

Mécanique

Oscillateurs

Oscillateur de relaxation : Vase de Tantale

Mon sujet est inspiré de :

Lumbroso, Pb de mécanique des fluides, Dunod 1994, p251.
A plusieurs modif perso! → 14 questions!

Un siphon OAB , tube de verre recourbé de section uniforme $s = 1 \text{ cm}^2$, permet la vidange de l'eau contenue dans un grand vase cylindrique de section $S = 80 \text{ cm}^2$ et de hauteur $H = 50 \text{ cm}$. Le siphon traverse la paroi du vase en A (grâce à une soudure) situé à $h_0 = 3H/5$ au-dessus du fond du vase ; la branche intérieure AO du siphon se termine par une ouverture O au voisinage immédiat du fond du vase ; l'extrémité B de la branche extérieure AB (très rapprochée de AO) est ouverte dans l'atmosphère ; la dénivellation entre A et B est $h = 1,2 \text{ m}$ (Fig. 3.32).

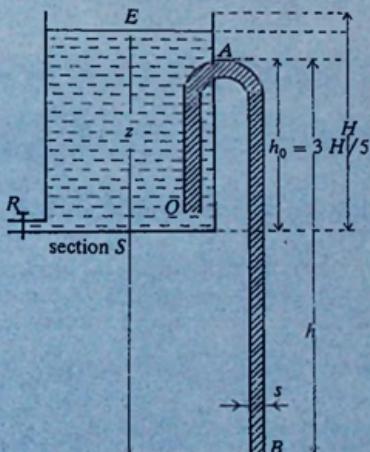


Fig. 3.32.

Le vase de Tantale est alimenté en eau grâce à un robinet de débit volumique réglable D .

- Lorsque la surface libre E de l'eau atteint le niveau de A , le siphon s'amorce.
- Lorsque la surface libre E de l'eau descend jusqu'au niveau de O , le siphon se désamorce et se vide complètement.

On désignera z la hauteur de la surface libre de l'eau au-dessus du niveau de B . On donne $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

- 1) Calculer le débit volumique maximum δ_{\max} du siphon amorcé.
- 2) Le vase de Tantale étant vide, on ouvre à l'instant $t = 0$ le robinet R de débit D constant. On négligera les durées des phénomènes.

nes transitoires, et notamment la durée de l'amorçage et la durée de remplissage du siphon.

a) Ecrire l'équation différentielle du premier ordre en $z(t)$ après l'amorçage du siphon.

b) Quelle est la cote z_l , comptée à partir de B , du niveau limite de la surface libre de l'eau ? Entre quelles limites D_1 et D_2 doit-on régler le débit D pour que le niveau limite z_l existe effectivement dans le vase ?

A quelle valeur D_0 doit-on régler le débit D pour que le niveau limite se situe au niveau du sommet A du siphon ?

3) Montrer que suivant les valeurs du débit D , on peut distinguer quatre régimes d'écoulement (après l'amorçage) qu'on décrira brièvement.

4) Un des régimes décrit en 3) est périodique : calculer pour ce régime, à l'aide de D , D_0 , D_1 , D_2 , g , s , S et h_0 , la durée t_V de vidange du vase et la période T du phénomène.

Tracer le graphe $z(t)$ sur deux périodes pour $D = 0,12 \text{ l/s}$.

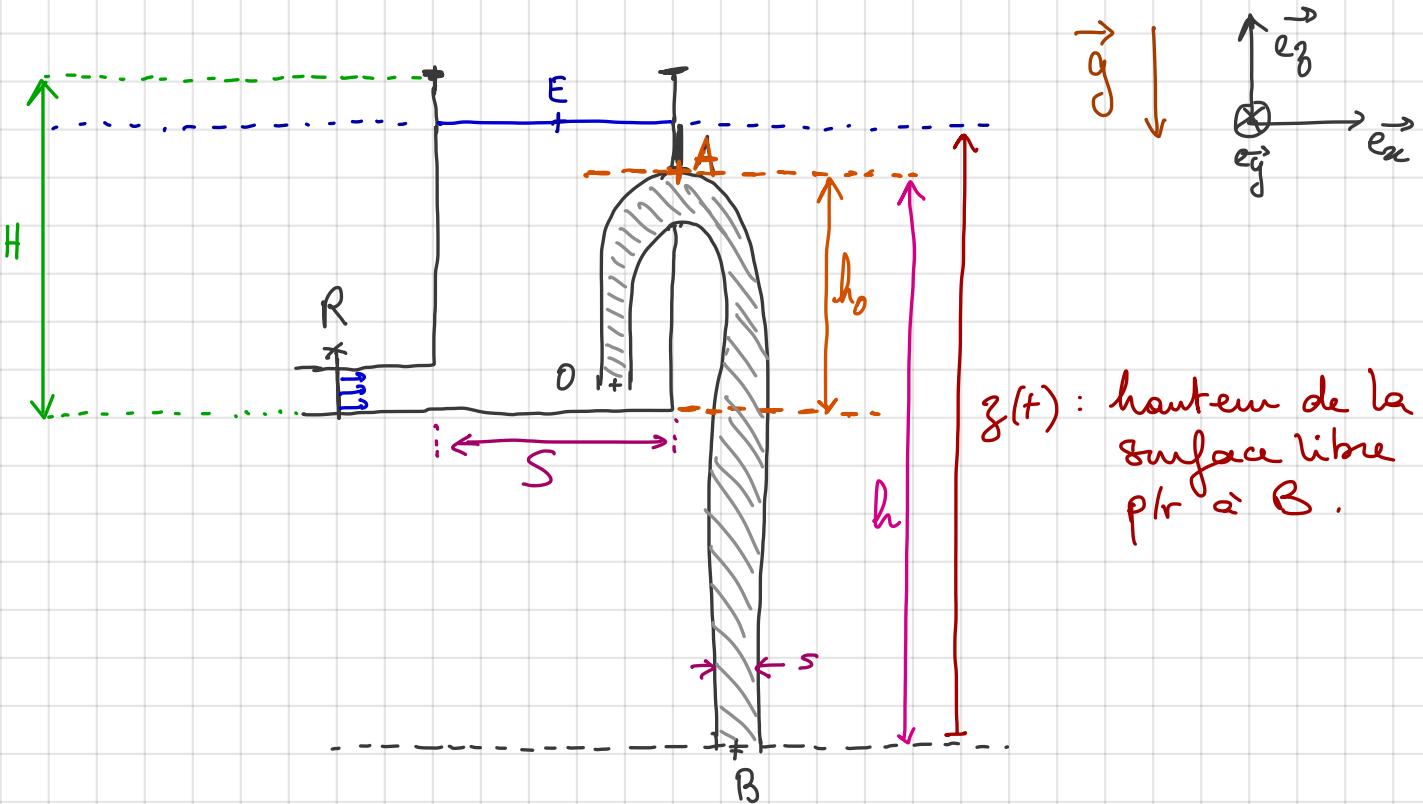
5) Le vase de Tantale étant vide, on introduit dans ce vase un piston cylindrique P d'axe vertical, de hauteur supérieure à H et de section $\sigma = 50 \text{ cm}^2$, animé d'un mouvement sinusoïdal d'équation

$$Z(t) = a \left(2 + \sin \frac{2\pi}{\tau} t \right)$$

où Z est la cote de la base inférieure du piston P par rapport au fond du vase. On donne $a = 6 \text{ cm}$ et $\tau = 7,5 \text{ s}$. Le robinet étant ouvert à l'instant t_0 quelconque, compté à partir de l'instant $t = 0$ où le piston est en position moyenne $Z = 2a$ et monte, calculer le débit $D(t_0)$ de R pour lequel la hauteur d'eau varie périodiquement avec la même période τ que le cylindre. On admettra dans cette question que la durée de vidange du vase est négligeable.

Application numérique : Calculer $D(0)$, $D(\tau/4)$, $D(\tau/2)$ et $D(3\tau/4)$.

- Pré-requis :
- effet siphon (loi de Pascal)
 - théorème de Bernoulli
 - notion de portefeuille de phase d'un SD.
 - notion de cycle limite
 - modélisation syst. bascules d'un Osc Rel.
 - utilisation de python (equadiff NL).



$z(t)$: hauteur de la surface libre plr à B.

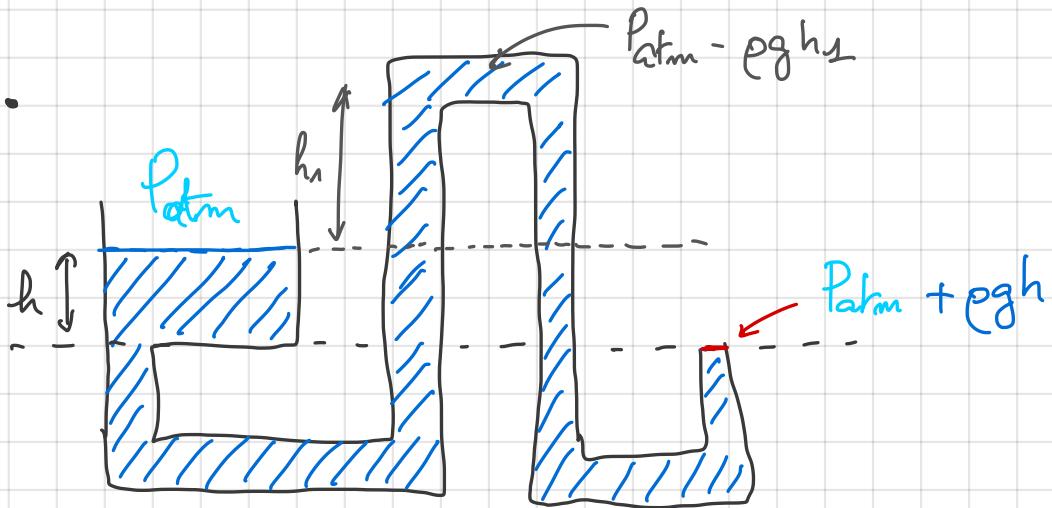
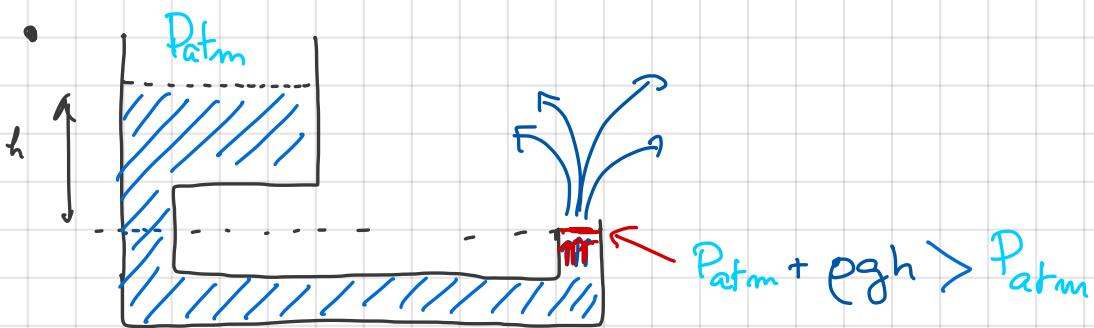
- O est au voisinage immédiat du fond du vase.
- Le vase a une hauteur H et une section S dans un volume $V = HS$.
- Le vase est alimenté en eau par un robinet de débit volumique réglable D [m^3/s].

Observations :

- Lorsque la surface libre E de l'eau atteint le niveau de A, le siphon s'amorce.
- Lorsque E descend jusqu'en O, le siphon se disamorce et se vide complètement.

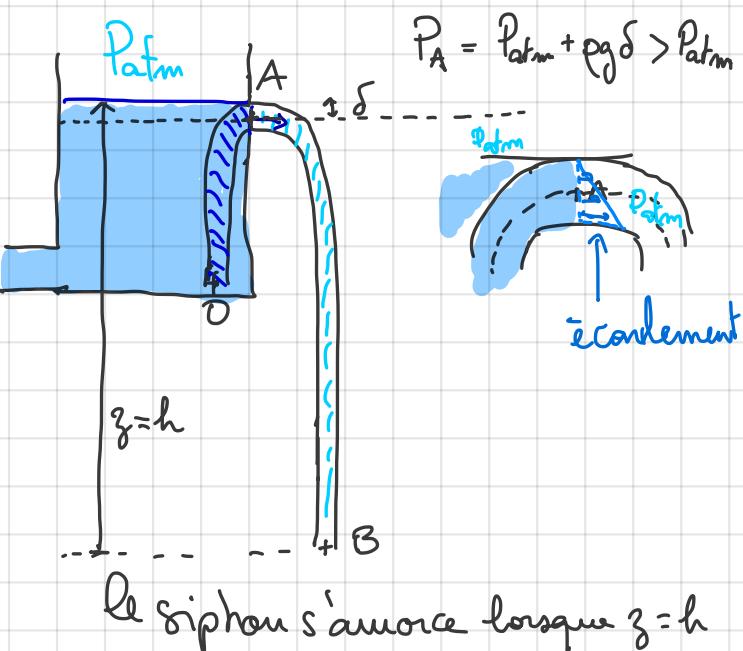
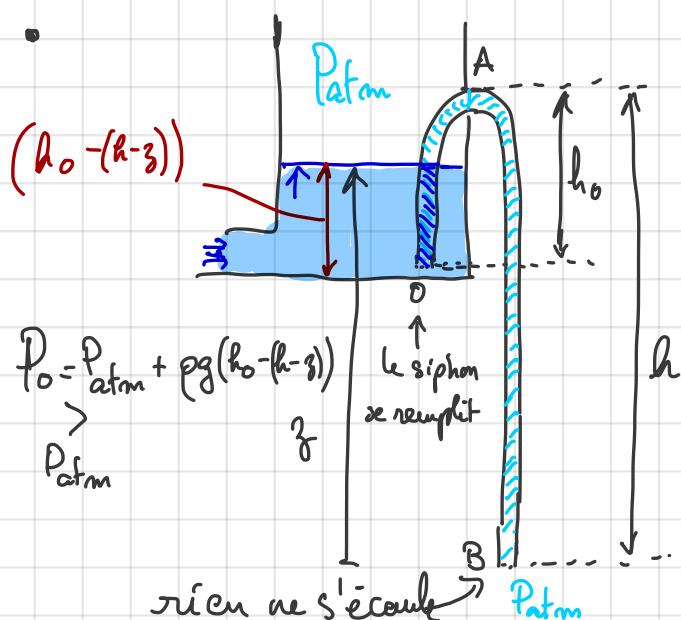
→ Explications :

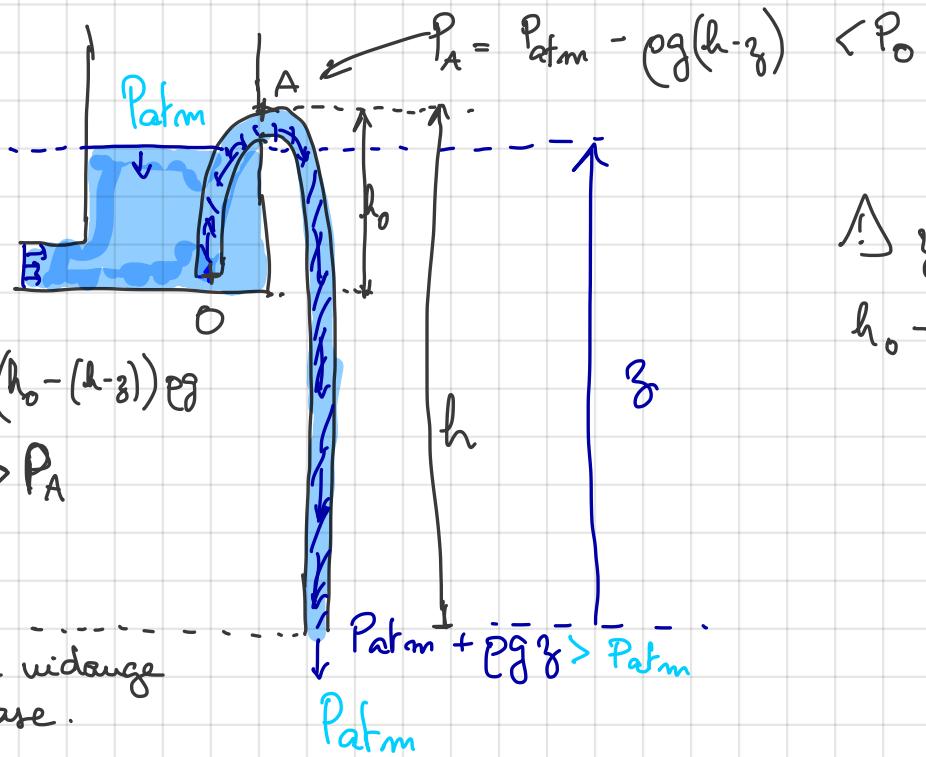
Principe du Siphon



Ce dispositif permet de vider le réservoir malgré le fait que le tuyau d'évacuation passe plus haut que le réservoir.

Cas du vase de Torricelli



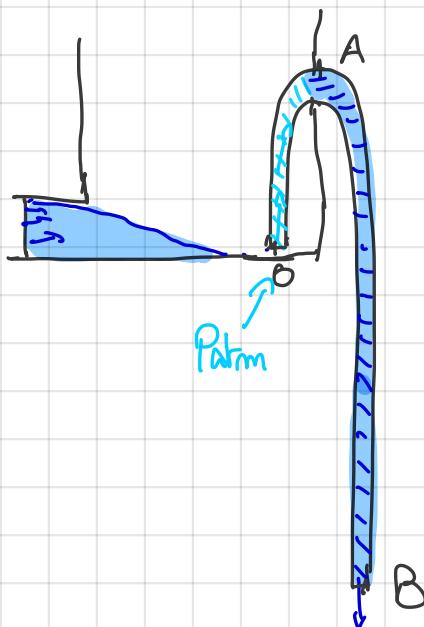


$$\begin{aligned} \Delta z &\in [h-h_0; \dots] \\ h_0 - (h-z) &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= h-h_0 \end{aligned}$$

- Quand $z = h-h_0$, $P_0 = P_{atm}$

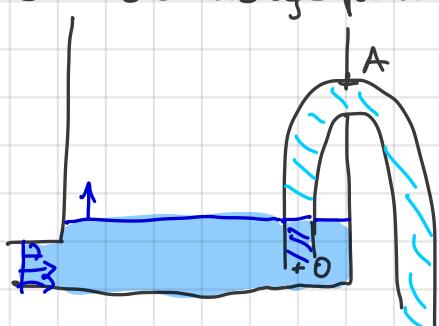
Comme $P_A < P_{atm}$, quand il n'y a plus d'eau, l'air est aspiré en O

\hookrightarrow le siphon se désamorce et se vide complètement



Rq: si D est trop petit, le siphon ne peut jamais se désamorcer

- L'eau arrive de nouveau et il faut attendre que le siphon s'amorce pour voir un échappement d'eau en B.



Rappel: Théorème de Bernouilli (fort)

Dans un écoulement vérifiant les conditions suivantes

- fluide incompressible ($\rho = \text{cste}$) en évolution isovolume
($\Leftrightarrow \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$)
- mouvement irrotationnel et permanent.
- forces de volume dérivant d'un potentiel (Φ)

On a dans tant le champ a' t donné :

$$\frac{P}{\rho} + \frac{\vec{v}^2}{2} + \Phi = \text{cste}$$

Preuve:

Rappel: dérivée particulière d'une fonction scalaire :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \dot{\vec{r}} \\ \vec{\nabla} = \vec{\text{grad}}_r(\cdot) \end{array} \right.$$

dérivée particulière d'un champ de vecteur :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

on : $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = (\vec{\nabla} \vec{B}) \vec{A} - \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})$

en particulier : $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{A}^2}{2} \right) - \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$

Donc : $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) - \vec{v} \times \vec{\text{rot}}(\vec{v})$

PFD en méca flu = Navier - Stokes .

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \vec{\text{grad}}(P) + \eta \vec{\Delta v}$$

forces volumiques forces de pression (volumique) ↑ forces de viscosité (volumique)

En mvt permanent: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

En mvt isovolume: $\vec{\Delta v} = \text{grad}(\underbrace{\text{div}(\vec{v})}_{=0}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{v}))$

$$\vec{\Delta v} = -\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{v}))$$

En mvt uniaxial: $\vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0} : \vec{\Delta v} = \vec{0}$

$$\rightarrow \frac{D\vec{v}}{Dt} = \text{grad}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right)$$

Dans Navier - Stokes devient:

$$\rho \vec{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = \vec{f} - \vec{\text{grad}}(P)$$

si: $\vec{f} = -\vec{\text{grad}}(\Phi)$ et $\rho = \text{cste}$

alors: $\boxed{\vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{2}\rho \vec{v}^2 + \Phi + P\right) = 0 \quad \forall t}$

s'oit $\boxed{\frac{\rho \vec{v}^2}{2} + \Phi + P = \text{cste}_t} \quad \forall t$

constante de l'énergie à un instant donné, dans tout le champ.

Rappel : Théorème de Bernoulli (faible)

Dans un écoulement vérifiant les conditions suivantes :

- ⇒ fluide incompressible ($\rho = \text{cste}$) et **non-visqueux**.
- ⇒ mouvement permanent.
- ⇒ forces de volume dérivant d'un potentiel ($-\bar{\Phi}$).

On a sur une ligne de courant:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{\vec{v}^2}{2} + \bar{\Phi} = \text{cste}$$

Preuve :

PFD : $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \vec{g}\text{rad}(P) + \gamma \Delta \vec{v}$

$\cdot \vec{v}$: $\rho \vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} - \vec{g}\text{rad}(P) \cdot \vec{v} + \gamma \Delta \vec{v} \cdot \vec{v}$

soit puisque $\rho = \text{cste}$:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \right) = - \vec{v} \cdot \nabla \bar{\Phi} - \vec{v} \cdot \nabla P + \gamma \Delta \vec{v} \cdot \vec{v}$$

le fluide est non visqueux donc la viscosité de cisaillement γ est nulle.

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \right)}_{= f} = - \vec{v} \cdot \nabla \bar{\Phi} - \vec{v} \cdot \nabla P$$

or $\frac{Df}{Dt} = \underbrace{\partial_t f}_{=0 \text{ muft permanent}} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \right) = - \vec{v} \cdot \nabla \bar{\Phi} - \vec{v} \cdot \nabla P$$

soit $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \bar{\Phi} + P \right) = 0$

soit : $\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \Phi + P = 0$ une ligne de
courant ($\pm \alpha \vec{v}$) à chaque t.

On considère que l'écoulement de l'eau à travers le siphon correspond aux hypothèses de la formulation forte du théorème de Bernoulli.

1. Rappeler ces hypothèses ainsi que ce théorème

Hypothèses sur l'écoulement d'eau à travers le siphon :

- régime permanent ($\partial_t \vec{v} = \vec{0}$)
- irrotationnel et isovolume ($\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$ et $\text{div}(\vec{v}) = 0$)

Hypothèses sur l'eau : fluide incompressible ($\partial_t P = 0$)

Hypothèse sur les forces volumiques : $\vec{f} = -\nabla \Phi$

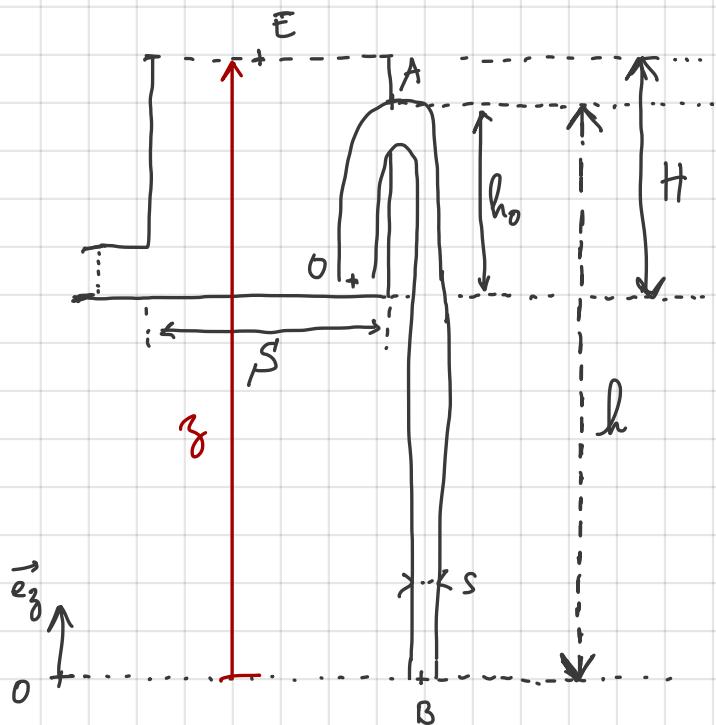
À chaque t dans tout le champ :

$$\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + P + \Phi = \text{cste} \quad (1.1)$$

On suppose de plus que $S \gg s$ de sorte que la vitesse de descente de la surface libre E soit faible devant la vitesse d'écoulement en B .

2. Calcul du débit volumique maximum d_{\max} du siphon amorcé. On déterminera d'abord $d(z)$.

Le débit est max quand le vase est plein: $z = h + H - h_0$.



Les forces volumiques correspondent ici au poids qui dérive de l'énergie potentielle volumique:

$$\vec{f} = \rho \vec{g} = -\rho g \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{f} = -\nabla \underline{\Phi} \text{ avec } \underline{\Phi} = \rho g z.$$

Le Théorème de Bernoulli donne pour le champ \vec{V}^2 :

$$\frac{1}{2} \rho V_E^2 + P_E + \rho g z = \frac{1}{2} \rho V_B^2 + P_B + \rho g z_B \Leftrightarrow (TB)$$

or

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } z = z_{\max} = h - h_0 + H \\ P_E = P_{\text{atm}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} z_B = 0 \\ P_B = P_{\text{atm}} \end{array} \right.$$

$V_E \ll V_B$ car $S \gg s$

d'où $(TB) \Leftrightarrow P_{\text{atm}} + \rho g z_{\max} = \frac{1}{2} \rho V_B^2 + P_{\text{atm}}$

d'où: $V_B^2 = 2g z_{\max} + o\left(\frac{V_E^2}{V_B^2}\right)$

D'où $d_{\max} = V_B(z_{\max})$ s'écrit

$$d_{\max} = s \sqrt{2g(h - h_0 + H)} \quad (2.0)$$

Et de manière générale, si $z \geq z_{\min} = h - h_0$

$$d(z) = s \sqrt{2gz} \quad (2.1)$$

A.N. $H = 50 \text{ cm}$ $h_0 = \frac{3}{5} H$ $h = 1,2 \text{ m}$ $g = 9,81$

et $s = 1 \text{ cm}^2$:

$$\underline{d_{\max} = 5,24 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ m}^3 &= 1000 \text{ L} \\ 10^{-4} \text{ m}^3 &= 0,12 \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow \underline{d_{\max} = 0,524 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Le vase de Tantal est initialement vide, on ouvre à $t=0$ le robinet R de débit D constant.

On néglige la durée de l'amorçage du siphon (durée nécessaire pour que l'eau s'écoule de A à B).

3. Équation différentielle régissant $z(t)$ après l'amorçage du siphon. $\rightarrow (3.1)$.

Raisonnons sous forme de bilan.

À chaque date t , durant dt il entre un volume

$$Ddt,$$

et il sort un volume, ddt , par le siphon où puisque $S \gg s$, $d = s\sqrt{2gz}$ d'après (2.2).

L'incrément de hauteur de la surface libre E, dz

$$\text{vaut donc: } dz = \frac{D - d}{S} dt$$

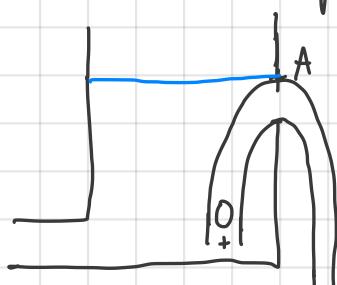
$$\text{Soit: } \frac{dz}{dt} = \frac{D}{S} - \frac{s}{S}\sqrt{2gz}$$

$$\text{ou: } \frac{dz}{dt} + \frac{s}{S}\sqrt{2gz} = \frac{D}{S} \quad (3.1)$$

(3.1) est valide à partir de l'instant t_0 pour lequel:

$$z(t_0) = h.$$

on pose ci-après $t_0 = 0$.



3b. Déterminer la côte z_e du niveau limite de la surface libre de l'eau. En déduire les débits D acceptables pour que z_e existe effectivement dans le vase; on les notera D_1 et D_2 .

Le niveau limite z_e si l'est atteint correspond à l'annulation permanente de la vitesse $\frac{dz}{dt}$ régée par (3.1)

Sait

$$\frac{s}{S} \sqrt{2g z_e} = \frac{D}{S}$$

$$\Leftrightarrow z_e = \frac{D^2}{2g s^2} \quad (3b.1)$$

$$z_{\min} = h - h_0 \quad (\text{fond du vase})$$

$$z_{\max} = H + h - h_0 \quad (\text{vase rempli à ras bord})$$

On doit donc avoir: $h - h_0 < z_e < H + h - h_0$

Sait

$$\underbrace{s \sqrt{2g(h-h_0)}}_{=: D_1} < D < \sqrt{2g(H+h-h_0)} \\ < D < d_{\max} =: D_2$$

$$AN: h = 1,2 \text{ m}$$

$$\left. \begin{array}{l} h_0 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \text{ m} \\ S = 1 \text{ cm}^2 \\ H = \frac{1}{2} \text{ m} \end{array} \right| \Rightarrow D_1 = 0,420 \text{ L/s} \\ D_2 = 0,524 \text{ L/s}$$

3c. On note D_0 le débit du robinet pour lequel $z_f = h$

Comparer D_0 à D_1 et D_2 .

Déduire qu'il existe 4 régimes d'écoulement.

$$h = \frac{D_0^2}{2gs^2} \Leftrightarrow D_0 = s\sqrt{2gh} > D_1 := s\sqrt{2g(h-h_0)}$$

AN: $D_0 = 0,485 \text{ L/s}$

$$D_2 = s\sqrt{2g(h-h_0+h)} \text{ or } h > h_0 \Rightarrow D_2 > D_0$$

On remarque au passage de $D_0 = d(h)$ d'après (2.2)

Ce qui est tout à fait logique: entrée = sortie.

Si $D \in [D_1; d_{\max}]$ il existe un niveau limite z_f
 il y a donc équilibre de la côte z_f de la surface
 libre E à un niveau z_f .

Si $D < D_1$, $z_f < h$ et si $d_{\max} > D > D_0$ $z_f > h$.

Si $D > d_{\max} \rightarrow$ le vase déborde

Si $D < D_1 \rightarrow z_f \neq z_f$, le vase se vide et se re-remplit
 \rightarrow régime périodique.

	0	D_1	D_0	d_{\max}
D	oscillation de $z(t)$	$\exists z_f < h$	$\exists z_f = h$	$\exists z_f > h$

$\underbrace{\quad}_{\text{équilibre de } z(t) \text{ en } z_f}$

\rightarrow déborde.

On va chercher à adimensionnaliser cette équation pour la mettre sous une forme canonique.

On introduit une constante z_0 que l'on déterminera + tard.

et on note : $\Theta = \frac{z}{z_0}$

4. Déterminer la constante de temps τ qui apparaît dans (3.1) et donner la forme adimensionnée de (3.1)

en fonction de $\Sigma := \frac{S^r}{S} \xrightarrow{(4.0)} 1$ et de $r = \frac{D}{d(z_0)}$ (4.1)

$$(3.1) \Leftrightarrow \frac{dg}{dt} + \frac{s}{S} \sqrt{2g} g = \frac{D}{s}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Theta}{dt} + \frac{1}{\Sigma} \sqrt{\frac{2g}{z_0}} \Theta = \frac{D}{S z_0}$$

on voit apparaître $\sqrt{\frac{2g}{z_0}}$ qui a la dimension de l'inverse d'une durée :

$$\tau := \sqrt{\frac{z_0}{2g}} \quad (4.2)$$

On pose alors : $w = \frac{t}{\tau}$,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dw} \cdot \frac{dw}{dt} = \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dw}$$

$$(3.1) \Rightarrow \frac{1}{\tau} \frac{d\Theta}{dw} + \frac{1}{\Sigma} \cdot \frac{1}{\tau} \sqrt{\Theta} = \frac{D}{S z_0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Theta}{dw} + \frac{1}{\Sigma} \sqrt{\Theta} = \frac{D\tau}{S z_0}$$

Or : $\frac{D\tau}{S z_0} = \frac{D\sqrt{z_0}}{S z_0 \sqrt{2g}} = \underbrace{\frac{Ds}{S \sqrt{2g z_0}}}_{d(z_0)} = \frac{r}{\Sigma}$

et $\overset{\circ}{X} = dw/dt$:

$$\overset{\circ}{\Theta} + \frac{1}{\Sigma} \sqrt{\Theta} = \frac{r}{\Sigma} \quad (4.3)$$

5. Montrer que la forme adimensionnée de (3.1) peut s'écrire sous la forme canonique :

$$x = -\varepsilon h(n, \dot{x})$$

où l'on précisera h et x .

Posons $x^2 = \theta \Rightarrow \sqrt{\theta} = x$ et $\dot{\theta} = 2x\dot{x}$

$$(4.3) \Rightarrow 2x\dot{x} + \frac{1}{\varepsilon}x = \frac{r}{\varepsilon}$$

soit $x = \varepsilon \left(\frac{r}{\varepsilon} - 2x\dot{x} \right)$

$$x = -\varepsilon \left(2x\dot{x} - \frac{r}{\varepsilon} \right)$$

$$x = -\varepsilon h(n, \dot{x}) \quad (5.1)$$

avec $h(n, y) = 2xy - \frac{r}{\varepsilon} \quad (5.2)$

6.a. Un des régimes décrit en 3c est périodique. On se place avec D dans ce régime et on pose $z_0 = h$.

→ En déduire alors une résolution approchée de (3.1) (on utilisera la forme canonique (5.1) à bon escient, et on posera t_0 la date de début de la vidange.)

$$d(z_0 = h) = D_0 \implies r = \frac{D}{D_0} \quad (6.1)$$

Si : $D \ll D_0$ alors $r \ll 1 \Rightarrow 2\omega \dot{z} + \frac{1}{\varepsilon} z = \frac{r}{\varepsilon} \underset{\approx}{\iff} 2\omega \dot{z} + \frac{z}{\varepsilon} = 0 \quad (6.2)$

Sait : $\dot{z} = -\frac{1}{2\varepsilon} z \quad \rightarrow \int dz$

Sait : $z = -\frac{1}{2\varepsilon} w + C$

i.e. $\sqrt{\theta} = -\frac{1}{2\varepsilon} w + C$

i.e. $\sqrt{\frac{z}{h}} = -\frac{1}{2\varepsilon} \frac{w}{t} + C \Leftrightarrow z(t) = h \left(C - \frac{w}{2\varepsilon t} \right)^2$

or : $z(t_0) = h$ (le vase se vide, le siphon s'amorce)

$$\Rightarrow h = h \left(C - \frac{t_0/\varepsilon}{2\varepsilon} \right)^2 \Leftrightarrow C = 1 + \frac{t_0/\varepsilon}{2\varepsilon}$$

d'où : (6.3) $z(t) = h \left(1 + \frac{t_0 - t}{2\varepsilon t} \right)^2$, $t \in [t_0; t_0 + t_v]$
phase de vidange

C sont des arcs de parabole ($z \propto t^2$).

puisque : $\frac{1}{\varepsilon t} = \sqrt{2g}/\varepsilon h = \frac{s\sqrt{2g}}{s\sqrt{h}}$, c'est aussi :

$$z(t) = \left(\sqrt{h} + \frac{s\sqrt{2g}}{s\sqrt{h}} (t_0 - t) \right)^2, \quad t \in [t_0; t_0 + t_v] \quad (6.4)$$

6.b. Donner l'interprétation de τ pour ce choix $z_0 = h$.

Interprétation de τ :

$$d(h) = \sqrt{2gh} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{h}{2g}} = \frac{8h}{d(a)}$$

C'est la durée de vidange du vase lorsqu'il est rempli jusqu'à $g = h$ sans débit entrant. On s'attend donc à ce que la durée de vidange réelle soit plus longue !.

7. Que vaut la durée de vidange τ_{vapp} dans cette approximation ? AN avec $h = 1,2 \text{ m}$ $b = \frac{1}{4} \text{ m}$ $\frac{s}{s} = 80$

$$z(t) = h \left(1 + \frac{t_0 - t}{2\varepsilon\tau}\right)^2$$

Posons $t_0 = 0$

$$\begin{aligned} z(t_0 + \tau_v) = h - h_0 &\Leftrightarrow h \left(1 - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\tau_v}{\tau}\right)^2 = h - h_0 \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\tau_v}{\tau}\right) = \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} =: r_{\lim} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\tau_{vapp} = 2\varepsilon\tau(1 - r_{\lim})} \end{aligned}$$

Soit $\tau_{vapp} = 2 \cdot \frac{s}{s} \sqrt{\frac{h}{2g}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}}\right)$

τ_{vapp} ne dépend pas de D (logique puisque q est négligé)

AN: $\tau_{vapp} = 5,30 \text{ s}$

8 . On reste dans le cadre du régime périodique D(P₁) .

Déterminer la durée de vidange T_V en ne faisant aucune approximation dans l'équation différentielle pour $z(t)$.

On utilisera l'équation canonique de la QS.

On donnera le résultat en fonction de $r = \frac{D_1}{D_0}$ et $r_{\text{min}} = \frac{D_1}{D_0}$ et de $\tau = \sqrt{\frac{h}{2g}}$. Puis en fonction de S , s , D_1 et D_0 . AN avec $D=0,12\text{m}$

$$(3.1) \Leftrightarrow x + \varepsilon(2x\dot{x} - q) = 0 \Leftrightarrow 2\dot{x} = \left(\frac{r}{x} - 1\right)\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 - \frac{r}{x}\right)$$

d'auⁿ:
$$\frac{dx}{1 - \frac{r}{x}} = -\frac{1}{2\varepsilon} dw$$
 (séparation des variables)

On rappelle que: $x = \sqrt{\theta} = \sqrt{\frac{z}{a}}$, et $w = \frac{t}{\tau}$.

La durée de vidange: $T_V = t_0 + t_V - t_0$, correspond au passage de: $z = h$ à $z = h - h_0$

sait au passage de: $x = 1$ à $x = \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}}$

donc:

$$-\frac{1}{2\varepsilon} \int_{w_0 = \frac{t_0}{\tau}}^{w_V = \frac{t_0 + T_V}{\tau}} dw = \int_{x=1}^{x=\sqrt{1-\frac{h_0}{h}}} \frac{dx}{1 - \frac{r}{x}}$$

Calculons: $\int \frac{dx}{1 - \frac{r}{x}} =: J$

$$J = \int \frac{dx}{x-r} = \int \left(1 + \frac{r}{x-r}\right) dx = \int dx + r \int \frac{dx}{x-r}$$

$$J = [x]_{1}^{\sqrt{1-\frac{h_0}{h}}} + a \left[\ln(x-r) \right]_{1-\frac{h_0}{h}}^{\sqrt{1-\frac{h_0}{h}}}$$

$$J = \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} - 1 + a \ln \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} - r}{1 - r} \right)$$

$$\text{or : } \frac{1}{2\varepsilon} \int dw = -\frac{t_v}{2\varepsilon\tau}$$

$$w_0 = \frac{t_0}{\tau}$$

$$\text{donc : } -\frac{t_v}{2\varepsilon\tau} = \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} - 1 + r \ln \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} - r}{1 - r} \right)$$

$$\Rightarrow t_v = 2\varepsilon\tau \left[1 - \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} + r \ln \left(\frac{1 - r}{\sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} - r} \right) \right] \quad (8.1)$$

$$W_r(r) = 2\varepsilon \left(1 - r_{\min} + r \ln \left(\frac{1 - r}{r_{\min} - r} \right) \right), \quad r < r_{\min} \quad (8.2)$$

$$\frac{t_v}{\tau} = \frac{D_1}{D_0} = \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}}$$

$$\frac{D_1}{D_0} = \frac{s \sqrt{2g(h-h_0)}}{s \sqrt{2gh}} = \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}}$$

On peut exprimer le résultat en fonction de S' , s , D_0 , D_1 :

$$t_v = 2\varepsilon\tau \left(1 - \frac{D_1}{D_0} + \frac{D}{D_0} \ln \left(\frac{1 - \frac{D}{D_0}}{\frac{D_1}{D_0} - \frac{D}{D_0}} \right) \right)$$

$$t_v = \frac{2\varepsilon\tau}{D_0} \left(D_0 - D_1 + D \ln \left(\frac{D_0 - D}{D_1 - D} \right) \right)$$

$$\text{or : } \varepsilon\tau = \frac{S'}{s} \sqrt{\frac{h}{2g}} = \frac{S' h}{s \sqrt{2gh}} = \frac{S' h}{D_0} \Rightarrow \frac{\varepsilon\tau}{D_0} = \frac{S'}{2s^2 g}$$

$$\text{donc : } t_v = \frac{S'}{g s^2} \left(D_0 - D_1 + D \ln \left(\frac{D_0 - D}{D_1 - D} \right) \right) \quad (8.3)$$

AN:

$$\varepsilon = 80 \quad \tau = \sqrt{\frac{h}{2g}} = 0,247 \quad \frac{h_0}{h} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{1,2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\hookrightarrow \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = r_{\min}$$

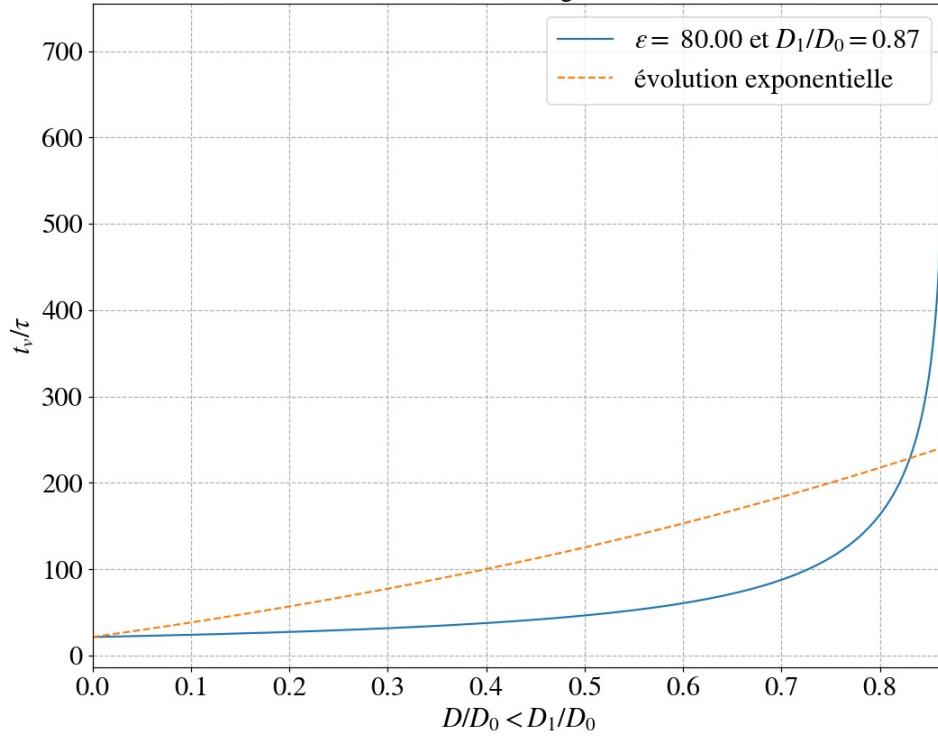
Pour $D = 0,120 \text{ L/S}$

$$\text{Soit pour } \frac{D}{D_0} = \frac{0,120}{0,485} = 0,247, \quad t_v = 2 \times 80 \times 0,247 \left(1 - 0,866 + 0,247 \right)$$

$$\text{avec } \frac{D_1}{D_0} = \frac{0,120}{0,485} = 0,247$$

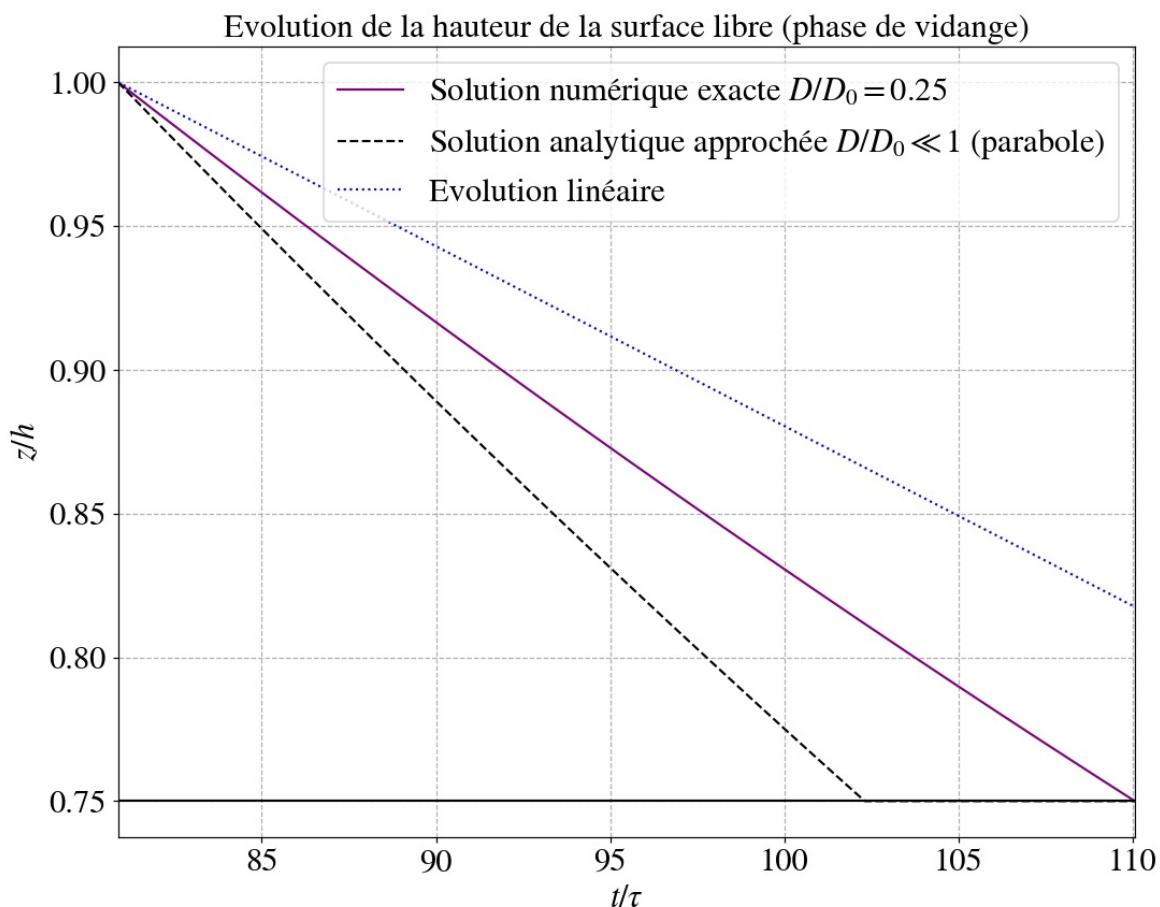
$$\underline{t_v = 7,25}$$

Evolution de la durée de vidange en fonction du débit



9. Représenter la solution approchée obtenue en 6 et la solution exacte numérique. Que constate-t-on?

On examinera l'écart entre $\tau_{v\text{approx}}$ et τ_v en fonction de r .

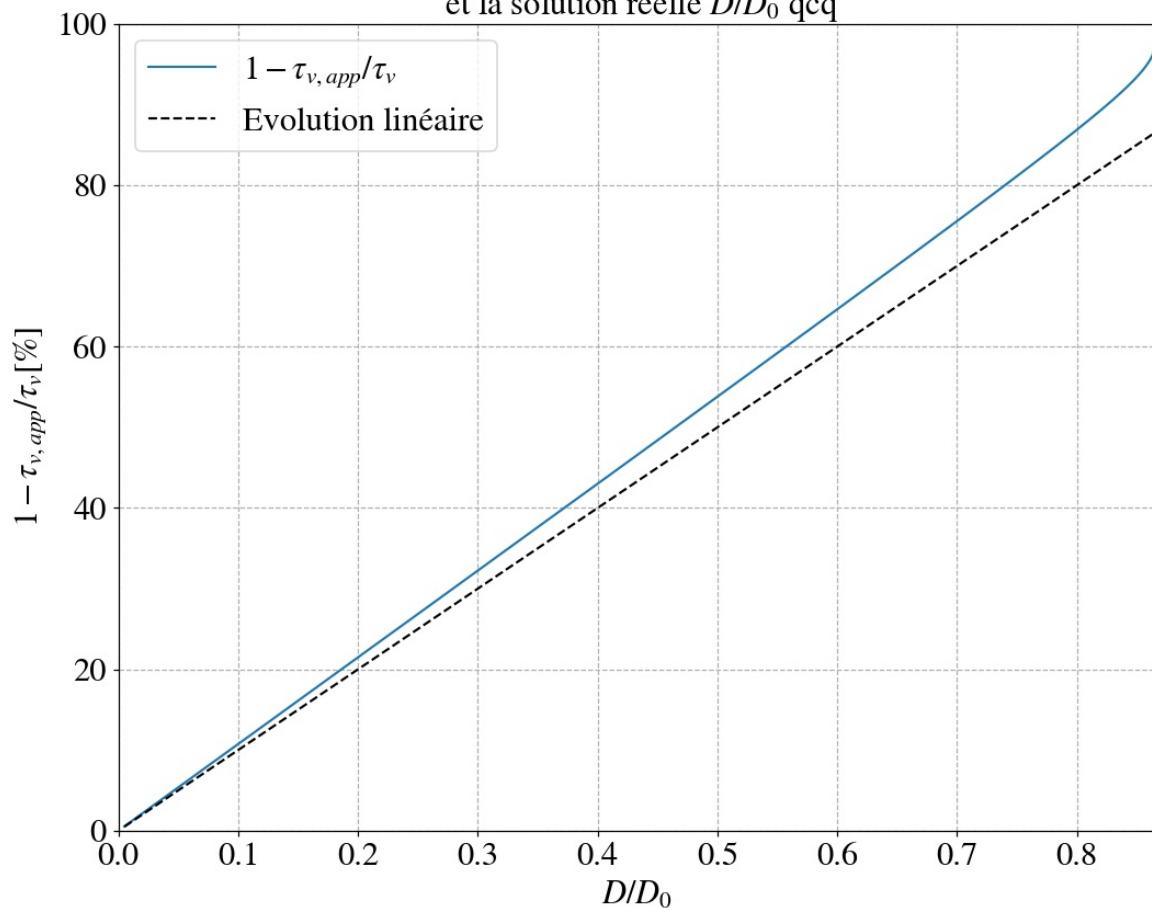


On remarque qu'il y a un écart significatif entre la solution approchée et la solution exacte ce qui est attendu puisque D n'est pas < \ll devant D_0

on a :
$$\frac{\tau_{v\text{approx}}}{\tau_v} = \frac{2\varepsilon\tau(1-r_{\text{lim}})}{2\varepsilon\tau(1-r_{\text{lim}} + r \ln(\frac{1-r}{r_{\text{lim}}-r}))}$$

$$\frac{\tau_{v\text{approx}}}{\tau_v} = \frac{1}{1 + \frac{r}{1-r_{\text{lim}}} \ln\left(\frac{1-r}{r_{\text{lim}}-r}\right)}$$

Ecart sur la durée de vidange entre la solution approchée $D/D_0 \ll 1$
et la solution réelle D/D_0 qcq



L'écart entre l'approximation et la réalité
croît linéairement pour des faibles valeurs de r .

10. On s'intéresse maintenant à la détermination de la période T du phénomène.

Déterminer la durée de remplissage t_R du vase en déduire $z(t)$ pour $t \in [0; t_R]$

Déduire $W_R(r) := \frac{t_R}{\tau}$ et comparer à $W_r(r)$. [$r := \frac{D}{D_0}$]

Pour $z \in [h-h_0; h]$, le siphon n'est pas amorcé et donc : $\frac{dz}{dt} = \frac{D}{S}$

$$\text{soit } z(t) = \frac{D}{S} t + C_0$$

$$z(0) = h - h_0 = C_0$$

$$\Rightarrow z(t) = h - h_0 + \frac{D}{S} t \quad \forall t \in [0; t_R] \quad (10.1)$$

$$\Rightarrow z(t_R) = h \Leftrightarrow \frac{D}{S} t_R = h_0 \Leftrightarrow t_R = \frac{h_0 S}{D} \quad (10.2)$$

$$\underline{\text{AN}}: t_R = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{80 \cdot 10^{-4}}{0.12 \cdot 10^{-3}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{80}{1,2} = \frac{24}{12} = \frac{240}{12}$$

$$\underline{t_R} = \frac{2 \times 12 \times 10}{12} = 20 \text{ s}$$

Sous forme adimensionnée :

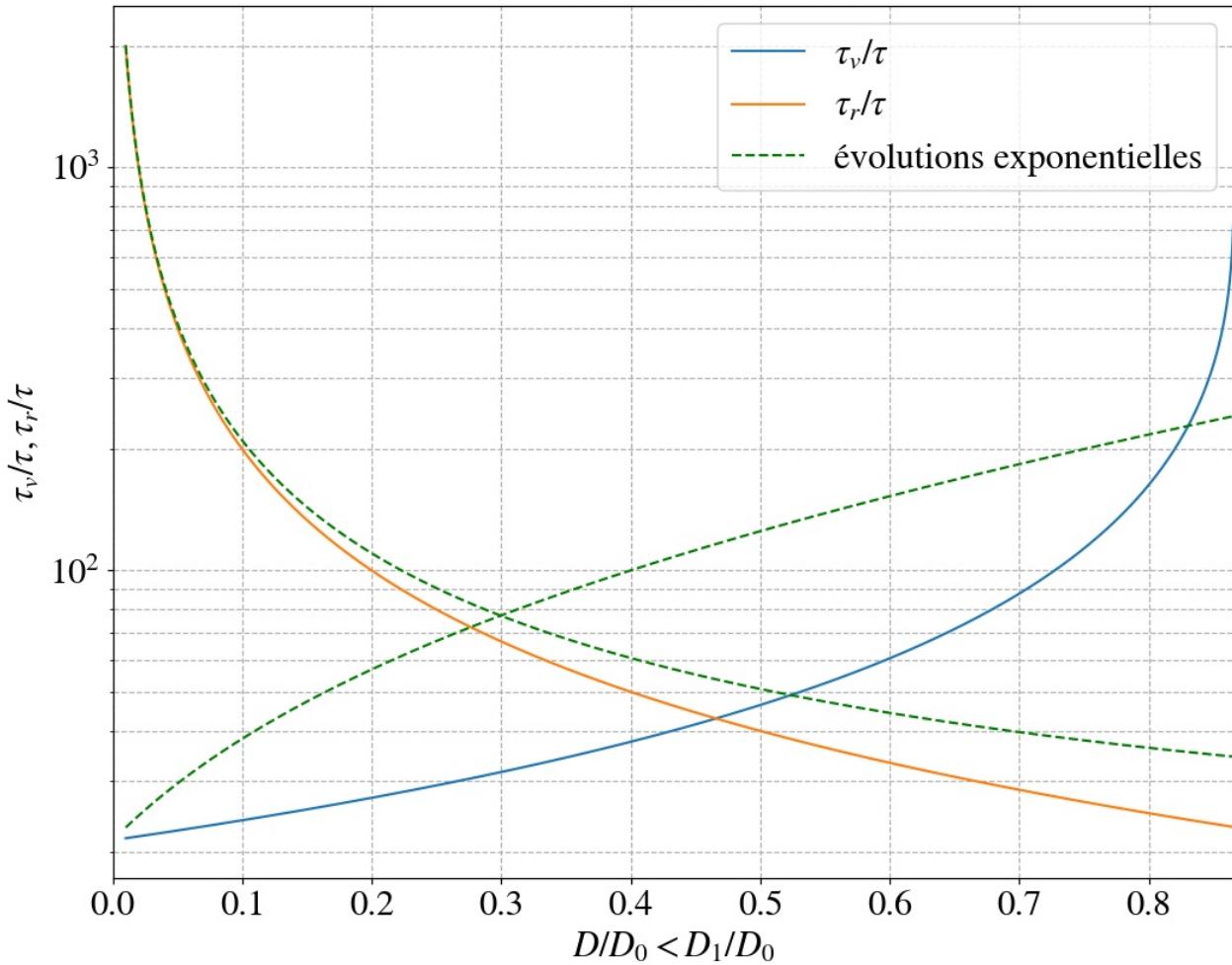
$$t_R = \tau \frac{h_0}{h} \cdot \frac{S' h}{D \tau}$$

$$\text{or } \frac{D \tau}{S' h} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{D}{D_0} = \frac{r}{\varepsilon} \text{ et } \frac{h_0}{h} = 1 - r_{\text{lim}}^2$$

$$\Rightarrow t_R = \tau (1 - r_{\text{lim}}^2) \frac{\varepsilon}{r}$$

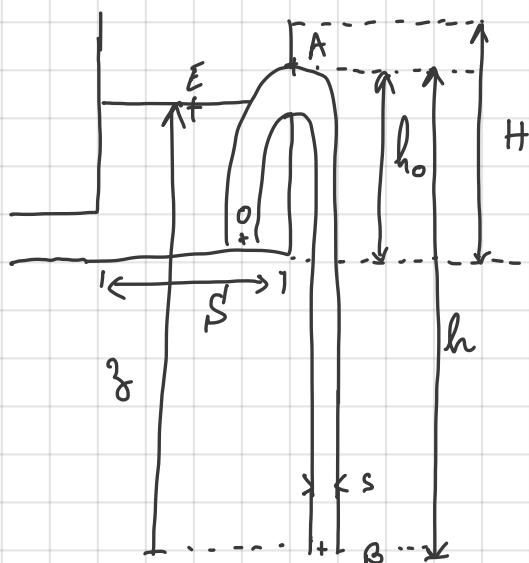
$$\Rightarrow W_R(r) = (1 - r_{\text{lim}}^2) \frac{\varepsilon}{r} \quad (10.3)$$

Evolution de τ_v et τ_r en fonction du débit D
 $\varepsilon = 80.00$ et $D_1/D_0 = 0.87$



$$\left\{ \begin{array}{l} W_r(r) = 2\varepsilon \left(1 - r_{lim} + r \ln \left(\frac{1-r}{r_{lim}-r} \right) \right) \quad (8.2) \\ W_a(r) = \varepsilon \cdot \frac{1-r_{lim}^2}{r} \end{array} \right.$$

avec : $r := \frac{D}{D_0}$, $\varepsilon := \frac{\mu^2}{s}$, $r_{lim} = \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} = \frac{D_1}{D_0}$



11. Déterminer la période T d'une oscillation de relaxation. Analyser sa dépendance avec $\text{ret } \varepsilon$.

$$T := \tau_Q + \tau_V$$

soit : $T = \varepsilon \tau \left[\frac{1 - r_{\text{lim}}^2}{r} + 2(1 - r_{\text{lim}} + r \ln \left(\frac{1-r}{r_{\text{lim}}-r} \right)) \right]$

ou : $W := \frac{T}{\tau} = 2\varepsilon \left[\frac{1 - r_{\text{lim}}^2}{2r} + 1 - r_{\text{lim}} + r \ln \left(\frac{1-r}{r_{\text{lim}}-r} \right) \right]$

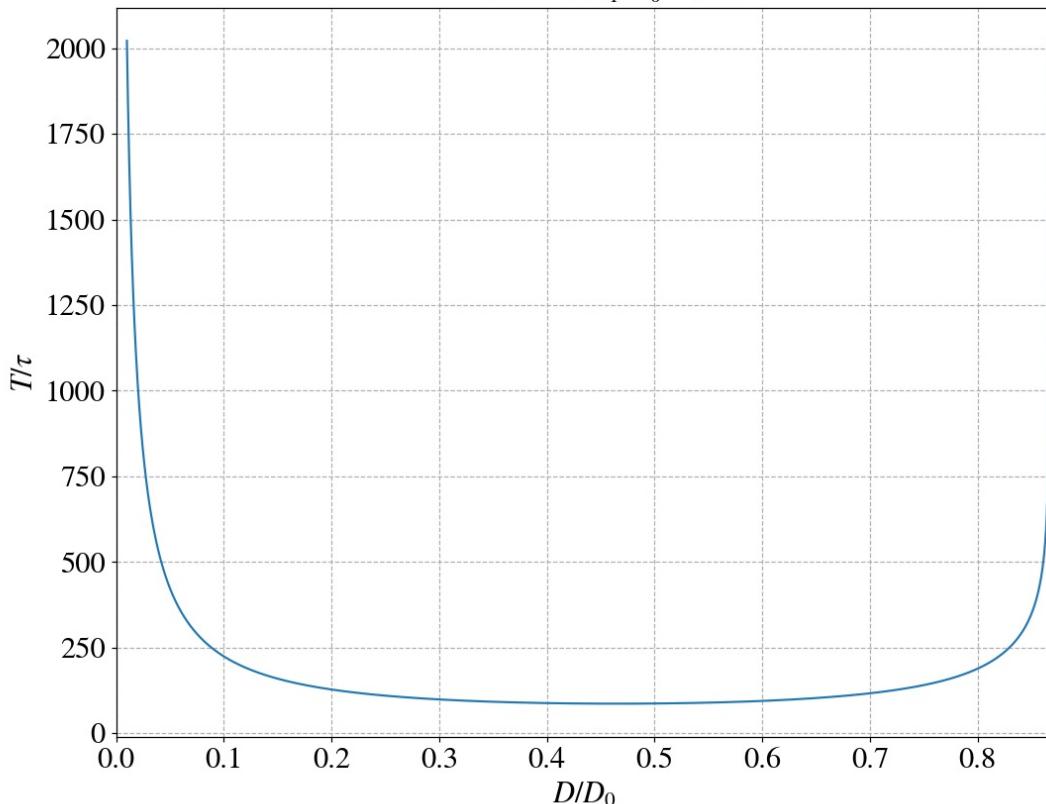
ou encore : $T = \frac{h_0 S'}{D} + \frac{S'}{g s^2} \left(D_0 - D_1 + D \ln \left(\frac{D_0 - D}{D_1 - D} \right) \right)$

Application numérique : $T = 20 + 7,2 = 27,2 \text{ s}$

On remarque une propriété importante : $T \propto \varepsilon$

$$[\varepsilon h(n, n^*) + \alpha = 0]$$

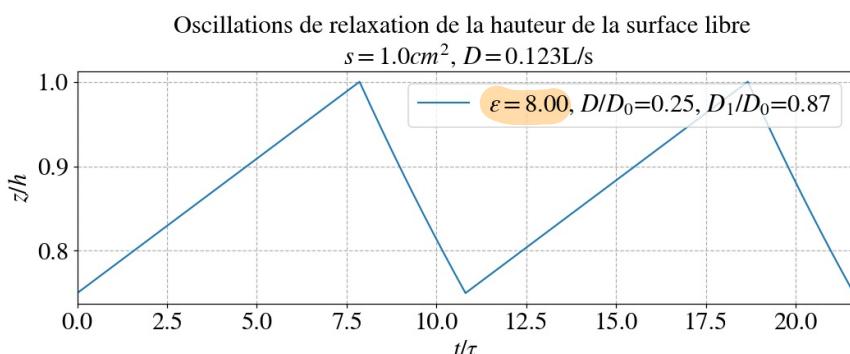
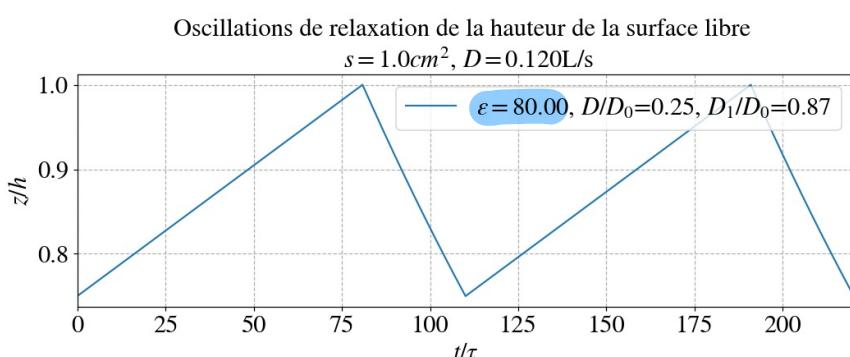
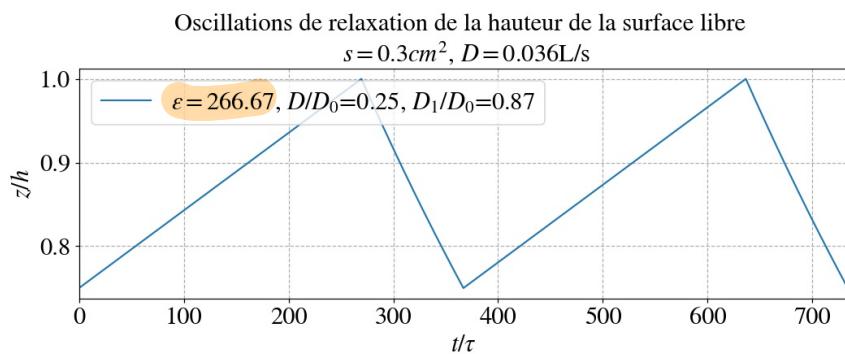
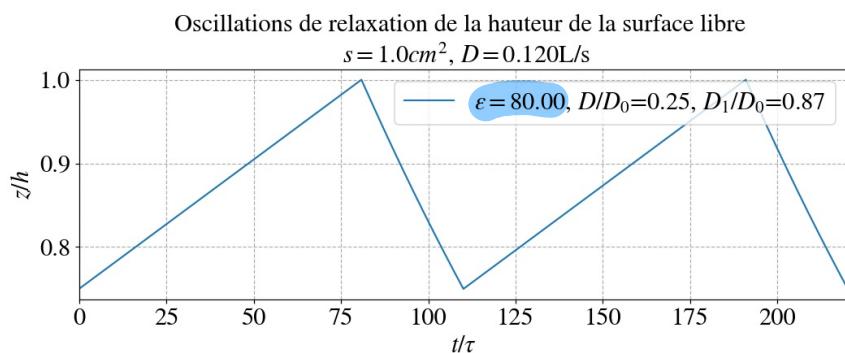
Evolution de la période des oscillations avec le débit
 $\varepsilon = 80.00$ et $D_1/D_0 = 0.87$



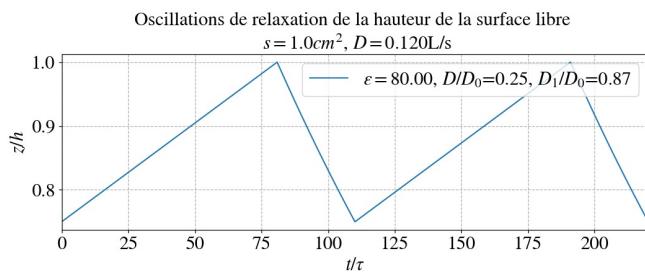
12. Représenter deux oscillations de relaxations.

Analyser l'influence de $\varepsilon = \frac{E}{s}$ et celle de $r = \frac{D}{D_0}$.

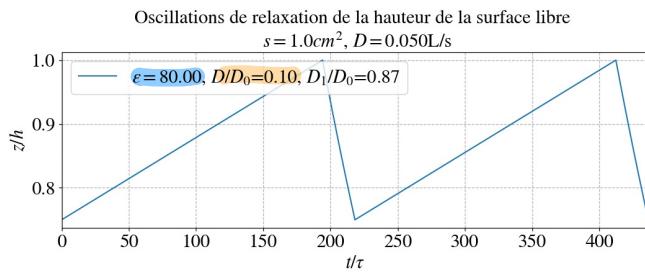
On remarque que ε ne modifie pas la forme des oscillations à r fixé. Il influe juste sur T .



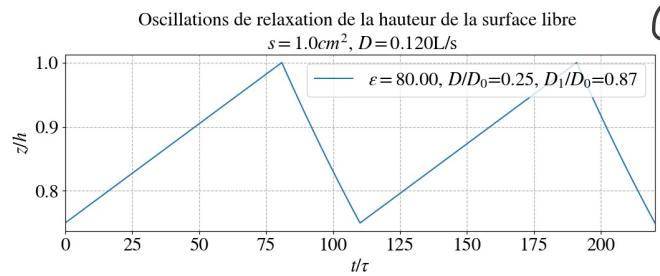
r modifie la forme des oscillations.



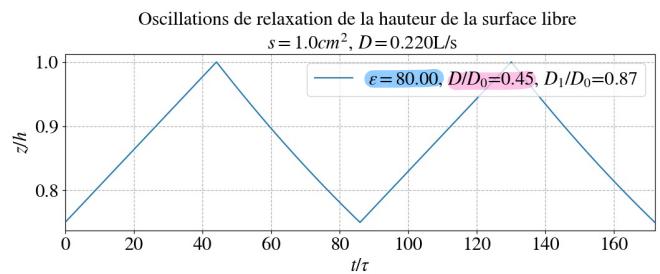
(1)



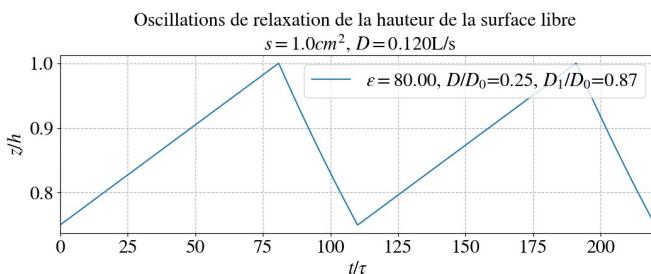
$$r = 0,10$$



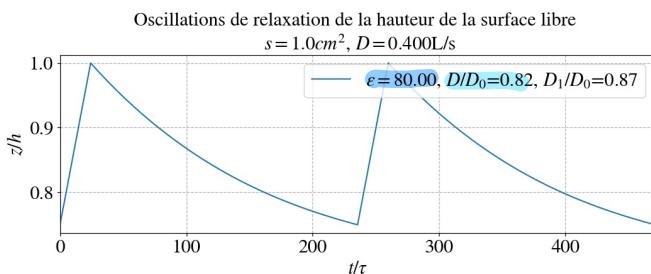
(2)



$$r = 0,45$$

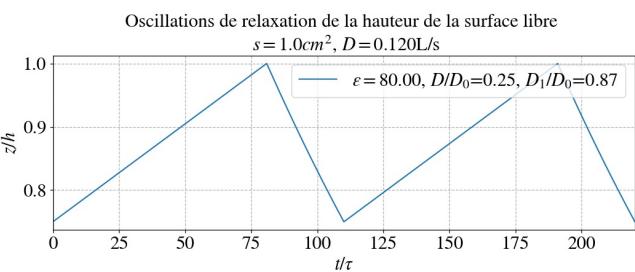


(3)

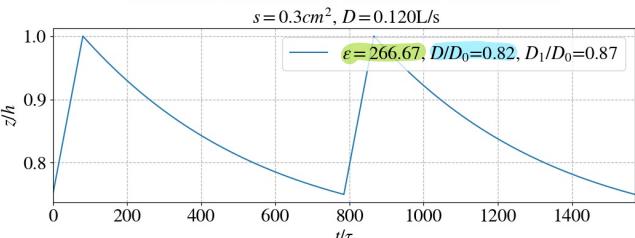


$$r = 0,82$$

On vérifie bien que ϵ n'a pas d'influence sur la forme des oscillations : ici $r = 0,82$ et $\epsilon = 266,67 \neq 80$ on retrouve le résultat de (3)



Oscillations de relaxation de la hauteur de la surface libre



13. Représenter le portrait de phase des oscillations de relaxation et analyser l'influence de ϵ et de r sur celui-ci.

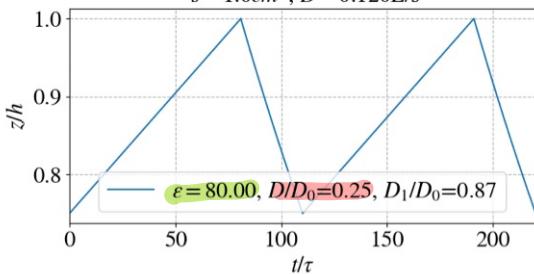
$$\dot{\theta} = \begin{cases} \frac{r}{\epsilon} & \forall t \in [0; t_R] \\ \frac{1}{\epsilon}(r - \sqrt{\theta}) & \forall t \in [t_R; t_R + t_V] \end{cases}$$

réglage périodique
↓
cycle limite

On remarque que ϵ influence la taille du cycle limite : plus ϵ ↑ et plus la taille du CL ↓.

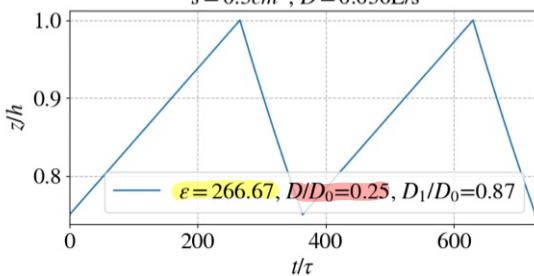
Oscillations de relaxation de la hauteur de la surface libre

$$s = 1.0 \text{ cm}^2, D = 0.120 \text{ L/s}$$



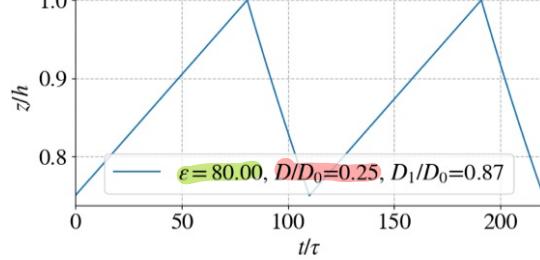
Oscillations de relaxation de la hauteur de la surface libre

$$s = 0.3 \text{ cm}^2, D = 0.036 \text{ L/s}$$



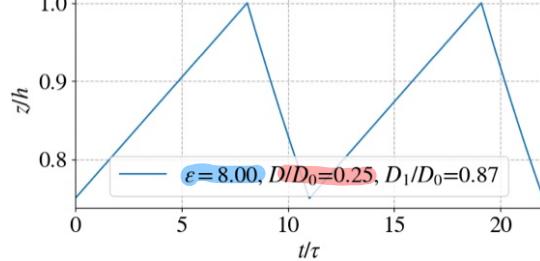
Oscillations de relaxation de la hauteur de la surface libre

$$s = 1.0 \text{ cm}^2, D = 0.120 \text{ L/s}$$

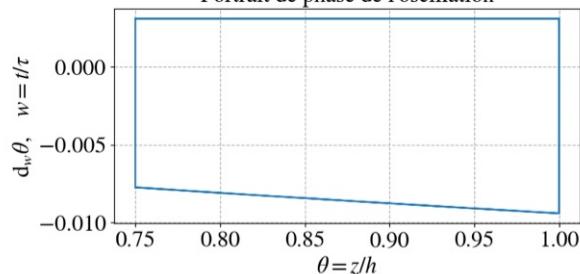


Oscillations de relaxation de la hauteur de la surface libre

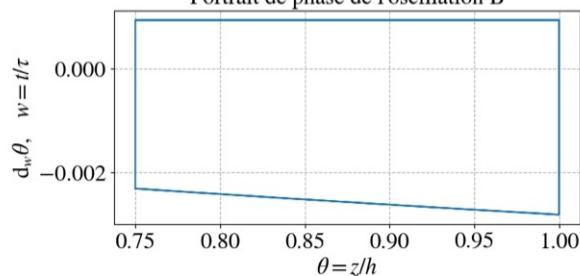
$$s = 1.0 \text{ cm}^2, D = 0.120 \text{ L/s}$$



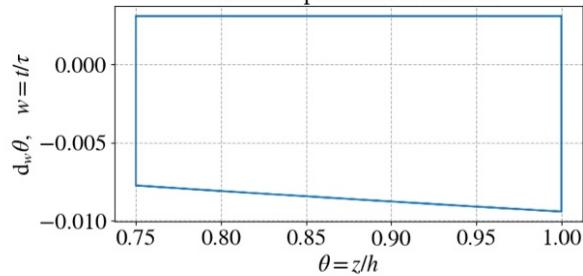
Portrait de phase de l'oscillation



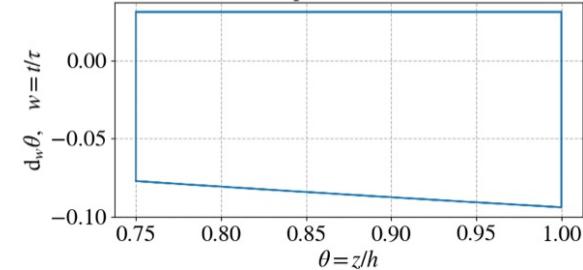
Portrait de phase de l'oscillation B



Portrait de phase de l'oscillation



Portrait de phase de l'oscillation B



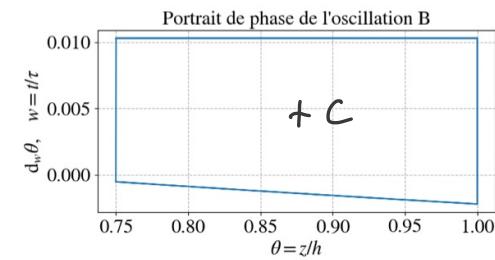
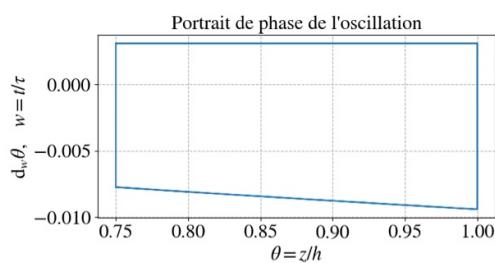
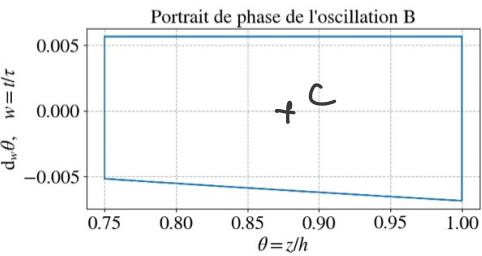
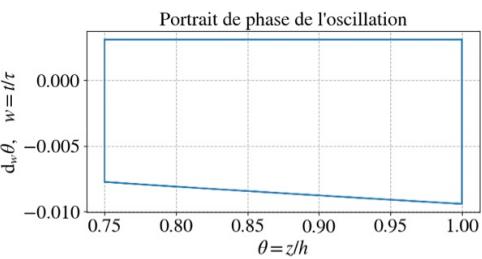
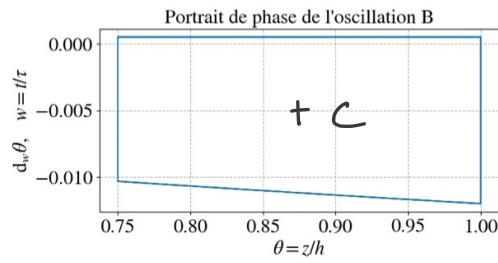
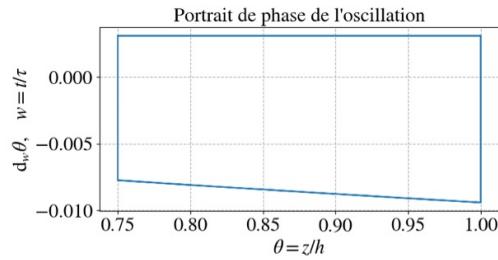
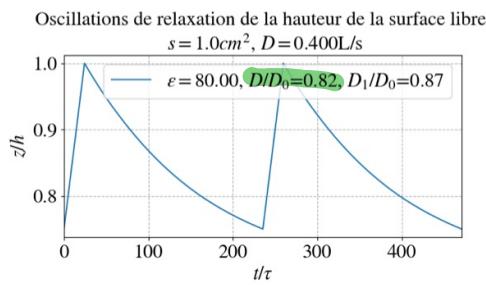
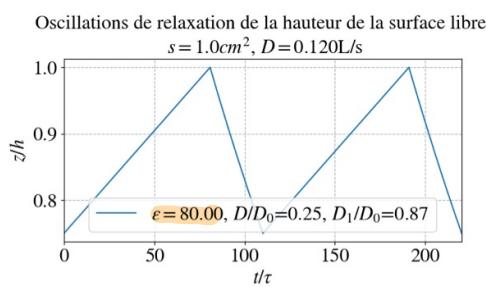
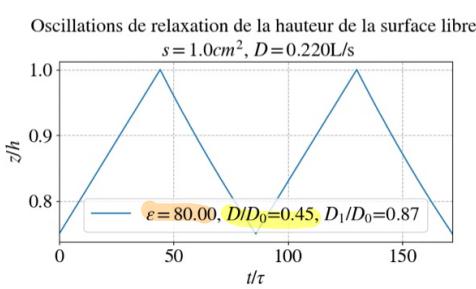
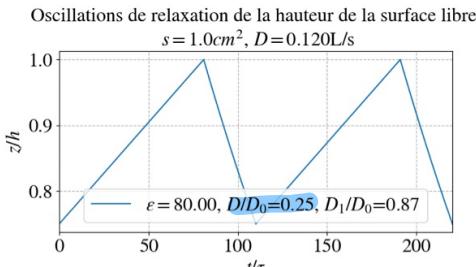
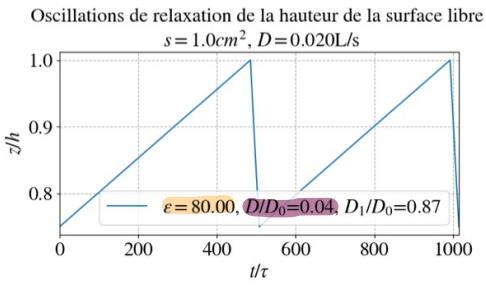
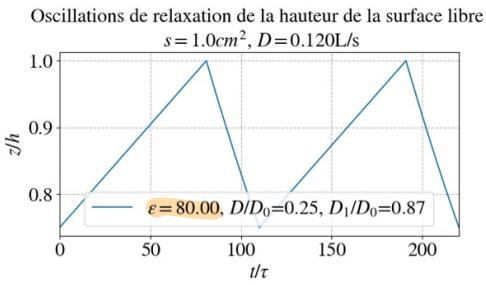
$\epsilon \sim 3 \times 10$

$\sim \frac{|d_w \theta|}{3}$

$\epsilon \sim 10$

$\sim \frac{|d_w \theta|}{10}$

On remarque que r influence sur la position du cycle limite. Plus $r \uparrow$ plus $y_c \leftarrow$ centre du CL.



$y_c < 0$

$y_c = 0$

$y_c > 0$

14. Proposer une modélisation type systèmes boulés pour décrire les oscillations de relaxation de la surface libre du vase de Tantale.

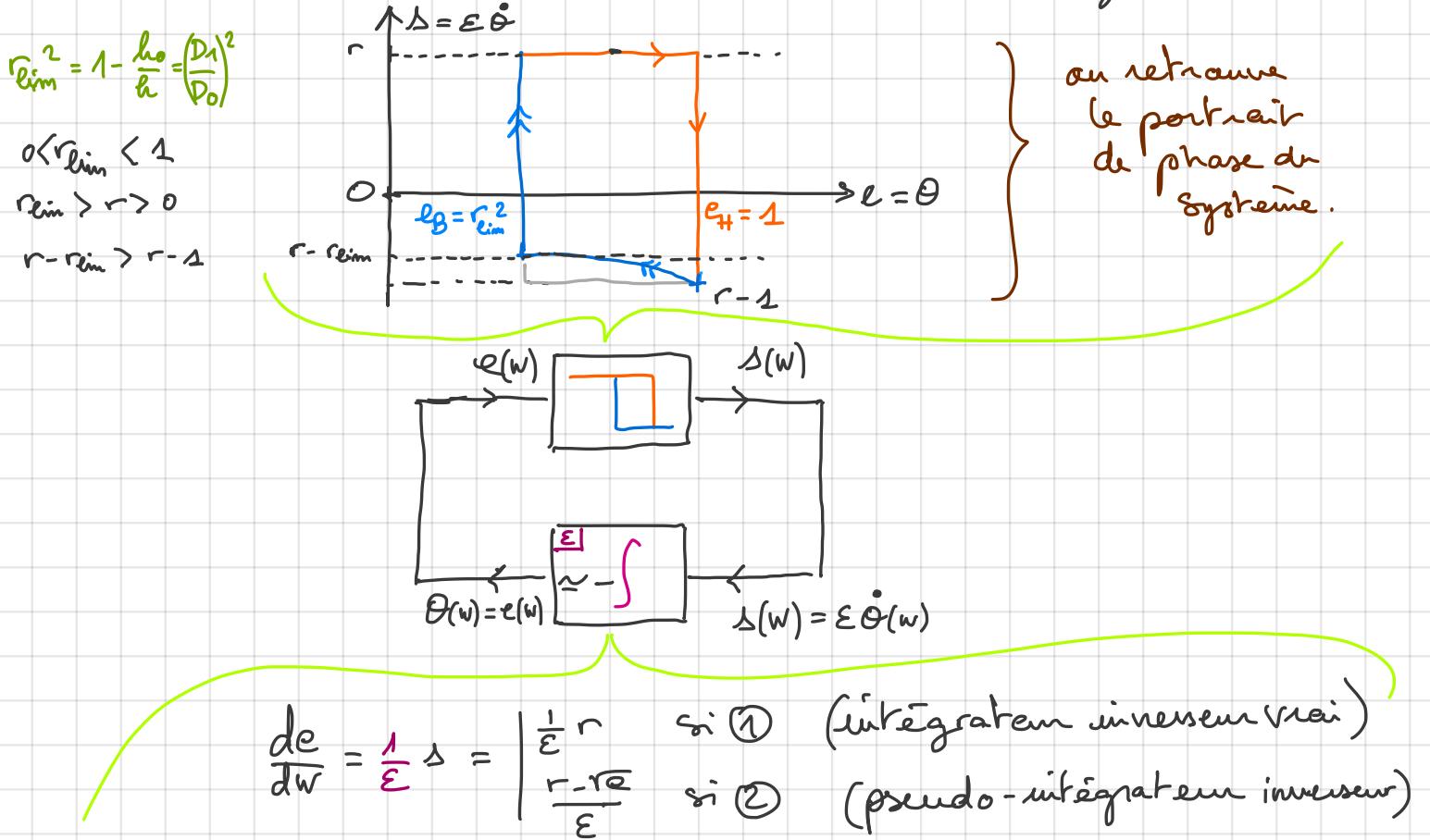
On rappelle que l'évolution de z est régie par :

$$\frac{d\theta}{dw} = \begin{cases} \frac{r}{\varepsilon}, & \text{en phase de remphissage. (1)} \\ \frac{r - \sqrt{\theta}}{\varepsilon}, & \text{en phase de vidange. (2)} \end{cases}$$

$$\text{Soit } e(w) := \theta(w)$$

$$s(w) := \begin{cases} r, & \text{si (1)} \\ r - \sqrt{\theta}, & \text{si (2)} \end{cases}$$

alors la modélisation suivante décrit l'évolution du système :



La constante du pseudo-intégrateur est $\varepsilon = \frac{s'}{s}$.

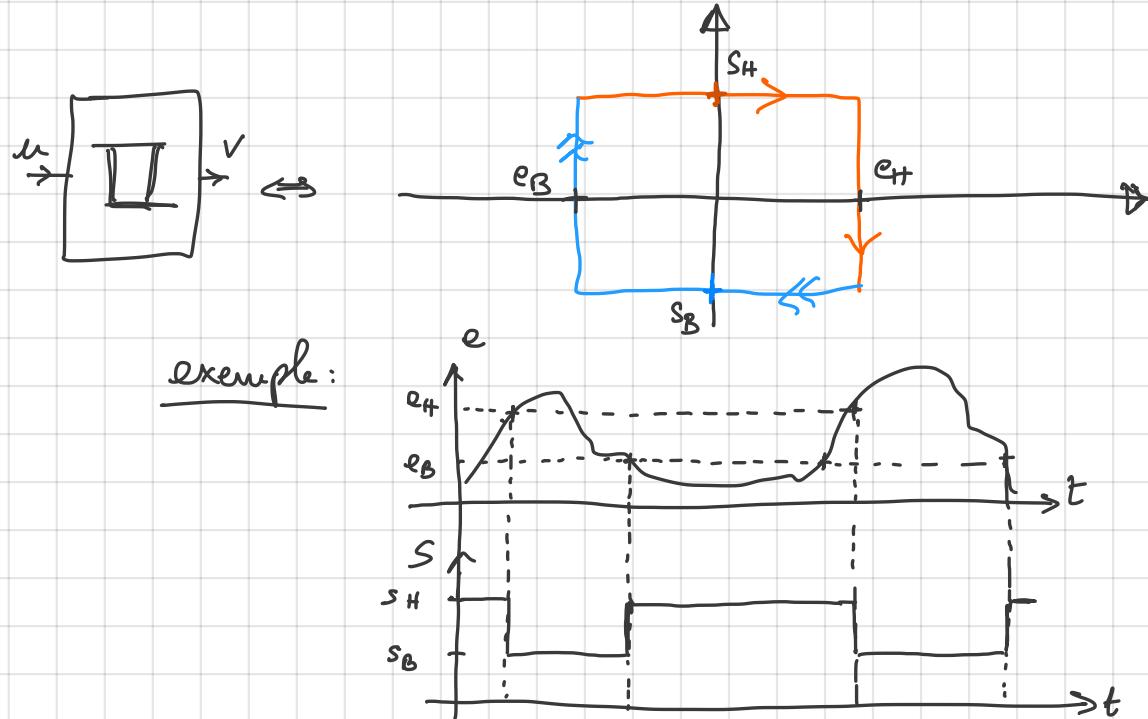
On peut donc modéliser le système par la rétroaction d'un (pseudo) comparateur à hystéresis inverseur avec un (pseudo) intégrateur inverseur (de constante $E = \frac{\Omega''}{S}$), comme attendu pour un oscillateur (à la bande de rétroaction) de relaxation.
"auto-^{on}-entretenu"

Rappels

le fonctionnement générique d'un intégrateur :

$$u \rightarrow \boxed{S} \rightarrow v \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{u}{\tau} \Leftrightarrow v(t) = v_0 - \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t u(t') dt'$$

Et celui d'un comparateur à hystéresis inverseur :



- portrait de phase ($\dot{\theta}, \theta$) (y oscille et suffit)
- schéma de la rétroaction. (hybrides et pseudo intégrateur) -