

Mon choix : Ne pas restreindre la leçon à l'électronique ; présenter l'électronique comme un exemple décalant de la théorie des oscillations auto-entretenues.

Pré-requis :

- Notion de portrait de phase, oscillateur libre, amorti
- circuit RLC parallèle, montages à AD, schémas blocs.
- Théorème de Bernoulli, ppe du Siphon.

Pour la présentation de 40 min :

- Réaliser l'oscillateur à $R < 0$ en montage
- Présenter I.1, I.2, I.3, I.4. → Application à l'élec et à la mécanique.
- II.1 → rapide ! II.3 → "TD préalable", se focus sur II.2, 4, 5
- III → "TD à faire avec une étude numérique", je skip cette partie.

Bibliographie :

- R - Théorie des Oscillations, Rocard, 1941.
- JS - Nonlinear Ordinary Differential Equation, Jordan, Smith, 2007.
- NP - Electronique PSI, Nouveaux précis, Bréau, 2005 (Brenders)
- Brébec - Electronique PSI, Brébec, Hachette, 2004
- L - Pbs résolus de FlécaFlu, Lumbroso, Dunod, 5^e tirage 1994
- GS - BUP Gré-Samson, BUP 744, vol 86, 1992

Plan

- I. Introduction à la théorie des oscillateurs auto-entretenus $\ddot{x} + \varepsilon A(n) \dot{x} + x = 0$
1. Définitions et diagrammes d'échanges d'énergie $\leftarrow \textcircled{R}$
 2. Nécessité de la rétroaction et des non-linéarités, équation canonique $\leftarrow \textcircled{GS}$
 3. Relation fréquence - amplitude : Bilan d'énergie sur le cycle limite
 4. Propriétés des oscillateurs auto-entretenus $\leftarrow \textcircled{R} \uparrow \textcircled{GS}$

ANNEXE : Méthode graphique de Liénard (1928).

II. Exemple d'oscillateur quasi-sinusoidal ($\varepsilon \ll 1$) : Oscillateur à $R < 0$.

1. Rappels sur le circuit RLC parallèle $\leftarrow \text{Internet + NP}$
2. Intérêt de la résistance négative $\leftarrow \textcircled{Bré} + \textcircled{NP}$
3. Réalisation pratique de la résistance négative $\leftarrow \textcircled{Bré}$
4. Étude de l'oscillateur à résistance négative $\leftarrow \textcircled{Bré}$
5. Montage à faire $\leftarrow \textcircled{Bré}$

Annexe : rappels sur l'AO.

III. Exemple d'oscillateur de relaxation ($\varepsilon \gg 1$) : Vase de Tantal

1. Présentation du système
2. Débit sortant par le siphon
3. Evolution de la hauteur de la surface libre $z(t)$ et régimes possibles
4. Équation canonique d'évolution de $z(t)$ et résolution approchée.
5. Calcul exact de la durée de vidange et de la période des oscillations
6. Résolution exacte (numérique) et étude du portrait de phase
7. Modélisation type systèmes bouslés $\leftarrow \textcircled{NP}$

Annexes : Ppe du Siphon, Th. de Bernoulli, intégration et hysteresis.

Introduction

Comment la rétroaction peut-elle engendrer des oscillations ?

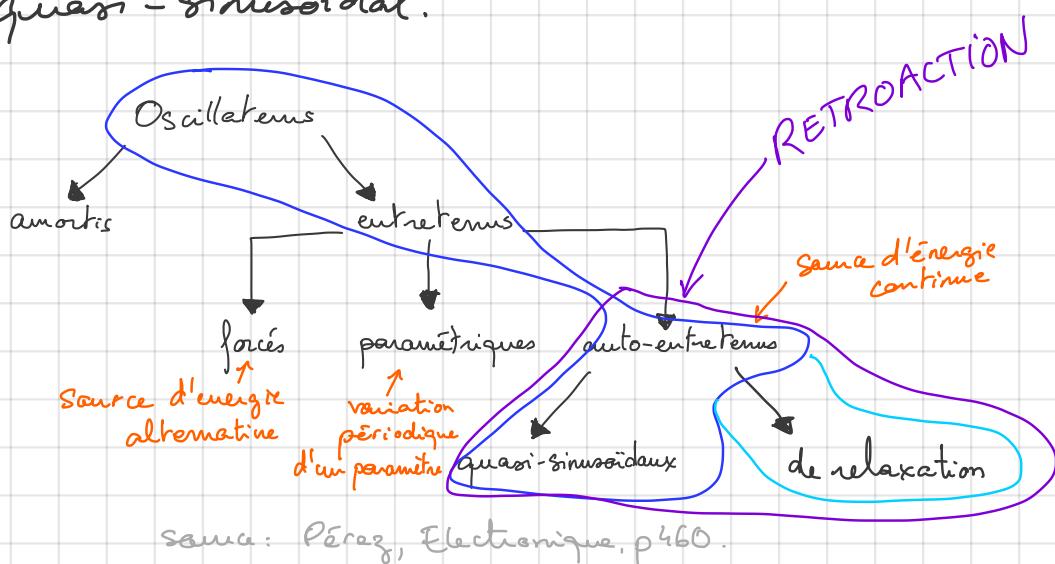
Observations :

- * dans la nature : exemple des allées de Van Karman :
→ démarage et stabilisation en amplitude d'un phénomène quasi-périodique au périodique (oscillations) d'amplitude bien déterminée.

- + dans le labo : exemple du laser :

→ idem : on alimente le laser avec une source d'énergie continue et il en ressort une oscillation quasi \sim avec une amplitude fixée et réglable.

Ces 2 systèmes physiques sont ce que l'on appelle des oscillateurs à boucle de rétroaction ou oscillateurs auto-entretenus. Il en existe 2 types : de relaxation et quasi-sinusoidaux.



source : Pérez, Électromécanique, p 460.

I. Introduction à la théorie des oscillateurs auto-entretenus

1. Définitions et diagrammes d'échanges d'énergie

Définition

Définition : un oscillateur <sup>auto-entretenus
ou</sup> à boucle de rétroaction est un système dynamique qui saurait sans cesse de l'énergie à une source continue pour la restituer, seulement en partie, sous forme alternative via des oscillations périodiques.

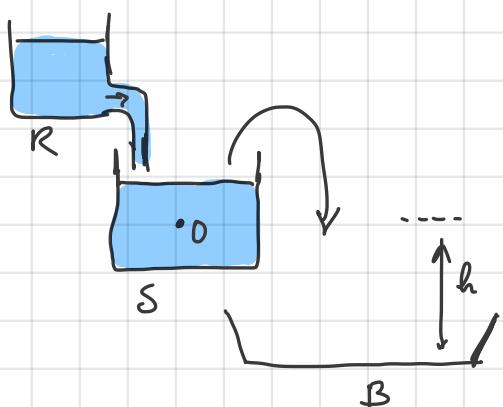
Ces oscillations atteignent au bout d'une durée bien définie (éventuellement nulle) un régime stable de durée illimitée, où elles ont une amplitude bien définie.

Il en existe de 2 types : de relaxation ou quasi-sinusoidale

Dans ce qui suit nous omettrons "auto-entretenus" ou "à boucle de rétroaction"; on parlera d'oscillateur de relaxation et d'oscillateur quasi-

Diagrammes énergétiques : mécanismes d'échanges d'énergie.

- Un exemple d'oscillateur auto-entretenu de relaxation.

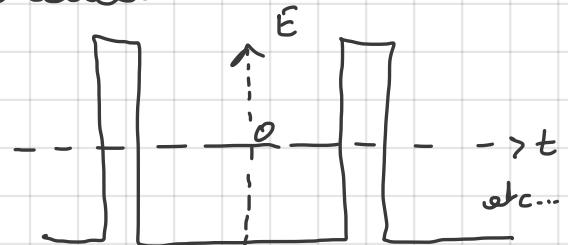


R: réservoir alimentant en continu un seau tournant autour d'un axe O

Lorsque le barycentre du seau dépasse O, il bascule et se vide dans le bac B

Pendant le remplissage le seau reçoit de l'énergie et il en rend une partie lors de son basculement

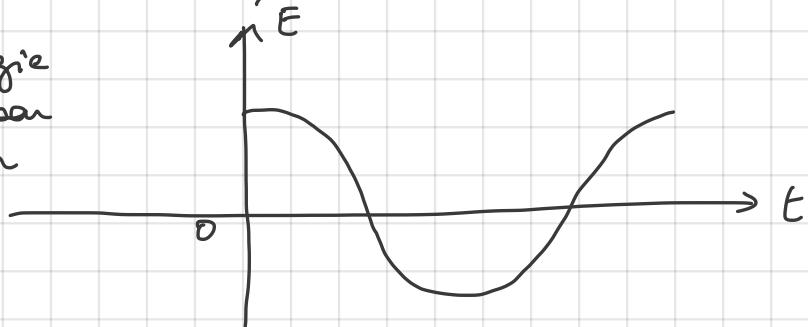
⇒ Diagramme des échanges d'énergie:
 $E > 0$ énergie donnée par S



→ il y a un dispositif qui déclenche la vidange et le remplissage du réservoir → **RÉTROACTION**

- Le mécanisme d'échange discontinu de l'énergie diffère de celui d'un oscillateur quasi-sinusoidal où les échanges d'énergie se font continuellement entre l'oscillateur et l'extérieur, mais de manière alternative:

$E > 0$: énergie donnée par l'oscillateur



→ il y a un dispositif qui compense les pertes qui surviennent lors de l'échange et qui dirige l'alternance du transfert d'énergie → **RÉTROACTION**

2. Nécessité de la rétroaction et des non-linéarités, et équation canonique

→ On va construire par le raisonnement l'équation canonique, ce faisant on va montrer que la non linéarité de cette équation et la rétroaction sont nécessaires.

Nécessité de la non-linéarité

- Conséquences de la définition :

oscillations périodiques, \Rightarrow 1 cycle limite dans l'espace des phases. noté C_L

d'amplitude fixée $\Rightarrow C_L$ est défini de manière unique

- Or : un oscillateur régis par une équation diff linéaire simple, par déf de la linéarité, que tout cycle homothétique à C_L ($\lambda \in \mathbb{R}$) est également solution pour le cycle limite.

→ Ceci est en contradiction avec l'unicité de C_L

⇒ l'oscillateur auto-entretenu est régis par une équation diff Non Linéaire.

→ On dit que la non linéarité détruit l'invariance par dilatation de l'amplitude des oscillations au encore que la non-linéarité fixe l'amplitude des oscillations.

Nécessité de la rétroaction

Partons de l'équation de l'oscillateur amplifié :

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } \gamma < 0, \quad (1)$$

dont les solutions sont de la forme :

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_0 t + \mu)$$

$$x(t) = A e^{\frac{|\gamma|}{2}t} \cos(\omega_0 t + \mu)$$

Un tel comportement diverge : $|x(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} +\infty$

et n'est donc pas compatible avec l'existence d'un régime périodique stable avec une amplitude fixée, propre à l'oscillateur auto-entretenu.

→ Il faut que γ puisse changer de signe lorsque $x(t)$ atteint une certaine valeur x_s pour limiter l'amplitude ; c'est ce qui se traduit par une rétroaction.

On considérera donc la modification suivante

de (1) : $\ddot{x} + \gamma(x) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2)$

où $\begin{cases} \gamma(x) < 0 & \text{si } |x| < x_s, \text{ amplification} \\ \gamma(x) > 0 & \text{si } |x| \geq x_s, \text{ atténuation} \end{cases}$

Rq : $\gamma(x)$ doit de + être N.L. en x .

Le comportement de $\gamma(x)$ qui change de signe en fonction de x traduit la rétroaction : l'évolution de $x(t)$ régie par (2) est modifiée par les valeurs prises par $x(t)$!

Équation canonique

L'équation (2) peut se mettre sous une forme adimensionnée.

Posons : $x = \frac{x}{x_0}$, et : $w = w_0 t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dw} \frac{dw}{dt} = w_0 \frac{dx}{dw}$

(2) devient alors :

$$\omega_0^2 \ddot{x} + \gamma(x_0 x) w_0 \dot{x} + w_0^2 x = 0$$

en posant : $\frac{1}{w_0} \gamma(x_0 x) = \varepsilon A(x)$, il vient :

$$\ddot{x} + \varepsilon A(x) \dot{x} + x = 0 \quad (3)$$

où $\dot{x} := \frac{dx}{dw}$, $w = w_0 t$ et $x = \frac{x}{x_0}$

et où : $A(x)$ est une fonction NL en x telle que

$$(c) \quad \begin{cases} A(x) \leq 0 & \text{si } |x| < 1 \\ A(x) \geq 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

(3) appartient aux équations qui peuvent s'écrire sans la forme : $\ddot{x} + \varepsilon h(x, \dot{x}) + x = 0 \quad (4)$

avec $h(z, \dot{z}) = A(z) \dot{z} \quad (5)$.

L'équation (3) est une équation NL d'ordre 2 homogène. La non-linéarité est codée dans la fonction $A(x)$. Par abus de langage on référera $A(x)$ comme les "non-linéarités".

3. Relation fréquence - amplitude : bilan

d'énergie sur le cycle limite.

Considérons $x(w)$ décrivant le \mathcal{L}_L de (3). On a : $dx = \dot{x} dw$

$$(3) \times dx \Leftrightarrow \ddot{x} \dot{x} dw + \varepsilon A(x) \dot{x}^2 dw + x \ddot{x} dw = 0$$

Soit T la période du cycle limite, $W = Tw_0$.

Intégrons (3) $\times dx$ sur W :

$$\underbrace{\int_0^W \ddot{x} \dot{x} dw + \varepsilon \int_0^W A(x) \dot{x}^2 dw + \int_0^W x \ddot{x} dw}_{\left[\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right]_0^W} = 0$$

$$\left[\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right]_0^W + \varepsilon \int_0^W A(x) \dot{x}^2 dt + \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^W = 0$$

or par définition du cycle limite : $\begin{cases} \dot{x}(0) = \dot{x}(W) \\ x(0) = x(W) \end{cases}$

autrement dit la variation d'énergie cinétique

sur le cycle limite est nulle : $\left[\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right]_0^W = 0$

de même pour la variation d'énergie potentielle :

$$\left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^W = 0$$

Et donc cela impose : $\boxed{\varepsilon \int_0^W A(x) \dot{x}^2 dw = 0} \quad (5)$

La relation (5) lie l'amplitude des oscillations $x(t)$ avec la période T , elle est parfois appelée relation fréquence - amplitude.

Quand T est en bonne approximation donnée par $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ période du régime harmonique ($\varepsilon=0$) on dit que les NL (i.e.: $A(\omega)$) déterminent l'amplitude des oscillations: En effet si $x(t) \approx a \cos(\omega_0 t)$ la relation (5) permet de déterminer a .

Siens (5) est une équation à 2 inconnues: T et $x(t)$.

Remarque: on aurait aussi pu partir de (4) et (5) serait devenue: $\forall h, \varepsilon \int_0^W h(n, \dot{n}) \dot{n} dw = 0$ (5bis)
 $h(n, \dot{n}) = A(n) \dot{n}$
dans notre cas

Interprétation physique de (5).

Rappel: travail d'une force \vec{F} dans un Rg:

$$\begin{cases} \vec{W}_F(\mathcal{C}) = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ où } \vec{r} \text{ décrit } \mathcal{C} \\ \vec{W}_F(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{S}(F) dt \end{cases}$$

Et $A(n) \dot{n}^2$ représente la puissance des non-linéarités et (5) implique que le travail des non-linéarités sur une période du cycle limite est nul.

$$(5) \Leftrightarrow \vec{W}_{F_{NL}}(0, T) = \int_0^W \varepsilon A(n) \dot{n}^2 dw = 0$$

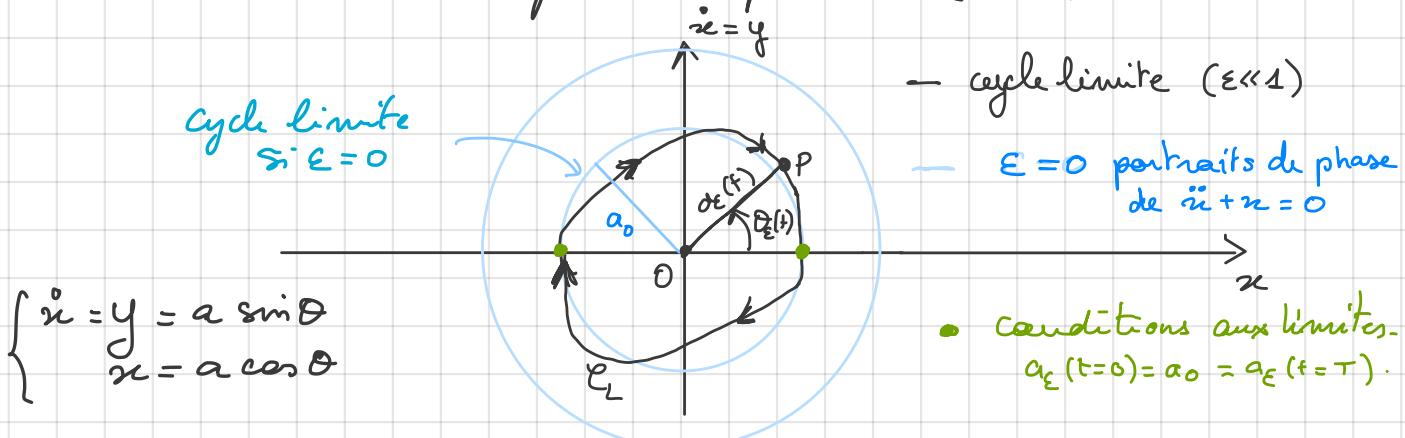
4. Propriétés des oscillateurs auto-entretenus

Deux types de comportement pour $\varepsilon \ll 1$ et $\varepsilon \gg 1$

Rappelons l'équation canonique :

$$\ddot{x} + \varepsilon A(\eta) \dot{x} + x = 0$$

Lorsque $\varepsilon \ll 1$ on s'attend à retrouver un comportement du type $\ddot{x} + x \approx 0$, c'est quasi sinusoïdal \rightarrow au sens de l'oscillateur auto-entretenue quasi sinusoïdale. Le cycle limite approche un cercle dans l'espace des phases (x, \dot{x}) .



C_L s'approchant d'un cercle on en déduit le faible Content en harmoniques du régime stable qu'un OQS.

On peut montrer que : $a(\omega) = a_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$ [6]

au $a_0 \mid g(a_0) = 0$ [7] , $g(a_0) := \varepsilon a_0 \int_0^{2\pi} h(a_0 \cos w, -a_0 \sin w) \sin w dw$ [7 bis]

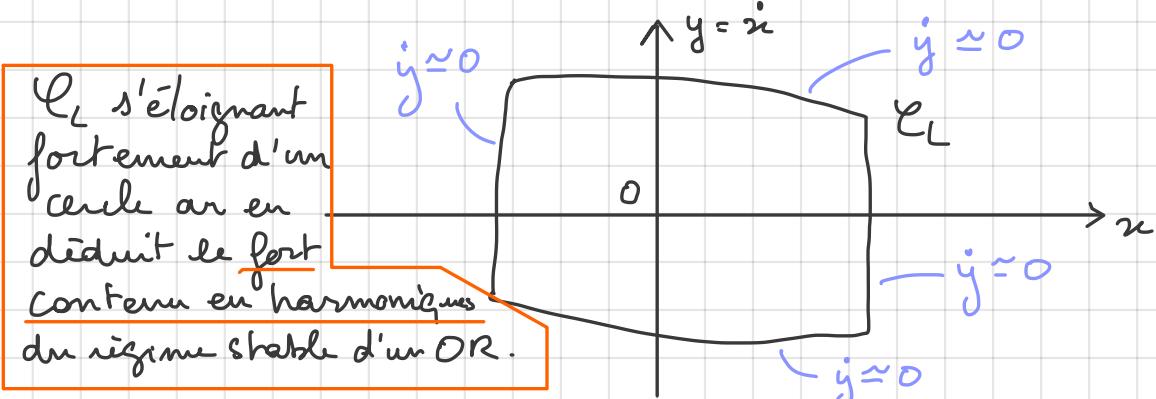
et que : $W = 2\pi - \frac{\varepsilon}{a_0} \int_0^{2\pi} h|_{a_0} \cos \theta_E d\theta_E + \mathcal{O}(\varepsilon)$ [8]

c'est : $W = 2\pi + \mathcal{O}(\varepsilon)$ au $T = T_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$ $\underbrace{:=}_{=} \frac{2\pi}{W}$ [9]

Lorsque $\varepsilon \gg 1$,

Voir ANNEXE 1

on peut montrer, par exemple par la méthode graphique de Liénard (1928), que le cycle limite se compose de grands arcs à faible courbure dans les régions où $F_\varepsilon(x) = \int_0^x \varepsilon A(\bar{x}') d\bar{x}'$ ne varie pas trop, raccordés entre eux par des arcs à très forte courbure lorsque $F_\varepsilon(x)$ varie. On obtient par exemple :



(On peut de plus montrer que le cycle limite est atteint d'autant plus rapidement que $F_\varepsilon(x)$ est rapidement montante ou descendante, puisque $F_\varepsilon(0)=0$, c'est d'autant plus que $\varepsilon \gg 1$.)

→ Variations abruptes de \dot{x} et x donc de $\frac{1}{2} \dot{x}^2$ et de $\frac{1}{2} x^2$ ↳ on retrouve le mécanisme de variation d'énergie d'un oscillateur auto-entretenue de relaxation.

L'équation canonique se réduit presque tout le temps à : $E A(\bar{x}) \ddot{x} + \dot{x} = 0$ (10) puisque $\ddot{x} \approx 0$

et de manière plus générale : $E h(\bar{x}, \dot{x}) + \dot{x} = 0$ (11)

c. Résumé

$$h(x, \dot{x}) = A(x)x\dot{x}$$

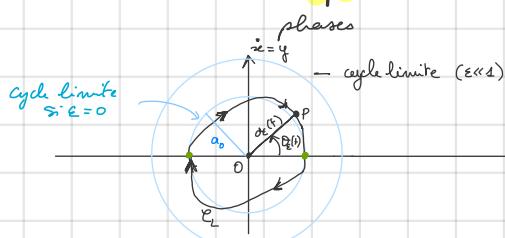
$$\ddot{x} + Eh(x, \dot{x}) + x = 0, \\ \text{ou} \\ \ddot{x} + EA(x)\dot{x} + x = 0$$

$\varepsilon A(x) = \text{phénomène NL}$

$E \ll 1$

$E \gg 1$

oscillateurs quasi ω



ondes en harmonique

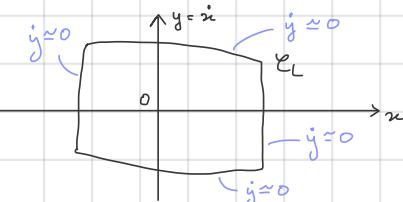
$$T \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

les phénomènes NL fixent l'amplitude des oscillations

van der Pol

a montré que l'on peut parfois passer continument d'une famille à l'autre.
(Routh p 247, Rocard p 294)

oscillateurs de relaxation



riches en harmoniques

Relation fréq. amplitude du ε_L

$$\varepsilon \int_0^{\infty} \dot{x}^2 A(x) dx = 0 \Rightarrow$$

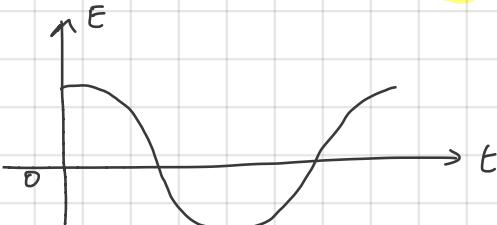
les phénomènes NL fixent à la fois l'amplitude et la fréquence des oscillations

ex: oscillateur à R négative
oscillateur de van der Pol
oscillateur de Wien

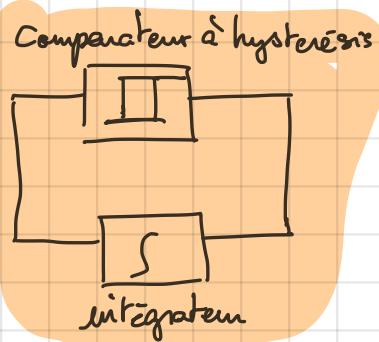
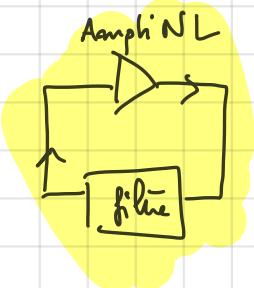
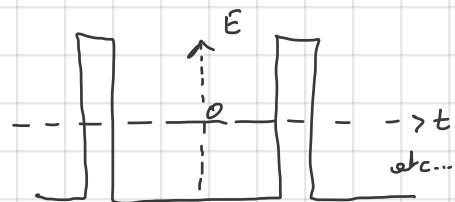
ex: Vase de Tantal
oscillateur de Van der Pol multivibratuer instable.

L'énergie passe alternativement d'un "réservoir" à un autre il y a une compensation des pertes lors de ce transfert

retroaction



L'énergie s'accumule et s'évacue d'un unique réservoir, il y a un dispositif qui déclenche le remplissage et le vidange du réservoir.



Autres propriétés

- 1). Synchronisation: si un oscillateur auto-entretenu QS est attaqué par une excitation sinusoïdale de fréquence ω_1 légèrement \neq de la fréquence ω du CL, alors l'oscillateur se synchronise sur ω_1 . Il faut que l'amplitude de l'excitation soit suffisante.

Démultiplication de fréquence

Si un oscillateur AE de R est attaqué par une excitation sinusoïdale de fréquence ω_1 légèrement différente d'un harmonique, l'oscillateur se synchronise sur la fréquence sans-harmonique la plus proche de ω_1 (sur un $\omega_{\text{propre}} < \omega_1$).

Il faut que l'amplitude de l'excitation soit suffisante.

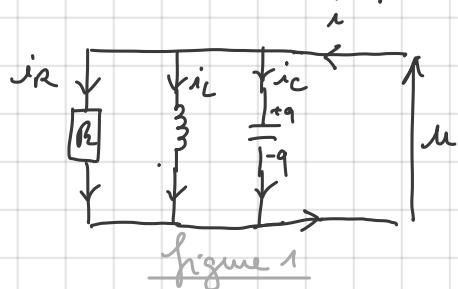
- 3). Traînage en fréquence: si l'amplitude de l'excitation n'est pas suffisante dans les cas 1) et 2), on constate quand même que la période des oscillations dans le régime stable est "attirée" vers la période de l'excitation sinusoïdale.

II. Exemple d'oscillateur quasi-sinusoidal (ECS)

l'oscillateur à résistance négative

On va appliquer les notions développées précédemment sur un système simple d'électronique qui permet la mesure.

1. Rappels sur le circuit RLC parallèle.



$$i = i_R + i_L + i_C$$

$$i_R = \frac{u}{R} \quad u = L \frac{di_L}{dt} \quad u = \frac{q}{C} \Rightarrow \dot{u} = \frac{i_C}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{R} i + \frac{1}{L} u + C \dot{u} \quad (0)$$

avec $\frac{di}{dt} = 0$ au trouée: $\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0} \quad (1)$

où $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $m = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ facteur d'amortissement

équation caractéristique: $X^2 + 2m\omega_0 X + \omega_0^2 = 0$

discriminant: $\Delta = 4(m\omega_0)^2 - 4\omega_0^2$

$$\boxed{\Delta = 4\omega_0^2 (m^2 - 1)}$$

si $\Delta > 0$, alors: 2 racines réelles r_1 et r_2 : $u(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$

si $\Delta = 0$, \rightarrow 1 racine réelle double r_0 : $u(t) = (A_1 t + A_2) e^{r_0 t}$

si $\Delta < 0$, \rightarrow 2 racines C.C.: $u \pm iV$ et $u(t) = A e^{ut} \cos(Vt + \mu)$

la solution oscillante libre correspond donc à: $m^2 < 1$

soit $m < 1$ on a alors:

$$u \pm iV = \frac{-2m\omega_0 \pm i\delta}{2} \quad \text{où } (i\delta)^2 = \Delta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -m\omega_0 \\ V = \omega_0 \sqrt{1-m^2} = \omega' \end{array} \right.$$

$$\text{cad: } \delta = 2\omega_0 \sqrt{1-m^2}$$

$$\rightarrow u(t) = A e^{-m\omega_0 t} \cos(\omega' t + \phi) \quad (2)$$

Cela correspond à une oscillation amortie :

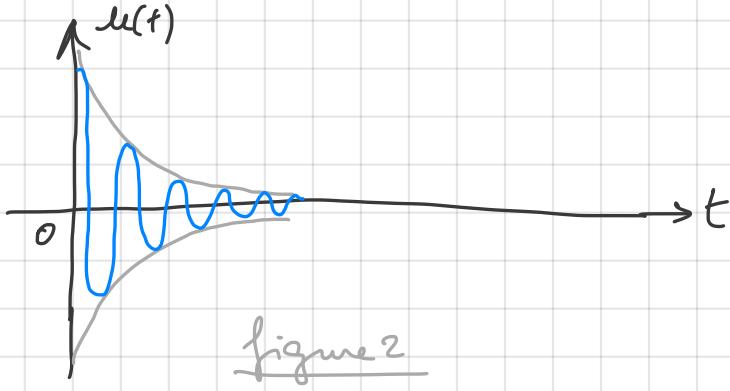
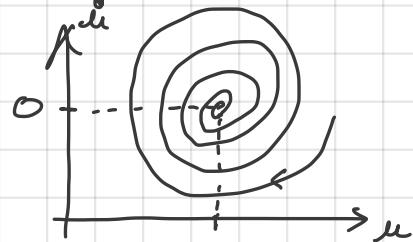


fig3: portrait de phase



Convergence vers un attracteur $(0,0)$ stable.

Écrivons (1) sous forme canonique :

$$x = \frac{u}{u_0} \quad \text{et} \quad w = u_0 t \Rightarrow d_t u = d_w u \cdot u_0$$

$$u = x u_0$$

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \ddot{u} + 2m\omega_0^2 \dot{u} + \omega_0^2 u &= 0 \\ u_0 (\ddot{x} + 2m\dot{x} + x) &= 0 \\ \ddot{x} + 2m\dot{x} + x &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \div \omega_0^2 \\ \div u_0 \end{array} \right.$

$$2m\dot{x} = \varepsilon A(x) \dot{x} \quad \text{avec} \quad \varepsilon A(x) = 2m = \text{cste.}$$

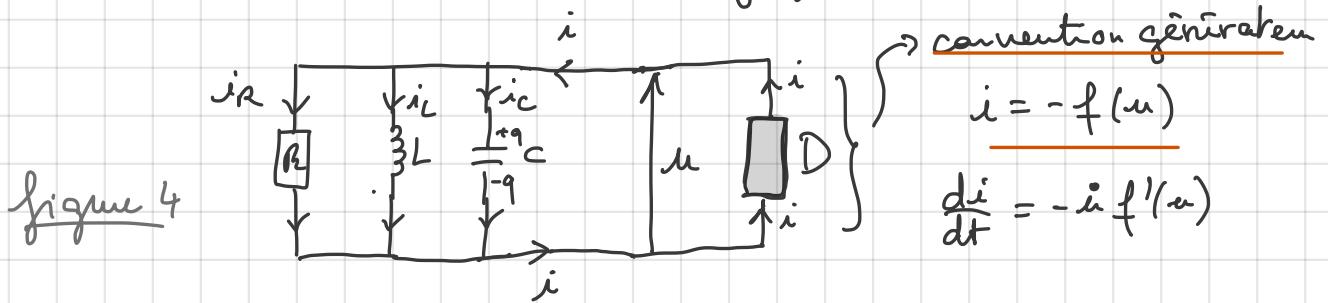
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A(x) = 1 \Rightarrow h(x, \dot{x}) = \dot{x} \\ \varepsilon = 2m \end{array} \right.$$

Constat : pour obtenir des oscillations auto-excitantes il faudrait que le facteur "2m" devant le terme en \dot{x} se transforme en une fonction $A(x)$ qui change de signe en fonction des valeurs de x : au vait que si m devient négatif l'amplitude des oscillations augmente exponentiellement. Lorsque l'amplitude devient "trop" grande il faudrait qu'il devienne à nouveau positif pour amortir l'oscillation.

2. Intérêt de la résistance négative

Soit d'abord d'un dipôle D de caractéristique en convention récepteur $I = f(u)$, et $i = -f(u)$ en conv. génératricen.

en parallèle du circuit de la figure 1 :



$$(0) \text{ donne : } -iif'(u) = \frac{1}{R} \dot{i} + \frac{1}{L} i + \frac{1}{C} ii$$

$$\text{Soit : } \boxed{\ddot{i} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} + f'(u) \right) i + \frac{1}{L} u = 0 \quad (4)}$$

Adimensionnons cette équation par le temps :

$$w = \omega_0 t \Rightarrow d_t u = d_w u \cdot \omega_0 \quad \text{où : } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$(4) devient : \omega_0^2 \ddot{i} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{f'(u)}{C} \right) \omega_0 \dot{i} + \omega_0^2 u = 0$$

$$* \text{ On pose : } A(u) = 1 + Rf'(u) \Rightarrow \left(\frac{1}{RC} + \frac{f'(u)}{C} \right) = 2m A(u) \omega_0$$

$$\text{où } m := \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\text{d'où (4)} \Leftrightarrow \omega_0^2 \ddot{i} + 2\omega_0^2 m A(u) + \omega_0^2 u = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{i} + 2m A(u) \dot{i} + u = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{i} + \varepsilon A(u) \dot{i} + u = 0 \quad (5)$$

$$\text{où } \varepsilon = 2m \quad \text{et} \quad A(u) = 1 + Rf'(u)$$

• Pour avoir un comportement d'oscillateur quasi-sinusoidal il faut que: $A(u) = 1 + Rf'(u)$, change de signe par rapport à une valeur u_S :

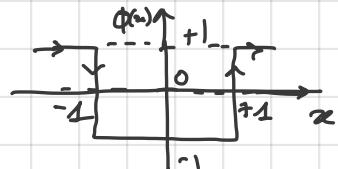
$$(C) \begin{cases} A(u < u_S) < 0 \rightarrow \text{amplification} \\ A(u > u_S) > 0 \rightarrow \text{amortissement} \end{cases}$$

→ En introduisant $x = \frac{u}{u_S}$ et $\phi = R_n f'$, on peut réécrire $A(u)$ tel que:

$$A(x) = 1 + \frac{R}{R_n} \phi(x) \quad (6)$$

Une fonction ϕ (donc f' , i.e.: dérivée de la caractéristique f de D) simple qui satisfasse à (C) est par exemple:

$$(C1) \quad \phi(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } |x| < 1 \\ +1 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$



avec: $R_n < R$ (C.2), de sorte que:

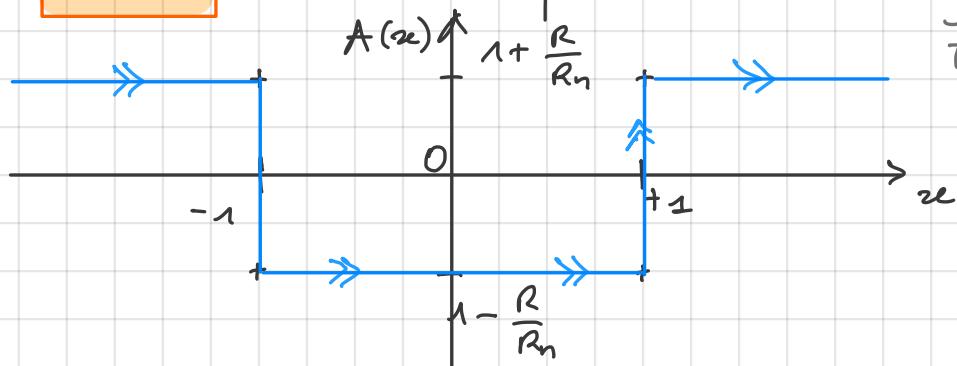


figure 5

On cherche donc un dipôle D avec une caractéristique

$$I = f(u)$$

telle que: $f = \int \phi$ càd: $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } |x| < 1 \\ +x & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$

sont

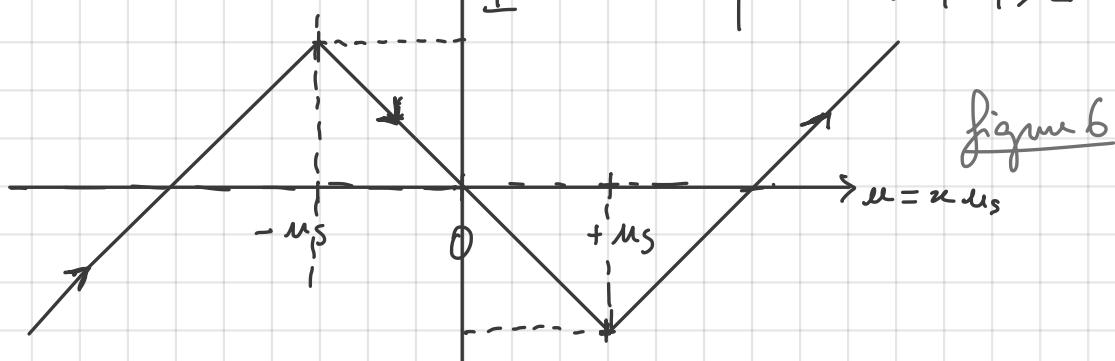
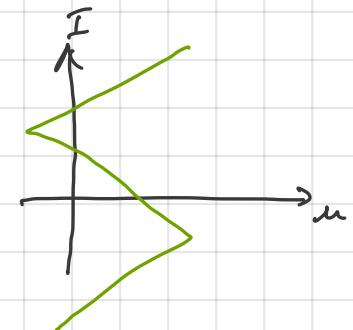
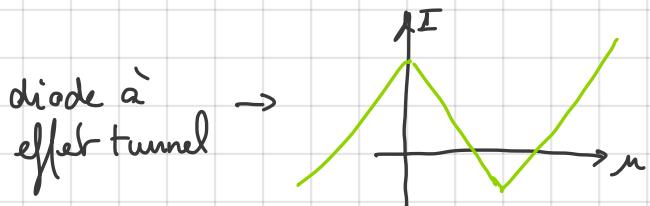


figure 6

Un dipôle D présentant une caractéristique telle que celle de la figure 6 est appelé un dipôle à résistance dynamique négative, communément appelé résistance négative.

dipôle dont la caractéristique dispose d'une partie dont la pente est négative

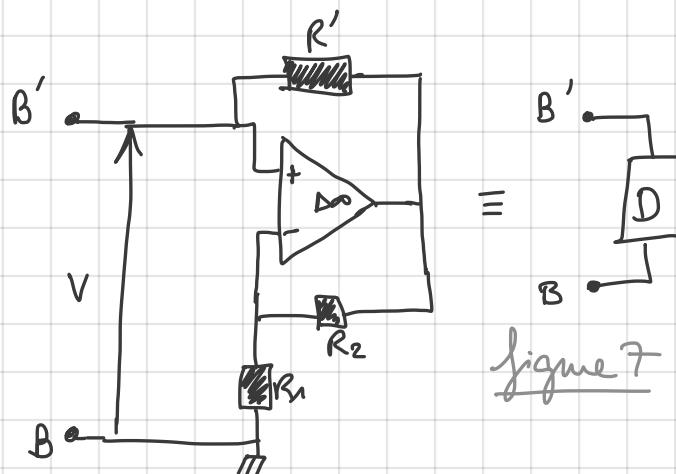
diode à effet tunnel →



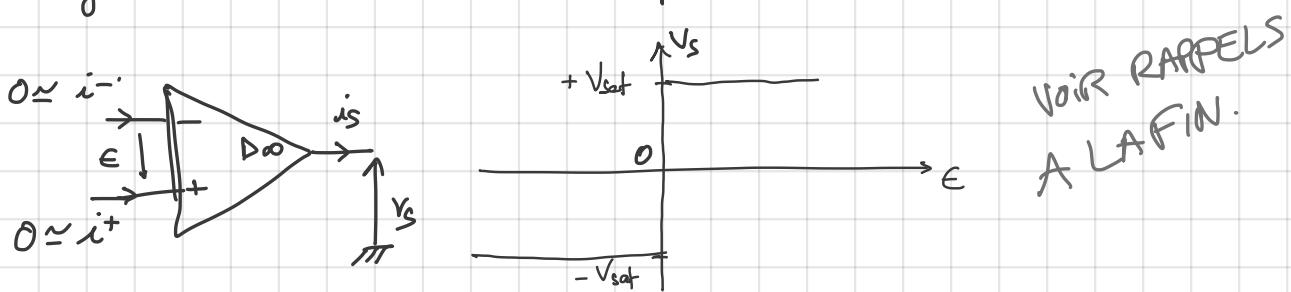
3. Réalisation pratique de la résistance négative

- Diodes à effet tunnel pour gérer les hautes fréquences
- Plantes avec AO pour des fréquences basses à moyennes.

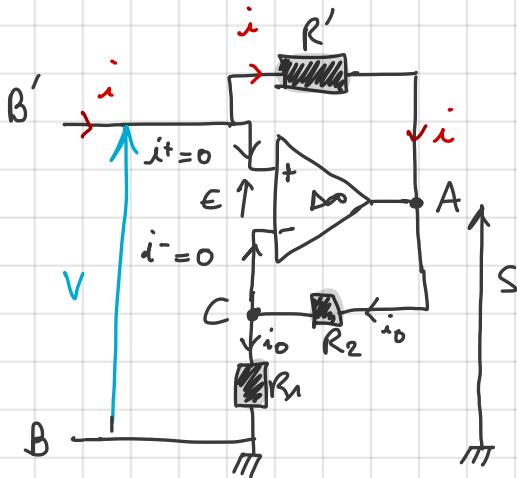
↳ un montage possible pour obtenir une résistance négative avec un AO est le suivant :



On considère un AO idéal dont la tension de saturation de sortie vaut V_{sat} ($V_{sat} > 0$). La caractéristique de transfert de cet AO est représentée ci-dessous :



1. Montrons que le dipôle BB' est équivalent à une résistance négative $-R_N$ ($R_N > 0$) que l'on exprimera en fonction de R_1, R_2 et R' , lorsque l'AO conserve un régime de fonctionnement linéaire.



$$i^+ \approx 0 \Rightarrow V - S = R'i \Rightarrow V = R'i + S \quad (3.0)$$

et $E = 0$ $E = 0$

$$V^+ := V \quad \text{et} \quad V^- = V^+ = V \quad (3.1)$$

or $V^- = R_1 i_o$ et $S - V^- = R_2 i_o$

$$\Rightarrow \frac{V^-}{R_1} = \frac{S - V^-}{R_2} \Rightarrow V^- \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = S \quad (3.2)$$

pont diviseur de tension.

donc : $S = V \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$

et donc : $(3.0) \Rightarrow V = R'i + V \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$

$$\Rightarrow R'i = -V \frac{R_2}{R_1} \Leftrightarrow V = -\frac{R_1 R'}{R_2} i \quad (3.3)$$

$V = -R_n i$ avec

$R_n = \frac{R_1 R'}{R_2}$ (3.4)

$\forall v \in [-V_0; +V_0]$, $i = -\frac{1}{R_n} v$

où V_0 tq $S = V_{sat}$ si $v = V_0$, $S = -V_{sat}$ si $v = -V_0$

$$S = V \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = V_{sat} \Leftrightarrow v = \frac{R_1}{R_2 + R_1} V_{sat} = V_0 \quad (3.5)$$

$$= -V_{sat} \Leftrightarrow v = -\frac{R_1}{R_2 + R_1} V_{sat} = -V_0$$

la valeur de i vaut alors :

$S = +V_{sat} \Rightarrow i = i(V_0) = -\frac{1}{R_n} V_0 = -i_0$

$S = -V_{sat} \Rightarrow i = i(-V_0) = \frac{V_0}{R_n} = +i_0$

2. Si l'ATO n'est plus en régime linéaire : $\epsilon \neq 0$

soit $S = +V_{sat}$ alors :

$$(3.6) \Rightarrow V^+ = V = R'i + V_{sat} \Leftrightarrow i = -\frac{V_{sat}}{R'} + \frac{V}{R'} \quad (3.6)$$

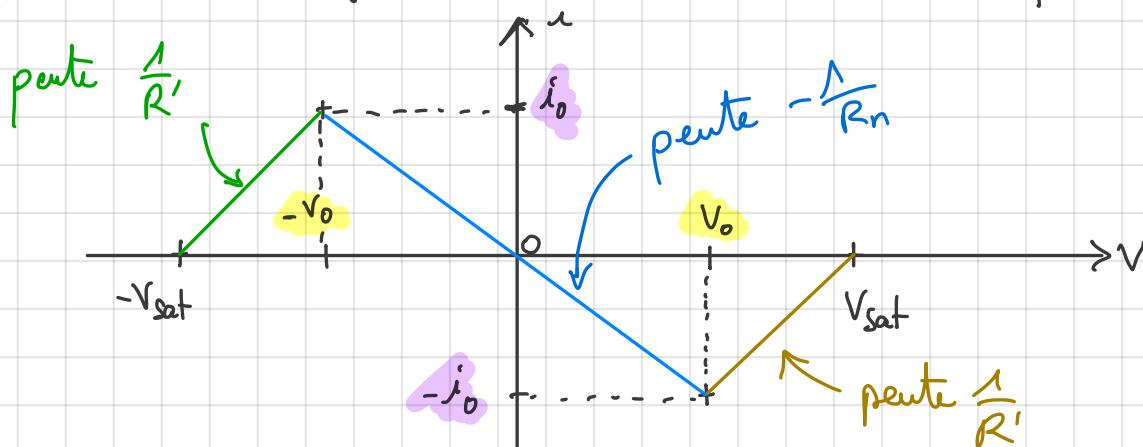
soit $S = -V_{sat}$ alors :

$$V = R'i - V_{sat} \Leftrightarrow i = \frac{V_{sat}}{R'} + \frac{V}{R} \quad (3.7)$$

$$\forall v \in [v_0; V_{sat}], i = -\frac{V_{sat}}{R'} + \frac{V}{R},$$

$$\forall v \in [-V_{sat}; -v_0], i = \frac{V_{sat}}{R'} + \frac{V}{R},$$

Réprésentons enfin la caractéristique $i = f(v)$



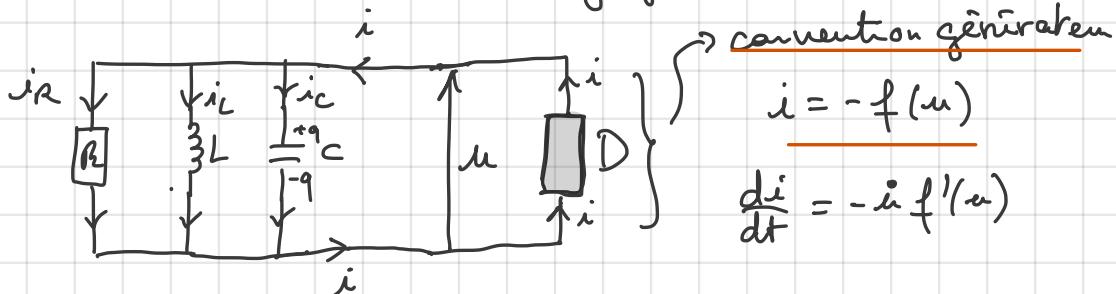
On a donc réalisé une résistance négative qui donne la fonction $A(x)$ de la figure 5. $\leftarrow (C.1)$

Il faut s'assurer que $R_n \leq R$ $\leftarrow (C.2)$

\uparrow résistance du RLC

4. Étude de l'oscillateur à résistance négative

On insère le dipôle D de la figure 7 dans le RLC parallèle, on retrouve la figure 4 :



L'équation canonique régissant l'évolution de u

est :

$$\ddot{u} + \Sigma h(n, \dot{u}) + u = 0$$

où : $\Sigma = 2m$, $m = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

$$h(n, \dot{u}) = A(n) \dot{u}, \quad A(n) = \left(1 + \frac{R}{R_n} \phi(n)\right)$$

avec $\phi(n) = \begin{cases} -1 & \text{si } |n| < 1 \\ +1 & \text{si } |n| \geq 1 \end{cases}$

R_n donnée par (3.4)

où : $n = \frac{u}{V_0}$, V_0 donné par (3.5)

$$\dot{x} = dwx, \quad w = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- La condition pour obtenir des oscillations est que $R_n < R$ de sorte que $A(n)$ soit négatif pour $|n| < 1$.
- On a vu que si $\varepsilon \ll 1$ la pulsation du cycle limite est celle du régime harmonique ($\varepsilon=0$) à l'ordre 0 en ε , le cycle limite correspond alors à des oscillations quasi-sinusoidales.

• L'amplitude a du cycle limite (des oscillations quasi-sinusoidales en régime permanent) est donnée à l'ordre 0 en ε par la résolution de :

$$(E) \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} h(a \cos w, -a \sin w) \sin w dw = 0$$

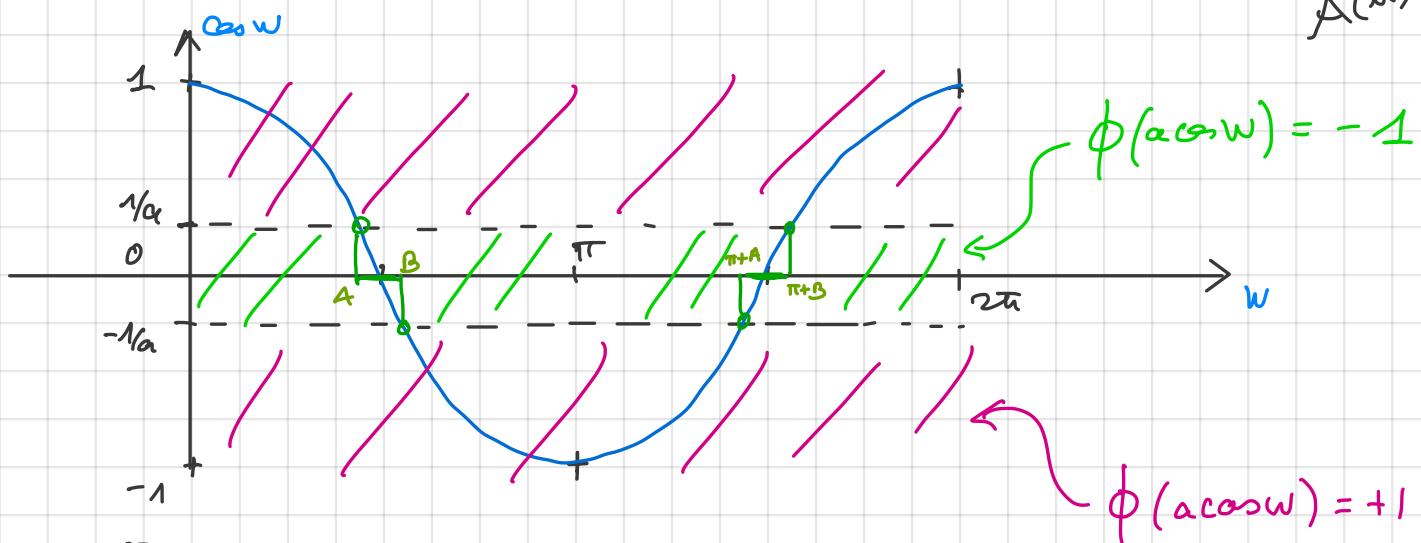
$$\text{aù : } h(u, y) = \left(1 + \frac{R}{R_n} \phi(u)\right) y$$

$$h(a \cos w, -a \sin w) = \left(1 + \frac{R}{R_n} \phi(a \cos w)\right)(-a \sin w)$$

$$(E) \Leftrightarrow - \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2 w dw}_{\pi} - \gamma \int_0^{2\pi} \phi(a \cos w) \sin^2 w dw = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow + \gamma \int_0^{2\pi} \phi(a \cos w) \sin^2 w dw = -\pi$$

ici ϕ la réciproque
de la fonction
 $\phi(u)$...



$$\mathcal{J} := \int_0^{2\pi} \phi(a \cos w) \sin^2 w dw$$

$$\text{on pose : } A = \arccos(1/a) \text{ et } B = \arccos(-1/a) = \pi - \arccos(1/a) = \pi - A$$

$$\mathcal{J} = \int_0^A - \int_A^B + \int_B^{\pi+A} - \int_{\pi+A}^{\pi+B} + \int_{\pi+B}^{2\pi} \left\{ \sin^2 w dw \right\}$$

$$\text{or } \int_x^y \sin^2 w dw = \frac{y-x}{2} - \frac{1}{2} [\sin w \cos w]_x^y$$

donc :

$$\begin{aligned}
 J &= \left(\frac{A}{2} - \frac{1}{2} \sin(A) \cos(A) \right) - \left(\frac{B-A}{2} + \frac{1}{2} [\sin(B) \cos(B) - \sin(A) \cos(A)] \right) \\
 &\quad + \frac{\pi+A-B}{2} - \frac{1}{2} [\sin(\pi+A) \cos(\pi+A) - \sin B \cos B] \\
 &\quad - \frac{B-A}{2} + \frac{1}{2} [\sin(\pi+B) \cos(\pi+B) - \sin(\pi+A) \cos(\pi+A)] \\
 &\quad + \frac{\pi-B}{2} - \frac{1}{2} [0 - \sin(\pi+B) \cos(\pi+B)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J &= 2(A-B) + \pi - \sin(A) \cos(A) + \sin B \cos B - \sin(\pi+A) \cos(\pi+A) \\
 &\quad + \sin(\pi+B) \cos(\pi+B)
 \end{aligned}$$

$$J = 2(A-B) + \pi + 2 \underbrace{(\sin B \cos B - \sin A \cos A)}_{\cos(A+B)}$$

$$J = 2(A-B) + \pi + 2 \cos(A+B)$$

$$J = 4A - \pi - 2$$

$$(A+B = \pi)$$

$$A - B = 2A - \pi$$

$$\begin{aligned}
 &- \frac{1}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^2} \\
 &- \sqrt{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^2} \frac{1}{a}
 \end{aligned}$$

$$\text{d'au } (E) \Leftrightarrow \gamma(4A - \pi - 2) = -\pi$$

$$\Leftrightarrow 4A = -\frac{1}{3}\pi + \pi + 2$$

$$\Leftrightarrow 4A = 2 + \pi \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$(E) \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \quad A = \arccos\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\text{d'au : } a = \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{R_n}{R_2}\right)\right)}$$

$$\text{A.N: avec: } R' = 10k\Omega \quad R_1 = 1k\Omega \quad R_2 = 1k\Omega$$

$$\Rightarrow R_n = \frac{R_1 R'}{R_2} = 0, 1$$

$$\text{avec } R = 100k\Omega, V_{\text{sat}} = +12V \Rightarrow V_0 = 6V$$

$$\alpha = 2,81 \Rightarrow u_0 = \alpha v_0 = \underline{16,86 \text{ V}}$$

À l'ordre 0 en $\epsilon = 2m = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

avec $L = 100 \text{ mH}$ et $C = 0,1 \mu\text{F}$ et $R = 100 \Omega$

$$\epsilon = 0,01 \ll 1,$$

le cycle limite correspond à des oscillations sinusoidales.

$$u(t) = u_0 \cos(\omega_0 t)$$

où $u_0 = \frac{v_0}{\cos(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}(n - \frac{R_n}{2}))} = 16,9 \text{ V}$

et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 \text{ rad/s}$

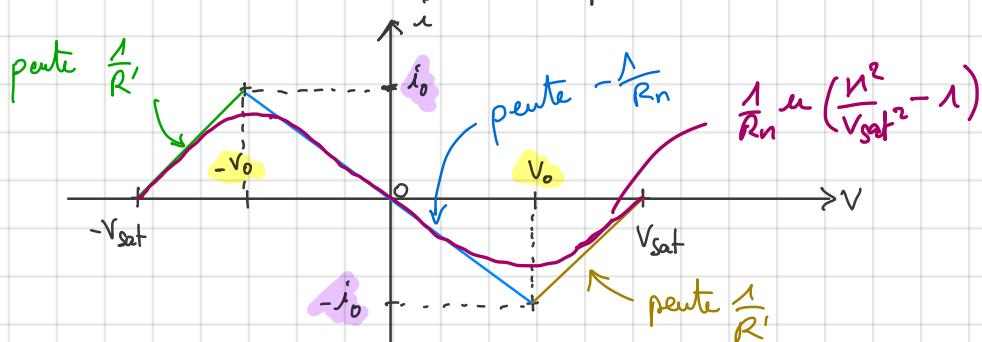
Ici l'interprétation du bilan énergétique à la base de (E) est simple : la puissance dissipée dans R par effet Joule est égale à la puissance fournie par D.

Remarque : On peut aussi mener le calcul en approximant la caractéristique en "N" par une fonction continue

$$f(u) \approx au(bu^2 - 1)$$

où a et b sont tels que : $f'(0) = -\frac{1}{R_n} \Leftrightarrow a = \frac{1}{R_n}$

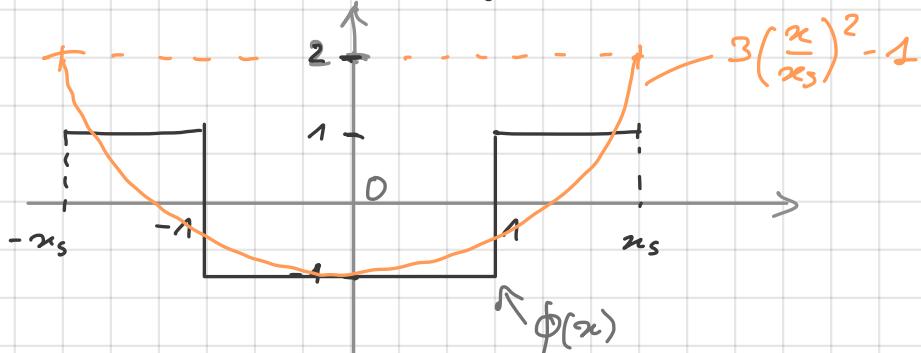
$$f(v_{sat}) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{V_{sat}^2}$$



La fonction $A = 1 + \alpha f(u)$ devient alors :

$$A(u) \approx 1 + 3 \frac{R}{\alpha u} \left(\frac{u^2}{V_{sat}^2} - 1 \right)$$

d'où : $\phi(x) \approx 3 \left(\frac{x}{x_s} \right)^2 - 1$



ainsi $\delta(\eta, \dot{\eta}) \approx \left(1 + \gamma \left[3 \left(\frac{\dot{\eta}}{x_s} \right)^2 - 1 \right] \right) \dot{\eta}$

d'où $(E) \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \left(1 + 3\gamma \frac{\alpha^2 \cos^2 w}{x_s^2} - \gamma \right) \sin^2 w dw = 0$

$$(E) \Leftrightarrow (\eta-1) \int_0^{2\pi} \sin^2 w dw - 3\gamma \frac{\alpha^2}{x_s^2} \int_0^{2\pi} \cos^2 w \sin^2 w dw = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow \pi(\eta-1) = 3\gamma \frac{\alpha^2}{x_s^2} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = x_s^2 \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{\eta} \right) = x_s^2 \cdot \frac{4}{3} \left(1 - \frac{R_n}{R} \right)$$

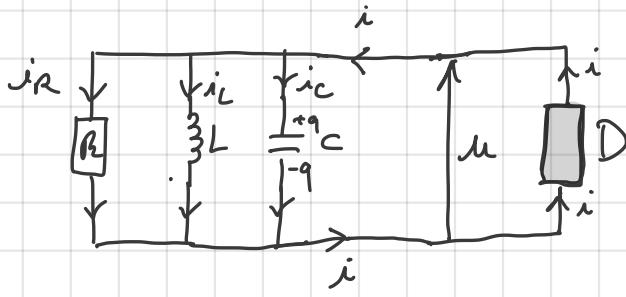
$$\Leftrightarrow a = x_s \sqrt{\frac{4}{3} \left(1 - \frac{R_n}{R} \right)}$$

Soit $\mu_0 = V_{sat} \sqrt{\frac{4}{3} \left(1 - \frac{R_n}{R} \right)}$

AN : $\mu_0 = 13,2 \text{ V}$

Soit une erreur de 22% sur le résultat exact.

5. Montage à faire

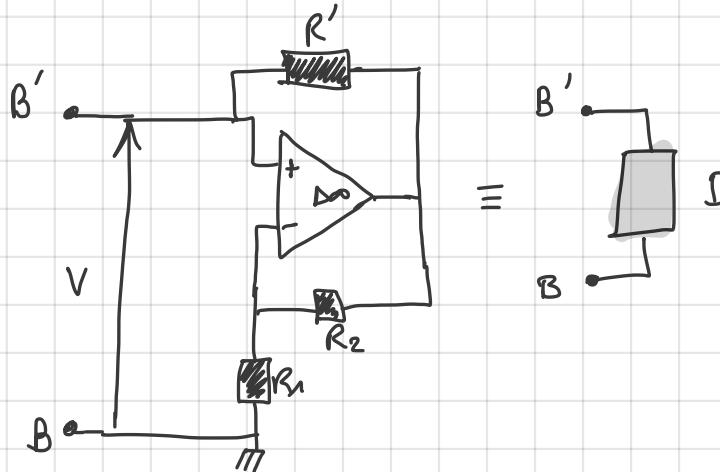


$$R = 100k\Omega$$

$$L = 100 \mu F$$

$$C = 0,1 \mu F$$

$$\hookrightarrow \underline{\varepsilon} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{L}{C}} = 10^{-3,5} \ll 1$$



$$R' = 10\text{h}\Omega$$

$$R_1 = 1 \text{ h} \Omega$$

$$R_2 = 18\Omega$$

$$V_{\text{set}} = 12 \text{ V}$$

→ afficher $u(t)$ et (\dot{u}, u)

→ montrer le cycle limite

↳ le spectre

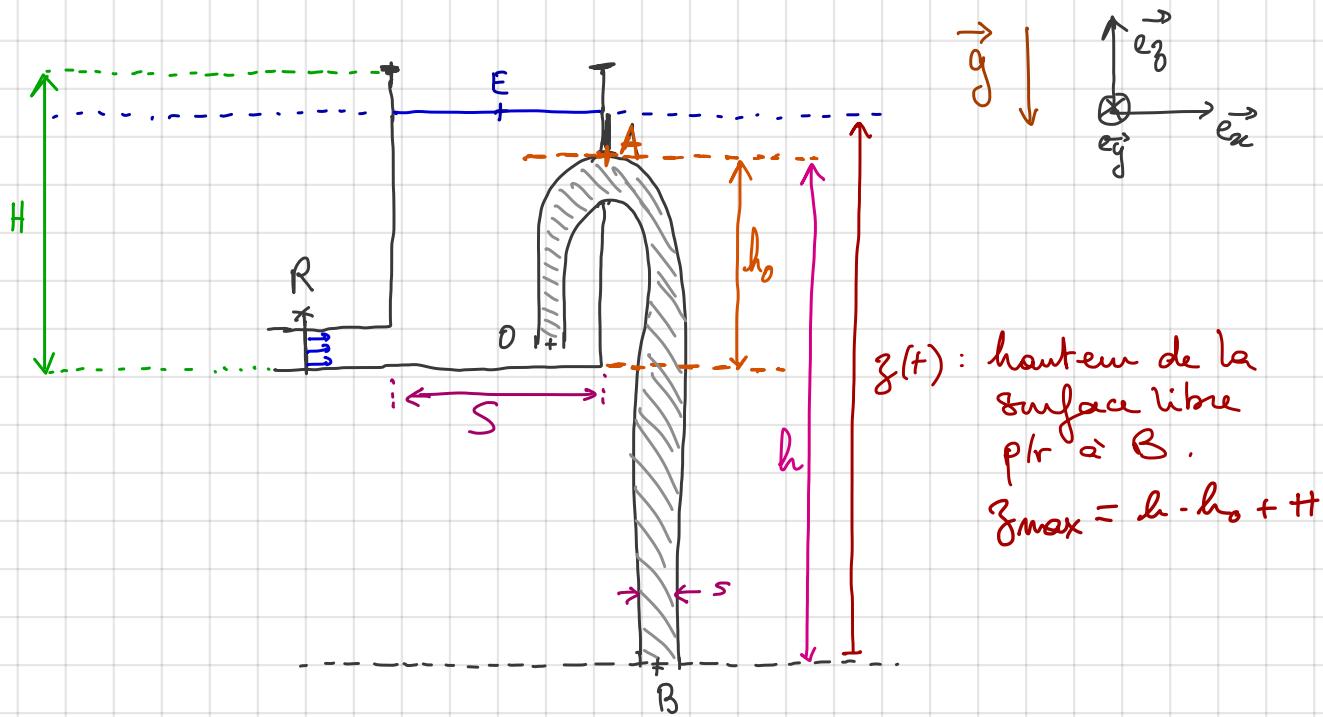
↳ messen m_0 et w_0 .

III. Exemple d'oscillation de relaxation ($\varepsilon \gg 1$)

Vase de Tantal

Où va maintenant étudier un oscillation de relaxation en mécanique des fluides.

1. Présentation du système



$z(t)$: hauteur de la surface libre plr à B.
 $z_{\max} = h - h_0 + H$

- O est au voisinage immédiat du fond du vase.
- Le vase a une hauteur H et une section S dans un volume $V = HS$.
- Le vase est alimenté en eau par un robinet de débit volumique réglable D [m^3/s].

Observations:

- Lorsque la surface libre E de l'eau atteint le niveau de A, le siphon s'amorce.
- Lorsque E descend jusqu'en O, le siphon se désamorce et se vide complètement.
 → Explications en annexe.

2. Débit sortant par le siphon

Hypothèses sur l'écoulement d'eau à travers le siphon :

- régime permanent ($\partial_t \vec{v} = \vec{0}$)

- irrotationnel et isovolume ($\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$ et $\text{div}(\vec{v}) = 0$)

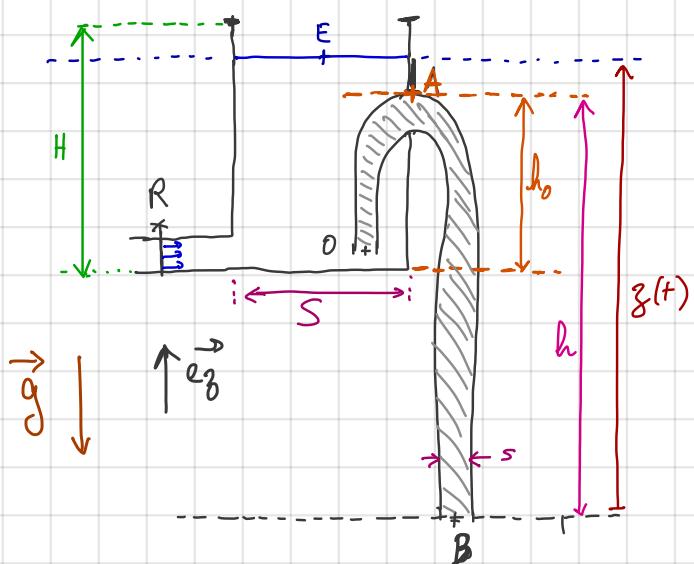
Hypothèses sur l'eau : fluide incompressible ($D_t P = 0$)

Hypothèse sur les forces volumiques : $\vec{f} = -\nabla \underline{\Phi}$

À chaque t dans tout le champ, le théorème de Bernoulli donne :

$$\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + P + \underline{\Phi} = \text{cste} \quad (\text{III.2.1})$$

On peut s'en servir pour déduire le débit à travers le siphon en fonction de z :



Les forces volumiques correspondent ici au poids qui dérive de l'énergie potentielle volumique :

$$\vec{f} = \rho \vec{g} = -\rho g \vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \vec{f} = -\nabla \underline{\Phi} \text{ avec } \underline{\Phi} = \rho g z.$$

A (III.2.1) on obtient :

$$\frac{1}{2} \rho v_E^2 + P_E + \rho g z = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + P_B + \rho g z_B$$

$$\text{si } \begin{cases} P_E = P_{\text{atm}} \\ V_E \ll V_B \quad \text{car } \rho \gg s \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} \gamma_B = 0 \\ P_B = P_{\text{atm}} \end{cases}$$

alors: $2gz = V_B^2 \left(1 - \frac{V_E^2}{V_B^2} \right)$

sait: $2gz = V_B^2 + 0 \left(\frac{V_E^2}{V_B^2} \right) \Leftrightarrow V_B = \sqrt{2gz}$

d'où: $d(z) = V_B(z)s = S\sqrt{2gz} = d(z) \quad (\text{III.2.2})$

Le débit max est obtenu pour $z = z_{\max} = h - h_0 + H$

$$d_{\max} = S\sqrt{2g(h - h_0 + H)}$$

A.N. $H = 50\text{cm}$ $h_0 = \frac{3}{5}H$ $h = 1,2\text{ m}$ $g = 9,81$

et $s = 1\text{ cm}^2$:

$$\underline{d_{\max} = 5,24 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}$$

$$\begin{aligned} 1\text{ m}^3 &= 1000\text{ L} \\ 10^{-4}\text{ m}^3 &= 0,12 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \underline{d_{\max} = 0,524 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}}$$

3. Évolution de la hauteur de la surface libre z(t) et régimes possibles.

Le vase de Tantal est initialement vide, on ouvre à $t=0$ le robinet R de débit D constant.

On néglige la durée de l'amorçage du siphon (durée nécessaire pour que l'eau s'écoule de A à B).

→ Équation différentielle régissant $z(t)$ après l'amorçage du siphon?

Raisonnons sous forme de bilan.

À chaque déte t, durant dt il entre un volume Ddt ,

et il sort un volume, $d dt$, par le siphon où puisque $\delta \gg s$, $d = s\sqrt{2gz}$ d'après (2.2).

L'incrément de hauteur de la surface libre E, dz vaut donc: $dz = \frac{D - d}{s} dt$

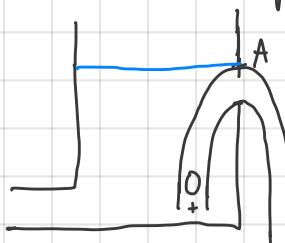
$$\text{Soit : } \frac{dz}{dt} = \frac{D}{s} - \frac{s}{\delta} \sqrt{2gz}$$

$$\text{ou : } \frac{dz}{dt} + \frac{s}{\delta} \sqrt{2gz} = \frac{D}{s} \quad (\text{III.3.1})$$

(III.3.1) est valide à partir de l'instant t_0 pour lequel :

$$z(t_0) = h.$$

on pose ci-après $t_0 = 0$.



On va maintenant montrer qu'en fonction du débit D entrant, le système présente différent comportement.

Pour ce faire on va raisonner sur la hauteur limite z_L permise par l'évolution (II.3.1).

Le niveau limite z_L si l'est atteint correspond à l'annulation permanente de la vitesse $\frac{dz}{dt}$ régée par (3.1)

Soir

$$\frac{s}{S} \sqrt{2g z_L} = \frac{D}{S}$$

$$\Leftrightarrow z_L = \frac{D^2}{2g s^2} \quad (3b.1)$$

$$z_{\min} = h - h_0 \quad (\text{fond du vase})$$

$$z_{\max} = H + h - h_0 \quad (\text{vase rempli à ras bord})$$

On doit donc avoir: $h - h_0 < z_L < H + h - h_0$

s'or

$$\underbrace{s \sqrt{2g(h-h_0)}}_{\text{"}D_1\text{"}} < D < \underbrace{s \sqrt{2g(H+h-h_0)}}_{\text{"}D_2\text{"}}$$

$$AN: \quad h = 1,2 \text{ m}$$

$$\left. \begin{array}{l} h_0 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \text{ m} \\ S = 1 \text{ cm}^2 \\ H = \frac{1}{2} \text{ m} \end{array} \right| \Rightarrow D_1 = 0,420 \text{ L/s} \quad D_2 = 0,524 \text{ L/s}$$

On note D_0 le débit du robinet pour lequel

$$z_l = h$$

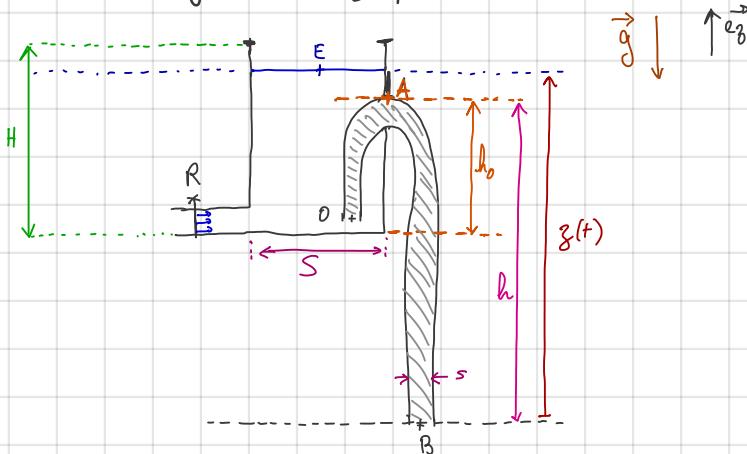
$$h = \frac{D_0^2}{2gs^2} \Leftrightarrow D_0 = s\sqrt{2gh} > D_1 := s\sqrt{2g(h-h_0)}$$

$$\text{AN: } D_0 = 0,485 \text{ L/s}$$

$$d_{\max} = D_2 = s\sqrt{2g(h-h_0+H)} \text{ or } H > h_0 \Rightarrow D_2 > D_0$$

On remarque au passage de $[D_0 = d(h)]$ d'après (2.2)

Ce qui est tout à fait logique: entrée = sortie.



On va montrer qu'il existe 4 régimes d'écoulement à travers le siphon.

Si $D \in [D_1; d_{\max}]$ il existe un niveau limite z_l

il y a donc équilibre de la côte z_l de la surface libre E à un niveau z_l .

Si $D_1 < D < D_0$, $z_l < h$ et si $d_{\max} > D > D_0$ $z_l > h$.

Si $D > d_{\max} \rightarrow$ le vase déborde

Si $D < D_1 \rightarrow \nexists z_l$, le vase se vide et se re-remplit
↳ régime périodique.

D	0	D_1	D_0	$d_{\max} = D_2$
	oscillation de $z(t)$	$\exists z_l < h \quad z_l = h \quad \exists z_l > h$		déborde.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{équilibre de } z(t) \text{ en } z_l}$

4. Équation canonique d'évolut° de $z(t)$ et résolution approchée.

On va chercher à adimensionnaliser cette équation pour la mettre sous une forme canonique.

On introduit une constante z_0 que l'on déterminera + tard.

et on note: $\Theta = \frac{z}{z_0}$

On pose: $\varepsilon := \frac{\sqrt{s}}{s} \gg 1$ et

$$\theta := \frac{1}{\varepsilon} \frac{D}{d(z_0)} \quad \text{III-4.1}$$

$$(3.1) \Leftrightarrow \frac{dz}{dt} + \frac{s}{s} \sqrt{2g} z = \frac{D}{s} \quad \text{III-4.0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2g}{z_0}} \theta = \frac{D}{s z_0}$$

on voit apparaître $\sqrt{\frac{2g}{z_0}}$ qui a la dimension de l'inverse d'une durée :

$$\tau := \sqrt{\frac{z_0}{2g}} \quad (4.2)$$

On pose alors: $w = \frac{t}{\tau}$,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dw} \cdot \frac{dw}{dt} = \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dw}$$

$$(3.1) \Rightarrow \frac{1}{\tau} \frac{d\theta}{dw} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\tau} \sqrt{\theta} = \frac{D}{s z_0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dw} + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\theta} = \frac{D\tau}{s z_0}$$

$$\text{Or: } \frac{D\tau}{s z_0} = \frac{D\sqrt{z_0}}{s z_0 \sqrt{2g}} = \frac{Ds}{s \sqrt{2g z_0}} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{D}{d(z_0)} = \frac{r}{\varepsilon}$$

et $\dot{x} = d_w x$:

$$\dot{\theta} + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\theta} = \frac{r}{\varepsilon} \quad (4.3)$$

Posons $x^2 = \theta \Rightarrow \sqrt{\theta} = x$ et $\dot{\theta} = 2x\dot{x}$

$$(4.3) \Rightarrow 2x\dot{x} + \frac{1}{\varepsilon}x = \frac{r}{\varepsilon}$$

$$\text{soit } x = \varepsilon \left(\frac{r}{\varepsilon} - 2x\dot{x} \right)$$

$$x = -\varepsilon \left(2x\dot{x} - \frac{r}{\varepsilon} \right)$$

$$x = -\varepsilon h(n, \dot{n}) \quad (5.1)$$

$$\text{avec } h(n, y) = 2xy - \frac{r}{\varepsilon} \quad (5.2)$$

→ On retrouve la forme $\varepsilon h(n, \dot{n}) + n = 0$ annoncée au I.

On va maintenant résoudre de manière analytique mais approchée (5.1).

On se place dans le régime périodique: $D \ll D_0$.

On choisit $z_0 = h$ et on note t_0 la date de début de vidange.

$$d(z_0 = h) = D_0 \Rightarrow r = \frac{D}{D_0} \quad (6.1)$$

$$\text{Si: } D \ll D_0 \text{ alors } r \ll 1 \Rightarrow 2x\dot{n} + \frac{1}{\varepsilon}n = \frac{r}{\varepsilon} \Leftrightarrow 2n\ddot{n} + \frac{n}{\varepsilon} = 0 \quad (6.2)$$

$$\text{Soit: } \dot{n} = -\frac{1}{2\varepsilon} \quad \downarrow \int dw$$

$$\text{Soit: } n = -\frac{1}{2\varepsilon}w + C$$

$$\text{i.e.: } \sqrt{\theta} = -\frac{1}{2\varepsilon}w + C$$

$$\text{i.e.: } \sqrt{\frac{3}{h}} = -\frac{1}{2\varepsilon} \frac{t}{T} + C \Leftrightarrow z(t) = h \left(C - \frac{t}{2\varepsilon} \right)^2$$

or: $z(t_0) = h$ (le vase se vide, le siphon s'arrête)

$$\Rightarrow h = h \left(C - \frac{t_0/\tau}{2\varepsilon} \right)^2 \Leftrightarrow C = 1 + \frac{t_0/\tau}{2\varepsilon}$$

d'où: (6.3) $z(t) = h \left(1 + \frac{t_0-t}{2\varepsilon\tau} \right)^2$, $t \in [t_0; t_0+\tau_v]$
phase de vidange

C'est des arcs de parabole ($z \propto t^2$).

puisque: $\frac{1}{\varepsilon\tau} = \sqrt{2g}/\sigma h = \frac{s\sqrt{2g}}{\sigma\sqrt{h}}$, c'est aussi:

$$z(t) = \left(\sqrt{h} + \frac{s\sqrt{2g}}{\sigma} (t_0 - t) \right)^2, \quad t \in [t_0; t_0+\tau_v] \quad (6.4)$$

Interprétation de τ :

$$d(h) = s\sqrt{2gh} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{h}{2g}} = \frac{8h}{d(\alpha)}$$

c'est la durée de vidange du vase lorsqu'il est rempli jusqu'à $g=h$ sans débit entrant. On s'attend donc à ce que la durée de vidange réelle soit plus longue !.

Estimation de la durée de vidange.

$$z(t) = h \left(1 + \frac{t_0-t}{2\varepsilon\tau} \right)^2 \quad \text{Posons } t_0 = 0$$

$$z(t_0+\tau_v) = h - h_0 \Leftrightarrow h \left(1 - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\tau_v}{\tau} \right)^2 = h - h_0$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\tau_v}{\tau} \right) = \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} =: r_{lim}$$

$$\Leftrightarrow \tau_{vapp} = 2\varepsilon\tau(1 - r_{lim})$$

Soit $\tau_{vapp} = 2 \cdot \frac{s}{\sigma} \sqrt{\frac{h}{2g}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} \right)$

τ_{vapp} ne dépend pas de D (logique puisque g est négligé)

AN: $\tau_{vapp} = 5,30s$

5. Calcul exact de la durée de vidange et de la période des oscillations de relaxation

On reste dans le cas du régime périodique
 $D < D_1$.

On va déterminer la durée de vidange τ_v sans faire d'approximation.

$$(3.1) \Leftrightarrow x + \varepsilon(2\dot{x} - q) = 0 \Leftrightarrow 2\dot{x} = \left(\frac{r}{x} - 1\right)\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = \frac{-1}{2\varepsilon} \left(1 - \frac{r}{x}\right)$$

d'auⁿ:
$$\frac{dx}{1 - \frac{r}{x}} = -\frac{1}{2\varepsilon} dw$$
 (séparation des variables)

On appelle que: $x = \sqrt{\theta} = \sqrt{\frac{3}{a}}$, et $w = \frac{t}{\tau}$.

La durée de vidange: $\tau_v = t_0 + \tau_v - t_0$, correspond au passage de: $z = h$ à $z = h - h_0$

sait au passage de: $x = 1$ à $x = \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}}$

donc:

$$-\frac{1}{2\varepsilon} \int_{w_0 = \frac{t_0}{\tau}}^{w_v = \frac{t_0 + \tau_v}{\tau}} dw = \int_{x=1}^{x=\sqrt{1-\frac{h_0}{h}}} \frac{dx}{1 - \frac{r}{x}}$$

Calculons: $\int \frac{dx}{1 - \frac{r}{x}} = : J$

$$J = \int \frac{dx}{x-r} = \int \left(1 + \frac{r}{x-r}\right) dx = \int dx + r \int \frac{dx}{x-r}$$

$$J = [x]_1^{\sqrt{1-\frac{h_0}{h}}} + a \left[\ln(x-r) \right]_1^{\sqrt{1-\frac{h_0}{h}}}$$

$$J = \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} - 1 + a \ln \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} - r}{1 - r} \right)$$

$$\text{or : } \frac{1}{2\varepsilon} \int_{w_0}^{w_v} dw = -\frac{T_v}{2\varepsilon\tau}$$

$$\text{donc : } -\frac{T_v}{2\varepsilon\tau} = \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} - 1 + r \ln \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} - r}{1 - r} \right)$$

$$\Rightarrow T_v = 2\varepsilon\tau \left[1 - \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} + r \ln \left(\frac{1 - r}{\sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} - r} \right) \right] \quad (8.1)$$

$$W_v(r) = 2\varepsilon \left(1 - r_{\lim} + r \ln \left(\frac{1 - r}{r_{\lim} - r} \right) \right), \quad r < r_{\lim} \quad (8.2)$$

$$\frac{T_v}{\tau} = \frac{D_1}{D_0} = \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}}$$

$$\frac{D_1}{D_0} = \frac{s \sqrt{2g(h-h_0)}}{s \sqrt{2gh}} = \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}}$$

On peut exprimer le résultat en fonction de S' , s , D_0 , D_1 :

$$T_v = 2\varepsilon\tau \left(1 - \frac{D_1}{D_0} + \frac{D}{D_0} \ln \left(\frac{1 - \frac{D}{D_0}}{\frac{D_1}{D_0} - \frac{D}{D_0}} \right) \right)$$

$$T_v = \frac{2\varepsilon\tau}{D_0} \left(D_0 - D_1 + D \ln \left(\frac{D_0 - D}{D_1 - D} \right) \right)$$

$$\text{or : } \varepsilon\tau = \frac{S'}{s} \sqrt{\frac{h}{2g}} = \frac{s' h}{s \sqrt{2gh}} = \frac{S' h}{D_0} \Rightarrow \frac{\varepsilon\tau}{D_0} = \frac{s'}{2s^2 g}$$

$$\text{donc : } T_v = \frac{s'}{g s^2} \left(D_0 - D_1 + D \ln \left(\frac{D_0 - D}{D_1 - D} \right) \right) \quad (8.3)$$

AN:

$$\varepsilon = 80 \quad \tau = \sqrt{\frac{h}{2g}} = 0,247 \quad \frac{h_0}{h} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{1,2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

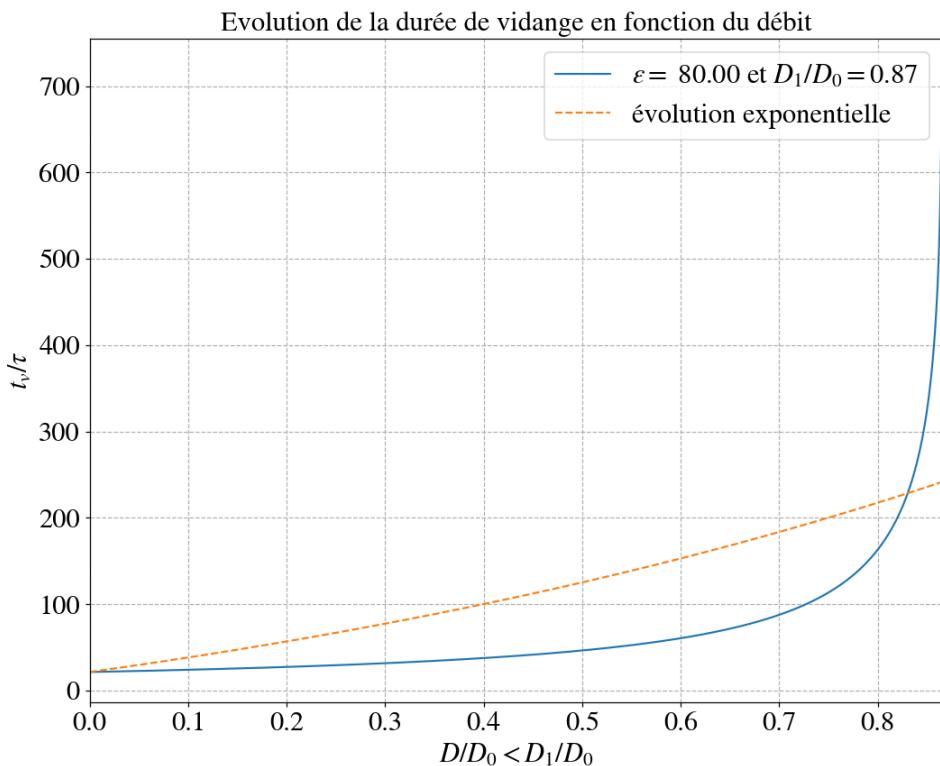
$$\hookrightarrow \sqrt{1 - \frac{h_0}{h}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = r_{\lim}$$

Pour $D = 0,120 \text{ L/S}$

$$\text{Soit pour } \frac{D}{D_0} = \frac{0,120}{0,485} = 0,247, \quad T_v = 2 \times 80 \times 0,247 \left(1 - 0,866 + 0,247 \right)$$

$$\text{avec } \frac{D_1}{D_0} = \frac{0,120}{0,485} = 0,247$$

$$\boxed{T_v = 7,25}$$



Pour déterminer la période T des oscillations, il ne reste plus qu'à calculer la durée de remplissage t_R du vase.

Pour $z \in [h-h_0; h]$, le siphon n'est pas amorcé et donc : $\frac{dz}{dt} = \frac{D}{S}$

soit $z(t) = \frac{D}{S}t + c_0$

$$z(0) = h - h_0 = c_0$$

$$\Rightarrow z(t) = h - h_0 + \frac{D}{S}t \quad \forall t \in [0; t_R] \quad (10.1)$$

$$\Rightarrow z(t_R) = h \Leftrightarrow \frac{D}{S}t_R = h_0 \Leftrightarrow t_R = \frac{h_0 S}{D} \quad (10.2)$$

$$\text{AN : } t_R = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{80 \cdot 10^{-4}}{0.12 \cdot 10^{-3}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{80}{1,2} = \frac{24}{1,2} = \frac{240}{12}$$

$$\underline{t_R = \frac{2 \times 12 \times 10}{12} = 20 \text{ s}}$$

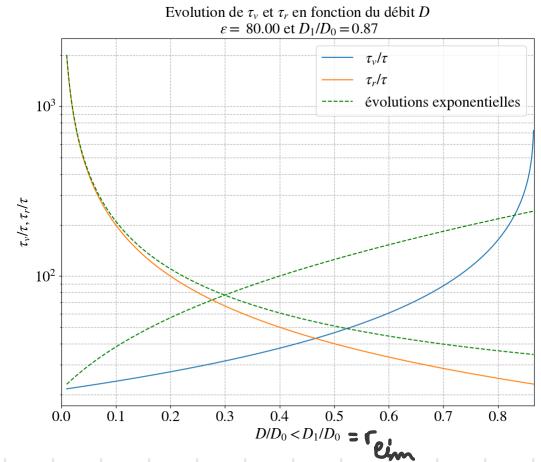
Sous forme adimensionnée :

$$\tau_R = \tau \frac{h_0}{h} \cdot \frac{\sqrt{h}}{D \tau}$$

$$\text{or } \frac{D\tau}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{D}{D_0} = \frac{r}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \frac{h_0}{h} = 1 - r_{lim}^2$$

$$\Rightarrow \tau_R = \tau (1 - r_{lim}^2) \frac{\varepsilon}{r}$$

$$\Rightarrow W_R(r) = (1 - r_{lim}^2) \frac{\varepsilon}{r} \quad (10.3)$$



D'où la période : $T := \tau_R + \tau_V$

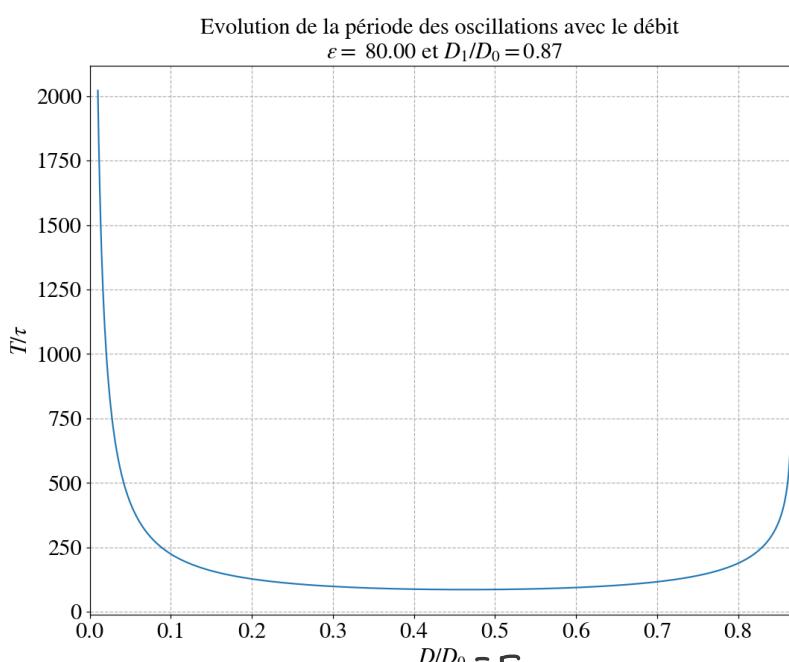
$$\text{soit : } T = \varepsilon \tau \left[\frac{1 - r_{lim}^2}{r} + 2 \left(1 - r_{lim} + r \ln \left(\frac{1 - r}{r_{lim} - r} \right) \right) \right]$$

$$\text{ou : } W := \frac{T}{\tau} = 2\varepsilon \left[\frac{1 - r_{lim}^2}{2r} + 1 - r_{lim} + r \ln \left(\frac{1 - r}{r_{lim} - r} \right) \right]$$

$$\text{ou encore : } T = \frac{h_0 S'}{D} + \frac{S'}{g S^2} \left(D_0 - D_1 + D \ln \left(\frac{D_0 - D}{D_1 - D} \right) \right)$$

Application numérique : $T = 20 + 7,2 = 27,2 \text{ s.}$

Ou remarque une propriété importante : $T \propto \varepsilon$
 $[Eh(ni) + \alpha = 0]$



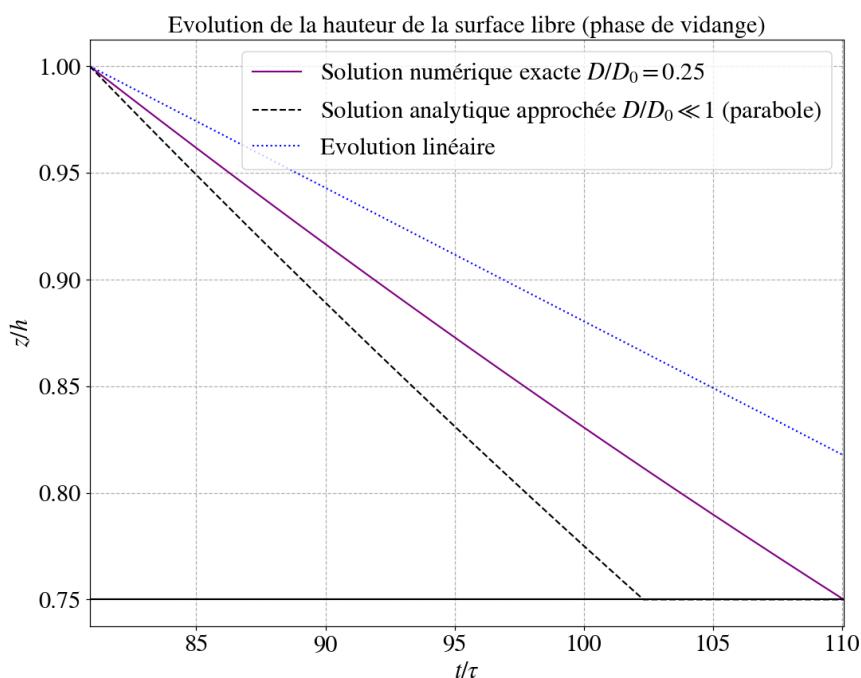
6. Résolution exacte (numérique) et étude du portrait de phase

$$\dot{\theta} + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\theta} = \frac{r}{\varepsilon} \Leftrightarrow \dot{\theta} + \frac{1}{\varepsilon} (\sqrt{\theta} - r) = 0$$

On peut comparer l'écart entre la solution approchée obtenue au 4, qui suppose que :

$$r = \frac{D}{D_0} \ll 1 \Leftrightarrow D \ll D_0 \Rightarrow \sqrt{\theta} - r \approx \sqrt{\theta}$$

à la solution numérique exacte de (3.1)

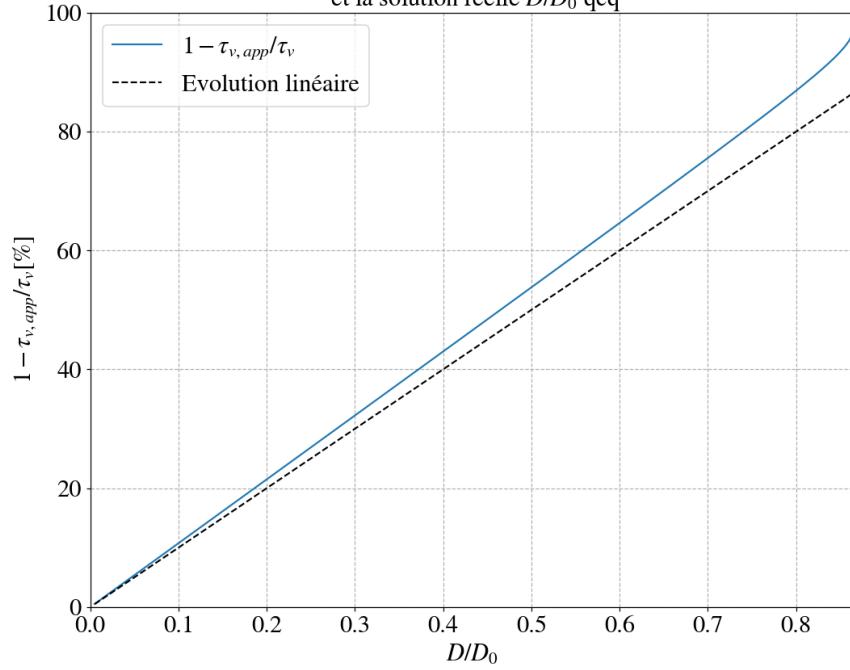


On remarque qu'il y a un écart significatif entre la solution approchée et la solution exacte ce qui est attendu puisque D n'est pas \ll devant D_0

$$\text{ana: } \frac{T_{\text{approx}}}{T_V} = \frac{2\varepsilon\tau(1-r_{\text{lim}})}{2\varepsilon\tau(1-r_{\text{lim}} + r \ln(\frac{1-r}{r_{\text{lim}}-r}))}$$

$$\frac{T_{\text{approx}}}{T_V} = \frac{1}{1 + \frac{r}{1-r_{\text{lim}}} \ln(\frac{1-r}{r_{\text{lim}}-r})}$$

Ecart sur la durée de vidange entre la solution approchée $D/D_0 \ll 1$
et la solution réelle D/D_0 qcq



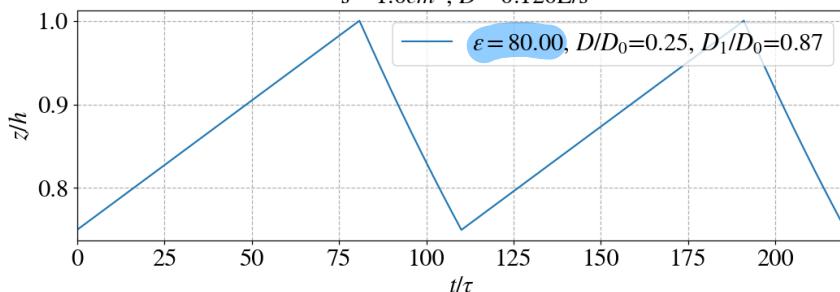
L'écart entre l'approximation et la réalité
croît linéairement pour des faibles valeurs de r .

Grâce à la résolution numérique on peut étudier l'influence de ε et r sur le comportement du système : $\ddot{\theta} + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\theta} = \frac{r}{\varepsilon}$.

On remarque que ε ne modifie pas la forme des oscillations à r fixé. Il influe juste sur T .

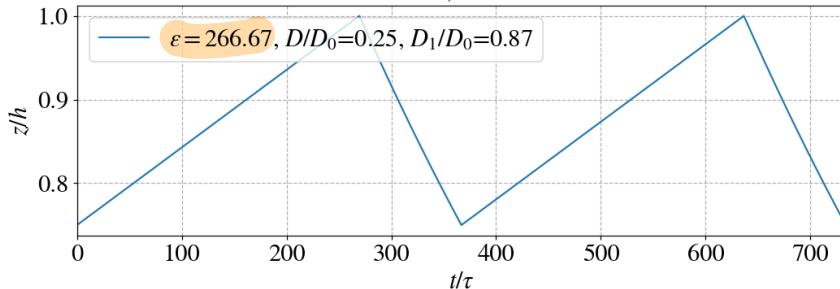
Oscillations de relaxation de la hauteur de la surface libre

$$s = 1.0 \text{ cm}^2, D = 0.120 \text{ L/s}$$



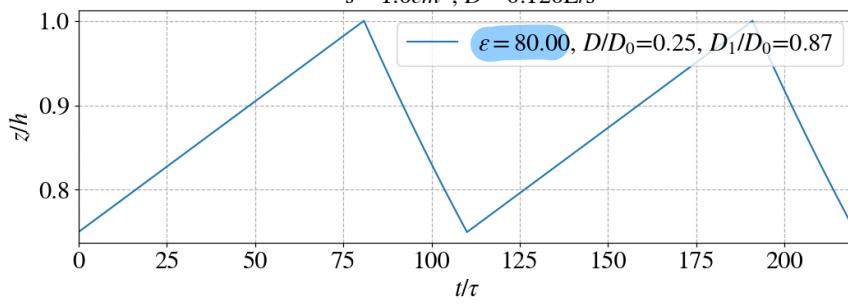
Oscillations de relaxation de la hauteur de la surface libre

$$s = 0.3 \text{ cm}^2, D = 0.036 \text{ L/s}$$



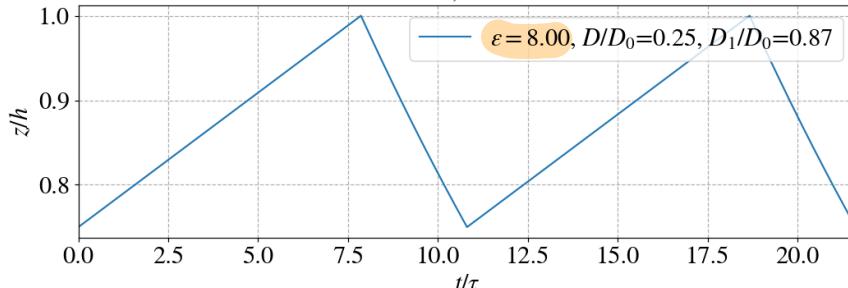
Oscillations de relaxation de la hauteur de la surface libre

$$s = 1.0 \text{ cm}^2, D = 0.120 \text{ L/s}$$

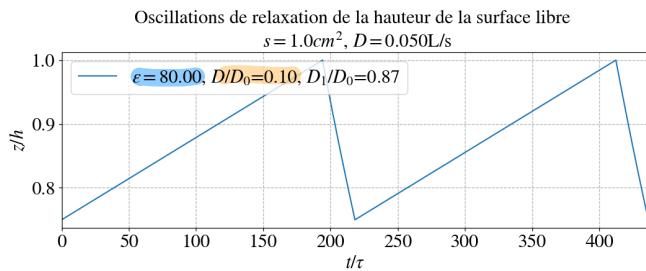
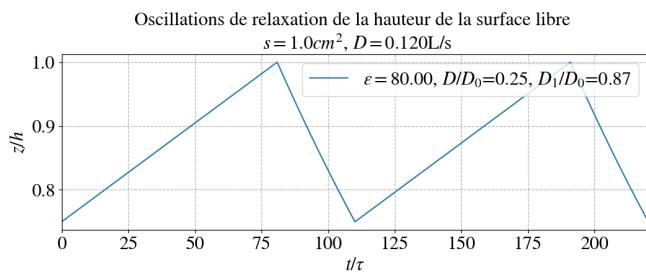


Oscillations de relaxation de la hauteur de la surface libre

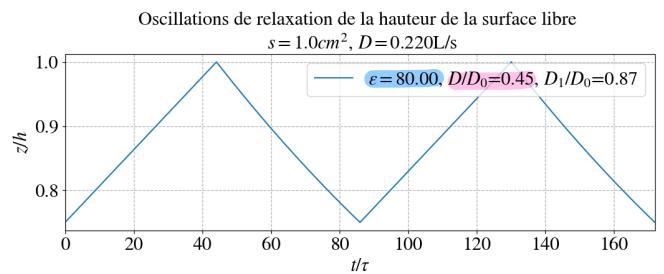
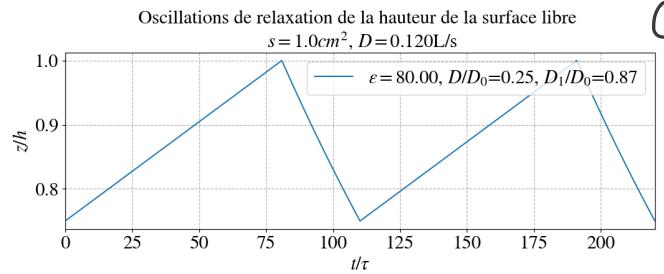
$$s = 1.0 \text{ cm}^2, D = 0.123 \text{ L/s}$$



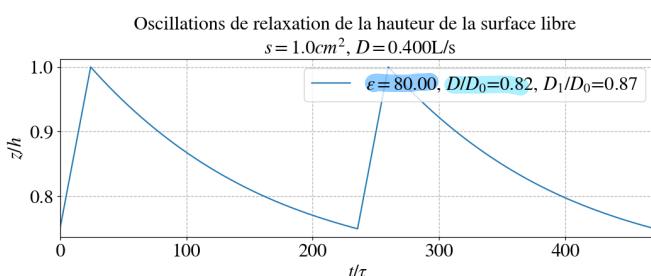
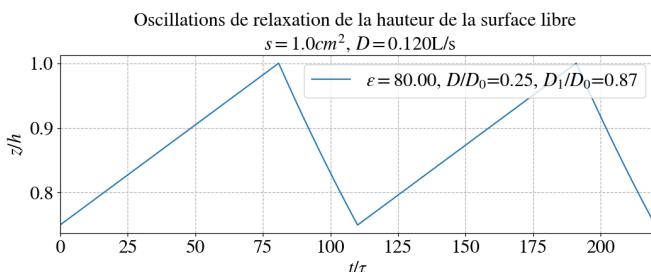
r modifie la forme des oscillations.



$$r = 0,10$$



$$r = 0,45$$

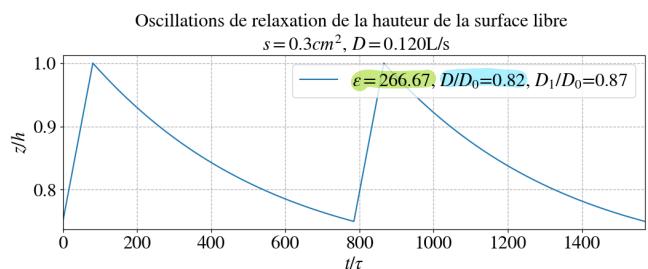
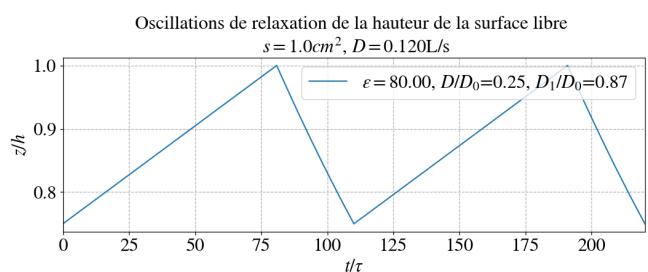


$$r = 0,82$$

On vérifie bien que ϵ n'a pas d'influence sur la forme des oscillations : ici $r = 0,82$ et $\epsilon = 266,67 \neq 80$ au retronne le résultat de ③

③

On constate que les oscillations se "cassent" de plus en plus au fur et à mesure que $r \uparrow$



On représente le portrait de phase des oscillations de relaxation et analyse l'influence de ϵ et de r sur celui-ci.

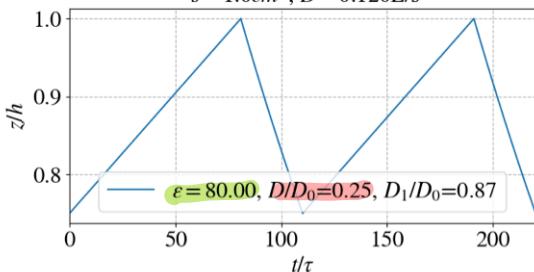
$$\dot{\theta} = \begin{cases} \frac{r}{\epsilon} & \forall t \in [0; t_R] \\ \frac{r}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\epsilon}, & \forall t \in [t_R; t_R + t_V] \end{cases}$$

régnée périodique
↓
Cycle limite

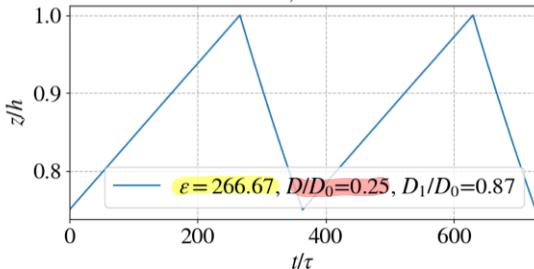
On remarque que ϵ influence la taille du cycle

limite : plus $\epsilon \uparrow$ et plus la taille du CL \downarrow

Oscillations de relaxation de la hauteur de la surface libre
 $s = 1.0 \text{ cm}^2, D = 0.120 \text{ L/s}$

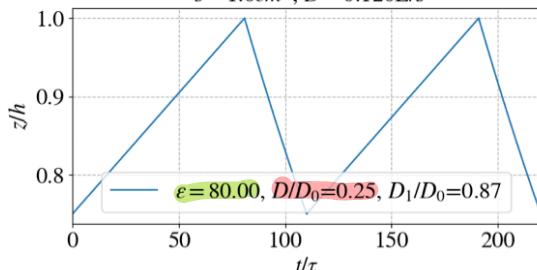


Oscillations de relaxation de la hauteur de la surface libre
 $s = 0.3 \text{ cm}^2, D = 0.036 \text{ L/s}$



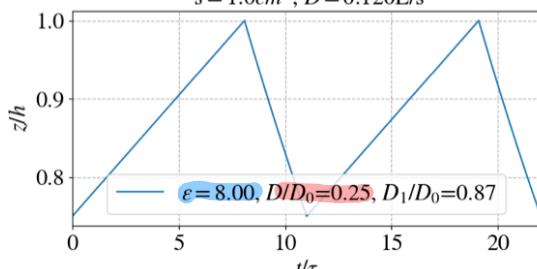
$\approx \sqrt{\epsilon}$

Oscillations de relaxation de la hauteur de la surface libre
 $s = 1.0 \text{ cm}^2, D = 0.120 \text{ L/s}$

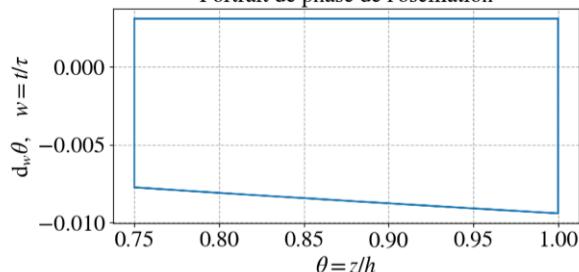


$\approx \sqrt{\epsilon}$

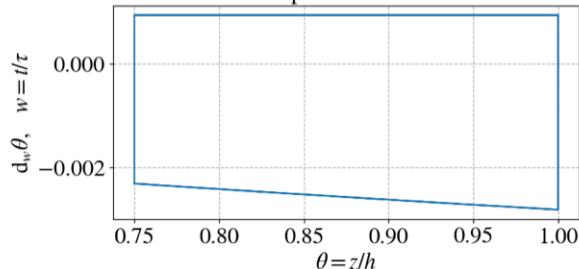
Oscillations de relaxation de la hauteur de la surface libre
 $s = 1.0 \text{ cm}^2, D = 0.120 \text{ L/s}$



Portrait de phase de l'oscillation

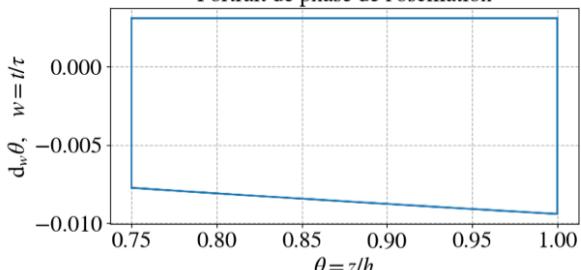


Portrait de phase de l'oscillation B



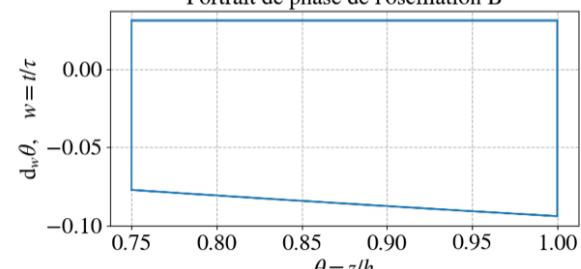
$\approx \frac{|d_w \theta|}{\sqrt{3}}$

Portrait de phase de l'oscillation

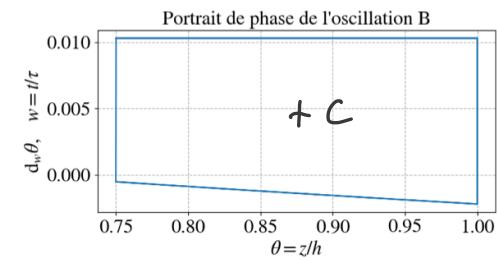
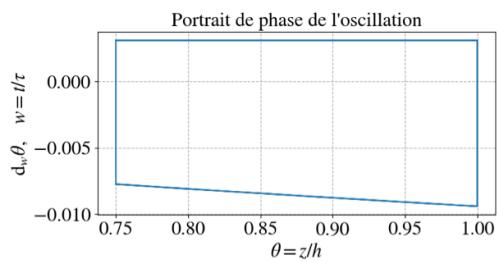
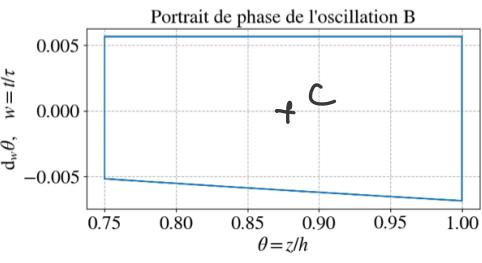
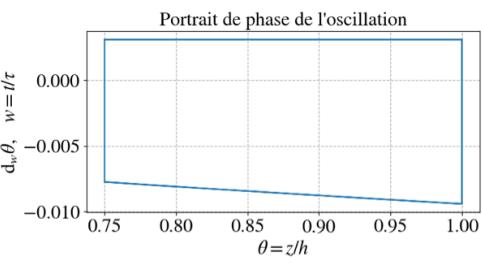
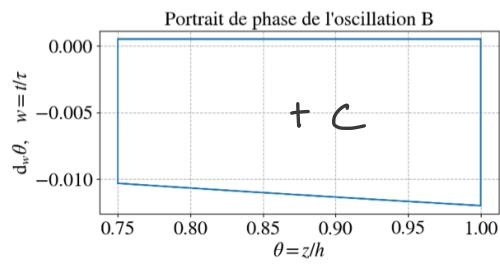
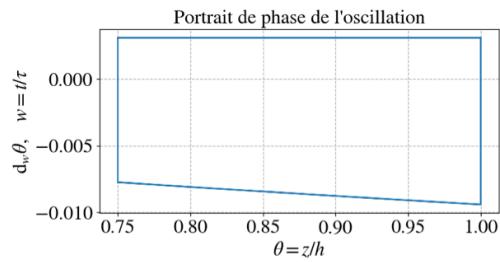
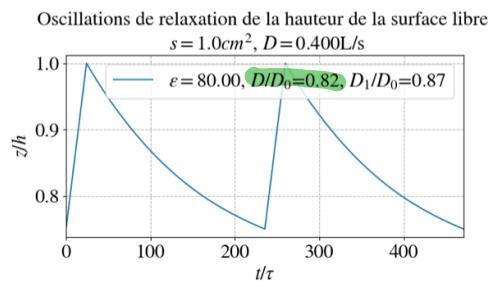
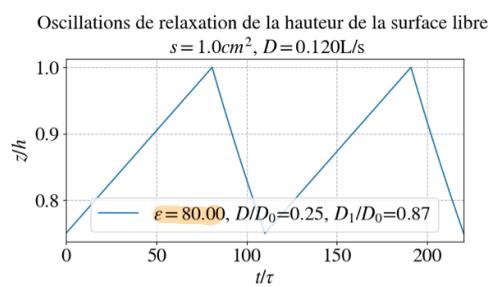
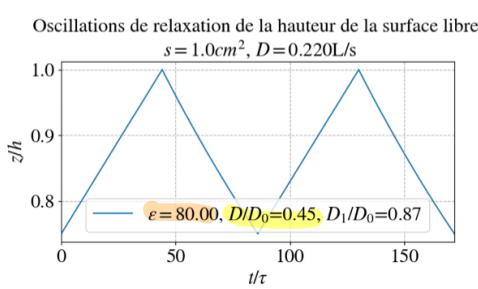
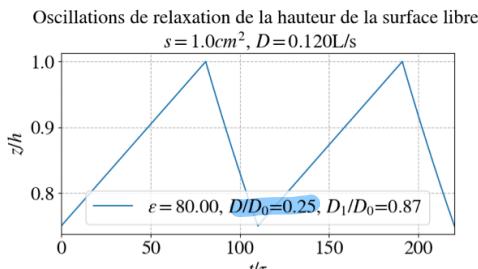
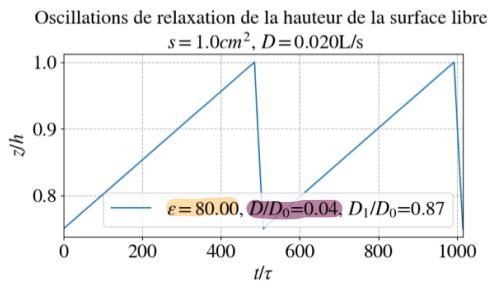
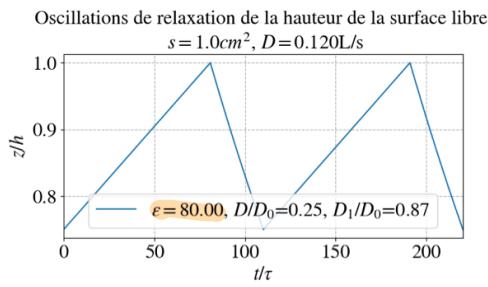


$|d_w \theta| \times 10$

Portrait de phase de l'oscillation B



On remarque que r influence sur la position du cycle limite. Plus $r \uparrow$ plus $y_c \leftarrow$ centre du CL.



7. modélisation type systèmes boules

→ pour décrire les oscillations de relaxation de la surface libre du vase de Tantale.

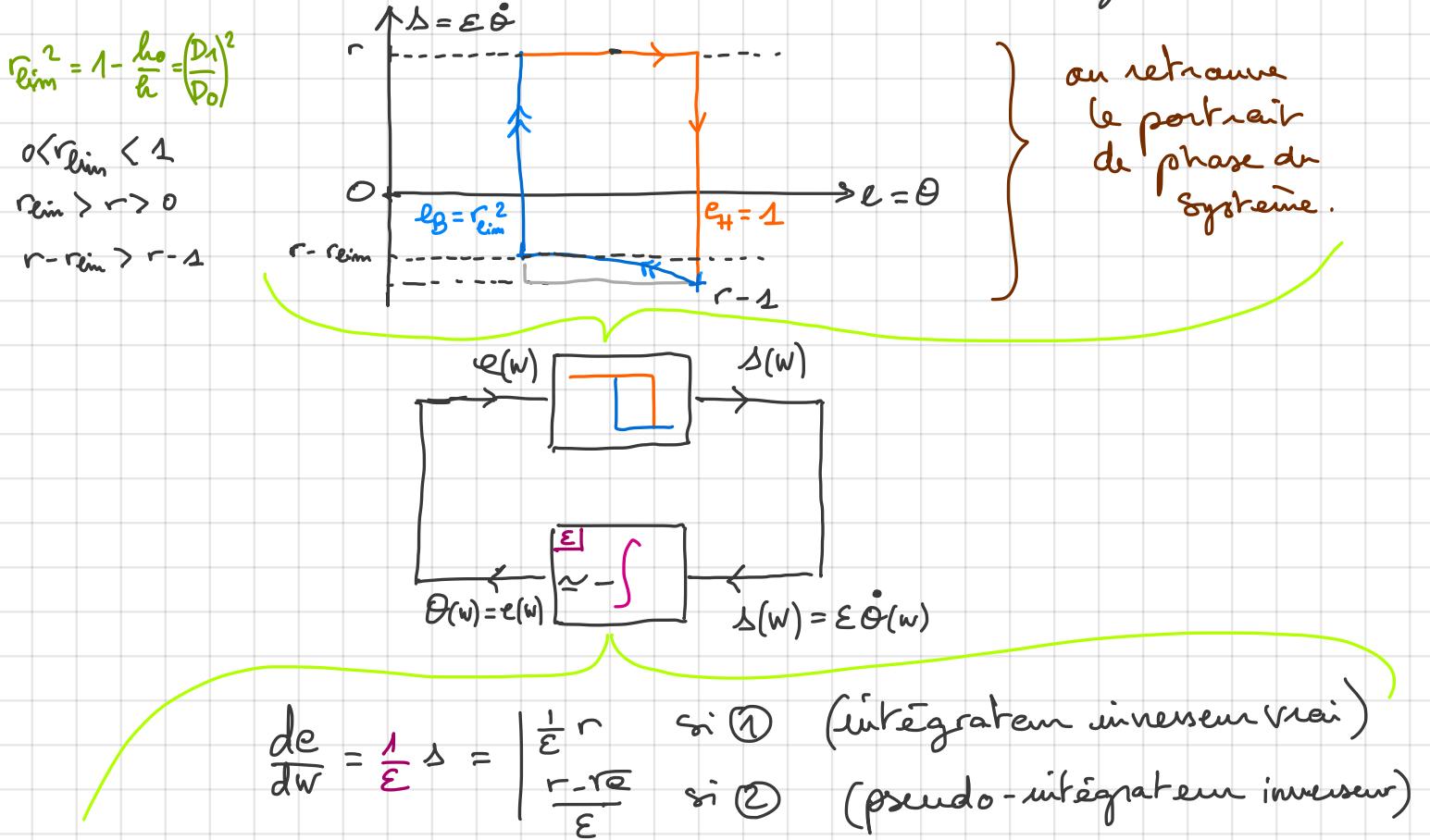
On rappelle que l'évolution de z est régie par :

$$\frac{d\theta}{dw} = \begin{cases} \frac{r}{\varepsilon}, & \text{en phase de remphissage. (1)} \\ \frac{r - \sqrt{\theta}}{\varepsilon}, & \text{en phase de vidange. (2)} \end{cases}$$

$$\text{Soit } e(w) := \theta(w)$$

$$s(w) := \begin{cases} r, & \text{si (1)} \\ r - \sqrt{\theta}, & \text{si (2)} \end{cases}$$

alors la modélisation suivante décrit l'évolution du système :



La constante du pseudo-intégrateur est $\varepsilon = \frac{s'}{s}$.

On peut donc modéliser le système par la rétroaction d'un (pseudo) comparateur à hystéresis inverseur avec un (pseudo) intégrateur inverseur (de constante $E = \frac{\Omega''}{S}$), comme attendu pour un oscillateur (à la bande de rétroaction) de relaxation.
"auto-^{on}-entretenu"

ANNEXES

ANNEXE : méthode graphique de Lienard. (1928).

Récrivons (3) : $\ddot{x} + \varepsilon A(x) \dot{x} + x = 0$

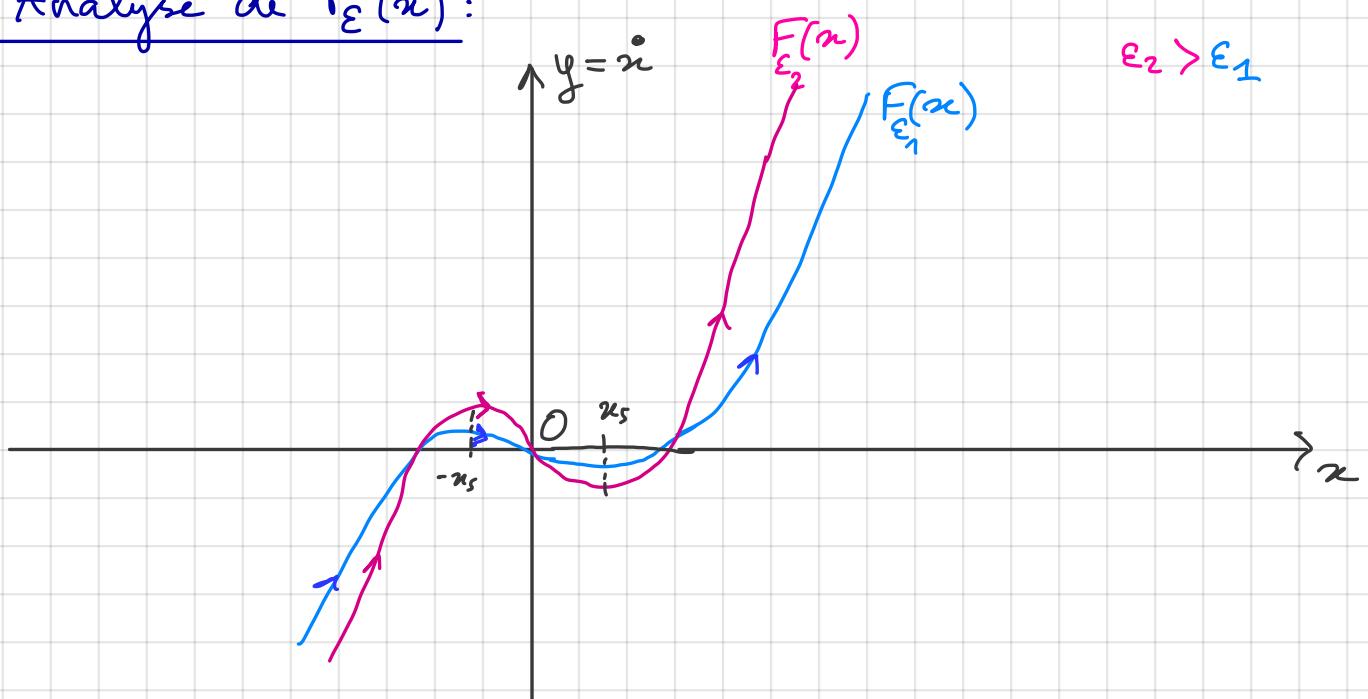
Posons : $\left\{ \begin{array}{l} F_\varepsilon(x) := \int_0^x \varepsilon A(x') dx' \\ y := \dot{x} + F_\varepsilon \Leftrightarrow \dot{x} = y - F_\varepsilon \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \dot{y} = \ddot{x} + \varepsilon A(x) \dot{x} = -x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\ddot{x} + \varepsilon A(x) \dot{x}}{\dot{x}} = \frac{-x}{y - F_\varepsilon}$$

soit (3) $\Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{y - F_\varepsilon} = 0} \quad (\text{A.1})$

Analyse de $F_\varepsilon(x)$:



- $F_\varepsilon(x) = 0$ si $x=0$, par déf., $\Rightarrow F_\varepsilon(x) \approx 0$ au voisinage de 0
 \Rightarrow plus ε est grand et plus $F_\varepsilon(x)$ "explode" rapidement.
- De plus pour $|x| < x_s$, $F'(x) < 0$ et pour $|x| > x_s$, $F'(x) > 0$
afin de vérifier (C).

Méthode de Liénard pour déterminer le portrait de phase $y(x)$ en fonction de $F_\varepsilon(x)$:

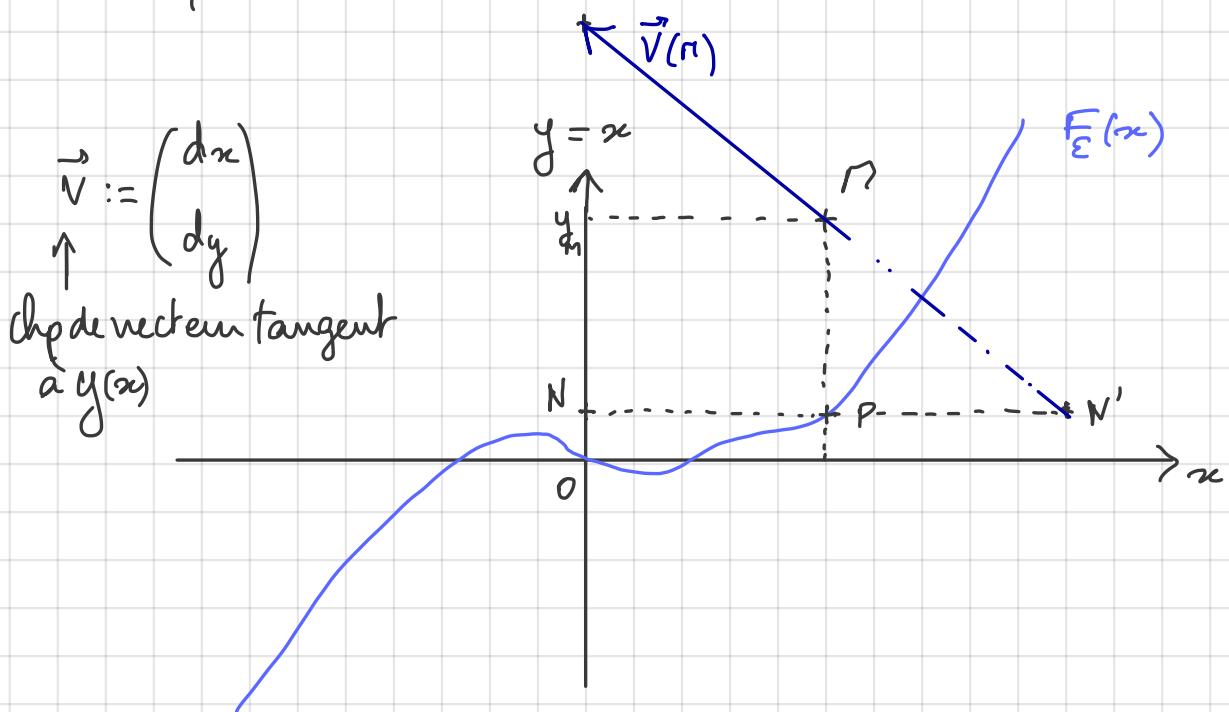
Soit ε fixé, trouvons $F_\varepsilon(x) = \varepsilon \int_0^x A(x') dx'$

Soit un point du portrait de phase $y(x)$, noté M .

Soit P le point tq: $x_P = x_M, y_P = F_\varepsilon(x_M)$.

Alors par définition: $\|\vec{PM}\| = y_M - F_\varepsilon(x_M)$

Soit N tq: $x_M = \|\vec{NP}\|$.



$$(A.1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_M = \frac{-\|\vec{NP}\|}{\|\vec{PM}\|}$$

Montrons que \vec{NM} est normal à la courbe $y(x)$ en M .

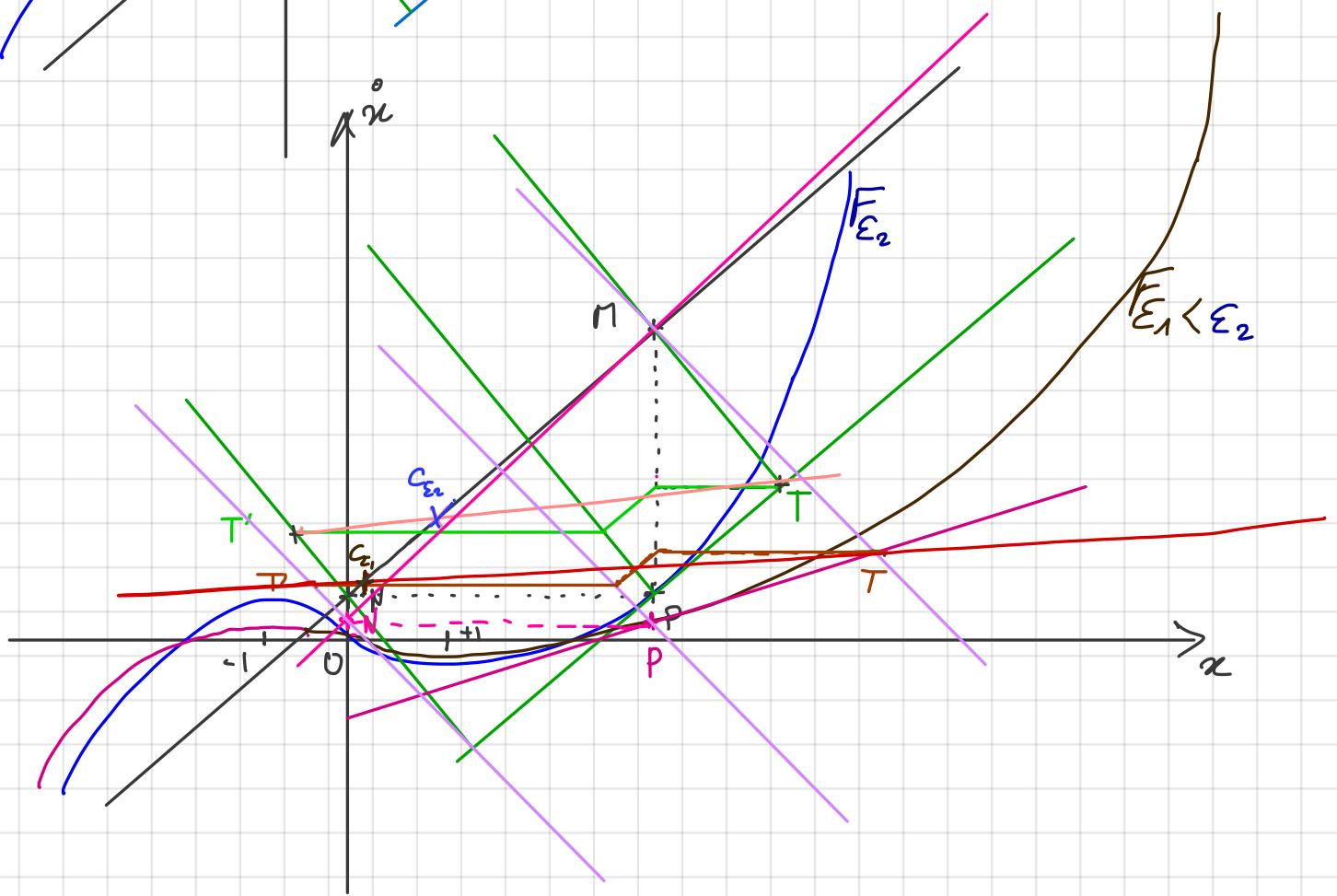
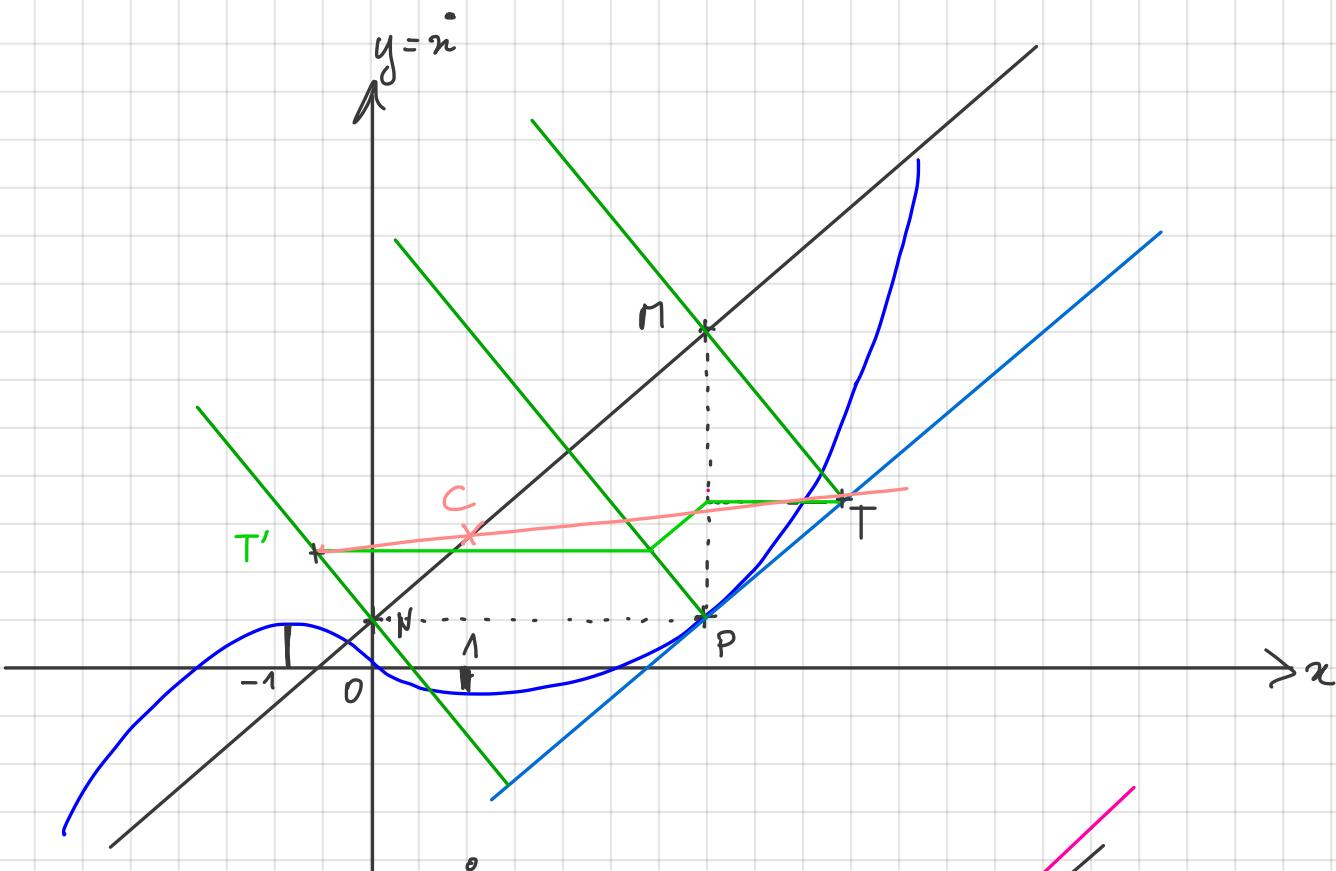
$$\vec{v} \cdot \vec{NM} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} NP \\ PM \end{pmatrix} = NP dx + PM dy$$

$$\text{or en } M: \frac{dy}{dx} = \frac{-NP}{PM} \Rightarrow dy = -\frac{NP}{PM} dx$$

d'où: $\vec{v}(M) \cdot \vec{NM} = 0$

→ on sait tracer la tangente en un point M de $y(x)$.

On va maintenant étudier l'évolution du centre de courbure de $y(x)$ en fonction de ϵ .



Conjectures :

1) influence de ε : $\|\overrightarrow{C_{\varepsilon_1} \Pi}\| > \|\overrightarrow{C_{\varepsilon_2} \Pi}\|$ pour $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$
 $\Rightarrow R(\varepsilon) \downarrow$ si $\varepsilon \uparrow \Leftrightarrow C_s(\varepsilon) \uparrow$ si $\varepsilon \uparrow$

i.e.: la courbure de $y(x)$ augmente qd $\varepsilon \uparrow$.

2) à ε fixé: La courbure de $y(x)$ augmente qd $|F'_\varepsilon(x)| \uparrow$

ce qui est cohérent avec $F'_\varepsilon(x) = \varepsilon A(x) \propto \varepsilon$

$F(x \approx 0) \approx 0$ et F' change de signe pour $|x| \geq 1$; F'_ε varie significativement pour $|x| \geq 1$ si $\varepsilon \gg 1$. Donc:

qd $\varepsilon \gg 1$ la courbure de $y(x)$ pour $|x| \geq 1$ est très forte.

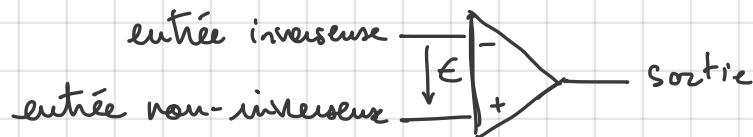
Conclusion: Pour $\varepsilon \gg 1$, $y(x)$ est "confinée" dans les régions de l'esp des phases $(x, y = \dot{x})$ où la variété de $F_\varepsilon(x)$ est la plus faible: dès que la variation de $F_\varepsilon(x)$ augmente, la courbure de $y(x)$ augmente d'autant+ que $\varepsilon \gg 1$, et le portrait de phase est ramené dans la région du plan $(x, y = \dot{x})$ où $F_\varepsilon(x)$ ne varie pas trop i.e. $|x| < 1$.

→ Le cycle limite est donc le raccordement d'arcs à faible courbure et de transitions à forte courbure mais de faibles longueurs

↳ le cycle limite possède une courbure très irrégulière,
 ⇒ le contenu en harmonique des oscillations est riche.

ANNEXE : rappels sur l'amplificateur opérationnel linéaire intégré.

⚠ l'AO est un composant actif; il doit être alimenté.
Ceci ne figure pas sur son schéma électrique



La fonction de transfert de l'AO relie l'entrée différentielle

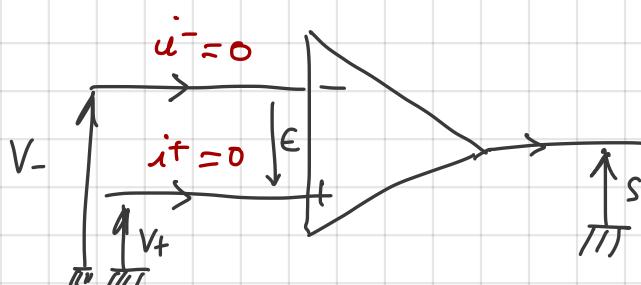
$$E \text{ à la sortie } S : \quad H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \quad \left\{ \begin{array}{l} S = TL(s) \\ E = TL(E) \end{array} \right.$$

Par définition: $E = V^+ - V^-$

$$\text{En 1ère approx: } H(p) = \frac{A_0}{1 + Tp} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 \approx 2 \cdot 10^5 \\ T \approx 10^{-2} s \end{array} \right.$$

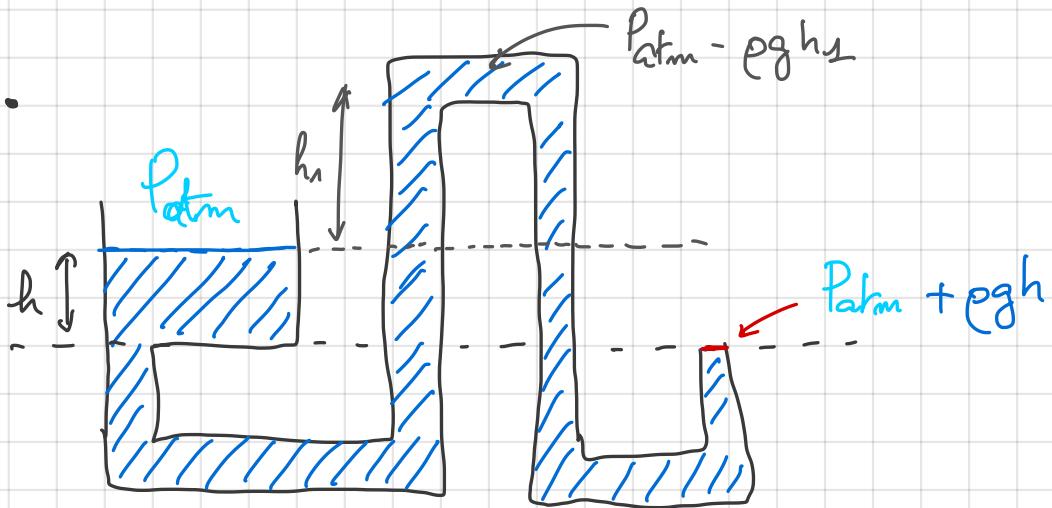
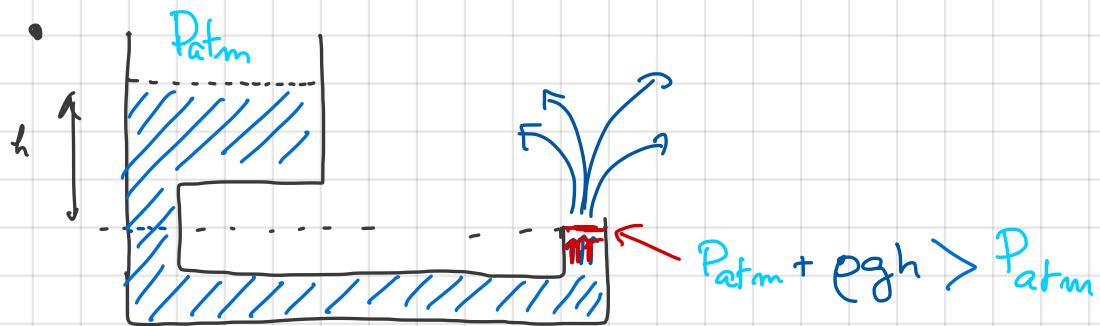
passé-bas du premier ordre

→ ⚠ aux Hautes Fréquences.



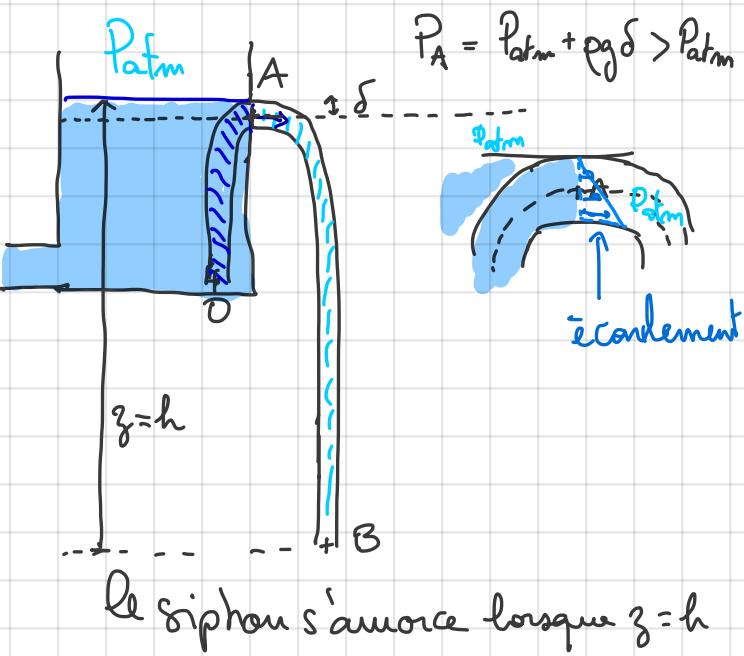
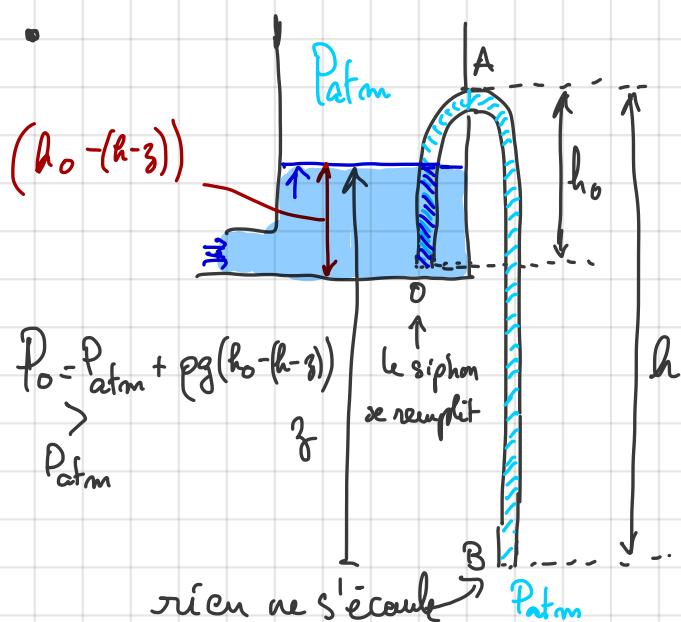
La résistance d'entrée
de l'AO est de l'ordre
de $10^{12} \Omega$ soit $1 T\Omega$.
C'est pq: $i^- \approx 0 \approx i^+$.

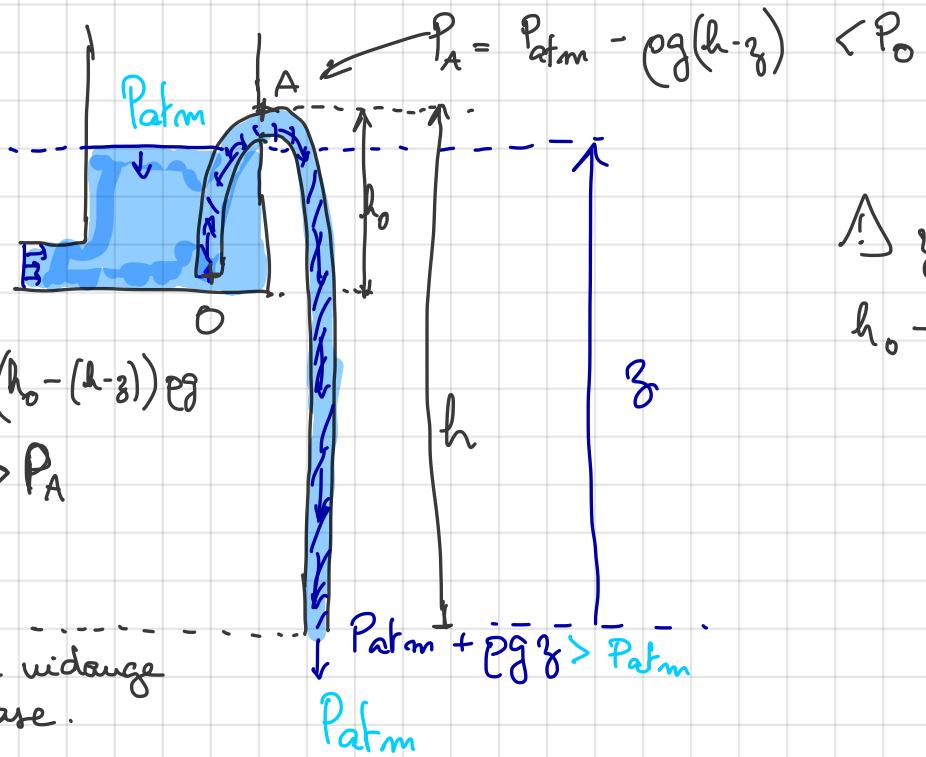
ANNEXE : Principe du Siphon



Ce dispositif permet de vider le réservoir malgré le fait que le tuyau d'évacuation passe plus haut que le réservoir.

Cas du vase de Torricelli





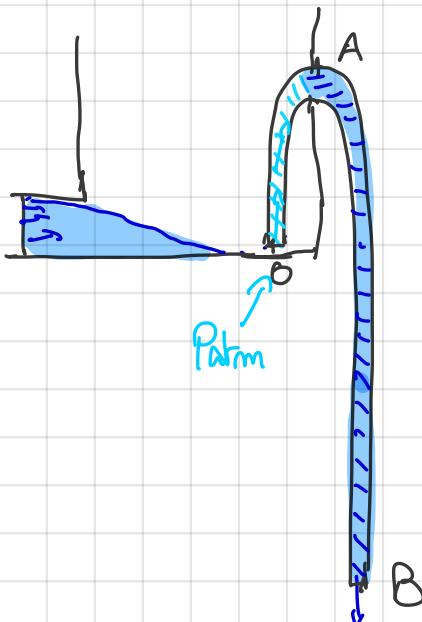
$$\begin{aligned} \Delta z &\in [h-h_0; \dots] \\ h_0 - (h-z) &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= h-h_0 \end{aligned}$$

- Quand $z = h-h_0$, $P_0 = P_{atm}$

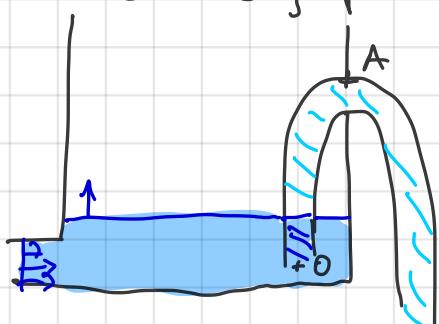
Comme $P_A < P_{atm}$, quand il n'y a plus d'eau, l'air est aspiré en O

\hookrightarrow le siphon se désamorce.
et se vide complètement

Rq: si D est trop nipp.
le siphon ne peut
jamais se désamorcer



- L'eau arrive de nouveau et il faut attendre que le siphon s'amorce pour voir un échappement d'eau en B.



ANNEXE : Théorème de Bernoulli

Théorème de Bernoulli (fort)

Dans un écoulement vérifiant les conditions suivantes

- fluide incompressible ($\rho = \text{cste}$) en évolution isovolume ($\Leftrightarrow \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$)
- mouvement inrotationnel et permanent.
- forces de volume dérivant d'un potentiel (Φ)

On a dans tout le champ à t donné :

$$\frac{P}{\rho} + \frac{\vec{v}^2}{2} + \Phi = \text{cste}$$

Preuve:

Rappel : dérivée particulière d'une fonction scalaire :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \dot{\vec{r}} \\ \vec{\nabla} = \operatorname{grad}_r(.) \end{array} \right.$$

dérivée particulière d'un champ de vecteur :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

Or : $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = (\vec{\nabla} \vec{B}) \vec{A} - \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})$

en particulier : $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{A}^2}{2} \right) - \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$

Donc : $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) - \vec{v} \times \operatorname{rot}(\vec{v})$

PFD en méca flu = Navier - Stokes .

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \operatorname{grad}(P) + \gamma \vec{\Delta v}$$

↑ forces volumiques ↑ forces de pression (volumique) ↑ forces de viscosité (volumique)

En mvt permanent: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

En mvt isovolume: $\vec{\Delta v} = \text{grad}(\underbrace{\text{div}(\vec{v})}_{=0}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{v}))$

$$\vec{\Delta v} = -\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{v}))$$

En mvt uniaxial: $\vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0} : \vec{\Delta v} = \vec{0}$

$$\rightarrow \frac{D\vec{v}}{Dt} = \text{grad}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right)$$

Dans Navier - Stokes devient:

$$\rho \vec{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = \vec{f} - \vec{\text{grad}}(P)$$

si: $\vec{f} = -\vec{\text{grad}}(\Phi)$ et $\rho = \text{cste}$

alors: $\boxed{\vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{2}\rho \vec{v}^2 + \Phi + P\right) = 0 \quad \forall t}$

s'oit $\boxed{\frac{\rho \vec{v}^2}{2} + \Phi + P = \text{cste}_t} \quad \forall t$

constante de l'énergie à un instant donné, dans tout le champ.

Théorème de Bernoulli (faible)

Dans un écoulement vérifiant les conditions suivantes :

- fluide incompressible ($\rho = \text{cste}$) et **non-visqueux**.
- mouvement permanent.
- forces de volume dérivant d'un potentiel ($-\vec{\Phi}$).

On a sur une ligne de courant :

$$\boxed{\frac{P}{\rho} + \frac{\vec{v}^2}{2} + \underline{\Phi} = \text{cste}}$$

Preuve : PFD $\Leftrightarrow \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \vec{\text{grad}}(P) + \gamma \vec{\Delta v}$

PFD $\cdot \vec{v} \Leftrightarrow \rho \vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} - \vec{\text{grad}}(P) \cdot \vec{v} + \gamma \vec{\Delta v} \cdot \vec{v}$

soit puisque $\rho = \text{cste}$:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \right) = - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \underline{\Phi} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} P + \gamma \vec{\Delta v} \cdot \vec{v}$$

Le fluide est non visqueux donc la viscosité de cisaillement γ est nulle.

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2}_{= \vec{f}} \right) = - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \underline{\Phi} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} P$$

or $\frac{D\vec{f}}{Dt} = \underbrace{\partial_t \vec{f}}_{=0 \text{ mot permanent}} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{f}$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \right) = - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \underline{\Phi} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} P$$

soit $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \underline{\Phi} + P \right) = 0$

soit : $\boxed{\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \underline{\Phi} + P = 0}$ sur une ligne de

courant ($\pm \vec{a} \vec{v}$) à chaque t.

ANNEXE : Rappel sur l'intégrateur et le comparateur à hysteresis.

Le fonctionnement générique d'un intégrateur :

$$u \rightarrow \boxed{S} \rightarrow v \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{u}{\tau} \Leftrightarrow v(t) = v_0 - \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t u(t') dt'$$

Et celui d'un comparateur à hysteresis inverseur :

