2025

Mouvement newtonien dans un champ de force centrale conservative en "$1/r^2$", ou le problème de Kepler.

Cours n°2

Bertin
Brébec

I. Hypothèses, états liés, et états de diffusion

1. Hypothèses

2. États liés et de diffusion

II. Trajectoires dans un champ en $1/r^2$.

1. Recherche des trajectoires

a. cadre

b. Rappels de cinématique : 1ère formule de Binet

c. Équation des trajectoires : via le PFD

d. Équation des trajectoires : via le vecteur de Laplace-Runge-Lenz Exo

e. Classification des trajectoires

2. Représentation des trajectoires

a. Force répulsive $\alpha<0$ Exo

b. Force attractive $\alpha>0$ Exo

Exercice : Déviation d'un météore (bis).

Ce cours suit le cours "Problème à deux corps en interaction centrale conservative".

I. Hypothèses, états liés, et états de diffusion

1. Hypothèses

$$\mathcal{E}_p = -\frac{\alpha}{r} \Rightarrow \vec{F} := -\vec{\text{grad}}(\mathcal{E}_p) = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e_r}$$

α est une constante >0 ou ≤ 0

exemples : • interaction gravitationnelle (cf cours gravitation)

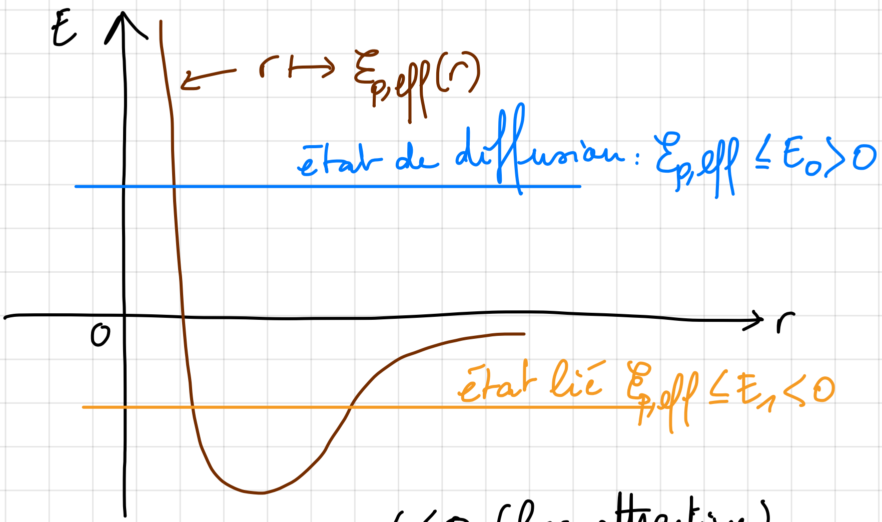
$\alpha = -G m_1 m_2 < 0 \Rightarrow \vec{F}$ attractive et $\mathcal{E}_p > 0$

• électrostatique : $\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \gtrless 0$

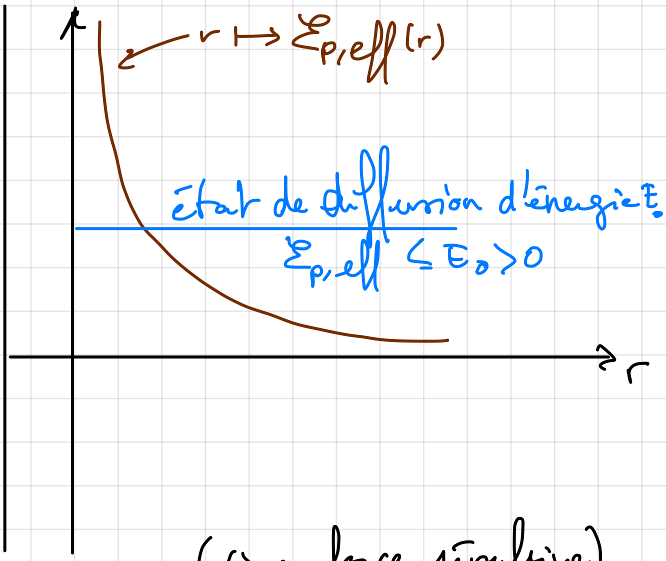
$\Rightarrow \vec{F}$ attractive ou répulsive et $\mathcal{E}_p \lesssim 0$

2. Etats liés et de diffusion

$$\mathcal{E}_{p,eff} = \mathcal{E}_p + \frac{L^2}{2\mu r^2} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\mu C^2}{2r^2}, \quad C = r^2\dot{\theta} = \frac{L}{\mu}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$



$\alpha < 0$ (force attractive)



($\alpha > 0$ force répulsive)

états liés : Mouvements des planètes

états de diffusion : Mouvement des comètes et astéroïdes.

II. Trajectoires dans un champ en $1/r^2$

1. Recherche des trajectoires

a. Cadre

Soit le problème à 2 corps en interaction centrale conservative

Soit O le barycentre des 2 corps et soit M le mobile fictif.

On se place dans le référentiel centré sur O appellé référentiel barycentrique, qui est galiléen, noté (R_O).

Soit $r = \|\vec{OM}\|$ et $\vec{e_r} = \frac{\vec{OM}}{r}$

La force de O sur M s'écrit $\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e_r} = -\vec{\text{grad}}\left(\frac{-\alpha}{r}\right)$

b. Rappels de cinématique : formules de Binet

Nous sommes dans le cas du mouvement à accélération centrale : $\vec{\gamma} \wedge \vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{L} = \mu \vec{C}$ sont des constantes du mouvement

et : $\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m} \,//\, \vec{e_r}$.

L'orbite du point M sera donc plane et se décrit en coordonnées polaires (r, θ).

•) $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e_r}) = \dot{r}\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e_r} \qquad \left(\frac{d\vec{e_r}}{dt} = c(\vec{a}\cdot\vec{e_r})\vec{u} - c(\vec{u}\cdot\vec{e_r})\vec{a} + \vec{\omega}\wedge\vec{e_r}\right)$$

$$= \dot{\theta}\vec{e_z} \wedge \vec{e_r}$$

où $\vec{u} = \frac{1}{c}\frac{d\vec{x}}{d\tau}$, $\vec{a} = \frac{1}{c}\frac{d\vec{u}}{d\tau}$

quadrivitesse (vect. tgt à $\mathcal{L}$) — quadriaccélération (courbure de $\mathcal{L}$)

$$d_t\vec{e_r} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

et $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\dot{\theta}$ et $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$

d'où : $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{C}{r^2}$

et d'où : $\vec{v} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{C}{r^2} \vec{e_r} + \frac{C}{r} \vec{e_\theta}$, 1ère formule de Binet

que l'on retiendra en posant $u = 1/r$ sous la forme :

$$\boxed{v^2 = C^2 \left[u^2 + (d_\theta u)^2 \right]}$$

•) $\vec{\gamma} := \frac{d\vec{v}}{dt}$

↳ $\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e_\theta}$

or $C = r^2 \dot{\theta} = cste \Rightarrow d_t C = 0 \Leftrightarrow 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta} = 0$

$\Leftrightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$

donc comme attendu : $\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e_r} = \left(\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3}\right) \vec{e_r}$

Or, $\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{d\theta} \frac{C}{r^2}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{C}{r^2}\right) \cdot \frac{C}{r^2}$

et : $\frac{dr/d\theta}{r^2} = -\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$

donc : $\ddot{r} = -\frac{C^2}{r^2} \cdot d_\theta^2 (1/r) = -C^2 u^2 d_\theta^2 u$

et donc : $\boxed{\vec{\gamma} = -C^2 \left(u^2 d_\theta^2 u + u^3\right) \vec{e_r}}$ 2ème formule de Binet

C. Equation des trajectoires : via le PFD

Appliquons le PFD dans le référentiel barycentrique (R_0)

$$\mu \vec{\gamma} = \vec{F}$$

Soit : $/\!/ \vec{e_r}$: $\quad \mu C^2 (u^2 d_\theta^2 u + u^3) = \alpha u^2$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{d_\theta^2 u + u = \frac{\alpha}{\mu C^2}}$$

Résolution avec la C.I. $d_\theta u|_{\theta=0} = 0$ (choix des origines).

→ éq. Homogène : $X^2 + 1 = 0 \Rightarrow X = \pm i$

donc $u_H(\theta) = \lambda \cos(\theta + \varphi)$, on prend $\varphi = 0$
ie : $d_\theta u|_0 = 0$

→ solution particulière : $u_p(\theta) = \frac{\alpha}{\mu C^2}$

→ Conclusion : $\boxed{u(\theta) = \lambda \cos\theta + \frac{\alpha}{\mu C^2}}$

Posons :

$$p = \frac{\mu C^2}{\alpha} \quad \text{et} \quad e = \lambda \frac{\mu C^2}{\alpha}$$

on obtient :

$$u(\theta) = \frac{e}{p}\cos\theta + \frac{1}{p} \Leftrightarrow \boxed{r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}}$$

⇒ c'est l'équation d'une conique en coordonnées polaires. À ce stade, il nous faut préciser λ qui intervient dans l'excentricité e et qui dépend des C.I.. Nous allons faire intervenir une constante du mvt pour faire disparaître λ.

d. équation des trajectoires : via les lois de conservation

1) Le moment cinétique $\vec{L} = \mu \vec{C}$ (et $\vec{C}$) sont des constantes du mvt, cf cours sur le problème à 2 corps en interaction centrale conservative.

2) Nous savons aussi que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m := \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ est conservée, ce qui se traduit par :

$$\frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \mathcal{E}_{p,eff}(r) = cste$$

où $$\mathcal{E}_{p,eff}(r) = \mathcal{E}_p(r) + \frac{\mu C^2}{2r^2} = \frac{-\alpha}{r} + \frac{\mu c^2}{2r^2}$$

3) Nous avons également énoncé le 2ème théorème de Bertrand qui dévoile l'existence d'une autre constante du mouvement justifiant ainsi la nature circulaire de l'hodographe. → C'est ce vecteur que nous allons préciser maintenant.

Repartons du PFD

$$\mu \vec{\ddot{r}} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e_r}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} \wedge \mu \vec{\ddot{r}} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{L} \wedge \vec{e_r}, \quad \text{où } \vec{L} := \mu \vec{r} \wedge \vec{v}$$
$$= \mu r^2 \dot{\theta}\, \vec{e_z}$$

Ainsi : $$\vec{L} \wedge \mu \vec{\ddot{r}} = -\frac{\alpha}{r^2}\mu r^2 \underbrace{\dot{\theta}\, \vec{e_z} \wedge \vec{e_r}}_{= d_t \vec{e_r}}$$

car $d_t \vec{e_r} = \vec{\omega} \wedge \vec{e_r} = \dot{\theta}\vec{e_z} \wedge \vec{e_r}$

$$\boxed{\vec{L} \wedge \mu \vec{\ddot{r}} = -\alpha \mu \frac{d\vec{e_r}}{dt}}$$

De plus, $d_t \vec{L} = \vec{0}$ donc $d_t(\vec{L} \wedge \mu \vec{v}) = \vec{L} \wedge \mu \vec{\ddot{r}}$

D'où : $\frac{d}{dt}(\vec{L} \wedge \mu\vec{v}) = -\alpha\mu \frac{d\vec{e_r}}{dt}$

càd : $\frac{d}{dt}\left(\vec{L} \wedge \mu\vec{v} + \alpha\mu\,\vec{e_r}\right) = \vec{0}$

soit : $\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{\vec{v}\wedge\vec{L}}{\alpha} - \vec{e_r}}_{=:\vec{A}}\Big) = \vec{0}$

ou encore : $d_t\vec{A} = \vec{0}$ où $\boxed{\vec{A} := \frac{\vec{v}\wedge\vec{L}}{\alpha} - \vec{e_r}}$ est le vecteur de Laplace-Runge-Lenz

$$\vec{A} = \frac{1}{\alpha}\left(\left[\dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}\right] \wedge \mu C\,\vec{e_z}\right) - \vec{e_r}$$

$$\vec{A} = \left(\frac{\mu C^2}{\alpha r} - 1\right)\vec{e_r} - \frac{\mu C}{\alpha}\dot{r}\,\vec{e_\theta}$$

d'où : $\vec{A}\cdot\vec{r} = \frac{\mu C^2}{\alpha} - r$

et par déf. du pdt scalaire : $\vec{A}\cdot\vec{r} = \|\vec{A}\|.r.\cos\theta$

d'où : $\|\vec{A}\|\, r\cos\theta = \frac{\mu C^2}{\alpha} - r$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{r(\theta) = \frac{\mu C^2/\alpha}{1 + \|\vec{A}\|\cos\theta}}$$

Nous avons donc identifié l'excentricité e : $e = \|\vec{A}\|$

Précisons :

$$e^2 = \|\vec{A}\|^2 = \frac{\mu^2\dot{r}^2C^2}{\alpha^2} + \frac{\mu^2C^4}{\alpha^2r^2} - 2\frac{\mu C^2}{\alpha r} + 1$$

$$e^2 = \frac{2\mu C^2}{\alpha^2}\Big(\underbrace{\underbrace{\frac{\mu\dot{r}^2}{2}}_{\mathcal{E}_c} + \underbrace{\frac{\mu C^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r}}_{\mathcal{E}_{p,eff}}}_{\mathcal{E}_m = cste}\Big) + 1$$

Il vient ainsi : $\boxed{e^2 = \frac{2\mu C^2}{\alpha^2} \mathcal{E}_m + 1}$

l'excentricité est précisée en fonction des constantes du mouvement $\Rightarrow$ la description de la trajectoire est complète.

Nous retiendrons aussi la formule donnant $\mathcal{E}_m$ en fonction de e :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{\alpha^2}{2\mu C^2}(e^2 - 1)}.$$

Exercice :

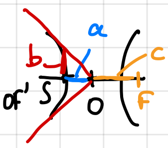
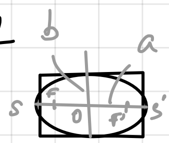
En utilisant la 1ère formule de Binet et l'équation canonique $r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \Leftrightarrow u(\theta) = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\theta$

Déterminer : $\mathcal{E}_c$, $\mathcal{E}_p$ et mq : $\mathcal{E}_m = \frac{\alpha^2}{2\mu C^2}(e^2 - 1)$

e. Classification des trajectoires

$\theta \longmapsto r(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$, est une conique d'excentricité e

et de paramètre p.

	Parabole	Hyperbole	Ellipses
$e = \dfrac{c}{a}$ $e = \lVert \vec{A} \rVert$	$= 1$	$e > 1$ $c = OF = OF'$ $a = OS = OS'$  	$0 \leq e < 1$ $c = FF'$ $a = OS = OS'$ 
Équation en coord. cartésiennes	$y^2 = 2px$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
$p = \dfrac{b^2}{a}$ $p = \dfrac{\mu C^2}{\alpha}$	$p = p$	$c^2 = a^2 + b^2$ $\hookrightarrow p = \dfrac{b^2}{a} = a(e^2 - 1) > 0$	$a^2 = b^2 + c^2$ $\hookrightarrow p = \dfrac{b^2}{a} = a(1 - e^2) > 0$
$\mathcal{E}_m = \dfrac{\alpha^2}{2\mu C^2}(e^2 - 1)$ $\mathcal{E}_m = \dfrac{\lvert\alpha\rvert}{2} \cdot \dfrac{e^2 - 1}{p}$	0	> 0 $\mathcal{E}_m = \dfrac{\lvert\alpha\rvert}{2a}$	< 0 $\mathcal{E}_m = \dfrac{-\lvert\alpha\rvert}{2a}$

On remarque que l'énergie d'une orbite elliptique ne dépend que du grand axe de l'ellipse et non de l'excentricité. On en déduit l'énergie mécanique de M dans le cas limite du cercle $(e = 0)$:

$$\boxed{\mathcal{E}_m^{\text{cercle}} = \frac{-\lvert\alpha\rvert}{2 r_c}}$$, où r_c est le rayon du cercle.

2. Représentation des trajectoires

Nous avons défini la notion d'orbite dans le cours sur le problème à deux corps en interaction centrale conservative, c'est le domaine D_r accessible à la trajectoire tel que :

$$D_r = \{ r \mid \mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_{p,eff}(r) \}$$

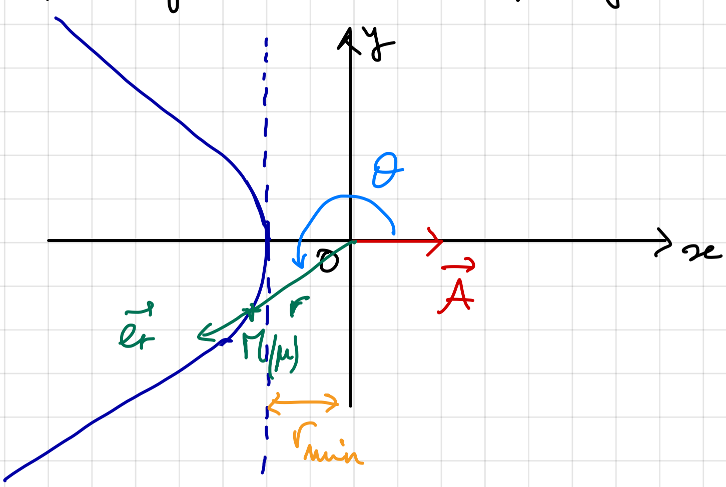
i.e : $$D_r = \{ r \mid \underbrace{\mathcal{E}_m}_{\text{cste}} \geq -\frac{\alpha}{r} + \frac{\mu C^2}{2r^2} \}$$

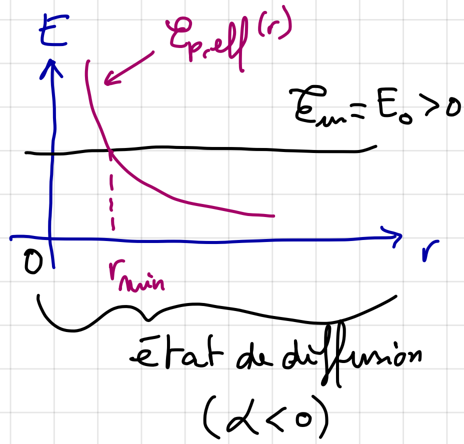
a. Force répulsive $\alpha < 0$

Dans le cas d'une force répulsive : $(\alpha < 0) \Leftrightarrow \left(\mathcal{E}_p = \frac{|\alpha|}{r} > 0 \right.$ et $\left. \mathcal{E}_p \downarrow\downarrow \text{ strict décroiss.} \right)$

On a : $\mathcal{E}_m \geq \frac{|\alpha|}{r} + \frac{\mu C^2}{2r^2} > 0 \Leftrightarrow e > 1$

$\Rightarrow$ La trajectoire est hyperbolique : la particule M décrit une branche d'hyperbole dont un foyer est occupé par le centre répulsif O, M fuit ce centre répulsif.





On a vu au début du cours qu'on attend que ce type de mouvement qui correspond à un état de diffusion, le seul possible si $\alpha < 0$.

Exercice : Déterminer r_{min} en fonction de p et e

- $\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_{p,eff}(r) = \dfrac{|\alpha|}{r} + \dfrac{\mu C^2}{2r^2} \Leftrightarrow 2\mathcal{E}_m r^2 - 2|\alpha| r - \mu C^2 \geq 0$

$$\Delta = 4|\alpha|^2\left(1 + \frac{2\mu C^2 \mathcal{E}_m}{|\alpha|^2}\right) \underset{\uparrow}{=} 4|\alpha|^2 e^2 \geq 0$$

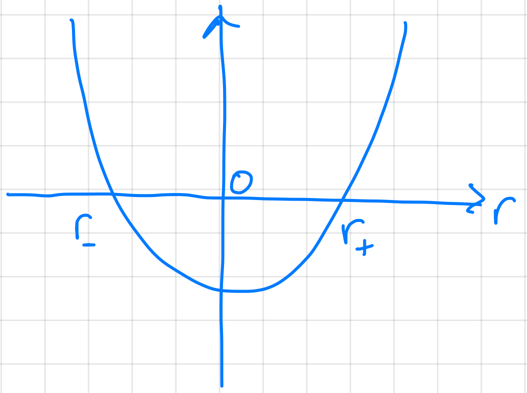
$$\mathcal{E}_m = \frac{\alpha^2}{2\mu C^2}(e^2-1) > 0$$

$$r_- = \frac{|\alpha|}{2\mathcal{E}_m}(1-e) < 0 \quad \text{car } \mathcal{E}_m > 0 \text{ et } e > 1 \text{ (Hyperbole)}$$

↳ impossible physiquement

$$r_+ = \frac{|\alpha|}{2\mathcal{E}_m}(1+e)$$

donc : $2\mathcal{E}_m r^2 - 2|\alpha| r - \mu C^2 \geq 0 \Leftrightarrow r \geq r_+ = r_{min} = \dfrac{|\alpha|}{2\mathcal{E}_m}(1+e)$



$$\Leftrightarrow \boxed{r \geq r_{min} = \frac{p}{1-e}} \quad , \quad p = \frac{-\mu C^2}{|\alpha|}$$

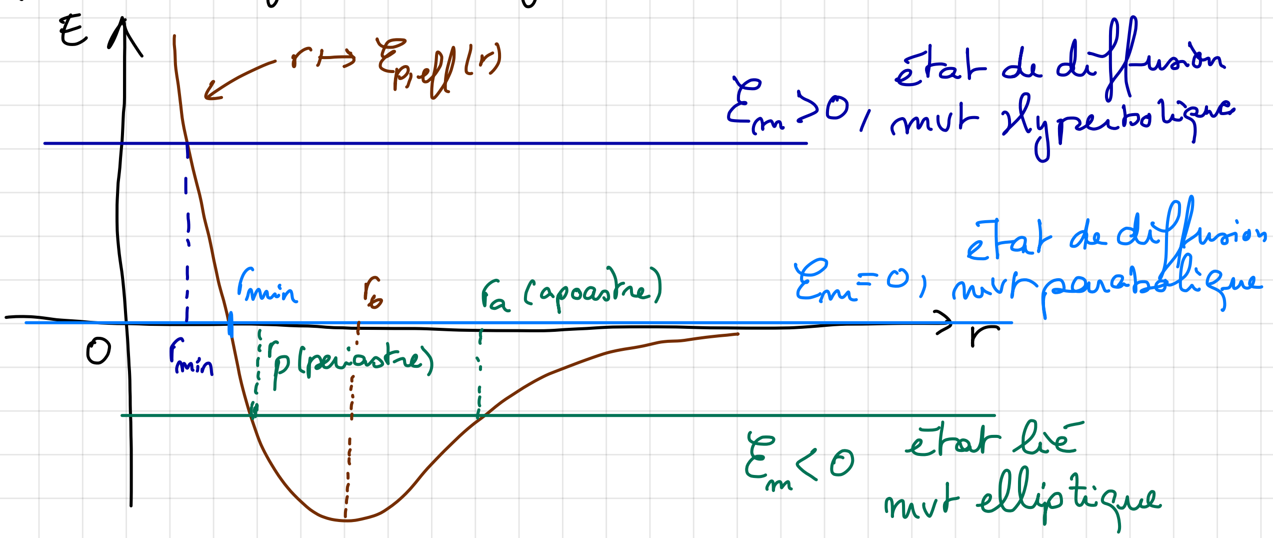
b. force attractive $\alpha > 0$

Nous savons que ce cas offre plus d'états possibles : 1 état lié et 2 états de diffusion.

En effet : $\mathcal{E}_p = -\frac{|\alpha|}{r} \Rightarrow \mathcal{E}_{p,eff}(r) = -\frac{|\alpha|}{r} + \frac{\mu C^2}{2r^2}$

↳ $r \mapsto \mathcal{E}_{p,eff}(r)$ présente un minimum négatif atteint en $r = r_0$, et donc $\mathcal{E}_m$ peut être négative, ou nulle, ou positive.

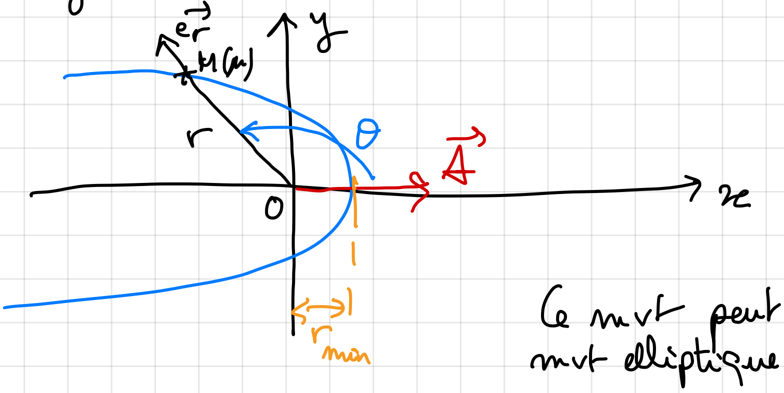
$\Rightarrow$ il y a trois types de trajectoires possibles :



•) $\mathcal{E}_{p,eff}'(r) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\mu C^2}{r^3} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\mu C^2}{r} \Leftrightarrow r = \frac{\mu C^2}{\alpha} = p$

donc $\boxed{r_0 = p = \frac{\mu C^2}{\alpha}}$

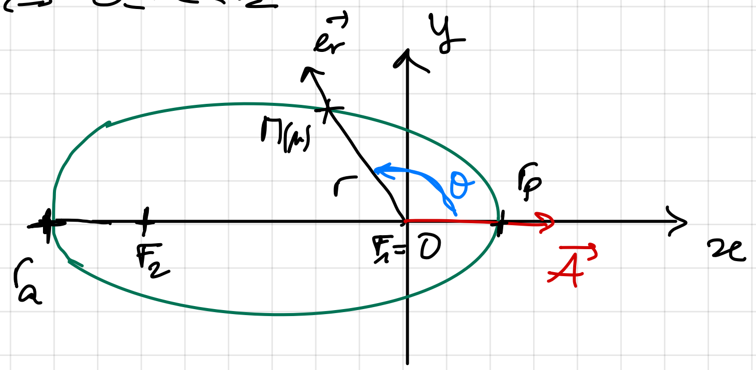
•) <u>Mouvement parabolique</u> : l'apoastre est situé à l'∞, c'est un état de diffusion, $e = 1 \Leftrightarrow \mathcal{E}_m = 0$



Ce mvt peut servir d'approx. à un mvt elliptique très allongé.

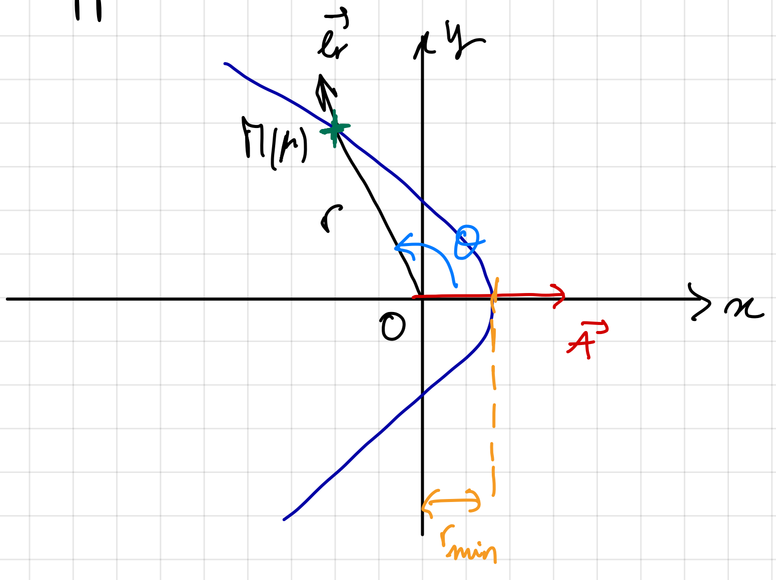
•) <u>Mouvement elliptique</u>, c'est un état lié : $r \in [r_p, r_a]$,

$\mathcal{E}_m < 0 \Leftrightarrow 0 \leq e < 1$



•) <u>Mouvement Hyperbolique</u>, $e > 1$, $\mathcal{E}_m > 0$, état de diffusion

différence avec le cas répulsif : M ne fuit pas le centre de force, il est attiré vers celui-ci, mais finit quand même par s'échapper.



<u>Exercice</u> : Déterminer r_{min} dans le cas de la parabole et de l'Hyperbole, en fonction de p et e.

Parabole $e = 1 \Leftrightarrow \mathcal{E}_m = 0 \Rightarrow -\frac{\alpha}{r} + \frac{\mu C^2}{2r^2} \leq 0 \Leftrightarrow r^2 \geq \frac{\mu C^2}{2\alpha}$

$\Leftrightarrow \boxed{r \geq r_{min} = \sqrt{\frac{p}{2}}}$

Hyperbole : $e>1 \Leftrightarrow \mathcal{E}_m > 0 \Rightarrow \mathcal{E}_m \geq \frac{-|\alpha|}{r} + \frac{\mu C^2}{2r^2}$

$$\Leftrightarrow 2\mathcal{E}_m r^2 + 2|\alpha| r - \mu C^2 \geq 0$$

On peut reprendre le calcul du cas répulsif avec le changement :

$$|\alpha| \longrightarrow -|\alpha|$$

On obtient : $\Delta = 4|\alpha|^2 e^2$

- $r_- = \frac{-|\alpha|}{2\mathcal{E}_m}(1+e) < 0$, car $\mathcal{E}_m > 0$

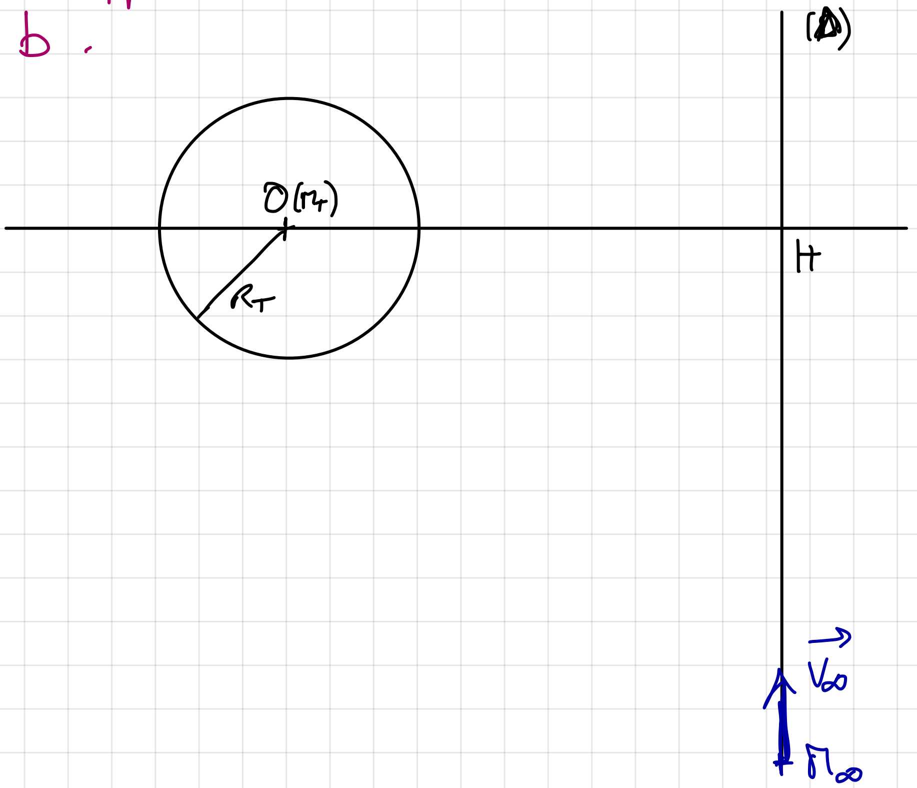
  donc $\times$ pas physique

- $r_+ = \frac{|\alpha|}{2} \cdot \frac{e-1}{\mathcal{E}_m} = \boxed{\frac{p}{1+e} = r_{min}}$

  $\mathcal{E}_m = \frac{\alpha^2}{2\mu C^2}(e^2-1)$

Exercice : Déviation d'un météore (bis)

Un météore de masse m, négligeable devant la masse de la Terre M_T arrive de l'infini avec la vitesse $\vec{V_\infty}$ par rapport à la Terre. Son paramètre d'impact est $OH = b$.



Calculer :

a. L'invariant $\vec{A}$ de Laplace-Runge-Lenz

b. r_{min} et b_{min} pour que $r_{min} > \eta R_T$ avec η un coefficient de "sécurité" $\eta > 1$.

c. L'angle de déviation D du au champ de gravitation de la Terre, D est défini comme l'angle entre les deux asymptotes.

Rappel : 1) pour une hyperbole le paramètre a est la distance entre le centre de l'hyperbole et un de ses sommets

2) $p = a(e^2 - 1)$ pour une hyperbole