

Interaction de deux particules : le problème
à deux corps en interaction centrale conservative

Cours n° 1

(Farsano chp 5)

(Gignoux chp 2)

Bertin chp 9

Brebec chp 7.

Rax chp 2

Goldstein chp 3

Landau chp 3

(Arnold chp 2)



I. Interaction de deux particules centrale et conservatrice

1. Hypothèses et exemple.
2. Description d'un champ de force central et conservatif
3. Vérification du principe d'action/réaction.
4. Conservation de l'énergie dite mécanique.

II. Problème à deux corps: mobile fictif (M) et masse réduite (μ)

1. Trajectoire dans le référentiel barycentrique.
2. Notion de mobile fictif (M) et de masse réduite (μ).
3. Énergie mécanique et moment cinétique de M .

III. Problème à deux corps : le mouvement de M , un mouvement à force centrale conservative.

1. Description et équations du mouvement
2. Lois de conservation et intégrale première du mouvement. exo
3. Domaines accessibles à la trajectoire (orbites) : états liés et de diffusion. exo
4. Théorèmes de Bertrand : rôle privilégié des problèmes de Kepler et de Hooke. exo à suivre
5. Théorème du Viriel dans le cas du mouvement à force centrale conservative.

Intro

Le système mécanique le plus simple est celui constitué de deux particules (masses ponctuelles, charges ponctuelles) en interaction.

On suppose ici que cette interaction est conservative et centrale: elle est décrite par une énergie potentielle d'interaction, qui ne dépend que de la distance entre particules.

On va montrer que l'étude du mouvement de ce problème à deux corps se ramène à la détermination du mouvement d'un point matériel fictif dans un champ de forces centrales.

I. Interaction de deux particules centrale et conservatrice

1. Hypothèses et exemple.

2. Description d'un champ de force central et conservatif

- a. Notion de force centrale
- b. Notion de force conservative
- c. Force centrale et conservative
- d. Propriétés: relation de Maxwell
- e. Propriétés: travail indép. du trajet

3. Vérification du principe d'action/réaction.

4. Conservation de l'énergie dite mécanique.

II. Problème à deux corps: mobile fictif (M) et masse réduite (μ)

1. Trajectoire dans le référentiel barycentrique.

2. Notion de mobile fictif (M) et de masse réduite (μ).

3. Énergie mécanique et moment cinétique de M .

III. Problème à deux corps : le mouvement de M , un mouvement

à force centrale保守.

1. Description et équations du mouvement

2. Loi de conservation et intégrale première du mouvement. exo

3. Domaines accessibles à la trajectoire (orbites) : états liés et de diffusion. exo

4. Théorèmes de Bertrand : rôle privilégié des problèmes de Kepler et de Hooke. exo à faire

5. Théorème du viriel dans le cas du mouvement à force centrale conservative.

I. Interaction de deux particules : énergie potentielle d'interaction

1. Hypothèses et exemples

Soit $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$ repérés par: $\vec{r}_i = \vec{OM}_i$ ($i=1,2$)
où O est l'origine d'un référentiel galiléen.

On suppose que $\{M_1, M_2\}$ forme un système isolé.

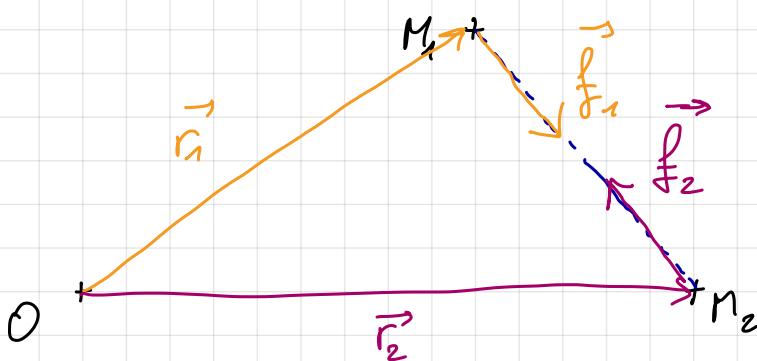
On note: $\vec{f}_{ij} = \vec{F}_{M_j \rightarrow M_i}$ la force qu'exerce M_j sur M_i .

On suppose que: les structures internes des (M_i) n'ont aucun rôle lors du mouvement.

On suppose: $\exists \mathcal{E}_p(r)$, $r = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|$, telle que:

$$\vec{f}_{ij} = -\text{grad}_{M_i}(\mathcal{E}_p) \quad (\text{I.1.1})$$

autrement dit. \vec{f}_{ij} est centrale ($\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(r)$) et conservative ($\exists \mathcal{E}_p$).



(I.1.1) s'appelle une expression intrinsèque: elle ne dépend pas du système de coordonnées choisi. Le point en indice M_i rappelle les coordonnées par rapport auxquelles on doit dériver \mathcal{E} .

Exemples:

- interaction électrostatique entre $M_1(q_1)$ et $M_2(q_2)$

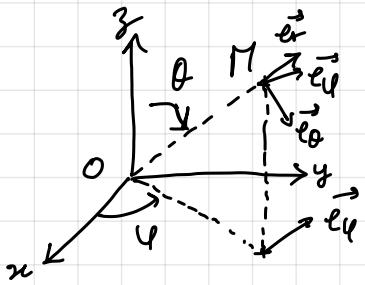
$$E_p(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r}$$

- interaction gravitationnelle entre $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$

$$E_p(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

2. Description d'un champ de force central et conservatif

a. Notion de Force centrale



$$\vec{F} = F \vec{e}_r, \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$$

O : centre de la Force \vec{F}
 M : point d'application.

b. Notion de Force conservative

On dit qu'un champ de force \vec{F} est conservatif s'il dérive d'un potentiel.

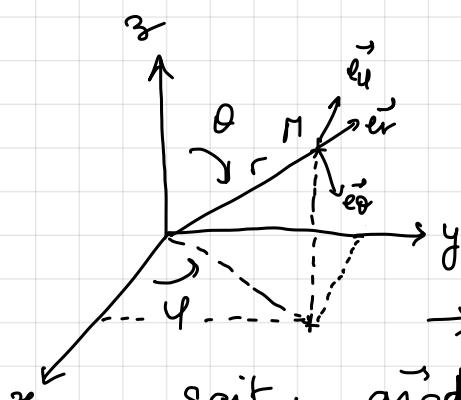
On dit qu'un champ de force \vec{F} dérive d'un potentiel s'il existe une fonction scalaire des points M de l'espace telle que:

$$\vec{F} := -\vec{\text{grad}}(\xi_p(M)) \Leftrightarrow d\xi_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

La fonction $\xi_p(M)$ est appellée potentiel du champ \vec{F} ou énergie potentielle du point M dans le champ \vec{F} .

c. Force centrale et conservative

$$\vec{F} = F \vec{e}_r, \text{ où: } \vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} \quad O: \text{centre de } \vec{F}, M: \text{point d'application}$$



On se place en coord. sphériques (naturel)

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\phi \vec{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr$$

$$\rightarrow \text{Or: } d\xi_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -F dr \Leftrightarrow \boxed{F = -\frac{d\xi_p}{dr}}$$

$$\text{soit: } \vec{\text{grad}}(\xi_p) = -\frac{d\xi_p}{dr} \vec{e}_r \quad \text{i.e.: } \boxed{\xi_p(M) \equiv \xi_p(r)}$$

dans

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\text{grad}}(\xi_p) = -\underbrace{\frac{d\xi_p}{dr}}_{= F(r)} \vec{e}_r}$$

$F(r) < 0 \Leftrightarrow$ attractif (vers 0)

$F(r) > 0 \Leftrightarrow$ répulsif (loin de 0)

d. Propriétés : relations de Maxwell

D'après la définition du gradient, $\text{d}f = \text{grad}(f) \cdot \vec{dM}$,

$$\text{grad}(\mathcal{E}_p) \cdot \vec{dM} = d\mathcal{E}_p,$$

et $d\mathcal{E}_p$ est une différentielle totale.

Ainsi : $\vec{F} \cdot \vec{dM} = -d\mathcal{E}_p$ doit également être une différentielle totale, c'est que la forme différentielle

$$\vec{F} \cdot \vec{dM} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \text{ doit vérifier des relations}$$

de Maxwell : $\partial_x F_y = \partial_y F_x \text{ et } \partial_x F_z = \partial_z F_x \text{ et } \partial_z F_y = \partial_y F_z$

e. Propriétés : travail indépendant du trajet

Calculons le travail W d'un point M passant d'une position M_1 à une position M_2 .

$$W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot \vec{dM} = \int_{M_1}^{M_2} -d\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(M_1) - \mathcal{E}_p(M_2)$$

⇒ Le travail d'une force conservative le long d'un trajet donné est égale à la diminution d'énergie potentielle.

En particulier, si la trajectoire est fermée (ic $M_1 = M_2$)

$$W = \oint \vec{F} \cdot \vec{dM} = 0$$

3. Vérification du principe de l'action et de la réaction

Δ Le principe n'est pas universel.

Il exige pour être valide que l'interaction entre les deux particules puisse être considérée comme instantanée.

Cela exclut les interactions magnétiques entre deux particules chargées en mouvement (leur énergie potentielle d'interaction dépend de leur vitesse : cf potentiel retardé de Lénard - Wiechert, pour une charge ponctuelle :

$$\text{de vitesse } \vec{v} : \left\{ \begin{array}{l} V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r - \vec{\beta} \cdot \vec{r}} \\ \vec{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \vec{v}}{r - \vec{\beta} \cdot \vec{r}} \end{array} \right. , \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

Si $|v| \ll c$ alors les potentiels qui définissent \vec{E} et \vec{B} , et donc l'énergie potentielle d'interaction, ne dépendent plus de \vec{v} .)

La théorie de la relativité définit une interaction instantanée comme une interaction se propageant à la vitesse maximale des interactions (=c. pour un obs inertiel).

Il s'avère que l'interaction gravitationnelle se propage à c. d'après la théorie de la relativité générale.

→ Nous allons montrer que les f_i définies au 1. vérifient nécessairement le principe d'action/réaction.

- On note x_1, y_1, z_1 les coordonnées de r_1 dans une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de \mathbb{R}^3 .

- Considérons par exemple la composante de \vec{f}_1 selon \vec{e}_x .

$$f_{1x} := -\partial_{x_1} \mathcal{E}_p = -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_1}$$

or $r = ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)^{1/2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{1}{2r} \cdot 2 \times (-1)^i \times (x_2 - x_1) = \frac{(-1)^i}{r} (x_2 - x_1), \quad i = 1 \text{ ou } 2$$

$$f_{1x} = (-1)^{i+1} \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial r} \cdot \frac{(x_2 - x_1)}{r}, \quad i = 1 \text{ ou } 2$$

On remarque alors que: $f_{1x} = \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial r} \frac{x_2 - x_1}{r}$

et:

$$f_{2x} = -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial r} \frac{x_2 - x_1}{r}$$

Soit: $f_{1x} = -f_{2x}$

Et comme ceci est vrai \forall la composante, on a:

$$\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$$

q.e.d.

Si l'on pose: $\vec{e}_{12} := \frac{\vec{M}_1 \vec{M}_2}{r}$

$$\vec{e}_{12} = \frac{(x_2 - x_1)}{r} \vec{e}_x + \frac{(y_2 - y_1)}{r} \vec{e}_y + \frac{(z_2 - z_1)}{r} \vec{e}_z$$

d'où

$$\vec{f}_2 = -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial r} \vec{e}_{12} = -\vec{f}_1$$

4. Conservation de l'énergie dite mécanique

Sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de \mathbb{R}^3 .

E_p est une fonction de $r = ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)^{1/2}$

d'où de $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$.

Ainsi :

$$dE_p = \sum_{i=1}^2 (\partial_{x_i} E_p dx_i + \partial_{y_i} E_p dy_i + \partial_{z_i} E_p dz_i)$$

or $d\vec{OM}_i := dx_i \vec{e}_x + dy_i \vec{e}_y + dz_i \vec{e}_z$

et $\vec{f}_i := -\partial_{x_i} E_p \vec{e}_x - \partial_{y_i} E_p \vec{e}_y - \partial_{z_i} E_p \vec{e}_z$

$$\vec{f}_i := -\partial_{x_i} E_p \vec{e}_x - \partial_{y_i} E_p \vec{e}_y - \partial_{z_i} E_p \vec{e}_z$$

d'où : $dE_p = -\vec{f}_1 \cdot d\vec{OM}_1 - \vec{f}_2 \cdot d\vec{OM}_2$

On : $\vec{f}_i \cdot d\vec{OM}_i$ est le travail élémentaire δW_i de \vec{f}_i appliquée en \vec{r}_i lorsque celui-ci subit un déplacement élémentaire $d\vec{OM}_i$.

$$\vec{f}_i \cdot d\vec{OM}_i =: \delta W_i.$$

Le théorème de l'énergie cinétique assume que : le travail de la force qui s'exerce sur un point matériel entre deux instants est égal à la variation de l'énergie cinétique du point entre ces mêmes instants.

D'où : $\delta W_i = d(\frac{1}{2} m_i v_i^2)$

et donc :

$$dE_p = -d(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2)$$

Si l'on note $E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

alors on a :

$d(E_p + E_c) = 0$

Si $\mathcal{E}_m := \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c$, appelée énergie mécanique du système
 $\{M_1, M_2\}$, alors on a:

$$d\mathcal{E}_m = 0$$

cad $\mathcal{E}_m = \text{cste}$

C'est une constante du mouvement, on dit qu'elle est
conservée.

D'autre part, l'introduction de \mathcal{E}_p dans l'expression de \mathcal{E}_m
justifie l'appellation d'énergie potentielle d'interaction.

I. Interaction de deux particules centrale et conservatrice

1. Hypothèses et exemple.

2. Description d'un champ de force central et conservatif

- a. Notion de force centrale
- b. Notion de force conservative
- c. Force centrale et conservatrice
- d. Propriétés: relation de Maxwell
- e. Propriétés: travail indép. du trajet

3. Vérification du principe d'action/réaction.

4. Conservation de l'énergie dite mécanique.

II. Problème à deux corps: mobile fictif (M) et masse réduite (μ)

1. Trajectoire dans le référentiel barycentrique.

2. Notion de mobile fictif (M) et de masse réduite (μ).

3. Énergie mécanique et moment cinétique de M .

III. Problème à deux corps : le mouvement de M , un mouvement à force centrale保守ative.

1. Description et équations du mouvement

2. Loi de conservation et intégrale première du mouvement. exo

3. Domaines accessibles à la trajectoire (orbites) : états liés et de diffusion. exo

4. Théorèmes de Bertrand : rôle privilégié des problèmes de Kepler et de Hooke. exo à suivre

5. Théorème du viriel dans le cas du mouvement à force centrale conservative.

II. Le problème à deux corps : masse réduite et moteur fictif.

1. Trajectoires dans le référentiel barycentrique.

On note (R) le référentiel galiléen précédent.

Dans (R) le PFD s'écrit

$$\begin{cases} m_1 dt^2 \vec{r}_1 = \vec{f}_1 = -\vec{f}_2 & (\text{II.1.1}) \\ m_2 dt^2 \vec{r}_2 = \vec{f}_2 & (\text{II.1.2}) \end{cases}$$

d'où :

$$(\text{II.1.1}) + (\text{II.1.2}) \Leftrightarrow dt^2 (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = \vec{0}$$

Or le barycentre G de $\{M_1, M_2\}$ est par définition :

$$G \mid \vec{G} = \vec{OG} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

dans $(\text{II.1.1}) + (\text{II.1.2}) \Leftrightarrow dt^2 \vec{r}_G = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{v}_G = \text{cste} \quad (\vec{v}_G = \vec{V}(G/R)) \quad (\text{II.1.3})$$

⇒ Dans le référentiel galiléen (R) , G est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Par conséquent, le référentiel barycentrique (R_G) est lui aussi galiléen

Nous pouvons donc choisir de prendre pour origine O le barycentre G et de confondre ainsi (R) et (R_G) .

La relation caractéristique du barycentre :

$$m_1 \vec{G}F_1 + m_2 \vec{G}F_2 = \vec{\sigma},$$

S'écrit alors :

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{\sigma} \Leftrightarrow \boxed{\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{r}_2}. \quad (\text{II.1.4})$$

Autrement dit : dans (R_G) les deux particules en interaction découlent des trajectoires homothétiques.

2. Notion de masse réduite et mobile fictif.

Dans le référentiel barycentrique (R_G), (II.1.1) et (II.1.2) ne changent pas, et alors :

$$(m_2) \times (\text{II.1.1}) \Leftrightarrow -m_2 m_1 dt^2 \vec{r}_1 = m_2 \vec{f}_2 \quad (\text{II.2.1})$$

$$(m_1) \times (\text{II.1.2}) \Leftrightarrow m_1 m_2 dt^2 \vec{r}_2 = m_1 \vec{f}_2 \quad (\text{II.2.2})$$

$$(\text{II.2.1}) + (\text{II.2.2}) \Leftrightarrow \boxed{m_1 m_2 dt^2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = (m_1 + m_2) \vec{f}_2} \quad (\text{II.2.3})$$

Posons : $\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, appelée la masse réduite du

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

système $\{M_1, M_2\}$, (II.2.3) devient alors :

$$\boxed{\mu dt^2 \vec{r} = \vec{f}_2} \quad (\text{II.2.4})$$

$$\text{où, } \vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{M_1 M_2}$$

Le point M tel que : $\vec{r} = \vec{GM} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ est appelé mobile fictif associé au système $\{M_1, M_2\}$. La résolution de son équation du mouvement (II.2.4) [dans (R_G)] donne \vec{r}_1 et \vec{r}_2 . En effet :

$$\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \text{et} \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1 \quad (\text{II.1.4})$$

d'où :

$$\vec{r} = -\frac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{r}_1 \Leftrightarrow \boxed{\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}} \quad (\text{II.2.5})$$

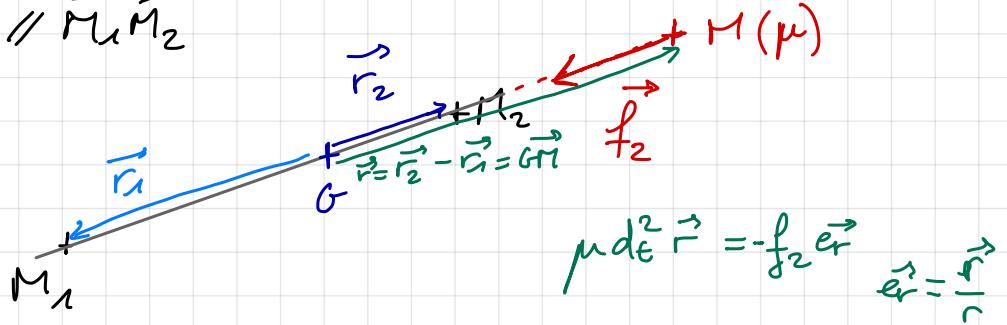
et d'autre :

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1 \Leftrightarrow \boxed{\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}} \quad (\text{II.2.6})$$

Les trajectoires de M_1 et M_2 dans (R_G) se déduisent de celle du mobile fictif par homothétie.

Puisque : $\vec{f}_2 = -d \cdot \vec{e}_r \vec{u}_{12}$, $\vec{u}_{12} = \frac{\vec{M}_1 \vec{M}_2}{\|\vec{M}_1 \vec{M}_2\|}$,

le support de \vec{f}_2 en M passe par G , c'est à dire selon la direction: $\vec{GM} = \vec{r} \parallel \vec{M}_1 \vec{M}_2$



Le mouvement du mobile fictif M est donc un mouvement à force centrale

Autrement dit le problème le plus simple en mécanique: l'interaction conservative entre deux particules, se ramène à l'étude d'une particule (mobile fictif de masse la masse réduite) dans le ref. barycentrique dans un champ de force central

↳ Mais il nous reste à s'assurer que l'énergie mécanique et le moment cinétique (les 2 constantes du mouvement dans un champ de force central) de $\{M_1, M_2\}$ sont bien équivalents à ceux de M !

Cas limite: $m_1 \gg m_2$

$$\mu = \frac{m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = m_2 + o\left(\frac{m_2}{m_1}\right) \Rightarrow \vec{r}_2 \approx \vec{r} \text{ et } \vec{r}_1 \approx \vec{0}$$

⇒ la particule la plus massive est pratiquement confondue avec l'origine G et le mobile fictif M se confond pratiquement avec la particule la plus légère.

3. Énergie mécanique et moment cinétique du mobile fictif M

Vérifions que l'énergie mécanique et moments cinétiques de $\{M_1, M_2\}$ et de M sont confondus. Rappelons que le mouvement de M est à force centrale il est donc plan et s'effectue suivant la loi des aires.

1. Énergie mécanique de M

Soit E_M l'énergie mécanique de $\{M_1, M_2\}$,

$$E_M = E_C + E_P$$

$$E_M = \frac{1}{2} m_1 (d_t \vec{r}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (d_t \vec{r}_2)^2 + E_P(r) \quad (\text{II.3.1})$$

En injectant (II.2.5) et (II.2.6) dans (II.3.1), il vient:

$$E_M = \frac{+1}{2} \frac{\mu^2}{m_1} (d_t \vec{r})^2 + \frac{+1}{2} \frac{\mu^2}{m_2} (d_t \vec{r})^2 + E_P(r)$$

$$E_M = \frac{m_2 + m_1}{2 m_1 m_2} \cdot \mu^2 \cdot (d_t \vec{r})^2 + E_P(r)$$

$$\boxed{E_M = \frac{1}{2} \mu (d_t \vec{r})^2 + E_P(r) \quad (\text{II.3.2})}$$

⇒ Dans (R₀) l'énergie mécanique de $\{M_1, M_2\}$ est également l'énergie mécanique du mobile fictif.

2. Moment cinétique de M

Soit \vec{L} le moment cinétique de $\{M_1, M_2\}$ par rapport à G

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \wedge \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{p}_2$$

$$\vec{L} = -\frac{\mu \vec{r}}{m_1} \wedge m_1 \vec{v}_1 + \frac{\mu \vec{r}}{m_2} \wedge m_2 \vec{v}_2$$

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \wedge (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}, \quad \vec{v} = d_t \vec{r} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2}$$

Sait : $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

avec \vec{p} l'impulsion de $M(\mu)$: $\vec{p} := \mu \vec{v}$.

La loi des aires donne la conservation de $\|\vec{L}\|$ puisque :

$L := \|\vec{L}\| = m C$ où C est la constante de la loi des aires (module du vecteur aéolaire $\vec{c} := \vec{r} \times \vec{v}$)

Le moment cinétique de $\{M_1, M_2\}$ est bien équivalent au mouvement cinétique du mobile fictif.

C. Conclusion

Conclusion : Au vu des résultats du 2, et de ceux obtenus dans ce paragraphe 3, on peut désormais conclure :

L'interaction conservative entre deux particules M_1 et M_2 ramène à l'étude dans leur référentiel barycentrique, galiléen, du mouvement d'une particule, appelée mobile fictif de masse la masse réduite μ , de même énergie mécanique et de même moment cinétique que le système $\{M_1, M_2\}$, et ce dans un champ de force central conservatif.

I. Interaction de deux particules centrale et conservatrice

1. Hypothèse et exemple.

2. Description d'un champ de force central et conservatif

a. Notion de force centrale

b. Notion de force conservative

c. Force centrale et conservative

d. Propriétés: relation de Maxwell

e. Propriétés: travail indép. du trajet

3. Vérification du principe d'action/réaction.

4. Conservation de l'énergie dite mécanique.

II. Problème à deux corps: mobile fictif (M) et masse réduite (μ)

1. Trajectoire dans le référentiel barycentrique.

2. Notion de mobile fictif (M) et de masse réduite (μ).

3. Énergie mécanique et moment cinétique de M .

III. Problème à deux corps : mouvement de M , un mouvement à force centrale保守的.

1. Description et équations du mouvement

2. Lois de conservation et intégrale première du mouvement. exo

3. Domaines accessibles à la trajectoire (orbites) : états liés et de diffusion. exo

4. Théorèmes de Bertrand: rôle privilégié des problèmes de Kepler et de Hooke. exo à parfaire

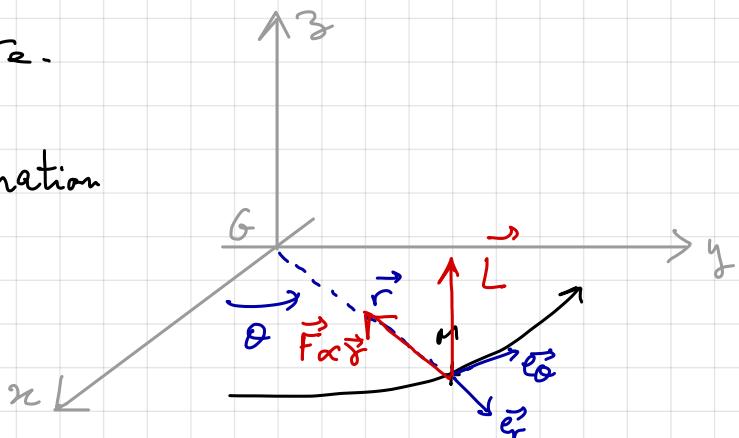
5. Théorème du viriel dans le cas du mouvement à force centrale conservative.

III. Mouvement du mobile fictif : mouvement à force centrale conservative

1. Description et équations du mouvement

Un mouvement à force centrale (conservative ou non) est un mouvement à accélération centrale. Nous allons donc faire quelques rappels de cinématique newtonienne pertinents pour le suite.

Soit $\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}$, l'accélération de M dans R_G .



Par définition d'un mouvement à force centrale :

$$\vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} = \vec{0} \quad \heartsuit$$

Il en découle :

1) $\vec{C} := \vec{r} \wedge \vec{v}$ (vecteur aérolaire) est une constante du mouvement, en effet : et donc $\vec{T} = \mu \vec{C}$ est aussi un cst !
↳ mouvement cinétique

$$\boxed{\frac{d}{dt} \{ \vec{C} \} = \vec{v} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.}$$

2) Ce qui implique que \vec{r} reste au cours du mouvement perpendiculaire à une direction fixe (celle de \vec{C}), c'est à dire dans un plan.

3) Le mouvement vérifie la loi des aires: le rayon vecteur \vec{r} balaye des aires égales pendant des durées égales.

En effet : $\vec{r} = r \vec{e}_r$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \vec{e}_{\theta}$$

et $d_t \vec{e}_r = \vec{\omega} \times \vec{e}_r$ en cinématique non relativiste

($d_t \vec{e}_r = \vec{\omega} \times \vec{e}_r + c(\vec{a} \cdot \vec{e}_r) - c(\vec{u} \cdot \vec{e}_r)$, sinon, où $\vec{a} = \frac{1}{c} \frac{d\vec{u}}{dt}$ et $\vec{u} = \frac{1}{c} \frac{d\vec{r}}{dt}$)

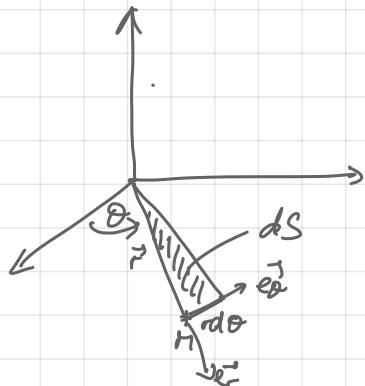
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \vec{\gamma} = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{r} \theta \vec{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \vec{\gamma} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta \end{array} \right.$$

$= 0$ car $\vec{\gamma} \parallel \vec{e}_r$, on va le vérifier :

D'où : $\vec{C} := \vec{r} \times \vec{v} = r^2 \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

or $\vec{C} = cste$ $\vec{e}_\theta = cste$, $\|\vec{C}\| = r^2 \dot{\theta} = cste = C$

et puisque $r^2 d\theta = 2 dS$, il vient la loi des aires :



$$C dt = 2 dS$$

pour un même Δt , $C \Delta t = 2 \Delta S_1 = 2 \Delta S_2$

$$\Delta S_1 = \Delta S_2.$$

D'aujourd'hui, nous déterminons les équations de ce mouvement

traduisant le PFD dans le référentiel galiléen R_G .

$$\mu \vec{\gamma} = \vec{F} = F(r) \vec{e}_r$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = F(r) \\ \mu (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left\{ \begin{array}{l} \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = -\frac{1}{\mu} dr \mathcal{E}_P(r) \quad (\text{II.4.1}) \\ 2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} = 0 \quad (\text{II.4.2}) \\ \hookrightarrow \vec{\gamma} \cdot \vec{e}_\theta = 0 \therefore \end{array} \right.}$$

C'est un système d'équations couplées d'ordre 2 en r et θ et non linéaire ...

↳ résolution difficile dans le cas général !

Heureusement les lois de conservation vont nous permettre de simplifier les équations, $\neq \mathcal{E}_p(r)$.

2. Lois de conservation et intégrale première du mt

• Le moment cinétique du mobile fictif est colinéaire à \vec{C} :

$$\vec{L} := \vec{r} \wedge \vec{p} = \mu \vec{C} = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

⇒ Si l'on note $L = \|\vec{L}\| = \mu C$, c'est une constante du mouvement déterminée par les C.I.

Ainsi : $\mu r^2 \dot{\theta} = L = \text{cste}$

soit : $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} = \frac{C}{r^2}$ (II.4.3)

d'où : (II.4.1) $\Leftrightarrow \ddot{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^3} = -\frac{1}{\mu} d_r \mathcal{E}_p$ (II.4.4)

C'est une équation différentielle d'ordre 2 non linéaire. Dépendant de $\mathcal{E}_p(r)$ on peut la résoudre au cas par cas. Si on injecte la solution dans (II.4.3) pour tenter de la résoudre.

→ La conservation du moment cinétique a réduit le problème à la résolution d'une équation différentielle d'ordre 2 NL et d'une équation d'ordre 1 par rapport au temps

La force est centrale et conservatrice, on va montrer que l'énergie mécanique E_m du mobile fictif M est conservée et permet de simplifier encore plus les équations.

Par définition : $E_m = E_c + E_p$

$$\text{Or, } E_c = \frac{1}{2} \mu \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2}_{\substack{\text{énergie cinétique} \\ \text{dite radiale}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu (r \dot{\theta})^2}_{\substack{E_{c,\text{rot}} \\ \text{énergie cinétique de} \\ \text{rotation dite potentiel centrifuge}}} = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

$E_c = E_{c,\text{trans}} + E_{c,\text{rot}}$

$E_{c,\text{rot}}$ \leftarrow énergie cinétique de rotation dite potentiel centrifuge

$$\Rightarrow \mathcal{E}_m = \frac{\mu r^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + \mathcal{E}_p(r) = \frac{\mu r^2}{2} + \frac{\mu r^2 \dot{\theta}^2}{2} + \mathcal{E}_p(r) \quad (\text{II.4.5})$$

Dérivons \mathcal{E}_m par le temps :

$$d_t \mathcal{E}_m = \mu r \ddot{r} + \frac{\mu}{2} (2r \dot{r} \dot{\theta}^2 + 2r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta}) + d_t \mathcal{E}_p(r)$$

$$d_t \mathcal{E}_m = \mu r (\ddot{r} + r \dot{\theta}^2) + \mu r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + d_r \mathcal{E}_p(r) \dot{r}$$

$$d_t \mathcal{E}_m = \mu r (\ddot{r} + r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{\mu} d_r \mathcal{E}_p) + \mu r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

Or : $\ddot{r} = r \dot{\theta}^2 - \frac{1}{\mu} d_r \mathcal{E}_p \quad (\text{cf (II.4.1)})$

donc :

$$d_t \mathcal{E}_m = \mu r (\dot{2}r \dot{\theta}^2) + \mu r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

$$d_t \mathcal{E}_m = \mu r \dot{\theta} (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta})$$

Or (II.4.2) $\Leftrightarrow 2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} = 0$

donc : $d_t \mathcal{E}_m = 0 \quad (\text{II.4.6})$

$\Leftrightarrow \underline{\mathcal{E}_m \text{ est une constante du mouvement}}$

(II.4.6) est une équation d'ordre 1, \mathcal{E}_m est déterminée par les C.I.

Ainsi, si l'on introduit le potentiel effectif $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ défini

par :

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) := \mathcal{E}_p(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}, \quad \text{c'est un potentiel radial}$$

$$(\text{II.4.5}) \Rightarrow \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{2}{\mu} (\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)) \quad (\text{II.4.7})$$

(II.4.7) est l'équation qui traduit la loi de conservation de l'énergie dans (R_G), c'est ce que l'on appelle l'intégrale première du mouvement. C'est une équation d'ordre 1 qui s'intègre par séparation des variables. Nous verrons en exercice que cette équation est aussi valable pour un mouvement plan à 1 degré de liberté

sous champ de force central, cas du pendule mathématique.

L'Énergie cinétique de M est positive, ainsi :

$$(\dot{r} + r)^2 \geq 0 \Leftrightarrow E_m - E_{p,\text{eff}}(r) \geq 0 \quad \forall r$$

Cette condition nous le verrons, définit le domaine accessible à la trajectoire.

Dans : $\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E_m - E_{p,\text{eff}}(r))}$ (II.4.7 bis)

et donc : $dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E_m - E_{p,\text{eff}}(r))}}$

Alors, si le domaine de r accessibles est déterminé, on peut obtenir les dates correspondantes aux variations de r :

$$\boxed{T = \int_{t_0}^{t_1} dt = \pm \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E_m - E_{p,\text{eff}}(r))}}} \quad (\text{II.4.8})$$

De plus, on peut également déterminer l'angle parcouru autour de l'axe \vec{e}_z colinéaire à \vec{L} , via :

$$L = \mu r^2 \dot{\theta} \Leftrightarrow d\theta = \frac{L}{\mu r^2} dt = \frac{C}{r^2} dt$$

soit $\boxed{\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta = \pm \int_{r_0}^{r_1} \frac{C dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E_m - E_{p,\text{eff}}(r))}}} \quad (\text{II.4.9})$

L'angle polaire θ est une fonction monotone du temps : $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} > 0$

⇒ La rotation de \vec{r} dans le plan s'effectue toujours dans le même sens.

En fonction de $r \mapsto E_{p,\text{eff}}(r)$ ces intégrales sont analytiques au max, intégrables au min. Qu'qu'il en soit une question subsiste : Comment déterminer le domaine de r accessible ?
Quel type de trajectoire attendre ?

Remarque: Pour $E_p(r) = a r^{n+1}$ ie: $\vec{F} = \pm A r^n \hat{r}$

les intégrales (II.1.9) au (II.4.8) sont analytiques si

- $n = -1, -2, -3$ si $(E_p = \frac{1}{2} k r^2, E_p = -\frac{k}{r}, E_p = -\frac{k}{r^2})$
↳ Θ exprimable en terme de fonctions trigonométriques
- $n = 5, 3, 0, -4, -5, -7 \rightarrow \Theta$ exprimable en terme de fonctions elliptiques

Exercice: Intégration des équations du mouvement linéaire (1ddl) application à la période des oscillations d'un pendule plan.

Dans le cours, nous avons considéré un mouvement à force centrale comprenant deux degrés de liberté r et θ . Nous allons voir ici que la méthode d'intégration des équations du mouvement utilisée s'applique aussi pour un mouvement à 1 ddl dit linéaire.

Sait une particule M de masse m dont l'énergie potentielle E_p dépend d'une seule coordonnée notée x homogène à une distance, de sorte que \dot{x} soit la vitesse de M .

On note $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ son énergie cinétique.

On suppose que l'énergie mécanique de M est conservée :

$$E_m = E = \text{cste}$$

$$\text{Sait } E_c + E_p = E \Leftrightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x) = E$$

Cette équation est appelée l'intégrale première du mouvement, elle exprime la loi de conservation de l'énergie

C'est une équation diff du premier ordre qui s'intègre par séparation des variables

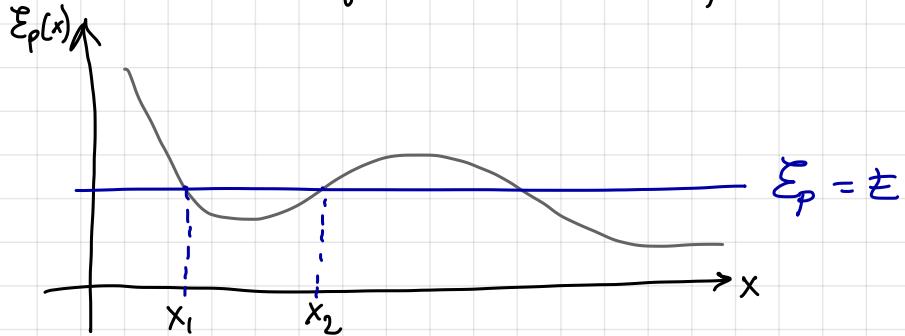
1 En appliquant cette méthode montrer que :

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - E_p(x)}} + \text{cste}$$

2. a) Que peut-on dire de sign(E_c) ?

b) En déduire le domaine des x accessibles au mouvement

3. Considérons le graphe de $x \mapsto E_p(x)$ suivant :

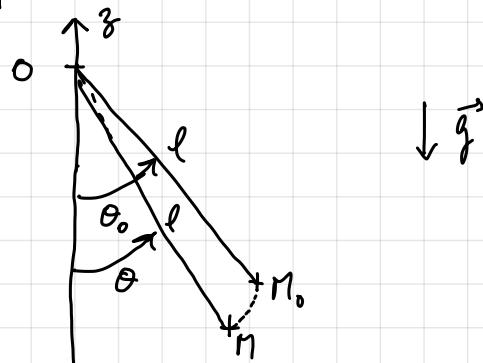


a. Justifier l'appellation de "points d'arrêt" pour les points tels que $E_p(x) = E$

Si le domaine du mouvement est limité par x_1 et x_2 , il s'effectue dans une région limitée de l'espace, on dit qu'il est fini et oscillatoire (si conservation de l'énergie il y a) : la particule effectue un mouvement périodique dans la cuvette de potentiel entre x_1 et x_2 .

b. En admettant la propriété de réversibilité du temps pour un mouvement s'effectuant selon les lois de la mécanique classique, déterminer la période $T(E)$ du mouvement.

4. Considérons un pendule plan : un point M de masse m à l'extrémité d'une tige de longueur l dans un champ de pesanteur \vec{g} , lâché sans vitesse depuis une position initiale repérée par un angle θ_0 .



a. En supposant la conservation de l'énergie que vaut l'énergie mécanique de M? On notera $\mathcal{E}_p(0)$ l'énergie potentielle en O.

b. Écrire d'autre part l'énergie potentielle en fonction de θ

c. Identifier la coordonnée x. On pensera à écrire la vitesse de M.

d. En déduire que :

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\frac{\theta_0}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})}}$$

e. On pose $x_0 = \sin^2(\frac{\theta_0}{2})$

Mentionner que $T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(x_0)$

où $K(x) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \xi}}$

f. En réalisant un développement limité, mentionner que :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \dots \right)$$

Commentez.

1. $\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = (E - \mathcal{E}_p(x)) \cdot \frac{2}{m}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \sqrt{E - \mathcal{E}_p}$

$\Rightarrow dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{E - \mathcal{E}_p}}$

d'où :
$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - \mathcal{E}_p}} + \text{cste}$$

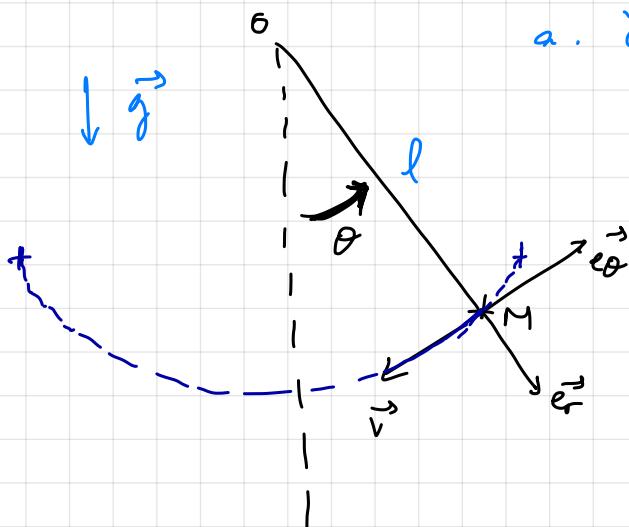
2. a. $\mathcal{E}_p \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \geq 0 \Leftrightarrow E - \mathcal{E}_p(x) \geq 0$

b. $x \mapsto E \geq \mathcal{E}_p(x)$.

3 a. $x \mid \mathcal{E}_p(x) = E \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = 0 \Rightarrow$ vitesse nulle = point d'arrêt.

3b. Le trajet $x_2 \rightarrow x_1$ met la même durée que le trajet $x_1 \rightarrow x_2$
 donc $T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - \mathcal{E}_p(x)}}$

4.



a. $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p(0) - mgl \cos \theta_0 = \text{cste}$
 Énergie potentielle initiale

b. $\mathcal{E}_p(M) = \mathcal{E}_p(0) - mgl \cos \theta$

c. La vitesse \vec{v} de M est :

$$\vec{v} = l\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Soit $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m (\dot{\theta})^2$

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \Leftrightarrow \dot{x} = l\dot{\theta} \Rightarrow x = l\theta + \text{cste}$$

$$\Rightarrow dx = l d\theta$$

d. La période T est égale à 4 fois la durée nécessaire pour parcourir l'arc entre θ_0 et $\theta = 0$

$$T = 4 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{\theta_0} \frac{l d\theta}{\sqrt{mgl(\cos \theta - \cos \theta_0)}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

Or $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$

donc $\cos \theta - \cos \theta_0 = 2 \left(\sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$

d'où

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}}$$

e. on pose $\sin^2 \xi = \frac{\sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right)}{x_0}$ avec $x_0 = \sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right)$

$$\Rightarrow T = 2 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{x_0 \sqrt{1 - \sin^2 \xi}}$$

et $\cos \xi d\xi = \frac{1}{x_0} \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{2x_0 \cos \xi}{\cos \frac{\theta}{2}} d\xi$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{1 - x_0^2 \sin^2 \xi}$$

$$\cos \xi = \sqrt{1 - \sin^2 \xi}$$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{2 \sqrt{1 - \sin^2 \xi} x_0}{\sqrt{1 - x_0^2 \sin^2 \xi}} d\xi$$

et $\theta = 0 \Leftrightarrow \sin \xi = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$

$$\theta = \theta_0 \Leftrightarrow \sin \xi = 1 \Leftrightarrow \xi = \frac{\pi}{2}$$

d'anc : $T = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2 \sin^2 \xi}} d\xi$

Soit : $T = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} K(x_0)$

avec : $K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \xi}} d\xi$

f. si $\theta_0 \ll 1$

$$x_0 = \frac{\theta_0}{2} + o(\theta_0)$$

posons $\varepsilon = x_0 \sin \xi$, $\varepsilon = \frac{\theta_0}{2} \sin \xi + o(\theta_0)$

$$\frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow K(x_0) = \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta_0^2}{4} \cdot \sin^2 \xi + o(\theta_0^2) \right) d\xi$$

$$K(x_0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_0^2}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \xi d\xi + o(\theta_0^2)$$

$$\text{or } \sin^2 \xi = \frac{1 - \cos 2\xi}{2} \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^2 \xi \, d\xi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2\xi \, d\xi$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left[\underbrace{\frac{1}{2} \sin 2\xi}_{=0} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

d'anc $K(x_0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_0^2}{8} \cdot \frac{\pi}{4} + o(\theta_0^2)$

$$K(x_0) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + o(\theta_0^2) \right)$$

d'où $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + o(\theta_0^2) \right)$

isochronisme
formule de Borda

3. Domaine accessible à la trajectoire (orbite), états liés et de diffusion

le domaine de r accessibles D_r est défini par la condition :

$$r \in D_r \Leftrightarrow E_{p,\text{eff}}(r) \leq E_m \quad (\text{II.4.10}),$$

ce lieu géométrique est appelé l'orbite. Il existe plusieurs types d'orbites, on parle de classification des orbites, c'est ce que l'on va discuter ici.

Nous allons voir en exercice que cette condition permet par exemple de déterminer la distance de plus courte approche d'un météore.

Remarques :

1) Lorsque $E_{p,\text{eff}}(r) = E_m$: $\frac{dr}{dt} = 0$,
la distance au centre de force G atteint un extrémum.

2) Les conditions initiales influent sur D_r puisque :

$$E_{p,\text{eff}}(r) = E_p(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad \text{et } L \text{ dépend des CI.}$$

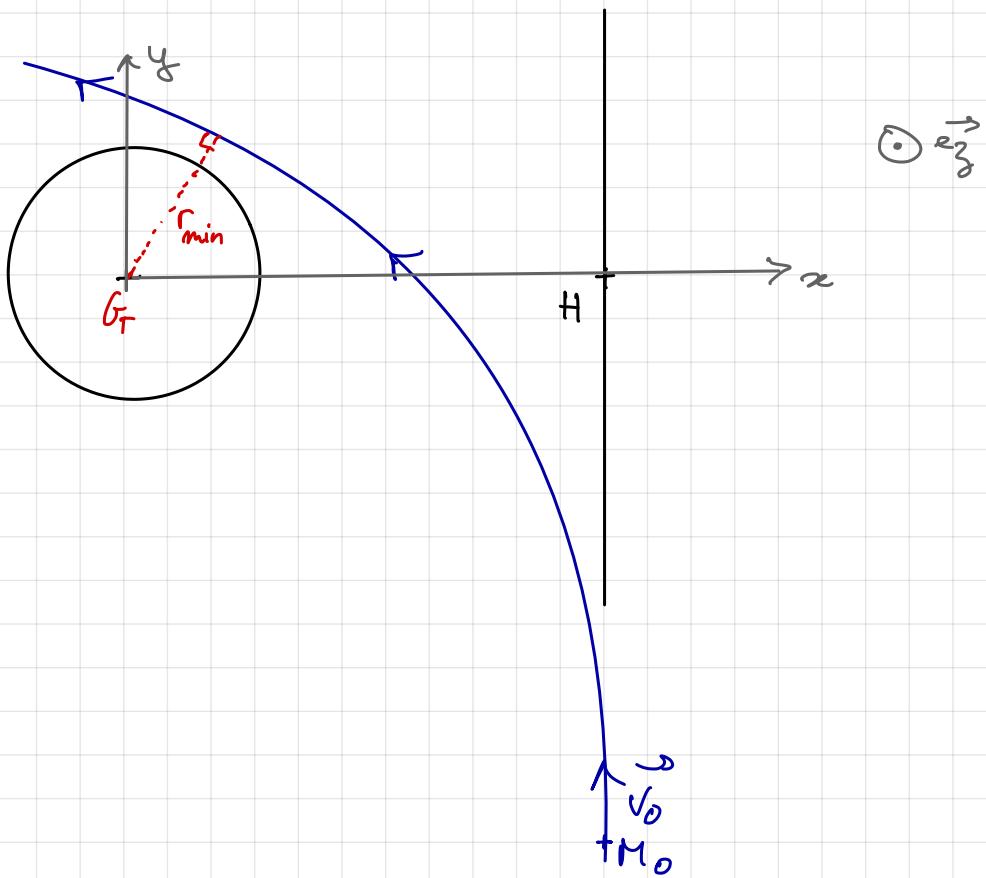
3) À la date t_0 où $\dot{r} = 0$, $\vec{r}(t_0) \neq \vec{0}$, à priori et donc \ddot{r} change de signe ; le signe devant " $\sqrt{\frac{2}{\mu}(E_m - E_{p,\text{eff}})}$ " change. $r(t)$ change de monotonie ($\uparrow \rightarrow \downarrow$ ou $\downarrow \rightarrow \uparrow$)

Exercice: Distance de plus courte approche d'un météore

Un météore de masse m , négligeable devant la masse de la Terre M_T : $m \ll M_T$, arrive de l'infini avec la vitesse \vec{v}_0 par rapport à la Terre. Son paramètre d'impact (i.e.: distance entre le barycentre G_T de la Terre et la droite que suivrait la trajectoire du météore si il n'y avait pas la Terre) est noté $b = \|G_T - \vec{r}\|$, et il ne tourne pas sur lui-même. On note r la distance entre le barycentre du météore G_m celui de la Terre G_T .

- 1) Identifier le mobile fictif et la masse réduite au premier ordre en m/M_T .
- 2) Déduire le référentiel pertinent pour décrire le mouvement du météore.
- 3). a) Rappeler l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle entre le météore et la Terre
b) Déterminer l'expression du moment cinétique $\|\vec{L}\|$ du mobile fictif en fonction de v_0 et b
c) Déduire l'expression du potentiel effectif $E_{p,\text{eff}}$ en fonction de r
- 4) Déterminer la distance de plus courte approche r_{\min} du météore en fonction de b et $r_0 := G_T \frac{M_T}{v_0^2}$
- 5) En déduire le paramètre d'impact b_{\min} pour que $r_{\min} > \gamma R_T$ avec $\gamma > 1$. AN pour $v_0 = 13 \text{ km.s}^{-1}$ et $\gamma = \sqrt{2}$.

Commengons par un schéma:



o) La masse réduite du système à deux particules est :

$$\mu := \frac{m M_T}{m + M_T}$$

soit $\mu = m \cdot \frac{1}{1 + \frac{m}{M_T}} = m \left(1 - \frac{m}{M_T} + o\left(\frac{m}{M_T}\right)\right)$

soit $\boxed{\mu = m + O\left(\frac{m}{M_T}\right)}$

Le barycentre du système {Tene, Plétoare} G est :

$$\overrightarrow{OG} = (\Pi_T \overrightarrow{OG_T} + m \overrightarrow{OG_H}) \frac{1}{\Pi_T + m} = (\overrightarrow{OG_T} + \frac{m}{\Pi_T} \overrightarrow{OG_H}) \cdot \frac{1}{1 + \frac{m}{\Pi_T}}$$

(où O est l'origine du référentiel de Copernic)

soit $\boxed{\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG_T} + O\left(\frac{m}{\Pi_T}\right)}$

le barycentre G est confondu avec G_T à l'ordre zéro en m/Π_T .

Le mobile fictif M du système {Tene, Plétoare} est ainsi confondu avec G_T . En effet :

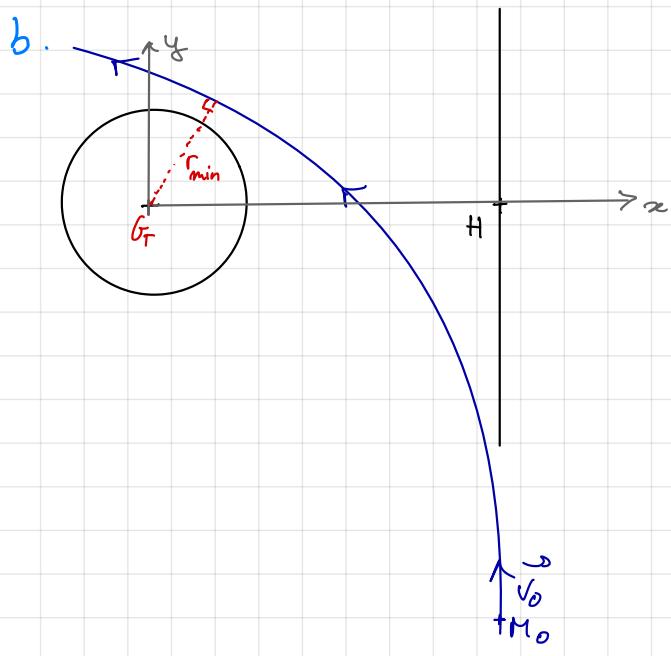
$$\text{on a: } \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{G}_T \vec{G}_M = \vec{G} \vec{G}_M + O\left(\frac{m}{M_T}\right) =: \vec{GM}$$

$$\text{donc : } M = G_M + O\left(\frac{m}{M_T}\right)$$

2. le référentiel pertinent est donc le référentiel dont le système d'axe est centré sur G_T , et les axes sont ceux du référentiel de Copernic. Ce référentiel est en bonne approximation Galiléen pour notre étude.

$$3. \text{ a. } \mathcal{E}_p(r) = -G \frac{m M_T}{r}$$

$$(F = g_{\text{red}}(\mathcal{E}_p) = -G \frac{m M_T}{r^2} \hat{e}_r)$$



Le mouvement de M est un mouvement à force centrale conservative, le moment cinétique $L = \|\vec{L}\|$ est donc conservé.

Lorsque M est en M_0 avec la vitesse \vec{v}_0 , L vaut:

$$\vec{L} = \vec{G}_T M_0 \wedge m \vec{v}_0$$

$$\text{On } \vec{G}_T \vec{M}_0 = \vec{G}_T \vec{H} + \vec{H} \vec{M}_0$$

$$\text{et } \vec{H} \vec{M}_0 \wedge \vec{v}_0 = \vec{0} \text{ donc } \vec{L} = \vec{G}_T \vec{H} \wedge m \vec{v}_0$$

$$\text{or } \vec{b} = \vec{G}_T \vec{H}, \text{ ainsi } \boxed{\vec{L} = \vec{b} \wedge m \vec{v}_0}$$

$$\text{D'où } \boxed{\|\vec{L}\| = b m v_0} \text{ (puisque } \vec{b} \cdot \vec{v}_0 = 0)$$

c. Le potentiel effectif $E_{p,\text{eff}}$ de ce mouvement à force centrale conservative est par définition:

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) := \mathcal{E}_p(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2},$$

dans

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = -G \frac{m M_T}{r} + \frac{m b^2 v_0^2}{2 r^2}}$$

4. La distance de plus courte approche correspond à un point d'arrêt : $r = 0$, $\mathcal{E}_c(r_{\min}) = 0$

cad: $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,\text{eff}}$

Or l'énergie mécanique est conservée :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c(M_0) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

dans : r_{\min} vérifie : $\frac{1}{2} m v_0^2 = -G \frac{m M_T}{r_{\min}} + \frac{m b^2 v_0^2}{2 r_{\min}^2}$

soit : $m v_0^2 r_{\min}^2 + 2 G m M_T r_{\min} - m b^2 v_0^2 = 0$

soit : $\alpha r_{\min}^2 + \beta r_{\min} + \gamma = 0$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = m v_0^2 \\ \beta = 2 G m M_T \\ \gamma = -m b^2 v_0^2 \end{array} \right.$ et $r_{\min} \geq 0$

Après résolution, on trouve :

$$r_{\min} = G \frac{M_T}{V_0^2} \left(\left[1 + \left(\frac{b v_0^2}{G M_T} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right)$$

$$\boxed{r_{\min} = r_0 \left(\left[1 + \left(\frac{b}{r_0} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right)}$$

avec

$$r_0 = G \frac{M_T}{V_0^2}$$

On remarque que r_{\min} est une fonction croissante de b et V_0^2

Ce qui est attendu : plus le météore est loin et plus il va

vite, mais il passa proche de la Terre.

5. Le météore contourne la Terre sans la rencontrer si :

$r_{\min} > \gamma R_T$, où : γ est un coefficient de sécurité > 1 .

Sait : $r_0 \left(\left[1 + \left(\frac{b}{r_0} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right) > \gamma R_T$

sait : $\left[1 + \left(\frac{b}{r_0} \right)^2 \right]^{1/2} > \frac{\gamma R_T}{r_0} + 1$

sait : $\frac{b^2}{r_0^2} > \left(1 + \gamma \frac{R_T}{r_0} \right)^2 - 1$

sait : $b^2 > r_0^2 \left(1 + \gamma \frac{R_T}{r_0} \right)^2 - r_0^2$

sait : $b > b_{\min} = \gamma R_T \sqrt{1 + 2 \frac{r_0}{\gamma R_T}}$

où $r_0 = \gamma \frac{R_T}{V_0^2}$

Pour $V_0 = 13 \text{ km.s}^{-1}$ et $\gamma = \sqrt{2}$

$$b_{\min} = \sqrt{2} R_T \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{g R_T / (13 \cdot 10^3)^2}{\sqrt{2} R_T}}$$

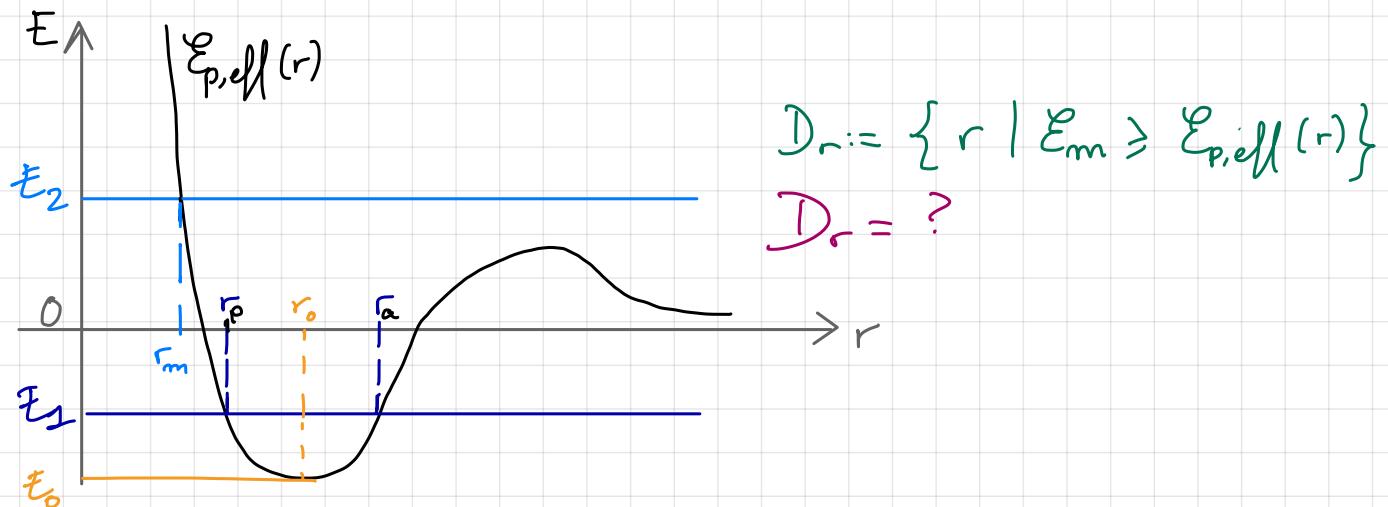
$$\boxed{b_{\min} \approx 11131 \text{ km} \approx 1,75 \cdot R_T}$$

Ce qui est relativement proche. On remarque que r_{\min} et b_{\min} ne dépendent pas de la masse du météore mais uniquement de sa vitesse !

Reprendons le cours.

Ainsi, on peut étudier en principe D_r pour des CI données (E_m et L) et une loi de force donnée ($r \mapsto E_p(r)$).

Considérons le profil $E_{p,\text{eff}}(r)$ ci-dessous, et considérons trois valeurs de E_m ; E_0, E_1 et E_2 , fixées par les C.I.

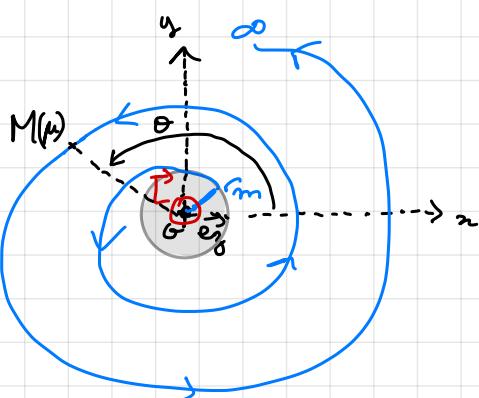


② cas où $E_m = E_2$:

$$D_r = [r_m, +\infty[$$

l'orbite aboutit à l'infini*, on parle d'état libre ou de diffusion.

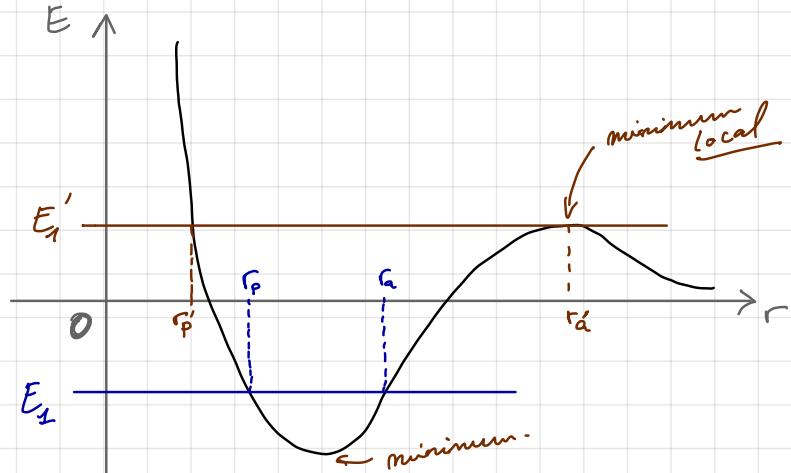
orbite type
(planète à L)



Dans ce cas l'orbite est toujours ouverte, c'est que la trajectoire ne se referme pas sur elle-même.

On dit que l'orbite est liée, on parle d'état lié.

L'extension maximale "r_a" est l'apoastre. (apoé, apoleure, apochélion)
minimale "r_p" est le périastre. (périé, périphérie, périhélium)



Il y a deux sous-cas à considérer :

cas 1.1 $E_m = E_1$: on peut définir une période comme étant la durée écoulée entre deux passages successifs au périastre r_p (ou à l'apoastre r_a) :

$$\frac{1}{2} T(E_m, L) := \int_{r_p}^{r_a} dt(dr) \stackrel{(II.4.8)}{=} \int_{r_p}^{r_a} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E_m - \mathcal{E}_{\text{eff}}(r))}}$$

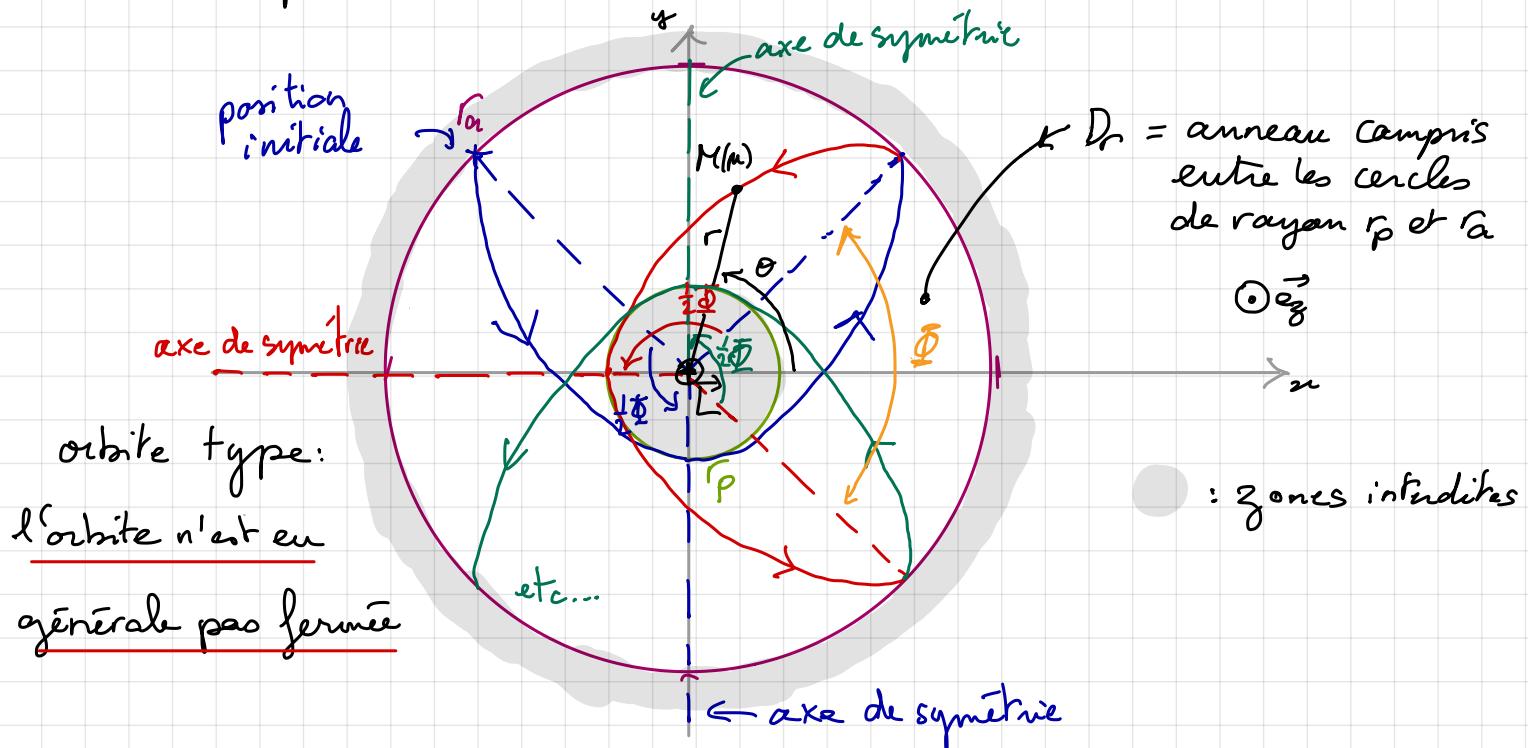
On peut également définir l'angle apparial comme la valeur de l'angle polaire entre deux passages successifs au périastre r_p (ou à l'apoastre r_a) :

$$\frac{1}{2} \Phi(E_m, L) = \int_{r_p}^{r_a} d\theta(dr) \stackrel{(II.4.9)}{=} \int_{r_p}^{r_a} \frac{C dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E_m - \mathcal{E}_{\text{eff}}(r))}}$$

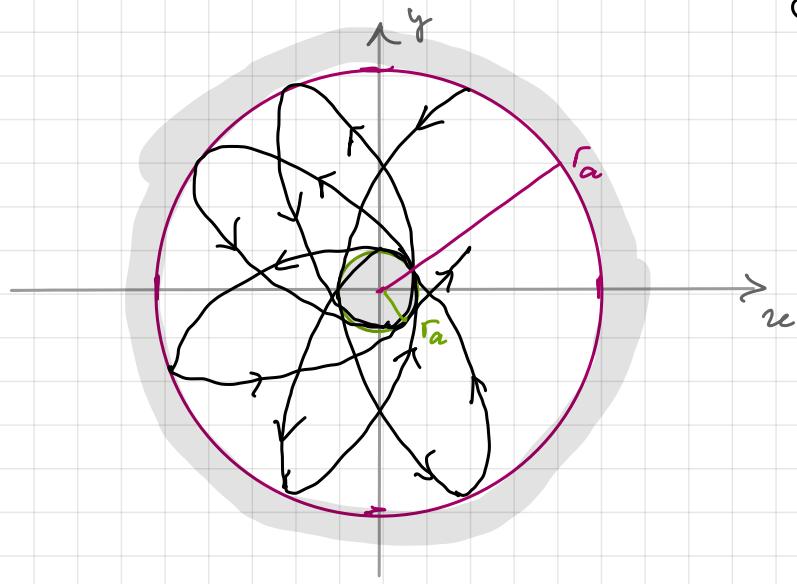
càd lorsque $r(t)$ change de $\xrightarrow{\text{on}} \xleftarrow{\text{on}}$

au point de rebroussement $\dot{r} = 0$ (càd lorsque \dot{r} change de signe), le signe de θ dans (II.4.9) change. Si par exemple on compte θ à partir de $r = r_a$ jusqu'à la direction du rayon vecteur mené au point de rebroussement, les arcs de trajectoire de chaque côté de ce point ne différeront que par le signe de θ pour toutes les valeurs identiques de r , i.e.: la trajectoire est symétrique par rapport à la direction indiquée.

On comprend ainsi la construction de l'orbite ci-dessous :

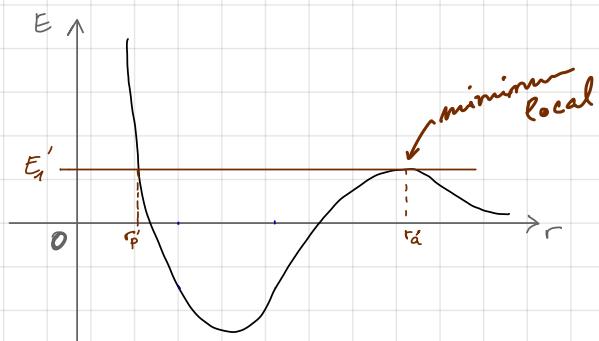


À la fin on arrive à une orbite de ce type :

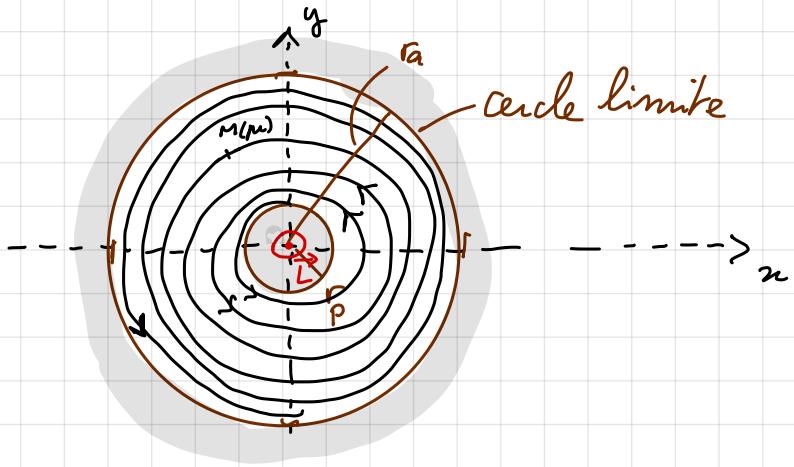


cas ①.2 : $E_m = E_1'$, on ne peut définir T et Φ : l'orbite présente un cercle dit cercle limite atteint au bout d'une durée infinie.

Comment le montrer?
→ c'est du au changement de concavité?



orbite type



① Cas où $E_m = E_0$

$$D_r = \{r_0\}$$

L'orbite est alors un cercle de rayon r_0 , c'est un état lié.

Dans ce dernier cas l'orbite est fermée.

$$\frac{dr}{dt} \Big|_{r_0} = 0 \Leftrightarrow E_m = E_{p,\text{eff}}(r_0)$$

4. Théorèmes de Bertrand: conditions pour des orbites fermées, ou le rôle privilégié des problèmes de Kepler et de Hooke.

Nous examinerons ici dans quels cas, les orbites obtenues dans le cas $E_m = E_1$ (état lié compris entre un apogée et un périastre) sont fermées, autrement dit que l'état lié est périodique.

1^{er} théorème de Bertrand (1873)

Les orbites d'une particule M soumise à un champ de force central et conservatif dérivant d'un potentiel analytique $\mathcal{E}_p(r)$ (r est la distance entre le centre de force et M) sont fermées

- ¶ les C.I. (ssi) $\mathcal{E}_p(r) = kr^2$, i.e. $\vec{F} \propto r\hat{r}$ ou $\mathcal{E}_p(r) = -\frac{k}{r}$, i.e. $\vec{F} \propto r^{-2}\hat{r}$
- $\mathcal{E}_p \propto r^2 \rightarrow$ oscillation harmonique planaire (problème dit de Hooke)

- $\mathcal{E}_p \propto -\frac{1}{r} \rightarrow$ cas képlerien (problème dit képlerien)

↳ L'observation de la stabilité et de la périodicité des trajectoires des corps célestes permet de justifier la loi d'attraction universelle en $1/r^2$ (puisque la loi de Hooke n'a pas de sens physique pour toutes les distances : la force $\propto r$ tend vers l'infini avec r).

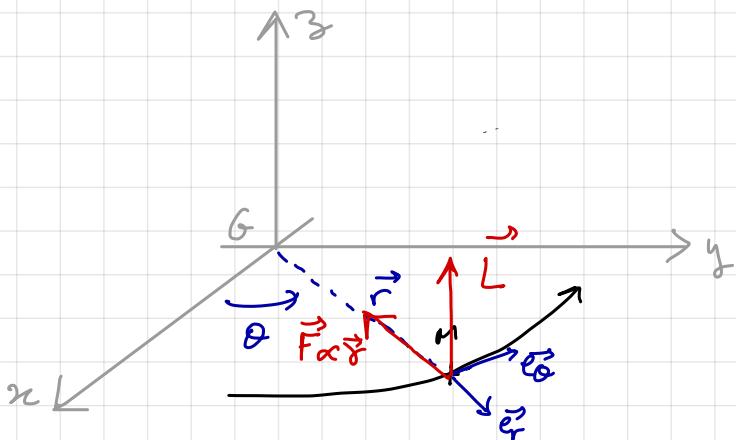
Exercice : Preuve du 1^{er} théorème de Bertrand

BROUILLON ACE STADE

La constante des aires $C := r^2 \dot{\theta}$ permet d'exprimer la vitesse v et l'accélération a en fonction de la seule variable $\mu := 1/r$. Ce sont les formules de Binet.

nous les rappelons ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v^2}{C^2} = \mu^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \\ \frac{a}{C^2} = -\mu^3 - \mu^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \end{array} \right. \quad (B.1) \quad (B.2)$$



Supposons une force \vec{F} s'exerçant sur $M(\mu)$ de la forme :

$$\vec{F} = \pm \mu k r^n \vec{e}_r$$

où k est une constante de couplage.

Il nous faut montrer que l'orbite est fermée si $n = -2$ ou $n = 1$.

1. En utilisant le PFD et (B.2) montrer que $u(\theta)$ vérifie l'équation :

$$\boxed{\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \mp \frac{k}{C^2} u^{-n-2}}$$

2. Soit u_0 ne dépendant pas de θ (cas d'une orbite circulaire de rayon r_0 constant). Montrer que :

$$\boxed{u_0 = \left(\frac{A}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{où } \omega = \dot{\theta}}$$

3. Considérons une orbite décrite par $\mu(\theta)$ voisine de μ_0 telle qu'elle s'écrit :

$$\mu(\theta) = \mu_0 + \varepsilon \mu_1(\theta) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1, \text{ avec } \mu_1(\theta=0) = 0$$

s'écrit : $\mu(\theta) = \mu_0(1 + \varepsilon f(\theta)) + o(\varepsilon), \quad f(\theta) = \frac{\mu_1}{\mu_0}.$

Mettre que :

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} + (n+3) f = -(n+3) \left[-\frac{(n+2)}{2} \varepsilon f^2(\theta) + \frac{(n+2)(n+4)}{6} \varepsilon^2 f^3(\theta) + o(\varepsilon^2) \right] \quad (3.0)$$

C'est une équation non linéaire décrivant une oscillation.

On suppose qu'elle est résolvable par un développement perturbatif du type :

$$f(\theta; \varepsilon) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + o(\varepsilon^2)$$

solution perturbée à l'ordre 1 solution de (3.0) à l'ordre 2

4. a. Mettre que : $f_0(\theta) = \lambda_0 \cos(p\theta)$, où λ_0 tq $p = \sqrt{n+3}$

b. Mettre que : $f_1(\theta) = \lambda_0 \cos(p\theta) + \lambda_0^2 (A + B \cos(2p\theta))$, où l'on précisera A et B.

À ce stade du développement perturbatif,

$$f(\theta) = f_1(\theta) = \lambda_0 \cos(p\theta) + o(\lambda_0) \quad (4.3)$$

Pour qu'une orbite soit fermée il faut et suffit que l'angle apsidal Φ défini par : $\frac{1}{2} \Phi = \int_{r_p}^{r_a} d\theta / dr = \Theta(r_a) - \Theta(r_p)$
 $\frac{1}{2} \Phi = \Theta(u_a) - \Theta(u_p)$

soit commensurable avec π c'est à dire $\exists (m_0, m_1) \in \mathbb{N}^2$ tq : $\Phi = \frac{m_0}{m_1} \pi$.

5. Avec (4.3) que vaut Φ en fonction de n?

Pour quelles valeurs de n l'orbite est-elle fermée?

Il nous faut poursuivre le DP.

6. a. Justifier que l'an cherche $f_3(\theta)$ sous la forme :

$$\cos^3 x = \dots \quad f_3(\theta) = \lambda_0 \cos(\theta) + \lambda_0^2 (A + B \cos(2\theta)) + \lambda_0^3 D \cos(3\theta)$$

b. Montrer que :

comme \uparrow

$$\left\{ \begin{array}{l} q^2 = (n+3) \left[1 - \frac{\lambda_0^2 (n+2)(n-1)}{12} \right] \\ D = \frac{(n+2)(n+3)}{96} \end{array} \right.$$

c. Que vaut Φ à l'ordre 1 en λ_0 ?

Que doit donc vérifier n pour que Φ soit commensurable à π ? quelques sont les C.I.? (\rightarrow cf fd).

d. Que vaut Φ pour le problème de Kepler?
pour le problème de Hooke?

Pour un rappel sur la théorie des perturbations appliquée aux équadiff on peut consulter

- Fento-phynique le site web
 - Non-linear oscillations ou Perturbation Methods de Nayfeh.
-

Voir aussi l'ouvrage de Fassano-Marmi pour la démonstration du théorème, chp 5 p 179 - 193.

2^eme théorème de Bertrand

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un mouvement à force centrale présente un hodographe circulaire est que le produit de la norme de l'accélération $\|\vec{a}\|$ par le carré du rayon vecteur r^2 soit une constante.

Autrement dit $\|\vec{a}\| r^2 = \text{cste} \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{\vec{A}}{J} + \frac{\text{cste}}{C} \vec{u}(\varphi)$

au: $\left\{ \begin{array}{l} C = r^2 \dot{\theta} \\ J \text{ un scalaire constant} \\ \vec{u}(\varphi) \text{ vecteur unitaire tournant} \\ \vec{A} \text{ un vecteur constant} \end{array} \right.$

La signification physique du vecteur \vec{A} apparaîtra dans l'étude du problème de Kepler: c'est le vecteur de Laplace - Runge - Lenz.

Premre: à faire.

5. Théorème du Viriel dans le cas d'une force centrale conservative

1) Rappelons tout d'abord le théorème du Viriel.

C'est un théorème de nature statistique mais qui s'applique aussi au problème du mouvement à force centrale.

Soit $\{M_i\}_i$ de masses $\{m_i\}_i$ de positions $\{\vec{r}_i\}_i$. Sur M_i s'applique la résultante des forces \vec{F}_i .

Le PFD en réf. galiléen s'écrit: $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$.

Posons: $G := \sum \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$

$$\frac{dG}{dt} = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + \sum \vec{p}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\text{or } \sum \vec{p}_i \cdot \vec{v}_i = \sum m_i v_i^2 = 2T$$

où T est l'énergie cinétique du système de N particules $T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$

$$\text{d'où } \frac{dG}{dt} = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2T$$

Notons $\bar{X} := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau X dt$

$$\frac{\bar{d}G}{dt} = 2\bar{T} + \overline{\sum \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i}$$

$$\text{or: } \frac{\bar{d}G}{dt} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dG = \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau}$$

que le mouvement soit périodique ou non, s'il est borné alors G l'est aussi et donc en choisissant τ suffisamment

long: $\frac{\bar{d}G}{dt} = 0$, d'où:

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i =: V$$

∇ est appelé le potentiel (de Clausius)

2) Dans le cas d'une force centrale conservatrice,

$$\vec{F}_i := -\vec{\nabla}_i U,$$

et alors:

$$\boxed{\bar{F} = + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i U \cdot \vec{r}_i}$$

3) Dans le cas de notre étude du problème à 2 corps, il suffit de considérer une seule particule: le mobile fictif.

Si $N=1$, alors: $\boxed{\bar{F} = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial r} r}$

Supposons de plus que $U = k r^n$, où k est une constante de couplage, alors $\partial_r U = kn r^{n-1}$

$$\bar{F} = \frac{1}{2} n \bar{U}$$

En notant $E_c = \bar{F}$ et $E_p = \bar{U}$ il vient:

$$\boxed{E_c = \frac{n}{2} E_p}$$

où, $n / E_p = k r^n$

4) Dans le cas keplérien $\underline{n = -1}$ ($E_p = -\frac{|k|}{r}$) :

$$E_c = -\frac{1}{2} E_p \text{ soit } \boxed{2 E_c + E_p = 0}$$

Dans ce cas on peut examiner une conséquence curieuse du frottement pour une particule dans un champ en $1/r^2$ dont l'orbite est un état lié (mvt périodique).

$$\bar{E}_m := \bar{F} + \bar{U}$$

$$\text{or } 2\bar{F} + \bar{U} = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{E}_m = -\bar{F} = \frac{1}{2} \bar{U}}$$

Supposons que la particule soit soumise à des frottements de sorte que $d\bar{E}_m < 0$

Alors : $d\bar{E}_m < 0 \Rightarrow d\bar{T} > 0$

i.e. les frottements augmentent la vitesse de la particule !

Il n'y a pas de paradoxe puisque $\bar{dT} = -\frac{1}{2} d\bar{U}$ (Kirchhoff) donc l'augmentation de l'énergie cinétique ne vaut que la moitié de la diminution d'énergie potentielle.

Pour une orbite circulaire U , T et E_m ne dépendent pas du point de la trajectoire, le résultat est valide localement on peut remplacer \bar{E}_m par E_m , \bar{U} par U , et \bar{T} par T .

Pour une orbite elliptique, comme nous le venons, U , T et E_m dépendent du point de la trajectoire donc le résultat précédent n'est valable qu'en moyenne, sur une période de révolution.