

Lois de conservation  
en dynamique  
(des systèmes Lagrangiens)

→ on restreint l'étude à un système physique fermé et isolé,  
Lagrangien

## I. Symétrie par translation temporelle et conservation de l'énergie

1. Cadre Lagrangien et hypothèse de symétrie
2. Mise en évidence d'une intégrale première ou invariant
3. Identification de l'invariant
4. Exemple

## II. Symétrie par translation spatiale et conservation de l'impulsion

1. Hypothèse de symétrie
2. Mise en évidence d'une intégrale première ou invariant
3. Identification de l'invariant
4. Principe de l'action et de la réaction

## III. Symétrie par rotation spatiale et la conservation du moment cinétique

1. Hypothèse de symétrie.
2. Mise en évidence de l'intégrale première ou de l'invariant
3. Identification
4. Exemple

## IV. Conclusion, théorème de Noether

# I. Symétrie par translation temporelle et conservation de l'énergie

## 1. Cadre Lagrangien et hypothèse de symétrie

Sait  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$  le Lagrangien d'un système physique fermé au placé dans un champ extérieur constant,

où :  $\begin{cases} q = (q_i)_i & \text{sont les coordonnées généralisées,} \\ \dot{q} = (\dot{q}_i)_i & \text{les vitesses généralisées,} \\ t & \text{la variable date au temps,} \end{cases}$

satisfaisant au principe de moindre action.

Rappel : Entre 2 positions  $q_1$  et  $q_2$ , le système se meut tel que :  $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$ , soit rendue stationnaire (càd  $\delta S = 0$ , extrémale)

On a mq :

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (\text{équations d'Euler-Lagrange})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left\{ \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L} \right\} = 0, \quad (\text{identité de Beltrami})$$

Supposons que la symétrie suivante pour  $\mathcal{L}$  :

$$(\text{STT}) \Leftrightarrow H(t, t_0), H(q, \dot{q}), \quad \mathcal{L}(q, \dot{q}, t + t_0) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L} \text{ ne dépend pas du temps: } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

On parle de symétrie par translation temporelle ou invariance par translation temporelle de  $\mathcal{L}$ , ou encore d'homogénéité du temps.

## 2. Mise en évidence d'une intégrale première ou invariant

La dérivée totale de  $L$  par rapport au temps s'écrit :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \underbrace{\left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right)}_{\text{}} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + 0$$

||

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right\} \quad (\text{E.L})$$

Soit

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right\} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right\} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left\{ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right\} = 0}$$

$= E$

Nous avons donc identifié un invariant que l'on a noté  $E$ , conséquence de la symétrie de  $L$  par translation temporelle.

Nous allons maintenant identifier  $E$  à une quantité physique.

On appelle cet invariant une intégrale première du mouvement.

Cette intégrale première est additive puisque  $L$  est par définition une fonction additive et  $E$  est une fonction linéaire de  $L$ .

### 3. Identification de l'invariant

La fonction de Lagrange d'un système fermé ou placé dans un champ constant, qui vérifie  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ , est de la forme :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$$

où  $T$  est l'énergie cinétique et  $U$  l'énergie potentielle du système.

Puisque  $T$  est une fonction positivement homogène des  $(\dot{q}_i)_i$  de degré 2, le théorème d'Euler sur les fonctions de plusieurs variables différentiables donne :

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

Or,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$  car  $U$  ne dépend que de  $q$ .

donc :  $\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 2T$

Ainsi :  $E := \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$ , se réécrit :

$$E = 2T - T + U,$$

sont :  $E = T(q, \dot{q}) + U(q)$

On reconnaît l'énergie mécanique, représentée sous la forme d'une somme de deux termes : l'énergie cinétique dépendant des vitesses et l'énergie potentielle dépendant des positions.

#### 4. Exemple

Un système fermé soumis à une force centrale conservative ne dépendant ni des vitesses, ni du temps, possède l'énergie mécanique parmi ses intégrales premières cf cours 1 et 2 de la LP01 gravitation.

## II. Symétrie par translation spatiale et conservation de l'impulsion

### 1. Hypothèse de symétrie

L'homogénéité de l'espace donne lieu à une autre loi de conservation. Soit un système  $\mathcal{S}$  fermé en l'absence de champ ext. On suppose que le Lagrangien est symétrique par translation spatiale :  $q \rightarrow q + \varepsilon$ , i.e.  $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{L}(q + \varepsilon, \dot{q})$  (sts) en plus de ne pas dépendre du temps

On parle d'invariance par translation spatiale ou de symétrie du Lagrangien par translation spatiale, ou encore d'homogénéité de l'espace.

## 2. Mise en évidence d'une intégrale première au invariant

La variation de la fonction  $\mathcal{L}$ ,  $\delta\mathcal{L}$ , s'écrit si  $d_t \dot{q}_i = 0$  et  $\partial_t \mathcal{L} = 0$  :

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \varepsilon \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i},$$

$\uparrow$   
 $\forall i, \delta q_i = \varepsilon$

$$\Rightarrow \delta\mathcal{L} = 0 \Leftrightarrow \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (\text{II.2.0})$$

Or, en vertu des équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right\}$$

donc :

$$\delta\mathcal{L} = 0 \Leftrightarrow \sum_i \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right\} = 0$$

$\stackrel{?}{=} \vec{P}$  (c'est un vecteur,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$  mais absurde.)

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \vec{P} \right\} = \vec{0} \quad (\text{II.2.1})$$

La grandeur vectorielle  $\vec{P} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$  est un invariant du mt.

On l'appelle impulsion généralisée du système.

C'est aussi une intégrale première additive presque fonction linéaire de  $\mathcal{L}$

### 3. Identification de l'invariant

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) = T(r, v) - U(r) = \mathcal{L}(r, v)$$

Rappel: on sait que pour une particule libre:  $\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2}$

et que  $\mathcal{L}$  est additive  $\Rightarrow$  pour  $N$  particules libres:

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial q} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \frac{\partial T}{\partial v}$$

$$\text{or } T = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = m v$$

d'où  $\boxed{\vec{P} = \sum_i m \vec{v}_i} \quad (\text{II.3.0})$

On reconnaît l'impulsion du système au quantité de mouvement. C'est la somme vectorielle des impulsions des différentes particules, que leurs interactions soient ou non négligeable. Ce qui diffère de l'énergie ( $E = E_1 + E_2 + E_{1,2}$ )

Cette conservation est valable en l'absence de chp ext. (syst. isolé).

Cependant s'il y a un chp ext, certaines composantes de  $\vec{P}$  peuvent se conserver si l'énergie potentielle ne dépend pas des coord. associées à ces composantes.

#### 4. Principe de l'action et de la réaction

La conséquence de (STS) a donné (II.2.0) :  $\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

Or,  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i} =$  Force généralisée  $\vec{F}_i$  agissant sur la  $i$ -ème particule

L'égalité (II.2.0) signifie donc que la somme des forces agissant sur toutes les particules du système fermé et isolé est égale au vecteur nul :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

Pour deux particules en interaction

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = - \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

↳ On retrouve le principe de l'action et de la réaction, que l'on avait démontré dans le cadre du cours sur le problème à 2 corps en interaction centrale conservative,

Dans le cadre de ce cours on a vu que l'impulsion totale du système était conservée. On peut désormais étendre la conclusion :

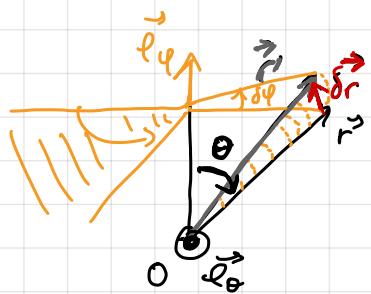
L'homogénéité de l'espace (STS) conduit à la conservation de l'impulsion totale du système dès lors que les forces d'interaction entre les particules du système dérivent d'un potentiel au que leur somme est nulle.

### III. Symétrie par rotation spatiale et la conservation du moment cinétique

#### 1. Hypothèse de symétrie.

Nous allons démontrer l'intégrale première d'un système physique fermé dont les propriétés mécaniques ne changent pas lors d'une rotation dans l'espace de l'ensemble de ce système. On parle de la loi de conservation qui découlle de l'isotropie de l'espace.

On considère une rotation infinitésimale selon  $\vec{e}_\varphi$   $\delta\varphi \vec{e}_\varphi = \delta\varphi$  (abus de not.) [La rotation p/r à la direction de  $\delta\varphi$  s'effectue dans le sens direct.] . On place l'origine sur l'axe  $\vec{e}_\varphi$  de rotation. La rotation  $\delta\varphi$  transforme  $\vec{r}$  en  $\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r}$  selon le schéma ci-dessous :



$$\|\delta\vec{r}\| = r \sin\theta \delta\varphi \quad \text{et} \quad \delta\vec{r} \perp \vec{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta\vec{r} = \delta\varphi \wedge \vec{r}} \quad (\text{III.1.0})$$

On en déduit que  $\vec{v}$  est également transformé :

$$\boxed{\delta\vec{v} = \frac{d}{dt} \{ \delta\vec{r} \} = \frac{\delta\varphi \wedge \vec{r}}{(III.1.1)}} \quad (\delta\dot{\varphi} = 0) \Rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{v}' = \vec{v} + \delta\vec{v}$$

On suppose de plus que  $\partial_t \mathcal{L} = 0$

On suppose donc que :

$$(S.R.S) \Leftrightarrow \forall \delta\varphi, \forall r, \forall v, \mathcal{L}(r, v) = \mathcal{L}(r + \delta\vec{r}, v + \delta\vec{v}), \text{ où } \left. \begin{array}{l} \delta\vec{r} = \delta\varphi \wedge \vec{r} \\ \delta\vec{v} = \delta\varphi \wedge \vec{v} \end{array} \right\}$$

## 2. Mise en évidence de l'intégrale première ou de l'invariant

On note  $\delta L$  la variation de  $L$  engendrée par  $\delta \varphi$ .

Par hypothèse  $\delta L = 0$ .

$$\text{or : } \delta L := \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial r_i} \cdot \delta r_i + \frac{\partial L}{\partial v_i} \cdot \delta v_i \right) \quad (\text{puisque } \frac{\partial L}{\partial t} = 0)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \int \delta r_i &= \delta \varphi \wedge r_i \\ \delta v_i &= \delta \varphi \wedge v_i \end{aligned}$$

$$(\text{E.L.}) \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial r_i} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial v_i} \right\} = d_t \left\{ p_i \right\}$$

$$\text{dans : } \delta L = \sum_i (p_i \cdot \delta \varphi \wedge v_i + p_i \cdot \delta \varphi \wedge v_i)$$

$$A \cdot B \times C = B \cdot C \times A$$

$$\text{ainsi : } \delta L = 0 \Leftrightarrow \delta \varphi \cdot \left[ \sum_i (r_i \wedge \dot{p}_i + v_i \wedge p_i) \right] = 0$$

$$\delta L = 0 \Leftrightarrow \delta \varphi \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i r_i \wedge p_i \right\} = 0$$

$$\delta L = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \left\{ \sum_i r_i \wedge p_i \right\}} = 0$$

$\boxed{\sum_i r_i \wedge p_i}$  = moment cinétique total du système

Rq: on peut faire la démo avec  $q_i$  et  $\dot{q}_i$ ,  $\vec{I}$  est alors le moment cinétique généralisé du système.

Puisque  $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $\vec{I}$  est une fonction linéaire de  $L$ , et est donc une intégrale première additive.

### 3. Identification

$$\vec{L} = \sum q_i \wedge p_i \quad \text{avec} \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

$$q_i \rightarrow r_i \quad | \Rightarrow \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial v_i} = m v_i$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum \vec{r}_i \wedge m \vec{v}_i$$

moment cinétique.

### 4. Exemple

Dans le cadre du cours sur le Pb à 2 corps en interaction centrale conservatrice, donc à symétrie sphérique, on a vu que  $\vec{L} = \mu \vec{C}$ , le moment cinétique du système fictif (étant la somme des 2 moments cin. des particules) est conservé ( $\frac{C}{C} = r^2 \dot{\theta}$ , constante des aires)

### III. Généralisation : Théorème de Noether

Nous avons exhibé les trois intégrales premières additives qui peuvent être déduite des symétries du Lagrangien que l'on a à chaque fois considérées comme des transformations infinitésimales :

$(S.T.T) \Leftrightarrow$  conservation de  $E = T + U$

$(S.T.T) + (S.T.S) \Leftrightarrow$  conservation de  $\vec{P}$  et  $Ax^o / React^o$

$(S.T.T.) + (S.R.S) \Leftrightarrow$  conservation de  $\vec{L}$

$\vec{P}$  et  $\vec{L}$  s'interprètent comme à l'habitude si  $q_i \Leftrightarrow r_i$   
et  $\dot{q}_i \Leftrightarrow v_i$ .

C'est en fait là un résultat qui s'inscrit dans un théorème à la portée plus générale qui est le Théorème de Noether (1882 - 1935)

À toute transformation infinitésimale qui laisse invariant le Lagrangien d'un système, à  $\delta L$  près, correspond une grandeur physique conservée

Symétrie de $L$	$S.T.T.$	$\oplus S.T.S.$	$\oplus S.R.S$
invariant	$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i - L$	$\vec{P} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$	$\vec{L} = \sum_i q_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

## 1. Notion d'Intégrale première

Une intégrale première est définie comme une fonction des coordonnées et des vitesses