LP02 2025

Lois de conservation en dynamique

(des systèmes Lagrangiens)

Landau chp2
Gignoux
Rax

→ on restreint l'étude à un système Ψsik fermé et isolé,
Lagrangien

I. Symétrie par translation temporelle et conservation de l'énergie

1. Cadre Lagrangien et hypothèse de symétrie
2. Mise en évidence d'une intégrale première ou invariant
3. Identification de l'invariant
4. Exemple

II. Symétrie par translation spatiale et conservation de l'impulsion

1. Hypothèse de symétrie
2. Mise en évidence d'une intégrale première ou invariant
3. Identification de l'invariant
4. Principe de l'action et de la réaction

III. Symétrie par rotation spatiale et la conservation du moment cinétique

1. Hypothèse de symétrie.
2. Mise en évidence de l'intégrale première ou de l'invariant
3. Identification
4. Exemple

IV. Généralisation, théorème de Noether

1. Notion d'Intégrale première
2. coordonnée cyclique exo
3. Théorème de Noether
   a. énoncé et preuve ← exo
   b. applications pour $\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ ~ exo
   c. Résumé exo

I. Symétrie par translation temporelle et conservation de l'énergie

1. Cadre Lagrangien et hypothèse de symétrie

Soit $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$ le Lagrangien d'un système physique fermé ou placé dans un champ extérieur constant,

où : $\begin{cases} q=(q_i)_i \text{ sont les coordonnées généralisées,} \\ \dot{q}=(\dot{q}_i)_i \text{ les vitesses généralisées,} \\ t \text{ la variable dite au temps,} \end{cases}$

satisfaisant au principe de moindre action.

Rappel : Entre 2 positions q_1 et q_2, le système se meut tel que : $S=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}(q,\dot{q},t)\,dt$, soit rendue stationnaire (c.à.d $\delta S=0$, extrémalisée)

On a mq :

$$\delta S = 0 \iff \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right\} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad \text{(équations d'Euler-Lagrange)}$$

$$\iff \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left\{\dot{q}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L}\right\} = 0, \quad \text{(identité de Beltrami)}$$

Supposons que la symétrie suivante pour $\mathcal{L}$:

$$(STT) \iff \forall (t,t_0), \forall (q,\dot{q}), \quad \mathcal{L}(q,\dot{q},t+t_0) = \mathcal{L}(q,\dot{q},t)$$

$$\iff \mathcal{L} \text{ ne dépend pas du temps : } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

On parle de symétrie par translation temporelle ou invariance par translation temporelle de $\mathcal{L}$, ou encore d'homogénéité du temps. En terme de forces réelles exercées sur le système, $\partial_t \mathcal{L} = 0 \Rightarrow$ que celles-ci ne dépendent pas explicitement du temps.

2. Mise en évidence d'une intégrale première ou invariant

La dérivée totale de $\mathcal{L}$ p/r au temps s'écrit :

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{= \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right\} \ (E.2)} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + 0$$

Soit
$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right\} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right\}$$

Soit
$$\boxed{\frac{d}{dt}\Big\{\underbrace{\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}}_{= E}\Big\} = 0}$$

Nous avons donc identifié un invariant que l'on a noté E, conséquence de la symétrie de $\mathcal{L}$ par translation temporelle.
Nous allons maintenant identifier E à une quantité physique.
On appelle cet invariant une intégrale première du mouvement.

Cette intégrale première est additive puisque $\mathcal{L}$ est par définition une fonction additive et E est une fonction linéaire de $\mathcal{L}$.

3. Identification de l'invariant

La fonction de Lagrange d'un système fermé ou placé dans un champ constant, qui vérifie $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, est de la forme :

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - \mathcal{U}(q)$$

où T est l'énergie cinétique et $\mathcal{U}$ l'énergie potentielle du système.

Puisque T est une fonction positivement homogène des $(\dot{q}_i)_i$ de degré 2, le théorème d'Euler sur les fonctions de plusieurs variables différentiables donne :

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

Or, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ car $\mathcal{U}$ ne dépend que de q.

donc :

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

Ainsi : $E := \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$, se réécrit :

$$E = 2T - T + \mathcal{U},$$

soit :

$$\boxed{E = T(q,\dot{q}) + \mathcal{U}(q)}$$

On reconnait l'énergie mécanique, représentée sous la forme d'une somme de deux termes : l'énergie cinétique dépendant des vitesses et l'énergie potentielle dépendant des positions.

4. Exemple

Un système fermé soumis à une force centrale conservative ne dépendant ni des vitesses, ni du temps, possède l'énergie mécanique parmi ses intégrales premières cf cours 1 et 2 de la LP01 Gravitation.

II. Symétrie par translation spatiale et conservation de l'impulsion

1. Hypothèse de symétrie

L'homogénéité de l'espace donne lieu à une autre loi de conservation. Soit un système φ fermé en l'absence de champ ext. On suppose que le Lagrangien est symétrique par translation spatiale : $q \to q + \varepsilon$, ie : $\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \mathcal{L}(q+\varepsilon, \dot{q})$ (STS)
en plus de ne pas dépendre du temps

On parle d'invariance par translation spatiale ou de symétrie du Lagrangien par translation spatiale, ou encore d'homogénéité de l'espace. En terme de forces réelles exercées sur le système, cela $\Rightarrow$ que celles-ci soit conservatives et centrale : càd qu'elles ne dépendent que de la distance relative entre 2 particules du système.

2. Mise en évidence d'une intégrale première ou invariant

La variation de la fonction $\mathcal{L}$, $\delta\mathcal{L}$, s'écrit si $d_t \dot{q}_i = 0$ et $\partial_t \mathcal{L} = 0$:

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\,\delta q_i \underset{\forall i,\ \delta q_i = \varepsilon}{=} \varepsilon \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} ,$$

$$\Rightarrow \qquad \delta\mathcal{L} = 0 \iff \boxed{\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0} \qquad (\mathrm{II}.2.0)$$

Or, en vertu des équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right\}$$

donc :

$$\delta\mathcal{L} = 0 \iff \sum_i \frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right\} = 0$$

$$\iff \frac{d}{dt}\Bigg\{ \underbrace{\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}_{=:\,P \ \left(\text{c'est un vecteur, } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\dot{q}}_i} \text{ mais abus de nota.}\right)} \Bigg\} = 0$$

$$\iff \boxed{\frac{d}{dt}\left\{ \vec{P} \right\} = \vec{0}} \qquad (\mathrm{II}.2.1)$$

La grandeur vectorielle $\vec{P} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\dot{q}}_i}$ est un invariant du mvt.

On l'appelle impulsion généralisée du système.

C'est aussi une intégrale première additive puisque fonction linéaire de $\mathcal{L}$

3. Identification de l'invariant

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - \mathcal{U}(q) = T(r,v) - \mathcal{U}(r) = \mathcal{L}(r,v)$$

<u>rappel</u> : on sait que pour une particule libre : $\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2}$

et que $\mathcal{L}$ est additive $\Rightarrow$ pour N particules libres :

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \frac{\partial T}{\partial v}$$

or $T = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = mv$

d'où $\boxed{\vec{P} = \sum_i m \vec{v_i}}$ (II.3.0)

On reconnait l'impulsion du système ou quantité de mouvement. C'est la somme vectorielle des impulsions des différentes particules, que leurs interactions soient ou non négligeable. Ce qui diffère de l'énergie ($E = E_1 + E_2 + E_{1n2}$)

Cette conservation est valable en l'absence de chp ext. (Syst. isolé).

Cependant s'il y a un chp ext, certaines composantes de $\vec{P}$ peuvent se conserver si l'énergie potentielle ne dépend pas des coord. associées à ces composantes.

4. Principe de l'action et de la réaction

La conséquence de (STS) a donné (II.2.0) : $\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$

Or, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$ = Force généralisée $\vec{F_i}$ agissant sur la i-ème particule

L'égalité (II.2.0) signifie donc que la somme des forces agissant sur toutes les particules du système fermé et isolé est égale au vecteur nul :

$$\boxed{\sum_i \vec{F_i} = \vec{0}}$$

Pour deux particules en interaction

$$\vec{F}_{1\to2} + \vec{F}_{2\to1} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}}$$

↳ On retrouve le principe de l'action et de la réaction. que l'on avait démontré dans le cadre du cours sur le problème à 2 corps en interaction centrale conservative,

Dans le cadre de ce cours on a vu que l'impulsion totale du système était conservée. On peut désormais élargir la conclusion :

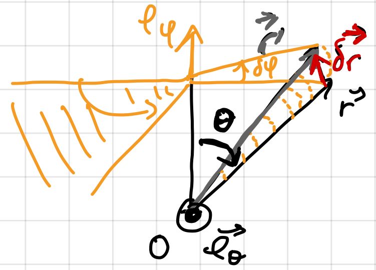
> L'homogénéité de l'espace (STS) conduit à la conservation de l'impulsion totale du système dès lors que les forces d'interaction entre les particules de ce système dérivent d'un potentiel ou que leur somme est nulle.

III. Symétrie par rotation spatiale et la conservation du moment cinétique

1. Hypothèse de symétrie.

Nous allons découvrir l'intégrale première d'un système physique fermé dont les propriétés mécanique ne changent pas lors d'une rotation dans l'espace de l'ensemble de ce système. On parle de la loi de conservation qui découle de l'isotropie de l'espace. Cela implique que les forces réelles agissant sur le système se transforment comme des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ cela signifie qu'elles soient des combinaisons linéaires des seuls vrais vecteurs à notre disposition : $\vec{r}$ et $\vec{v}$.

On considère une rotation infinitésimale selon $\vec{e_\varphi}$ $\delta\varphi\vec{e_\varphi} = \delta\varphi$ (abus de not.) [la rotation p/r à la direction de $\delta\varphi$ s'effectuant dans le sens direct]. On place l'origine sur l'axe $\vec{e_\varphi}$ de rotation. La rotation $\delta\varphi$ transforme $\vec{r}$ en $\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r}$ selon le schéma ci-dessous :



$$\|\delta\vec{r}\| = r\sin\theta\,\delta\varphi \quad \text{et} \quad \delta\vec{r} \perp \vec{e_\varphi} \text{ et } \vec{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi} \wedge \vec{r}} \qquad (\text{III}.1.0)$$

On en déduit que $\vec{v}$ est également transformé :

$$\boxed{\delta v = \frac{d}{dt}\{\delta r\} = \delta\varphi \wedge r} \quad (\dot{\delta\varphi} = 0) \Rightarrow \vec{v} \longrightarrow \vec{v}' = \vec{v} + \delta\vec{v}$$

(III.1.1.)

On suppose de plus que : $\partial_t \mathcal{L} = 0$

On suppose donc que :

$$\boxed{(\text{S.R.S}) \Leftrightarrow \forall\,\delta\varphi,\ \forall r,\ \forall v,\ \mathcal{L}(r,v) = \mathcal{L}(r+\delta r, v+\delta v),\ \text{où} \begin{cases} \delta r = \delta\varphi \wedge r \\ \delta v = \delta\varphi \wedge v \end{cases}}$$

2. Mise en évidence de l'intégrale première ou de l'invariant

On note $\delta\mathcal{L}$ la variation de $\mathcal{L}$ engendrée par $\delta\varphi$.

Par hypothèse $\delta\mathcal{L} = 0$.

or : $$\delta\mathcal{L} := \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r_i} . \delta r_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_i} . \delta v_i \right) \quad (\text{puisque } \partial_t\mathcal{L} = 0)$$

et $$\begin{cases} \delta r_i = \delta\varphi \wedge r_i \\ \delta v_i = \delta\varphi \wedge v_i \end{cases}$$

$$(\text{E.L.}) \Leftrightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r_i} = \frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_i} \right\} = d_t\{ p_i \}$$

donc : $$\delta\mathcal{L} = \sum_i \left(\dot{p}_i . \delta\varphi \wedge r_i + p_i . \delta\varphi \wedge v_i \right)$$

$$A . B \times C = B . C \times A$$

ainsi : $$\delta\mathcal{L} = 0 \Leftrightarrow \delta\varphi . \left[\sum_i \left(r_i \wedge \dot{p}_i + v_i \wedge p_i \right) \right] = 0$$

$$\delta\mathcal{L} = 0 \Leftrightarrow \delta\varphi . \frac{d}{dt}\left\{ \sum_i r_i \wedge p_i \right\} = 0$$

$$\delta\mathcal{L} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left\{ \sum_i r_i \wedge p_i \right\} = 0}$$

$$\sum_i r_i \wedge p_i = \vec{L} = \text{moment cinétique total du système}$$

Rq : on peut faire la démo avec q_i et $\dot{q}_i$, $\vec{L}$ est alors le moment cinétique généralisé du système.

Puisque $p_i := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$, $\vec{L}$ est une fonction linéaire de $\mathcal{L}$, et est donc une intégrale première additive.

3. Identification

$$\vec{L} = \sum q_i \wedge p_i \quad \text{avec} \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\left.\begin{array}{l} q_i \to r_i \\ \dot{q}_i \to v_i \end{array}\right| \Rightarrow \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial v_i} = m v_i$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum \vec{r}_i \wedge m \vec{v}_i$$

moment cinétique.

4. Exemple

Dans le cadre du cours sur le Pb à 2 corps en interaction centrale conservative, donc à symétrie sphérique, on on a vu que $\vec{L} = \mu \vec{C}$, le moment cinétique du mobile fictif (étant la somme des 2 moments cin. des particules) est conservé ($C = r^2 \dot{\theta}$, constante des aires)
$\vec{C}$ = vecteur aérolaire

IV. Généralisation : Théorème de Noether

Nous avons exhibé les trois intégrales premières additives qui peuvent être déduites des symétries du Lagrangien que l'on a à chaque fois considérées comme des transformations infinitésimales :

(S.T.T) $\Leftrightarrow$ conservation de $E = T + \mathcal{U}$

(S.T.T) + (S.T.S) $\Leftrightarrow$ conservation de $\vec{P}$ et Act°/Réact°

(S.T.T.) + (S.R.S) $\Leftrightarrow$ conservation de $\vec{L}$

$\vec{P}$ et $\vec{L}$ s'interprètent comme à l'habitude si $q_i \Leftrightarrow r_i$ et $\dot{q}_i \Leftrightarrow v_i$.

C'est en fait là un résultat qui s'inscrit dans un théorème à la portée plus générale qui est le théorème de Noether (1882 - 1935)

> À toute transformation infinitésimale qui laisse invariant le Lagrangien d'un système, à $\partial_t \mathcal{L}$ près, correspond une grandeur physique conservée

Symétrie de $\mathcal{L}$	S.T.T.	$\oplus$ S.T.S.	$\oplus$ S.R.S
invariant	$E = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}$	$\vec{P} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$	$\vec{L} = \sum_i q_i \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$

1. Notion d'Intégrale première

Une intégrale première est définie comme une fonction des coordonnées et des vitesses : $I(q,\dot{q})$, qui reste constante dans le temps lorsque le système suit le mouvement réel $q(t)$ imposé par la dynamique des équations de Lagrange

$$\boxed{I\left(q(t),\dot{q}(t)\right) = \text{cste} \Leftrightarrow d_t\{I\} = 0}$$

intégrale première

L'appellation "intégrale première" vient du fait que I ne dépend que de q et $\dot{q}$ et non pas des accélérations : on a en quelque sorte intégré les équations du mouvement. Cela ne signifie pas que l'on a résolu ces dernières, mais que l'on a franchi une étape dans cette voie.

Il n'y a pas de "recette" pour déterminer les intégrales premières, nous allons exposer 2 façons de les identifier.

2. coordonnée cyclique

Si dans la fonction de Lagrange, une coordonnée q_i n'apparaît qu'au travers de sa dérivée : $\dot{q}_i$, alors : $\partial_{q_i}\mathcal{L} = 0$ et ainsi l'équation d'Euler-Lagrange associée donne :

$$d_t\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad d_t\{p_i\} = 0$$

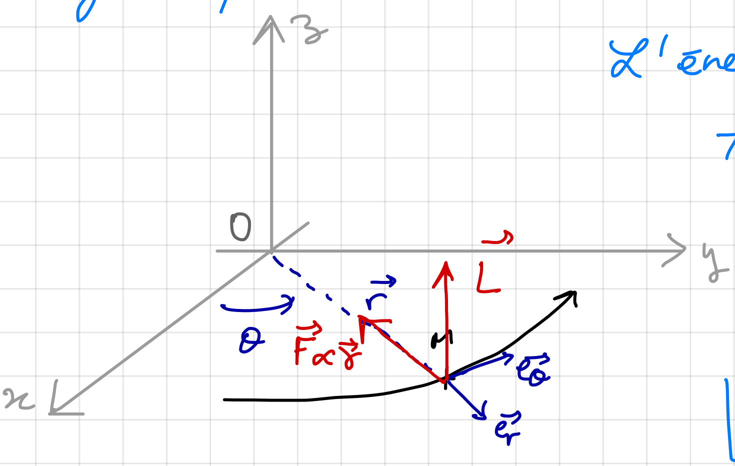
$$\Leftrightarrow \quad p_i = cste$$, c'est une intégrale première

> Le moment canoniquement conjugué à une coordonnée cyclique est une intégrale première

Exercice IV.2.1 : Particule soumise à une force centrale

On considère une particule de masse m soumise à une force centrale. Déterminer l'intégrale première associée à la coord. cyclique.

Dans un mouvement à force centrale, le mobile fictif M évolue dans le plan normal à $\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{v}$, où $\vec{r} = \vec{OM}$ où O est le centre de force et $\vec{v}$ la vitesse de M dans le réf. barycentrique centré sur O et galiléen pour l'étude.



L'énergie cinétique T de M est

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

$$\vec{v}^{\,2} = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)}$$

L'énergie potentielle de M est $\mathcal{E}_p(r) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V(r)) = -\frac{dV}{dr}\vec{e_r}$

d'où la fonction de Lagrange $\mathcal{L} = T - V$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\theta})$$

$\Rightarrow$ la coordonnée θ est cyclique

donc $\quad p_\theta := \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} = mC$

où : $C = \|\vec{C}\| = r^2\dot{\theta}$ (norme du vecteur aérolaire)

on reconnait l'expression du moment cinétique :

$$p_\theta = \|\vec{L}\| \quad , \quad \vec{L} = m\vec{C}$$

On retrouve là le résultat vu lors du cours sur le problème à 2 corps en interaction centrale conservative : $\|\vec{C}\|$ est une constante du mouvement.

L'identification de moments constants à partir de coord. cycliques se fait dans le cadre du formalisme de Routh à l'aide du Routhien (transformée de Legendre partielle du Lagrangien). Le Routhien combine une description hybride Lagrangienne-Hamiltonienne

les autres ddl.

degré de liberté cycliques

3. Théorème de Noether

a. énoncé et preuve

Ce théorème établi en 1918 par Emmy Noether est d'une importance capitale dans la physique contemporaine. Il exprime que l'invariance des lois physiques sous des transformations, que l'on appelle symétries, entraîne l'existence de lois de conservation de grandeurs physiques.

Théorème

Soit $\mathcal{L}(q,\dot{q})$ le Lagrangien d'un système autonome (ie $\partial_t \mathcal{L}=0$)

Soit la transformation continue $\Lambda : q \rightarrow h(s,q)$ telle que : $q = h(s=0,q)$, où $s \in \mathbb{R}$ est un paramètre continu.

Si $\boxed{\forall s,\ \mathcal{L}(q,\dot{q}) = \mathcal{L}(h(s,q), \dot{h}(s,q)) \Leftrightarrow d_s\{\mathcal{L}\}=0}$

ie : le Lagrangien est invariant sous la transfo Λ, qui est appellée une symétrie de $\mathcal{L}$.

Alors $\exists\, I(q,\dot{q})$, une intégrale première, telle que :

$$d_t\{I\}=0 \quad \text{et} \quad I(q,\dot{q}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \left.\frac{dh(s,q)}{ds}\right|_{s=0}$$

exercice

Preuve : $d_s\{\mathcal{L}\} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_i}\frac{\partial h_i}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_i}\frac{\partial \dot{h}_i}{\partial s} = 0$ ($\mathcal{L}$ ne dép. pas de s par hypothèse)

en particulier,

si $s=0$, $h_i = q_i$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\left.\frac{\partial h_i}{\partial s}\right|_{s=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\left.\frac{\partial \dot{h}_i}{\partial s}\right|_{s=0} = 0$

or $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = d_t\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right\}$ (éq. d'Euler-Lagrange)

donc : $d_t\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right\}\left.\frac{\partial h_i}{\partial s}\right|_{s=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\left.\frac{\partial \dot{h}_i}{\partial s}\right|_{s=0} = 0$

puisque $d_t\left\{ \left.\frac{\partial h_i}{\partial s}\right|_{s=0} \right\} = \left.\frac{\partial \dot{h}_i}{\partial s}\right|_{s=0}$

on a finalement :

$$d_t\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \left.\frac{\partial h_i}{\partial s}\right|_{s=0} \right\} = 0$$

soit $I_i(q,\dot{q}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \left.\frac{\partial h_i}{\partial s}\right|_{s=0}$, $\forall i$

est une intégrale première

cqfd

b. Applications pour $\mathcal{L}(\vec{r},\dot{\vec{r}})$

- Soit $\Lambda : \vec{r} \mapsto h(s,\vec{r}) = \vec{r} + s\,\vec{e_x}$, $\vec{e_x}$ vect. unitaire de direct° (Ox).

l'intégrale première d'après le théorème

$$I(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \vec{e_x} = \vec{p}_r \cdot \vec{e_x} \equiv p_x$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La composante de l'impulsion suivant l'axe de la translat° est conservée}}$

- Soit $\Lambda : \vec{r} \mapsto h(s,\vec{r}) = \begin{bmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{r}$

$$= \begin{bmatrix} r_x \cos s + r_y \sin s \\ -r_x \sin s + r_y \cos s \\ r_z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial h}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\begin{bmatrix} -\sin s\, r_x + r_y \cos s \\ -r_x \cos s + r_y \sin s \\ 0 \end{bmatrix}\right|_{s=0} = \begin{bmatrix} r_y \\ -r_x \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{r} \wedge \vec{e_z}$$

$$\Rightarrow I(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \begin{bmatrix} r_y \\ -r_x \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{p}_r \cdot (r_y \vec{e_x} - r_x \vec{e_y}) = \vec{p} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{e_z})$$

Or : $A.B\times C = A\times B.C = B.C\times A = B\times C.A = C.A\times B = C\times A.B$

donc

$$I(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = +(\vec{p}\wedge\vec{r})\cdot\vec{e_z}$$
$$= -(\vec{r}\wedge\vec{p})\cdot\vec{e_z}$$
$$= -\vec{L}\cdot\vec{e_z}$$
$$I(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = -L_z$$

$\Rightarrow$ La composante de $\vec{L}$ suivant l'axe de la rotation est conservée

- On a vu que si l'on considère l'invariance de $\mathcal{L}$ par translation dans le temps, càd $\partial_t \mathcal{L} = 0$ alors l'identité de Beltrami tient et $\mathcal{H} = T+V$ est conservée (c'est l'énergie mécanique du système).

- Si l'on considère le problème de Kepler (mouvement newtonien dans un champ de force central conservatif en $1/r^2$)

avec $V(r) = \dfrac{-\alpha}{r}$

le Lagrangien s'écrit $\mathcal{L} = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{\alpha}{r}$

En utilisant la théorie des groupes (Pb non trivial) on trouve via le théorème de Nœther que :

$$\vec{A} = \frac{\vec{v}\wedge\vec{L}}{\alpha} - \vec{e_r} \quad (\text{ou } \vec{A} = \vec{v}\wedge\vec{L} - \alpha\vec{e_r})$$

le vecteur de Laplace-Runge-Lenz est une intégrale première.

$\dfrac{\vec{A}}{\alpha}$ apparaît dans le second théorème de Bertrand

c. Résumé

Invariance (ou symétrie) de $\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$	Intégrale première
Translation suivant $\vec{e_x}$	$\vec{p} \cdot \vec{e_x}$ $\quad (\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}})$
Rotation suivant $\vec{e_z}$	$-\vec{L} \cdot \vec{e_z}$ $\quad (\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p})$
Translation dans le temps	$\mathcal{H} = T + V$
symétrie dynamique $h(s,q)$ de $\mathcal{L}(q, \dot{q})$	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial h}{\partial s}\Big\|_{s=0}$

pdt scalaire entre 2 vecteurs

Exercice

Dans un espace à 2 Dimensions, une particule de masse m repérée par (x,y) est soumise à $V(x-2y)$. Elle est non relativiste par rapport au réf d'Étude supposé galiléen.

1. Écrire le Lagrangien et mq il est invariant par un groupe de translat° oblique.

2. Appliquer le théorème de Noether pour trouver une intégrale première.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x-2y) = \mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y})$$

Si Δ :

$$x \mapsto x + s = h_x$$

$$y \mapsto y + \frac{s}{2} = h_y \qquad h_x - 2h_y = x - 2y$$

$$h_x(s=0) = x$$

$$h_y(s=0) = y$$

alors $\mathcal{L}(h_x, \dot{h}_x, h_y, \dot{h}_y) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x-2y) = \mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y})$

Λ est une translat° oblique

$$I(x,\dot{x},y,\dot{y}) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\,\vec{e_x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\,\vec{e_y}\right)\cdot\left(\frac{\partial h_x}{\partial s}\Big|_{s=0}\vec{e_x} + \frac{\partial h_y}{\partial s}\Big|_{s=0}\vec{e_y}\right)$$

$$= \left(m\dot{x}\,\vec{e_x} + m\dot{y}\,\vec{e_y}\right)\cdot\left(1\,\vec{e_x} + \frac{1}{2}\vec{e_y}\right)$$

$$= m\dot{x} + m\dot{y}/2$$

$$I(x,\dot{x},y,\dot{y}) = m\left(\dot{x} + \frac{\dot{y}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\dot{x} + \frac{\dot{y}}{2}\right) = \text{cste}}$$