Systèmes Lagrangiens

Cours n° 2

Introduction

Les équations de Lagrange fondées sur l'énergie cinétique et faisant intervenir les forces généralisée permettent de déterminer l'évolution du système dès lors que les forces réelles sont connues.

Si les forces réelles dérivent d'un potentiel $\mathcal{U}$ nous allons voir que les équations de Lagrange prennent une forme simplifiée faisant intervenir uniquement une fonction dite de Lagrange ou Lagrangien $\mathcal{L} = T - \mathcal{U}$.

Les systèmes physiques pouvant être décrits par un Lagrangien sont appellés systèmes Lagrangiens. Les systèmes physique soumis à de la dissipation échappent au formalisme Lagrangien.

Le principal intérêt des systèmes Lagrangiens est que l'exploitation de leurs symétries permet d'accéder à des quantités appelées intégrales premières qui gardent une valeur constante au cours du mouvement. Ces intégrales premières permettent de simplifier la recherche des solutions aux éq. du mouvement. Le théorème de Noether fournit le lien entre le type de symétrie et la grandeur physique conservée.

I. Fonction de Lagrange

On rappelle que l'équation de Lagrange avait été obtenue dans l'hypothèse où le nombre de degré de liberté est égale au nbre de coordonnées généralisées. On se place dans cette hypothèse.

1. Potentiel généralisé

Dans le cas où le travail virtuel δW est la différentielle totale d'une fonction scalaire $V(q)$

$$\delta W = -dV(q) = \sum_i \partial_{q_i} V \, \delta q_i$$

il vient $\quad -dV(q) = \sum_i Q_i \, \delta q_i \quad$ (puisque $\delta W = \sum Q_i \delta q_i$)

$$\text{soit} \quad \boxed{Q_i = -\partial_{q_i} V} \, , \; \forall i \qquad (I.1.0)$$

$\forall i$, La force généralisée Q_i dérive d'un potentiel

Certaines forces généralisées dépendent des vitesses, et si elles peuvent se mettre sous la forme :

$$\boxed{Q_i(q, \dot{q}, t) = d_t \left\{ \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right\} - \partial_{q_i} V} \, , \qquad (I.1.1)$$

on dit qu'elles dérivent d'un potentiel généralisé.

Si $\dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = \text{cste}$ on retrouve $(I.1.0)$

<u>Exercice</u> : Montrer que la force de Lorentz dans un (R_G) :

$$\vec{F_L} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right),$$

où $\vec{v} = d_t \vec{r}$, $\vec{E}$ = chp électrique, $\vec{B}$ = champ magnétique

dérive d'un potentiel généralisé.

On donne : $\vec{A} \wedge \vec{rot}(\vec{B}) = (\overline{\overline{\nabla}}\vec{B})\vec{A} - (\vec{A}.\vec{grad})\vec{B}$

où $\overline{\overline{\nabla}}B = \begin{bmatrix} \partial_x B_x & \partial_x B_y & \partial_x B_z \\ \partial_y B_x & \partial_y B_y & \partial_y B_z \\ \partial_z B_x & \partial_z B_y & \partial_z B_z \end{bmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$

On a $\vec{E} \equiv \vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B} \equiv \vec{B}(\vec{r},t)$, $\vec{v} \equiv \vec{v}(t)$

$\vec{grad} \equiv \vec{grad}_{\vec{r}}$ et $\vec{rot} \equiv \vec{rot}_{\vec{r}}$

On pose $\begin{cases} q = \vec{r} \\ q_i = r_i \end{cases}$ et $\begin{cases} \dot{q} = \vec{v} \\ \dot{q}_i = v_i \end{cases}$, q et $\dot{q}$ sont indépendants, dans le formalisme Lagrangien

position et vitesse sont indépendantes : il n'existe pas de relation reliant ces variables à un instant donné la vitesse est la dérivée temporelle de la position mais c'est une relation différentielle relative à deux instants t et t+dt.

On a : $\frac{\partial}{\partial q} = \vec{grad}_{\vec{r}}$ et $\frac{\partial}{\partial \dot{q}} = \vec{grad}_{\vec{v}}$

On doit montrer que : $\exists\, V(q,\dot{q},t) \mid \vec{F_L} = -\frac{\partial V}{\partial q} + d_t\left\{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}}\right\}$

Soit : $\vec{F_L} = -\vec{grad}_{\vec{r}}(V) + d_t\left\{\vec{grad}_{\vec{v}}(V)\right\}$

L'indépendance des $\vec{r_\alpha}$ et $\vec{v_\alpha}$ résulte d'un fait exp. en méca classique il est possible de fixer à un instant donné la vitesse et la position d'un objet sans contraintes relationnelles.

En introduisant les potentiels $\mathcal{U}$ et A tels que :

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{grad}(\mathcal{U}) - \partial_t \vec{A} \\ \vec{B} = \vec{rot}(\vec{A}) \end{cases}$$

$\vec{F_L}$ se réécrit : $\vec{F_L} = q\left(-\vec{grad}(\mathcal{U}) - \partial_t \vec{A} + \vec{v} \wedge \vec{rot}(\vec{A})\right)$

Puisque $\dot{q}=\vec{v}$ et $q=\vec{r}$ sont traités comme variables indépendantes :

$$(\overline{\overline{\nabla A}})\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \partial_x A_x + v_y \partial_x A_y + v_z \partial_x A_z \\ v_x \partial_y A_x + v_y \partial_y A_y + v_z \partial_y A_z \\ v_x \partial_z A_x + v_y \partial_z A_y + v_z \partial_z A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x \{\vec{v}.\vec{A}\} \\ \partial_y \{\vec{v}.\vec{A}\} \\ \partial_z \{\vec{v}.\vec{A}\} \end{bmatrix}$$

soit :

$$(\overline{\overline{\nabla A}})\vec{v} = \vec{\text{grad}}(\vec{v}.\vec{A})$$

Ainsi :

$$\vec{F_L} = q\left(-\vec{\text{grad}}(\mathcal{U}) - \partial_t \vec{A} + \vec{\text{grad}}(\vec{v}.\vec{A}) - (\vec{v}.\vec{\text{grad}})\vec{A}\right)$$

$$\boxed{\vec{F_L} = -\vec{\text{grad}}\left(q(\mathcal{U} - \vec{v}.\vec{A})\right) - q\left(\partial_t \vec{A} + (\vec{v}.\vec{\text{grad}})\vec{A}\right)}$$

Posons : $V(q,\dot{q},t) = V(\vec{r},\vec{v},t) = q(\mathcal{U} - \vec{v}.\vec{A})$

$$\vec{\text{grad}}_{\vec{v}}(V) = -q.\vec{A}$$

$$d_t\{\vec{\text{grad}}_{\vec{v}}(V)\} = -q\, d_t\{\vec{A}\}$$

or, $d\vec{A} = \partial_t \vec{A}\, dt + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A}{\partial r_i} dr_i = \partial_t \vec{A}\, dt + (\vec{dr}.\vec{\text{grad}}_{\vec{r}})\vec{A}$

d'où : $d_t\{\vec{A}\} = \partial_t \vec{A} + (\vec{v}.\vec{\text{grad}})\vec{A}$

et d'où :

$$d_t\{\vec{\text{grad}}_{\vec{v}}(V)\} = -q\left(\partial_t \vec{A} + (\vec{v}.\vec{\text{grad}})\vec{A}\right)$$

Ainsi : $\vec{F_L} = -\vec{\text{grad}}_{\vec{r}}(V) + d_t\{\vec{\text{grad}}_{\vec{v}}(V)\}$

soit

$$\boxed{\vec{F_L} = -\frac{\partial V}{\partial q} + d_t\left\{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}}\right\}, \text{ où } \underline{V \equiv V(q,\dot{q},t) = q(\mathcal{U} - \vec{v}.\vec{A})}}$$

$\vec{F_L}$ dérive bien d'un potentiel généralisé $V = q(\mathcal{U} - \vec{v}.\vec{A})$ faisant intervenir les potentiels du champ $(\vec{E},\vec{B})$ et le champ de vitesse $\vec{v}$ traité comme une variable indépendante de $\vec{r}$.

Chaque composante de $\vec{F_L}$ est une force généralisée $Q_{L,i}$

$$Q_{L,i} = \vec{F_L} \cdot \vec{e_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + d_t \left\{ \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right\} .$$

2. Fonction de Lagrange (Lagrangien) et équations d'Euler-Lagrange

Repartons de l'équation de Lagrange,

$$-\frac{\partial T}{\partial q_i} + d_t\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right\} = Q_i(q,\dot{q},t)$$

avec cette fois Q_i dérivant d'un potentiel généralisé $V(q,\dot{q},t)$:

$$-\frac{\partial T}{\partial q_i} + d_t\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right\} = d_t\left\{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right\} - \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

il vient alors:

$$-\frac{\partial (T-V)}{\partial q_i} + d_t\left\{\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_i}\right\} = 0 \qquad (I.2.0)$$

C'est l'équation d'Euler-Lagrange pour q_i, que l'on peut réécrire en introduisant la fonction de Lagrange :

$$\mathcal{L} := T - V,$$

$$(I.2.0) \Leftrightarrow \boxed{-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + d_t\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right\} = 0}, \ \forall i \qquad (I.2.1)$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont au nombre des q_i

Les systèmes soumis à des forces généralisées dérivant d'un potentiel généralisé possède un Lagrangien et sont appellés systèmes Lagrangiens.

Le Lagrangien d'un système n'est pas unique :

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + d_t f, \text{ où } f = f(q,t) \text{ fonct° qcq}$$

vérifie aussi (I.2.1.). Par conséquent le système décrit par $\mathcal{L}'$ possède la même trajectoire dans l'espace de configuration et décrit donc le même mouvement. On peut utiliser cette liberté (f) pour simplifier la forme du Lagrangien.

Exercice I.2.1 : changement de Lagrangien

Soit une fonction qcq $f(q, t)$ qui dépend de $q = (q_1, \dots, q_n)$ et de t

1. Calculer : $\frac{df}{dt}$, et mq : $\partial_{\dot{q}_i}(d_t f) = \partial_{q_i} f$

2. Mq : $d_t\{\partial_{\dot{q}_i}\{d_t f\}\} - \partial_{q_i}\{d_t f\} = 0$

3. En déduire que $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + d_t f$ décrit le même système physique que celui décrit par $\mathcal{L}$

Exercice I.2.2 : Preuve des équations d'Euler - Lagrange

s'entraîner à refaire la démo du cours 1

3. Impulsion généralisée (ou Moment généralisé)

La quantité $\boxed{p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}$ est appellée impulsion généralisée associée à la coordonnée q_i (ou moment généralisé ou moment canoniquement conjugué.)

$\mathcal{L}$ joue le rôle de fonction génératrice pour les p_i

Les équations d'Euler-Lagrange se réécrivent alors:

$$\boxed{\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}} \qquad (I.3.0)$$

C'est la forme généralisée de la 2nde loi de Newton.

Exercice I.3.1

Si $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + d_t f$ avec les hypothèses de l'exo I.2.1

mq. $p_i' = p_i + \partial_{q_i} f$

Exercice I.3.2.

1. Si $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2} - V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$

(Lagrangien de particules non relativistes placées dans un potentiel V incluant les potentiels d'interaction entre particules.)

et si $\vec{r}_\alpha = (x, y, z)$ coord. cartésiennes

que vaut p_i ?

2. On considère une particule non relativiste de masse m placée dans un potentiel central

$V(r)$ où $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. On note $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ la vitesse et v^2 son carré. On étudie le problème en coordonnées sphériques : $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$

a. Écrire le Lagrangien de la particule en coord. sphérique

b. Calculer p_r, p_θ et p_φ

c. Montrer que $p_\varphi = L_z$ où L_z est le moment cinétique selon $\vec{e_z}$.

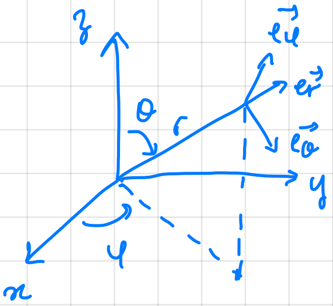
Exo I.3.2

1. $p_i = p_x$ par exemple

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = mv_x$$

2. a) Energie cinétique $T = \frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2}$

$$\vec{v} = d_t\vec{r} = \dot{r}\vec{e_r} + r\, d_t\vec{e_r} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$$



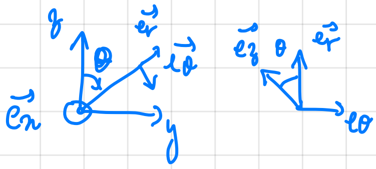
or $d_t\vec{e_r} = \vec{\omega}\wedge\vec{e_r}$

et $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e_\varphi} + \dot{\varphi}\vec{e_z}$

$\vec{e_z} = \cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}$

$\Rightarrow d_t\vec{e_r} = (\dot{\theta}\vec{e_\varphi} + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e_r} - \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e_\theta})\wedge\vec{e_r}$

$= +\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e_\varphi}$



d'où $T = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\sin\theta\dot{\varphi})^2\right)$

d'où $\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\sin\theta\dot{\varphi})^2\right) - V(r) \equiv \mathcal{L}(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi})}$

b) $\boxed{p_r := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}}$, $\boxed{p_\theta := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}}$; $\boxed{p_\varphi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}}$

On remarque d'autre part que

puisque $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$, φ est une coord. cyclique et

donc p_φ est conservée (cf cours lois de conservation)

c $\quad \vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

$$= r\vec{e_r} \wedge m(\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e_\varphi})$$

$$= mr^2\dot{\theta}\vec{e_\varphi} - mr^2\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e_\theta}$$

$$= mr^2(\dot{\theta}\vec{e_\varphi} - \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e_\theta})$$

Or $\vec{e_z} = \cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta}$

donc $\vec{L}\cdot\vec{e_z} = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = L_z$

on retrouve l'expression de p_φ : $\boxed{L_z = p_\varphi}$

4. Identité de Beltrami et conservation de l'énergie

L'identité de Beltrami est une relation générale associée aux Lagrangiens $\mathcal{L}$ indépendants du temps. Cette relation conduit au théorème de conservation de l'énergie.

- Soit $\mathcal{L}(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - V(q)$, $\partial_t \mathcal{L} = 0$

$$d_t\{\mathcal{L}\} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\ddot{q}$$

or $(E.L.) \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = d_t\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right\}$

donc $d_t\{\mathcal{L}\} = d_t\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right\}\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\ddot{q} = d_t\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right\}$

On $p := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$

donc $d_t\{\mathcal{L}\} = d_t\{p.\dot{q}\} \Leftrightarrow \boxed{d_t\{\mathcal{L} - p.\dot{q}\} = 0}$ (II.4.0)

C'est l'identité de Beltrami.

- On va maintenant montrer la conservation de l'énergie si $\mathcal{L}$ ne dépend pas du temps (cf cours sur les lois de conservation)

$\forall i$, $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$, si $\mathcal{L} = T(q,\dot{q}) - V(q) \Rightarrow p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$

d'où $\sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i$

et puisque $T(q,\dot{q})$ est une forme quadratique des $\dot{q}_i$ (voir Cours 1 II.2), le théorème d'Euler pour les fonctions positivement homogène donne : $\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T$

D'où $\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i = 2T}$

Ainsi $d_t \{ \mathcal{L} - p.\dot{q} \} = 0 \Leftrightarrow d_t \{ \mathcal{L} - 2T \} = 0$

si l'on note $\mathcal{H}$ l'énergie mécanique du système

$$\mathcal{H} := T + V$$

alors $\mathcal{L} + \mathcal{H} = 2T \Leftrightarrow \mathcal{L} - 2T = -\mathcal{H}$

et donc

$$\boxed{d_t \{ \mathcal{L} - p.\dot{q} \} = 0 \Leftrightarrow d_t \{ -\mathcal{H} \} = 0 \Leftrightarrow d_t \{ \mathcal{H} \} = 0}$$

→ on retrouve la conservation de l'énergie !

$$\partial_t \mathcal{L} = 0 \Leftrightarrow d_t \{ \mathcal{L} - p.\dot{q} \} = 0 \Leftrightarrow d_t \{ \mathcal{H} \} = 0$$

Lagrangien invariant par translation temporelle

(requiert $\partial_t \vec{r}_\alpha = 0$)

II Principes variationnels pour les systèmes Lagrangiens

1. Principe de Hamilton ou principe de moindre action
2. Principe de Hamilton pour un système conservatif : principe de Maupertuis
3. Principe de Maupertuis pour des masses nulles : principe de Fermat
4. Généralités sur le calcul variationnel d'Euler et Lagrange

III. Invariances et lois de conservation

→ voir LP02