

Un cours en construction sur les méthodes de résolutions  
des équations non-linéaires

Sur la gestion de  $\ddot{x} + \epsilon h(x, \dot{x}) + x = 0$   
avec  $|\epsilon| \ll 1$ .

## I. Caractérisation du cycle limite

1. Variation d'énergie sur un cycle limite
2. Description du portrait de phase en coord. polaires
  - a. Évolution de  $x(t)$  et  $\theta(t)$
  - b. Évolution de  $x(t)$  et  $\theta(t)$  au voisinage du CL
3. Application : développement perturbatif du CL.
  - a. Amplitude
  - b. Angle, période, pulsation
  - c. Caractérisation du CL.
4. Application : analyse du cycle limite de van der Pol.

## II. Méthode pour déterminer l'amplitude et la période du cycle

limite : approximation du 1<sup>er</sup> harmonique (A1H)

1. Relation fréq.-Amplitude du cycle limite avec l'A1H
2. Justification de l'A1H
3. Application : équation de Van der Pol.

## III. Méthode de résolution approchée : approximation de

Krylov et Bogoliubov

1. Évolution approchée de  $x(t)$
2. Évolution approchée de  $\theta(t)$
3. Exemple : oscillateur de van der Pol.

## IV. Méthode de résolution approchée : linéarisation avec l'A1H

1. Résolution de l'éq de VdP par linéarisation avec l'A1H
2. Résolution de l'éq du pendule par linéarisation avec l'A1H
3. Comparaison avec la Méthode de KB -

## Introduction

Soit une équation du type :

$$\ddot{x} + \varepsilon h(x, \dot{x}) + x = 0, \quad (0)$$

où  $|\varepsilon|$  est petit devant 1.

Pour  $\varepsilon = 0$ , (0) devient :  $\ddot{x} + x = 0 \quad (1)$

c'est la forme linéarisée de (0), de solution

$$x_0(t) = a_0 \cos(t + t_0),$$

avec  $(a_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ , on choisit  $t_0 = 0$  et on restreint  $a_0 \in \mathbb{R}_+^{**}$

$$\rightarrow \boxed{x_0(t) = a_0 \cos t}$$

d'où :  $\boxed{y_0(t) = -a_0 \sin t}$

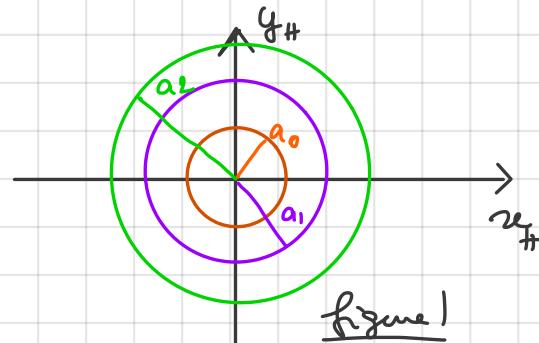


figure 1

On a alors  $x_0^2 + y_0^2 = a_0^2$

→ espace des phases = cercles co-centriques de rayons paramétrés continuellement par  $a > 0$ .

L'idée est d'utiliser les résultats portant sur (1) pour trouver les solutions approximatives de (0).

On va présenter plusieurs méthodes pour déterminer

- la période et l'amplitude associées au cycle limite et caractériser la stabilité du cycle limite.
- la forme de la spirale éventuelle dans l'espace des phases  $(x, \dot{x})$  convergeant vers le cycle limite.

## I. Caractérisation du cycle limite

### 1. Variation d'énergie sur un cycle limite

L'équation: (0)  $\Leftrightarrow \ddot{x} + \varepsilon h(x, \dot{x}) + x = 0$

donne un espace des phases  $(x, \dot{x})$  avec :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= y \quad \text{tq} \quad \dot{y} = -\varepsilon h(x, y) - x \end{aligned}$$

Supposons  $\exists$  un cycle limite pour (0).

L'existence d'un cycle limite équivaut à l'existence d'une solution périodique, on note  $T$  sa période.

Définissons l'énergie  $E(t)$ :

$$E := \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 \quad (6)$$

Sur le cycle limite de période  $T$ :

$$E(T) - E(0) = 0 \quad (7)$$

car le cycle limite est fermé par définition.

or  $\frac{dE}{dt} = x \dot{x} + \dot{x} \ddot{x} = y(x + \ddot{x})$ ,  $y = \ddot{x}$

$$\text{or } \ddot{x} + x = -\varepsilon h(x, y)$$

donc  $\frac{dE}{dt} = -y \varepsilon h(x, y) \Rightarrow dE = -y \varepsilon h(x, y) dt$

$$\Rightarrow E(T) - E(0) = -\varepsilon \int_0^T y(t) h(x(t), y(t)) dt \quad (8)$$

Sur le cycle limite de période  $T$  on a donc:

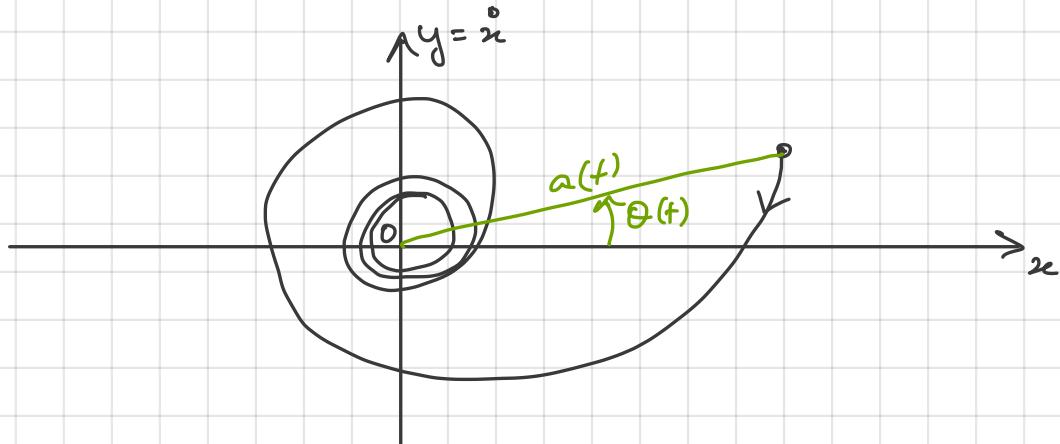
$$E(T) - E(0) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon \int_0^T y(t) h(x(t), y(t)) dt = 0 \quad (8)\text{bis}$$

## 2. Description du portrait de phase en coord. polaires

Soit  $\{\alpha(t), \theta(t)\}$  les coord. polaires d'un portrait de phase.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 := x^2 + y^2, \quad y = \dot{x} \\ \tan \theta := \frac{y}{x} \end{array} \right. \quad (11)$$

$$(12)$$



Sachant que :  $\ddot{x} + \epsilon h(x, y) + x = 0$ , que peut-on dire de  $\alpha(t)$  et  $\theta(t)$  ?

### a. Évolution de $\alpha(t)$ et $\theta(t)$

$$/\ \frac{d}{dt}(u) \Leftrightarrow 2\alpha\ddot{a} = 2(x\ddot{x} + y\ddot{y}) = 2y(x + \dot{y})$$

$$\text{or : } \ddot{x} + x = -\epsilon h(x, y)$$

$$\Rightarrow x + \dot{y} = -\epsilon h(x, y)$$

$$\text{donc : } 2\alpha\ddot{a} = -2\epsilon y h(x, y)$$

$$\text{Soit : } \ddot{a} = \frac{-\epsilon y h(x, y)}{\alpha}$$

$$\text{or } \begin{cases} y = a \sin \theta \\ x = a \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\ddot{a} = -\epsilon \sin \theta \frac{a}{h(a \cos \theta, a \sin \theta)}} \quad (13)$$

$$\text{d}_t(12) \Leftrightarrow (1 + \tan^2 \theta) \ddot{\theta} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2}$$

$$\dot{y}x = (-\varepsilon h(x, y) - x)x = -\varepsilon x h(x, y) - x^2$$

$$\dot{x}y = y^2$$

$$\Rightarrow \dot{y}x - \dot{x}y = -(x^2 + y^2) - \varepsilon x h(x, y).$$

$$\text{d}_t(12) \Leftrightarrow \left( \frac{x^2 + y^2}{x^2} \right) \ddot{\theta} = -\frac{(x^2 + y^2) - \varepsilon x h(x, y)}{x^2}$$

$$\text{d}_t(12) \Leftrightarrow \underbrace{(x^2 + y^2)}_{a^2} \cdot \ddot{\theta} = - (x^2 + y^2) - \varepsilon x h(x, y)$$

$$\ddot{\theta} = -1 - \frac{\varepsilon x h(x, y)}{a^2} \quad \downarrow x = a \cos \theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -1 - \varepsilon a^{-1} h \cos \theta \quad (14)}$$

$$\text{an } h = h(a \cos \theta, a \sin \theta).$$

$$\bullet) \quad \frac{(13)}{(14)} \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{d\theta} = \frac{\varepsilon h \sin \theta}{1 + \varepsilon h a^{-1} \cos \theta}, \text{ vrai si } E.$$

$$\varepsilon \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{da}{d\theta} = \varepsilon h \sin \theta + o(\varepsilon)} \quad (15)$$

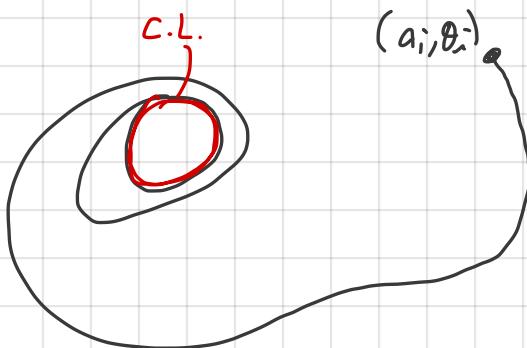
$$(15) \Leftrightarrow \int_{\theta=\theta_i}^{\theta} da = \int_{\theta=\theta_i}^{\theta} \varepsilon h \sin \theta' d\theta' + o(\varepsilon)$$

Soit :  $a(\theta) - a(\theta_i) = \varepsilon \int_{\theta_i}^{\theta} h \sin \theta' d\theta' + o(\varepsilon)$

$$a(\theta) = a_i + \varepsilon \int_{\theta_i}^{\theta} h \sin \theta' d\theta' + o(\varepsilon)$$

où il faut prendre  $\int_{\theta_i}^{\theta} h(a \cos \theta', a \sin \theta') \sin \theta' d\theta'$  à l'ordre 0 en  $\varepsilon$  pour respecter la précision  $o(\varepsilon)$ .

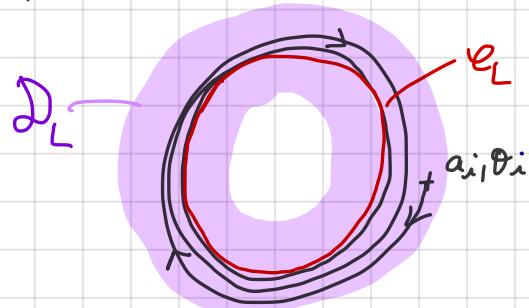
si l'état initial  $(a_i, \theta_i)$  est pris "trop loin" du cycle limite, la contribution de  $\int_{\theta_i}^{\theta} h \sin \theta' d\theta' \gg 1$  et  $\varepsilon \int_{\theta_i}^{\theta} h \sin \theta' d\theta'$  n'est pas nécessairement négligeable devant  $a_i$ .



On va examiner les conséquences de (15) dans un voisinage de l'esp. des fase

## b. Evolution de $a(t)$ et $\theta(t)$ au voisinage du $C_L$

Dans un voisinage  $\mathcal{D}_L$  proche du  $C_L$ , l'amplitude  $a(t)$  varie peu par rapport à sa valeur initiale prise dans  $\mathcal{D}_L$



Autrement dit :  $\forall (a_i, \theta_i) \in \mathcal{V}_{C_L}$ ,  $\forall \theta \in [\theta_i; \theta_i + 2\pi]$ ,

$$\int (15) d\theta' \Rightarrow a(\theta) = a_i + \varepsilon \int_{\theta_i}^{\theta} h \sin \theta' d\theta' + o(\varepsilon)$$

où  $|\varepsilon \int_{\theta_i}^{\theta} h \sin \theta' d\theta'| \ll a_i$

notons  $\gamma := \int_{\theta_i}^{\theta} h \sin \theta' d\theta'$ ,  $a(\theta) = a_i + \varepsilon \gamma$ ,

$$\varepsilon \gamma \ll a_i \Rightarrow h(a \cos \theta, a \sin \theta) = h|_{a_i} + \varepsilon \gamma h'|_{a_i} + \frac{\varepsilon^2 \gamma^2}{2} h''|_{a_i} + o(\varepsilon^2)$$

deac :

$$\boxed{\int (15) d\theta' \Rightarrow a(\theta) = a_i + \varepsilon \int_{\theta_i}^{\theta} h|_{a_i} \sin \theta' d\theta' + o(\varepsilon)} \quad (16)$$

$(a_i, \theta_i) \in \mathcal{V}_{C_L}$

$\theta(t)$  :

$$\frac{d\theta}{dt} = -1 - \varepsilon \frac{1}{a} h \cos \theta$$

$$d\theta = -dt - \varepsilon \frac{1}{a_i + \varepsilon a_i} (h|_{a_i} + \varepsilon a_i h'|_{a_i} + \dots) \cos \theta dt$$

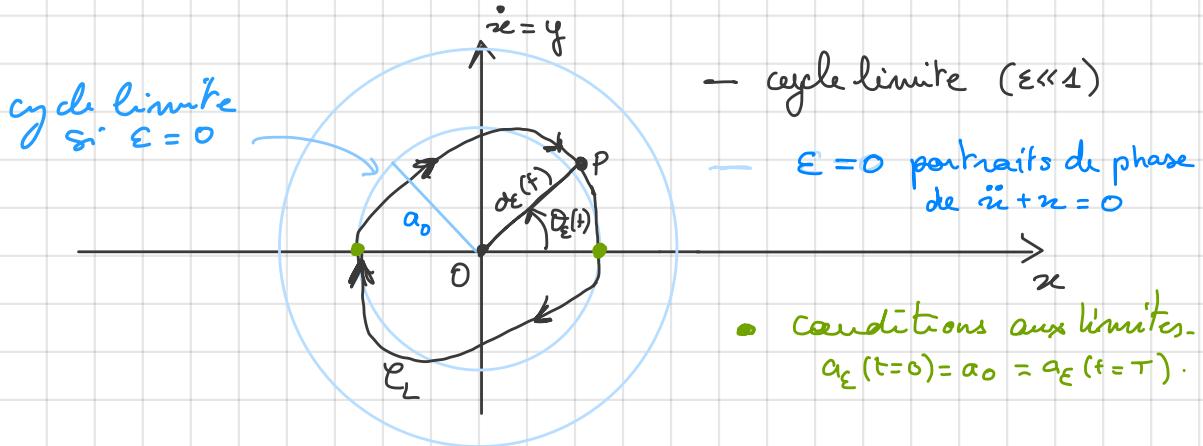
$$= -dt - \frac{\varepsilon}{a_i} \left(1 - \varepsilon \frac{a_i}{a_i}\right) (h|_{a_i} + \varepsilon a_i h'|_{a_i} + \dots) \cos \theta dt$$

$$\Rightarrow d\theta = -dt \left(1 + \frac{\varepsilon}{a_i} h|_{a_i} \cos \theta\right) + o(\varepsilon) \quad (17)$$

### 3. Application : développement perturbatif du C.L.

On suppose l'existence d'un cycle limite  $\mathcal{C}_L$ .

On note  $\{\alpha_\varepsilon(t), \theta_\varepsilon(t)\}$  les CP de  $\mathcal{C}_L$ .



On note  $T$  la période du cycle limite.

$\alpha_\varepsilon(t)$  et  $\theta_\varepsilon(t)$  sont périodiques de période  $T$

On peut aussi faire le changement de variable  $t \rightarrow \theta_\varepsilon$  et alors :  $\alpha_\varepsilon(\theta_\varepsilon)$  est  $2\pi$  - périodique, car le cycle limite est fermé par définition.

Avec la convention pour le sens de parcours de  $\mathcal{C}_L$  (horaire) ;  $t \uparrow \Rightarrow \theta_\varepsilon \uparrow$ .

On note  $a_0$  l'amplitude du CL correspondant à  $\varepsilon \rightarrow 0$  i.e.  $\ddot{x} + x = 0$ , et on pose les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_\varepsilon(t=0) = a_0 = \alpha_\varepsilon(\theta_\varepsilon = 2\pi) \\ \alpha_\varepsilon(t=T) = a_0 = \alpha_\varepsilon(\theta_\varepsilon = 0) \end{array} \right\} \text{(C.I.)}$$

### a. Amplitude

Première conséquence de (16):  $a_i = a_0$  d'après les C.I.

$$(18) \quad a_\varepsilon(\theta_\varepsilon) = a_0 + \varepsilon a_1(\theta_\varepsilon) + o(\varepsilon), \quad a_1(\theta_\varepsilon) = \int_{2\pi}^{\theta_\varepsilon} \frac{a}{|a_0|} \sin \theta' d\theta'$$

$$\Rightarrow \quad a_\varepsilon(\theta_\varepsilon) = a_0 + o(\varepsilon)$$

À l'ordre 0 en  $\varepsilon$ , l'amplitude du cycle limite est une constante égale à celle du régime harmonique

Ainsi lorsque l'on cherche l'amplitude de la solution de (0) associée au cycle limite dans le régime LKC1, on peut la considérer comme constante et égale à celle du régime harmonique ( $\varepsilon=0$ ) à l'ordre 0 en  $\varepsilon$ .

Reste à préciser  $\theta_\varepsilon$  en fonction de  $t$ , c'est ce qui va suivre.

## b. Angle, période, pulsation

$$T := \int_0^T dt, \text{ or d'après (17)}: d\theta = -dt \left( 1 + \frac{\varepsilon}{a_0} h|_{a_0} \cos \theta \right) + o(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow dt = \frac{-d\theta}{1 + \frac{\varepsilon}{a_0} h|_{a_0} \cos \theta} + o(\varepsilon) = -d\theta \left( 1 - \varepsilon a_0^{-1} h|_a \cos \theta \right) + o(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow T = \int_0^T dt = - \int_{2\pi}^0 \left( 1 - \varepsilon a_0^{-1} h|_{a_0} \cos \theta \right) d\theta + o(\varepsilon)$$

$$T = 2\pi - \frac{\varepsilon}{a_0} \int_0^{2\pi} h|_{a_0} \cos \theta d\theta + o(\varepsilon) \quad (23)$$

Soir:

$$T = T_0 - \varepsilon T_1 + o(\varepsilon), \quad T_1 = \frac{1}{a_0} \int_0^{2\pi} h|_{a_0} \cos \theta d\theta \quad (19)$$

Rq: On rappelle que l'on travaille avec des grandeurs ordim!

$$t \equiv \omega_0 t \Rightarrow T_0 \equiv \omega_0 T_0 = 2\pi \quad \text{et} \quad x \equiv \frac{x}{x_0}.$$

On en déduit aussi le développement perturbatif de  $\theta_\varepsilon$ :

$$dt = -d\theta \left( 1 - \varepsilon a_0^{-1} h|_{a_0} \cos \theta \right) + o(\varepsilon)$$

$$t - \underbrace{t_0}_{=0} = -(\theta_\varepsilon - 2\pi) + \frac{\varepsilon}{a_0} \int_{2\pi}^{\theta_\varepsilon} h|_{a_0} \cos \theta' d\theta' + o(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \theta_\varepsilon(t) = \underbrace{2\pi - t}_{\theta_0(t)} + \frac{\varepsilon}{a_0} \int_{2\pi}^{\theta_\varepsilon} h|_{a_0} \cos \theta' d\theta' + o(\varepsilon)$$

$$\theta_\varepsilon(t) = \theta_0(t) + \varepsilon X + o(\varepsilon)$$

$$\text{or} \quad \int_{2\pi}^{\theta_\varepsilon} = \int_{2\pi}^{\theta_0} + \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \varepsilon X} \quad \text{et} \quad \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \varepsilon X} \psi(\theta') d\theta' = \varepsilon X \psi(\theta') + o(\varepsilon) \quad \text{car } \varepsilon \ll 1$$

donc en  $o(\varepsilon)$ :

$$\theta_\varepsilon(t) = \theta_0(t) + \frac{\varepsilon}{a_0} \int_{2\pi}^{\theta_0(t)} h|_{a_0} \cos \theta' d\theta' + o(\varepsilon)$$

Soit

$$(20) \quad \Theta_{\varepsilon}(t) = \Theta_0(t) + \varepsilon \Theta_1(t) + o(\varepsilon), \text{ avec} \begin{cases} \Theta_0(t) = 2\pi - t \\ \Theta_1(t) = \frac{1}{a_0} \int_0^{2\pi} \frac{a_1}{a_0} \cos \theta d\theta \end{cases}$$

La pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  se déduit de (24) :

$$\omega = \frac{\frac{2\pi}{T_0 - \varepsilon T_1}}{T_0} + o(\varepsilon) = \frac{\frac{2\pi}{T_0}}{1 - \varepsilon \frac{T_1}{T_0}} + o(\varepsilon)$$

$$\omega = 1 + \varepsilon \frac{T_1}{T_0} + o(\varepsilon)$$

soit :  $\omega = \omega_0 + \varepsilon \frac{T_1}{T_0} + o(\varepsilon) \quad (21)$ ,  $T_1 = \frac{1}{a_0} \int_0^{2\pi} \frac{a_1}{a_0} \cos \theta d\theta$

Rq :  $t \equiv \omega_0 t \Rightarrow T_0 \equiv 2\pi \Leftrightarrow \omega_0 = 1$

À l'ordre 0 en  $\varepsilon$ , la pulsat°  $\omega$  du cycle limite est celle du régime harmonique, la const° commence en  $\varepsilon$ .

(18) et (21) justifient la recherche de solution pour le cycle limite de (O) ds le cas  $\varepsilon \ll 1$  sous la forme (dim) :  $x(t) = a_0 \cos(\omega_0 t) \quad (22)$ , ac  $(a_0, \omega_0) = \text{cstes.}$  qui est valable à l'ordre  $O(\varepsilon)$ .

### c. Caractérisation du C.L.

On rappelle que l'an avait mentionné que :

$$\mathcal{E}(\tau) - \mathcal{E}(0) = -\varepsilon \int_0^\tau y(t) h(n(t), y(t)) dt$$

Avec (18)  $\Leftrightarrow a_\varepsilon(\theta_\varepsilon) = a_0 + \varepsilon a_1(\theta_\varepsilon) + o(\varepsilon)$ ,

(20)  $\Leftrightarrow \theta_\varepsilon(t) = 2\pi t + \varepsilon \theta_1(t) + o(\varepsilon)$ ,

et (19)  $\Leftrightarrow T = T_0 - \varepsilon T_1 + o(\varepsilon)$ ,

$$\mathcal{E}(\tau) - \mathcal{E}(0) = -\varepsilon \int_0^\tau y(t) h(n(t), y(t)) dt, \text{ donc :}$$

$$\mathcal{E}(\tau) - \mathcal{E}(0) = -\varepsilon \int_0^{T_0} a_0 \sin(2\pi t) h(a_0 \cos(2\pi t), a_0 \sin(2\pi t)) dt + o(\varepsilon)$$

$$\mathcal{E}(\tau) - \mathcal{E}(0) = +a_0 \varepsilon \int_0^{2\pi} \sin t h(a_0 \cos t, -a_0 \sin t) dt + o(\varepsilon)$$

Soit :

(23)  $\mathcal{E}(\tau) - \mathcal{E}(0) = g(a_0) + o(\varepsilon)$

$$g(a_0) = \varepsilon a_0 \int_0^{2\pi} h(a_0 \cos t, -a_0 \sin t) \sin t dt$$

Or sur le cycle limite :  $\mathcal{E}(\tau) = \mathcal{E}(0)$

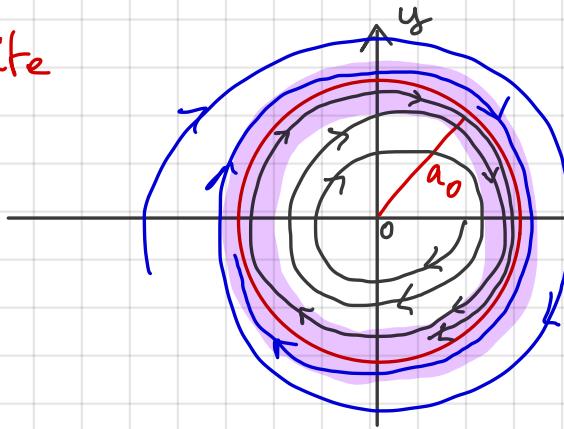
$\Rightarrow a_0$  est déterminée par l'équation :  $g(a_0) = 0$

$\Rightarrow$  Condition d'existence d'un cycle limite :

Un cycle limite existe si  $g(x) = 0$  admet une solution non nulle, elle est notée  $a_0$  et correspond à l'amplitude du cycle limite.

Si  $g(x)$  admet une solution, que peut-on dire de la stabilité du C.L. ?

- cycle limite



$$\mathcal{D}_L \equiv \text{zone dans laquelle} \\ \begin{cases} \alpha_\varepsilon(t) = a_0 + O(\varepsilon) \\ x_\varepsilon(t) = a_0 \cos t \end{cases}$$

figure 2

La figure 2 représente un cycle limite stable :

i.e.: en noir,  $\Leftrightarrow a < a_0$ ,  $\varepsilon(2\pi) > \varepsilon(0)$ ,  $\varepsilon \nearrow$  tant que  $a < a_0$   
en bleu,  $\Leftrightarrow a > a_0$ ,  $\varepsilon(2\pi) < \varepsilon(0)$ ,  $\varepsilon \searrow$  tant que  $a > a_0$

Avec (23) cette définition se traduit comme suit:

Soit  $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ , si  $a \in ]a_0 - \delta; a_0[$ ,  $g(a) > 0$

si  $a \in ]a_0; a_0 + \delta[$ ,  $g(a) < 0$

je:  $\frac{g(a_0 + \delta) - g(a_0 - \delta)}{\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} g'(a_0)$ , est négatif car  
 $g(a_0 + \delta) < 0$  et  $g(a_0 - \delta) > 0$

Condition de stabilité du cycle limite.

Le cycle limite d'amplitude  $a_0$  est stable si

$$g'(a_0) < 0$$

Rmq: le cycle est unstable si  $g'(a_0) > 0$ .

## 4. Application : analyse du cycle limite de van der Pol.

Application : Détermination de l'amplitude et la pulsation du cycle limite de l'équation de van der Pol :

$$(VdP) \Leftrightarrow \ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

pour  $\varepsilon \ll 1$ , et discutons de sa stabilité.

$$(VdP) \Rightarrow h(x, y) = (x^2 - 1)y$$

$$\hookrightarrow \ddot{x} + \varepsilon h(x, \dot{x}) + x = 0$$

L'amplitude du cycle limite est la solution non nulle

de :  $g(a) = 0$  ,  $g(a) := \varepsilon a \int_0^{2\pi} h(a \cos t, -a \sin t) \sin t dt$ .

Sait :  $\int_0^{2\pi} h(a \cos t, -a \sin t) \sin t dt = 0$

Sait :  $-a \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t - 1) \sin^2 t dt = 0$

Sait :  $a^2 \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t)^2 dt - \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a \cos a \neq 0 \\ a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \end{cases}$

Sait :  $\frac{a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt - \pi = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = 2t \\ dt' = 2dt \\ t = 2\pi \Leftrightarrow t' = 4\pi \end{array} \right. \Rightarrow \frac{a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = \frac{a^2}{8} \int_0^{4\pi} \sin^2 t' dt' = \frac{a^2}{8} \pi$$

Soit  $\pi \left( \frac{a^2}{8} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow a = a_0 := 2 \quad \text{car } a > 0$ .

Donc :  $a_\varepsilon(0) = 2 + O(\varepsilon)$

on a

$$g(a) = -\varepsilon a^2 \pi \left( \frac{a^2}{4} - 1 \right)$$

d'au:  $g'(a) = \varepsilon a \pi (2 - a^2)$

$$g'(a_0) = -4\pi\varepsilon$$

$\Rightarrow$  Le cycle est stable si  $g'(a_0) < 0$   
cad si  $\varepsilon > 0$

La pulsation est donnée par (24):

$$\omega = 1 + \frac{\varepsilon}{2\pi a_0} \int_0^{2\pi} h(a_0 \cos \theta, a_0 \sin \theta) \cos \theta d\theta + o(\varepsilon)$$

or  $\int_0^{2\pi} h|_{a_0} \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} (a_0^2 \cos^2 \theta - 1) a_0 \sin \theta \cos \theta d\theta$

$$= a_0^3 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos^3 \theta d\theta}_{+ \pi} - \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta}_{= 0}$$

$$+ \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin \theta \cos^3 \theta d\theta}_{\text{impaire car } \cos^3 \text{ paire et } \sin \text{ impaire}} = 0$$

$$= 0$$

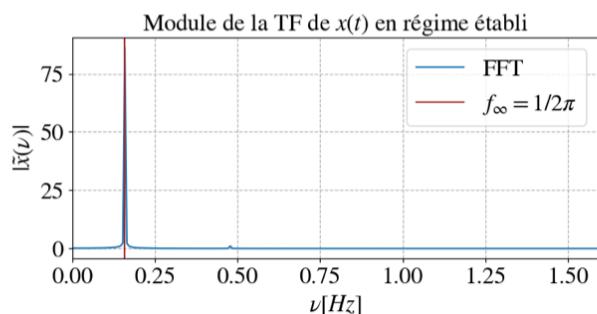
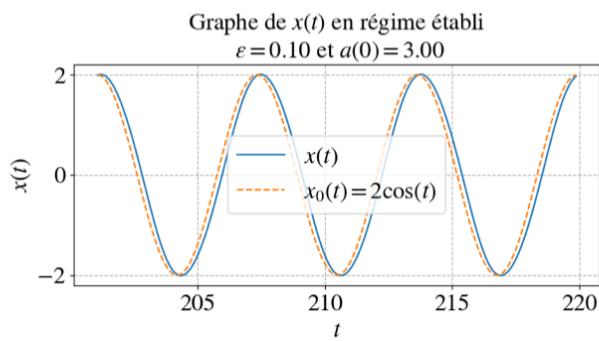
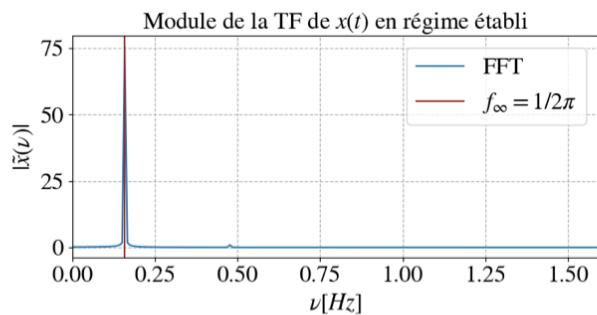
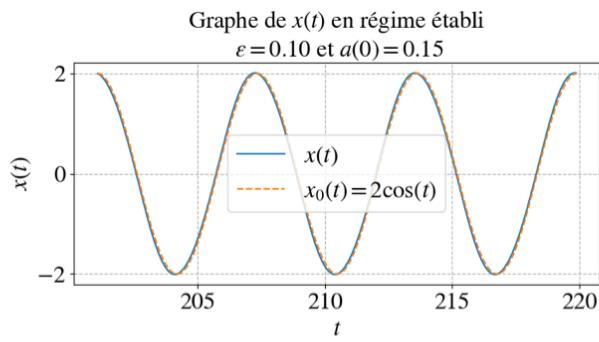
$\Rightarrow \boxed{\omega = 1 + o(\varepsilon)}$

CCP: pour  $\varepsilon \ll 1$  le cycle limite de

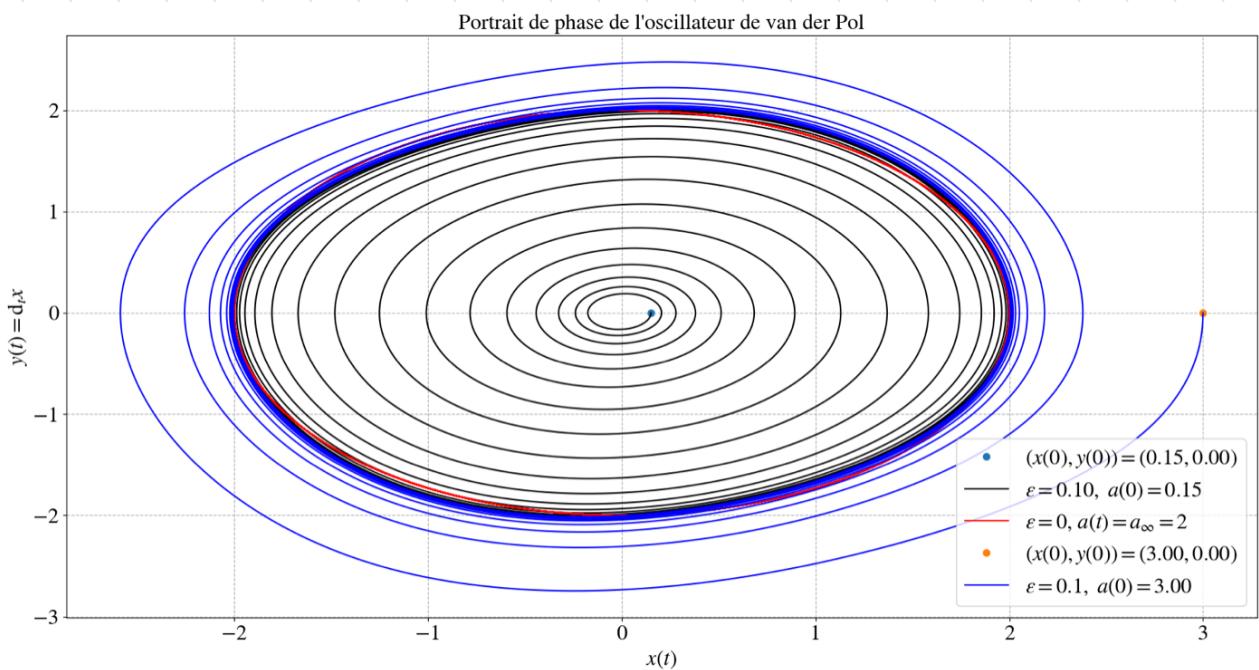
$$\ddot{x} + \varepsilon (x^2 - 1) \dot{x} + x = 0,$$

a pour solut<sup>e</sup> approchée:  $x(t) = 2 \cos t + O(\varepsilon)$

Il est stable si  $\varepsilon > 0$ , instable si  $\varepsilon < 0$ .



On remarque que le régime établi est quasi-sinusoidal.  
 Plus  $a(0) \gg 2$  et plus il apparaît un déphasage entre la solution obtenue à l'ordre 0 :  $2\cos t$  et la solution réelle du cycle limite.



Convergence en partant de  $a(0) < 2$  et  $a(0) > 2$  vers le cycle limite. On a représenté en rouge l'approximation du cycle limite  $2\cos t$  valable à l'ordre 0 en  $\varepsilon$ .

## II. Méthode pratique pour déterminer l'amplitude et la période du cycle limite: approximation du 1<sup>er</sup> harmonique (A<sub>1H</sub>)

### 1. Relation fréq.-Amplitude du cycle limite avec l'A<sub>1H</sub>

Soit (0)  $\ddot{x} + \varepsilon h(x, \dot{x}) + x = 0$

Supposons que :

1. Il existe une solution périodique de (0) suffisamment proche de  $x = a_\varepsilon \cos(\omega t)$  ( $\Rightarrow \dot{x} = -a_\varepsilon \omega \sin(\omega t)$ ) avec  $|a_\varepsilon| = \text{cstes} > 0$ .

2. La fonction  $h$  est développable en série de Fourier:

$$h(x) \underset{x=a\cos\omega t}{=} h(t) = A_0(h) + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n(h) \cos(n\omega t) + B_n(h) \sin(n\omega t))$$

où :  $A_n(h) := \frac{2}{T} \int_T h(a_\varepsilon \cos \omega t, -a_\varepsilon \omega \sin \omega t) \cos \omega t dt$

$$B_n(h) := \frac{2}{T} \int_T h(a_\varepsilon \cos \omega t, -a_\varepsilon \omega \sin \omega t) \sin \omega t dt$$

$$A_0(h) := \frac{2}{T} \int_T h dt$$

telle que  $A_0(h) = 0$

$$\ddot{x} = -a_\varepsilon \omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow (0) \Leftrightarrow (1 - \omega^2) a_\varepsilon \cos(\omega t) + \varepsilon (A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t) + \sum_{n=2}^{+\infty} H_n(h)) = 0$$

→ l'approximation du 1<sup>er</sup> harmonique

Cela signifie à ne garder que  $H_1 = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)$

$$(0) \overset{1H}{\Leftrightarrow} 0 = (1 - \omega^2) a_\varepsilon \cos(\omega t) + \varepsilon A_1(h) \cos(\omega t) + \varepsilon B_1(h) \sin(\omega t)$$

~~$\sum_{n=2}^{+\infty} H_n(h)$~~

harmonique de rang  $\geq 2$

$$\text{au: } \left\{ \begin{array}{l} A_1(h) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} h(a_{\varepsilon} \cos \omega t, -a_{\varepsilon} \omega \sin(\omega t)) \cos(\omega t) dt \equiv A_1(a_{\varepsilon}) \\ B_1(h) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} h(a_{\varepsilon} \cos \omega t, -a_{\varepsilon} \omega \sin(\omega t)) \sin(\omega t) dt \equiv B_1(a_{\varepsilon}) \end{array} \right.$$

$$0 = \left[ (1 - \omega^2) a_{\varepsilon} + \varepsilon A_1(a_{\varepsilon}) \right] \cos \omega t + \varepsilon B_1(a_{\varepsilon}) \sin(\omega t), \quad \text{et}$$

$$(27) \quad (1 - \omega^2) a_{\varepsilon} + \varepsilon A_1(a_{\varepsilon}) = 0 \quad \text{et} \quad B_1(a_{\varepsilon}) = 0 \quad (28)$$

(27) et (28) forment un syst. de 2 éq. à 2 inconnues ( $a_{\varepsilon}, \omega$ ).  
 $\uparrow$   
 $a_{\varepsilon}$

## 2. Justification de l'approximation du 1<sup>er</sup> harmonique

Commentaires sur l'approximation du 1<sup>er</sup> harmonique :

On considère les harmoniques de rang  $\geq 2$  de la solution périodique de (0) comme termes d'amplitude négligeable devant le premier harmonique.

On peut saisir l'origine de cette approximation :

Soit :  $\ddot{x} + x = F \quad ((0) \Leftrightarrow \ddot{x} + x = -\underbrace{\varepsilon h(n, \dot{x})}_{\equiv F})$

si  $x = a \cos(nwt)$   $\Rightarrow \ddot{x} = -n^2 \omega^2 x$

et si  $F = K \cos(nwt) \Rightarrow (1 - n^2 \omega^2)x = K \cos(nwt) \Leftrightarrow (0)$

soit : 
$$\boxed{x(t) = \frac{K \cos(nwt)}{1 - n^2 \omega^2} \rightarrow 0 \text{ comme } \frac{1}{n^2}}$$

$$\Rightarrow |x_1| \gg |x_2| = \left| \frac{K \cos(2\omega t)}{1 - 4\omega^2} \right|$$

### 3. Application: équation de van der Pol

Sait l'équation du Van der Pol :

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + u = -\varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} \quad (0)$$

Supposons une solution périodique proche de  $a_\varepsilon \cos \omega t$ :

$$u \approx a_\varepsilon \cos \omega t, a_\varepsilon \text{ et } \omega \text{ st csts.}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + u = (1 - \omega^2) a_\varepsilon \cos \omega t \\ x^2 - 1 = a_\varepsilon^2 \cos^2 \omega t - 1 \Rightarrow \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} = -a_\varepsilon \omega \varepsilon (a_\varepsilon^2 \cos^2 \omega t - 1) \sin \omega t \end{cases}$$

$$\rightarrow (0) \Leftrightarrow (1 - \omega^2) a_\varepsilon \cos \omega t = +a_\varepsilon \omega \varepsilon (a_\varepsilon^2 \cos^2 \omega t - 1) \sin \omega t = -a_\varepsilon \omega \varepsilon \sin \omega t + a_\varepsilon^3 \omega \varepsilon \cos^2 \omega t \sin \omega t$$

$$\text{Or: } \cos^2 \omega t \sin \omega t = \sin \omega t - \sin^3 \omega t$$

$$\text{et } \sin^3 \omega t = \frac{1}{4} (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t)$$

$$\text{donc: } \boxed{\cos^2 \omega t \sin \omega t = \frac{1}{4} \sin \omega t + \frac{1}{4} \sin 3\omega t}$$

$$(0) \Leftrightarrow (1 - \omega^2) a_\varepsilon \cos \omega t = -a_\varepsilon \omega \varepsilon \left(1 - \frac{a_\varepsilon^2}{4}\right) \sin \omega t + \cancel{\frac{a_\varepsilon^3 \omega \varepsilon}{4} \sin 3\omega t} \quad H_3$$

Avec l'approximation de 1<sup>er</sup> harmonique:

$$\left| \frac{a_\varepsilon^3 \omega \varepsilon}{4} \sin(3\omega t) \right| \ll \left| -a_\varepsilon \omega \varepsilon \left(1 - \frac{a_\varepsilon^2}{4}\right) \sin(\omega t) \right|$$

$$\text{d'où: } (0) \Leftrightarrow (1 - \omega^2) a_\varepsilon \cos(\omega t) + a_\varepsilon \omega \varepsilon \left(1 - \frac{a_\varepsilon^2}{4}\right) \sin \omega t = 0$$

Pour que ce soit vrai  $\forall t$ , il faut et suffit que:

$$1 - \omega^2 = 0 \quad \text{et} \quad 1 - \frac{a_\varepsilon^2}{4} = 0 \quad (\text{sachant que } a_\varepsilon \neq 0 \text{ et } \varepsilon \neq 0)$$

et donc:

$$\boxed{\omega^2 = 1 \Leftrightarrow \omega = 1 \quad \omega > 0}$$

$$\boxed{a_\varepsilon^2 = 4 \Leftrightarrow a_\varepsilon = 2 \quad a_\varepsilon > 0}$$

Le cycle limite de l'oscillateur de Van der Pol est une bonne approximation :

$$\boxed{x(t) = 2 \cos(t)} \quad (5)$$

### III. Méthode de résolution approchée : approximation de Krylov et Bogolioubov

On cherche à déterminer :  $a(t)$  et  $\theta(t)$  et donc  $x(t)$  pour  $|\epsilon| \ll 1$  sachant que  $x$  doit vérifier

$$(0) \Leftrightarrow \ddot{x} + \epsilon h(x, \dot{x}) + x = 0$$

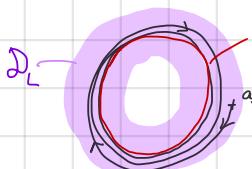
#### 1. Évolution approchée de $a(t)$

Avec  $x = a \cos \theta$  et  $y = a \sin \theta$  ( $y = \dot{x}$ ) on a mg :

$$\frac{da}{d\theta} = \epsilon \underbrace{h(a(\theta) \cos \theta, a(\theta) \sin \theta) \sin \theta}_{:= \Psi(\theta)} + o(\epsilon). \Leftrightarrow (15)$$

La fonction  $\Psi(\theta)$  n'est à priori pas périodique car  $a(\theta)$  n'est à priori pas périodique.

Cependant, on a mg :  $\forall (a_i, \theta_i) \in \mathcal{D}_L, \forall \theta \in [\theta_i; \theta_i + 2\pi]$ ,



$$\int (15) d\theta' \Rightarrow a(\theta) = a_i + \epsilon \int_{\theta_i}^{\theta} \underbrace{h|_{a_i} \sin \theta' d\theta'}_{a_1(\theta)} + o(\epsilon) \Leftrightarrow (16)$$

$\uparrow$   
 $(a_i, \theta_i) \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}_L}$

Ainsi à l'ordre 0 en  $\epsilon$ ,  $a(\theta) = a_i = \text{cste}$

Pour  $\theta \in [\theta_i; \theta_i + 2\pi]$ ,  $(a(\theta_i), \theta_i) \in \mathcal{D}_L$ ,

on traite  $a(\theta) = a$  comme une constante fixe.

On note  $\Psi(\theta) \equiv \Psi_a(\theta)$ .

$\Psi_a(\theta)$  est  $2\pi$ -périodique.

On peut donc effectuer un développement en série de Fourier :

$$\Psi_a(\theta) = P_0(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} [P_n(a) \cos(n\theta) + q_n(a) \sin(n\theta)]$$

où :

$$P_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_a(u) du.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq 1, \quad P_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_a(u) \cos(nu) du \\ q_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_a(u) \sin(nu) du. \end{array} \right.$$

Ainsi (15) donne :

$$(15) \stackrel{\text{DL}}{\Rightarrow} \frac{da}{d\theta} = \varepsilon P_0(a) + \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} [P_n(a) \cos(n\theta) + q_n(a) \sin(n\theta)] + o(\varepsilon)$$

On va maintenant examiner l'ordre en  $\varepsilon$  des contributions moyennes dans (15).

Pour "moyenne" on entend l'espérance sur un cycle de  $\theta_i$  à  $\theta_i + 2\pi$  :

$$\langle X \rangle := \int_{\theta_i}^{\theta_i + 2\pi} X(u) \frac{du}{2\pi}$$

$$\langle 15 \rangle \Rightarrow \langle \frac{da}{d\theta} \rangle = \varepsilon \langle P_0(a) \rangle + \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} [\langle P_n(a) \cos(n\theta) \rangle + \langle q_n(a) \sin(n\theta) \rangle] + o(\varepsilon)$$

or  $P_n(a) \stackrel{a=a_i + \varepsilon a_1}{=} P_n(a_i) + \varepsilon P_n'(a_i) + o(\varepsilon)$ , idem pour  $q_n(a)$

i.e. à l'ordre  $O$   $P_n(a)$  ne dépend pas de  $\theta$

Ainsi :

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} [\langle p_n(a) \cos n\theta \rangle + \langle q_n(a) \sin n\theta \rangle] + o(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} [P_n(a_1) \langle \cos n\theta \rangle + q_n(a_1) \langle \sin n\theta \rangle] + o(\varepsilon)$$

au :  $\langle \cos n\theta \rangle = \langle \sin n\theta \rangle = 0$

$$\left( \int_{0_i}^{\theta_i+2\pi} \cos n\theta \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi n} [\sin n\theta]_{0_i}^{\theta_i+2\pi} = 0 \right)$$

D'anc :  $\boxed{\varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \langle H_n(a, \theta) \rangle + o(\varepsilon) = 0 + o(\varepsilon)}$

au l'on note  $H_n(a, \theta) := p_n(a) \cos n\theta + q_n(a) \sin n\theta$

et donc  $\boxed{\left\langle \frac{da}{d\theta} \right\rangle = \varepsilon \langle p_0(a) \rangle + o(\varepsilon)} \Leftrightarrow (15)$ .

i.e. en moyenne les harmoniques  $H_{n \geq 1}$  ont un effet en  $\varepsilon^2$  dans (15).

L'approximation de Krylov et Bogoliubov consiste à les négliger directement dans (15), réduisant leurs effets à leurs moyennes.

(15) devient alors :

$$\boxed{\frac{da}{d\theta} = \varepsilon p_0(a) + o(\varepsilon) \Leftrightarrow (15KB)}$$

On peut aussi écrire (15KB) avec le paramétrage ent.

D'après (14) :  $\dot{\theta} = -1 - \varepsilon h a^{-1} \cos \theta$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{da}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \varepsilon p_0(a) \cdot (-1 - \varepsilon h a^{-1} \cos \theta) \\ &= -\varepsilon p_0(a) + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{da}{dt} = -\varepsilon p_0(a) + o(\varepsilon) \Leftrightarrow (15KBt)}$$

## 2. Évolution approchée de $\theta(t)$

D'après (14) :  $\dot{\theta} = -1 - \frac{\varepsilon}{a} b \cos \theta$

Posons  $\phi(\theta) = b(a(\theta) \cos \theta, a(\theta) \sin \theta) \cos \theta$ ,  
 $\dot{\theta} = -1 - \varepsilon a^{-1} \phi$

En utilisant le même argument qu'en 1., à

savoir :  $a(\theta) = a_i + \varepsilon a_{i1}(\theta) + o(\varepsilon)$ ,

$$\Rightarrow a(\theta) = a_i + O(\varepsilon) = \text{const} + O(\varepsilon),$$

on considère "a" fixé environ égal à une constante.

$$\boxed{\phi(\theta) = \phi_a(\theta)}$$

$\phi_a$  est  $2\pi$ -périodique, développable en série de Fourier

$$\phi_a(\theta) = r_0(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} [r_n(a) \cos(n\theta) + s_n(a) \sin(n\theta)]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_n(a) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi_a(u) \cos(nu) du; \quad s_n(a) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi_a(u) \sin(nu) du. \\ r_0(a) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_a(u) du. \end{array} \right.$$

d'où :

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -1 - \frac{\varepsilon}{a} r_0(a) - \frac{\varepsilon}{a} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{r_n(a) \cos(n\theta)}{a} + \frac{s_n(a) \sin(n\theta)}{a} \right] + o(\varepsilon) \Leftrightarrow (14)}$$

En utilisant la même notation  $\langle \dots \rangle$  qu'en 1 :

$$\left\langle \frac{d\theta}{dt} \right\rangle = -1 - \varepsilon \left\langle \frac{r_0(a)}{a} \right\rangle - \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \left\langle \frac{r_n(a) \cos(n\theta)}{a} \right\rangle + \left\langle \frac{s_n(a) \sin(n\theta)}{a} \right\rangle \right] + o(\varepsilon)$$

Or

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \left\langle \frac{r_n(a) \cos(n\theta)}{a} \right\rangle + \left\langle \frac{s_n(a) \sin(n\theta)}{a} \right\rangle \right] + o(\varepsilon) \stackrel{\downarrow}{=} \frac{\varepsilon}{a_i} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ r_n(a_i) \langle \cos(n\theta) \rangle + s_n(a_i) \langle \sin(n\theta) \rangle \right] + o(\varepsilon)$$

$$\text{or } \langle \cos n\theta \rangle = \langle \sin n\theta \rangle = 0$$

depuis

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \left\langle \frac{r_n(a) \cos n\theta}{a} \right\rangle + \left\langle \frac{s_n(a) \sin(n\theta)}{a} \right\rangle \right] + o(\varepsilon) = 0 + o(\varepsilon).$$

et donc :

$$\boxed{\left\langle \frac{d\theta}{dt} \right\rangle = -1 - \varepsilon \left\langle \frac{r_0(a)}{a} \right\rangle + o(\varepsilon)} \Leftrightarrow (14).$$

L'approximation de Krylov et Bogoliubov consiste à négliger l'effet des harmoniques de rang  $n \geq 1$  directement dans (14), réduisant leur effet à l'effet de leur moyenne sur un cycle  $[\theta_i; \theta_i + 2\pi]$  qui est en  $\varepsilon^2$ .

Ainsi:

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -1 - \varepsilon \frac{r_0(a)}{a} + o(\varepsilon) \Leftrightarrow (14KBt)}$$

## Résumé

$$\text{Krylov \& Bogoliubov} \rightarrow \begin{cases} \frac{da}{dt} = -\varepsilon p_0(a) + o(\varepsilon) \\ \frac{d\theta}{dt} = -1 - \frac{\varepsilon}{a} r_0(a) + o(\varepsilon) \end{cases}$$

$$\text{au: } \begin{cases} p_0(a) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(a \cos u, a \sin u) \sin u du \\ r_0(a) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(a \cos u, a \sin u) \cos u du \end{cases}$$

### 3. Exemple : oscillations de van der Pol.

On rappelle l'équation de van der Pol :

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

On a vu au II. qu'il y avait un cycle limite stable pour  $\varepsilon > 0$ . On considère donc  $\varepsilon > 0$ , et  $\varepsilon \ll 1$ .

Déterminons  $a(t)$ ,  $\theta(t)$  et  $x(t)$ , avec la C.I.  $a(0) = a_0$ .

$$h(u, y) = (x^2 - 1)y$$

Calculons  $p_0(a)$ :

$$\begin{aligned} p_0(a) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 u - 1) a \sin^2 u du \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{a^3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2u) du - a \int_0^{2\pi} \sin^2 u du \right] \end{aligned}$$

$$p_0(a) = \frac{a}{2} \left( \frac{a^2}{4} - 1 \right)$$

$$\text{d'où : } (15) \Rightarrow \frac{da}{dt} = -\varepsilon \frac{a}{2} \left( \frac{a^2}{4} - 1 \right)$$

Soit :

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{8} a(a^2 - 4)$$

Soit :

$$\frac{da}{a(a^2 - 4)} = -\frac{1}{8} \varepsilon dt$$

d'où :

$$\int \frac{da}{a(a^2 - 4)} = -\frac{1}{8} \varepsilon t + C_0, \quad C_0 = \text{cste}$$

on peut remarquer que :

$$\frac{1}{a(a^2 - 4)} = -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{a} - \frac{a}{a^2 - 4} \right)$$

$$\text{or } \int \frac{1}{a} da = \ln a \text{ et } \int \frac{da}{a^2 - b^2} = \frac{1}{2} \ln |a^2 - b^2|$$

$$\text{dans : } \int (15 \sqrt{b^2 t}) \Rightarrow -\frac{1}{2} \left( \ln a - \frac{1}{2} \ln |a^2 - b^2| \right) = -\frac{1}{8} \varepsilon t + C_0$$

$$\text{soit : } \ln \left( \frac{a}{\sqrt{|a^2 - b^2|}} \right) = \frac{1}{2} \varepsilon t + C_1, \quad C_1 = \text{cste}$$

$$\text{Soit : } \frac{a}{\sqrt{|a^2 - b^2|}} = d_0 e^{\varepsilon t / 2}, \quad d_0 = \text{cste}$$

$$\text{soit : } \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} = d_0 e^{\varepsilon t / 2}$$

$$\text{Soit : } \left| 1 - \frac{b^2}{a^2} \right| = d_1 e^{-\varepsilon t}, \quad d_1 = \text{cste}$$

$$\bullet) \text{ Si } a \geq 2 \text{ ie } 1 - \frac{b^2}{a^2} > 0 \quad 1 - d_1 e^{-\varepsilon t} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\text{Soit } a(t) = \frac{2}{\sqrt{1 - d_1 e^{-\varepsilon t}}}$$

$$\text{or } a(0) = a_1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{1 - d_1}} = a_1 \Leftrightarrow d_1 = 1 - \frac{4}{a_1^2}$$

$$\text{dans : } a(t) = \frac{2}{\sqrt{1 - (1 - \frac{b^2}{a_1^2}) e^{-\varepsilon t}}}, \quad \text{ou } a_1 \geq 2$$

$$\bullet) \text{ Si } a < 2 \text{ ie } 1 - \frac{b^2}{a^2} < 0, \quad \frac{b^2}{a^2} = 1 + d_1 e^{-\varepsilon t}$$

$$\text{Soit } a = \frac{2}{\sqrt{1 + d_1 e^{-\varepsilon t}}}$$

$$\text{or } a(0) = a_1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{1 + d_1}} = a_1 \Leftrightarrow d_1 = \frac{4}{a_1^2} - 1$$

$$\text{dans : } a(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + (\frac{4}{a_1^2} - 1) e^{-\varepsilon t}}}, \quad \text{ou } a_1 < 2$$

On remarque que dans les 2 cas :

$$a(t) = \frac{2}{\sqrt{1 - (1 - \frac{\epsilon}{a_i^2})e^{-\epsilon t}}} + o(\epsilon), \quad a(0) = a_i$$

Calculons  $r_0(a)$

$$r_0(a) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 u - 1) a \sin u \cos u du$$

$$\begin{aligned} r_0(a) &= \frac{1}{2\pi} \left( \underbrace{\int_0^{2\pi} a^2 \cos^3 u \sin u du}_{+ \pi} - \underbrace{\frac{a}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2u) du}_{=0} \right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a^2 \cos^3 u \sin u du = 0 \\ &\text{fct impaire} \end{aligned}$$

$$r_0(a) = 0$$

D'où :  $(14KBF) \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -1 + o(\epsilon)$

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_i - t + o(\epsilon) \quad \theta(0) = \theta_i$$

Ainsi ;  $x(t) := a(t) \cos(\theta(t))$  devient :

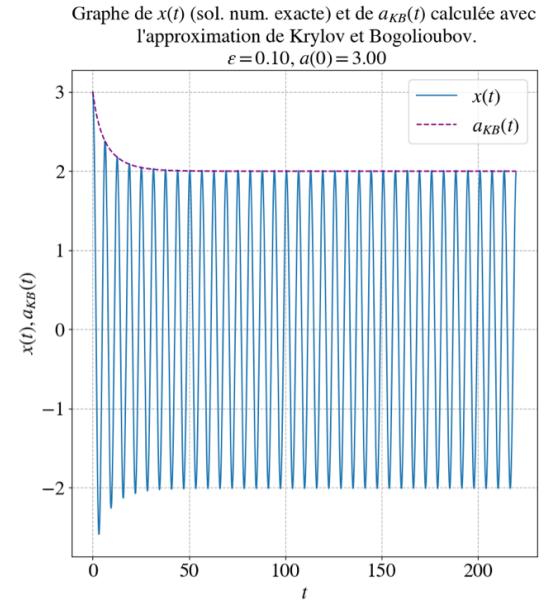
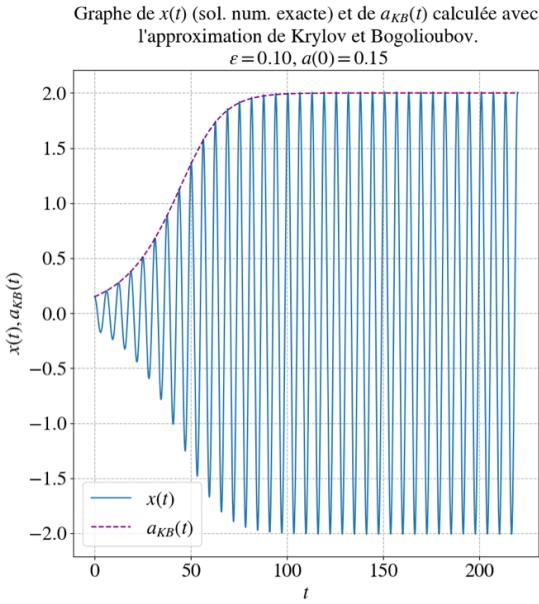
$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{1 - (1 - \frac{\epsilon}{a_i^2})e^{-\epsilon t}}} \cos(\theta_i - t) + o(\epsilon)$$

Rq: l'existence du cycle limite apparaît naturellement :

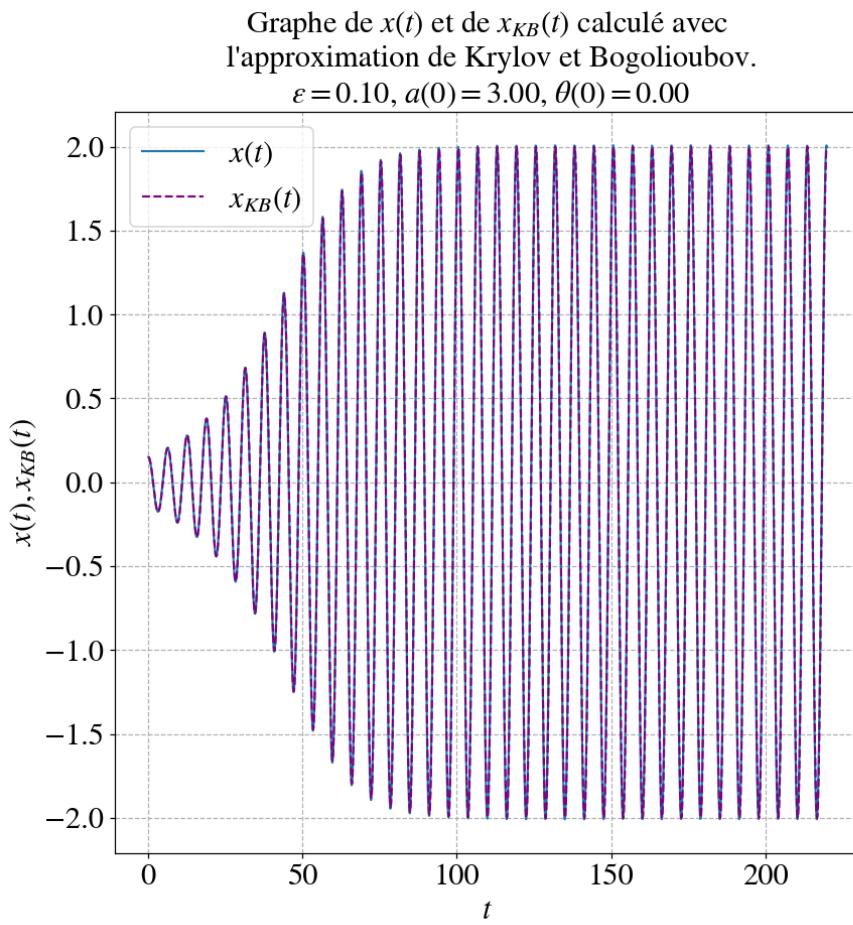
$$a(t) \xrightarrow[t \gg 1/\epsilon]{} 2$$

on a alors un régime périodique  $x_\infty(t) = 2 \cos(F - \theta_i)$

de période  $2\pi$  à l'ordre 1 en  $\varepsilon$ .



L'approximation de K et B est bonne.



## IV. Méthode de résolution approchée : linéarisation avec l'A1H

L'approximation du 1<sup>er</sup> Harmonique permettant de déterminer l'amplitude et la fréquence du cycle limite permet aussi d'obtenir une linéarisation de l'équat° NL, et par suite, après résolution, de déterminer une évolution approchée pour le CL.

### 1. Résolution de l'éq de VdP par linéarisation avec l'A1H

On va obtenir les solutions approchées de l'éq. de VdP par sa linéarisation.

Comme pour l'A1H (cf. II.1.), on suppose une solution du C.L. de la forme :

$$x = a_\varepsilon \cos(\omega t), \text{ avec } a_\varepsilon \text{ et } \omega \text{ constantes sur le C.L.}$$

L'éq. de VdP :  $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$  devient :

$$\ddot{x} = -a_\varepsilon \omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 x$$

$$\dot{x} = -\omega a_\varepsilon \sin(\omega t)$$

$$\varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} = \varepsilon(a_\varepsilon^2 \cos^2 \omega t - 1)(-\omega a_\varepsilon \sin \omega t)$$

$$= -\varepsilon \left[ a_\varepsilon^3 \omega \cos^2 \omega t \sin \omega t - a_\varepsilon \omega \sin \omega t \right]$$

$$= -\varepsilon a_\varepsilon \omega \left( \frac{a_\varepsilon^2}{4} - 1 \right) \sin \omega t - \varepsilon \frac{a_\varepsilon^3}{4} \sin(3\omega t)$$

Avec l'A1H,  $\varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} \approx -\varepsilon a_\varepsilon \omega \left( \frac{a_\varepsilon^2}{4} - 1 \right) \sin \omega t = +\varepsilon \left( \frac{a_\varepsilon^2}{4} - 1 \right) \dot{x}$

L'éq. de VdP, devient alors avec l'AIT :

$$\ddot{x}_i + \varepsilon \left( \frac{a_i^2}{4} - 1 \right) x_i + x_i = 0 \quad (\text{VdP linéarisée})$$

On va la résoudre avec les C.I.  $x_i(0) = a_i$  et  $\dot{x}_i(0) = 0$ .

$$x_i(0) = a_i \Leftrightarrow a_i^2 = a_i$$

éq. caractéristique:

$$X^2 + \varepsilon \left( \frac{a_i^2}{4} - 1 \right) X + 1 = 0$$

$$\Delta = \varepsilon^2 \left( \frac{a_i^2}{4} - 1 \right)^2 - 4$$

On recherche une solution oscillatoire.

On rappelle que pour une équation d'ordre 2 à coeff. constants dont le discriminant de l'éq. caractéristique est  $\Delta$ :

- si  $\Delta > 0$ , alors: 2 racines réelles  $r_1$  et  $r_2$ :  $X(t) = \lambda e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$
- si  $\Delta = 0$ ,  $\rightarrow$  1 racine réelle double  $r_0$ :  $X(t) = (\lambda t + \mu) e^{r_0 t}$
- si  $\Delta < 0$ ,  $\rightarrow$  2 racines C.C.:  $\mu \pm i\nu$  et  $X(t) = \lambda e^{\mu t} \cos(\nu t + \mu)$

Ici, il faut donc que:  $\varepsilon^2 \left( \frac{a_i^2}{4} - 1 \right)^2 - 4 < 0$

$$\text{c'est: } \varepsilon \left( \frac{a_i^2}{4} - 1 \right) < 2$$

$$\Delta = - \left( 4 - \varepsilon^2 \left( \frac{a_i^2}{4} - 1 \right)^2 \right) = (i\delta)^2$$

$$\text{où } \delta = 2 \sqrt{1 - \left[ \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{a_i^2}{4} - 1 \right) \right]^2}$$

Ainsi les racines C.C. de l'éq. caract. sont:

$$\mu \pm i\nu = \frac{-\varepsilon \left( \frac{a_i^2}{4} - 1 \right)}{2} \pm i \frac{\delta}{2}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \varepsilon \left( 1 - \frac{a_i^2}{4} \right) \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\delta}{2} = \sqrt{1 - \mu^2} > 0$$

$$\Rightarrow x_i(t) = \lambda e^{\mu t} \cos(\nu t + \mu) \equiv e^{\mu t} (\Lambda \cos \nu t - \beta \sin \nu t)$$

$$\text{or } x(0) = \Lambda = a_i$$

$$\ddot{x} = e^{ut} \left[ u\Lambda \cos vt - u\beta \sin vt - v\Lambda \sin vt - \beta v \cos vt \right]$$

$$\dot{x}(0) = u\Lambda - v\beta$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Leftrightarrow u\Lambda = v\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{u}{v} \Lambda = \frac{u}{v} a_i$$

$$\text{d'aut: } x(t) = e^{ut} \left[ a_i \cos(vt) - \frac{u}{v} a_i \sin(vt) \right]$$

$$x(t) = \frac{a_i}{v} e^{ut} \left[ v \cos(vt) - u \sin(vt) \right]$$

$$\text{or } u^2 + v^2 = 1$$

donc  $\exists \theta_i$  tq :  $v = \cos \theta_i$  et  $u = \sin \theta_i$

$$\text{ic: } \tan \theta_i = \frac{u}{v} = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\text{d'aut: } \boxed{x_L(t) = \frac{a_i}{\sqrt{1-u^2}} e^{ut} \cos \left[ \sqrt{1-u^2} t + \arctan \left( \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) \right]}$$

$$\text{ou } u = \frac{\epsilon}{2} \left( 1 - \frac{a_i^2}{4} \right) \quad x(0) = a_i$$

On peut comparer la solution obtenue par linéarisation

$x_L$  avec celle obtenue par la méthode de KB :

$$\boxed{x_{KB}(t) = \frac{2}{\sqrt{1-\left(1-\frac{4}{a_i^2}\right)e^{-\epsilon t}}} \cos(t - \theta_i)}$$

## 2. Résolution de l'éq du pendule par linéarisation avec l'ATH

Déterminons la relation fréquence-amplitude du CL du pendule d'équation canonique :

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \quad (\text{Pend})$$

en utilisant la méthode de linéarisation basée sur le 1er harmonique.

1) Supposons une solution du CL de la forme :

$$x(t) = a_\varepsilon \cos \omega t, \quad \text{avec } a_\varepsilon \text{ et } \omega \text{ constant.}$$

$$2) \ddot{x} = -\omega^2 x = -\omega^2 a_\varepsilon \cos \omega t$$

$$\sin x = \sin(a_\varepsilon \cos \omega t) = \psi_{a_\varepsilon}(t)$$

développons ce terme en série de Fourier.

$$\psi_{a_\varepsilon}(t) = p_0(a_\varepsilon) + \sum_{n=1}^{+\infty} [p_n(a_\varepsilon) \cos(n\omega t) + q_n(a_\varepsilon) \sin(n\omega t)]$$

$$\text{où } p_0(a_\varepsilon) = \frac{1}{T} \int_0^T \psi_{a_\varepsilon}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi/\omega} \sin(a_\varepsilon \cos \omega t) dt = 0$$

et pour  $n \geq 1$ ,

$$p_n(a_\varepsilon) = \frac{2}{T} \int_0^T \psi_{a_\varepsilon}(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$p_n(a_\varepsilon) = \frac{2}{T} \int_0^{2\pi/\omega} \sin(a_\varepsilon \cos \omega t) \cos(n\omega t) dt$$

$$q_n(a_\varepsilon) = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(a_\varepsilon \cos \omega t) \sin(n\omega t) dt = 0$$

car fonction impaire intégrée  
sur sa période

$$\Rightarrow \boxed{\psi_{a_\varepsilon}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(a_\varepsilon) \cos(n\omega t)}$$

Dans le cadre de l'A1H, on ne garde que le premier terme en  $\omega$ :

$$\rightarrow \Psi_{a_\varepsilon}(t) \simeq P_1(a_\varepsilon) \cos \omega t$$

$$\text{or } P_1(a_\varepsilon) = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(a_\varepsilon \cos \omega t) \cos(\omega t) dt \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^T \sin(a_\varepsilon \cos \omega t) \cos(\omega t) d(\omega t)$$

$$\text{On pose } u = \omega t \quad du = \omega dt$$

$$t \in [0; T] \Rightarrow u \in [0; 2\pi]$$

$$P_1(a_\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(a_\varepsilon \cos u) \cos u du \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin(a_\varepsilon \cos u) \cos u du}_{\substack{\text{fonction paire} \\ 2\pi \text{ périodique}}} \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(a_\varepsilon \cos u) \cos u du$$

$$P_1(a_\varepsilon) = 2 \overline{J_1(a_\varepsilon)} \quad \leftarrow \text{fonction de Bessel de 1ère espèce non-modifiée d'ordre 1}$$

$$\Rightarrow \Psi_{a_\varepsilon}(t) \simeq 2 \overline{J_1(a_\varepsilon)} \cos \omega t = \boxed{2 \frac{\overline{J_1(a_\varepsilon)}}{a_\varepsilon} x(t) = \Psi_{a_\varepsilon}(t)}$$

3) L'équation (Pend) linéarisée est donc:

$$-\omega^2 x + 2 \frac{\overline{J_1(a_\varepsilon)}}{a_\varepsilon} x = 0 \iff x \left( 2 \frac{\overline{J_1(a_\varepsilon)}}{a_\varepsilon} - \omega^2 \right) = 0$$

$$\text{soit: } -\omega^2 a_\varepsilon \cos \omega t + 2 \overline{J_1(a_\varepsilon)} \cos \omega t = 0$$

$$\text{soit: } -\omega^2 a_\varepsilon + 2 \overline{J_1(a_\varepsilon)} = 0 \iff$$

$$\omega^2 = \frac{2 \overline{J_1(a_\varepsilon)}}{a_\varepsilon}$$

Le dse de  $J_1$  est tel que :

$$J_1(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}}{n! (n+1)!}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J_1(a) &= \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^3 + \frac{1}{12} \left(\frac{a}{2}\right)^5 + \dots \\ &= \frac{a}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{a}{2}\right)^4 + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{J_1(a)}{a} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{a}{2}\right)^4 + \dots \right]$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \left[ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{a}{2}\right)^4 + \dots \right]$$

Si  $a \ll 1 \Rightarrow \omega^2 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + o(a^2)$

$$\Rightarrow \omega = 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + o(a^2)$$

$$\boxed{\omega = 1 - \frac{1}{16} a^2 + o(a^2)}$$

C'est la relation fréquence-amplitude ( $a \ll 1$ ) du pendule ( $\ddot{x} + \sin x = 0$ ) dans l'A1H.

### 3. Comparaison avec la Méthode de KB

- La méthode de linéarisation force la forme de  $x$  pour le C.L.:  $x = \alpha_\varepsilon \cos \omega t$  avec  $\alpha_\varepsilon, \omega$  = constes.  
pour injecter dans l'éq NL.
- $\Delta$  La résolution ne donne pas nécessairement la même forme pour  $x$  (on peut avoir  $x(t) = \alpha_\varepsilon(t) \cos(\omega' t)$ )
- La méthode de KB utilise le résultat général que:  
$$\alpha_\varepsilon(t) = \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1(t) + o(\varepsilon)$$
  
ie:  $\alpha_\varepsilon = \alpha_0 = \text{conste}$  à l'ordre  $O(\varepsilon)$   
et fait l'approx qui "les effets sont réduits à leur moyennes"  
et donne son résultat à l'ordre  $o(\varepsilon)$

La méthode de KB a une zone d'application  $D_L$  plus grande que la  $L$ .

Avec  $L(\alpha_i(\theta_i), \theta_i)$  doit être très très proche du C.L.