Fiche : Equation d'Euler-Lagrange

On considère un problème du type trouver $y(x,\alpha)$ telle qu'elle minimise $\displaystyle J = \int_A^B \mathcal{L}(y,\dot{y},x)\,dx$, où : $\dot{y} = \partial_x y$

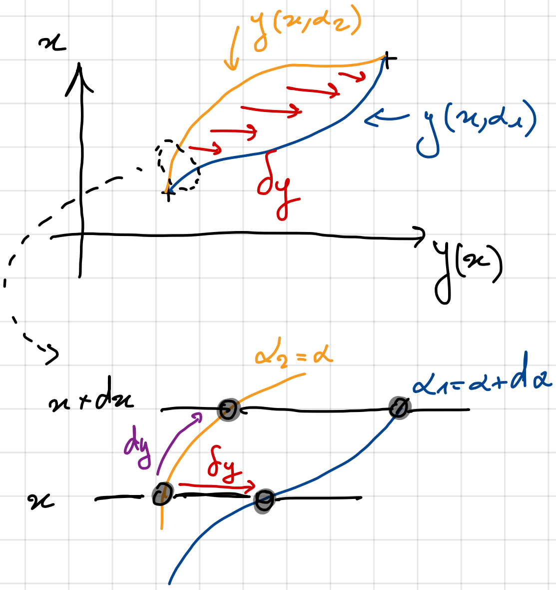
On montre que :

$$\delta J = 0 + o(\delta y) \iff \boxed{\partial_y \mathcal{L} = d_x\{\partial_{\dot{y}} \mathcal{L}\}} \quad (1^{\text{ère}} \text{ forme de l'éq d'E.L.})$$

$$\iff \boxed{\partial_x \mathcal{L} + d_x\{\dot{y}\,\partial_{\dot{y}}\mathcal{L} - \mathcal{L}\} = 0} \quad (2^{\text{ème}} \text{ forme})$$

identité de Beltrami : $\partial_x \mathcal{L} = 0 \Rightarrow \boxed{d_x\{\dot{y}\,\partial_{\dot{y}}\mathcal{L} - \mathcal{L}\} = 0}$

où :



$$dy = \partial_x y|_\alpha \, dx$$

$$\delta y = \partial_\alpha y|_x \, d\alpha$$

Mémo : on pose $p := \partial_{\dot{y}} \mathcal{L}$

alors la première forme de E.L. devient : $\partial_y \mathcal{L} = \dot{p}$

et la deuxième forme : $\partial_x \mathcal{L} + d_x\{\dot{y}\,p - \mathcal{L}\} = 0$

L'équation d'E.L. est une e.d.p. du second ordre en x.
si elle est résolvable elle donne y.