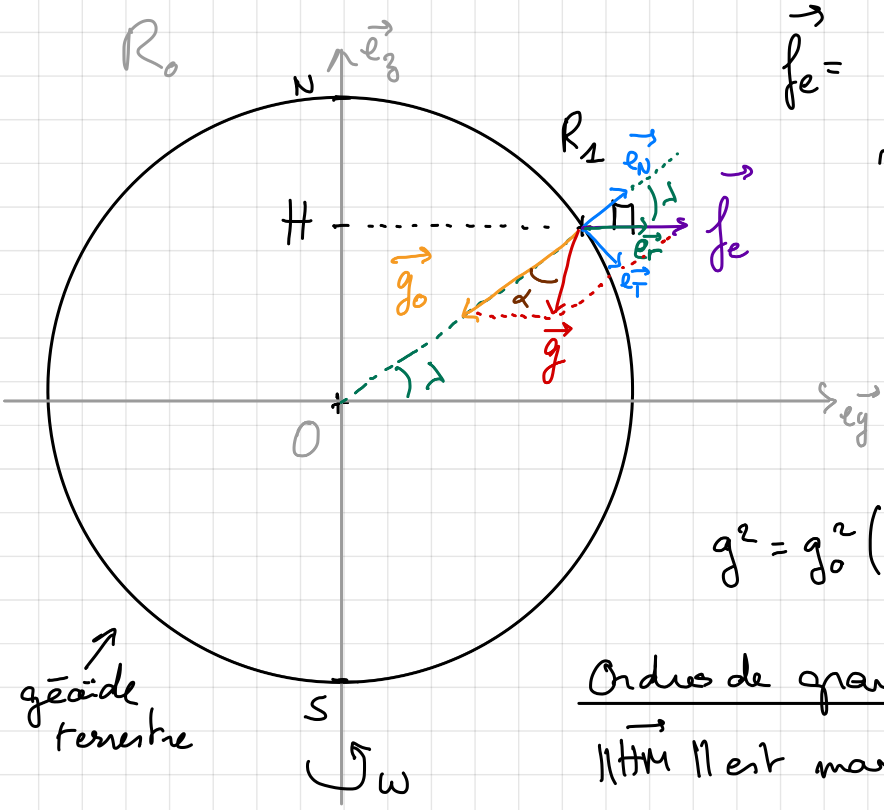
Mesure de G à partir de la formule de Borda

$$T \longrightarrow g(l) \longrightarrow G$$

Mesure de G capilo-tractée

$$g_0 = G\frac{m_T}{\|\vec{OM}\|^2} \equiv g_0(M)$$ ⚠



$$\vec{f_e} = m\,\omega^2 HM\,\vec{e_r}\ ,\quad \vec{f_g} = -m g_0 \vec{e_N}$$

$$m\vec{g} = \vec{f_g} + \vec{f_e} \quad \text{(PFD dans } R_1\text{)}$$

$$\Rightarrow \vec{g} = \vec{g_0} + \omega^2 \vec{HM}$$

$$g = \|\vec{g}\| \text{ et } g_0 = \|\vec{g_0}\|$$

$$g^2 = g_0^2\left(1 + 2\omega^2\frac{\vec{g_0}\cdot\vec{HM}}{g_0^2} + \omega^4\frac{\|\vec{HM}\|^2}{g_0^2}\right)$$

Ordre de grandeur :

$\|\vec{HM}\|$ est max à l'équateur où il vaut R_T

$$R_T = 6378 \text{ km}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 7{,}292\cdot10^{-5}\ \text{rad/s} \Rightarrow \sup(\omega^2\|\vec{HM}\|) = 3{,}39\cdot10^{-2}$$

$m_T = 5{,}972\cdot10^{24}$ kg

$$g_0 = G\frac{m_T}{\|\vec{OM}\|^2} \rightarrow \text{à l'équateur } g_0 = G\frac{m_T}{R_T^2} \simeq 9{,}80\ m\cdot s^{-2}$$

d'où
$$\boxed{\frac{\omega^2\|\vec{HM}\|}{g_0} \equiv \varepsilon \sim 3{,}5\cdot10^{-3}}$$

Ainsi :
$$g^2 = g_0^2\left(1 + 2\omega^2\frac{\vec{g_0}\cdot\vec{HM}}{g_0^2} + o(\varepsilon)\right)$$

de plus
$$\vec{g_0}\cdot\vec{HM} = -g_0\vec{e_N}\cdot\left(HM\cos(\lambda)\vec{e_N} + HM\sin(\lambda)\vec{e_T}\right)$$
$$= -g_0\, HM\cos(\lambda)$$

d'où :
$$g = g_0\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2\omega^2}{g_0}HM\cos(\lambda)\right) + o(\varepsilon)$$

$$\boxed{g(M) = g_0(M) - HM\,\omega^2\cos(\lambda) + o(\varepsilon)}$$

On suppose λ tel que l'on puisse écrire (sphère $\simeq$ Terre)

$$\begin{cases} HM = R_T \cos\lambda \\ OM = R_T \end{cases}$$

$$g(M) \equiv g(\lambda) = g_0 - \omega^2 R_T \cos^2\lambda = g_0 - \omega^2 R_T + \omega^2 R_T \sin^2\lambda$$

$$g(\lambda = 0) \equiv g_E = g_0 - \omega^2 R_T$$

d'où

$$\boxed{g(\lambda) = g_E\left(1 + \frac{\omega^2 R_T}{g_E}\sin^2\lambda\right)}$$

AN : $g_E = \mathcal{G}\dfrac{m_T}{R_T^2} - \omega^2 R_T = 9{,}764 \ m\cdot s^{-2}$

$m_T = 5{,}972 . 10^{24}$ kg

$R_T = 6378$ km

$\omega = \dfrac{2\pi}{86164}$ rad/s

$$\frac{\omega^2 R_T}{g_E} \simeq 3{,}473 . 10^{-3} \ [\text{no units}]$$

On peut déduire $\mathcal{G}$ de $g(\lambda)$:

$$g(\lambda) = g_0 - \omega^2 R_T \cos^2\lambda$$

Soit $g(\lambda) = \mathcal{G}\dfrac{m_T}{R_T^2} - \omega^2 R_T \cos^2\lambda$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{G} = \frac{R_T^2}{m_T}\left(g(\lambda) + \omega^2 R_T \cos^2\lambda\right)$$

$$\boxed{\mathcal{G} = \frac{R_T^2}{m_T} g(\lambda) + \frac{\omega^2 R_T^3}{m_T}\cos^2\lambda}$$

$$z = \lambda x^a y^b$$

$$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(a\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(b\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

Propagation des incertitudes sur G

$$G = G_1 + G_2$$

$$G_1 = \frac{R_T^2}{m_T} g \quad \text{et} \quad G_2 = \frac{\omega^2 R_T^3}{m_T}\cos^2\lambda$$

On considère que $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0$ autrement dit $\cos^2\lambda$ n'est pas une V.A.

$$\frac{\Delta G_1}{G_1} = \sqrt{\left(2\frac{\Delta R_T}{R_T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_T}{m_T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2}$$

$$\frac{\Delta G_2}{G_2} = \sqrt{\left(2\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2 + \left(3\frac{\Delta R_T}{R_T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_T}{m_T}\right)^2}$$

et $$\Delta G = \sqrt{\Delta G_1^2 + \Delta G_2^2}$$

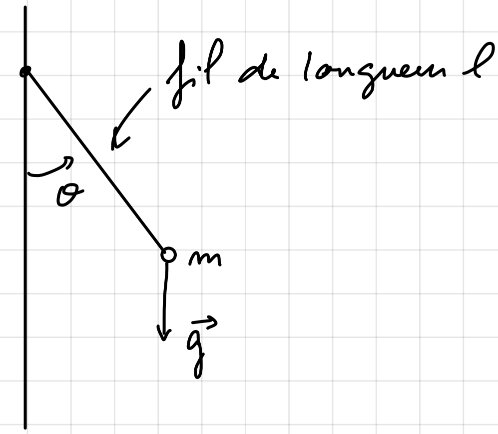
On considère : $\frac{\Delta m_T}{m_T} = 1{,}00 \cdot 10^{-4}$ à 95 %, $\frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq 0$

$$\frac{\Delta R_T}{R_T} \simeq 0$$

$$\Delta G = \sqrt{\frac{R_T^2 g}{m_T}\left(\left(\frac{\Delta m_T}{m_T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2\right) + \frac{\omega^2 R_T^3}{m_T}\cos^2\lambda \left(\frac{\Delta m_T}{m_T}\right)^2}$$

il ne reste qu'à obtenir $\frac{\Delta g}{g}$ à 95 %

Mesure de g (1)



On reprend l'exercice du cours n°1 :

Exercice : Intégration des équations du mouvement linéaire (1ddl) application à la période des oscillations d'un pendule plan.

On avait montré que :

$$T = T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + o(\theta_0^2)\right) \quad (I) \quad \text{où} : T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

d'où : $$\boxed{g = 4\pi^2\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}\right)\frac{\ell}{T^2}}$$

et d'où : $$\frac{\Delta g}{g} = \left[\left(\frac{2\frac{\Delta\theta_0}{\theta_0}}{\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}\right)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \ell}{\ell}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2\right]^{1/2}$$

En fait on mesure T que l'on assimile à T_{Borda} via (I)

l'erreur faite sur la mesure de T peut être quantifiée par :

$$\Delta T = \overbrace{T_{Exact} - T_{Borda}}^{\text{erreur formule}} + \Delta T_{mesure}$$

d'où : $$\frac{\Delta T}{T} = \left(1 - \frac{T_{Borda}}{T}(\theta_0)\right) + \frac{\Delta T_{mesure}}{T}$$

d'où : $$\boxed{\frac{\Delta g}{g} = \left[\frac{\left(2\frac{\Delta\theta_0}{\theta_0}\right)^2}{\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}\right)^2} + \frac{\Delta\ell^2}{\ell^2} + 4\left(1 - \frac{T_{Borda}}{T_{exact}}(\theta_0) + \frac{\Delta T_{mesure}}{T}\right)^2\right]^{1/2}}$$

Pour $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ $\quad \frac{T_{Borda}}{T_0} \simeq 1{,}070$ et $\frac{T_{Exact}}{T_0} \simeq 1{,}073 \Rightarrow \frac{T_{Borda}}{T_{exact}} \simeq 0{,}997$

Les incertitudes de mesure $\Delta\theta_0$ et $\Delta\ell$ sont :

$$\begin{cases} \Delta\theta_0 = k \dfrac{\text{graduation}}{\sqrt{12}} = 2 \dfrac{1^\circ}{\sqrt{12}}, \text{ à } 95\% \\[2ex] \Delta \ell = 2 \dfrac{1.10^{-3}}{\sqrt{12}}\, m, \text{ à } 95\% \end{cases}$$

Il reste ΔT_{mes} à déterminer. (écart-type d'une série de mesure, à 95%).

Soit $(T_1, \dots, T_N)$ un N-échantillon de mesures indép.

$(T_i)_i$: réalisations d'une V.A. T_{mes}, d'espérance $\langle T_{mes} \rangle = T$

On estime $\langle T_{mes} \rangle$ à partir de : $m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} T_i \; (\equiv \hat{T})$ qui est une V.A dont la variance S_m^2 est appellée écart-quadra. moyen qui est relié à l'estimateur de $\sigma^2 = VAR(T_{mes})$ noté S^2

$$S_m^2 = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (T_i - m)^2 = \frac{S^2}{N}$$

Dans le cas où $T_{mes} \rightsquigarrow \mathcal{N}(\overset{T}{\mu}, \sigma^2)$ [les $(T_i)_i$ forment un vect. gauß]

le théorème de Fischer (ou le théorème des échantillons gaußiens) donne les lois de "$(m-\mu)/S_m$" et S^2 :

$$\begin{cases} \dfrac{m-\mu}{S_m} \rightsquigarrow T(N-1) \quad \text{(loi de Student à N-1 ddl)} \\[2ex] \dfrac{(N-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(N-1) \quad \text{(loi du chi 2 à N-1 ddl)} \end{cases}$$

Ainsi, si $t = \dfrac{m-\mu}{S_m} \rightsquigarrow T(N-1)$

$$\mu \equiv \langle T_{mes} \rangle = m \pm t \, . \, S_m$$

si de plus on note $P = \mathbb{P}[m - tS_m \leq \mu \leq m + tS_m]$

$$P = \int_{-t}^{+t} f_{N-1}(t')\, dt'$$

densité de Student

cette équation définit le coeff de Student $t_{N-1,P}$ tel que :

$$P = \int_{-t_{N-1,P}}^{+t_{N-1,P}} f_{N-1}(t')\, dt'$$

Il est relié au quantile de la distribution de Student noté qt par :

$$t_{N,P=1-\gamma} = qt^{N}_{\frac{\gamma}{2}}$$

quantile d'ordre $1-\frac{\gamma}{2}$ de la densité de Student à N ddl

On note alors le résultat de la mesure

$$\boxed{T_{mes} \pm \Delta T = m \pm t_{N-1,P} \cdot s_m}$$

Pour 7 mesures, à 95%, $t_{N-1,1-0,05} = qt^{N-1}_{\frac{0,05}{2}} = 2,365$

↳ on a Δg à 95%

↳ on injecte dans ΔG et c'est fini