

# Rétroaction et oscillation : les oscillations auto-entretenues

---

Cours 1      à finir

modifier la forme canonique du VdP  $\ddot{x} + (\omega^2 - \epsilon)x + \alpha = 0$   
finir le III.

---

---

---

---



## Introduction

Comment la rétroaction peut-elle engendrer des oscillations ?

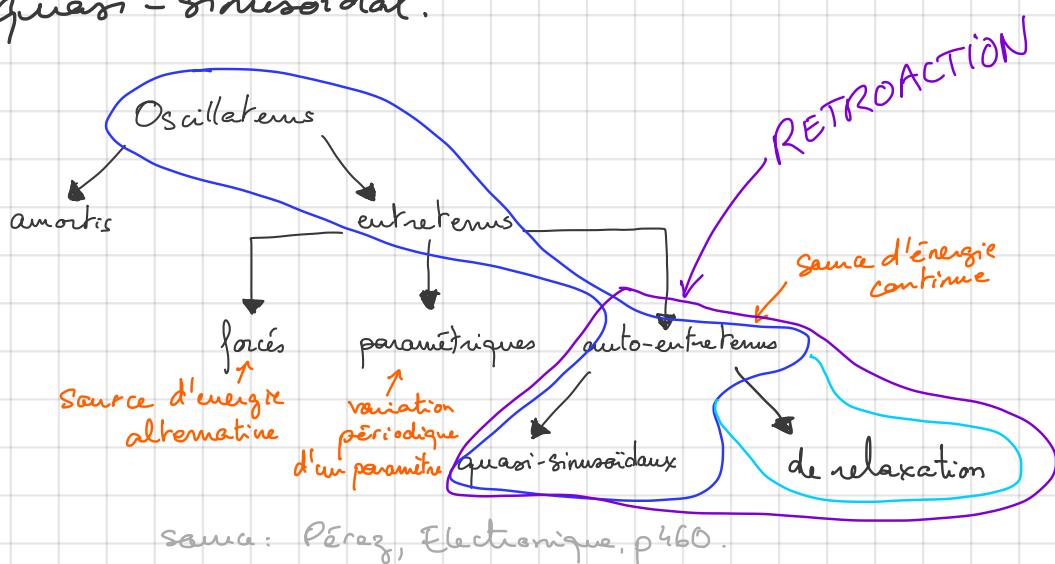
Observations :

- \* dans la nature : exemple des allées de Van Karman :  
→ démarage et stabilisation en amplitude d'un phénomène quasi-périodique au périodique (oscillations) d'amplitude bien déterminée.

- + dans le labo : exemple du laser :

→ idem : on alimente le laser avec une source d'énergie continue et il en ressort une oscillation quasi  $\sim$  avec une amplitude fixée et réglable.

Ces 2 systèmes physiques sont ce que l'on appelle des oscillateurs à boucle de rétroaction ou oscillateurs auto-entretenus. Il en existe 2 types : de relaxation et quasi-sinusoidaux.



On s'intéresse au mécanisme(s) de formation des oscillations ; comment expliquer le démarrage et la stabilisation en amplitude d'oscillations à partir d'une source d'énergie continue ?

On va adopter une démarche du type "cinématique" s'intéressant aux conséquences du mécanisme sans se préoccuper de ses causes.

Le sujet appartient à la théorie des systèmes dynamiques, nous nous bornerons ici à donner quelques propriétés simples en s'appuyant sur un banc d'essai pratique : l'électrotechnique.

## I. Les oscillateurs auto-entretenus OAE, généralités

1. Définitions et exemple

2. Équation d'évolution

- a. Non linéarité intrinsèque
- b. Rétroaction intrinsèque
- c. équation canonique

3. Boîtier d'énergie : relation fréquence-amplitude du cycle limite

4. Quelques propriétés des OAE

## II. les OAE quasi-sinusoidaux ( $\varepsilon \ll 1$ )

1. Partition du problème ; voisinage du cycle limite  $C_L$

2. Évolution de l'amplitude dans un voisinage de  $C_L$

3. Caractérisation du cycle limite

- a. Amplitude
- b. Période
- c. Critère d'existence et de stabilité

Exo : Oscil de VdP

4. Quelques méthodes d'approximation du cycle limite

a. Méthode de Krylov et Bogoliubov

Exo VdP

Python

b. Méthode du 1<sup>er</sup> harmonique

c. Développement perturbatif

## III. les OAE de relaxation ( $\varepsilon \gg 1$ )

← Pas analytique...

numérique only

Rocand → 1. Portrait de phase type

Barthe → 2. Oscillateur de Van der Pol ( $\varepsilon \gg 1$ )

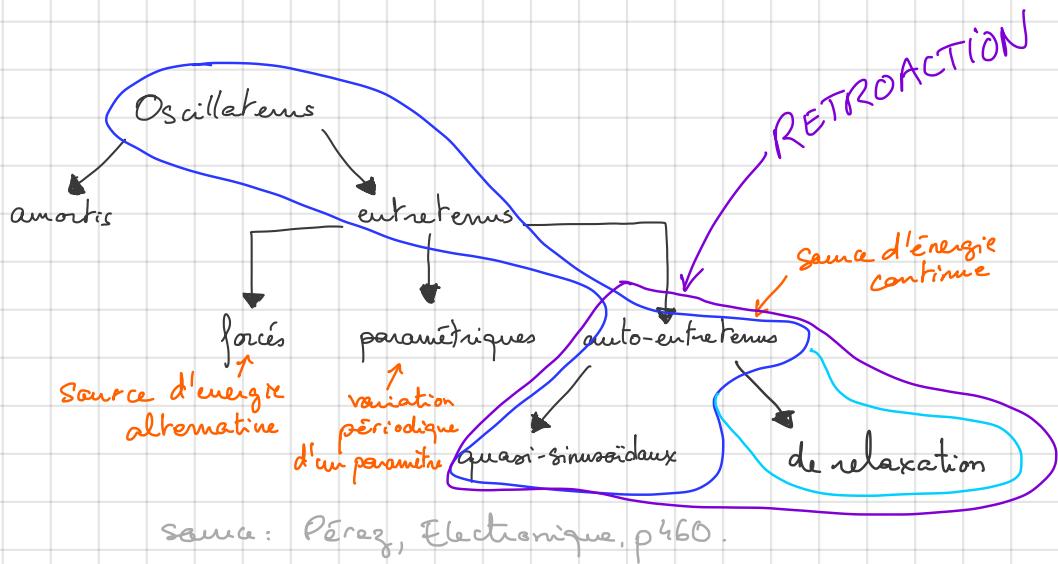
a. Décalage en fréquence en fonction des amplitudes des harmoniques

b. Calcul de la période

3. Vase de Tantale Exo

# I. Les oscillateurs auto-entretenus (OAE), généralités.

## 1. Définitions, exemples et mécanisme d'échange d'énergie



source: Pérez, Électronique, p 460.

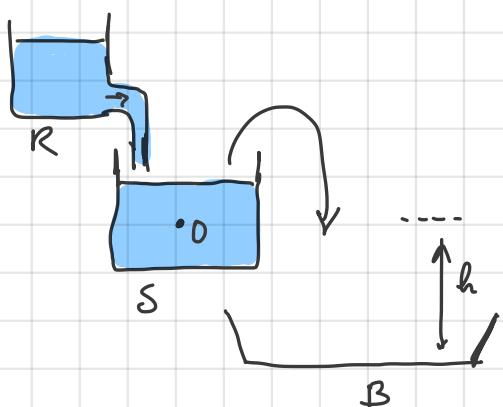
### • définition (osc. auto-entretenus):

Syst. dynamique qui saurait sans cesse de l'énergie à une source continue pour la restituer, seulement en partie, sous forme alternative via des oscillations périodiques

Ces oscillations atteignent au bout d'une durée fixée. (éventuellement nulle) un régime stable de durée illimitée avec une amplitude fixée.

## Diagrammes énergétiques : mécanismes d'échanges d'énergie.

- Un exemple d'oscillateur auto-entretenu de relaxation.

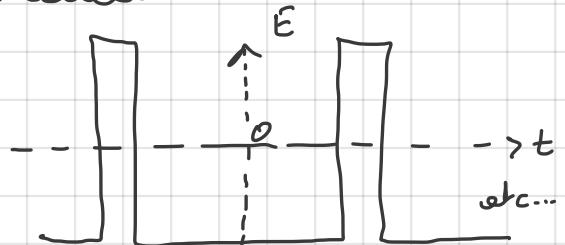


R: réservoir alimentant en continu un seau tournant autour d'un axe O

Lorsque le bâton centrale du seau dépasse O, il bascule et se vide dans le bac B

Pendant le remplissage le seau reçoit de l'énergie et il en rend une partie lors de son basculement

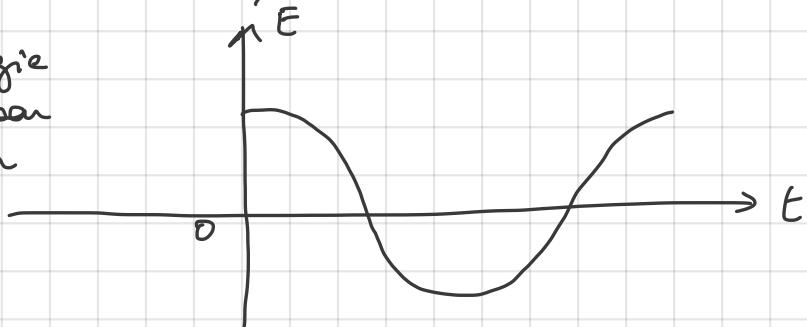
⇒ Diagramme des échanges d'énergie:  
 $E > 0$  énergie donnée par S



→ il y a un dispositif qui déclenche la vidange et le remplissage du réservoir → **RÉTROACTION**

- Le mécanisme d'échange discontinu de l'énergie diffère de celui d'un oscillateur quasi-sinusoidal où les échanges d'énergie se font continuellement entre l'oscillateur et l'extérieur, mais de manière alternative:

$E > 0$ : énergie donnée par l'oscillateur



→ il y a un dispositif qui compense les pertes qui surviennent lors de l'échange et qui dirige l'alternance du transfert d'énergie → **RÉTROACTION**

## 2. Equation d'évolution

### a. Non-linéarité intrinsèque

conséquences de la définition d'un OAE:

oscillations périodiques  $\Rightarrow \exists$  un cycle limite  $C_L$   
amplitude fixe  $\Rightarrow C_L$  est unique

Supposons qu'un OAE soit linéaire.

Un oscillateur régis par une équation diff linéaire implique par déf de la linéarité que tout cycle homothétique à  $C_L$  est également cycle limite.

$\rightarrow$  Ceci contredit l'unicité de  $C_L \Rightarrow$  OAE est N.L. !

$\rightarrow$  On dit que la non-linéarité détruit l'invariance par dilatation de l'amplitude des oscillations ou encore que la non-linéarité fixe l'amplitude des oscillations.

### b. Rétroaction intrinsèque

Considérons un oscillateur amplifié:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \gamma < 0$$

solution :  $x(t) = \lambda e^{i\gamma t/2} \cos(\omega_0 t + \mu)$ ,  $\lambda, \mu$  constes

constat :  $|x(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} +\infty$  : divergence

$\Rightarrow$  absence de régime stable d'amplitude fixe.

Rappel : équation de l'oscillateur amorti :

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \gamma > 0$$

⇒ il faudrait que  $\gamma$  devienne une fonction afin que  $\gamma$  change de signe quand  $|x|$  atteint une valeur  $x_s$  pour limiter la croissance de l'ampli. des oscillations.

↪ on parle de rétroaction :  $\gamma(x)$  change de signe en fonction de  $x$  et donc l'évolution de  $x(t)$  régée par  $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x$  est modifiée par les valeurs prises par  $x$  !

### c. Équation canonique

On considère donc un syst régis par l'équation NL

$$\ddot{x} + \gamma(x) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (0)$$

avec  $x \mapsto \gamma(x)$  fonct° NL en  $x$  (c'est ce qui garantit le caract NL de (0)) et

$$\begin{cases} \gamma(x) < 0 & \text{si } |x| < x_s, \text{ amplificat°} \\ \gamma(x) > 0 & \text{si } |x| \geq x_s, \text{ atténuation} \end{cases}$$

forme adimensionnée :

on pose  $\bar{x} = \frac{x}{x_s}$  et  $\bar{t} = \omega_0 t$  et  $\Gamma = \frac{\gamma}{\omega_0}$

$$d_t \bar{x} = d_{\bar{t}} \bar{x} \quad d_t d_{\bar{t}} \bar{x} = \omega_0 d_{\bar{t}} \bar{x} \Rightarrow d_{\bar{t}}^2 \bar{x} = \omega_0^2 d_{\bar{t}} \bar{x} = \omega_0^2 \ddot{\bar{x}}$$

$$(0) devient : \omega_0^2 \ddot{\bar{x}} + \Gamma(x_s \bar{x}) \dot{\bar{x}} + \omega_0^2 \bar{x} = 0$$

$$\text{Soit : } \ddot{\bar{x}} + \Gamma(x_s \bar{x}) \dot{\bar{x}} + \bar{x} = 0$$

on envoie :

$$\ddot{x} + \varepsilon A(x) \dot{x} + x = 0 \quad (1)$$

où on a posé :  $\varepsilon A(x) := \frac{1}{\omega_0} \gamma(x, \omega)$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  qq à priori.

L'équation (1) est une équation différentielle non linéaire d'ordre 2 homogène. La non-linéarité est codée dans la fonction  $A(x)$ . Par abus de langage on référera  $A(x)$  comme les "non-linéarités".

### 3. Bilan d'énergie: relation fréquence - amplitude du $\mathcal{L}_L$

L'équation  $\ddot{x} + \varepsilon A(x) \dot{x} + x = 0$  donne un espace des phase  $(x, \dot{x})$  avec :

$$\dot{x} =: y \quad \boxed{\dot{y} = -\varepsilon A(x) \dot{x} - x}$$

Si l'on suppose l'É du  $\mathcal{L}_L$ , l'énergie  $\mathcal{E}(u)$  du syst. définie par :  $\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} x^2$  vérifie :  $\mathcal{E}(U) - \mathcal{E}(0) = 0$ , où  $U$  est la période adimensionnée du  $\mathcal{L}_L$ .

Or,  $\frac{d\mathcal{E}}{du} = \dot{x} \ddot{x} + x \dot{x} = y(\dot{x} + \ddot{x})$   
et  $\dot{x} + \ddot{x} = -\varepsilon A(x) \dot{x}$

d'où :  $d\mathcal{E} = -y \varepsilon A(x) \dot{x} du$   $h(x, \dot{x})$

d'où :  $\mathcal{E}(U) - \mathcal{E}(0) = -\varepsilon \int_0^U y A(x) \dot{x} du$  (2)

Ainsi :  $\mathcal{E}(U) - \mathcal{E}(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon \int_0^U \dot{x}^2 A(x) du = 0}$  (3)

La relation (3) lie l'amplitude des oscillations ( $\rightarrow$  dans  $A(x) \dot{x}^2$ ) avec la période du  $\mathcal{L}_L$ , c'est ce que l'on appelle la relation fréquence-amplitude du  $\mathcal{L}_L$ .

C'est une relation à 2 inconnues : "U" et "x"; les NL (i.e.:  $A(x) \dot{x}$ ) lient fréquence et amplitude.

" $\int_0^{\mu} \epsilon \int A(z) \dot{z}^2 dz$ " s'interprète comme le travail de la force non-linéaire ; " $\epsilon \int A(z) \dot{z} = \epsilon \int A(z) \dot{z}^2$ " représente la puissance de cette force.

Rappels: travail d'une force  $\vec{F}$  dans un Rg :

$$W_{\vec{F}}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \text{ où } \vec{r} \text{ décrit } \mathcal{C}$$

ou :

$$W_{\vec{F}}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt$$

La relation (3) signifie que le travail des N.L. sur une période  $\mu$  du  $\mathcal{C}_L$  est nul :

$$W_{\vec{F}_{N.L.}}(0, \mu) = \int_0^{\mu} \epsilon \int A(z) \dot{z} dz = 0.$$

## 4. Quelques propriétés des OAE

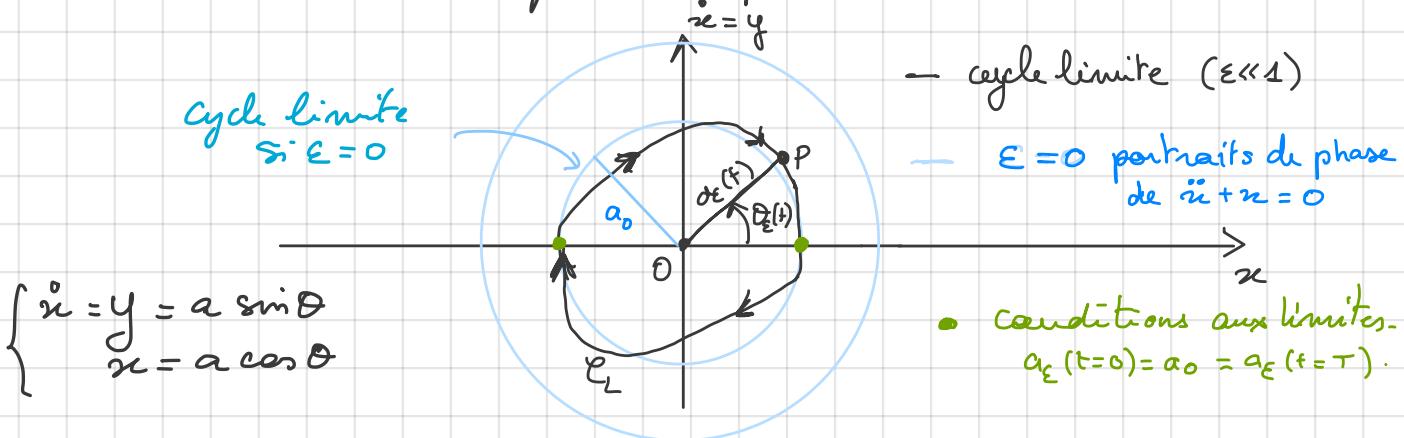
Rappelons l'équation canonique :

$$\ddot{x} + \varepsilon \underbrace{A(x) \dot{x}}_{=h(x, \dot{x})} + x = 0$$

$\varepsilon A(x) = \text{phénomènes NL}$

### a. Les OAE quasi-sinusoidaux ( $\varepsilon \ll 1$ )

Lorsque  $\varepsilon \ll 1$  on s'attend à retrouver un comportement du type  $\ddot{x} + x \approx 0$ , c'est quasi sinusoidal → au point d'oscillation auto-extrême quasi sinusoidal. Le cycle limite approche un cercle dans l'espace des phases  $(x, \dot{x})$ .

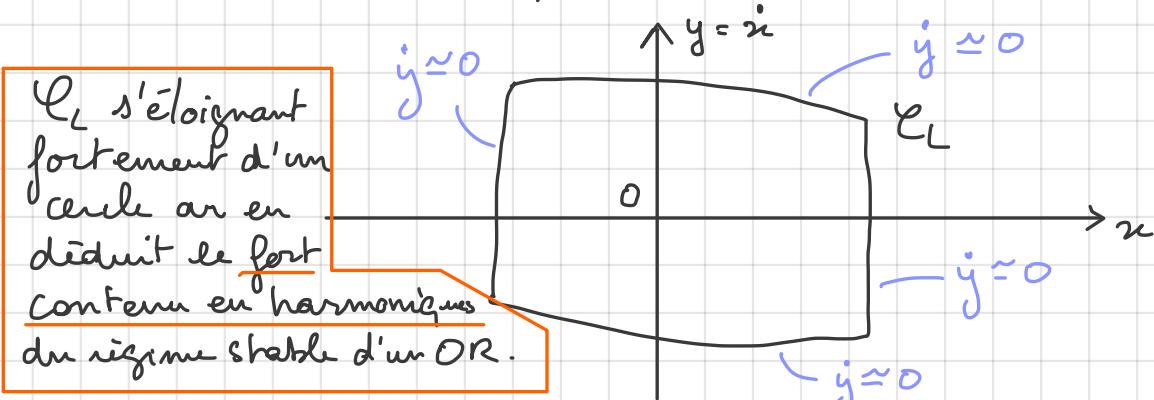


$C_L$  s'approchant d'un cercle on en déduit le faible contenu en harmoniques du régime stable qu'un O.S.

## b. les OAE de relaxation ( $\varepsilon \gg 1$ )

Voir ANNEXE 1

on peut montrer, par exemple par la méthode graphique de Liénard (1828), que le cycle limite se compose de grands arcs à faible courbure dans les régions où  $F_\varepsilon(x) = \int_0^x \varepsilon A(\bar{x}') d\bar{x}'$  ne varie pas trop, raccordés entre eux par des arcs à très forte courbure lorsque  $F_\varepsilon(x)$  varie. On obtient par exemple :



(On peut de plus montrer que le cycle limite est atteint d'autant plus rapidement que  $F_\varepsilon(x)$  est rapidement montante ou descendante, puisque  $F_\varepsilon(0)=0$ , c'est d'autant plus que  $\varepsilon \gg 1$ .)

→ Variations abruptes de  $\dot{x}$  et  $x$  donc de  $\frac{1}{2} \dot{x}^2$  et de  $\frac{1}{2} x^2$  ↳ on retrouve le mécanisme de variation d'énergie d'un oscillateur auto-entretenue de relaxation.

L'équation canonique se réduit presque tout le temps à :  $E A(\bar{x}) \dot{\bar{x}} + \bar{x} = 0$  puisque  $\dot{\bar{x}} \approx 0$

et de manière plus générale :  $E h(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{x} = 0$

### C. Résumé

$$h(\tau, \dot{\tau}) = A(\alpha) \dot{\tau}$$

$$\ddot{x} + \epsilon h(\tau, \dot{\tau}) + x = 0,$$

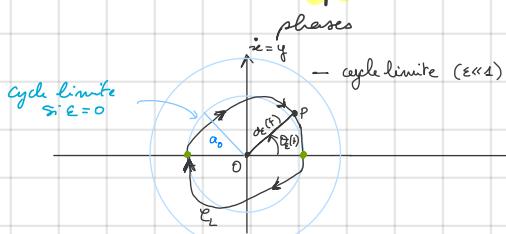
ou

$$\ddot{x} + \epsilon A(\alpha) x + x = 0$$

$\epsilon A(\alpha)$  = phénomène NL

$\epsilon \ll 1$

oscillateurs quasi  $\alpha$



van der Pol

a montré que  
l'on peut parfaitement  
passer continument  
d'une famille  
à l'autre.  
(Balthes p 247,  
Rocard p 294)

pôles en harmonique  
 $T \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

les phénomènes NL  
fixent l'amplitude  
des oscillations

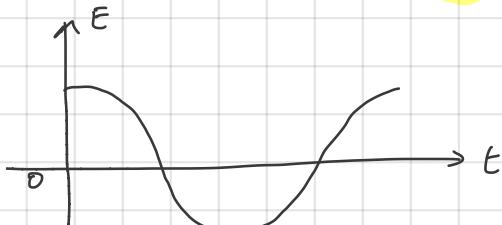
$$\text{Relation fréq. amplitude du } \mathcal{L}_e \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon \int_0^T \dot{x}^2 A(x) dx = 0 \Rightarrow$$

les phénomènes NL fixent  
à la fois l'amplitude et  
la fréquence des oscillations

ex: oscillateur à R négative  
oscillateur de van der Pol  
oscillateur de Wien

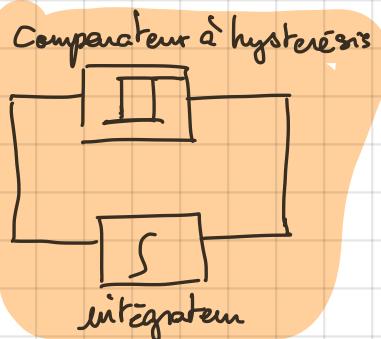
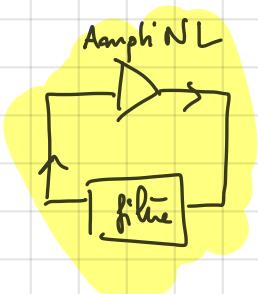
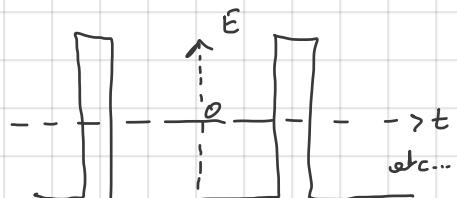
ex: Vase de Tantal  
oscillateur de Van der Pol  
multivibratuer astable.

L'énergie passe alternativement  
d'un "réservoir" à un autre il  
y a une compensation des pertes  
lors de ce transfert



retroaction

L'énergie s'accumule et  
s'évacue d'un unique  
réservoir, il y a un  
dispositif qui déclenche  
le remplissage et la vidange du réservoir.

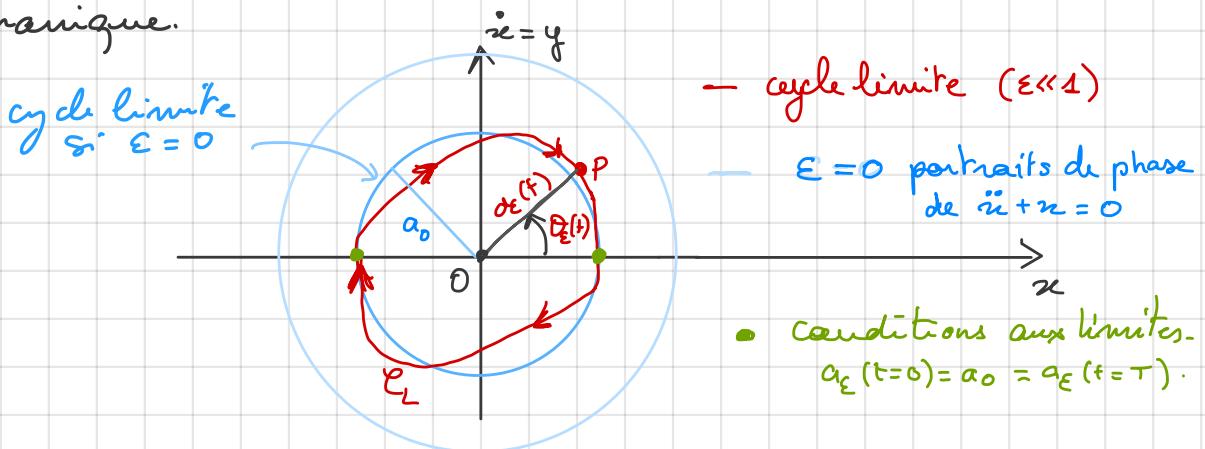


## II. Cas des OAE quasi-sinusoidaux ( $\varepsilon \ll 1$ )

### 1. Position du problème, voisinage du cycle limite $\mathcal{C}_L$

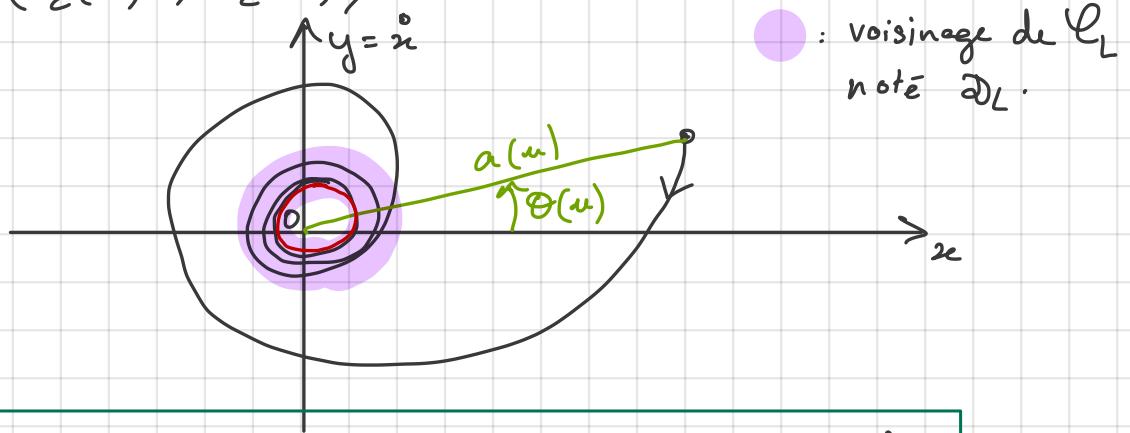
On s'intéresse à  $(0)$  avec  $|\varepsilon| \ll 1$ .

Dans ce cas on s'attend à ce que le  $\mathcal{C}_L$  ne soit pas "très" éloigné d'une ellipse correspondant au régime harmonique.



On décrit le portrait de phase par des coord. polaires  $(a(u), \theta(u))$ , le portrait de phase tend vers un  $\mathcal{C}_L$  de coord.  $(a_E(u), \theta_E(u))$

"u" est le paramètre de la courbe du portrait de fase



$$\begin{cases} a^2 := x^2 + y^2 & (4) \\ \tan \theta = \frac{y}{x} & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a \cos \theta & (6) \\ y = a \sin \theta & (7) \end{cases}$$

Sachant que  $\ddot{u}(u) + \mathcal{E} A(x) \dot{u}(u) + u(u) = 0$

que peut-on dire de  $u(u)$  et  $\dot{u}(u)$  ?

Peut décrire  $u(u)$  et  $\dot{u}(u)$  au moins dans un voisinage  $D_L$  du  $C_L$  ?

Dans ce qui suit, on note  $\dot{a} = \frac{da}{du}$ , et  $\dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{du}$ .

## 2. Evolution de l'amplitude dans un voisinage du Q

Pour simplifier on introduit

$$h(x, \dot{x}) := A(x) \dot{x}$$

- $a^2 := x^2 + y^2$

$$d_x a^2 = 2x\dot{x} = Lx\dot{x} + 2y\dot{y} \Leftrightarrow x\dot{x} = y(x + \dot{y})$$

or  $\dot{y} + x = -\varepsilon h$

d'où :  $x\dot{x} = -\varepsilon h y$

soit :  $\dot{x} = -\varepsilon h \sin \theta \quad (8)$

- $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$$d_x \tan \theta = (1 + \tan^2 \theta) \dot{\theta} = \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2}$$

$$(x^2 + y^2) \dot{\theta} = \dot{y}x - y\dot{x}$$

or  $\dot{y} = -\varepsilon A(x) \dot{x} - x$  et  $x^2 + y^2 = a^2$

donc  $a^2 \dot{\theta} = -\varepsilon h x - a^2$

soit :  $\dot{\theta} = -1 - \varepsilon a^{-1} h \cos \theta \quad (9)$

- D'où :  $\frac{da}{d\theta} = \frac{\dot{a}}{\dot{\theta}} = \frac{-\varepsilon h \sin \theta}{1 + \varepsilon a^{-1} h \cos \theta} = \frac{da}{d\theta} \quad (10)$

au premier ordre en  $\varepsilon$ , (10) devient :

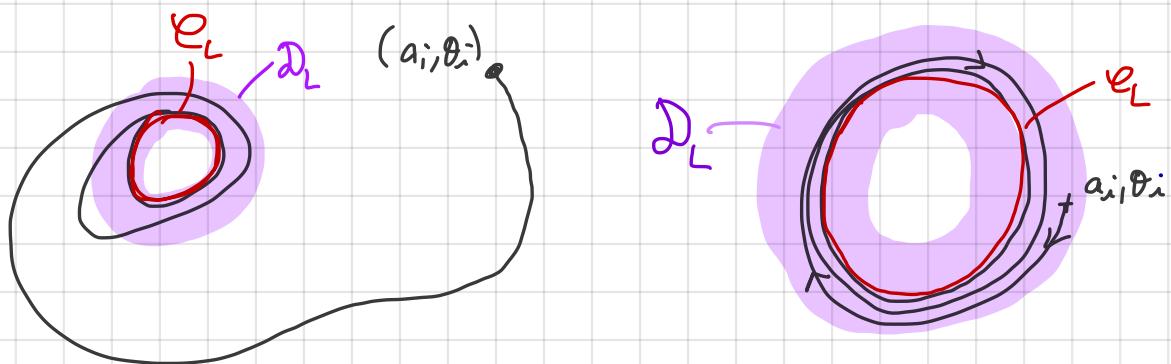
$$\frac{da}{d\theta} = \varepsilon h \sin \theta + o(\varepsilon). \quad (11)$$

(11)  $\Rightarrow \int_{\theta=\theta_i}^{\theta} da = \varepsilon \int_{\theta=\theta_i}^{\theta} h \sin \theta' d\theta' + o(\varepsilon)$

soit : 
$$a(\theta) = \underbrace{a_i}_{\in \mathcal{A}(\theta_i)} + \varepsilon \int_{\theta_i}^{\theta} h \sin \theta' d\theta' + o(\varepsilon) \quad (12)$$

1) il faut prendre " $\int_{\theta_i}^{\theta} h(\cos \theta', \sin \theta') \sin \theta' d\theta'$ " à l'ordre 0 en  $\varepsilon$  pour respecter la précision  $o(\varepsilon)$ .

On si l'état initial  $(a_i, \theta_i)$  est pris trop loin du  $\mathcal{D}_L$  la contribution de  $\int_{\theta_i}^{\theta} h \sin \theta' d\theta'$  peut être  $\gg 1$  et " $\varepsilon \int_{\theta_i}^{\theta} h \sin \theta' d\theta'$ " n'est pas nécessairement négligeable devant  $a_i$ .



Par contre si  $(a_i, \theta_i)$  est pris dans  $\mathcal{D}_L$  alors :

$$\varepsilon \int_{\theta_i}^{\theta} h \sin \theta' d\theta' \ll a_i$$

$$\text{on pose } \gamma = \int_{\theta_i}^{\theta} h \sin \theta' d\theta', \quad (12) \Leftrightarrow a = a_i + \varepsilon \gamma + o(\varepsilon)$$

$$\text{d'où : } h(\cos \theta, \sin \theta) = h|_{a_i} + \varepsilon \gamma h'|_{a_i} + \frac{\varepsilon^2 \gamma^2}{2} h''|_{a_i} + o(\varepsilon^2)$$

et d'où :

$$(12) \Leftrightarrow a(\theta) = a_i + \varepsilon \underbrace{a_1(\theta)}_{\theta} + o(\varepsilon) \quad (13)$$

$$\text{où } a_1(\theta) = \int_{\theta_i}^{\theta} h|_{a_i} \sin \theta' d\theta'$$

Le lien entre  $\dot{\theta}$  et  $\nu$  est donné par (9) qui devient :

$$(9) \stackrel{(13)}{\Rightarrow} \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \frac{h|_{a_i} + \varepsilon a_1 h'|_{a_i} + \dots}{a_i + \varepsilon a_1 + o(\varepsilon)} \cos \theta$$

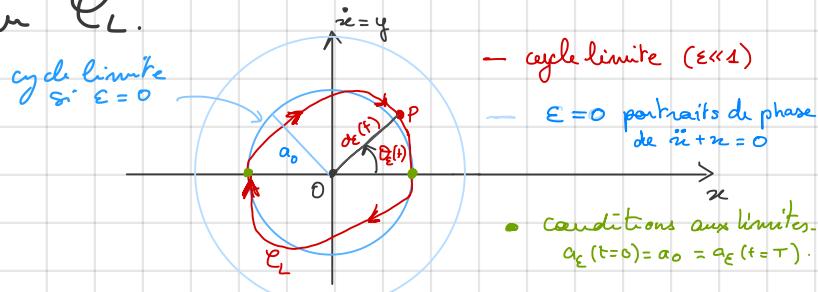
soit

$$d\theta = -d\nu \left( 1 + \varepsilon a_i^{-1} h|_{a_i} \cos \theta + o(\varepsilon) \right) \quad (14)$$

### 3. Caractérisation du $\mathcal{L}_L$

On va appliquer les résultats précédents au  $\mathcal{L}_L$  c'est pour  $a \equiv a_\varepsilon$  et  $\Theta \equiv \Theta_\varepsilon$ .

À l'aide de la relation fréquence-amplitude on en déduira alors une condition d'existence et une condition de stabilité du  $\mathcal{L}_L$ .



#### a. Amplitude

(13) appliquée au  $\mathcal{L}_L$  donne directement :

$$a_\varepsilon(\Theta_\varepsilon) = a_0 + \varepsilon a_1(\Theta_\varepsilon) + o(\varepsilon), \quad (15)$$

puisque :  $a_i = a_0$ ,  $a_0$  amplitude du régime harmonique ( $\varepsilon=0$ ).

et où :  $a_1(\Theta_\varepsilon) := \int_0^{\Theta_\varepsilon} h|_{a_0} \sin \theta' d\theta'$

#### b. Période

$$(14) \text{ donne : } du = \frac{-d\theta}{1 + \varepsilon a_0^{-1} h|_{a_0} \cos \theta + o(\varepsilon)}$$

Sait :  $du = -d\theta (1 - \varepsilon a_0^{-1} h|_{a_0} \cos \theta) + o(\varepsilon)$

d'où :  $\int_0^{2\pi} du = - \int_0^{2\pi} d\theta + \varepsilon a_0^{-1} \int_0^{2\pi} h|_{a_0} \cos \theta d\theta + o(\varepsilon)$

Sait :  $M = M_0 - \varepsilon M_1 + o(\varepsilon), \quad (16)$

on a  $M_0 = 2\pi$  (période adim du Rég. Harmonique  $\varepsilon=0$ )

et  $M_1 := \frac{1}{a_0} \int_0^{2\pi} h|_{a_0} \cos \theta d\theta$

On en déduit aussi le développement perturbatif de  $\Theta_\varepsilon(u)$ :

$$(14) \text{ donne: } du = -d\theta(1 - \varepsilon a_0^{-1} h|_{a_0} \cos \theta) + o(\varepsilon)$$

soit en intégrant de  $u_i=0$  à  $u$  et de  $\Theta_\varepsilon(u_i) = 2\pi$  à  $\Theta_\varepsilon(u)$ :

$$u - 0 = -(\Theta_\varepsilon - 2\pi) + \frac{\varepsilon}{a_0} \int_{2\pi}^{\Theta_\varepsilon(u)} h|_{a_0} \cos \theta' d\theta' + o(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta_\varepsilon(u) = \Theta_0(u) + \varepsilon \Theta_1(u) + o(\varepsilon)} \quad (17).$$

$$\text{avec: } \Theta_0(u) = 2\pi - u$$

$$\text{et } \Theta_1(u) = \int_{2\pi}^{\Theta_\varepsilon(u)} h|_{a_0} \cos \theta' d\theta' = \int_{2\pi}^{\Theta_0} h|_{a_0} \cos \theta' d\theta' + \int_{\Theta_0}^{\Theta_0 + \varepsilon \Theta_1} h|_{a_0} \cos \theta' d\theta'$$

$$\text{or } \int_{\Theta_0}^{ch|_{a_0} \cos \theta' d\theta'} = \varepsilon \Theta_1 h|_{a_0} \cos \theta_0 + o(\varepsilon)$$

$$\text{dans } \boxed{\Theta_1(u) = \int_{2\pi}^{\Theta_0} h|_{a_0} \cos \theta' d\theta'}$$

### c. Critère de stabilité et d'existence

Réalisons un développement perturbatif du bilan d'énergie:

$$(2) \Leftrightarrow E(u) - E(0) = -\varepsilon \int_0^u y h du$$

$$E(u) - E(0) = -\varepsilon \int_0^u a_\varepsilon \sin \theta_\varepsilon h(a_\varepsilon \cos \theta_\varepsilon, a_\varepsilon \sin \theta_\varepsilon) du$$

Avec (15), (16) et (17), en appliquant des D.L. :

$$E(u) - E(0) = -\varepsilon \int_0^{u_0} a_0 \sin(2\pi - u) h|_{a_0, \Theta_0} du + o(\varepsilon)$$

$$E(u) - E(0) = +\varepsilon \int_0^{u_0 = 2\pi} a_0 \sin(u) h(a_0 \cos u, a_0 \sin u) du + o(\varepsilon)$$

$$\text{soit: } \boxed{E(u) - E(0) = g(a_0) + o(\varepsilon)}$$

$$\left. \begin{aligned} a_\varepsilon &= a_0 + \varepsilon a_1 + o(\varepsilon) \\ u &= M_0 - \varepsilon u_1 + o(\varepsilon) \\ \theta_\varepsilon &= \Theta_0 + \varepsilon \Theta_1 + o(\varepsilon) \end{aligned} \right\}$$

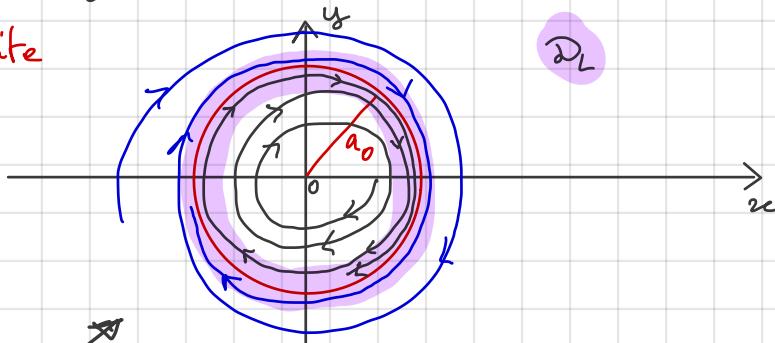
On en déduit alors la condition d'existence :

$$\mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(0) = 0 \iff g(a_0) = 0 \quad g(x) := \varepsilon \times \int_0^{2\pi} \sin(u) h(x \cos u, -x \sin u) du$$

autrement dit  $\mathcal{C}_L$  existe si  $g(x)$  admet une racine positive. Cette racine correspond au terme d'ordre 0 dans le développement perturbatif de  $\mathcal{C}_L$ .

On en déduit également la condition de stabilité de  $\mathcal{C}_L$ :

- cycle limite



La figure représente un cycle limite stable :

i.e.: en noir,  $\Leftrightarrow a < a_0$ ,  $\mathcal{E}(2\pi) > \mathcal{E}(0)$ ,  $\mathcal{E} \nearrow$  tant que  $a < a_0$   
en bleu,  $\Leftrightarrow a > a_0$ ,  $\mathcal{E}(2\pi) < \mathcal{E}(0)$ ,  $\mathcal{E} \searrow$  tant que  $a > a_0$

Avec (18) cette définition se traduit comme suit:

Sait  $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ , si  $a \in ]a_0 - \delta; a_0[$ ,  $g(a) > 0$

si  $a \in ]a_0; a_0 + \delta[$ ,  $g(a) < 0$

i.e.:  $\frac{g(a_0 + \delta) - g(a_0 - \delta)}{\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} g'(a_0)$ , est négatif car

$$g(a_0 + \delta) < 0 \text{ et } g(a_0 - \delta) > 0$$

Condition de stabilité du cycle limite.

Le cycle limite d'amplitude  $a_0$  est stable si

$$g'(a_0) < 0$$

Rmq: le cycle est instable si  $g'(a_0) > 0$ .

## Exercice :

Considérons l'oscillateur de Van der Pol (VdP) avec  $|\varepsilon| \ll 1$  :

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \Leftrightarrow (\text{VdP})$$

1. Déterminer l'amplitude et la pulsation du cycle limite
  2. Discuter de la stabilité du cycle limite
- 

1. Écrivons l'équation sous sa forme canonique :

$$si : h(x, \dot{x}) = (x^2 - 1)\dot{x}$$

$$\text{alors : } (\text{VdP}) \Leftrightarrow \ddot{x} + \varepsilon h(x, \dot{x}) + x = 0$$

L'amplitude  $a_0$  du cycle limite, si elle existe, est solution de :

$$g(x) = 0 \quad \text{au } g(x) = \varepsilon \times \int_0^{2\pi} \sin u h(x \cos u, -x \sin u) du$$

$$ici : h(x \cos u, -x \sin u) = (x^2 \cos^2 u - 1)(-x \sin u)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(x) &= +\varepsilon x^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 u (1 - x^2 \cos^2 u) du \\ &= \varepsilon x^2 \left[ \int_0^{2\pi} \sin^2 u du - x^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 u \sin^2 u du \right] \\ &= \varepsilon x^2 \left[ \pi - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2u) du}_{=0} - \frac{x^2}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2u) du \right] \\ &= \varepsilon x^2 \left[ \pi - \frac{x^2}{4} \cdot \pi + \underbrace{\frac{x^2}{8} \int_0^{2\pi} \cos(4u) du}_{=0} \right] \end{aligned}$$

$\boxed{g(x) = \varepsilon \pi x^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)}$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

D'où l'amplitude du CL est bien définie, le CL  $\exists$ , c'est la racine positive de  $g(x) = 0$  :  $a_0 = 2$

La période  $M$  du cycle  $C_L$  est donnée par

$$M = M_0 - \varepsilon M_1 + o(\varepsilon),$$

où  $M_0 = 2\pi$  (période adimensionnelle du Rég. Harmonique  $\varepsilon=0$ )

$$\text{et } M_1 := \frac{1}{a_0} \int_0^{2\pi} h(a_0 \cos \theta, a_0 \sin \theta) \cos \theta d\theta$$

$$\text{ici: } M_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(2 \cos \theta, 2 \sin \theta) \cos \theta d\theta$$

$x/a_0$        $y/a_0$   
 $u = 2 \cos \theta$        $v = 2 \sin \theta$

$$M_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 \theta - 1) 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$M_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 \theta - 1) \sin 2\theta d\theta$$

$$M_1 = 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin 2\theta d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta) d\theta$$

$$M_1 = 2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos 2\theta \sin 2\theta d\theta}_{\frac{1}{2} \sin 4\theta} - 0$$

$$\boxed{M_1 = 0}$$

$$\Rightarrow M = M_0 + o(\varepsilon) = 2\pi + o(\varepsilon)$$

d'où  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$  et donc  $\theta = \int \omega(t) dt = \int dt = t - t_i$  ✓ C.I.

Conclusion le cycle  $C_L$  est donné par  $\boxed{x_L(t) = 2 \cos(t - t_i)}$

2. Discutons sa stabilité.

stable  $\Leftrightarrow g'(a_0) < 0$  où où  $g(x) = \varepsilon \pi x^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g'(x) &= 2\pi \varepsilon x \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) + \varepsilon \pi x^2 \left(-\frac{x}{2}\right) = 2\pi \varepsilon x - \frac{\pi \varepsilon x^3}{2} - \frac{\pi \varepsilon x^3}{2} \\ &= 2\pi \varepsilon x - \pi \varepsilon x^3 \end{aligned}$$

$$g'(x) = \pi \varepsilon x (2 - x^2) \quad \text{d'où } g'(a_0=2) = 2\pi \varepsilon (-2) = -4\pi \varepsilon$$

D'où  $\boxed{g'(a_0) < 0 \Leftrightarrow \varepsilon > 0}$

## 4. Quelques méthodes d'approximations du cycle limite

### a. Méthode de Krylov et Bogoliubov

On a montré, cf (11), que :  $\frac{da}{d\theta} = \varepsilon h \sin \theta + o(\varepsilon) \Leftrightarrow (11)$

Notons  $\Psi(\theta) := h(a(\theta) \cos \theta, a(\theta) \sin \theta) \sin \theta$

$\forall (a_i, \theta_i) \in \mathcal{D}_L$ ,  $\forall \theta \in [\theta_i; \theta_i + 2\pi]$ , (12) est valide :

$$a(\theta) = q_i + \varepsilon a_i(\theta) + o(\varepsilon) \Leftrightarrow (12)$$

où  $a_i(\theta) := \int_{\theta_i}^{\theta} h |a_i| \sin \theta' d\theta'$

Ainsi on peut traiter  $a(\theta)$  comme une constante fixée

à l'ordre 0 en  $\varepsilon$ , dans cas  $\Psi(\theta) \equiv \Psi_a(\theta)$  est une fonction  $2\pi$ -périodique que l'on peut donc ds F :

$$\Psi_a(\theta) = p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{[p_n \cos(n\theta) + q_n \sin(n\theta)]}_{= H_n}$$

où :

$$p_0 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_a(\theta') d\theta' \equiv p_0(a)$$

$$\forall n \geq 1, p_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_a(\theta') \cos(n\theta') d\theta' \equiv p_n(a)$$

$$q_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_a(\theta') \sin(n\theta') d\theta' \equiv q_n(a)$$

d'où :  $(11) \stackrel{\mathcal{D}_L}{\Rightarrow} \frac{da}{d\theta} = \varepsilon p_0(a) + \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} H_n(a, \theta) + o(\varepsilon)$

Introduisons l'espérance  $\langle \dots \rangle$  définie par :

$$\langle X \rangle := \int_{\theta_i}^{\theta_i + 2\pi} X(\theta') \frac{d\theta'}{2\pi}$$

Examinons l'ordre en  $\varepsilon$  des contributions moyennes dans (11).

$$\text{On a : } \left\langle \frac{da}{d\theta} \right\rangle = \varepsilon \langle p_0(a) \rangle + \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \langle h_n(a, \theta) \rangle + o(\varepsilon).$$

Puisque  $h(a_i, \theta_i) \in \mathcal{D}_L$ ,  $a(\theta) = a_i + \varepsilon a_1(\theta) + o(\varepsilon)$ , un DL donne :

$$\begin{cases} p_n(a) = p_n(a_i) + O(\varepsilon), \\ q_n(a) = q_n(a_i) + O(\varepsilon). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle h_n(a, \theta) \rangle = p_n(a_i) \langle \cos n\theta \rangle + q_n(a_i) \langle \sin n\theta \rangle + O(\varepsilon)$$

$$\text{or } \langle \cos n\theta \rangle = \langle \sin n\theta \rangle = 0$$

$$\text{donc : } \boxed{\langle h_n(a, \theta) \rangle = 0 + O(\varepsilon)}$$

$$\text{d'où : } \boxed{\left\langle \frac{da}{d\theta} \right\rangle = \varepsilon \langle p_0(a) \rangle + o(\varepsilon)}$$

Autrement dit les harmoniques ont un effet en  $\varepsilon^2$ , ou plus, dans  $\langle \frac{da}{d\theta} \rangle$ .

L'approximation de Krylov et Bogoliubov consiste à réduire les effets des harmoniques à leur effet moyen, qui est en  $\varepsilon^2$  au plus. Avec l'approx de K&B (11) donne :

$$\boxed{\frac{da}{d\theta} = \varepsilon p_0(a) + o(\varepsilon)}$$

App. de K&B

Avec le paramétrage en  $u$  correspondant au temps adim, (19)

$$\text{devient : au } a : \dot{\theta} = -1 - \varepsilon h a^{-1} \cos \theta \quad (\text{cf. (3)})$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \frac{da}{du} &= \frac{da}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{du} = \varepsilon p_0(a) [-1 - \varepsilon h a^{-1} \cos \theta] + o(\varepsilon) \\ &= -\varepsilon p_0(a) + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \boxed{\frac{da}{du} = -\varepsilon p_0(a) + o(\varepsilon)} \quad (20)$$

On procède de même avec  $\Theta(u)$ .

On part de (9)  $\Leftrightarrow \frac{d\Theta}{du} = -1 - \varepsilon h a^{-1} \cos \Theta$

On note  $\phi(\Theta) = h(a\Theta) \cos \Theta, a(\Theta) \sin \Theta) \cos \Theta$

On utilise (12) :  $a(\Theta) = a_0 + \varepsilon a_1(\Theta) + o(\varepsilon)$

$\hookrightarrow$  à l'ordre 0 en  $\varepsilon$   $a(\Theta) = \text{cste} \Rightarrow \phi$  est  $2\pi$ -périodique

on peut le dsF.

Avec l'espérance  $\langle \dots \rangle$  définie précédemment, on obtient :

$$\left\langle \frac{d\Theta}{du} \right\rangle = -1 - \varepsilon \left\langle \frac{r_0(a)}{a} \right\rangle + o(\varepsilon)$$

où  $r_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_a(\theta) d\theta$ .

L'approximation de K & B réduit l'effet des harmoniques dans (9) à leur moyenne, qui est en  $\varepsilon^2$  au moins et ainsi

$$\boxed{\frac{d\Theta}{du} = -1 - \varepsilon \frac{r_0(a)}{a} + o(\varepsilon)} \quad (21).$$

App de K & B

### Résumé

$$\text{Krylov & Bogoliubov} \rightarrow \begin{cases} \frac{da}{dt} = -\varepsilon p_0(a) + o(\varepsilon) \quad (20) \\ \frac{d\Theta}{dt} = -1 - \frac{\varepsilon}{a} r_0(a) + o(\varepsilon) \quad (21) \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} p_0(a) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(a \cos u, a \sin u) \sin u du \\ r_0(a) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(a \cos u, a \sin u) \cos u du \end{cases}$$

## Exercice :

Considérons l'oscillateur de Van der Pol (VdP) avec  $|\varepsilon| \ll 1$

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \Leftrightarrow (\text{VdP})$$

Déterminons  $a(u)$ ,  $\theta(u)$  puis  $x_c(u)$  dans un voisinage du  $\mathcal{C}_L$ .

$$h(u, y) = (x^2 - 1)y$$

Calculons  $p_0(a)$ :

$$\begin{aligned} p_0(a) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 u - 1) a \sin^2 u \, du \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{a^3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2u) \, du - \int_0^{\pi} \sin^2 u \, du \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{p_0(a) = \frac{a}{2} \left( \frac{a^2}{4} - 1 \right)}$$

$$\text{d'où: } (\quad \omega_0 \quad) \Rightarrow \frac{da}{dt} = -\varepsilon \frac{a}{2} \left( \frac{a^2}{4} - 1 \right)$$

Soit :

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{8} a(a^2 - 4)$$

Soit :

$$\frac{da}{a(a^2 - 4)} = -\frac{1}{8} \varepsilon dt$$

d'où:

$$\boxed{\int \frac{da}{a(a^2 - 4)} = -\frac{1}{8} \varepsilon t + C_0, \quad C_0 = \text{cste}}$$

on peut remarquer que:

$$\frac{1}{a(a^2 - 4)} = -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{a} - \frac{a}{a^2 - 4} \right)$$

$$\text{or } \int \frac{1}{a} da = \ln a \text{ et } \int \frac{ada}{a^2-4} = \frac{1}{2} \ln |a^2-4|$$

$$\text{dans : } \int(15\text{VBT}) \Rightarrow -\frac{1}{4} \left( \ln a - \frac{1}{2} \ln |a^2-4| \right) = -\frac{1}{8} Et + C_0$$

$$\text{soit : } \ln \left( \frac{a}{\sqrt{|a^2-4|}} \right) = \frac{1}{2} Et + C_1, \quad C_1 = \text{cste}$$

$$\text{Soit : } \frac{a}{\sqrt{|a^2-4|}} = d_0 e^{Et/2}, \quad d_0 = \text{cste}$$

$$\text{soit : } \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{a^2}}} = d_0 e^{Et/2}$$

$$\text{Soit : } \left| 1 - \frac{4}{a^2} \right| = d_1 e^{-Et}, \quad d_1 = \text{cste}$$

$$\text{)} \text{ Si } a \geq 2 \text{ ie } 1 - \frac{4}{a^2} > 0 \quad 1 - d_1 e^{-Et} = \frac{4}{a^2}$$

$$\text{Soit } a(t) = \frac{2}{\sqrt{1-d_1 e^{-Et}}}$$

$$\text{or } a(0) = a_1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{1-d_1}} = a_1 \Leftrightarrow d_1 = 1 - \frac{4}{a_1^2}$$

$$\text{d'où : } a(t) = \frac{2}{\sqrt{1 - (1 - \frac{4}{a_1^2})e^{-Et}}}, \quad \text{si } a_1 \geq 2$$

$$\text{)} \text{ Si } a < 2 \text{ ie } 1 - \frac{4}{a^2} < 0, \quad \frac{4}{a^2} = 1 + d_1 e^{-Et}$$

$$\text{Soit } a = \frac{2}{\sqrt{1+d_1 e^{-Et}}}$$

$$\text{or } a(0) = a_1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{1+d_1}} = a_1 \Leftrightarrow d_1 = \frac{4}{a_1^2} - 1$$

$$\text{d'où : } a(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + (\frac{4}{a_1^2} - 1)e^{-Et}}}, \quad \text{si } a_1 < 2$$

On remarque que dans les 2 cas :

$$a(t) = \frac{2}{\sqrt{1 - (1 - \frac{\epsilon}{a_i^2})e^{-\epsilon t}}} + o(\epsilon), \quad a(0) = a_i$$

Calculons  $r_0(a)$

$$r_0(a) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 u - 1) a \sin u \cos u du$$

$$\begin{aligned} r_0(a) &= \frac{1}{2\pi} \left( \underbrace{\int_0^{2\pi} a^2 \cos^3 u \sin u du}_{+ \pi} - \underbrace{\frac{a}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2u) du}_{=0} \right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a \cos^3 u \sin u du = 0 \\ &\text{fct impaire} \end{aligned}$$

$$r_0(a) = 0$$

D'aut. (21)  $\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -1 + o(\epsilon)$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \theta_i - t + o(\epsilon)} \quad \theta(0) = \theta_i$$

Ainsi;  $x(t) := a(t) \cos(\theta(t))$  devient :

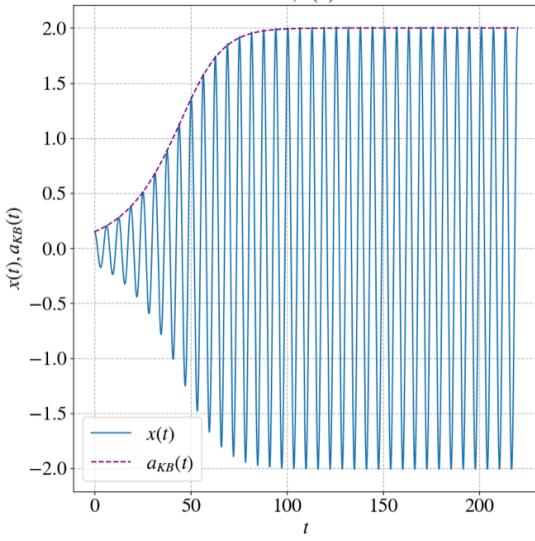
$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{1 - (1 - \frac{\epsilon}{a_i^2})e^{-\epsilon t}}} \cos(t - \theta_i) + o(\epsilon)$$

Rq: l'existence du cycle limite apparaît naturellement:

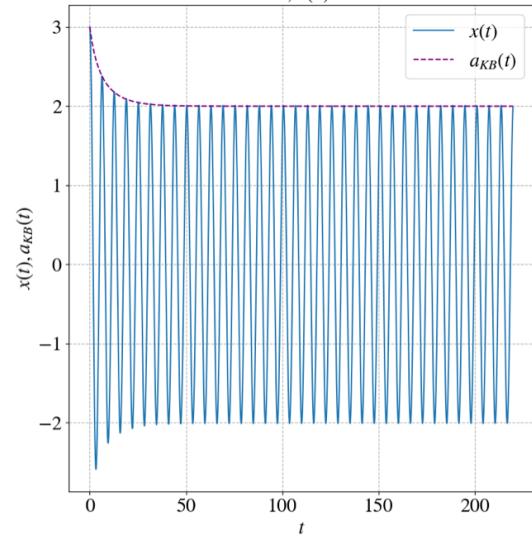
$$a(t) \xrightarrow[t \gg 1/\epsilon]{} 2$$

on a alors un régime périodique  $x_\infty(t) = 2 \cos(t - \theta_i)$   
de période  $2\pi$  à 1<sup>er</sup> ordre 1 en  $\epsilon$ .

Graphe de  $x(t)$  (sol. num. exacte) et de  $a_{KB}(t)$  calculée avec l'approximation de Krylov et Bogolioubov.  
 $\epsilon = 0.10, a(0) = 0.15$

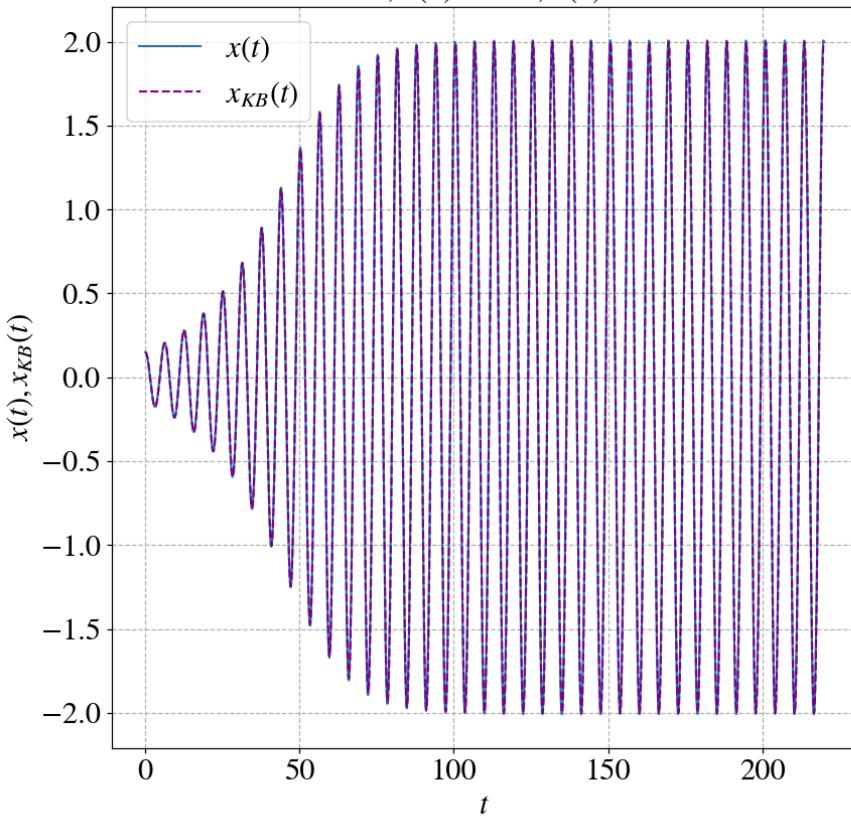


Graphe de  $x(t)$  (sol. num. exacte) et de  $a_{KB}(t)$  calculée avec l'approximation de Krylov et Bogolioubov.  
 $\epsilon = 0.10, a(0) = 3.00$



L'approximation de K et B est bonne.

Graphe de  $x(t)$  et de  $x_{KB}(t)$  calculé avec l'approximation de Krylov et Bogolioubov.  
 $\epsilon = 0.10, a(0) = 3.00, \theta(0) = 0.00$



## b. Approximation du 1<sup>er</sup> harmonique

$$\text{Soit } (0) \Leftrightarrow \ddot{x} + \varepsilon h(x, \dot{x}) + x = 0$$

Supposons que :

1. Il existe une solution périodique de (0) suffisamment proche de  $x = a_\varepsilon \cos(\omega t)$  ( $\Rightarrow \dot{x} = -a_\varepsilon \omega \sin(\omega t)$ ) avec  $|a_\varepsilon| = c \text{ et } \omega > 0$ .

2. La fonction  $h$  est développable en série de Fourier :

$$h(x) \underset{x = a \cos \omega t}{=} h(t) = A_0(h) + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n(h) \cos(n \omega t) + B_n(h) \sin(n \omega t))$$

$$\text{où : } A_n(h) := \frac{2}{T} \int_T h(a \cos \omega t, -a \omega \sin \omega t) \cos \omega t \, dt$$

$$B_n(h) := \frac{2}{T} \int_T h(a \cos \omega t, -a \omega \sin \omega t) \sin \omega t \, dt$$

$$A_0(h) := \frac{2}{T} \int_T h \, dt$$

telle que  $A_0(h) = 0$

$$\ddot{x} = -a_\varepsilon \omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow (0) \Leftrightarrow (1 - \omega^2)a_\varepsilon \cos(\omega t) + \varepsilon(A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t) + \sum_{n=2}^{+\infty} H_n(h)) = 0$$

→ L'approximation du 1<sup>er</sup> harmonique

Consister à ne garder que  $H_1 = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)$

$$(0) \stackrel{14}{\Leftrightarrow} 0 = (1 - \omega^2)a_\varepsilon \cos(\omega t) + \varepsilon A_1(h) \cos(\omega t) + \varepsilon B_1(h) \sin(\omega t)$$

~~$\sum_{n=2}^{+\infty} H_n(h)$~~   
harmonique de rang  $\geq 2$

$$\text{aù : } \begin{cases} A_1(h) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} h(a_{\varepsilon} \cos \omega t, -a_{\varepsilon} \omega \sin(\omega t)) \cos(\omega t) dt = A_1(a_{\varepsilon}) \\ B_1(h) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} h(a_{\varepsilon} \cos \omega t, -a_{\varepsilon} \omega \sin(\omega t)) \sin(\omega t) dt = B_1(a_{\varepsilon}) \end{cases}.$$

$$O = \left[ (\lambda - \omega^2) a_{\varepsilon} + \varepsilon A_1(a_{\varepsilon}) \right] \cos \omega t + \varepsilon B_1(a_{\varepsilon}) \sin(\omega t), \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$(27) \quad (\lambda - \omega^2) a_{\varepsilon} + \varepsilon A_1(a_{\varepsilon}) = 0 \quad \text{et} \quad B_1(a_{\varepsilon}) = 0 \quad (28)$$

(27) et (28) forment un syst. de 2 éq. à 2 inconnues ( $a_{\varepsilon}, \omega$ ).  
 $\uparrow$   
 $\theta_{\varepsilon}$

Commentaires sur l'approximation du 1<sup>er</sup> harmonique :

On considère les harmoniques de rang  $\geq 2$  de la solution périodique de (O) comme termes d'amplitude négligeable devant le premier harmonique.

On peut saisir l'origine de cette approximation :

$$\text{soit : } \ddot{x} + x = F \quad ((O) \Leftrightarrow \ddot{x} + x = \underbrace{-\varepsilon h(n, \dot{x})}_{\equiv F})$$

$$\text{si } x = a \cos(n \omega t) \Rightarrow \ddot{x} = -n^2 \omega^2 x$$

$$\text{et si } F = K \cos(n \omega t) \Rightarrow (1 - n^2 \omega^2) x = K \cos(n \omega t) \Leftrightarrow (O)$$

$$\text{soit : } \begin{cases} x(t) = \frac{K \cos(n \omega t)}{1 - n^2 \omega^2} \\ \equiv x_n(t) \end{cases} \rightarrow 0 \text{ comme } \frac{1}{n^2} \quad \text{pour } n \rightarrow \infty \quad (4)$$

$$\Rightarrow |x_1| \gg |x_2| = \left| \frac{K \cos(2 \omega t)}{1 - 4 \omega^2} \right|$$

## Exercice :

Considérons l'oscillateur de Van der Pol (VdP) avec  $|\varepsilon| \ll 1$

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \Leftrightarrow (\text{VdP})$$

Déterminer son cycle limite en utilisant la méthode d'approximation du 1<sup>er</sup> harmonique.

Supposons une solution périodique proche de  $a_E \cos \omega t$ :  
 $x \approx a_E \cos \omega t$ ,  $a_E$  et  $\omega$  st csts.

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + x = (1 - \omega^2) a_E \cos \omega t \\ x^2 - 1 = a_E^2 \cos^2 \omega t - 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + x = (1 - \omega^2) a_E \cos \omega t \\ \varepsilon(x^2 - 1) = \varepsilon(a_E^2 \cos^2 \omega t - 1) \end{array} \right. \Rightarrow \varepsilon(x^2 - 1) \dot{x} = -a_E \varepsilon (a_E^2 \cos^2 \omega t - 1) \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} \text{¶ (0)} \Leftrightarrow (1 - \omega^2) a_E \cos \omega t &= +a_E \varepsilon (a_E^2 \cos^2 \omega t - 1) \sin \omega t \\ &= -a_E \omega \varepsilon \sin \omega t + a_E^3 \omega \varepsilon \cos^2 \omega t \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\text{Or: } \cos^2 \omega t \sin \omega t = \sin \omega t - \sin^3 \omega t$$

$$\text{et } \sin^3 \omega t = \frac{1}{4} (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t)$$

$$\text{donc: } \boxed{\cos^2 \omega t \sin \omega t = \frac{1}{4} \sin \omega t + \frac{1}{4} \sin 3\omega t}$$

$$(0) \Leftrightarrow (1 - \omega^2) a_E \cos \omega t = -a_E \omega \varepsilon \left(1 - \frac{a_E^2}{4}\right) \sin \omega t + \cancel{\frac{a_E^3 \omega \varepsilon}{4} \sin 3\omega t} \cancel{+ H_3}$$

Avec l'approximation du 1<sup>er</sup> harmonique:

$$\left| \frac{a_E^3 \omega \varepsilon}{4} \sin(3\omega t) \right| \ll \left| -a_E \omega \varepsilon \left(1 - \frac{a_E^2}{4}\right) \sin(\omega t) \right|$$

$$\text{d'où: } \boxed{(0) \Leftrightarrow (1 - \omega^2) a_E \cos(\omega t) + a_E \omega \varepsilon \left(1 - \frac{a_E^2}{4}\right) \sin \omega t = 0}$$

Pour que ce soit vrai  $\forall t$ , il faut et suffit que:

$$1 - \omega^2 = 0 \quad \text{et} \quad 1 - \frac{a_E^2}{4} = 0 \quad (\text{sachant que } a_E \neq 0 \text{ et } \varepsilon \neq 0)$$

et donc:

$$\boxed{\omega^2 = 1 \Leftrightarrow \omega = 1 \quad \omega > 0}$$

$$\boxed{a_E^2 = 4 \Leftrightarrow a_E = 2 \quad a_E > 0}$$

Le cycle limite de l'oscillateur de Van der Pol est une bonne approximation :

$$\boxed{x(t) = 2 \cos(t)} \quad (5)$$

### C. Développement perturbatif.