II. Le calcul variationnel d'Euler et Lagrange

1. Introduction au calcul variationnel

Trouver une fonction ou une famille de fonctions, qui minimise une intégrale donnée, s'appelle le calcul variationnel.

De manière formelle, soit l'intégrale J tq :

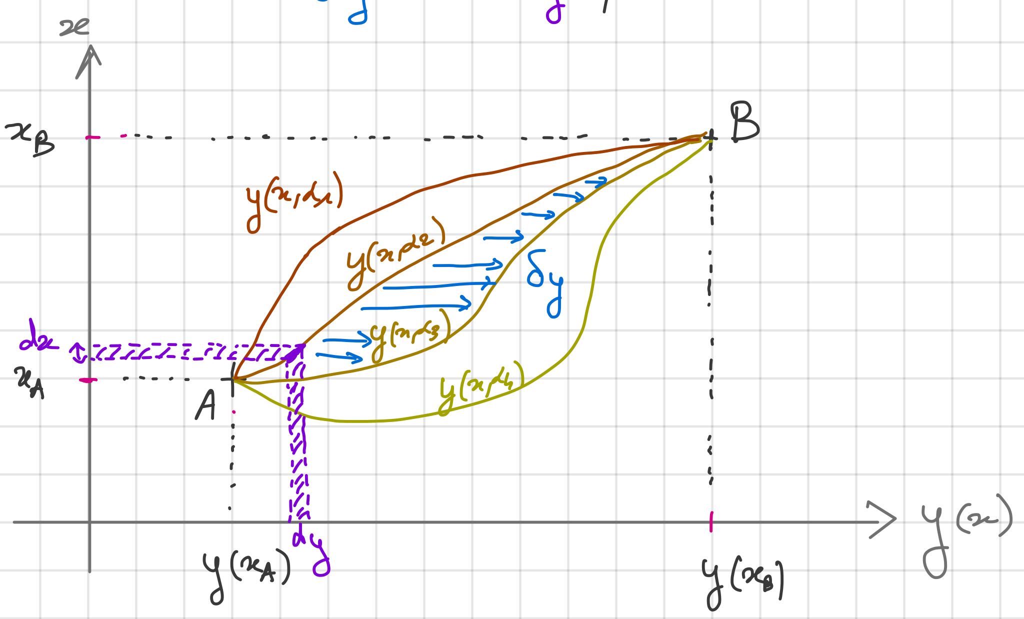
$$J = \int_{x_A}^{x_B} \mathcal{L}(y(x,\alpha), \dot{y}(x,\alpha), x)\, dx \qquad (4)$$

où : $\dot{y} = \partial_x y$

où : - $(y(x,\alpha))_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est une famille de trajectoire paramétrée continuement par $\alpha \in \mathbb{R}$.

- x_A et x_B sont fixés
- $\mathcal{L}$ est appelée fonctionnelle Lagrange ou Lagrangien.

Au sein des $y(x,\alpha)$ deux types de variations infinitésimales doivent être considerées : δy et dy, illustrées ci-dessous :



$\delta y \equiv \delta y(x)$ ne dép. pas de α

(5) $\boxed{\delta y := \partial_\alpha y\big|_x \,\delta\alpha}$ $\qquad$ $\boxed{dy := \partial_x y\big|_\alpha \, dx}$ (6)

$dy \equiv ds$
↳ ne dépend pas de x

Propriétés des variations δy et dy :

i) Le point de départ A et le point d'arrivée B étant commun à l'ensemble des trajectoires:

$$\underline{\delta y(x_A) = \delta y(x_B) = 0} \qquad (7)$$

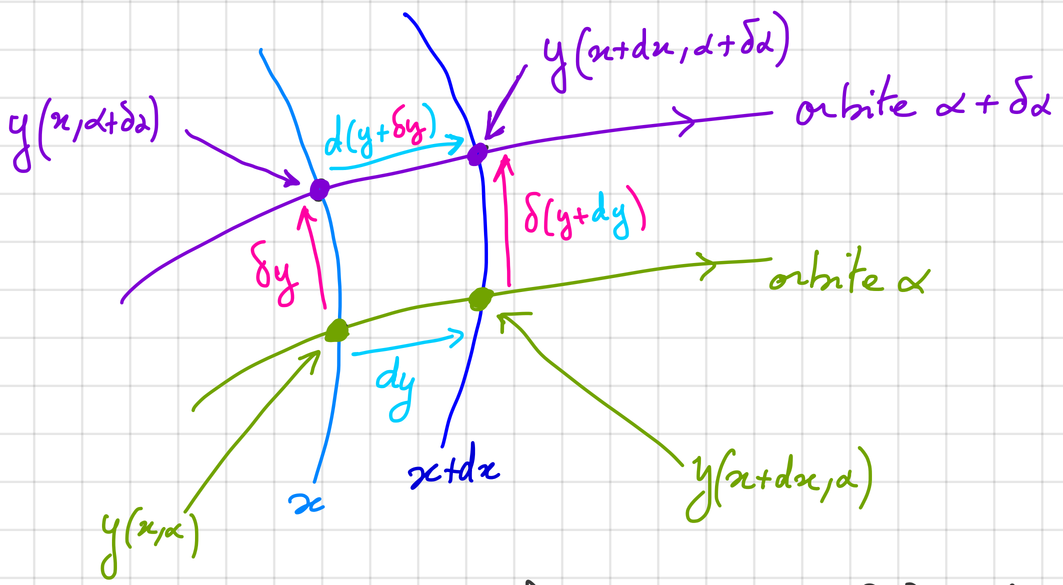
ii) caractère commutatif des variations au sein de la famille $(y(x,\alpha))_{\alpha\in\mathbb{R}}$:

$$\delta \dot y := \delta\{\partial_x y\} = \frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial x}\Big|_x \delta\alpha = \partial_x\{\partial_\alpha y|_x\}\,\delta\alpha$$

$$\delta\dot y = \partial_x\{\underbrace{\partial_\alpha y|_x \,\delta\alpha}_{=\delta y(x)}\} = d_x\{\delta y\}$$

donc "d" droit

càd : $\underline{\delta\dot y = d_x\{\delta y\}}$ (8)



On passe de $y(x,\alpha)$ à $y(x+dx,\alpha+\delta\alpha)$ selon 2 chemins :

$$y(x,\alpha) + \delta y + d(y+\delta y) = y(x+dx,\alpha+\delta\alpha)$$

et

$$y(x,\alpha) + dy + \delta(y+dy) = y(x+dx, \alpha+\delta\alpha)$$

d'où : $$dy + \delta y + \delta dy = \delta y + dy + d\delta y$$

soit $$\boxed{\delta dy = d\delta y}$$

Commutation des variations virtuelles infinitésimales et des évolutions dynamique infinitésimales.

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{\delta dy}{dx} = \dfrac{d\delta y}{dx} \\ \\ \delta \dot{y} = \dot{(\delta y)} \end{array} \right.$$

Remarques :

0) C'est exactement le pb de Fermat pour déterminer le tps τ min.

avec la fonctionnelle de Lagrange $\mathcal{L}$:

$$\boxed{\mathcal{L}(y, \dot{y}, x) = \frac{1}{c} n(y) \sqrt{1 + \dot{y}^2}}$$

"Lagrangien optique"

$$\text{et : } \tau = \int_{x_A}^{x_B} \mathcal{L}(y, \dot{y}, x)\, dx \equiv \mathcal{J}$$

1) Dans le contexte de la physique, les $y(x, \alpha)$ sont appelées <u>orbites virtuelles</u>, elles ne sont pas toutes réalisées par la nature ; en vertu du principe d'économie naturelle, ou du moindre temps, <u>seules celles qui extremalisent $\mathcal{J}$ le sont.</u>

il peut y en avoir plusieurs mais elles correspondent chacune à un seul α
il peut même en exister une infinité : ex : lentille ac 2 points conjugués.

2) D'un point de vue technique, $\mathcal{J}$ est une <u>fonctionnelle</u>, càd qu'elle fait correspondre à une fonction $y(x, \alpha)$ un nombre $\mathcal{J}(y(x, \alpha))$.

3) Pour que $\mathcal{J}$ soit une fonction, il faut fixer $y(x, \alpha)$ ac α

$\mathcal{J}$ est alors une fonction de x_A et x_B.

On veut que : $d_y J = 0$ et $d_y^2 J > 0$

c'est à dire si y est la solution alors pour une variation δy, il correspond une variation δJ d'ordre supérieure :

$$(9) \quad \begin{cases} \delta J = 0 + o(\delta y) \\ \delta J^2 = K + o(\delta y^2) \quad , \text{ avec } K \geqslant 0 \end{cases}$$

Par définition : $\delta J := J(y(x,\alpha+\delta\alpha)) - J(y(x,\alpha))$ (10)

d'où :
$$\delta J = \int_{x_A}^{x_B} \mathcal{L}(y+\delta y, \dot{y}+\delta\dot{y}, x)\, dx - \int_{x_A}^{x_B} \mathcal{L}(y,\dot{y},x)\, dx$$

Or :
$$\mathcal{L}(y+\delta y, \dot{y}+\delta\dot{y}, x) = \mathcal{L}(y,\dot{y},x) + \partial_y \mathcal{L}\, \delta y + \partial_{\dot{y}} \mathcal{L}\, \delta\dot{y} + o(\delta\alpha)$$

$$\left(\delta\dot{y} = d_x\{\partial_\alpha y|_x\}\, \delta\alpha \quad \text{et} \quad \delta y = \partial_\alpha y\, \delta\alpha \right)$$

D'où :
$$\boxed{\delta J = \int_{x_A}^{x_B} \left(\partial_y \mathcal{L}\, \delta y + \partial_{\dot{y}} \mathcal{L}\, \delta\dot{y} \right) dx + o(\delta\alpha)} \quad (11)$$

On peut simplifier (11) :

en effet :
$$\int_{x_A}^{x_B} \partial_{\dot{y}} \mathcal{L}\, \delta\dot{y}\, dx \underset{(8)}{=} \int_{x_A}^{x_B} \partial_{\dot{y}} \mathcal{L}\; d_x\{\delta y\}\, dx$$

en IPP : $u = \partial_{\dot{y}} \mathcal{L}$; $v' = d_x\{\delta y\}$

$$\int_{x_A}^{x_B} \partial_{\dot{y}} \mathcal{L}\, \delta\dot{y}\, dx = \Big[\partial_{\dot{y}} \mathcal{L}\, \delta y \Big]_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} d_x\{\partial_{\dot{y}} \mathcal{L}\}\, \delta y\, dx$$

Or : $\left[\partial_{\dot y}\mathcal{L}.\delta y\right]_{x_A}^{x_B} = \partial_{\dot y}\mathcal{L}\Big|_{x_B}\underbrace{\delta y(x_B)}_{=0} - \partial_{\dot y}\mathcal{L}\Big|_{x_A}\underbrace{\delta y(x_A)}_{=0}$

→ en vertu de (7)

D'où : $$\int_{x_A}^{x_B}\partial_{\dot y}\mathcal{L}\;\delta\dot y\;dx = -\int_{x_A}^{x_B} d_x\{\partial_{\dot y}\mathcal{L}\}\,\delta y\,dx$$

et d'où la réécriture de δJ :

$$\boxed{\delta J = \int_{x_A}^{x_B}\left(\partial_y\mathcal{L} - d_x\{\partial_{\dot y}\mathcal{L}\}\right)\delta y(x)\,dx \;+\; o(\delta\alpha)} \quad (12)$$

En remarquant que : $o(\delta y) = o(\delta\alpha)$ puisque : $\delta y = \partial_\alpha y|_x\,\delta\alpha$

Il vient : $$\boxed{\delta J = 0 + o(\delta y) \iff \partial_y\mathcal{L} = d_x\{\partial_{\dot y}\mathcal{L}\}} \quad (13)$$

La solution $y(x,\alpha_s)$ satisfait une équadiff (qui est même une edp) du second ordre :

$$\partial_y\mathcal{L}(y,\dot y,x) = d_x\{\partial_{\dot y}\mathcal{L}(y,\dot y,x)\}$$

qui est appellée équation d'Euler-Lagrange.

2ème forme de l'équation d'Euler-Lagrange et identité de Beltrami.

Écrivons la dérivée totale de $\mathcal{L}$ par rapport à x :

$$d_x \mathcal{L} = \partial_x \mathcal{L} + \partial_y \mathcal{L} \cdot \partial_x y + \partial_{\dot{y}} \mathcal{L} \cdot \partial_x \dot{y}$$

$$(13) \Rightarrow \quad d_x \mathcal{L} = \partial_x \mathcal{L} + d_x \{ \partial_{\dot{y}} \mathcal{L} \} \cdot \dot{y} + \partial_{\dot{y}} \mathcal{L} \cdot \partial_x \dot{y}$$

$$d_x \mathcal{L} = \partial_x \mathcal{L} + d_x \{ \dot{y} \cdot \partial_{\dot{y}} \mathcal{L} \}$$

Soit : $\boxed{\partial_x \mathcal{L} + d_x \{ \dot{y}\, \partial_{\dot{y}} \mathcal{L} - \mathcal{L} \} = 0}$

identité de Beltrami :

$$\boxed{\partial_x \mathcal{L} = 0 \Rightarrow d_x \{ \dot{y}\, \partial_{\dot{y}} \mathcal{L} - \mathcal{L} \} = 0}$$

2. Mirages et rayons courbes

→ Cette section est un exercice - exemple.

Exercice de Pletser, 2018, Springer, Exo 12, 3.2.5

3. Problème de la courbe brachistochrone

"brakhistos" = plus court, en grec ancien
"chronos" = temps, en grec ancien.

Dans un champ de gravité uniforme, une particule de masse m glisse sans frottement et sans vitesse initiale le long d'une courbe dans un plan vertical.
→ Quelle est la courbe qui minimise la durée de la trajectoire ?

Repères historiques :

- Problème posé par Galilée. (1564-1642)
- isochronisme de la cycloïde → Huygens (1629-1695)
- Etude de la courbe brachistochrone → Bernoulli (1667-1748)

→ voir exercice.