6.6. Un oscillateur de relaxation : le vase de Tantale

→ p. 269

Le récipient représenté sur la figure est muni d'un siphon de section s très faible devant la surface libre S dont l'ouverture est pratiquement confondue avec son fond et qui débouche à une cote h au-dessous de celui-ci après avoir monté jusqu'à la cote ζh.

• 1) A l'aide des données précédentes, on peut former les quantités $v_0^2 = 2gh$, $Q_0 = sv_0$, $\tau = S\ h/Q_0$. Quelles peuvent-être *a priori* les significations de ces grandeurs ?

• 2) On considère une situation où, le siphon étant amorcé, la surface libre du récipient a la cote zh. Compte tenu de $s << S$, on peut assimiler le régime établi à un régime permanent d'un fluide parfait. En déduire l'expression de la vitesse v de l'eau qui s'écoule dans le siphon.

• 3) On note $Q = x\ Q_0$ le débit volumique (indépendant du temps) de la source qui alimente le système. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ dans un régime où le siphon est amorcé. On note z_0 la valeur de z correspondant à un éventuel état du système dans lequel la surface libre garde une cote constante. Exprimer z_0 en fonction de x et en déduire qu'un tel état ne peut exister que si x dépasse une valeur x_0 que l'on précisera. Calculer la valeur x_1 de x qui correspondrait à une surface libre restant en permanence au niveau du sommet du siphon.

• 4) Pour $x < x_0$, montrer que s'établit un régime d'oscillations de relaxation dont on calculera la période $T = t_1 + t_2$ (t_1 durée de remplissage, siphon désamorcé ; t_2 durée de vidange par le siphon) en fonction de x, x_1 et τ. Pour $x = 0{,}8$, représenter graphiquement $z(t)$ ainsi que la trajectoire de phase $\dot{z}(z)$.

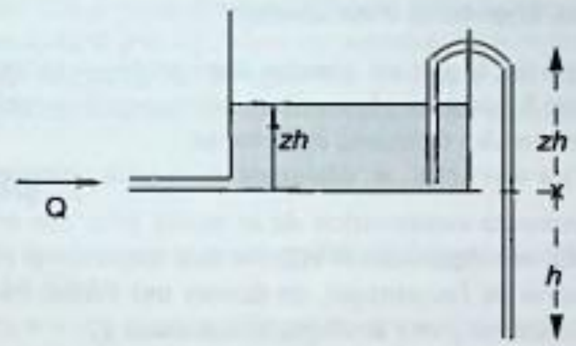

Fig. 6.6-1

9. Dispositif à siphon : vase de Tantale. Oscillations de relaxation

Un siphon OAB, tube de verre recourbé de section uniforme $s = 1\ \text{cm}^2$, permet la vidange de l'eau contenue dans un grand vase cylindrique de section $S = 80\ \text{cm}^2$ et de hauteur $H = 50$ cm. Le siphon traverse la paroi du vase en A (grâce à une soudure) situé à $h_0 = 3\,H/5$ au-dessus du fond du vase ; la branche intérieure AO du siphon se termine par une ouverture O au voisinage immédiat du fond du vase ; l'extrémité B de la branche extérieure AB (très rapprochée de AO) est ouverte dans l'atmosphère ; la dénivellation entre A et B est $h = 1{,}2$ m (Fig. 3.32).

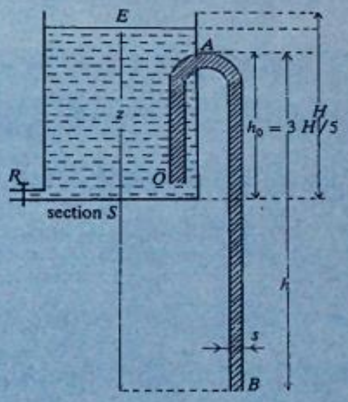

Fig. 3.32.

Le vase de Tantale est alimenté en eau grâce à un robinet de débit volumique réglable D.

- Lorsque la surface libre E de l'eau atteint le niveau de A, le siphon s'amorce.
- Lorsque la surface libre E de l'eau descend jusqu'au niveau de O, le siphon se désamorce et se vide complètement.

On désignera z la hauteur de la surface libre de l'eau au-dessus du niveau de B. On donne $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$.

1) Calculer le débit volumique maximum δ_{max} du siphon amorcé.

2) Le vase de Tantale étant vide, on ouvre à l'instant $t = 0$ le robinet R de débit D *constant*. On négligera les durées des phénomènes transitoires, et notamment la durée de l'amorçage et la durée de remplissage du siphon.

a) Ecrire l'équation différentielle du premier ordre en $z(t)$ après l'amorçage du siphon.

b) Quelle est la cote z_l, comptée à partir de B, du niveau limite de la surface libre de l'eau ? Entre quelles limites D_1 et D_2 doit-on régler le débit D pour que le niveau limite z_l existe effectivement dans le vase ?

A quelle valeur D_0 doit-on régler le débit D pour que le niveau limite se situe au niveau du sommet A du siphon ?

3) Montrer que suivant les valeurs du débit D, on peut distinguer quatre régimes d'écoulement (après l'amorçage) qu'on décrira brièvement.

4) Un des régimes décrit en 3) est périodique : calculer pour ce régime, à l'aide de D, D_0, D_1, D_2, g, s, S et h_0, la durée t_V de vidange du vase et la période T du phénomène.

Tracer le graphe $z(t)$ sur deux périodes pour $D = 0{,}12$ l/s.

5) Le vase de Tantale étant vide, on introduit dans ce vase un piston cylindrique P d'axe vertical, de hauteur supérieure à H et de section $\sigma = 50\ \text{cm}^2$, animé d'un mouvement sinusoïdal d'équation

$$Z(t) = a\left(2 + \sin\frac{2\pi}{\tau}t\right)$$

où Z est la cote de la base inférieure du piston P par rapport au fond du vase. On donne $a = 6$ cm et $\tau = 7{,}5$ s. Le robinet étant ouvert à l'instant t_0 quelconque, compté à partir de l'instant $t = 0$ où le piston est en position moyenne $Z = 2a$ et monte, calculer le débit $D(t_0)$ de R pour lequel la hauteur d'eau varie périodiquement avec la même période τ que le cylindre. On admettra dans cette question que la durée de vidange du vase est négligeable.

Application numérique : Calculer $D(0)$, $D(\tau/4)$, $D(\tau/2)$ et $D(3\,\tau/4)$.