Réalisation d'un oscillateur à boucle de rétroaction quasi-sinusoïdal en électronique : oscillateur à résistance négative.

Introduction : rappels de cours sur $\ddot{x} + \varepsilon h(x, \dot{x}) + x = 0$

1. Rappels sur le circuit RLC en électronique
2. Intérêt de la résistance négative
3. Réalisation pratique de la résistance négative
4. Étude de l'oscillateur à résistance négative
5. Montage à faire

Annexe : rappels sur l'AO.

Introduction

On a vu que conceptuellement une variable dyn adim x. est un oscillateur à boucle de rétroaction quasi sinusoïdal si son évolution est régie par une équation du type :

$$\ddot{x} + \varepsilon_0 h(x,\dot{x}) + \omega_0^2 x = 0 \qquad (0)$$

où : $h(x,\dot{x}) = A(x)\dot{x}$ avec $\begin{cases} A(x) < 0 \text{ pour } x < 1 \\ \hookrightarrow \text{amplificat}^{\circ} \\ A(x) > 0 \text{ pour } x \geq 1 \\ \hookrightarrow \text{atténuation.} \end{cases}$

Cette équation peut se mettre sous forme canonique en adimensionnalisant le temps : $w = \omega_0 t$ ce qui donne : $d_t x = d_w x \cdot \omega_0$

d'où : $(0) \Leftrightarrow \omega_0^2 \ddot{x} + \varepsilon_1 h(x,\dot{x}) + \omega_0^2 x = 0 \qquad \dot{x} = d_w x$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \varepsilon h(x,\dot{x}) + x = 0}$$

où $\varepsilon \neq \varepsilon_1 \neq \varepsilon_0 \neq \varepsilon$

On a vu que les non-linéarités contenue dans $h(x,\dot{x})$ fixaient l'amplitude des oscillations via la relation "amplitude-fréquence" obtenue avec un bilan d'énergie sur le cycle-limite de période adim $W_T = \omega_0 T$:

$$\boxed{\int_0^{W_T} \dot{x}\, h(x,\dot{x})\, dw = 0 \qquad (\text{relation exacte})}$$

On a ensuite vu qu'à l'ordre 0 en ε, la période du cycle limite est celle du régime harmonique : $T = \frac{2\pi}{\omega_0} + O(\varepsilon) \Rightarrow w_T = 2\pi + O(\varepsilon)$

On a alors déduit que l'amplitude du cycle limite est à l'ordre 0 en ε :

$$\boxed{a(w) = a_0 + O(\varepsilon)}$$

où $\boxed{a_0 \mid g(a_0) = 0}$, $\boxed{g(a_0) := \varepsilon a_0 \int_0^{2\pi} h(a_0 \cos w, -a_0 \sin w) \sin w \, dw}$

On a ensuite mq ce cycle limite était stable ssi : $\boxed{g'(a_0) < 0}$.

On va appliquer ces notions sur un exemple de système (simple) en électronique :

→ l'oscillateur à résistance négative.

1. Rappels sur le circuit RLC en électronique

Considérons un circuit RLC parallèle

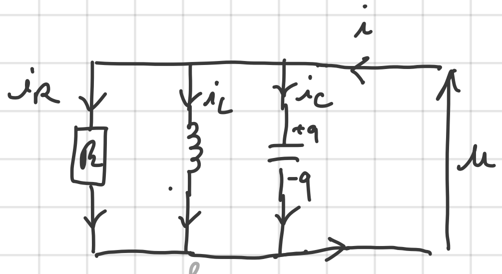


figure 1

$$i = i_R + i_L + i_C$$

$$i_R = \frac{u}{R} \qquad u = L\frac{di_L}{dt} \qquad u = \frac{q}{C} \Rightarrow \dot{u} = \frac{i_C}{C}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\dot{u} + \frac{1}{L}u + C\ddot{u}} \quad (0)$$

avec $\frac{di}{dt} = 0$ on trouve : $\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0} \quad (1)$

où $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $m = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ facteur d'amortissement

Équation caractéristique : $X^2 + 2m\omega_0 X + \omega_0^2 = 0$

discriminant : $\Delta = 4(m\omega_0)^2 - 4\omega_0^2$

$$\boxed{\Delta = 4\omega_0^2(m^2 - 1)}$$

si $\Delta > 0$, alors : $\exists$ 2 racines réelles r_1 et r_2 : $u(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$

si $\Delta = 0$, $\rightarrow$ 1 racine réelle double r_0 : $u(t) = (\lambda t + \mu)e^{r_0 t}$

si $\Delta < 0$, $\rightarrow$ 2 racines C.C. : $\mu \pm i\nu$ et $u(t) = \lambda e^{\mu t}\cos(|\nu| t + \mu)$

La solution oscillante libre correspond donc à : $m^2 < 1$

soit $m < 1$ on a alors :

$$\mu \pm i\nu = \frac{-2m\omega_0 \pm i\delta}{2} \qquad \text{où} \quad (i\delta)^2 = \Delta$$

c.à.d : $\delta = 2\omega_0\sqrt{1 - m^2}$

$$\begin{cases} \mu = -m\omega_0 \\ \nu = \omega_0\sqrt{1-m^2} = \omega' \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{u(t) = \lambda e^{-m\omega_0 t}\cos(\omega' t + \phi)} \quad (2)$$

Cela correspond à une oscillation amortie :

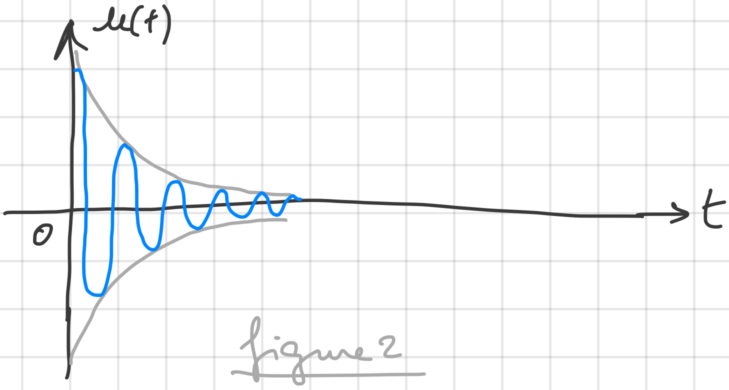
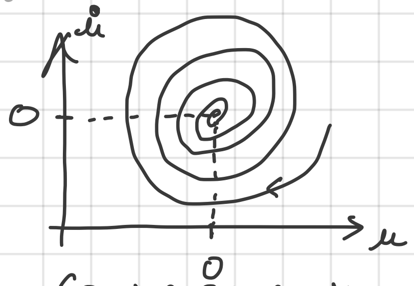


figure 2

fig3 : portrait de phase



Convergence vers un attracteur (0,0) stable.

Écrivons (1) sous forme canonique :

$x = \frac{u}{u_0}$ et $w = \omega_0 t \Rightarrow d_t u = d_w u \, \omega_0$

$u = x u_0$

$$\omega_0^2 \ddot{u} + 2m\omega_0^2 \dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad \div \omega_0^2$$

$$u_0(\ddot{x} + 2m\dot{x} + x) = 0 \quad \div u_0$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2m\dot{x} + x = 0} \quad (3)$$

$2m\dot{x} = \varepsilon A(x)\dot{x}$ avec $\varepsilon A(x) = 2m = cste$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{A(x) = 1} \Rightarrow h(x,\dot{x}) = \dot{x} \\ \boxed{\varepsilon = 2m} \end{cases}$$

Constat : pour obtenir des oscillations auto-entretenues il faudrait que le facteur "2m" devant le terme en $\dot{x}$ se transforme en une fonction $A(x)$ qui change de signe en fonction des valeurs de x : on voit que si m devient négatif l'amplitude des oscillations augmente exponentiellement. Lorsque l'amplitude devient "trop" grande il faudrait qu'il devienne à nouveau positif pour amortir l'oscillation.

2. Intérêt de la résistance négative

Soit l'ajout d'un dipôle D de caractéristique en convention récepteur $I = f(u)$, et $i = -f(u)$ en conv. générateur, en parallèle du circuit de la figure 1 :

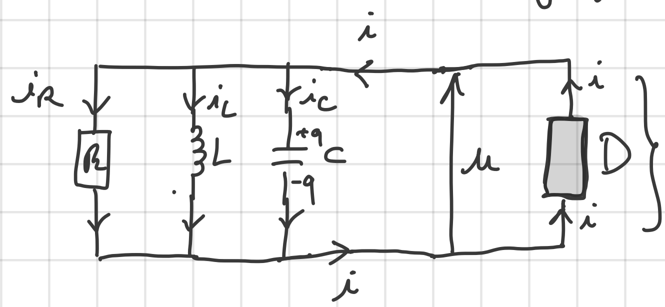


figure 4

convention générateur

$i = -f(u)$

$\frac{di}{dt} = -\dot{u} f'(u)$

(0) donne : $-\dot{u} f'(u) = \frac{1}{R}\dot{u} + \frac{1}{L}u + C\ddot{u}$

Soit : $\ddot{u} + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R} + f'(u)\right)\dot{u} + \frac{1}{LC}u = 0 \quad [4]$

Adimensionalisons cette équation p/r au temps :

$$w = \omega_0 t \Rightarrow d_t u = d_w u \cdot \omega_0 \qquad \text{où : } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

(4) devient : $\omega_0^2 \ddot{u} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{f'(u)}{C}\right)\omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = 0$

* On pose : $A(u) = 1 + Rf'(u) \Rightarrow \left(\frac{1}{RC} + \frac{f'(u)}{C}\right) = 2m A(u)\,\omega_0$

où $m := \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

d'où $(4) \Leftrightarrow \omega_0^2 \ddot{u} + 2\omega_0^2 m A(u) + \omega_0^2 u = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{u} + 2m A(u)\dot{u} + u = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{u} + \varepsilon A(u)\dot{u} + u = 0 \quad (5)}$

où $\varepsilon = 2m$ et $A(u) = 1 + Rf'(u)$

• Pour avoir un comportement d'oscillateur quasi-sinusoïdal il faut que : $A(u) = 1 + Rf'(u)$, change de signe par rapport à une valeur u_S :

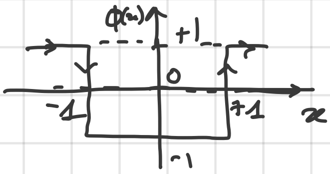
$$(C) \begin{cases} A(u < u_S) < 0 \rightarrow \text{amplification} \\ A(u \geq u_S) > 0 \rightarrow \text{amortissement} \end{cases}$$

→ En introduisant $x = \frac{u}{u_S}$ et $\phi = R_n f'$, on peut réécrire $A(x)$ tel que :

$$\boxed{A(x) = 1 + \frac{R}{R_n}\phi(x)} \quad (6)$$

Une fonction ϕ (donc f', i.e. : dérivée de la caractéristique f de D) simple qui satisfasse à (C) est par exemple :

$$(C\,1) \quad \boxed{\phi(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } |x| < 1 \\ +1 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}}$$



avec : $\boxed{R_n < R}$ (C.2), de sorte que :

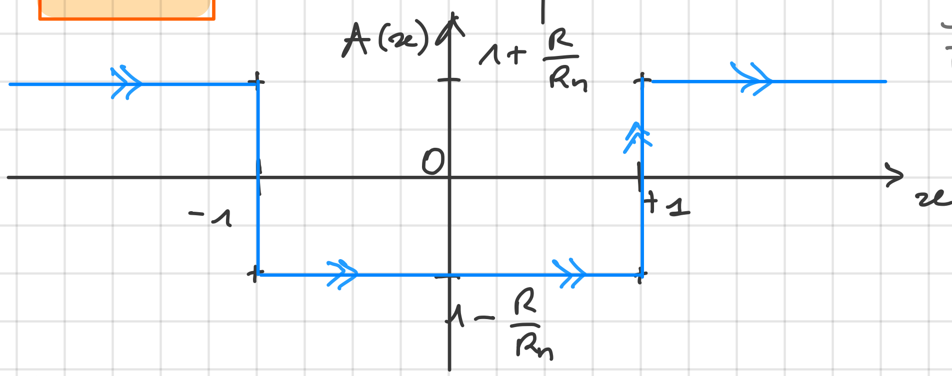


figure 5

On cherche donc un dipôle D avec une caractéristique

$$I = f(u)$$

telle que : $f = \int \phi$ càd : $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } |x| < 1 \\ +x & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$

Soit

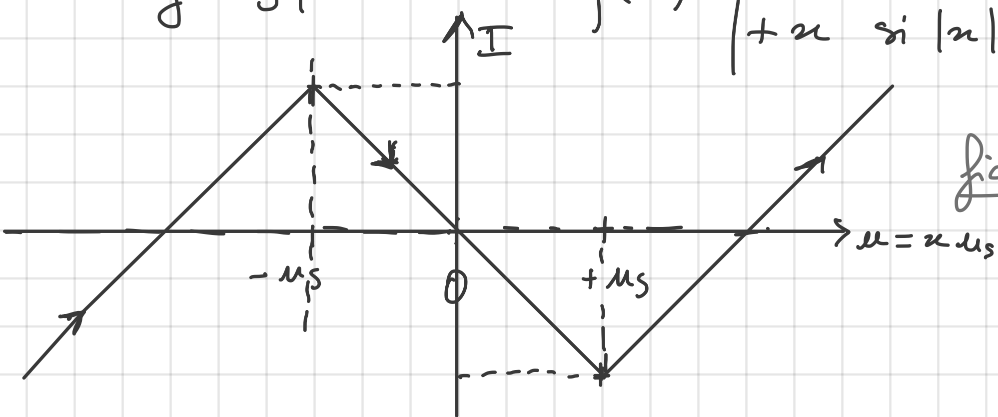
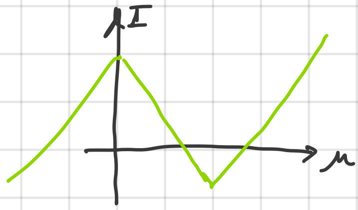


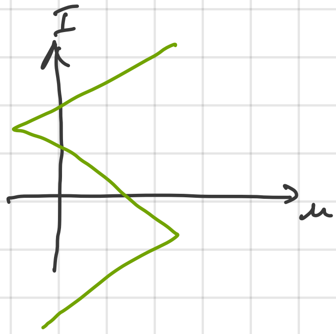
figure 6

Un dipôle D présentant une caractéristique telle que celle de la figure 6 est appelé un dipôle à résistance dynamique négative, communément appellé résistance négative.

dipôle dont la caractéristique dispose d'une partie dont la pente est négative

diode à effet tunnel →





3. Réalisation pratique de la résistance négative

→ Diodes à effet tunnel pour gérer les hautes fréquences

→ Montages avec AO pour des fréquences basses à moyennes.

↳ un montage possible pour obtenir une résistance négative avec un AO est le suivant :

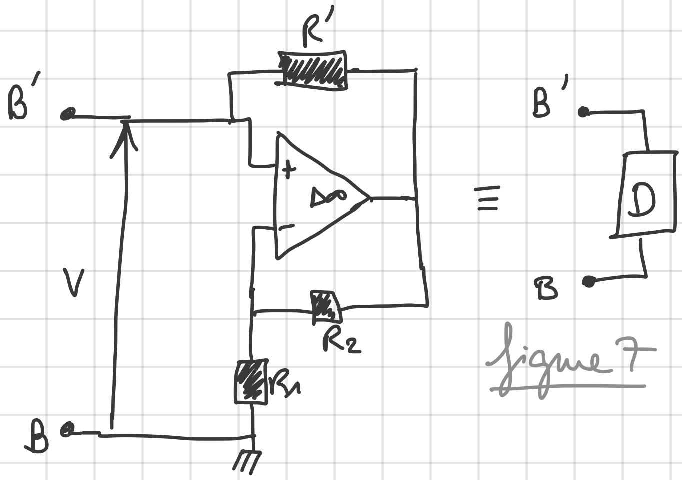
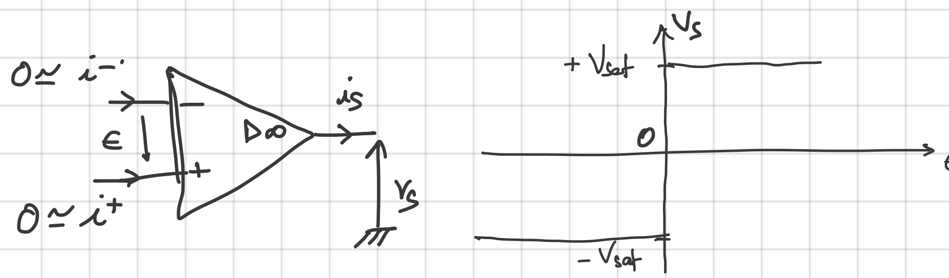


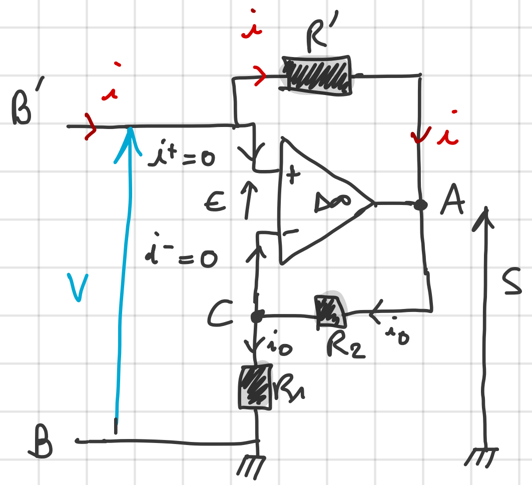
figure 7

On considère un AO idéal dont la tension de saturation de sortie vaut V_{sat} ($V_{sat} > 0$). La caractéristique de transfert de cet A.O. est représentée ci-dessous :



VOIR RAPPELS A LA FIN.

1. Montrons que le dipôle BB' est équivalent à une résistance négative $-R_N$ ($R_N > 0$) que l'on exprimera en fonction de R_1, R_2 et R', lorsque l'AO conserve un régime de fonctionnement linéaire.



$$i^+ \simeq 0 \Rightarrow V - S = R'i \Rightarrow \underline{V = R'i + S} \quad (3.0)$$

$$V^+ := V \quad \text{et} \quad \overset{\text{AO IDEAL}}{\epsilon = 0} \Rightarrow \underline{V^- = V^+ = V} \quad (3.1)$$

$$\text{or} \quad V^- = R_1 i_0 \quad \text{et} \quad S - V^- = R_2 i_0$$

$$\Rightarrow \frac{V^-}{R_1} = \frac{S - V^-}{R_2} \Rightarrow \boxed{V^-\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = S} \quad (3.2)$$

pont diviseur de tension.

$$\text{donc :} \quad S = V\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\text{et donc :} \quad (3.0) \Rightarrow V = R'i + V\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\Rightarrow R'i = -V\frac{R_2}{R_1} \Leftrightarrow \boxed{V = -\frac{R_1 . R'}{R_2} i} \quad (3.3)$$

$$\boxed{V = -R_n i} \quad \text{avec} \quad R_n = \frac{R_1 R'}{R_2} \quad (3.4)$$

$$\forall\, v \in [-V_0 ; +V_0] \,, \quad i = -\frac{1}{R_n} V$$

où V_0 tq $S = V_{sat}$ si $V = V_0$, $S = -V_{sat}$ si $V = -V_0$

$$S = V\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = V_{sat} \Leftrightarrow V = \frac{R_1}{R_2 + R_1} V_{sat} = V_0 \quad (3.5)$$

$$= -V_{sat} \Leftrightarrow V = -\frac{R_1}{R_2 + R_1} V_{sat} = -V_0$$

la valeur de i vaut alors :

$$S = +V_{sat} \Rightarrow i = i(V_0) = -\frac{1}{R_n} V_0 = -i_0$$

$$S = -V_{sat} \Rightarrow i = i(-V_0) = \frac{V_0}{R_n} = +i_0$$

2. Si l'AO n'est plus en régime linéaire : $\epsilon \neq 0$

si $S = +V_{sat}$ alors :

(3.0) ➡ $V^+ = V = R'i + V_{sat} \Leftrightarrow \boxed{i = -\frac{V_{sat}}{R'} + \frac{V}{R'}}$ (3.6)

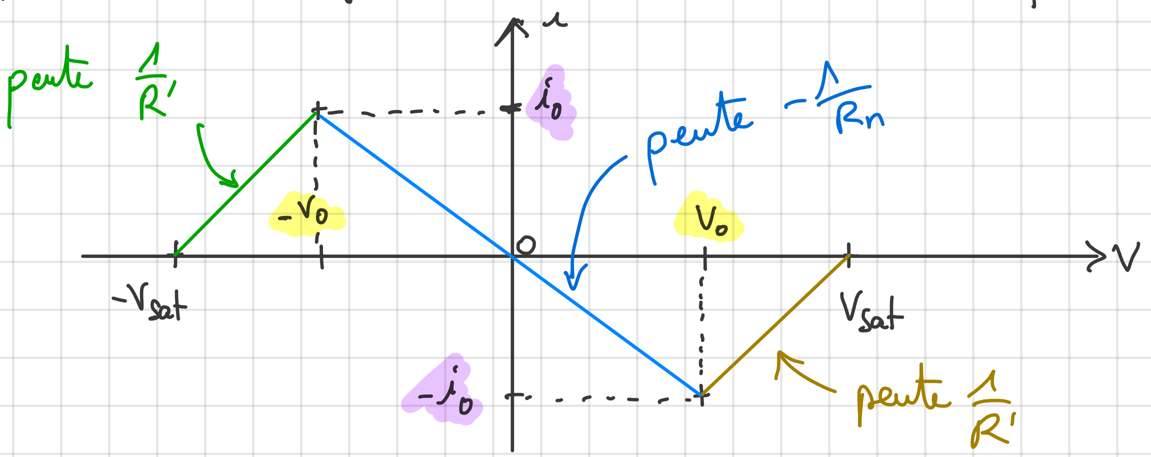
si $S = -V_{sat}$ alors :

$$V = R'i - V_{sat} \Leftrightarrow \boxed{i = \frac{V_{sat}}{R'} + \frac{V}{R}} \quad (3.7)$$

$\forall\, v \in \,]v_0 ; V_{sat}]$, $i = -\frac{V_{sat}}{R'} + \frac{v}{R'}$

$\forall\, v \in [-V_{sat} ; -v_0[$, $i = \frac{V_{sat}}{R'} + \frac{v}{R'}$

Représentons enfin la caractéristique $i = f(V)$



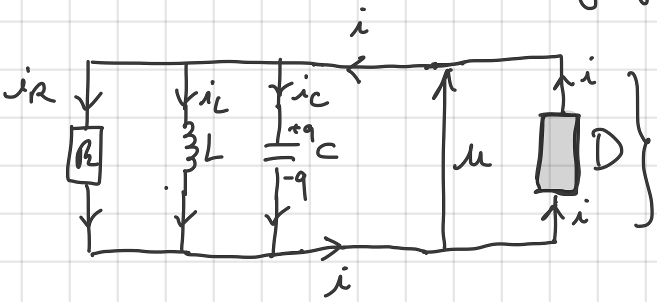
On a donc réalisé une résistance négative qui donne la fonction $A(x)$ de la figure 5. ← (C.1)

Il faut s'assurer que $R_n \leq R$ ← (C.2)

résistance du RLC

4. Étude de l'oscillateur à résistance négative

On insère le dipôle D de la figure 7 dans le RLC parallèle, on retrouve la figure 4 :



convention générateur

$i = -f(u)$

$\frac{di}{dt} = -\dot{u} f'(u)$

L'équation canonique régissant l'évolution de u est :

$$\boxed{\ddot{x} + \varepsilon\, h(x,\dot{x}) + x = 0}$$

où : $\varepsilon = 2m$, $m = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

$h(x,\dot{x}) = A(x)\,\dot{x}$, $A(x) = \left(1 + \frac{R}{R_n}\phi(x)\right)$

avec $\phi(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } |x| < 1 \\ +1 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$

R_n donnée par (3.4)

où : $x = \frac{u}{V_0}$, V_0 donné par (3.5)

$\dot{x} = d_w x$, $w = \omega_0 t$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

- La condition pour obtenir des oscillations est que $\boxed{R_n \leq R}$ de sorte que $A(x)$ soit négatif pour $|x| < 1$.

- On a vu que si $\varepsilon \ll 1$ la pulsation du cycle limite est celle du régime harmonique ($\varepsilon = 0$) à l'ordre 0 en ε, le cycle limite correspond alors à des oscillations quasi-sinusoïdales.

• L'amplitude a du cycle limite (des oscillations quasi-sinusoïdales en régime permanent) est donnée à l'ordre 0 en ε par la résolution de :

$$(E) \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} h(a\cos w, -a\sin w)\sin w\, dw = 0$$

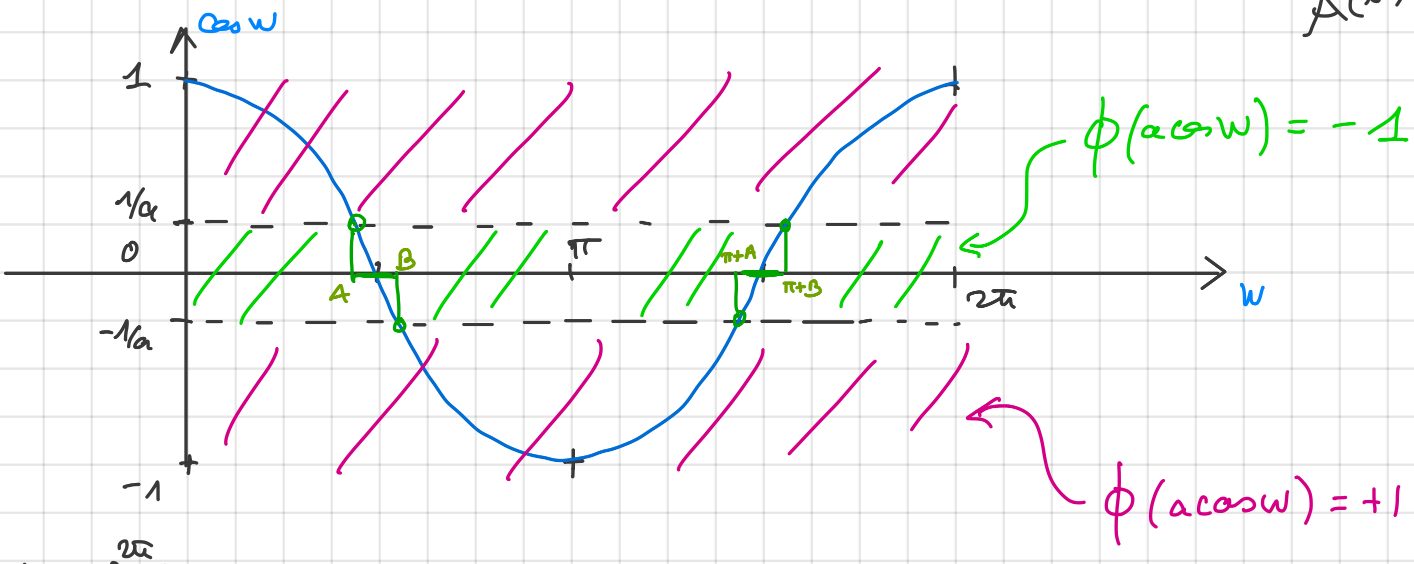
$$\text{où : } h(x,y) = \left(1 + \frac{R}{R_n}\phi(x)\right) y$$

$$h(a\cos w, -a\sin w) = \left(1 + \frac{R}{R_n}\phi(a\cos w)\right)(-a\sin w)$$

$$(E) \Leftrightarrow -\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 w\, dw}_{\pi} - \eta \int_0^{2\pi} \phi(a\cos w)\sin^2 w\, dw = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow +\eta \int_0^{2\pi} \phi(a\cos w)\sin^2 w\, dw = -\pi$$

⚠ ici A n'a rien à voir avec la fonction A(x)...



$$J := \int_0^{2\pi} \phi(a\cos w)\sin^2 w\, dw$$

on pose : $A = \arccos(1/a)$ et $B = \arccos(-1/a) = \pi - \arccos(1/a) = \pi - A$

$$J = \int_0^A - \int_A^B + \int_B^{\pi+A} - \int_{\pi+A}^{\pi+B} + \int_{\pi+B}^{2\pi} \left\{\sin^2 w\, dw\right\}$$

or $$\int_X^Y \sin^2 w\, dw = \frac{Y-X}{2} - \frac{1}{2}\left[\sin w \cos w\right]_X^Y$$

donc :

$$J = \frac{A}{2} - \frac{1}{2}\sin(A)\cos(A) - \frac{B-A}{2} + \frac{1}{2}\left[\sin(B)\cos(B) - \sin(A)\cos(A)\right]$$

$$+ \frac{\pi + A - B}{2} - \frac{1}{2}\left[\sin(\pi+A)\cos(\pi+A) - \sin B\cos B\right]$$

$$- \frac{B-A}{2} + \frac{1}{2}\left[\sin(\pi+B)\cos(\pi+B) - \sin(\pi+A)\cos(\pi+A)\right]$$

$$+ \frac{\pi - B}{2} - \frac{1}{2}\left[0 - \sin(\pi+B)\cos(\pi+B)\right]$$

$$J = 2(A-B) + \pi - \sin(A)\cos(A) + \sin B\cos B - \sin(\pi+A)\cos(\pi+A)$$

$$+ \sin(\pi+B)\cos(\pi+B)$$

$$J = 2(A-B) + \pi + 2(\underbrace{\sin B\cos B - \sin A\cos A}_{\cos(A+B)})$$

$$- \frac{1}{a}\sqrt{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2}$$

$$- \sqrt{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2}\,\frac{1}{a}$$

$$J = 2(A-B) + \pi + 2\cos(A+B)$$

$$J = 4A - \pi - 2 \qquad (A+B=\pi)$$

$$A - B = 2A - \pi$$

d'où $(E) \Leftrightarrow \eta(4A - \pi - 2) = -\pi$

$$\Leftrightarrow 4A = -\frac{1}{\eta}\pi + \pi + 2$$

$$\Leftrightarrow 4A = 2 + \pi\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$$

$$(E) \Leftrightarrow \boxed{A = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)} \qquad A = \arccos\left(\frac{1}{a}\right)$$

d'où : $a = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{R_n}{R}\right)\right)}$

A.N : avec : $R' = 10\,k\Omega \quad R_1 = 1\,k\Omega \quad R_2 = 1\,k\Omega$

$$\Rightarrow R_n = \frac{R_1 R'}{R_2} = 0{,}1$$

avec $R = 100\,k\Omega$, $V_{sat} = +12\,V \Rightarrow V_0 = 6\,V$

$a = 2,81 \Rightarrow \boxed{u_0 = a\,V_0} = \underline{16,86\ V}$

<u>À l'ordre 0 en $\varepsilon = 2m = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$</u>

avec $L = 100\ mH$ et $C = 0,1\ \mu F$ et $R = 100\ k\Omega$

$\varepsilon = 0,01 \ll 1$,

<u>le cycle limite correspond à des oscillations sinusoïdales :</u>

$$\underline{u(t) = u_0 \cos(\omega_0 t)}$$

où $\boxed{u_0 = \dfrac{V_0}{\cos\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{R_n}{R}\right)\right)} = 16,9\ V}$

et $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}} = 10^4\ rad/s$

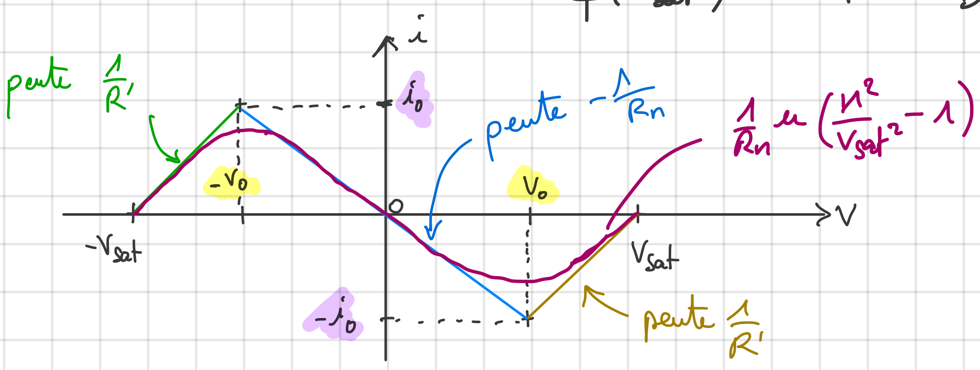
Ici l'interprétation du bilan énergétique à la base de (E) est simple : la puissance dissipée dans R par effet Joule est égale à la puissance fournie par D.

<u>Remarque</u> : On peut aussi mener le calcul en approximant la caractéristique en "N" par une fonction continue

$$f(u) \simeq a u (b u^2 - 1)$$

où a et b sont tq : $f'(0) = -\frac{1}{R_n} \Leftrightarrow a = \frac{1}{R_n}$

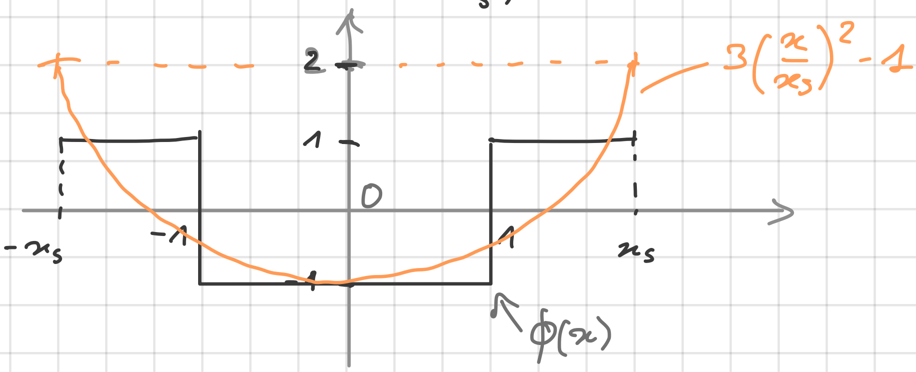
$f(V_{sat}) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{V_{sat}^2}$



La fonction $A = 1 + R f'(u)$ devient alors :

$$A(u) \simeq 1 + 3\frac{R}{R_n}\left(\frac{u^2}{V_{sat}^2} - 1\right)$$

d'où : $\phi(x) \simeq 3\left(\frac{x}{x_s}\right)^2 - 1$



ainsi $d_i(x, \dot{x}) \simeq \left(1 + \eta\left[3\left(\frac{x}{x_s}\right)^2 - 1\right]\right)\dot{x}$

d'où

$$(E) \overset{\simeq}{\Leftrightarrow} \int_0^{2\pi}\left(1 + 3\eta\frac{a^2\cos^2 w}{x_s^2} - \eta\right)\sin^2 w \, dw = 0$$

$$(E) \overset{\simeq}{\Leftrightarrow} (\eta - 1)\int_0^{2\pi}\sin^2 w \, dw - 3\eta\frac{a^2}{x_s^2}\int_0^{2\pi}\cos^2 w \sin^2 w \, dw = 0$$

$$(E) \overset{\simeq}{\Leftrightarrow} \pi(\eta - 1) = 3\eta\frac{a^2}{x_s^2} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$\overset{\simeq}{\Leftrightarrow} \quad a^2 = x_s^2\,\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{\eta}\right) = x_s^2 \cdot \frac{4}{3}\left(1 - \frac{R_n}{R}\right)$$

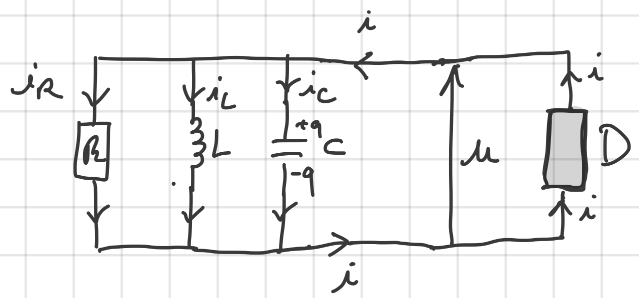
$$\overset{\simeq}{\Leftrightarrow} \quad a = x_s\sqrt{\frac{4}{3}\left(1 - \frac{R_n}{R}\right)}$$

Soit $u_0 = V_{sat}\sqrt{\frac{4}{3}\left(1 - \frac{R_n}{R}\right)}$

AN : $u_0 = 13{,}2$ V

Soit une erreur de 22% sur le résultat exact.

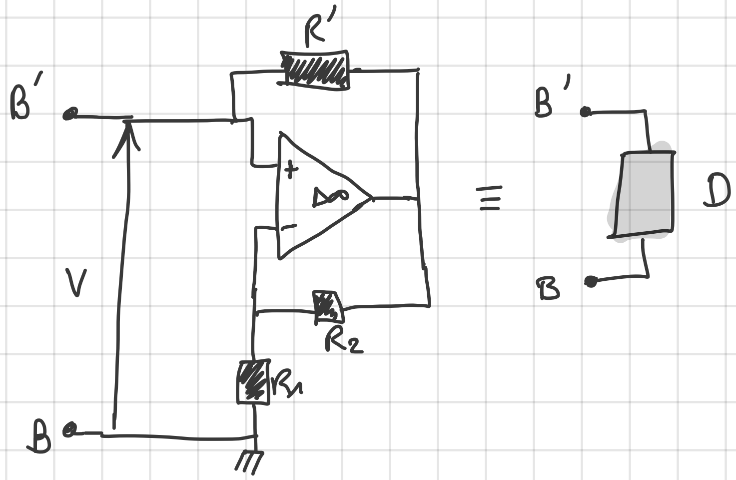
5. Montage à faire



$R = 100\,k\Omega$

$L = 100\,mF$

$C = 0{,}1\,\mu F$



$R' = 10\,k\Omega$

$R_1 = 1\,k\Omega$

$R_2 = 1\,k\Omega$

$V_{sat} = 12\,V$

→ afficher $u(t)$ et (i, u)

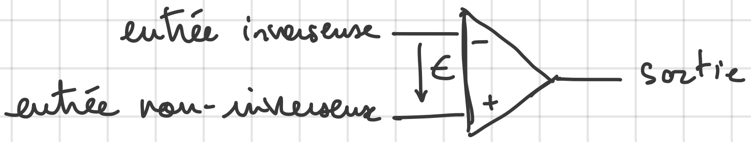
↳ montrer le cycle limite

↳ le spectre

↳ mesurer u_0 et ω_0.

ANNEXE : Rappel : sur l'amplificateur opérationnel linéaire intégré.

⚠ l'AO est un composant actif ; il doit être alimenté.
Ceci ne figure pas sur son schéma électrique



La fonction de transfert de l'AO relie l'entrée différentielle ϵ à la sortie s :

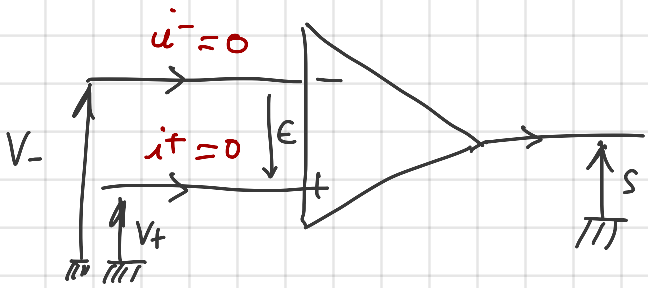
$$H(p) = \frac{S(p)}{\mathcal{E}(p)} \qquad \begin{cases} S = TL(s) \\ \mathcal{E} = TL(\epsilon) \end{cases}$$

Par définition : $\epsilon = V^+ - V^-$

En 1ère approx : $$H(p) = \frac{A_0}{1+\tau p} \qquad \begin{cases} A_0 \simeq 2.10^5 \\ \tau \simeq 10^{-2} s \end{cases}$$

passe-bas du premier ordre

→ ⚠ aux Hautes Fréquences.



La résistance d'entrée de l'AO est de l'ordre de $10^{12}\,\Omega$ soit $1\,T\Omega$.

c'est pq : $i^- \simeq 0 \simeq i^+$.