Formulation Lagrangienne

Cours n°1

Gignoux

Introduction

Mécanique classique → compréhension du mouvement des corps matériels.

Sous quelles conditions un corps reste au repos → statique

de quelle façon une particule peut se déplacer → cinématique

quelles sont les causes du mouvement → dynamique

Newton écrivit le PFD $m_\alpha \vec{a}_\alpha = \vec{f}_\alpha$ dans le contexte de particule ou point materiel (α)

Si un système est constitué de plusieurs points matériels, les forces agissant sur un point peuvent dépendre de la position et de la vitesse des autres points,

les équations de Newton résultantes deviennent de équadiff vectorielles couplées difficile à résoudre.

D'autre part, il peut exister des contraintes qui limitent la liberté de mouvement des (α). Ces contraintes se traduisent par des forces, qui ne sont pas nécessairement connues, dont il faut tenir compte dans les équations de Newton.

La technique "Newtonienne" consiste à projeter les équations vectorielles sur des axes ⊥ à ces forces, de façon à les éliminer.

Cette façon de procéder, artificielle et lourde, est due au fait que les coordonnées utilisées sont celles des (α) dans le référ d'étude. Euler (1707 - 1783) réfléchit à une nouvelle formulation de la mécanique où les coordonnées utilisées ne seraient plus les coordonnées des (α), mais des coordonnées plus "intelligentes" : les coordonnées généralisées.

Les idées d'Euler furent adoptées immédiatement par Lagrange (1736-1813) qui reformula la mécanique newtonienne à l'aide de ces coordonnées généralisées.

I. Coordonnées généralisées

1. Système mécanique fermé
2. Configuration et coordonnées généralisées
3. Espace des configurations

II. Énergie cinétique, vitesse et accélération généralisée

1. Vitesse généralisée
2. Variables de l'énergie cinétique
3. Accélérations généralisées

III. Forces généralisées

1. Accélération généralisée en fonction de $\vec{f}_a$ forces réelles
2. Déplacements virtuels et travail virtuel
3. Forces généralisées
4. Équation de Lagrange
5. Principe de d'Alembert

IV. Multiplicateurs de Lagrange

1. Cadre et définitions
2. Applications en physique statistique

I. Coordonnées généralisées

1. Système mécanique fermé

- Système mécanique = N particules étiquetées par $\alpha = 1, \dots, N$
- Ces particules peuvent être des atomes, ou tout autre élément de base pour lequel l'introduction d'une structure plus fondamentale n'est pas nécessaire.

  On attribue à ces particules une masse m_i.
- On ne considère que des systèmes fermés, i.e. : N ne varie pas

2. Configuration et coordonnées généralisées

- On appelle configuration du système à un instant donné le catalogue des 3N coordonnées des N points de rayons vecteurs $\vec{r}_\alpha$ dans un syst. de coord. arbitraire p/r à un réf. galiléen.
- Par suite des divers contraintes, les 3N coordonnées ne sont pas indépendantes entre elles, et un nombre $n < 3N$ d'information est suffisant pour définir la configuration du système. On appelle coordonnées généralisées un ensemble de n informations : $(q_1, q_2, \dots, q_n) = (q_i)_i$, qui réalisent cette condition.
- Le jeu des $(q_i)_i$ n'est pas unique, plusieurs jeux $(q_i)_i$, $(q'_i)_i$ etc... peuvent définir la même configuration. Néanmoins, la symétrie d'un problème amène à un choix naturel du jeu $(q_i)_i$.

exemples :
- particule sans contrainte, pb sans symétrie :

$$(q_i)_i = (x, y, z)$$

- " , pb à symétrie cylindrique :

$$(q_i)_i = \left(\rho = \sqrt{x^2+y^2},\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),\ z\right)$$

- " , pb à symétrie sphérique :

$$(q_i)_i = \left(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right),\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

3. Espace des configurations

L'ensemble des n coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_n$ définit un point $q \equiv \vec{q}$ dans un espace appellé espace des configurations, c'est une variété différentiable à n dimensions.

L'espace des configurations n'a pas une structure d'espace vectoriel (la somme de 2 points q n'a pas de sens), par contre au voisinage de chaque point q on peut définir un espace vectoriel tangent à n dimensions.

En chaque point q, il est possible de définir une fct° réelle à n variables : $f(q) \equiv f(q_1, \ldots, q_n)$ et la variation de celle-ci sur la variété peut-être considerée dans l'espace tangent comme le produit scalaire du gradient $\frac{\partial f}{\partial q}$ par le vecteur déplacement infinitésimal δq :

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \delta q_i \equiv \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \delta q$$

Les notions de point sur une variété et de vecteur de l'espace tangent appartiennent à la géométrie différentielle.

II. Energie cinétique, vitesse et accélération généralisée

(PFD) dans le réf galiléen : $m_\alpha \vec{a_\alpha} = \vec{f_\alpha}$

cela revient à déterminer $q_\alpha(t)$, $\forall \alpha$

au parle de trajectoire dans l'espace des configurations

→ besoin : exprimer les accélérations en fction des $(q_i)_i$

1. Vitesse généralisée

vitesse généralisée $= \dot{q}$

2. Variables de l'énergie cinétique

Soit $\vec{r_\alpha} \equiv \vec{r_\alpha}(q(t),t) = \vec{r_\alpha}(q_1(t),\dots,q_n(t),t)$ fonction des q_i, la vitesse $\vec{v_\alpha} := d_t\vec{r_\alpha}$ s'exprime en fonction des q_i et des $\dot{q}_i$ selon :

$$d_t\vec{r_\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r_\alpha}}{\partial q_i}\cdot \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r_\alpha}}{\partial t}$$

fonction des q_i $\dot{q}_i$ f^{ction} de t

donc $\vec{v_\alpha} := d_t\vec{r_\alpha}$ s'écrit : $\vec{v_\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial \vec{r_\alpha}}{\partial q_i}\right|_t \cdot \dot{q}_i + \partial_t \vec{r_\alpha}\Big|_{q_i}$ (I.2.0)

$\Rightarrow$ On constate alors que $\vec{v_\alpha}$ est une fonction des q_i, $\dot{q}_i$ et de t, mis comme des variables indépendantes :

$$\boxed{\vec{v_\alpha} \equiv \vec{v_\alpha}(q,\dot{q},t)}$$

et donc que $T := \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v_\alpha}^{\,2}$ devient également une fonction des variable $q, \dot{q}$ considérées donc comme indépendantes

(I.2.1) $\Leftrightarrow$ $$\boxed{T \equiv T(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\, \vec{v_\alpha}(q,\dot{q},t)^2} \quad (I.2.1)$$

On montre ainsi que l'énergie cinétique T est une forme quadratique des vitesses généralisées si $\partial_t\vec{r_\alpha} = \vec{0}$ i.e : le système est au repos dans un réf. galiléen, càd $\exists$ un réf tel que le changement de variables.

$r(q,\cancel{t}) \to q(r,\cancel{t})$ ne dépendent pas du temps $\cancel{t}$

$$\partial_t\vec{r_\alpha} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v_\alpha}^{\,2} = \sum_{j,k} \frac{\partial \vec{r_\alpha}}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r_\alpha}}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k \quad \text{et} \quad \vec{v_\alpha} \equiv \vec{v_\alpha}(q,\dot{q})$$

d'où
$$\boxed{T = \sum_{j,k}\underbrace{\left(\sum_\alpha \frac{1}{2}m_\alpha \frac{\partial \vec{r_\alpha}}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r_\alpha}}{\partial q_k}\right)}_{a_{j,k}(q) = a_{k,j}(q)}\dot{q}_j\dot{q}_k = \sum_{j,k} a_{j,k}(q)\,\dot{q}_j\dot{q}_k} \quad (I.2.2)$$

les éléments de matrice $a_{j,k}(q)$ de la forme quadratique sont des f^{ctions} des coordonnées généralisées q et la matrice est symétrique :

$$a_{j,k} = a_{k,j}$$

3. Accélérations généralisées

Soit $\dot{q}_i$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha(q,\dot{q},t) \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i}$$

Or (I.2.0) $\Rightarrow \dfrac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}$

donc :

$$\boxed{\partial_{\dot{q}_i} T = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha(q,\dot{q},t)\, \partial_{q_i} \vec{r}_\alpha} \qquad (I.3.0)$$

dérivons (I.3.0) par rapport au temps

$$d_t\{\partial_{\dot{q}_i} T\} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha d_t\{\vec{v}_\alpha\} \partial_{q_i} \vec{r}_\alpha + \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha d_t\{\partial_{q_i} \vec{r}_\alpha\}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{a}_\alpha \partial_{q_i} \vec{r}_\alpha + \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha \partial_{q_i} \vec{v}_\alpha$$

où $\vec{a}_\alpha := d_t \vec{v}_\alpha$,

de plus on remarque que :

$$\partial_{q_i} T = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha \partial_{q_i} \vec{v}_\alpha ,$$

donc :

$$d_t\{\partial_{\dot{q}_i} T\} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{a}_\alpha \partial_{q_i} \vec{r}_\alpha + \partial_{q_i} T$$

Soit :

$$\boxed{\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{a}_\alpha \partial_{q_i} \vec{r}_\alpha}_{= A_i} = d_t\{\partial_{\dot{q}_i} T\} - \partial_{q_i} T} \qquad (I.3.1)$$

Le terme contenant $\vec{a}_\alpha$ s'appelle la composante i de l'accélération généralisée (= accélération généralisée de q_i) notée A_i :

$$\boxed{A_i(q,t) := \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{a}_\alpha \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}} \qquad (I.3.2.)$$

III. Forces généralisées

1. Accélération généralisée en fonction de $\vec{f_\alpha}$

Chaque particule α est soumise à une résultante $\vec{f_\alpha}$ liée à $\vec{a_\alpha}$ via le PFD en réf. galiléen :

$$m_\alpha \vec{a_\alpha} = \vec{f_\alpha}$$

$$\text{Soit} \quad \vec{a_\alpha} = \vec{f_\alpha}/m_\alpha$$

en injectant dans (I.2.5), on a :

$$A_i(q,t) = \sum_\alpha \vec{f_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r_\alpha}}{\partial q_i} \qquad (\text{III}.1.0)$$

2. Déplacements virtuels et travail virtuel

Supposons la transformation $q \rightarrow q + \delta q$, c'est ce que l'on appelle déplacement virtuel.

Chaque particule α s'est déplacée de $\delta \vec{r_\alpha}$ tel que :

$$\delta \vec{r_\alpha} = \sum_i \frac{\partial \vec{r_\alpha}}{\partial q_i} \delta q_i$$

On remarque alors que $\sum_i A_i \delta q_i$ devient :

$$(\text{III}.1.0) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_i \delta q_i = \sum_i \left(\sum_\alpha \vec{f_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r_\alpha}}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_\alpha \vec{f_\alpha} \cdot \delta \vec{r_\alpha}$$

On reconnait la forme d'un travail élementaire δW

$$\delta W := \sum_\alpha \vec{f_\alpha} \cdot \delta \vec{r_\alpha}$$

d'où :

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} A_i \delta q_i$$

c'est la projection des vecteurs forces sur les vecteurs cartésiens de déplacements virtuels $\delta \vec{r_\alpha} = \sum_i \frac{\partial \vec{r_\alpha}}{\partial q_i} \delta q_i$.

Rq : $[\delta W] = J$

δW sert uniquement à avoir accès à des quantités appellées forces généralisées à partir des forces réelles.

3. Forces généralisées

Les forces généralisées Q_i associées aux q_i sont définies en écrivant que δW est une forme différentielle.

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} Q_i(q,\dot{q},t)\,\delta q_i$$

où les $Q_i(q,\dot{q},t)$ sont les forces généralisées

<u>Rq</u> : puisque $[\delta W] = J$

si $[\delta q_i] = m \Rightarrow [Q_1] = N$ = force

$[\delta q_i] = m^2 \Rightarrow [Q_i] = N.m^{-1}$ = couple

$[\delta q_i] = rad \Rightarrow [Q_i] = N.m$ = moment

les forces généralisées mettent sur le même plan formel forces, couples et moments.

4. Equation de Lagrange

On a : $\delta W = \sum A_i \delta q_i$ et $\delta W := \sum Q_i \delta q_i$

donc $$\sum_{i=1}^{n} (A_i - Q_i)\,\delta q_i = 0 \qquad (\text{III}.4.0)$$

Si l'on peut choisir n δq_i indépendants (ie : ddl du système = nombre de coord. généralisées), ie: δq_i qcq alors :

$$A_i = Q_i$$

ie: (I.2.4) $\Rightarrow$ $$\boxed{d_t\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right\} - \partial_{q_i} T = Q_i(q,\dot{q},t)} \qquad (\text{III}.4.1)$$

C'est ce que l'on appelle l'équation de Lagrange ($\sim$ PFD)

→ Dans le formalisme Lagrangien le point de départ est l'écriture de l'énergie cinétique

C'est un système de n équadiff du 2nd ordre couplées.

5. Principe de d'Alembert

Aussi appellé principe des travaux virtuels.
fut pressenti par D'Alembert (1717-1783)

Pour un système qui n'a pas de vitesse p/r à un réf. galiléen, i.e. $\partial_t \vec{r}_\alpha = \vec{0} \quad \forall \alpha$
alors :

$$(I.2.0) \Rightarrow \quad \vec{v}_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\Big|_t \cdot \dot{q}_i \equiv \vec{v}_\alpha(q,\dot{q})$$

et donc $\quad T \equiv T(q,\dot{q})$

De plus la condition d'équilibre $q = \text{cste}$ impose

$$d_t\{\partial_{\dot{q}_i} T\} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{q} = 0 \Rightarrow \vec{v}_\alpha = \vec{0}$$

et

$$\partial_{q_i} T = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha \, \partial_{q_i} \vec{v}_\alpha = 0$$

d'où $\quad A_i = 0$

et donc à l'équilibre, pour un syst. tel que $\partial_t \vec{r}_\alpha = \vec{0}$ p/r à réf. galiléen, toutes les forces généralisées sont nulles : $\quad A_i = 0 \Rightarrow Q_i = 0$

↳ Cela implique que les forces de contraintes ne travaillent pas

$$\sum_i \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

IV. Multiplicateurs de Lagrange

1. Cadre et définitions

2. Applications en physique statistique