes : le problème à N corps et la stabilité du système solaire.

5. Satéllisation et vitesses cosmiques

a. Orbite circulaire et première vitesse cosmique exo

b. vitesse de libération ou 2^e vit. cosm.

c. S'échapper du système solaire: 3^e vit. cosmique exo

d. Tomber sur le soleil: 4^e vit. cosmique exo

Voir Sivankhine



V. Limites de la théorie newtonienne de la gravitation

1. Le cas de Mercure : avance du périhélie. Bertin

2. Nottion de rayon gravitationnel. exo 13 p 314 Bertin

3. Courbes de rotation des galaxies spirales.

4. Cosmologie Newtonienne.

a. Loi de Hubble et le principe cosmologique.

b. Loi de Hubble-Lemaître et expansion de l'Univers.

c. le fluide cosmique et les équations de Friedman.

exo 12 p 314
expansion
cosmique
de Bertin.

Hakim

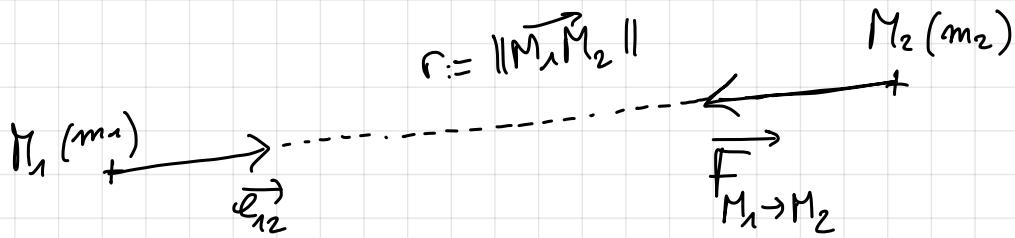
Hakim

I. Interaction gravitationnelle

1. Loi de gravitation.
2. Caractère conservatif et central exo
3. Vérification du principe de l'action et la réaction exo
4. Masses graves et masse inerte : le principe d'équivalence
finie
5. Le principe d'équivalence d'Einstein (1916)

I. Interaction gravitationnelle

1. Loi de gravitation.



Soit 2 points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 , distants de r , ils exercent une force attractive, appelée force de gravitation, telle que :

$$\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_{12} \quad (\text{I.1.0})$$

où G est une constante universelle : c'est la constante de gravitation universelle :

$$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

Remarques

↗ Pourquoi ?

1. (I.1.0) est aussi appelée loi d'attraction universelle
2. (I.1.0) pré suppose à priori le concept de masses "graves" portantes de cette interaction. Comme nous le verrons, ces masses graves sont équivalentes entre elles, et équivalentes à la masse d'inertie de la relation fondamentale de la dynamique. C'est ce qu'on appelle le principe d'équivalence faible. Ce principe est une constatation expérimentale inexplicable par la mécanique classique, et sert de base dans les théories relativistes de la gravitation, comme la théorie de la relativité générale.

3. Nous justifierons à posteriori la pertinence de la description de l'interaction gravitationnelle avec le point de vue "particulaire", ainsi que dans le cadre d'une interaction à deux corps. Et nous donnerons les limites de cette description classique.

Analyse dimensionnelle

$$\bullet F_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow [G] = (MLT^{-2}) \cdot L^2 \cdot M^{-2} = L^3 M^{-1} T^{-2}$$

$$\Rightarrow G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$$

$$\text{Or } 1N = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \Rightarrow G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}{m^3 \cdot kg \cdot s^{-2}}$$

• Comparaison avec la constante de l'interaction électrostatique

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] = (MLT^{-2}) \cdot L^2 \cdot Q^{-2} = ML^3 T^{-2} Q^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8,99 \cdot 10^9 \frac{m^3 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot C^{-2}}{F \cdot m^2}$$

$$\begin{aligned} \text{On sait que } \left[\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right] &= J \cdot m^{-3} & \left[\epsilon_0 \right] &= J \cdot m^{-3} \cdot V^{-2} \cdot m^2 \\ E = -\nabla \phi &\quad \text{et } [E] = V \cdot m^{-1} & \Rightarrow &= J \cdot V^{-2} \cdot m^{-1} \\ 1eV = [J] &\quad 1J = 1C \cdot V & &= C \cdot V^{-1} \cdot m^{-1} \\ q = \frac{1}{4\pi} \frac{C}{m} &\quad 1F = C \cdot V^{-1} & \left[\epsilon_0 \right] &= F \cdot m^{-1} \\ \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &\approx 8,99 \cdot 10^9 \frac{F \cdot m^{-1}}{m^2} \end{aligned}$$

Ordres de grandeurs : comparaison des interactions gravitationnelles et électrostatiques entre 1 électron et 1 proton

Soit une distance donnée entre 1 électron et 1 proton.

$$\left| \frac{F_g}{F_c} \right| = \left(4\pi\epsilon_0 G \right) \frac{m_e m_p}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11}}{8,99 \cdot 10^9} \cdot \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}}{(1,60 \cdot 10^{-19})^2} \approx 4,41 \cdot 10^{-40}$$

$$\Rightarrow |F_g| \ll |F_c|$$

Dans le domaine atomique, F_g est négligeable devant F_c

2. Caractère conservatif et central

Remarquons tout d'abord que l'interaction gravitationnelle est un champ de force conservatif, c'est qu'il dérive d'un potentiel \mathcal{E}_p , et qu'il est de plus central, c'est que \mathcal{E}_p ne dépend que de la distance r entre les deux particules M_1 et M_2 ; on peut en effet écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1} = -\text{grad}_{M_1}(\mathcal{E}_p), \\ \vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} = -\text{grad}_{M_2}(\mathcal{E}_p). \end{array} \right. \quad \text{au } \mathcal{E}_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}, \quad r = \|\vec{M}_1 \vec{M}_2\|$$

Le point placé en indice rappelle les coordonnées par rapport auxquelles on doit dériver \mathcal{E}_p pour calculer le gradient, l'autre point est considéré comme le centre de force.

preuve: → exercice.

Soit O le centre de force de masse m_0 et M un point de masse m . On note $\vec{r} = \vec{OM}$ et $\vec{ur} = \frac{\vec{r}}{r}$.

On suppose que $M(\vec{r})$ se déplace de $d\vec{r}$ dans le champ de force créé par O en M , noté $\vec{F}(\vec{r})$

Soit δW le travail exercé par $\vec{F}(\vec{r})$ pour $d\vec{r}$.

$$\delta W = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$\boxed{\delta W = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{ur} \cdot d\vec{r} = -G \frac{m_0 m}{r^2} dr = d\left[G \frac{m_0 m}{r}\right]}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta W = dW} \quad (\text{différentielle totale exacte})$$

$$\text{Possons } \boxed{d\mathcal{E}_p = -dW} \quad \text{i.e. } d\mathcal{E}_p = +G \frac{m_0 m}{r^2} dr$$

$$\text{i.e. } \boxed{\mathcal{E}_p = -G \frac{m_0 m}{r} \equiv \mathcal{E}_p(r)}$$

Où a alors: $dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -d\varphi$

Or: $d\varphi := \vec{\text{grad}}(\varphi) \cdot d\vec{r}$, par définition du gradient

d'où par identification:

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}}(\varphi)$$

$$\text{ou } \varphi = \varphi(r) = -G \frac{m}{r}, r = \|\vec{r}\|$$

qed. (I.2.0)

3. Vérification du principe d'action-réaction

Nous avons déjà vu que l'interaction conservative et centrale entre deux particules vérifie automatiquement le principe de l'action et de la réaction. La preuve est à refaire en exercice.

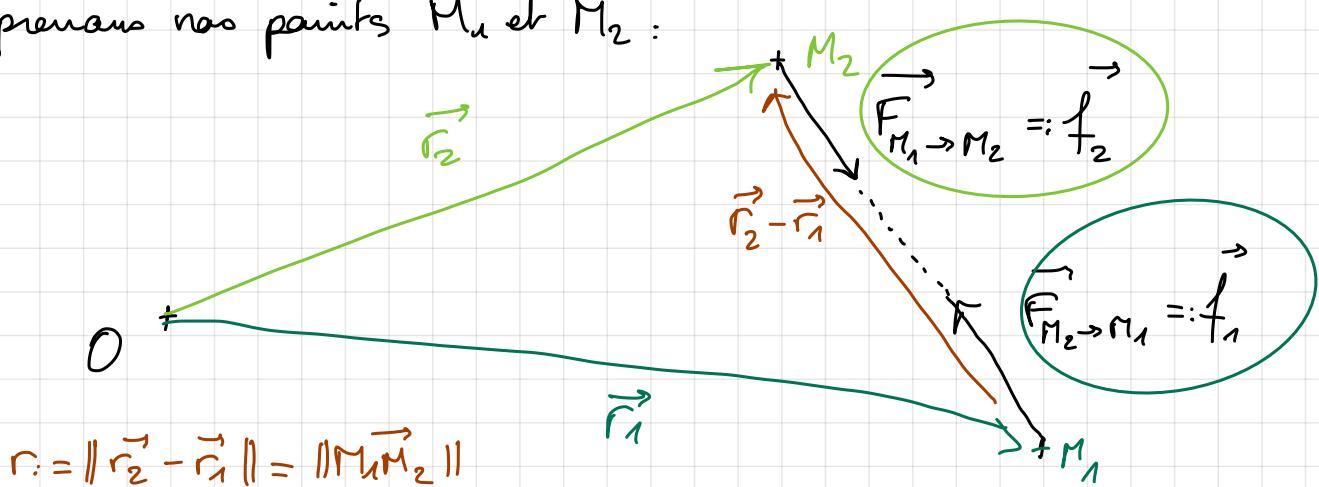
⚠ Rappelons que ce principe n'est pas universel: ⚠

il exige pour être valide que l'interaction entre les deux particules puisse être considérée comme instantanée.

D'après la théorie de la relativité, l'interaction entre deux particules est considérée comme instantanée si elle se propage à la vitesse maximale des interactions qui est (à ce jour) la vitesse de la lumière dans le vide mesurée par un observateur inertiel (le temps de la mesure) c_0 . Il s'avère, d'après la théorie de la relativité générale, que l'interaction gravitationnelle se propage à c_0 .

Exercice: Montrer qu'une interaction conservative et centrale entre 2 particules vérifie nécessairement le principe d'action/réaction.

Reprendons nos points M_1 et M_2 :



Si l'on choisit un repère cartésien centré sur l'origine O : $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, alors:

$$f_{1x} := \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_{x_1} = -\partial_{x_1} \xi_p = -d_r \xi_p \cdot \partial_{x_1} r$$

$$\text{or } r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\text{donc } \partial_{x_1} r = -(x_2 - x_1) / r$$

$$\text{d'au: } f_{1x} = \frac{x_2 - x_1}{r} \cdot \frac{d\xi_p}{dr}$$

D'autre part :

$$f_{2x} = \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_{x_1} = -\partial_{x_2} \xi_p = -d_r \xi_p \cdot \partial_{x_2} r$$

$$\text{et } \partial_{x_2} r = \frac{x_2 - x_1}{r}$$

$$\text{d'au: } f_{2x} = -\frac{x_2 - x_1}{r} \cdot \frac{d\xi_p}{dr} = -f_{1x}$$

il en va de même pour toutes les autres composantes, et
ainsi:

$$\boxed{\vec{f}_2 = -\vec{f}_1}$$

$$\text{et de plus, puisque } \begin{pmatrix} (x_2 - x_1) / r \\ (y_2 - y_1) / r \\ (z_2 - z_1) / r \end{pmatrix}_{x,y,z} = \frac{\vec{M}_1 \vec{M}_2}{\|\vec{M}_1 \vec{M}_2\|} = \vec{e}_{12} \equiv \vec{e}_r$$

$$\boxed{\vec{f}_2 = -\frac{d\xi_p}{dr} \vec{e}_r = -\vec{f}_1}$$

4. Masse inerte et masses graves, principe d'équivalence faible

La loi de gravitation universelle présuppose l'élaboration du concept de masse.

Considérons les masses qui interviennent dans l'équation fondamentale de la dynamique d'un corps massif m_2 soumis à l'attraction gravitationnelle d'un autre corps massif, dans un référentiel galiléen Rg :

$$m_{2,i} \vec{y} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_{12} = F_{M_1 \rightarrow M_2}$$

masses graves

mass inerte accélération de m_2 dans le référentiel galiléen

mesurable à l'aide de choc entre corps (particules)

mass grave active mass grave passive

Supposons que la masse inerte soit différente de la masse grave et que les masses graves soient différentes entre elles.

Le PFD s'écrit alors dans Rg :

$$\begin{cases} m_{2,ii} \vec{y} = -G \frac{m_{1,A} m_{2,P}}{r^2} \vec{e}_{12} \\ m_{1,ii} \vec{y} = -G \frac{m_{1,P} m_{2,A}}{r^2} \vec{e}_{12} \end{cases}$$

→ Examinons tout d'abord si les masses graves des deux types sont égales ou non.

Puisque l'interaction gravitationnelle vérifie le principe de l'action et de la réaction,

$$\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} = -\vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1}$$

$$\text{Sait : } -G \frac{\frac{m_{1,A} m_{2,P}}{r^2} \vec{e}_{12}}{} = -G \frac{\frac{m_{1,P} m_{2,A}}{r^2} \vec{e}_{12}}{}$$

il vient alors :
$$\boxed{\frac{m_{1,A}}{m_{1,P}} = \frac{m_{2,A}}{m_{2,P}}} \quad (\text{I.3.0})$$

comme ceci est vrai $\forall 1 \text{ et } 2$, le rapport entre la masse gravie passive d'un corps et sa masse gravie active constitue une constante universelle que l'on peut toujours ramener à 1, à l'aide d'un choix judicieux d'unités.

\Rightarrow Il y a égalité des masses graves active et passive pour un corps donné, on parlera donc de masse grave, qu'on note m_g .

On va maintenant montrer l'égalité de la masse inerte et de la masse grave.

La masse d'inertie d'un corps est le coefficient m_i intervenant dans l'expression des forces d'inertie d'entraînement et/ou complémentaire :
$$\begin{cases} \vec{f}_e = -m_i \vec{y}_e & (\vec{y}_e \text{ accélération d'entraînement}) \\ \vec{f}_c = -m_i \vec{y}_c & (\vec{y}_c \text{ accélération de Coriolis}) \end{cases}$$

on encore dans le principe fondamental de la dynamique dans un réf. galiléen :
$$\vec{f} = m_i \vec{y}$$
 qui caractérise la "répugnance" qu'éprouve le corps à modifier sa trajectoire dans un champ de force donné.

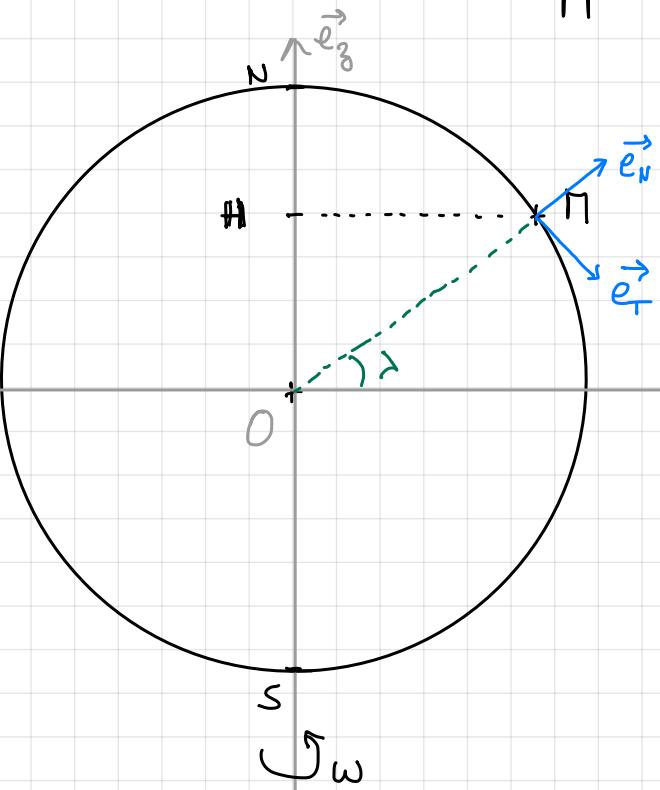
Dans un premier temps, on peut dire que m_i est "pulsive" tandis que m_g est "active" puisqu'elle crée le champ de force gravitationnelle.

Considérons un observateur O à la surface du globe à une latitude λ donnée. Cet observateur dispose dans son référentiel R_1 une marelote suspendue à un fil, on note M le centre de masse de la marelote, m_i sa masse inertielle et m_g sa masse grave.

Le référentiel de O est en rotation par rapport au référentiel R_0 rattaché à la Terre (le système d'axe de R_0 correspond aux axes du géoïde terrestre). On note le vecteur rotation de R_1 par rapport à R_0 ($0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$):

$$\overset{\rightarrow}{\omega}_{R_1/R_0} = \omega \vec{e}_z,$$

avec ω supposée constante.



Soit \vec{e}_N et \vec{e}_T les vecteurs respect., normal et tangent en M au géoïde terrestre.

\vec{e}_y La force d'attraction gravitationnelle exercée par le centre de masse O de la terre sur M s'écrit:

$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = -G \frac{m_T m_g}{\|\vec{OM}\|^2} \vec{e}_N$$

$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = -g_0 m_g \vec{e}_N = \vec{f}_g$$

On note: $g_0 := G \frac{m_T}{\|\vec{OM}\|^2}$

(I.3.1)

(I.3.2)

Dans le référentiel R_1 de l'expérimentateur, le PFD s'écrit : $m_i \vec{v}_a = \vec{f}_g$ (I.3.3)

où \vec{v}_a est l'accélération absolue de M , c'est à dire dans R_0 .

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e + \vec{v}_c$$

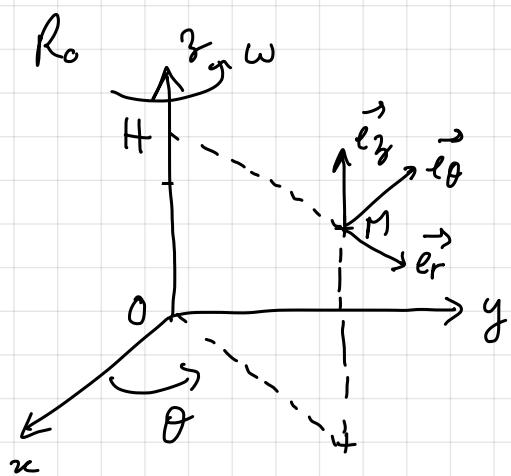
où \vec{v}_e | est l'accélération d'entraînement de R_1 par rapport à R_0 .
 \vec{v}_c | complémentaire au de Coriolis.
 \vec{v}_r | relative à R_1 .

Puisque R_1 est considéré en rotation par rapport à R_0 :

$$\vec{v}_c = \vec{0}$$

Ensuite, dans le cas où le mouvement d'entraînement est une rotation le calcul de \vec{v}_e se fait sans difficulté en plaçant en coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans R_0

$$\vec{v}_e = \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} \Big|_{R_0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} (\vec{OH} + HM\vec{er}) \right) = HM \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \vec{er} \right)$$



or $\frac{d\vec{er}}{dt} \Big|_{R_0} = \vec{\omega}_1 \vec{er}$ (formule de Barn, valide en mécanique non relativiste)

d'où : $\vec{v}_e = -HM\omega^2 \vec{er}$

On en déduit la force d'inertie d'entraînement ressentie dans R_1 :

$$\vec{f}_e = -m_i \vec{v}_e$$

$$* \vec{v}_e = \vec{v}_e |_{R_1/R_0} = -\vec{v}_e |_{R_0/R_1}$$

$$\vec{f}_e = m_i \omega^2 H M \vec{er}$$

(I.3.4)

L'accélération relative \vec{r}_r dans R_1 est celle que M subit et à laquelle la tension du fil de la masselotte s'oppose, elle indique la direction de la verticale locale ("fil du maçon"), on la note $\vec{r}_r = \vec{g}$ et porte le nom d'accélération de la pesanteur.

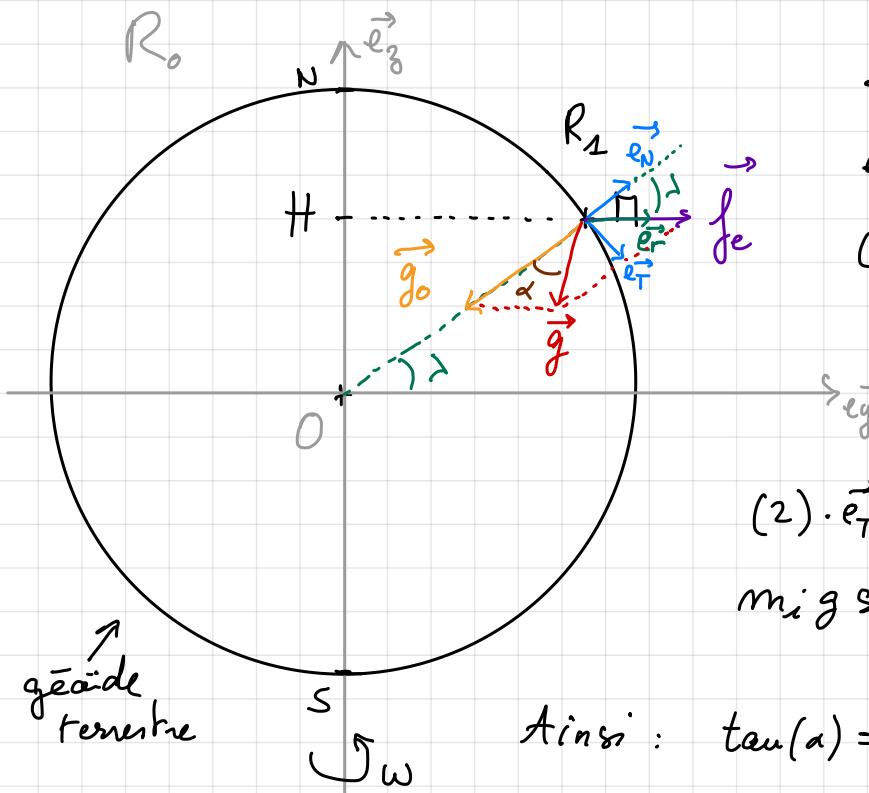
Le PFD dans (R_1) s'écrit alors:

$$(3.3) \Rightarrow m_i \vec{r}_e + m_i \vec{r}_r = \vec{f}_g$$

Sait : $m_i \vec{g} = \vec{f}_g + \vec{f}_e$, dans R_1 .

ou :

$$(3.2) + (3.4) \Rightarrow m_i \vec{g} = -mg g_0 \vec{e}_N + m_i \omega^2 HM \vec{e}_T \quad (\text{I.3.5})$$



Soit α l'angle entre \vec{g}_0 et \vec{g} .

(2). \vec{e}_N donne :

$$m_i g \cos \alpha = -mg g_0 + m_i \omega^2 HM \cos \lambda$$

(2). \vec{e}_T donne :

$$m_i g \sin \alpha = 0 + m_i \omega^2 HM \sin \lambda$$

Ainsi : $\tan(\alpha) = \frac{m_i \omega^2 HM \sin \lambda}{mg g_0 - m_i \omega^2 HM \cos \lambda}$

Sait :

$$\tan(\alpha) = \frac{\left(\frac{m_i}{mg}\right) HM \omega^2 \sin \lambda}{g_0 - \left(\frac{m_i}{mg}\right) HM \omega^2 \cos \lambda} \quad (\text{I.3.6})$$

\Rightarrow la direction de la verticale locale serait donc une fonction du rapport $(\frac{m_i}{mg})$ d'après (2).

On, on peut à l'aide d'expériences très fines*, vérifier que α est le même pour tous les corps. Autrement dit $\tan(\alpha)$ ne dépend pas de la masselette M , au vu de (3.6), cela implique que :

$$\boxed{\frac{m_i}{mg} = 1 \Leftrightarrow m_i = mg = m}$$

Dans notre calcul, la forme de la Terre considérée n'a pas d'importance, elle intervient via la latitude λ et la distance $\|\overrightarrow{OM}\|$ (dans g_0) et $\|\overrightarrow{HM}\|$.

\hookrightarrow si on approche la Terre à une sphère de rayon R_T

$$\|\overrightarrow{HM}\| = R_T \cos \lambda$$

$$\text{et } g_0 = -G \frac{m_T}{R_{Tp}^2} \quad \begin{aligned} & \left(\text{ pesanteur au pôle nord } \lambda = \frac{\pi}{2} \right) \\ & \text{ rayon polaire} \xrightarrow{\uparrow} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & HM = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \\ & \vec{g} = \vec{g}_0 \end{aligned}$$

* voir page suivante, et on en fera une en exercice.

Vérifications expérimentales

L'identité de la masse gravitationnelle et de la masse inerte est en mécanique classique, une constatation expéri. inéductible aux principes et par suite inexplicable

• Expérience de Newton

petites oscillations d'un pendule simple de longueur ℓ de masses (m_i, m_g): $m_i \ddot{\theta} = -\frac{m_g g}{\ell} \sin \theta = -\frac{m_g g}{\ell} \theta + o(\theta)$

$$\text{période des oscillations: } T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell m_i}{g m_g}}$$

Ainsi deux pendules de même longueur mais constitués de matériaux différents (différents rapports $\frac{m_i}{m_g}$) n'aurait pas la même période.

Newton a trouvé que si $m_i \neq m_g$ alors: $\frac{m_i - m_g}{m_i} < 10^{-3}$.

- En 1889, L. Eötvös a utilisé des pendules de torsion et a trouvé: $\frac{m_i - m_g}{m_i} \leq 10^{-8}$. \rightarrow exercice Bertin exo 5 p 96

En 2012 en affinant cette technique expérimentale, Eöt-Wash montrent que: $\frac{m_i - m_g}{m_i} < 2 \cdot 10^{-13}$

- En 2017, l'expérience Microscope qui place des objets de masses différentes en orbite "Og" mesure les forces électrostatiques à appliquer pour les maintenir immobiles (elles sont en apesanteur). En comparant ces forces, on trouve que: $\frac{m_i - m_g}{m_i} < 10^{-14} - 10^{-15}$

Le principe d'équivalence faible est valable dans la limite d'une précision de 1h chiffres après la virgule.

Remarque:

Le principe d'équivalence faible; égalité de la masse gravie et de la masse inertie, permet d'affirmer que tous les corps chutent à la même vitesse dans le vide :

Sait la chute d'un corps dans un champ de pesanteur $\vec{g} = -g\hat{z}$ et dans le vide. Le PFD dans le ref. du labo (galiléen durant la chute) s'écrit: $m_i \ddot{z} = m_g g$

$$\text{si } \dot{z}(t=0) = 0 \text{ et } z(t=0) = 0, \quad z(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{m_g}{m_i} \right) g t^2$$

$$\text{si } m_i = m_g \text{ alors: } z(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

⇒ il n'y a aucun paramètre intrinsèque au corps lui-même !

⇒ La trajectoire est la même pour tous les corps.

C'est la légendaire expérience de Galilée :



illustration de James Edwin McConnell (1903-1995)

Test du principe d'équivalence par Galilée depuis le haut de la tour de Pise en 1591.

4. Conséquence: le principe d'équivalence d'Einstein (1916)

Revenons au cas d'un référentiel R_1 animé d'un mouvement de translation uniformément accéléré par rapport à un référentiel galiléen R_0 .

- On note $\vec{\gamma}_e$ l'accélération d'entraînement de R_1 par rapport à (R_0) : $\vec{a}_{R_1/R_0} = \vec{\gamma}_e$
- On note $\vec{\gamma}_a$ l'accélération absolue d'un point $M(m_i, m_g)$ de (R_1) dans R_0 : $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$
où: $\vec{\gamma}_r$ est l'accélération relative de M dans R_1 ,
 $\vec{\gamma}_c$ complémentaire de R_1 / R_0 (ou de Coriolis)
- Ici: $\vec{\gamma}_c = 2 \sum_{R_1/R_0} \Gamma_{R_1/R_0} \vec{V}_{R_1/R_0} = \vec{0}$, car $\sum_{R_1/R_0} \vec{V}_{R_1/R_0} = \vec{0}$
- On note \vec{f} la résultante des forces s'exerçant sur M , de masse inerte m_i et de masse grave m_g , dans R_0 .

Le PFD dans R_1 (référentiel de l'expérimentateur) s'écrit:

$$m_i \vec{\gamma}_r = \vec{f} - m_i \vec{\gamma}_e \quad (\text{I.4.0})$$

Supposons que: $\boxed{\vec{f} = m_g \vec{g}}$ où \vec{g} est une accélération de pesanteur résultant d'un champ de gravitation exercé par un centre de force O sur M .

$$\text{Alors: } (4.0) \Rightarrow \vec{\gamma}_r = \left(\frac{m_g}{m_i}\right) \vec{g} - \vec{\gamma}_e$$

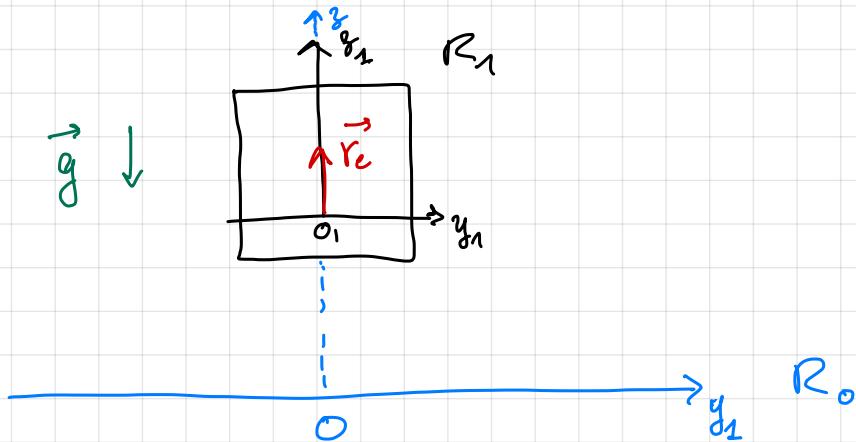
Or d'après le principe d'équivalence faible $m_i = m_g$ donc

$$\boxed{\vec{\gamma}_r = \vec{g} - \vec{\gamma}_e \quad (\text{I.4.1})}$$

Ainsi, l'identité $m_i = m_g$ se traduit localement par une équivalence entre \vec{g} et $-\vec{\gamma}_e$ en terme de contribution pour $\vec{\gamma}_r$. Il y a une conséquence importante !

Exercice

↳ L'expérience de pensée d'Einstein : une cabine tirée par un géant.



Soit R_1 le référentiel rattaché à une cabine

Soit R_0 le référentiel rattaché au sol, supposé galiléen durant l'étude.

On note $\vec{\gamma}_e = \vec{a}_{R_1/R_0}$, $\vec{\gamma}_e = \pm \gamma_e \vec{e}_z$

On note \vec{g} l'accélération de la pesanteur, résultant d'un champ de force gravitationnel: $\vec{g} = -g \vec{e}_z$

- Lorsque la cabine est tirée loin du sol, $\vec{\gamma}_e = +\gamma_e \vec{e}_z$, et d'après (3.1) le PFD dans la cabine s'écrit alors

$$\text{If } \vec{e}_z: m \vec{\gamma}_r = -m(g + \gamma_e) \vec{e}_z$$

⇒ le passager de la cabine ressent la force: $-m(g + \gamma_e) \vec{e}_z$

Si le passager ignore qu'il est dans une cabine et qu'il dispose d'une seule balance lui permettant de mesurer

sa masse via " $m\gamma_r$ ", rien ne lui permet de choisir entre les deux conclusions suivantes :

1. La cabine est en mouvement accéléré
2. le champ gravitationnel tend d'augmenter son intensité de g à $g + \gamma_e$.

- Si au contraire la cabine est tirée dans le même sens que \vec{g} , dans (R_A) la force ressentie devient :

$$\text{Héz : } m\gamma_r = -m(g - \gamma_e)$$

→ il est alors possible de compenser à l'échelle de la cabine le champ de gravitation : si $\gamma_e = g$ alors $m\gamma_r = 0$! tout se passe comme si aucune force de gravité ne s'exerçait, on parle de gravité "0", de chute libre ou de mouvement balistique.

Le passager ne peut conclure entre :

1. La cabine est en mouvement accéléré.
2. le champ gravitationnel a diminué, son intensité passant de g à $g - \gamma_e$ (et même disparaît si $\gamma_e = g$)

On peut faire l'expérience sur Terre dans un ascenseur, la masse de la balance augmente quand l'ascenseur monte et diminue quand il descend



Généralisant l'analyse, Einstein a formulé en 1916 son principe d'équivalence : les effets d'un champ inertiel

et d'un champ gravitationnel saut localement équivalents
ce principe est à la base de sa théorie de la relativité générale.
Remarque sur le caractère local.

Il est difficile d'imaginer compenser un champ de gravitation par un changement de référentiel sur une étendue spatiale infinie...

→ on dit que l'on peut compenser au moins localement un champ de gravitation par changement de référentiel (entrainement d'un référentiel pr au référentiel du centre de force du champ de gravitation).

II. Le champ gravitationnel

1. Définition du champ \vec{G} et principe de superposition

2. Nature vectorielle et propriétés de symétrie exo, exo

3. Propriétés du champ gravitationnel

a. Analogie formelle avec le champ électrostatique

b. \vec{G} dérive d'un potentiel scalaire exo, exo

c. Conséquences sur la circulation, les lignes de champ et les équipotentielles

d. \vec{G} est irrotationnel exo

e. \vec{G} satisfait au théorème de Gauß

4. Calcul du champ

a. Via l'équation de Poisson

b. Via le théorème de Gauß (application aux corps à symétrie sphérique) exo, exo

c. Expression à grande distance (application aux D à symétrie de révolution en exercice). exo

De nos jours la Physique considère que toutes les interactions sont réalisées au moyen de champs. La Physique ne tente pas d'expliquer la raison du mécanisme de ces actions, elle attribue au champ une existence objective et la capacité de transmettre des interactions.

II. Le champ gravitationnel

1. Définition du champ \vec{G} et principe de superposition

Une distribution spatiale de matière \mathcal{D} , telle qu'un astre, par exemple, exerce dans l'espace qui l'entoure et également dans l'espace qui elle occupe, des forces gravitationnelles sur les différents éléments matériels présents. La distribution \mathcal{D} est la source d'un champ gravitationnel \vec{G} .

→ En présence d'éléments matériels, \vec{G} donne un champ de force \vec{f} tel que :

si au point M de l'espace se trouve une masse m , la distribution \mathcal{D} exerce une force gravitationnelle en M proportionnelle à m de la forme :

$$\vec{f}(M) = m \vec{G}(M) \quad (\text{II.1.0})$$

$\vec{G}(M)$ dépend uniquement de \mathcal{D} et \vec{G} est conservatif et central puisque \vec{f} l'est. (cf I)

Cette définition du champ gravitationnel et le cas échéant du champ de force qui en découlle résulte de faits expérimentaux.

Cas d'une particule

La définition de l'interaction gravitationnelle entre deux points matériels O (centre de force) et M de masse m_0 et m donne :

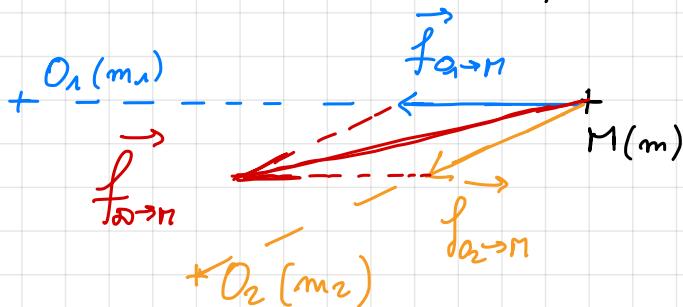
$$\vec{f}_{O \rightarrow M} = -G \frac{m_0 m}{\|OM\|} \vec{u}, \quad \vec{u} = \frac{\vec{OM}}{\|OM\|}$$

On en déduit le champ gravitationnel créé par O :

$$\vec{G}(R) = -G \frac{m_0}{r^2} \vec{u}, \text{ où } \begin{cases} \vec{u} = \vec{O}R/r \\ r = \| \vec{O}R \| \end{cases} \quad (\text{II.1.1})$$

Cas d'un système de particules

Soit $\mathcal{D} = \{O_1(m_1), O_2(m_2)\}$ un ensemble de 2 points matériels matériels O_1 et O_2 de masses m_1 et m_2 . Soit M un point matériel $M(m)$. Quelle est la force exercée par \mathcal{D} sur M ?



On constate expérimentalement que la force exercée sur M est :

$$\vec{f}_{\mathcal{D} \rightarrow M} = \vec{f}_{O_1 \rightarrow M} + \vec{f}_{O_2 \rightarrow M} \quad (\text{II.1.2})$$

autrement dit les forces de gravitation sont additives.

La généralisation de ce résultat est le principe de superposition, ce principe s'applique au champ \vec{G} puisque $\vec{G} \propto \vec{f}$.

Pour connaître les effets d'une distribution de matière \mathcal{D} sur une particule "test" de masse m , il suffit d'additionner les effets des éléments matériels de \mathcal{D} : ils sont indépendants entre eux.

Ainsi si $\mathcal{D} = \{O_i(m_i)\}_i$ et $R_i = \| \vec{O}_i M \|$, la force exercée par \mathcal{D} sur $M(m)$ est :

$$\vec{f}_{\mathcal{D} \rightarrow M} = \sum_i \vec{f}_{O_i \rightarrow M} = -G \left(\sum_i \frac{m_i}{R_i^2} \vec{u}_i \right)_M$$

d'où le champ gravitationnel \vec{G} créé par \mathcal{D} :

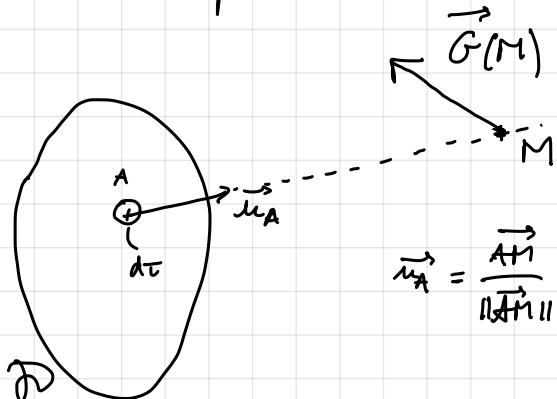
$$\forall M, \quad \vec{G}(M) = -G \sum_i \frac{m_i}{R_i^2} \vec{u}_i \quad (\text{II.1.3})$$

Cas d'une distribution continue de matière

Le principe de superposition permet de déterminer le champ gravitationnel créé par une distribution de matière \mathcal{D} de masse volumique μ :

$$\forall A \in \mathcal{D}, \quad \mu(A) := \frac{dm}{d\tau},$$

en un point M :



$$\forall A, \quad d\vec{G}(M) = -G \frac{\mu(A) d\tau}{\|AM\|^2} \vec{u}_A$$

et $\vec{G}(M) = \int d\vec{G}(M)$

soit:

$$\boxed{\vec{G}(M) = -G \iiint_{A \in \mathcal{D}} \frac{\mu(A) \vec{u}_A}{\|AM\|^2} d\tau} \quad (\text{II.1.4.)}}$$

L'intégrale triple est étendue à tout le volume occupé par \mathcal{D} .

On admet que cette intégrale est convergente en tout point M extérieur ou intérieur à \mathcal{D} supposée d'extension spatiale finie.

→ on va voir un exemple de calcul dans le cours.

2. Nature vectorielle et propriétés de symétrie

\vec{G} est un champ de mai vecteurs (en vecteurs polaires) car il est proportionnel à un champ de force.

Par conséquent, \vec{G} a les mêmes propriétés de symétries que la distribution D qui le crée (principe de Cuié); c'est à dire lorsque D subit une isométrie (symétrie plane, translation, rotation axiale, ~~de~~ transfo qui laisse inchangées les distances), le champ \vec{G} subit la même opération.

\Rightarrow

Si Π_S est un plan de symétrie de D alors $\vec{G}(M) \in \Pi_S$

Si Π_A d'antisymétrie de D alors $\vec{G}(M) \perp \Pi_A$

Exemple / Exercice : Champ \vec{G} d'une terre "plate".

1. Soit \mathcal{D} un cylindre droit homogène ($\rho = \text{cste}$) à bases circulaires de hauteur h et de rayon R ; déterminer le champ gravitationnel \vec{G} créé par le cylindre au point M_0 situé sur l'axe et dans un plan de base en fonction du paramètre $\varepsilon := h/R$.

2. On dispose de la mesure du champ de pesanteur au sol

sur Terre: $g \approx g_0 = G \frac{m_T}{R_T^2}$ (le terme d'accélération centrifuge est négligeable en première approximation). Un "platiste" prétend que la Terre est un cylindre "plat" de rayon $R_T \gg h$, et de masse m_T , que peut-on lui répondre?

Soit M_b ($r=0, \theta, z$) en coord. cylindriques ($M_b, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}$).

Analyse des symétries de \mathcal{D}

\mathcal{D} a pour axe de révolution (M_{0z})

\Rightarrow tout plan contenant (M_{0z}) est un TTS

or \vec{G} est un vrai vecteur $\Rightarrow \vec{F} \in \bigcup_i TTS_i \Leftrightarrow \vec{G} \parallel (M_{0z})$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{G}(M_b) = G_z(M_b) \vec{e_z}}$$

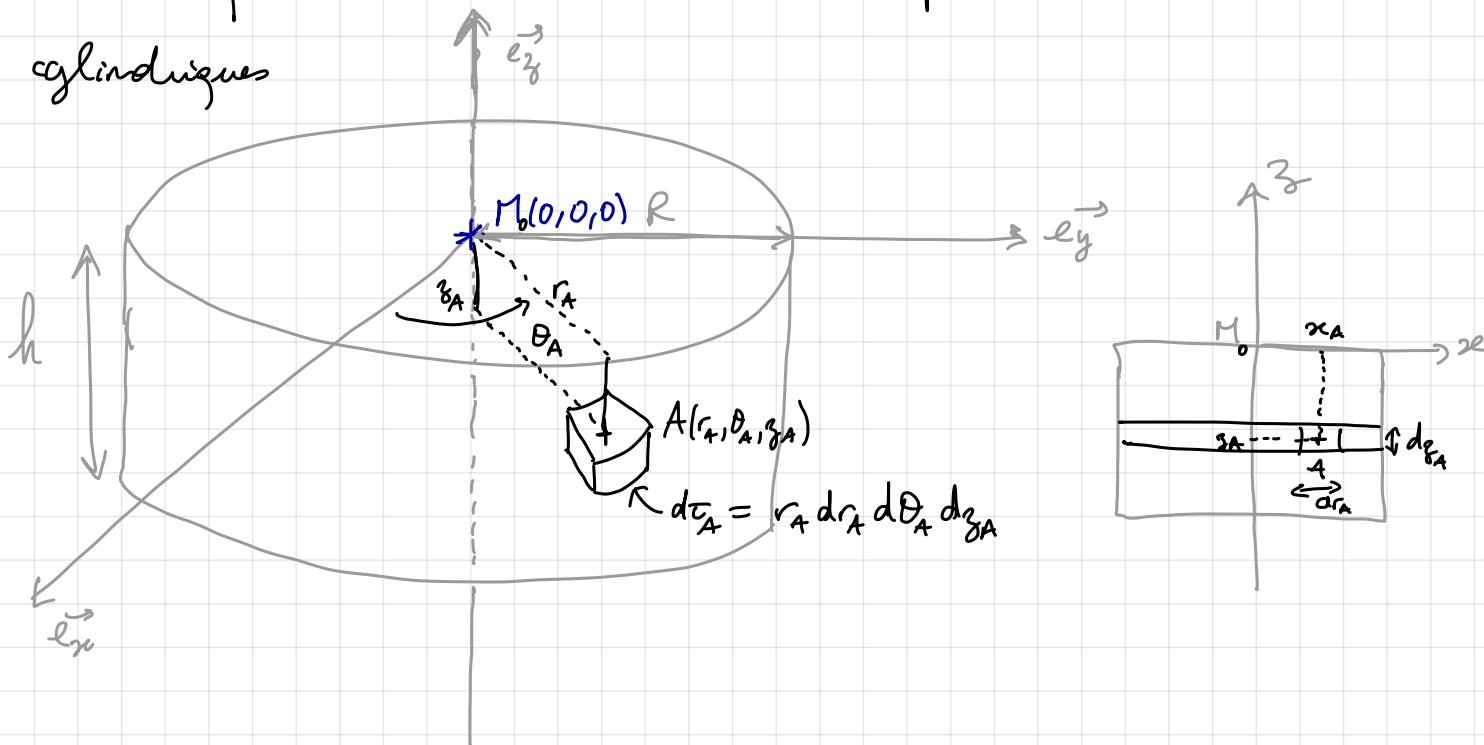
Analyse des invariances de \mathcal{D} . On utilise un repère cylindrique (r, θ, z)

\mathcal{D} est invariante par rotation à l'angle θ autour de (M_{0z})

donc: $G_\theta(M_b) = G_\theta(z)$

Conclusion: $\boxed{\vec{G}(M_b) = G_z(z) \vec{e_z}}$

Soit un point A à l'intérieur de \mathcal{D} repéré en coordonnées cylindriques



La masse μdV_A autour de A crée un champ vectoriel $\vec{d}\vec{g}$ qui en M_0 vaut : $\vec{d}G(M_0) = -G \frac{\mu dV_A}{||\vec{AM}_0||^3} \vec{AM}_0$.

L'analyse des symétries et invariances de \mathcal{D} montre que le champ résultant $\vec{G}(M)$ $\parallel \vec{e}_z$.

dans seul : $\vec{d}G(M_0) \cdot \vec{e}_z$ importe, les autres composantes seront compensées par le reste de \mathcal{D} .

On note α l'angle entre \vec{AM}_0 et \vec{e}_z .

$$\Rightarrow \vec{AM}_0 \cdot \vec{e}_z = ||\vec{AM}_0|| \cos \alpha$$

$$\text{or } \cos \alpha = \frac{z_A}{(\sqrt{z_A^2 + r_A^2})^{1/2}} \text{ et } ||\vec{AM}_0|| = (\sqrt{z_A^2 + r_A^2})^{1/2}$$

donc :

$$dG_z(M_0) = \vec{d}G(M_0) \cdot \vec{e}_z = -G \mu d \frac{z_A}{(\sqrt{z_A^2 + r_A^2})^{3/2}} r_A dr_A d\theta_A dz_A$$

Il nous faut donc calculer $G_z(M) = \int dG_z(M_0)$, i.e. :

$$G_z(M_0) = -G \mu d \int_{r_A=0}^R \int_{z_A=-h}^0 \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{z_A}{(\sqrt{z_A^2 + r_A^2})^{3/2}} r_A dr_A d\theta_A dz_A$$

Soit

$$G_g(M_0) = -2\pi G \mu_d \int_{r_A=0}^R \int_{z_A=0}^h \frac{r_A dz_A}{(r_A^2 + z_A^2)^{3/2}} dr_A dz_A.$$

$$\begin{aligned} \int_0^h dz_A z_A \left\{ \int_0^R \frac{r_A dr_A}{(r_A^2 + z_A^2)^{3/2}} \right\} &= \int_0^h dz_A z_A \left\{ \frac{1}{z_A} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z_A^2}} \right\} \\ &= \int_0^h dz_A - \int_0^h \frac{z_A dz_A}{\sqrt{R^2 + z_A^2}} \\ &= h - (\sqrt{R^2 + h^2} - R) \\ &= h + R - \sqrt{h^2 + R^2} \\ \int_0^h dz_A z_A \left\{ \int_0^R \frac{r_A dr_A}{(r_A^2 + z_A^2)^{3/2}} \right\} &= R \left(1 + \frac{h}{R} - \sqrt{1 + \left(\frac{h}{R}\right)^2} \right) \end{aligned}$$

Si l'on pose $\varepsilon = h/R$, alors :

$$\begin{aligned} G_g(M_0) &= -2\pi G \mu_d R \left(1 + \varepsilon - \sqrt{1 + \varepsilon^2} \right) \\ \Rightarrow \boxed{\vec{G}(M_0) &= -2\pi G \mu_d R \left(1 + \varepsilon - \sqrt{1 + \varepsilon^2} \right) \vec{e}_g} \end{aligned}$$

2. Dans le cas de figure $\varepsilon \ll 1$ (*i.e.*: $h \ll R$)

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow G_g(M_0) = -2\pi G \mu_d R \varepsilon + o(\varepsilon)$$

$$\boxed{G_g(M_0) = -2\pi G \mu_d h + o(\varepsilon)}$$

$$G_g(M_0) = -g \approx -9,81 \text{ m.s}^{-2} \Leftrightarrow 2\pi G \mu_d h = g$$

Avec l'hypothèse d'homogénéité, $\mu_d = \frac{m_T}{(\pi R_T^2) h}$

$$\Rightarrow G_g(r_0) = -2 G \frac{m_T}{R_T^2} \approx -2 g \Rightarrow G_g(r_0) = -g \Leftrightarrow 2 = 1 \text{ absurde !}$$

Si la Terre était plate,

On aurait une accélération de la pesanteur 2 fois plus forte !

Exercice à faire à la maison. champ \vec{G} d'un disque sur son axe

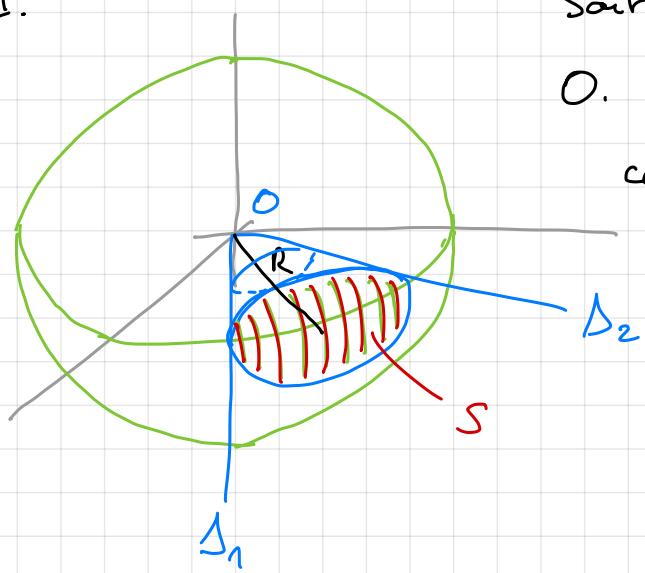
On prend le cas extrême où $\Sigma = 0$ i.e.: $h = 0$, la distribution cylindrique \mathcal{D} de rayon R devient un disque homogène ($S_{\text{disque}} = \pi R^2$)

→ Calculer le champ de gravitation exercé par \mathcal{D} en un point M de son axe de révolution situé à une distance z en fonction de $E = R/z$. Cas $E \ll 1$, que vaut $\vec{G}(M)$?

Indications: (on peut aussi faire sans)

1. Rappeler la définition de l'angle solide (dans \mathbb{R}^3), de l'angle solide élémentaire, son interprétation en termes de flux.
2. Déterminer l'angle solide d'un cône de demi-angle au sommet O .
3. Analyser les symétries et invariances de \mathcal{D}
4. Calculer $\vec{G}(M)$.

1.

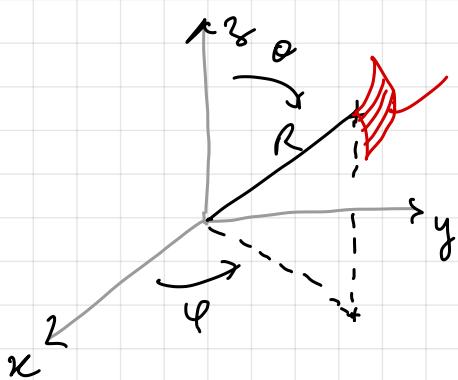


Soit deux droites Δ_1 et Δ_2 se croisant en

O . L'angle solide Ω entre Δ_1 et Δ_2

$$\text{correspond à } \Omega = \frac{\pi}{R^2}$$

où $S = \text{intersection du cône}$
formé à partir de O , Δ_1 et Δ_2
de hauteur R qcp, et de la
sphère de rayon R et de centre O .



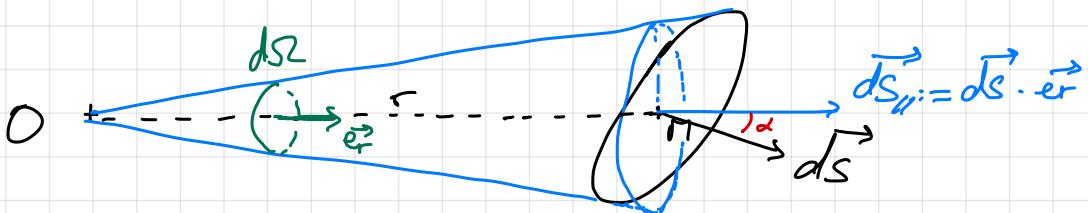
$$dS = R \sin \theta d\phi R d\theta = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow S = \int dS = R^2 \int \int \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow \Omega = \int \int \sin \theta d\theta d\phi \text{ ne dépend pas de } R !$$

Expression de l'angle solide élémentaire

Soit $d\vec{s}$ un élément de surface centré en M distant de r d'une origine O . On note $\vec{er} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$



$$dS_2 = \frac{dS_{||}}{r^2} = \frac{\vec{dS} \cdot \vec{er}}{r^2} = \frac{dS \cos \alpha}{r^2}$$

au retiendra : $dS_2 = \frac{\vec{dS} \cdot \vec{er}}{r^2}$ ♥

Interprétation en terme de flux

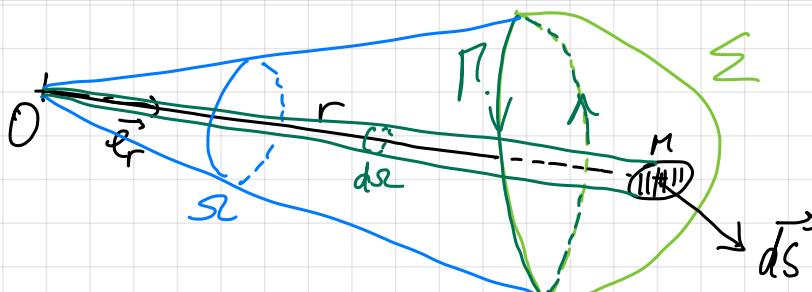
On remarque que dS_2 est le flux élémentaire du vecteur $\frac{\vec{er}}{r^2} = \vec{b}$ à travers $d\vec{s}$.

On, $\operatorname{div}\left(\frac{\vec{er}}{r^2}\right) = 0$ ($\operatorname{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 A_r) + \dots$) est dans V délimité par Σ !!

d'où $\iint_S \vec{b} \cdot d\vec{s} = 0$ ($\text{th de G.O.: } \iint_V \operatorname{div}(\vec{b}) dV = \iint_S \vec{b} \cdot d\vec{s}$)

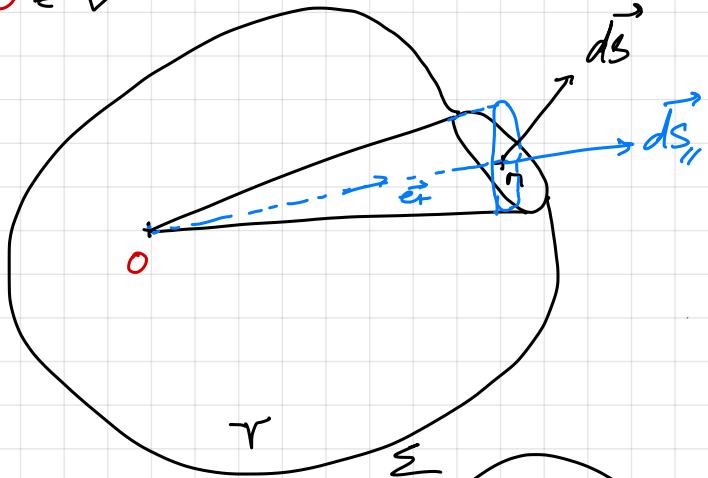
et donc le flux de \vec{b} à travers une surface ouverte Σ ne dépend que du contour sur lequel s'appuie Σ .

Ainsi $S_2 = \int dS_2 = \iint_S \frac{\vec{er} \cdot d\vec{s}}{r^2}$ ne dépend que du contour Γ de Σ .



⚠: attention $\iint_S \frac{\vec{er}}{r^2} \cdot d\vec{s} = 0$ si le point O est à l'extérieur de Σ

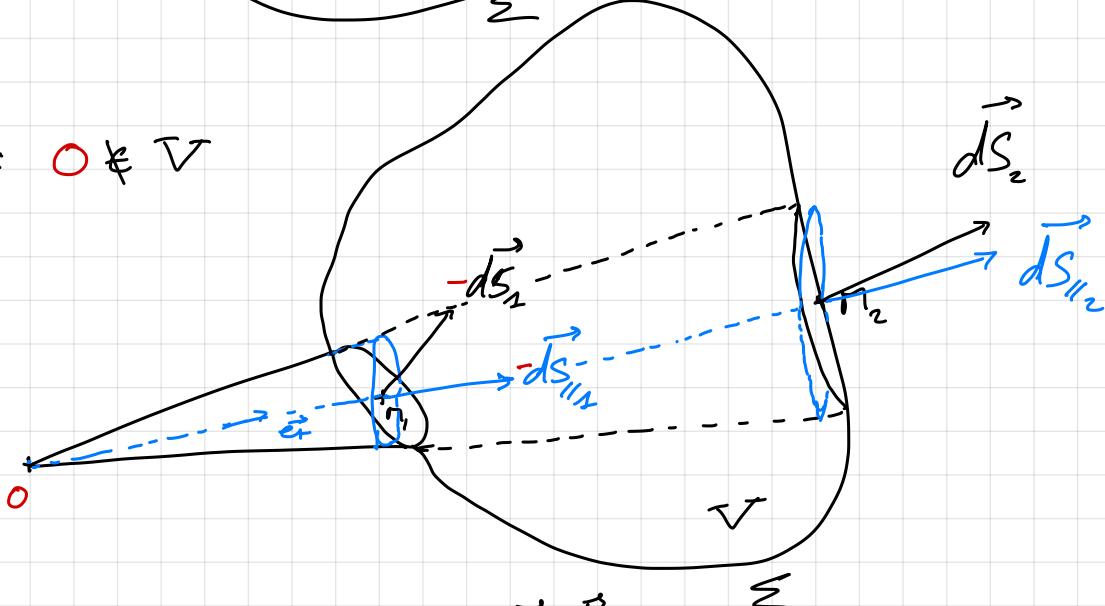
cas 1 : $O \in V$



au long de dans toutes les directions de l'espace (θ et φ)

$$\oint_{\Sigma} \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{ds}}{r^2} = \oint_{\Sigma} dS = 4\pi \neq 0$$

cas 2 : $O \notin V$



dans ce cas seulement : $\oint_{\Sigma} \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{ds}}{r^2} = 0$

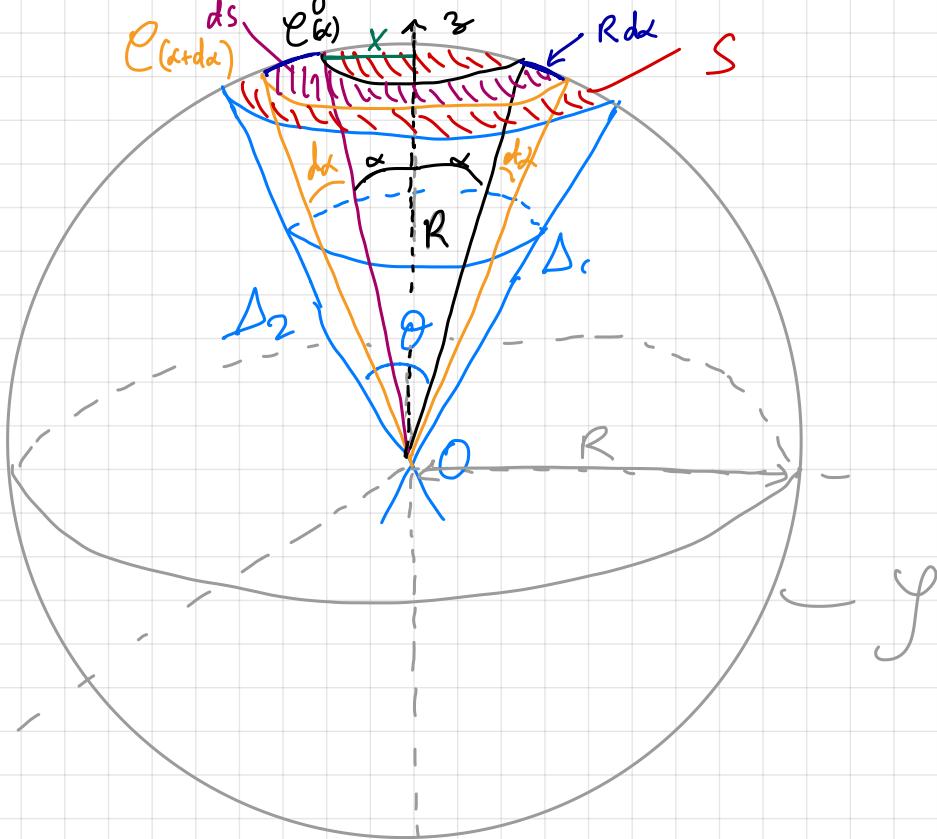
Soit ϕ le flux de $\vec{b} = \vec{e}_r/r^2$ à travers Σ , depuis $O \notin V$:

$$\begin{aligned} d\phi &= d\phi_1 + d\phi_2 \\ &= \vec{b}(\vec{r}_1) \cdot \vec{dS}_1 + \vec{b}(\vec{r}_2) \cdot \vec{dS}_2 \end{aligned}$$

$$d\phi = -dS_1 + dS_2$$

$$\underline{d\phi = 0} \Rightarrow \oint_{\Sigma} \vec{b} \cdot \vec{ds} = 0$$

2. Calculons l'angle solide d'un cône de demi-angle au sommet θ



On considère l'élément de surface dS de la portion de sphère comprise entre les intersections de la sphère de centre O et de rayon R avec deux cônes de demi-angles au sommet α et $\alpha + d\alpha$, $0 < \alpha \leq \theta$.

$$\sin \alpha = \frac{x}{R} \Rightarrow x = R \sin \alpha$$

donc le périmètre du cercle $C(\alpha)$ est: $2\pi R \sin \alpha$

et la longueur d'arc sur \mathcal{Y} entre les deux intersections est: $R d\alpha$
ainsi la surface élémentaire dS vaut:

$$dS = 2\pi R \sin \alpha \cdot R d\alpha$$

$$\Rightarrow S = \int_{\alpha=0}^{\theta} 2\pi R^2 \sin \alpha d\alpha = 2\pi R^2 [-\cos \alpha]_0^{\theta}$$

$$S = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta)$$

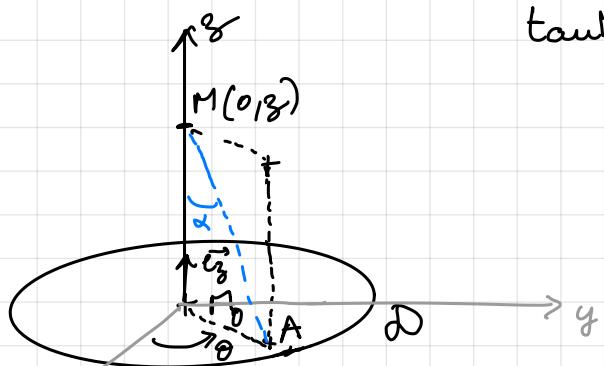
d'où : $\underline{S} = \frac{S}{R^2} = \underline{2\pi (1 - \cos \theta)}$ N

si $\theta = \pi$, espace tout entier au dessus du plan de normale (o_3)
alors : $\underline{\Omega} = 4\pi$

3. Soit $M(r=0, \theta, z)$.

De même que dans le cas d'un cylindre,
tout plan contenant ($P_{0, z}$) est π_D

$$\Rightarrow \vec{G}(M) = G_z(M) \vec{e}_z$$



D est invariante par rotation

$$d\text{angle } \theta \Rightarrow G_z(\theta) = G_z(z)$$

$$\boxed{\vec{G}(M) = G_z(z) \vec{e}_z}$$

Le principe de superposition donne :

$$d\vec{G}(M) = -G \frac{\sigma_d dS_A}{||\vec{AM}||^2} \vec{u}_{AM}, \quad \vec{u}_{AM} = \frac{\vec{AM}}{||\vec{AM}||^2}$$

d'après les invariances et symétries

seules la composante selon \vec{e}_z

importe, donc :

$$dG_z(M) = -G \sigma_d \frac{\vec{u}_{AM} \cdot dS_A \vec{e}_z}{||\vec{AM}||^2}$$

on reconnaît un angle solide élémentaire $d\Omega = \frac{\vec{u}_{AM} \cdot dS_A \vec{e}_z}{||\vec{AM}||^2}$

$$\Rightarrow G_z(M) = \int_D dG_z(M) = -G \sigma_d \iint_D d\Omega$$

or $\iint_D d\Omega = \Omega$ correspond à l'angle solide d'un cône de demi-angle au sommet θ tel que :

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{R}{z} \\ \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \end{cases}$$

$$Q2 \Rightarrow \Omega = 2\pi (1 - \cos \theta) = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{R}{z})^2}}\right)$$

d'où :

$$\boxed{\vec{G}(M) = -2\pi G \sigma_d \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{R}{z})^2}}\right) \vec{e}_z}$$

À grande distance, ie $\varepsilon \ll 1 \Leftrightarrow R \ll \gamma$

$$(1 + \varepsilon^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow G_g(m) = -G \frac{m d}{R^2} \varepsilon^2 \quad (\sigma_d \pi R^2 = m d)$$

$$G_g(r) = -G \frac{m d}{r^2}$$

Soit $\boxed{\vec{F}(M) = -G \frac{m d}{r^2} \vec{e}_g + o(\varepsilon = \gamma_g)}$

↳ on note la dépendance en $\frac{\vec{r}_M}{||\vec{r}_M||^3}$ caractéristique à longue distance quelque soit \mathcal{D} .

3- Propriétés du champ gravitationnel

a. Analogie formelle avec le champ électrostatique

Il s'agit d'étudier un champ vectoriel de \mathbb{R}^3 à caractère central et conservatif en " $1/r^2$ " qui, quand créé par une source placée en $O(m_0)$, prend la forme:

$$\forall M, \vec{G}(M) = \frac{K_G}{r^2} \vec{e}_r, \quad r = \|\vec{OM}\|, \quad \vec{e}_r = \vec{OM}/r, \quad K_G = -G \pi m_0 < 0$$

Il y a une complète analogie formelle avec le champ électrostatique \vec{E} créé par une source placée en $O(q_0)$:

$$\forall M, \vec{E}(M) = \frac{K_E}{r^2} \vec{e}_r, \quad K_E = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \quad | > 0 \text{ si } q_0 > 0 \\ | < 0 \text{ sinon}$$

→ on s'attend donc à découvrir les mêmes propriétés et c'est une bonne occasion de réviser le concept de champ et ceux connexes.

b. \vec{G} dérive d'un potentiel scalaire

On a montré que le champ de force exercé par un centre de force O en un point M, est conservatif et central:

$$(I.2.O) \Leftrightarrow \vec{F}(r) = -\vec{\text{grad}}_M(E_p(r)) , r = \|\vec{OM}\|$$

soit avec la définition (II.1.O) de \vec{G} :

$$\begin{aligned} m\vec{G}(r) &= -\vec{\text{grad}}_M(E_p(r)) \\ \Leftrightarrow \vec{G}(r) &= -\vec{\text{grad}}_M\left(\frac{E_p(r)}{m}\right) \\ &\quad \text{un} \\ &= V(r) \end{aligned}$$

\vec{G} est
conservatif
et central

Le champ de gravitation \vec{G} dérive donc d'un potentiel scalaire V défini comme l'énergie potentielle de gravitation par unité de masse.

Pour un centre de force O : $\exists V$ une fonction continue de r

$$\forall M(\vec{r}, m), V(r) := E_p(r)/m , r = \|\vec{r}\| = \|\vec{OM}\| \quad (\text{II.3.O})$$

tel que: $\vec{G}(r) = -\vec{\text{grad}}_M(V) \quad (\text{II.3.1}) \quad [\text{éq. locale}]$

→ exercice page suivante(bis) appliquant cette relation.

On a vu au (II.1.3) et (II.1.4) que le principe de superposition s'applique sur \vec{G} , il s'applique alors également sur V .

→ exercice page suivante pour calculer V à partir de \vec{G}

(II.3.1) est une relation locale, i.e.: elle donne \vec{G} en chaque point M de l'espace. Initialement, le concept de champ s'introduit à partir de forces d'interaction à distance, mais, (II.3.1) et conséquemment, permettent de considérer un champ comme défini en chaque point de l'espace.

→ exercice :

1) déterminer le potentiel $V(M)$ créé en M par une particule de masse m_0 située en O (centre de force).

$$(II.1.1) \Leftrightarrow \vec{G} = -G \frac{m_0}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = -\vec{\text{grad}}(V(r))$$

au $\boxed{V(r) = -G \frac{m_0}{r} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{dV}{dr} = G \frac{m_0}{r^2}}$
(II.3.1*)

2) Déterminer le potentiel $V(M)$ créé en M par une distribution de masse continue μ de masse volumique μ .

$$(II.1.4) \Leftrightarrow \vec{G}(M) = -G \iiint_{A \in \Omega} \frac{\mu(A) d\tau_A}{\|\vec{AM}\|^3} \vec{AM} \quad \text{"Champ en } 1/r^2\text{"}$$

Si l'on pose : $\boxed{V(M) := -G \iiint_{A \in \Omega} \frac{\mu(A) d\tau_A}{\|\vec{AM}\|} \quad \text{"Potentiel en } 1/r\text{"}}$
(II.3.1*)

alors :

$$+\vec{\text{grad}}(V(M)) = -G \vec{\text{grad}} \left(\iiint_{A \in \Omega} \frac{\mu(A) d\tau_A}{\|\vec{AM}\|} \right).$$

or le théorème de Leibniz s'applique ($\mu(A)$ est "gentille") au inverser dérivées et intégrales, et donc :

$$\vec{\text{grad}}(V(M)) \stackrel{*}{=} \vec{\text{grad}}_M V(M) = -G \iiint_{A \in \Omega} \vec{\text{grad}}_M \left(\frac{\mu(A) d\tau_A}{\|\vec{AM}\|} \right)$$

$$= -G \iiint_{A \in \Omega} \mu(A) \vec{\text{grad}}_M \left(\frac{1}{\|\vec{AM}\|} \right) d\tau_A$$

repère de
; coordonnées sphériques
de centre A .

$$= +G \iiint_{A \in \Omega} \frac{\mu(A) d\tau_A}{\|\vec{AM}\|^2} \vec{e}_{\vec{AM}}, \quad \vec{e}_{\vec{AM}} := \frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|}$$

d'où

$\boxed{-\vec{\text{grad}}(V(M)) = -G \iiint_{A \in \Omega} \frac{\mu(A) d\tau_A}{\|\vec{AM}\|^3} \vec{AM} = \vec{G}(M)}$

Exercice: Pression au centre de la Terre.

On approche la Terre à une boule homogène de masse volumique: $\mu_m = 5,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$

- En considérant l'équilibre mécanique d'un petit volume maintenir que: $P + \mu_m V = \text{cste}$, où P est la pression et V le potentiel de gravitation à l'intérieur de la Terre.

- On maintiendra plus tard dans le cours que le champ de gravité à l'intérieur d'une boule homogène de rayon R est:

$$\vec{G}(r) = -G \frac{mr}{R^3} \hat{er}$$

sait:

$$\vec{G}(r) = \frac{\vec{r}}{R} \cdot \vec{g}_0, \quad \vec{g}_0 = -G \frac{m}{R^2} \hat{er}$$

Déterminer la pression au centre de la Terre P_c .

A.N. avec $R_T = 6378 \text{ km}$ et $g_0 = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Commentez.

On considère la Terre comme une phase condensée de masse volumique μ_m et de pression P .

L'équilibre des forces de pression et de la force gravitationnelle s'exerçant sur un élément de volume $d\tau$ s'écrit:

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \overline{\underline{F}} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{dF}_P = -\vec{\text{grad}}(P) d\tau \\ \vec{dF}_G = \mu_m d\tau \vec{G} \end{array} \right. \\ \vec{O} = \vec{dF}_P + \vec{dF}_G \Leftrightarrow \vec{\text{grad}}(P) = \mu_m \vec{G} \end{math>$$

Or $\exists V | \vec{G} = -\vec{\text{grad}}(V)$ donc $\vec{\text{grad}}(P) = -\mu_m \vec{\text{grad}}(V)$

puisque $\mu_m = \text{cste}$, cela donne: $\boxed{\bar{g} \cdot \text{cste} (P + \mu_m V) = 0}$

s'ouvre

$$P + \mu_m V = \text{cste}$$

$$2. \quad P + \mu_m V = P_0 + \mu_m V_0$$

où P_0 et V_0 sont les données à la surface

$$\Rightarrow P(r) = P_0 + \mu_m (V_0 - V(r))$$

$$\Rightarrow P_c = P(r=0) = P_0 + \mu_m (V_0 - V(0))$$

$$\text{ou } V(r) = - \int G(r) dr + \text{cste}$$

$$\text{où: } G(r) = -G \frac{m r}{R^3} = -g_0 \left(\frac{r}{R}\right)$$

$$V(r) = + g_0 \int \frac{r}{R} dr + \text{cste}$$

$$V(r) = + \frac{g_0}{R_T} \frac{r^2}{2} + \text{cste}$$

$$\text{ou } V(r=R_T) = V_0 \Leftrightarrow + \frac{g_0 R_T}{2} + \text{cste} = V_0 \Leftrightarrow \text{cste} = V_0 - \frac{g_0 R_T}{2}$$

$$\text{d'où } V_0 - V(r) = + g_0 \frac{R_T}{2} - \frac{g_0}{R_T} \frac{r^2}{2}$$

$$\Rightarrow V_0 - V(0) = + g_0 \frac{R_T}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_c = P_0 + \mu_m g_0 \frac{R_T}{2} = P_0 \left(1 + \frac{\mu_m g_0 R_T / 2}{P_0} \right)}$$

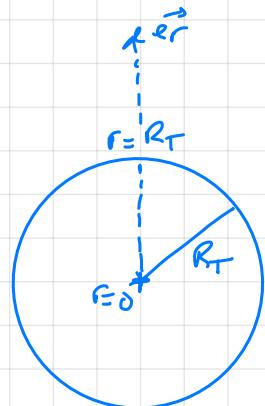
$$\text{AN: } \mu_m = 5,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

$$R_T = 6378 \text{ km}$$

$$g_0 = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$P_0 = 1,013 \text{ bar}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_c = 1,7 \cdot 10^{11} \text{ Pa} = 1,7 \cdot 10^6 \text{ P}_0}$$



On retrouve bien l'ordre de grandeur : la pression au centre de la Terre est de quelques millions d'atmosphère.

Cependant le calcul est grossier car La Terre n'est pas une boule homogène ; le noyau est bien plus lourd (33% de la masse, pour 17% du volume) !

Pour affiner le calcul il faut prendre un profil $\mu(r)$ adapté !

c. Conséquences sur la circulation, les lignes de champ et équipotentielles

La relation (II.3.1) est une relation "locale" (elle exprime une propriété de \vec{G} en chaque point M). Pour définition du gradient, on peut déduire une relation globale :

$$dV := \vec{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Soit: } dV = -\vec{G} \cdot d\vec{M} \Leftrightarrow V = - \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r} + \text{cste}$$

$$\text{ou encore: } \boxed{V(M_2) - V(M_1) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{G} \cdot d\vec{r}} \quad [\text{éq. globale}]$$

(II.3.2)

Autrement dit: la circulation de \vec{G} le long d'un contour C d'un point M_1 à M_2 est indépendante de C (= le "parcours").

Remarque: Ce n'est rien d'autre que la propriété du travail d'une force conservative;

• \vec{F} est conservatif: $\vec{F} = -\vec{\text{grad}}(\mathcal{E}_p)$,

$$\Rightarrow \boxed{W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{M} = \int_{M_1}^{M_2} -d\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(M_1) - \mathcal{E}_p(M_2)} \quad \begin{matrix} \text{indép.} \\ \text{du chemin} \end{matrix}$$

• $\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}$ est conservatif: $\vec{G} = -\vec{\text{grad}}(V)$

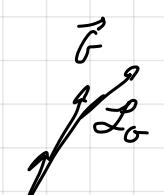
$$\Rightarrow \boxed{\int_{M_1}^{M_2} \vec{G} \cdot d\vec{M} = V(M_1) - V(M_2)} \quad \begin{matrix} \text{indép.} \\ \text{du chemin} \end{matrix}$$

En particulier: $\boxed{\oint_C \vec{G} \cdot d\vec{r} = 0} \quad (\text{II.3.3.})$

(la circulation de \vec{G} sur un contour fermé est nulle)

\Rightarrow Une ligne de champ \vec{G} ne peut avoir la forme d'une boucle fermée sur elle-même.

La circulation du champ sur une ligne de champ est ≥ 0 ...


 ligne de champ \vec{G}
 définie par
 $d\vec{r} \wedge \vec{G} = 0$

De (II.3.1) on déduit que: \vec{G} est normal aux surfaces équipotentielles et les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

Preuve en exercice: pour 1

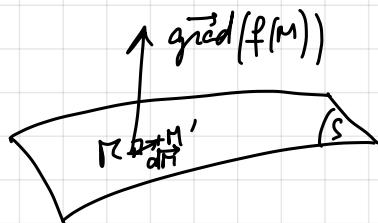
On rappelle qu'une surface de \mathbb{R}^3 définie par $f(\vec{r}) = \text{cste}$ admet le vecteur $\vec{\text{grad}}(f)$ comme vecteur normal. En effet:

$$df := \vec{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{r}$$

\Rightarrow si M et $M' \in S$, une surface de niveau $f(\vec{r}) = \text{cste}$

$$df = f(M') - f(M) = 0 \quad \text{et} \quad d\vec{M} = \vec{r}(M') - \vec{r}(M) \in S$$

$$\Rightarrow \vec{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{M} = 0 \Leftrightarrow \vec{\text{grad}}(f) \perp S$$



sous 1 $dV = -\vec{G} \cdot d\vec{r}$

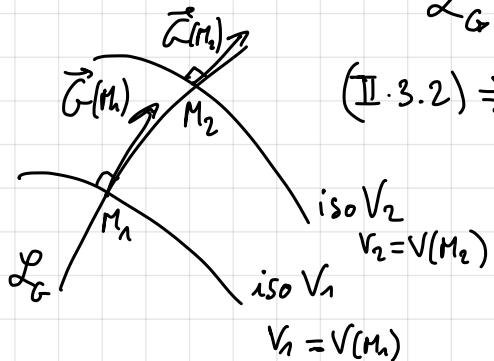
si $dV = 0 \Rightarrow \vec{G} \perp d\vec{r}$ ou

sous 2 :

$$\vec{G} = -\vec{\text{grad}}(V) \Rightarrow \text{cgfd.}$$

pour 2 : Considérons une ligne de champ L_G ($M \in L_G \Leftrightarrow d\vec{r} \perp \vec{G} = \vec{0}$) rencontrant $\text{iso}V_1$ et $\text{iso}V_2$ aux points M_1 et M_2 . Si \vec{G} oriente

L_G de M_1 vers M_2 ; nous avons :



$$(II.3.2) \Rightarrow V_2 - V_1 = \int_{M_1}^{M_2} -\vec{G} \cdot d\vec{M} < 0 \quad (\text{car } \int_{M_1}^{M_2} \vec{G} \cdot d\vec{M} > 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{V_2 < V_1} \quad \text{cgfd.}$$

$$V_2 = V(M_2)$$

$$V_1 = V(M_1)$$

d. Le champ \vec{G} est instationnel

Premre : exercice : montrer que $\vec{\text{rot}}(\vec{G}) = \vec{0}$ (II. 3. 4) éq. locale

Indication : Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une bON de \mathbb{R}^3 et si x_i est la coord. spatiale relative à \vec{e}_i , On montre qu'une différentielle totale $dV = \sum_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} dx_i$ doit vérifier : $\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_j}, \forall (i \neq j)$ [Relations de Maxwell]

On a montré que le champ de force de gravitation \vec{F} est conservatif et donc que $\vec{G} = \vec{F}/m$ l'est aussi.

Par conséquent dV est une différentielle totale

$$\text{et : } dV = -\vec{G} \cdot d\vec{r}$$

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une bON de \mathbb{R}^3 dans laquelle (G_1, G_2, G_3) sont les composantes de \vec{G}

Puisque dV est une différentielle totale, il doit y avoir égalité entre ses dérivées partielles croisées (relation de type Maxwell) :

$$\int dV = \sum_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} dx_i$$

et

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_j}, i \neq j$$

$$\text{Or } dV = -\vec{G} \cdot d\vec{r} = -G_1 dx_1 - G_2 dx_2 - G_3 dx_3$$

$$\text{donc : } \frac{\partial G_i}{\partial x_j} = \frac{\partial G_j}{\partial x_i}, i \neq j$$

$$\text{càd : } \partial_{x_j} G_i - \partial_{x_i} G_j = 0$$

et comme :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{G} = \begin{bmatrix} \partial_{x_2} G_3 - \partial_{x_3} G_2 \\ -\partial_{x_1} G_3 + \partial_{x_3} G_1 \\ \partial_{x_1} G_2 - \partial_{x_2} G_1 \end{bmatrix}$$

on en conclut $\vec{\text{rot}}(\vec{G}) = \vec{0}$

e. Le champ gravitationnel satisfait au théorème de Gauß

Le théorème de Gauß est une relation champ - source : le flux de \vec{G} à travers une surface fermée n'est pas conservatif,

$$\oint\limits_S \vec{G} \cdot d\vec{s} = -4\pi G \iiint\limits_{V \in V} \mu(\vec{r}) d\tau . \quad (\text{II-3.5})$$

où l'on aura considéré une source \mathcal{D} de masse volumique μ contenue dans S

preuve : Soit \mathcal{D} délimitée par une surface fermée S , formant un volume V dans lequel la masse volumique est $\mu(\vec{r})$.

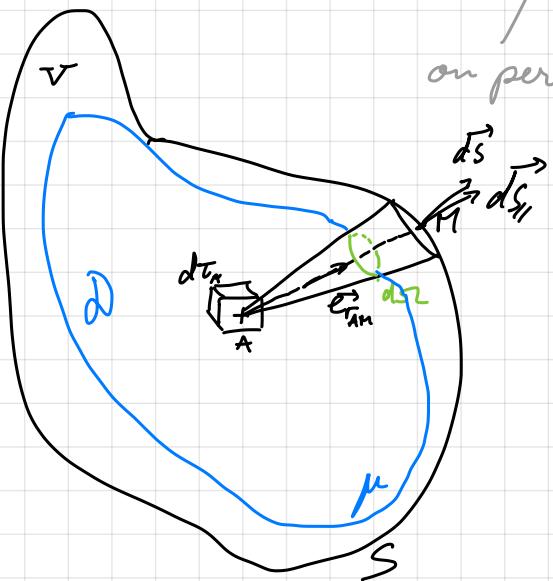
le champ \vec{G} créé par \mathcal{D} est donné par le principe de superposition :

$$\vec{G} = -G \iiint\limits_{A \in V} \frac{\mu(A) d\tau_A}{||\vec{r}_m||^2} \vec{r}_m$$

d'où l'expression du flux :

$$\oint\limits_S \vec{G} \cdot d\vec{s} = -G \iiint\limits_{A \in V} \mu(A) \left(\oint\limits_S \frac{\vec{r}_m \cdot d\vec{s}}{||\vec{r}_m||^2} \right) d\tau_A$$

on permute les intégrations



On, $\forall A \in V$ (dans à l'intérieur de S)

$$\oint\limits_S \frac{\vec{r}_m \cdot d\vec{s}}{||\vec{r}_m||^2} = \oint\limits_S d\sigma = 4\pi$$

$$\left(\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi \right)$$

d'où :
$$\oint\limits_S \vec{G} \cdot d\vec{s} = -4\pi G \iiint\limits_{A \in V} \mu(A) d\tau_A$$

où m_{int} est la masse contenue

dans le volume délimité par S

cqd.

Forme Locale

Le théorème de Green-Ostrogradski, pour un volume V , limité par une surface fermée S , donne :

$$\iint_S \vec{G} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{G}) d\tau$$

Toutefois (II. 3.5) donne :

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{G}) d\tau = -4\pi G \iiint_{r \in V} \mu(r) d\tau$$

Soit

$$\forall r \in D, \boxed{\operatorname{div}(\vec{G}(r)) = -4\pi G \mu(r)} \quad (\text{II. 3.6})$$

C'est la forme locale du théorème de Gauss.

4. Calcul du champ

a. Via l'équation de Poisson

Le laplacien du potentiel scalaire de gravitation ΔV s'écrit

$$\Delta V = \operatorname{div}(\vec{\text{grad}}(V))$$

$$\Delta V = -\operatorname{div}(\vec{G})$$

et (II.3.6) \Rightarrow
$$\boxed{\Delta V = +4\pi G \mu(\vec{r})} \quad (\text{II.3.7})$$

C'est une équation aux dérivées partielles (elliptique) du second ordre. Sa résolution requiert la théorie des distributions donc: \rightarrow hors programme.

Cependant, elle permet connaissant μ de déterminer V , étant données des conditions aux limites.

On note l'analogie avec l'équation de Poisson de l'électrostatique:

$$\left\{ \begin{array}{l} -4\pi G \leftrightarrow +\frac{1}{\epsilon_0} \quad (\text{interaction}) \\ \mu \leftrightarrow \rho \quad (\text{source}) \end{array} \right.$$

$$\hookrightarrow \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \leftrightarrow \Delta V - 4\pi G \mu = 0$$

Une fois V déterminé, on déduit \vec{G} en calculant
$$\vec{G} = -\vec{\text{grad}}(V).$$

La solution de (II.3.7) correspondant à une source de masse D de masse volumique μ dans un volume fini V avec en C.L.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0,$$

est

$$\boxed{V(r) = -G \iiint_{\vec{r} \in V} \frac{\mu(\vec{r}') d\vec{r}'}{r}}$$

On retrouve le principe de superposition ! cf exo du II.3.6.

De même si l'on considère $\mu=0$, cas d'une source ponctuelle \mathcal{D}^o , (II.3.7) devient l'équation dite de Laplace.

$$\Delta V = 0,$$

dont la résolution fait aussi appel à la théorie des distributions et requiert des C.L. La solution trouvée, dite harmonique, est :

$$V(\vec{r}) = -G \frac{m}{r},$$

où : $r = \|\vec{r}\|$, et m est la masse de \mathcal{D}^o .

là aussi on retrouve le résultat de l'exo du II.3.b, et on peut vérifier que $\Delta V = 0$.

b. Via le théorème de Gauß (application aux corps à symétrie)

Le calcul \vec{G} via le TG requiert une analyse des symétries et invariances de \mathfrak{D} pour déduire la nullité au non, d'une ou de certaines composante(s) de \vec{G} , ainsi que leurs dépendances au non vis à vis de certaines coordonnées.

Application aux corps à symétrie sphérique

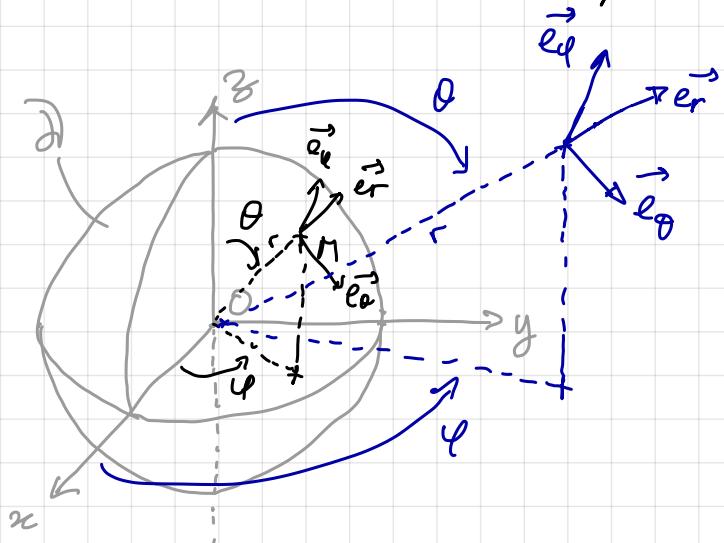
Soit \mathfrak{D} une boule concentriquement homogène de masse m , de centre O , de rayon R et de masse volumique $\mu(r)$ au TMED , $r = \|\overrightarrow{OM}\|$.

On suppose de plus un profil de décroissance parabolique

pour $\mu(r)$:

$$\mu(r) = \mu_0 \left(1 - \kappa \frac{r^2}{R^2}\right), \kappa < 1$$

(noyau lourd au centre).



\mathfrak{D} possède la symétrie sphérique.

Soit $M \in \mathfrak{D}$, tant plan contenant \overrightarrow{OM} est plan de symétrie de \mathfrak{D} \vec{G} est un vecteur $\Rightarrow \vec{G}$ appartient à tant ces plans, c'est $\vec{G} = G_r \vec{e}_r$

\mathfrak{D} est invariante par rotations d'angle θ ou φ , par conséquent

$$\forall M \in \mathfrak{D}, G_r(M) \equiv G_r(r) \equiv G(r)$$

d'où en conclusion: $\boxed{\forall M \in \mathfrak{D}, \vec{G}(M) = G_r(r) \vec{e}_r, r = \|\overrightarrow{OM}\| \leq R}$

La même analyse s'applique pour le point M' hors de \mathfrak{D} ,

et donc: $\boxed{\forall M, \vec{G}(M) = G(-r) \vec{e}_r, \forall r = \|\overrightarrow{OM}\|}$

Calcul pour $M \in \partial$ (intérieur)

Soit Σ_G la surface de Gauß suivante : sphère de centre O et de rayon $r = \|O\vec{M}\|$, passant par M .

Soit Φ le flux de \vec{G} à travers Σ_G :

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_{\Sigma_G} \vec{G} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Sigma_r} G(r) \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r ds \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} G(r) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi = 4\pi r^2 G(r)} \quad (\text{II.3.8})$$

Si V_G est le volume délimité par Σ_G , le Théorème de Gauß donne alors :

$$\overline{\Phi} = -4\pi G \iiint_{V_G} \mu(r') d^3 r' = m_{\text{int}}$$

Or $\mu(r') = \mu_0 \left(1 - \kappa \frac{r'^2}{R^2}\right)$, profil parabolique.

$$\text{donc } \overline{\Phi} = -4\pi G \mu_0 \int_{r'=0}^r \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(1 - \kappa \frac{r'^2}{R^2}\right) r'^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr'$$

$$\overline{\Phi} = -4\pi G \mu_0 \left(\frac{r^3}{3} 4\pi - \frac{\kappa}{R^2} 4\pi \cdot \frac{1}{5} r^5 \right)$$

$$\boxed{\overline{\Phi} = -(4\pi)^2 G \mu_0 r^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{\kappa}{5} \frac{r^2}{R^2} \right)} \quad (\text{II.3.9.})$$

d'où :

$$(\text{II.3.8}) = (\text{II.3.9}) \iff \boxed{G(r) = -4\pi G \mu_0 r \left(\frac{1}{3} - \frac{\kappa}{5} \frac{r^2}{R^2} \right), r \leq R}$$

(II.3.10)

En particulier à la surface de ∂ (i.e pour $r=R$) :

$$G(R) = -4\pi G \mu_0 R \left(\frac{1}{3} - \frac{\kappa}{5} \right) = -G \frac{m}{R^2},$$

où l'on aura identifié la masse m de la boule ∂ à densité parabolique : $\boxed{m = 4\pi \mu_0 R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{\kappa}{5} \right)}$

(II.3.11)

$$\text{On a donc : } \mu_0 = \frac{m}{4\pi R^3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{\kappa}{5}} = \frac{m}{4\pi R^3} \cdot \frac{3}{1 - \frac{3}{5}\kappa}$$

d'où :

$$G(r) = -\frac{Gm}{R^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{5}\kappa} \cdot \left(\frac{r}{R}\right) \left(1 - \frac{3}{5}\kappa \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

(II.3.12)

Pour $\kappa=0$, on retiendra la formule du champ gravitationnel à l'intérieur d'une boule homogène de masse m et de rayon R :

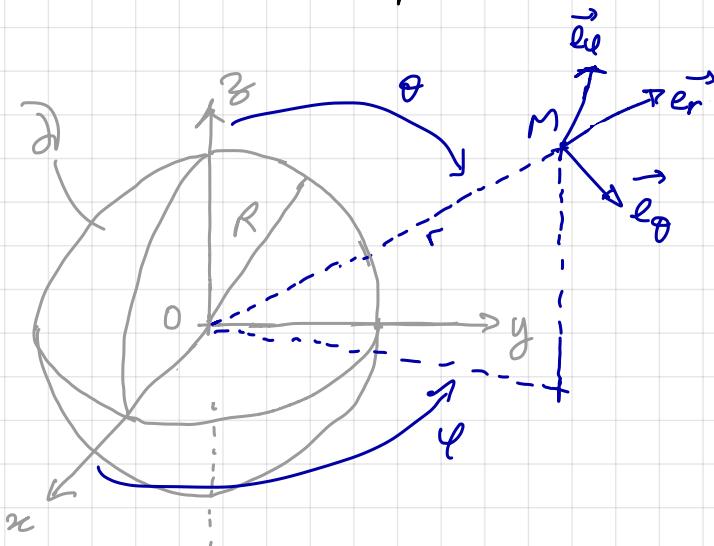
$$G(r) = -G \frac{mr}{R^3} \quad r \leq R$$

(II.3.13)

$\kappa=0$
(boule homogène)

Calcul pour $M \notin \mathcal{D}$ (extérieur)

Σ_G est la sphère de centre O passant par M .



$$\Phi := \oint_{\Sigma_G} \vec{G} \cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 G(r), \quad r > R$$

Le théorème de Gauß donne : $\Phi = -4\pi G m_{\text{int}} = -4\pi G m$, où m est donnée par (II.3.11).

D'où, $G(r) = -G \frac{m}{r^2}$ (II.3.12)

⇒ on retrouve l'expression (II.3.1*) du champ créé par une particule de masse m placée en O .

Ainsi, à l'extérieur d'une distribution de masse à symétrie sphérique, \mathcal{D} , le champ \vec{G} créé est le même que celui qui serait produit par une particule placée en O et où serait concentrée toute la masse de \mathcal{D} .

C'est ce qui justifie la description "particulaire" de l'interaction.

Nous allons maintenant examiner dans quelle mesure l'expression (II.3.12) "suit" lorsque \mathcal{D} n'a plus la symétrie sphérique. Mais avant, un exercice, maintenant que l'on connaît le champ \vec{G} d'une boule; on va découvrir le principe de la détection de cavité au degrés.

Et encore avant, un exercice qui donne un résultat classique: exo: à partir de (II.3.13) déterminer le potentiel $V(r)$ à l'intérieur d'une boule homogène de masse M et de rayon R sachant que V est continu en $r=R$.

(II.3.13)

$$G(r) = - \frac{dv}{dr} \quad \downarrow \quad V = G \frac{M}{R^3} \int r dr + \text{cste}$$

$$\text{soit } V(r) = G \frac{Mr^2}{2R^3} + \text{cste}$$

$$\text{Or } V(r=R_-) = V(r=R_+) = -G \frac{\pi}{R}$$

$$\text{donc } G \frac{MR^2}{2R^3} + \text{cste} = -G \frac{M}{R} \Leftrightarrow \text{cste} = -\frac{3}{2} G \frac{M}{R}$$

$$\text{d'où: } V(r) = \frac{GM}{2R} \left(\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 3 \right), r \leq R.$$

Exercice : Introduction au principe de la gravimétrie : détection de cavités.

1. Rappeler l'expression du champ \vec{G} à l'intérieur d'une boule homogène de rayon R et de masse M .
2. On considère que la Terre est une boule homogène de rayon R .
On suppose la présence d'une cavité à la profondeur h du sol, de rayon R_{cav} (forme sphérique).
On note \vec{G}_{plein} la valeur du champ de gravité au niveau du sol en l'absence de cavité.

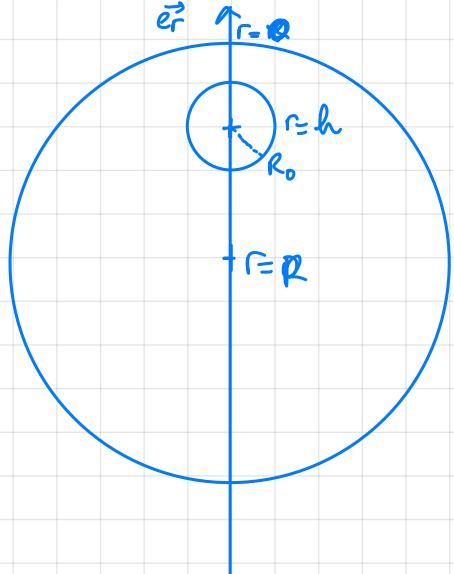
Montrer que le champ de gravité au niveau du sol \vec{G}_{sol} modifié par la cavité, s'écrit :

$$\boxed{\vec{G}_{\text{sol}} = \vec{G}_{\text{plein}} \left(1 - \frac{R_{\text{cav}}^3}{h^2 R} \right)}$$

1) $\vec{G} = -G \frac{M r}{R^3} \vec{e}_r, r \leq R$

commentez.

2) Faisons un schéma



Supposons l'absence de cavité

$$\vec{G}_{\text{plein}}(r=0) = -G \frac{M}{R^2} \vec{e}_r$$

où M est la masse telle que si l'on remplissait la cavité :

$$M = \mu \frac{4}{3} \pi R^3$$

avec μ la masse volumique de la Terre (homogène)

La masse de la cavité M_{cav} remplie

vérifie alors : $M_{\text{cav}} = \mu \frac{4}{3} \pi R_{\text{cav}}^3 = M \left(\frac{R_{\text{cav}}}{R} \right)^3$

Le champ en $r=0$ au niveau du sol est modifié par la cavité :

$\vec{G}_{sol} = \vec{G}_{\text{plein}} - \vec{G}_{\text{cav}}$, en vertu du principe de superposition que vérifie le champ gravitationnel.

Puisque le barycentre de la cavité emploie est en $r=h$

$$\vec{G}_{\text{cav}}(r=0) = -G \frac{M_{\text{cav}}}{h^2} \hat{e}_r.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } \vec{G}_{sol}(r=0) &= -G \frac{M}{R^2} \hat{e}_r + G \frac{M_{\text{cav}}}{h^2} \hat{e}_r \\ &= -G \frac{M}{R^2} \hat{e}_r \left(1 - \frac{M_{\text{cav}}}{M} \cdot \frac{R^2}{h^2} \right) \end{aligned}$$

or $\frac{M_{\text{cav}}}{M} = \frac{R_{\text{cav}}^3}{R^3}$

donc $\boxed{\vec{G}_{sol}(r=0) = \vec{G}_{\text{plein}}(r=0) \left(1 - \frac{R_{\text{cav}}^3}{h^2 R} \right)}.$

↑
Champ mesuré en l'absence de cavité.

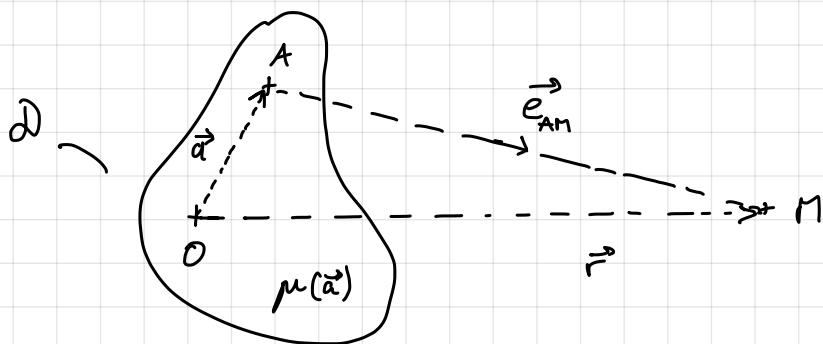
Plus la cavité est profonde et plus il est difficile de la détecter.

Plus la cavité est grande et plus il est facile de la détecter.

c. Expression à grande distance (application aux D à symétrie de révolution en exercice).

Nous allons analyser l'expression du potentiel scalaire V de gravitation à "longue distance", c'est à dire en un point M situé à une grande distance du barycentre O de la distribution de matière \mathcal{D} créant V .

On utilise les notations suivantes :



D'après le principe de superposition :

$$V(\vec{r}) = -G \int_{\vec{\alpha} \in \mathcal{D}} \frac{\mu(\vec{\alpha}) \vec{e}_{AM}}{\|\vec{AM}\|} d\vec{\alpha}$$

$$\text{or } \forall A, \vec{AM} = \vec{r} - \vec{\alpha} \Rightarrow \|\vec{AM}\|^2 = r^2 + \alpha^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow \|\vec{AM}\| = r \left(1 + \left(\frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{2 \vec{\alpha} \cdot \vec{r}}{r^2} \right)^{1/2}$$

$$\text{On pose } \varepsilon := \alpha/r \text{ et } f(\varepsilon) = \left(\frac{\alpha}{r} \right)^2 - 2 \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{r}}{r^2} = -2\varepsilon \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_r + \varepsilon^2$$

il vient alors :

$$\frac{1}{\|\vec{AM}\|} = \frac{1}{r} \cdot (1 + f(\varepsilon))^{-1/2} = \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} f(\varepsilon) + \frac{3}{8} f(\varepsilon)^2 + o(f(\varepsilon)) \right).$$

$$f(\varepsilon)^2 = 4\varepsilon^2 (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_r)^2 - 4\varepsilon^3 (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_r) + \varepsilon^4,$$

$$\text{donc: } \frac{1}{\|\vec{AM}\|} = \frac{1}{r} \cdot \left(1 + \varepsilon (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_r) + \frac{3}{2} \varepsilon^2 (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_r)^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \right)$$

En injectant dans $V(\vec{r})$, on obtient alors :

$$V(\vec{r}) = -\frac{G}{r} \int_{\vec{\alpha} \in \mathcal{D}} \mu(\vec{\alpha}) d\vec{\alpha} - \frac{G}{r^2} \int_{\vec{\alpha} \in \mathcal{D}} \mu(\vec{\alpha}) \alpha \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_r d\vec{\alpha} - \frac{G}{2r^3} \int_{\vec{\alpha} \in \mathcal{D}} \left(3\alpha^2 (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_r)^2 - \alpha^2 \right) d\vec{\alpha} + o(\varepsilon)$$

On peut remarquer que :

$$m = \int_{\mathcal{D}} \mu(\vec{a}) d\vec{a} \quad \text{et} \quad \vec{d} := \int_{\mathcal{D}} \vec{a} \mu(\vec{a}) d\vec{a}, \quad \text{moment dipolaire de } \mathcal{D}$$

(rappel en électrostatique : $\vec{p} = q \vec{NP}$

$$\text{ou } \vec{p} = \sum q_i \vec{a}_i$$

Alors, si l'on pose :

$$(II.3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} V^{(0)}(r) = -G \frac{m}{r}, \quad (\text{contribution unipolaire en } "1/r"), \\ V^{(1)}(\vec{r}) = -G \frac{\vec{d} \cdot \vec{e}_r}{r^2}, \quad (\text{contribution dipolaire en } "1/r^2"), \\ V^{(2)}(\vec{r}) = -\frac{G}{2r^3} \int_{\vec{a} \in \mathcal{D}} \mu(\vec{a}) \left[3\vec{a}^2 (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_a)^2 - \vec{a}^2 \right] d\vec{a}, \end{array} \right.$$

On obtient le développement multipolaire de $V(\vec{r})$:

$$(II.3.14) \quad V(\vec{r}) = V^{(0)}(r) + V^{(1)}(\vec{r}) + V^{(2)}(\vec{r}) + o(\varepsilon^2 = \frac{R^2}{r^3})$$

(c'est un développement asymptotique avec $\varepsilon \ll 1$, et R = taille caract. de \mathcal{D})

Conclusion, à grande distance ($\varepsilon \ll 1$),

$$V(\vec{r}) \approx V(r) = V^{(0)}(r) + o(\varepsilon)$$

au premier ordre on retrouve le potentiel $V^{(0)}(r) = -G \frac{m}{r}$

et donc un champ \vec{G} central (et bien sûr conservatif) :

$$\vec{G} = -G \frac{m}{r^2} \vec{e}_r,$$

et ce quelque soit les propriétés de symétrie de \mathcal{D}

Exercice: • On suppose que \mathcal{D} présente une symétrie de révolution autour d'un axe \vec{e}_3 , on note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de \mathbb{R}^3 .

• On place l'origine O au barycentre B de \mathcal{D} .

• On définit le moment quadrupolaire Q

$$Q := (I_{O_1} - I_{O_3}) + (I_{O_2} - I_{O_3}),$$

où I_{O_λ} est le moment d'inertie autour de l'axe:

$$(O_\lambda) \quad (\lambda = 1, 2, 3).$$

1) Montrer que:

$$V^{(1)}(\vec{r}) = 0 \text{ et } V^{(2)}(\vec{r}) = -\frac{GQ}{4r^3} (3\cos^2\theta - 1) \equiv V^{(2)}(r, \theta)$$

où θ est défini par: $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_r = \cos \theta$.

2) En déduire l'expression de \vec{G} à grande distance. Conclure.

indications:

Si (a_1, a_2, a_3) sont les coordonnées de \vec{a} dans $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

- 1) 1) Comment se traduit la symétrie de révolution en terme de parité de la fonction $(a_1, a_2) \mapsto \mu(a_1, a_2, a_3)$, taz?
- 2) Que peut-on en déduire pour une intégrale mettant en jeu une puissance impaire de a_1 ou a_2 ?
- 3) La symétrie de révolution autour de \vec{e}_3 impose :

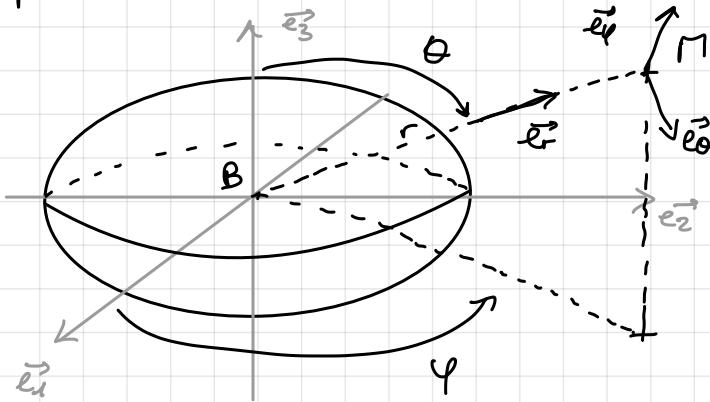
$$\int a_1^2 \mu(\vec{a}) d\vec{a} = \int a_2^2 \mu(\vec{a}) d\vec{a}$$

Comment s'écrit alors Q ?

- 2) 1) Analyser les symétries

$$2) \text{ En coord. sphériques: } \vec{g} \operatorname{rad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$

Commengons par un schéma



Le barycentre B de \mathcal{D} est défini par:

$$\int_{\mathcal{D}} \mu(\vec{a}) \vec{BA} d\vec{a} = 0$$

ainsi, avec B comme origine $\vec{d} := \int \mu(\vec{a}) \vec{a} d\vec{a}$, devient nul
 $O \rightarrow B \Rightarrow \vec{d} = \vec{0}$

et donc : $V(\vec{r}) = V^{(0)}(r) + V^{(2)}(\vec{r})$, avec B comme origine

$$\text{Notons que: } V^{(2)}(\vec{r}) = -\frac{G}{2r^5} \int \mu(\vec{a}) \underbrace{\left[3(\vec{a} \cdot \vec{r})^2 - a^2 r^2 \right]}_{H(\vec{a}, \vec{r})} d\vec{a}$$

$$H(\vec{a}, \vec{r}) = 3(a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$$

$$H(\vec{a}, \vec{r}) = 3(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2 + a_3^2 r_3^2 + 2(a_1 a_2 r_1 r_2 + a_1 a_3 r_1 r_3 + a_2 a_3 r_2 r_3)) - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$$

$$H(\vec{a}, \vec{r}) = r_1^2(2a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) + r_2^2(2a_2^2 - a_1^2 - a_3^2) + r_3^2(2a_3^2 - a_1^2 - a_2^2) + 6(r_1 r_2 a_1 a_2 + r_1 r_3 a_1 a_3 + r_2 r_3 a_2 a_3)$$

Or, $\mu(-a_1, -a_2, -a_3) = \mu(a_1, a_2, a_3)$, du fait de la symétrie de rotation autour de \vec{e}_3 , i.e.: μ est paire

Ainsi les intégrales: "6r_i r_j \int \mu(\vec{a}) a_i a_j d\vec{a}" sont nulles

De plus : $\int a_1^2 \mu(\vec{a}) d\vec{a} = \int a_2^2 \mu(\vec{a}) d\vec{a}$, toujours du fait de la symétrie, donc :

$$r_1^2 \int_D \mu(\vec{a}) (2a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) d\vec{a} = r_1^2 \int_D \mu(\vec{a}) (a_1^2 - a_3^2) d\vec{a}$$

et :

$$r_2^2 \int_D \mu(\vec{a}) (2a_2^2 - a_1^2 - a_3^2) d\vec{a} = r_2^2 \int_D \mu(\vec{a}) (a_2^2 - a_3^2) d\vec{a}$$

et :

$$r_3^2 \int_D \mu(\vec{a}) (2a_3^2 - a_1^2 - a_2^2) d\vec{a} = 2r_3^2 \int_D \mu(\vec{a}) (a_3^2 - a_1^2) d\vec{a}$$

Aussi : $Q := I_{O_1} - I_{O_3} + I_{O_2} - I_{O_3}$, du fait de la symétrie :

$$Q = 2(I_{O_1} - I_{O_3}) = 2(I_{O_2} - I_{O_3}),$$

puisque :

$$I_{O_1} := \int_D \mu(\vec{a}) (a_2^2 + a_3^2) d\vec{a} = \int_D \mu(\vec{a}) (a_1^2 + a_3^2) d\vec{a} =: I_{O_2}$$

Carre : $I_{O_3} := \int_D \mu(\vec{a}) (a_1^2 + a_2^2) d\vec{a}$, il vient :

$$Q = 2 \int_D \mu(\vec{a}) (a_3^2 - a_1^2) d\vec{a} = 2 \int_D \mu(\vec{a}) (a_3^2 - a_2^2) d\vec{a}$$

Alors :

$$\begin{aligned} V^{(2)}(\vec{r}) &= \frac{-G}{2r^5} \int_D \mu(\vec{a}) H(\vec{a}, \vec{r}) d\vec{a} \\ &= \frac{-G}{2r^5} \left[\frac{1}{2} r_1^2 Q - \frac{1}{2} r_2^2 Q + r_3^2 Q \right] \end{aligned}$$

$$V^{(2)}(\vec{r}) = \frac{-GQ}{4r^5} [2r_3^2 - r_1^2 - r_2^2]$$

On $2r_3^2 - r_1^2 - r_2^2 = 3r_3^2 - r^2 = (3\cos^2\theta - 1)r^2$ car $r_3 = r\cos\theta$
par def de θ ($\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_r = \cos\theta$)

On en déduit enfin :

$$V^{(2)}(\vec{r}) = V^{(2)}(r, \theta) = -\frac{GQ}{4r^3} (3\cos^2\theta - 1)$$

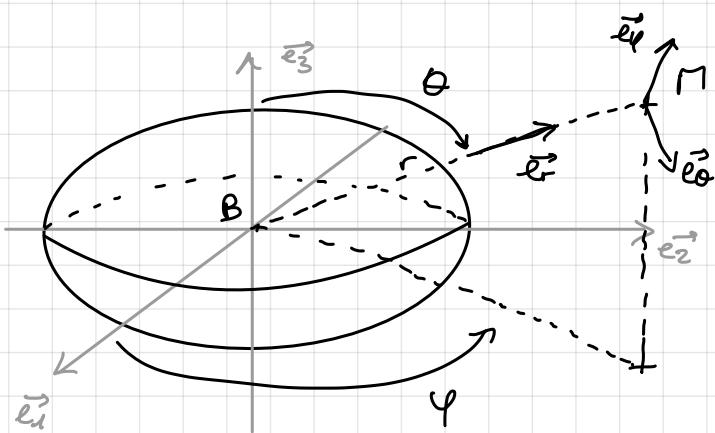
⇒ en coord. sphériques.

2. L'expression de $V(\vec{r})$ est :

$$V(\vec{r}) = V^{(0)}(r) + V^{(2)}(r, \theta)$$

$$V(r, \theta) = -G \frac{m}{r} - \frac{GQ}{4r^3} (3\cos^2\theta - 1)$$

Avant de calculer \vec{G} en appliquant la définition $\vec{G} = -\nabla V$ analysons ses propres de symétrie pour s'assurer du résultat



Chaque plan contenant \vec{e}_θ et \vec{e}_ϕ et donc \vec{e}_3 est un plan de symétrie de \mathcal{D} , donc :

$$\vec{G} = G_r(M) \vec{e}_r + G_\theta(M) \vec{e}_\theta$$

\mathcal{D} est invariante par rotation

d'angle $\varphi \Rightarrow G_r(M) = G_r(r, \theta)$ et $G_\theta(M) = G_\theta(r, \theta)$.

et donc : $\vec{G}(M) = G_r(r, \theta) \vec{e}_r + G_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta$

On applique la formule du gradient en coord. sphériques

$$\Rightarrow G_r(r, \theta) = -\partial_r V = -G \frac{m}{r^2} - \frac{3}{4} \frac{GQ}{r^4} (3\cos^2\theta - 1) = G_r(r, \theta)$$

$$\Rightarrow G_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r} \partial_\theta V = -3 \frac{GQ}{4r^4} \sin(2\theta) = G_\theta(r, \theta)$$

On remarque que :

$$\begin{cases} G_r(r, \theta) = -G \frac{m}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right) = G_r(r) \\ G_\theta(r, \theta) = 0 + o\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{G}(M) = -G \frac{m}{r^2} \vec{e}_r + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Pour \mathcal{D} a symétrie d'révolution il n'y a pas de terme en $\frac{1}{r^3}$ dans

V , et par conséquent l'approximation d'un champ \vec{G} central en $1/r^2$ est encore plus pertinente à grande distance (par comparaison avec une D quelconque).

III. Energie potentielle gravifique

1. Définitions

- a. Pour deux particules
- b. Pour N particules
- c. Pour une distribution continue

2. Application : sur la nature de l'énergie du Soleil

Exercice

III. Énergie potentielle gravifique

1. Définitions

a. Pour deux particules

Soient M_1 et M_2 deux particules de masses m_1 et m_2

Le potentiel gravitationnel créé par M_j sur M_i est :

$$V(M_i) = -G \frac{m_j}{r_{ji}},$$

de sorte que l'énergie potentielle gravitationnelle entre M_i et M_j est :

$$\mathcal{E}_p = m_i V(M_i) = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Puisque : $V(M_j) = -G \frac{m_i}{r_{ij}}$, on a aussi :

$$\mathcal{E}_p = m_j V(M_j) = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Ainsi, on retiendra l'expression "symétrisée" faisant intervenir $V(M_i)$ et $V(M_j)$:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \sum_k m_k V(M_k)$$

énergie potentielle
d'un système de
deux particules

III.1.1

b. Pour N particules

Considérons pour commencer $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$ et $M_3(m_3)$ en interaction gravitationnelle.

Il y a 3 couples : $\{M_1, M_2\}$, $\{M_1, M_3\}$ et $\{M_2, M_3\}$.

Puisque les interactions gravitationnelles en M_i sont indépendantes, on peut sommer les énergies potentielles de chaque couple $\{M_i, M_j\}$:

$$E_p = -G \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G \gamma \frac{m_1 m_3}{r_{13}} - G \gamma \frac{m_2 m_3}{r_{23}},$$

$$E_p = \frac{1}{2} \left(-m_1 G \left(\frac{m_2}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{13}} \right) - m_2 G \left(\frac{m_1}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{23}} \right) - m_3 G \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right) \right),$$

potentiel grav.
créé par toutes les
autres particules en M_1
on le note: $V(M_1)$

potentiel créé
par toutes les
autres particules
en M_2 : noté
 $V(M_2)$

potentiel
créé par
toutes les
autres particules
en M_3 :
noté $V(M_3)$

Soit : $E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i V(M_i)$, III.1.2

où : $V(M_i)$ est le potentiel gravitationnel créé par toutes les autres particules que M_i , en M_i .

On peut le noter : $V_i := -G \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}}$

Pour N particules, on généralise la démarche précédente :
L'indépendance des interactions gravitationnelles permet de sommer les énergies potentielles d'interaction binaire :

$$E_p = -G \sum_{(i,j)} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

Soit en sommant sur les particules :

$$E_p = -\frac{G}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}}.$$

Avec $V_i := -G \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}}$, il vient :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_i$$

III.1.3

c. Pour une distribution continue.

On passe (II.1.3) à la limite continue en introduisant la même $\mu(\vec{r}) d\vec{r}$ du volume de la distribution continue

⇒ :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum m_i V_i \rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \int_{\vec{r} \in \mathcal{D}} V(r) \mu(\vec{r}) d\vec{r} = E_p}$$

où $V(r)$ est le potentiel créé par toute la distribution de masse sans exclusion de la masse au point considéré.

L'énergie potentielle gravifique de \mathcal{D} contribue à la fois la contribution des énergies d'interaction binaire (entre les différents éléments de volume) et celle des énergies propre de chacun de ses éléments.

2. Application sur la nature de l'énergie du Soleil.

Exercice

1. Calculer l'énergie potentielle de gravitation d'une boule de masse M et de rayon R avec un profil de masse volumique parabolique : $\mu(r) = \mu_0 (1 - \kappa \left(\frac{r}{R}\right)^2)$, $\kappa \in \mathbb{R}^*$. On vérifiera que l'on obtient le résultat connu pour $\kappa=0$: $E_p = -\frac{3}{5} \frac{G M^2}{R}$.

2. La masse du soleil est $M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg, $r_\odot \approx 0$ (homogène)
Son rayon est. $R_\odot = 6,96 \cdot 10^8$ m.

Si comme on le crayait au XIX^e siècle, l'énergie du Soleil provenait d'un effondrement gravitationnel, quelle serait la diminution relative de son rayon en un siècle, sachant que la puissance émise est :

$$P_\odot = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W} \quad ?$$

En déduire la diminution de masse ΔM_\odot correspondante. Commentez.

3. En fait la diminution de masse du Soleil est d'origine nucléaire, elle est due au cycle des réactions de fusion thermonucléaire se déroulant dans le noyau. L'énergie du soleil se conserve à condition de traduire l'équivalence masse-énergie :

$$E = mc^2.$$

Déterminer alors ΔT_\odot en un siècle et comparez au résultat de la Q3. Commentez.

Commençons par calculer $V(r)$.

On a trouvé :

$$\boxed{G(r) = -\frac{Gm}{R^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{5}\kappa} \cdot \left(\frac{r}{R}\right) \left(1 - \frac{3}{5}\kappa \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)} \quad r \leq R$$

(II.3.12)

or $V(r) = - \int G(r) dr + \text{cste}$

on trouve : $V(r) = \frac{GMr^2}{2R^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{5}\kappa} \cdot \left(1 - \frac{3\kappa}{10} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) + \text{cste}$

or $V(r=R) = -G\frac{M}{R}$ (cf expression du champ à l'ext. d'une boule)

donc : $\text{cste} = -G\frac{M}{R} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{3}{10}\kappa}{1-\frac{3\kappa}{5}}\right)$

d'où : $V(r) = \frac{GMr^2}{2R} \left[\frac{1-\frac{3\kappa}{10}\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1-\frac{3\kappa}{5}} - \left(2 + \frac{1-\frac{3\kappa}{10}}{1-\frac{3\kappa}{5}}\right) \right], r \leq R$

Si $\kappa=0$ on retrouve l'expression pour une boule homogène.

$$V(r) = \frac{GMr^2}{2R} \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 3 \right]$$

Calculons maintenant $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \int \mu(r) V(r) 4\pi r^2 dr$

$$(dr \rightarrow r^2 \sin\theta d\theta dr d\psi)$$

on pose $x = r/R$

$$\mathcal{E}_p = \frac{3M^2G}{4R} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{5}\kappa} \left[\underbrace{\int_{x=0}^{x=1} x^4 \frac{1-\frac{3}{10}x}{1-\frac{3}{5}} dx}_{①} - \underbrace{\kappa x^6 \frac{1-\frac{3}{10}x}{1-\frac{3}{5}} dx}_{②} - C_0 x^2 + C_0 \kappa x^4 \right] dx$$

où $C_0 = 2 + \frac{1-\frac{3}{10}\kappa}{1-\frac{3}{5}\kappa}$

$$① = \frac{1-\frac{3}{10}\kappa}{5-3\kappa}$$

$$③ = -\frac{C_0}{3}$$

$$② = \frac{-\kappa}{1-\frac{3}{5}\kappa} \left(\frac{1}{7} - \frac{3\kappa}{80} \right)$$

$$④ = \frac{C_0 \kappa}{5}$$

Après simplification on trouve :

$$\boxed{\mathcal{E}_p = -\frac{3GM^2}{5R} \cdot \frac{1}{(1-\frac{3\kappa}{5})^2} \cdot \left[1 - \frac{127}{m} \kappa + \frac{21}{64} \kappa^2 \right]}$$

Si la buse est homogène i.e $\kappa=0$, on trouve le résultat commu:

$$\mathcal{E}_p = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}.$$

2. On prend $\kappa=0$ re : $\mathcal{E}_p = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}$.

Si \mathcal{E}_p est due à l'effondrement gravitationnel durant Δt

$$\Delta \mathcal{E}_p = P_0 \Delta t \Leftrightarrow \frac{3GM_0^2}{5R_0^2} \Delta R_0 = P_0 \Delta t$$

soit $\Delta R_0 = \frac{5R_0^2 P_0 \Delta t}{3GM_0^2}$

AN: $\Delta R_0 = 3,7 \text{ km en un siècle}$

$$M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$P_\odot = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

$$R_\odot = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$\Delta t = 3,16 \cdot 10^9 \text{ s}$$

En supposant que le soleil rayonne jusqu'à la consommation totale de son rayon, on trouverait une durée de vie Δt_{vie}

$$\Delta t_{\text{vie}} = \frac{R_\odot}{\Delta R_0} = 1,9 \cdot 10^5 \text{ siècle}$$
$$= 1,9 \cdot 10^7 \text{ ans}$$

$$\Delta t_{\text{vie}} = 19 \text{ millions d'années}$$

Ce qui n'est pas courrant avec l'évolution de la vie sur Terre : les dinosaures (animaux à sang froid) sont apparus il y a ≈ 250 millions d'années soit $2,5 \cdot 10^8$ ans (durant le Trias au Mésozoïque).

La diminution de masse associée à ΔR_\odot serait de :

$$\Delta M_\odot = \mu_0 V_{\text{cog}}$$

où μ_0 est la masse vol. du Soleil homogène;

$$\mu_0 = \frac{3M_\odot}{4\pi R_\odot^3}$$

et

$$V_{\text{cog}} = \frac{4}{3} \pi R_\odot^3 - \frac{4}{3} \pi (R_\odot - \Delta R_\odot)^3$$

$$V_{\text{cog}} = 4\pi R_\odot^3 \frac{\Delta R_\odot}{R_\odot} + o\left(\frac{\Delta R_\odot}{R_\odot}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta M_\odot = 3M_\odot \frac{\Delta R_\odot}{R_\odot}}$$

AN : $\Delta M_\odot \approx 3,2 \cdot 10^{25} \text{ kg en 1 siècle}$

soit $\boxed{\frac{\Delta M_\odot}{M_\odot} \approx 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ en 1 siècle}}$

3. La variation d'énergie due au ΔT est :

$$\Delta E = P_\odot \Delta T$$

or $E = M_\odot c^2$ (équivalence masse-énergie)

donc $\Delta E = \Delta M_\odot c^2$

(la perte de masse est convertie en énergie rayonnée)

et donc :

$$\boxed{\Delta M_\odot = \frac{P_\odot \Delta T}{c^2}}$$

AN : en un siècle $\Delta M_\odot \approx 1,3 \cdot 10^{10} \text{ kg}$ soit $\boxed{\frac{\Delta M_\odot}{M_\odot} \approx 6,7 \cdot 10^{-12} \text{ en 1 siècle}}$

On trouve une diminution de masse relative bien plus faible ($\sim 10^7$ fois) qu'avec l'hypothèse d'effondrement gravitationnel.

Si l'on suppose que l'équilibre du Soleil est perturbé par une perte de masse de $\frac{1}{1000}$ alors la durée de vie estimée est avec $1M_\odot \approx 1,3 \cdot 10^{19} \text{ kg}$:

$$\frac{10^{-3} M_\odot}{\Delta M_\odot} \simeq 0,15 \cdot 10^9 \text{ siècles}$$
$$\simeq 15 \cdot 10^9 \text{ ans}$$

ce qui est le bon ordre de grandeur pour la durée de vie du Soleil $\simeq 10$ milliards d'années.

IV. Mouvements newtoniens des planètes et des satellites

1. Rappels succincts et hypothèses

2. Lois de Kepler

a. Les 2 premières lois

b. La troisième loi exo : activité numérique

c. Utilisation de la 3^e loi de Kepler exo

3. Mouvement du centre attractif

4. Rôle des autres planètes : le problème à N corps et la stabilité du système solaire.

5. Satéllisation et vitesses cosmiques

a. Orbite circulaire et première vitesse cosmique exo

b. vitesse de libération ou 2^e v. vit. cosm.

c. S'échapper du système solaire : 3^e v. vit. cosmique exo

d. Tomber sur le soleil : 4^e v. vit. cosmique exo

Voir
Sivankine

IV. Mouvements newtoniens des planètes et satellites

1. Rappels et hypothèses

Si l'on néglige l'action des planètes les unes sur les autres, le mouvement d'une planète autour d'un centre attracteur comme le Soleil (étoile) peut-être décrit dans le cadre du problème à 2 corps en interaction centrale conservatrice. L'étude faite dans le cours : "Mouvement newtonien dans un champ en $1/r^2$ " (ce que l'on appelle le problème de Kepler) est donc pertinente, la constante de couplage à introduire vaut alors :

$$\alpha = G m m_0 > 0,$$

où : m est la masse du mobile fictif, c'est la masse réduite, et m_0 est la masse du centre attracteur (barycentre des 2 "particules").

On rappelle que l'énergie potentielle de M , \mathcal{E}_p vaut :

$$\mathcal{E}_p(r) = -G \frac{m m_0}{r}$$

et que M suit un mouvement à force centrale $\vec{F} = -\vec{\text{grad}}(\mathcal{E}_p)$ attractive avec trois types de trajectoires : $r(\theta) = \frac{P}{1+e \cos \theta}$

→ hyperbolique, état de diffusion, $e > 1 \Leftrightarrow E_m > 0$

→ parabolique, état de diffusion, $e = 1 \Leftrightarrow E_m = 0$

→ elliptique, état lié, $0 \leq e < 1 \Leftrightarrow E_m < 0$

qui ont pour constantes du mouvement de M :

→ le moment cinétique $\vec{L} = m \vec{C}$, $\vec{C} = r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$, définissant le paramètre $P := \frac{mc^2}{\alpha}$ de la trajectoire.

\rightarrow l'énergie mécanique: $E_m = \frac{\alpha^2}{2mc^2} (e^2 - 1)$
 \rightarrow le vecteur de Laplace - Runge - Lenz $\vec{A} := \frac{\vec{L} \wedge \vec{r}}{\alpha} - \vec{er}$
 définissant l'excentricité $e = \|\vec{A}\|$ de la trajectoire

2. Lois de Kepler

A la suite d'un dépouillement méticuleux des observations faites pendant de nombreuses années par l'astronome danois Tycho Brahe (1546-1601), initiées par la révolution Copernicienne (Nicolas Copernic, 1473-1543), Jean Képler (1571-1630) a établi trois lois empiriques régissant les mouvements des planètes.

1. Les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe un foyer.
2. Le rayon vecteur issu du Soleil balaye des aires égales pendant des périodes égales.
3. Les cubes des périodes de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes.

Il y a deux approches:

- l'approche historique: déduire la loi d'attraction universelle à partir des lois de Kepler \rightarrow DM
- l'approche de ce cours: déduire les lois de Kepler à partir de la loi d'attraction universelle et des lois de la mécanique classique.

a. Les 2 premières lois

les deux premières lois ont été établies dans le cas sur le problème du Kepler (cas n°2) et dans le cas sur le problème à 2 corps (cas n°1).

$$\text{Loi 1} \Leftrightarrow r(\theta) = \frac{P}{1 + e \cos \theta} \quad \text{et} \quad O = \text{centre du soleil}$$

*trajectoire elliptique
dans le centre attractif
d'un des foyers.
occupe l'un des foyers.*

le barycentre de la planète et du soleil est quasi-confondu avec le barycentre du Soleil (\rightarrow on examinera cette approximation)

Loi 2 \Leftrightarrow loi des aires découlant de la cinématique d'un mvf à force centrale conservative :

$$\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{v} = \text{cste}$$

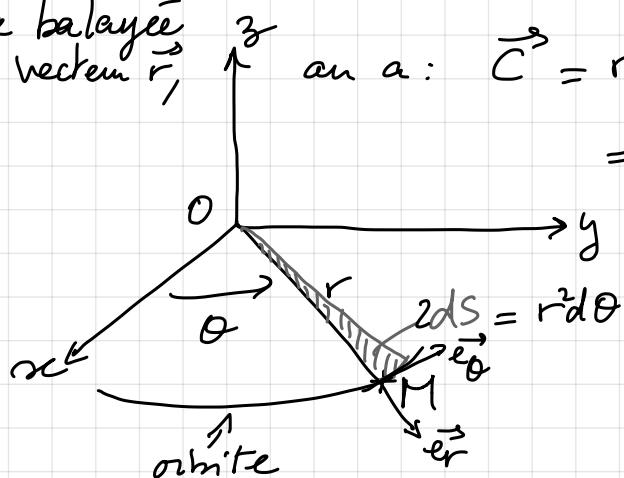
Soit dS l'aire balayée par le rayon vecteur \vec{r} ,

$$\text{on a: } \vec{C} = r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = 2 \frac{dS}{dt} \vec{e}_g \\ \Rightarrow 2 \frac{dS}{dt} = \text{cste}$$

$$\underline{\text{i.e.: }} S = a\tau + b$$

$$\text{Si } S(\tau=0)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{S \propto \tau}$$



i.e.: \vec{r} balaye des aires égales pendant des durées égales sur l'orbite qu'il décrit

b. La 3^e loi de Kepler

Déterminons la constante de la loi des aïns dans le cas d'une ellipse.

- Soit dS l'aïe balayée par le rayon vecteur :

$$C = 2 \frac{dS}{dt}$$

Sur une période de révolution T de l'ellipse, l'aïe balayé est l'aïe d'une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b . $S = \pi ab$

d'où : $C = 2 \frac{\pi ab}{T} \Rightarrow C^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2}$ (IV.2.0)

- De plus, on a montré que le paramètre p de l'ellipse définit par $p := \frac{b^2}{a}$ vaut $p = \frac{mc^2}{\alpha} = \frac{mc^2}{Gm_0 m} = \frac{c^2}{Gm_0}$
⇒ d'où :

$$C^2 = Gm_0 \frac{b^2}{a}$$
 (IV.2.1)

- (IV.2.0) = (IV.2.1) $\Leftrightarrow Gm_0 \frac{b^2}{a} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2}$
 $\Leftrightarrow \frac{Gm_0}{4\pi^2} = \frac{a^3}{T^2}$ (IV.2.2)

3^e loi de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_0} \cdot a^3$$

les carrés des durées de révolutions sont $\propto a^3$

Exercice: activité numérique

Régression linéaire gaussienne, intervalle de confiance

et déduction de G à partir de la 3^e loi de Kepler

Soit T_0 l'unité de durée pertinente pour T
 a_0 a

On note M_0 la masse du Soleil.

1. Montrer que:

$$\log\left(\frac{T}{T_0}\right) = \frac{3}{2} \log\left(\frac{a}{a_0}\right) + \frac{1}{2} \log\left(\frac{C_0}{G}\right)$$

où l'on précisera C_0 en fonction de M_0 , a_0 et T_0 .

On note: $\alpha := \frac{1}{2} \log\left(\frac{C_0}{G}\right)$

2. Exprimer G en fonction α et C_0 .

On note $x_1 = C_0$ et $x_2 = \alpha$.

On considère $G(x_1, x_2)$ et on suppose que x_1 et x_2 sont des V.A. indépendantes.

3. a) Rappeler la formule de propagation des incertitudes pour ΔG

b) Déterminer ΔG en fonction de ΔC_0 et $\Delta \alpha$

c) Dans C_0 on suppose que seule M_0 est une V.A. d'incertitude ΔM_0 . Déterminer ΔC_0 en fonction de ΔM_0

La suite de question 4 est à faire avec le rappel sur la Régression linéaire Gaussienne.

α est la constante de la droite $\log\left(\frac{T}{T_0}\right) = \beta \log\left(\frac{a}{a_0}\right) + \alpha$

On suppose qu'elle est obtenue dans le cadre d'une régression linéaire à partir de N couples : $(x_i = \log\left(\frac{a_i}{a_0}\right), y_i = \log\left(\frac{T_i}{T_0}\right))$ constituant un N -échantillon d'observations astronomiques indépendantes.

On suppose un modèle linéaire gaussien, c'est à dire

$$y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i + \varepsilon_i$$

où les ε_i sont des réalisations indép de $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$

x_i de X

y_i de Y

et X et Y telles que $E[Y|X] = \alpha + \beta X$.

$\hat{\alpha}$ est l'estimateur sans biais de α , $\hat{\alpha} \sim N(\alpha, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{m_x}{S_{xx}} \right))$

$\hat{\beta}$, $\hat{\beta} \sim N(\beta, \frac{\sigma^2}{S_{xx}})$

On note $S_{xx} = \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^2$ où m_x est l'estimateur de la moyenne de x :

et $SS_\varepsilon = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2$ (somme des résidus au carré)

$$m_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

4 a. Rappeler l'expression de l'écart quadratique moyen $S_{\hat{\alpha}}$ sur l'estimateur $\hat{\alpha}$ en fonction de SS_ε , S_{xx} et N .

b. Rappeler l'expression de SS_ε en fonction du coefficient de corrélation r entre Y et X et S_{yy} .

c. Quelle loi suit: $t_A = \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{S_{\hat{\alpha}}} ?$

Comment justifier le Nbre de degré de liberté intervenant dans cette loi?

d. En déduire $\alpha_{mois} \pm \Delta \alpha = \dots$ en fonction du coefficient de Student $t_{N-2, p}$ de ddl $N-2$, pour une probabilité p

5. On donne les mesures suivantes pour T et a , pour les planètes du système solaire.

	demi-grand axe a (u.a.)	période T (années)
Mercure	0,387	0,241
Vénus	0,723	0,615
Terre	1,000	1,000
Mars	1,523	1,880
Jupiter	5,202	11,85
Saturne	9,554	29,47
Uranus	19,218	84,29
Neptune	30,109	164,78
Pluton	39,60	247,80

On prendra

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = \text{année sidérale} \\ = 365,25636042 \text{ jours} \\ = \dots \text{s} \\ a_0 = 149597870700 \text{ m} \end{array} \right.$$

a. Écrire un script python pour déterminer $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$

(on utilisera la bibliothèque "scipy.stats." et la fonction "linregress" de cette bibliothèque).

b. Déterminer $|t_{\Delta d}|^{\frac{\Delta \beta}{\Delta d}}$ pour $P=95\%$, c'est à dire :

$$P\left[\hat{\alpha} - t_{N-2,P} s_{\hat{\alpha}}; \hat{\alpha} + t_{N-2,P} s_{\hat{\alpha}}\right] = 95\%$$

où $P[I] = \text{proba que } d \in I$.

On rappelle que le coefficient de Student $t_{N-2,P}$ est lié au quantile de la loi de Student par :

$$t_{N,P=1-\gamma} = \underbrace{\text{quantile d'ordre } (1 - \frac{\gamma}{2}) \text{ de la loi de Student à } N \text{ ddl.}}_{\text{on le note: qt}_{\frac{\gamma}{2}}^N}$$

On pourra utiliser la fonction `scipy.special.stats.t` qui retourne le quantile d'ordre p pour un ddl donné

c. Conclure sur la 3^e loi de Kepler pour ces données.

6. On donne $\frac{\Delta M_0}{M_0} = 8,80 \cdot 10^{-5}$ à 68% de confiance

calculer ΔG et donner : $G_{\text{mes}} \pm \Delta G = \dots$

$$1. \text{ On a: } T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_0} a^3$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{T_0^2} \cdot \frac{1}{a_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM_0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 \frac{1}{T_0^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{GM_0} \cdot \frac{a_0^3}{T_0^2} \cdot \left(\frac{a}{a_0}\right)^3$$

Soit $\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \frac{C_0}{G} \left(\frac{a}{a_0}\right)^3$ avec $C_0 := \frac{4\pi^2 a_0^3}{M_0 T_0^2}$

d'au

$$2 \log\left(\frac{T}{T_0}\right) = \log\left(\frac{C_0}{G}\right) + 3 \log\left(\frac{a}{a_0}\right)$$

Soit

$$\boxed{\log\left(\frac{T}{T_0}\right) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{C_0}{G}\right) + \frac{3}{2} \log\left(\frac{a}{a_0}\right)}$$

$$2. \quad \alpha = \frac{1}{2} \log\left(\frac{C_0}{G}\right)$$

$$\Leftrightarrow G = C_0 10^{-2\alpha} = C_0 e^{-2\alpha \ln(10)}$$

$$3. \quad G = G(x_1 = C_0, x_2 = \alpha)$$

$$a. \quad \Delta G = \sqrt{\sum_{k=1}^2 \frac{\partial G}{\partial x_k} \Delta x_k}$$

$$\frac{\partial G}{\partial C_0} = 10^{-2\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial \alpha} = (-2 \ln(10)) C_0 \cdot 10^{-2\alpha}$$

d'au

$$\Delta G = \left[(10^{-2\alpha} \Delta C_0)^2 + (-2 C_0 \ln(10))^2 10^{-4\alpha} (\Delta \alpha)^2 \right]^{1/2}$$

$$\Delta G = \left[10^{-4\alpha} \Delta C_0^2 + 4 C_0 (\ln(10))^2 10^{-4\alpha} \Delta \alpha^2 \right]^{1/2}$$

$$\Delta G = 10^{-2\alpha} \left[\Delta C_0^2 + 4 C_0 (\ln(10))^2 \Delta \alpha^2 \right]^{1/2}$$

$$c. C_0 = \left(4\pi^2 \frac{a_0^3}{T_0^2} \right) \frac{1}{M_0} \Rightarrow \frac{\Delta C_0}{C_0} = \frac{\Delta M_0}{M_0}$$

d'au

$$\boxed{\Delta C_0 = C_0 \frac{\Delta M_0}{M_0}}$$

4 a. On peut mq:

on utilise le formulaire!

au: $MS_E = \frac{SS_E}{N-2} = \frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2}{N-2}$, $S_{xx} = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$

et $S_A^1 = \left[\frac{MS_E}{S_{xx}} \right]^{1/2}$

b. on peut aussi mq: $SS_E = S_{yy} (1 - r^2)$

au r est le coef de corrélation entre Y et X

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

donc

$$\boxed{S_A^1 = \left[S_{yy} \frac{(1-r^2)}{N-2} \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right) \right]^{1/2}}$$

$$\boxed{S_B^1 = \left[\frac{1-r^2}{N-2} \cdot \frac{S_{yy}}{S_{xx}} \right]^{1/2}}$$

c. $t_A = \frac{\hat{A} - \alpha}{S_A^1} \rightsquigarrow T_{N-2}$ $t_B = \frac{\hat{B} - \beta}{S_B^1} \rightsquigarrow T_{N-2}$

"N-2" ddl car α et β sont fixés

(on se rappelle qu'on a N-1 avec l'estimation de la moyenne \bar{x} car $\frac{1}{N} \sum x_i = \bar{x}$ ou $\langle \bar{x} \rangle$ est fixé)

d. On en déduit pour une proba P

$$\left\{ \alpha_{\text{mes}} \pm \Delta \alpha = \hat{A} \pm t_{N-2, P} S_A^1 \right.$$

$$\left. \beta_{\text{mes}} \pm \Delta \beta = \hat{B} \pm t_{N-2, P} S_B^1 \right.$$

5. a. On trouve :

$$\hat{B} = 1,49906 \dots = 1,500 \approx \frac{3}{2}$$

$$\hat{A} = 0,000136 = 0,000$$

b. On trouve

$$\Delta B = t_{7,95\%} S_B \approx 0,000716$$

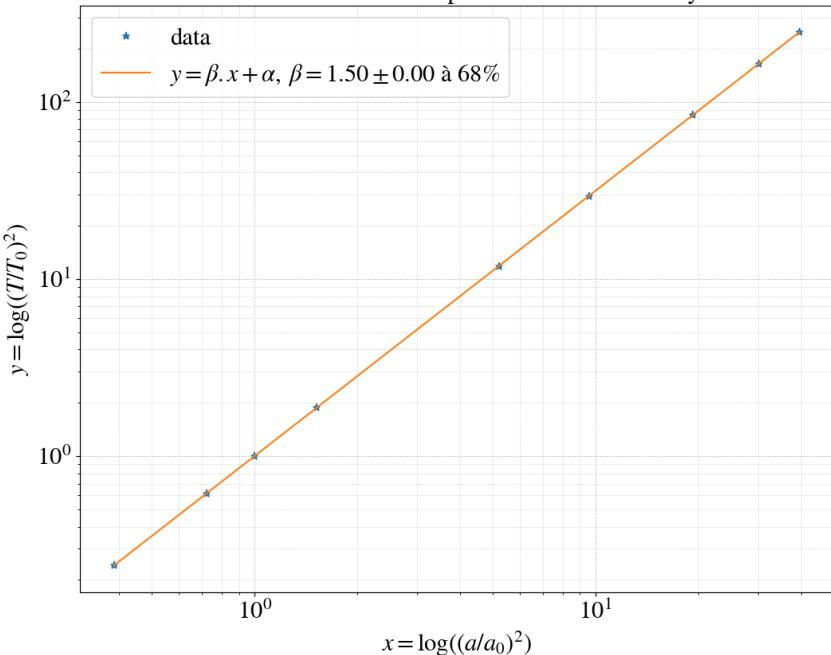
$$\Delta \alpha = t_{7,95\%} S_A \approx 0,000731$$

c. On attendait : $\beta = \frac{3}{2}$

on a $B_{mes} \pm \Delta B = 1,50 \pm 0,00 \quad (95\%)$ et $r = 1,00$

\Rightarrow La loi de Kepler est très bien vérifiée.

Vérification de la troisième loi de Kepler avec les orbites du système solaire



6. Si $\frac{\Delta M_\odot}{M_\odot} = 8,80 \cdot 10^{-5}$ alors on peut calculer ΔG .

et en injectant la valeur $\Delta \alpha$ trouvée dans l'expression

$$\text{de } \Delta G, \text{ il vient: } \Delta G = 5,868 \cdot 10^{-15} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$$
$$= 0,0005868 \cdot 10^{-11}$$

$$\text{et on calcule } G_{mes} = C_0 \cdot 10^{-2d} = 6,668 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$$

\uparrow
 \hat{A}

d'où

$$G_{mes} \pm \Delta G = (6,67 \pm 0,00) \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$$

$\approx 68\%$ de confiance

c. Utilisation de la 3^{ème} loi de Kepler

La 3^{ème} loi de Kepler permet de déterminer la masse du Soleil ou d'une planète possédant un satellite, et même la masse d'une galaxie → voir exo.

Le principe est le suivant : à partir de la même de durées (période de révolution) et de distances (observation astronamique, mêmes de durées de nos jours), on en déduit la masse via la 3^{ème} loi de Kepler connaissant la masse du centre attracteur.

Prenons l'exemple de la Terre, décrit autour du Soleil une ellipse peu différente d'un cercle de 150 millions de km de rayon (environ huit minutes-lumière) en une période dite année sidérale $T = 365,256363004$ jours (pour l'époque standard internationale J_{2000} [← précision et nutation de la Terre changent la position du point vernal (ref.)])

Ainsi, si $\left\{ \begin{array}{l} a_{\text{Terre}} \approx 149,6 \cdot 10^6 \text{ km} \\ T_{\text{Terre}} \approx 365,3 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} \end{array} \right\}$ géodésie spatiale
= même de durées et de distances avec grande précision

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$(IV.2.2) \Leftrightarrow M_{\odot} = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{a_{\text{Terre}}^3}{T_{\text{Terre}}^2} \approx \frac{1,988 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{\text{afficiellement}} \quad M_{\odot} = (1,9884 \pm 0,0002) \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Pour déterminer M_{\odot} il faut connaître G

→ voir exo sur l'expérience de Cavendish (1731-1810)

Pour mesurer la masse de la Terre on utilise un de ses satellites dont on mesure sa période de révolution et dont on caractérise son orbite. On peut par exemple observer astronomiquement la Lune :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\text{Lune}} \approx 27,321\,582 \times 24 \times 3600 \text{s} \\ a_{\text{Lune}} \approx 384\,399 \text{ km} \end{array} \right.$$

La 3^e loi de Kepler donne alors :

$$\text{Terre} \leftrightarrow \text{Soleil} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{Terre}}^2 = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{a_{\text{Terre}}^3}{M_{\odot}}$$

$$\text{Lune} \leftrightarrow \text{Terre} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{Lune}}^2 = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{a_{\text{Lune}}^3}{M_{\oplus}}$$

D'au^s : $\left(\frac{T_{\text{Terre}}}{T_{\text{Lune}}} \right)^2 = \frac{M_{\oplus}}{M_{\odot}} \left(\frac{a_{\text{Terre}}}{a_{\text{Lune}}} \right)^3$

Sait $M_{\oplus} = M_{\odot} \left(\frac{T_{\text{Terre}}}{T_{\text{Lune}}} \right)^2 \cdot \left(\frac{a_{\text{Lune}}}{a_{\text{Terre}}} \right)^3$

AN. $\left\{ \begin{array}{l} M_{\odot} \approx 1,988 \cdot 10^{30} \text{ kg} \\ T_{\text{Terre}} \approx 365,3 \text{ j} \\ T_{\text{Lune}} \approx 27,32 \text{ j} \\ a_{\text{Terre}} \approx 149,6 \cdot 10^6 \text{ km} \\ a_{\text{Lune}} \approx 384,4 \cdot 10^6 \text{ km} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow M_{\oplus} = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

(Résultat officiel : $M_{\oplus} = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$)

Une fois la masse de la Terre connue on peut faire de la gravimétrie et déduire la géométrie de notre planète :

Une mesure de l'accélération de la pesanteur au pôle (nord par exemple, i.e.: latitude $\lambda = \frac{\pi}{2}$) donne g_0 , or:

$$g_0 = -G \frac{M_T}{R_{T,P}} \quad (\text{voir I.4})$$

où : $R_{T,P}$ est la distance : barycentre terrestre - pôle ce que l'on appelle le rayon polaire.

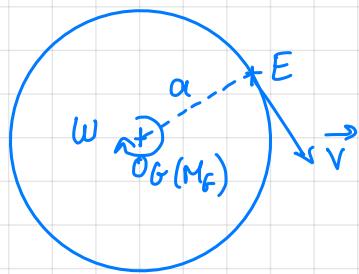
Connaissant M_T , G et ayant mesuré g_0 on en déduit $R_{T,P}$. On déduit ainsi la forme géodale de notre planète (aplatie aux pôles)

Exercice: Nombre d'étoiles dans une galaxie

Des méthodes photométriques permettent de mesurer la distance des galaxies à la Terre. La mesure du rayon apparent permet alors de calculer le rayon des orbites décrites par les étoiles qui la compose. On mesure la vitesse des étoiles à l'aide du décalage en fréquence mesuré et induit par effet Doppler-Fizeau. On trouve des orbites quasi-circulaires à $\approx 3 \cdot 10^{17} \text{ km}$ parcourues à une vitesse $v \approx 250 \text{ km.s}^{-1}$. On suppose de plus que la distribution de masse dans la Galaxie est à symétrie sphérique. Estimer le nombre d'étoiles dans une galaxie en considérant que le Soleil est une étoile de masse moyenne.

L'hypothèse de symétrie sphérique permet de ramener le problème à l'interaction gravi. entre le centre de masse O_G de la galaxie et l'étoile M en périphérie. La masse de l'étoile étant négligeable, elle constitue le mobile fictif et O_G est le barycentre de ce syst. à 2 corps. Le reste des hypothèses sans-jacentes à la 3^e loi de Kepler s'appliquent et ainsi :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_G}, \text{ où: } T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ avec } \omega = \frac{v}{a}$$



$$\text{d'où: } M_G = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{a^3}{\left(\frac{2\pi a}{v}\right)^2} = \frac{av^2}{G}.$$

$$\text{au trou: } M_G \approx 1,4 \cdot 10^{11} M_\odot$$

\Rightarrow il y a donc ~ 100 milliards d'étoiles dans une Galaxie.

3. Mouvement du centre attractif : correction de la 3^e loi de Kepler

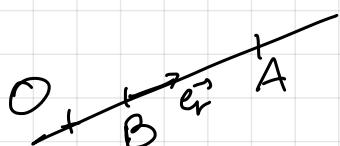
On a vu dans le cours sur le Pb à 2 corps que c'est le barycentre B des 2 corps qui est fixe dans son référentiel, R_B .

Plaçons nous dans ce référentiel.

Soit A le point de l'espace correspondant au centre de masse du corps de masse m et O le corps de masse M .

$$\text{PFD} \Rightarrow \left\{ m \frac{d_t^2}{dt^2} \vec{BA} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{er} \right. \quad (\text{IV.3.1})$$

$$\left. M \frac{d_t^2}{dt^2} \vec{BO} = +G \frac{mM}{r^2} \vec{er} \right. \quad (\text{IV.3.2})$$



$$(\text{IV.3.1}) \cdot M - (\text{IV.3.2}) m \Leftrightarrow Mm \frac{d_t^2}{dt^2} \vec{OA} = -G \frac{mM}{r^2} (M+m) \vec{er}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m \frac{d_t^2}{dt^2} \vec{OA} = -G \frac{mM(1+\frac{m}{M})}{r^2} \vec{er}}$$

La force d'Attraction exercée par O sur A est celle qu'exercerait un centre attractif de masse $M(1 + \frac{m}{M})$.

Par conséquent, on en déduit que la troisième loi de Kepler en tenant compte de l'entrainement du centre attractif ;

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \left(1 + \frac{m}{M}\right)} \quad (\text{IV.3.3})$$

La planète la plus massive est Jupiter et $\frac{m}{M} \approx \frac{1}{1047}$, donc la 3^e loi de Kepler vue au 2 est valable en très bonne approx pour les planètes du syst. solaire orbitant autour du Soleil.

4. Rôle des autres planètes: le pb à N corps et la stabilité du système solaire

Les planètes s'attirent entre elles et les perturbations qui en résultent apportent d'autres termes correctifs dans la 3^e loi de Kepler.

On ne peut considérer qu'en 1^{ère} approx que chaque planète est soumise à la seule influence du Soleil.

Le problème exact est celui de N-corps s'attirant mutuellement via un champ de force en $1/r^2$. C'est ce que l'on appelle le problème à N-corps.

Pour $n \geq 3$, nous ne savons pas résoudre analytiquement (et exactement) le problème dans le cas général.

On emploie des méthodes dites perturbatives ou on utilise une intégration purement numérique des équations du mouvement.

→ C'est avec une approche numérique que Jacques Laskar a montré en 1994 - 1995 que le mouvement des planètes du système solaire est non-predictible au delà de 60 millions d'années: on ne sait pas si le système solaire sera stable dans 60 millions d'années.

5. Satellisation et vitesses cosmiques

a. Orbite circulaire et 1^{ère} vitesse cosmique

Soit une orbite de rayon R , autour d'un centre attracteur de masse M , quelle vitesse doit avoir un "satellite", de masse m , du centre attracteur pour décrire l'orbite circulaire de rayon R ?

On se place dans le réf. barycentrique, supposé confondre en bonne approx avec le réf. du centre attracteur.

Sur l'orbite, l'accélération $\vec{\gamma}$ est centrale :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r$$

$$r=R=\text{cste} \Rightarrow \ddot{r}=0 \Rightarrow \vec{\gamma} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r$$

Le PFD dans le réf. barycentrique supposé galiléen devient:

$$m \vec{\gamma} = -G \frac{mM}{R^2} \vec{e}_r,$$

$$\text{Soit: } -mR\dot{\theta}^2 = -G \frac{mM}{R^2},$$

$$\Rightarrow R\dot{\theta}^2 = \frac{GM}{R^2} \quad (\text{IV.5.0})$$

$$\text{or } \vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta \text{ donc } v = \|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (\text{IV.5.1})$$

On appelle 1^{ère} vitesse cosmique v_0 avec $M=M_T$ et $R=R_T$

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} \quad (\text{IV.5.2})$$

$$\underline{\text{AN: }} M_T = 6,0 \cdot 10^{24}, \quad R_T = 6378 \text{ km}, \quad v_0 \approx 7,9 \text{ km.s}^{-1}$$

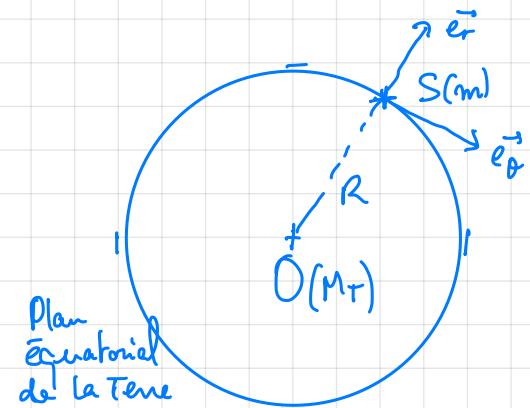
Pour décrire un cercle autour du Soleil de rayon 1.u.a, on doit avoir:

$$v = \sqrt{\frac{GM_S}{1 \text{u.a}}} \approx 29,8 \text{ km.s}^{-1}$$

Exercice: Satellite géostationnaire

Sur quelle type d'orbite doit se situer un satellite géostationnaire ? Évaluer l'altitude correspondante

Le satellite doit tourner autour de la Terre avec la même vitesse angulaire que celle de rotation de la Terre. Sur elle-même, c'est ce que signifie géostationnaire.



La vitesse du satellite $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ doit vérifier : $\dot{\theta} = \Omega_T$

où Ω_T est la vrt. de rotat° de la Terre
souche même.

⇒ le satellite décrit un cercle dans le centre

est le centre de la Terre, et ce cercle est nécessairement ds le plan équatorial de la Terre

Avec (IV.5.0) [PFD dans le ref. barycentrique] au a :

$$R\dot{\theta}^2 = G \frac{M_T}{R^2}$$

Soit $R^3 = G \frac{M_T}{\Omega_T^2}$

Soit $R = \left[G \frac{M_T}{\Omega_T^2} \right]^{1/3}$

ref. terrestre galiléen en forme approx en translat° quasi-circulaire autour du Soleil.

A.N. $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \quad \Rightarrow R \approx 42,3 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$\Omega_T \approx \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \text{ rad.s}^{-1}$$

Soit une altitude $z := R - R_T \approx 35,9 \cdot 10^3 \text{ km}$

rayon équatorial $R_T \approx 6378 \text{ km}$

b. vitesse de libération au 2^{ème} vit. cosmique

Une particule dans un champ de gravitation peut se libérer du champ (dans aller à l'infini, = état de diffusion)

Si $E_m \geq 0$

$E_m = 0 \Leftrightarrow$ parabole, la particule a une vitesse nulle à l' ∞ ($\text{à l}'\infty E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 \Leftrightarrow v_0 = 0$)

$E_m > 0 \Leftrightarrow$ hyperbole, la particule a une vitesse non nulle à l' ∞ , $v_\infty \neq 0$.

On appelle 2^{ème} vitesse cosmique la vitesse minimale à laquelle il faudrait lancer la particule soumise à la seule gravitation à partir de la surface de la Terre pour qu'elle puisse aller à l' ∞ .

$$E_m \geq 0 \Leftrightarrow \frac{mv^2}{2} + E_{\text{eff}} \geq 0$$

où $E_{\text{eff}} = -\frac{GmM_T}{R_T} + \frac{mc^2}{2r^2}$, $C = r^2\dot{\theta}$

Puisque E_m est conservée, écrivons sa valeur initiale:

$$E_m = \frac{1}{2}mv_i^2 + E_{\text{eff},i} = \frac{1}{2}mv_i^2 - G\frac{mM_T}{R_T}$$

D'où $E_m \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 \geq G\frac{mM_T}{R_T}$

$$v_i \geq v_p = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = \sqrt{2} \cdot V_0 \quad (\text{IV.5.3})$$

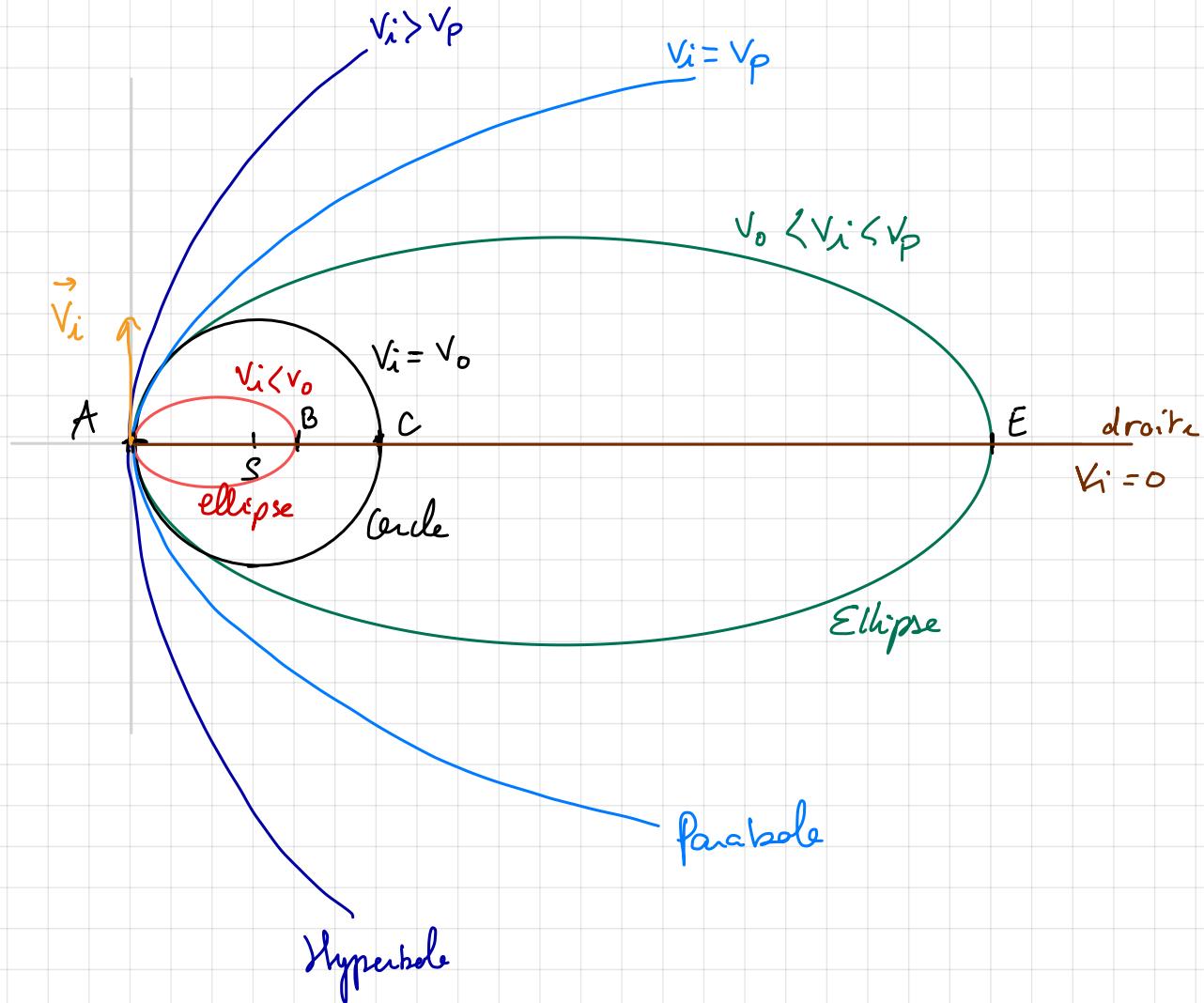
$V_p = \sqrt{2}V_0$ est la 2^{ème} vitesse cosmique

AN. $v_p \approx 11,2 \text{ km/s}$

Pour s'échapper de l'attraction du soleil :

$$v_i \geq v_{p\odot} \approx 42,1 \text{ km/s}$$

Notons S le centre de masse du Soleil, et notons A la position initiale de la particule (planète ou satellite). Communiquons à la particule une vitesse $\vec{v}_i \neq (AS)$. Selon la valeur de v_i il y a plusieurs trajectoires possibles, elles sont résumées ci-dessous:



C. S'échapper du système solaire : 3^e v. c. cosmique.

La vitesse que doit posséder un corps par rapport à la Terre pour qu'il puisse s'échapper du système solaire porte le nom de 3^e vitesse cosmique.

La valeur de cette vitesse dépend de la direction le long de laquelle le corps sort de la zone d'action de l'attraction terrestre. Cette valeur est minimale si cette direction coïncide avec la direction du mouvement orbital de la Terre autour du Soleil et elle est maximale si ces directions sont opposées.

Exercice : Calcul de la 3^e vitesse cosmique

Un calcul exact de la 3^e v. c. cosmique est laborieux : il faut tenir compte des interactions gravitationnelles de 3 corps ; le Soleil, la Terre et le vaisseau cosmique.

Le calcul se simplifie notablement si l'on néglige l'influence qui exerce le champ de gravitation du Soleil sur le mouvement du vaisseau cosmique pendant la durée qu'il met pour s'échapper de la zone d'action de l'attraction terrestre. On rentre alors dans le cadre du problème à 2 corps.

On note v , v_0 , v_p respectivement la vitesse, la 1^e v.c. et la 2^e v.c. du vaisseau p/r à la Terre.

On note V , V_0 , V_p , idem p/r au Soleil.

Le vaisseau se meut d'abord dans le champ terrestre.
On se place dans le référentiel géocentrique supposé galiléen durant le survol du vaisseau.

On suppose que la masse m du vaisseau est négligeable devant M_T .

On note v_∞ la vitesse du vaisseau une fois sorti de l'attraction terrestre.

1. En utilisant la conservation de l'énergie marquer que :

$$v_\infty^2 = v^2 - 2V_0^2$$

Une fois le vaisseau sorti de l'attraction terrestre, nous rapportons son mouvement par au référentiel héliocentrique, supposé galiléen durant le survol du vaisseau. On note V_c la vitesse du mouvement (quasi) circulaire de la Terre autour du Soleil. On note θ l'angle entre \vec{V}_∞ et \vec{V} , où \vec{V} est la vitesse du vaisseau dans le ref héliocentrique.

2 a) mg: $v^2 = V_c^2 + v_\infty^2 + 2V_c v_\infty \cos \theta$

b) Déterminer v_∞ telle que $v = v_p = \sqrt{2} V_c$

(v_p vitesse de libération de l'attraction solaire)

c) En déduire $v_3 = v$ la 3^e vitesse de libération cosmique. Discuter les valeurs en fonction de θ .

Application numérique

d. Tomber sur le soleil : 4^{ème} vitesse cosmique

La 4^{ème} vitesse cosmique v_4 est la vitesse minimale que doit posséder une fusée lancée depuis la Terre pour tomber sur le soleil. La valeur de cette vitesse dépend de la position du point d'impact.

Exercice : 4^{ème} vitesse cosmique

On reprend l'exercice de la partie 3.

On note \vec{v}_∞ la vitesse du vaisseau une fois sorti de l'attraction terrestre.

La conservation de l'énergie a permis de montrer :

$$v_\infty^2 = v^2 - 2V_0^2$$

Au départ la fusée tourne avec la Terre autour du Soleil à une vitesse V_c dans le référentiel héliocentrique.

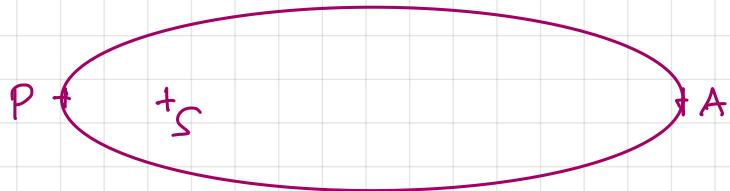
Dans le ref. héliocentrique, à l'instant où la fusée quitte l'attraction terrestre, la vitesse de la fusée est : $\vec{v} = \vec{V}_c + \vec{v}_\infty$.

L'énergie minimale qu'il faut dépenser pour le freinage correspond au cas où $\vec{v}_\infty = -\vec{V}_c$.

On note S le centre du Soleil.

- à quelle condition la fusée aura une trajectoire elliptique de grand-axe $2a$?

ellipse de la fusée



Où note: $R = SA$

$$x = SP$$

2. Écrire le grand axe a en fonction de $V_c = \sqrt{\frac{GM_0}{R}}$

et V_∞ .

3. Mq: $V_\infty = V_c \left(1 - \sqrt{\frac{2x}{R+x}} \right)$

4. En déduire que: $V_4^2 = V_c^2 \left(1 - \sqrt{\frac{2x}{R+x}} \right)^2 + 2V_c^2$

5. Le paramètre x définit univoquement la forme de l'ellipse et la ligne tracée sur la surface du Soleil passant par le point d'impact de la fusée. Discuter $V_4(x)$ en fonction de x .

IV. Limites de la théorie newtonienne de la gravitation

1. Le cas de Mercure : avance du périhélie. Bertin
2. Nottion de rayon gravitationnel. exo 13 p 314 Bertin
3. Courbes de rotation des galaxies spirales.
4. Cosmologie Newtonienne.

a. Loi de Hubble et le principe cosmologique.

→ b. Loi de Hubble-Lemaître et expansion de l'Univers.

exo 12 p 314 c. le fluide cosmique et les équations de Friedmann.
repulsion cosmique de Bertin.

Hakim