

Dissertation :

Diffraction; mise en évidence phénoménologique et théorie scalaire

I. Mise en évidence expérimentale.

1. Le son contourne les obstacles
2. Éclairer le bord d'un écran
3. Éclairement à travers une ouverture
4. Stroboscopie : mise en évidence des "sources secondaires"

II. Principe d'Huyghens - Fresnel.

1. Conséquences des expériences.
2. Énoncé du postulat.

III. Théorie scalaire de la diffraction.

1. Position du problème
2. Préliminaire : théorème de Green.
3. Théorème intégral de Helmholtz et Kirchhoff.
4. Exemples de fonctions de Green possibles

IV. Application: diffraction par une ouverture plane.

1. Condition de Radiation de Sommerfeld
2. Différents choix de conditions aux limites
 - a. Rappels sur les conditions aux limites.
 - b. Hypothèses
 - c. Solution de Kirchhoff.
- d. Première solution de Rayleigh-Sommerfeld
- e. Deuxième solution de Rayleigh-Sommerfeld.
- f. Conclusion.

V. Diffraction par une ouverture plane en optique

1. Formulation pratique du ppe de Huyghens - Fresnel (général)
2. Mise en évidence de deux régimes
3. Régime de Diffraction à l'infini.
 - a. une première analyse.
 - b. une autre traduction de $R \rightarrow \infty$.
 - c. Lieu avec la formation des images
 - d. Formulation pratique

I. Mise en évidence expérimentale

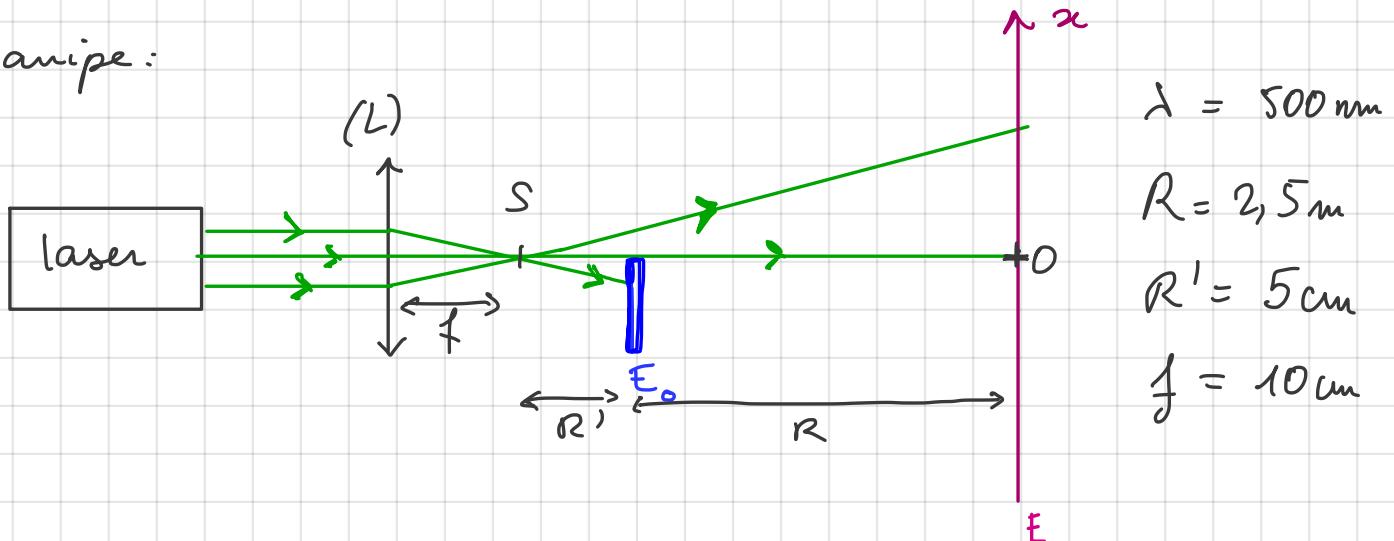
1. Le son contourne les obstacles

Quotidiennement chacun fait l'expérience du son qui contourne des obstacles, c'est la manifestation de la diffraction des ondes acoustiques. Ce phénomène a été étudié par Helmholtz dans les années 1850.

2. Éclairer le bord d'un écran

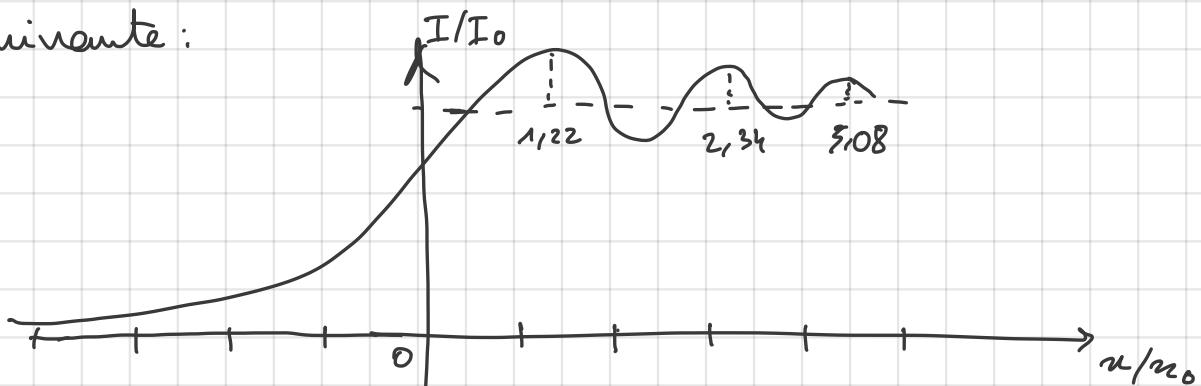
Avec les ondes lumineuses le même phénomène de contournement des obstacles se produit:

manip:



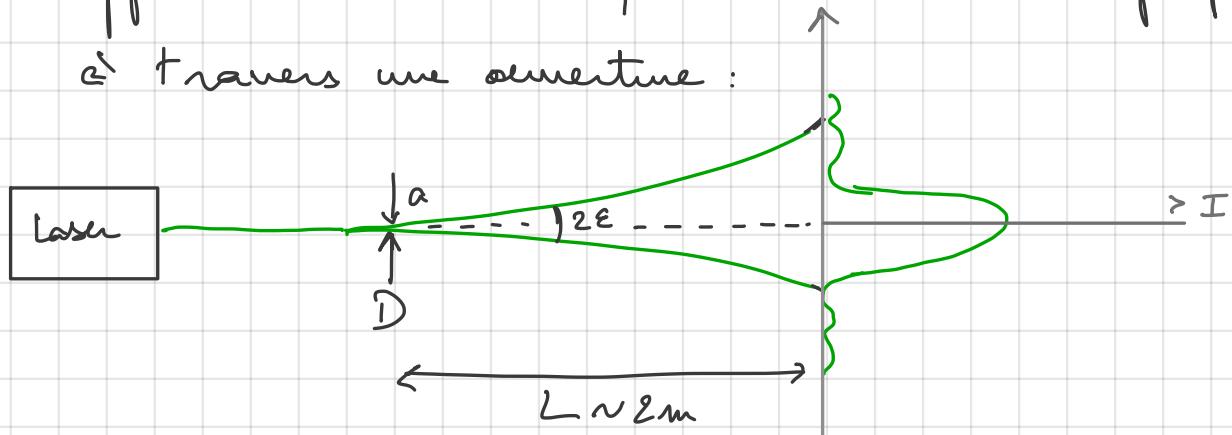
D'après l'optique géométrique, on s'attendrait à une séparation net entre deux zones sur E : une correspondant à la région $x > 0$, éclaircie, et une autre, $x < 0$, obscure. Les 2 étant séparées par une bordure net.

Expérimentalement, on constate qu'en lieu de passer de l'ombre à la lumière, on observe autour de O des franges, c'est à dire la répartition d'intensité suivante:



3. Éclaircissement à travers une ouverture

Cet écart au loi de l'optique géométrique apparaît aussi lorsque la lumière se propage à travers une ouverture :



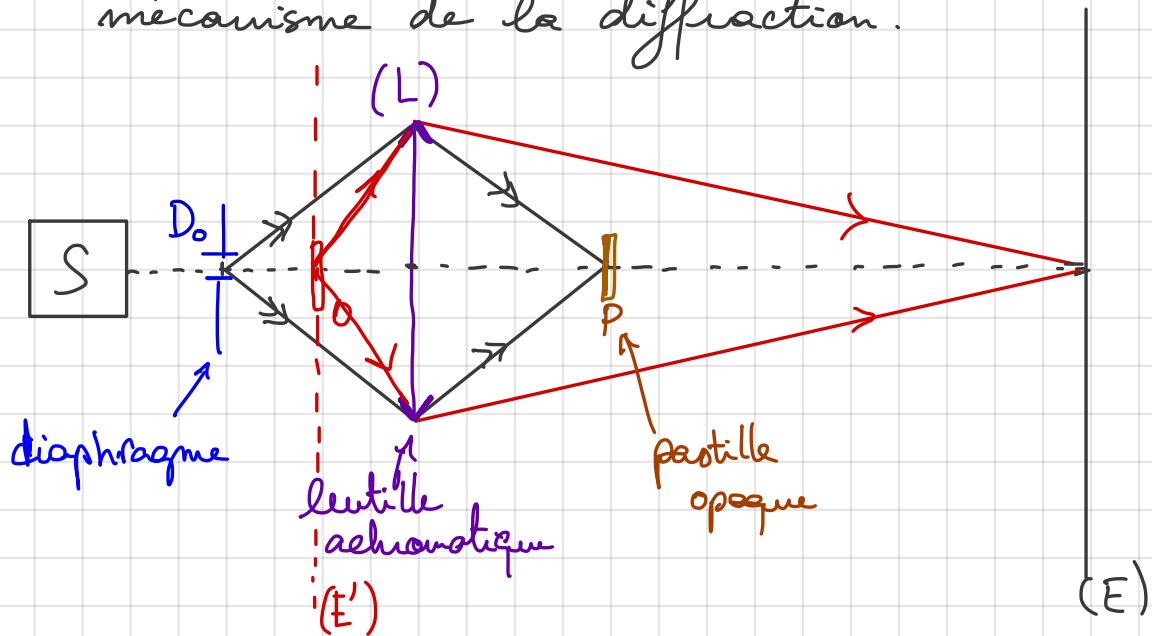
Influence de α : lorsque $\alpha \downarrow$, $2\epsilon \uparrow$:

la largeur angulaire de la tâche lumineuse augmente gd $\alpha \downarrow$.

De plus, on constate que la répartition lumineuse présente une structure. La distribution d'intensité n'est pas chaotique, mais ordonnée.

4. Stroboscopie : mise en évidence des "sources secondaires"

Enfin réalisons l'expérience suivante, à tête de stroboscopie, qui nous permettra de dévoiler le mécanisme de la diffraction.



Observation : l'image de D_0 par (L) est interceptée par la partille P : on observe rien sur E .

Plaçons désormais dans le plan (E') conjugué de (E) par (L) un objet \textcircled{O} opaque et mat avec des détails fins : un grille métallique noirâtre à la flamme disposant de mailles serrées.

Observation : Malgré la présence de P on obtient de la lumière sur (E) ; les détails de l'objet ressortent de façon saisissante : puisque la source est bloquée par P cela suggère que les points de \textcircled{O} se comportent comme des sources de lumière.

Résumé de ces 3 expériences :

- contournement d'obstacle
- influence de la taille du diaphragme
- structure de la répartition lumineuse diffractée
- les points de l'objet diffracté se comportent comme des sources.
- n'est pas restreint aux ondes lumineuses
→ son par ex
⇒ phénomène ondulatoire

II. Principe d'Huyghens - Fresnel.

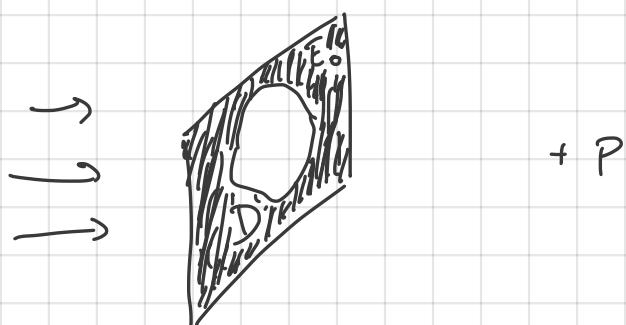
1. Conséquences des expériences.

Partant des observations précédentes, on va essayer de mettre au point un principe qui régit la diffraction.

Expérience du stroboscopie → notion de sources secondaires

Expérience avec le diaphragme → l'état vibratoire sur l'écran ne dépend que des sources secondaires réparties sur l'ouverture (D) du diaphragme.

↳ On peut donc essayer d'obtenir une théorie de la diffraction en précisant cette notion de source secondaire et la manière dont ces sources contribuent à l'état vibratoire en P

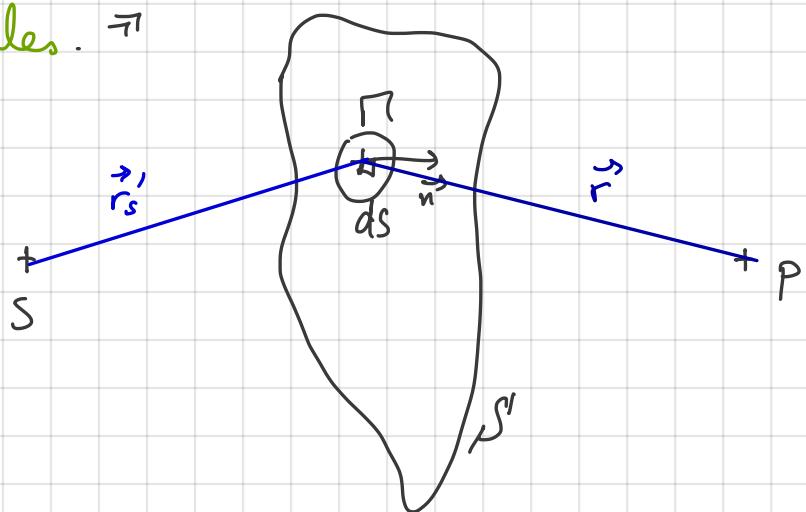


2. Énoncé du postulat.

Principe de Huyghens - Fresnel : énoncé par Huyghens en premier puis précisé par Fresnel.

- H1. Chaque point M d'une surface S' atteinte par la lumière peut-être considéré comme une source secondaire émettant une onde sphérique.
- H2. L'état vibratoire de cette source secondaire est proportionnel à celui de l'onde incidente en M et à l'élément de surface dS autour du point M.
- H3. Les vibrations issues des différentes sources secondaires interfèrent entre elles.

$H3 \Rightarrow$ diffraction = pb d'interférence à N ondes.



Par ailleurs puisque M se comporte comme une source d'onde sphérique, l'état vibratoire en P du à la vibration en M s'écrit avec l'hypothèse de proportionnalité matérialisée par un facteur χ qui est à priori fonction de M et P: $\chi(M, P)$,

$$d\Psi(P) = \frac{e^{ikr}}{r} \Psi(M) \chi(M, P) dS \quad (\text{II.1})$$

Avec H3, l'état vibratoire $\Psi(P)$ s'obtient en sommant les différentes contributions à $\Psi(P)$ c'est en sommant sur S :

$$\Psi(P) = \iint_S \frac{e^{ikr}}{r} \Psi(M) \chi(M, P) dS \quad (\text{II.2})$$

Rq : $\chi(M, P)$ est ce que l'on appelle le facteur d'obliquité.

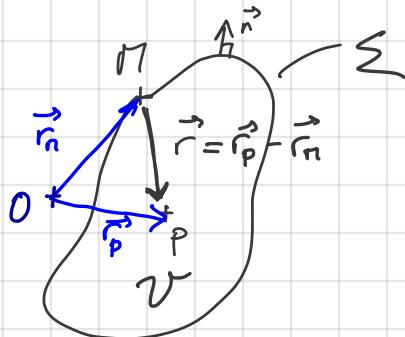
Rq : $k \cdot r = \varphi$ représente le déphasage de l'onde diffractée qu'elle subit du fait de sa propagation de $M \in S$ à P .

III. Théorie scalaire de la diffraction

1. Position du problème

On va chercher à dériver (II. 2).

Remarquons tout d'abord que la diffraction se ramène à un problème de conditions aux limites: on cherche à déterminer l'état vibratoire en un point P , $\Psi(P)$, sachant l'état vibratoire sur une surface Σ .



Il se trouve que: si l'on connaît une fonction Ψ et sa dérivée normale $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \vec{\nabla} \Psi \cdot \vec{n}$ en chaque point M d'une surface Σ fermée, si Ψ vérifie dans le volume V un certain type d'edp, alors Ψ est parfaitement déterminée en chaque point P de V .

C'est ce que l'on va chercher à établir dans le cas de la diffraction.

La théorie scalaire de la diffraction repose sur les travaux de Kirchhoff, Rayleigh et Sommerfeld.

2. Préliminaire : théorème de Green.

Soit μ et G 2 chps scalaires définis dans un volume V limité par une surface Σ .

On suppose que ces deux fonctions sont à dérivées bornées dans V .

Alors on peut montrer :

$$\oint_{\Sigma} (\mu \vec{\nabla} G - G \vec{\nabla} \mu) \cdot \vec{n} dS = \iiint_V (\mu \Delta G - G \Delta \mu) dV$$

preuve :

$$\text{Posons } \vec{A} := \mu \vec{\nabla} G \quad \text{et} \quad \vec{B} := G \vec{\nabla} \mu$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{A}) dV, \text{ Th de Green-Ostrogradski}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \operatorname{div}(\vec{A}) &= \operatorname{div}(\mu \vec{\nabla} G) = \mu \operatorname{div}(\vec{\nabla} G) + \vec{\nabla} \mu \cdot \vec{\nabla} G \\ &= \mu \Delta G + \vec{\nabla} \mu \cdot \vec{\nabla} G \end{aligned}$$

$$\text{donc } \oint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V (\mu \Delta G + \vec{\nabla} \mu \cdot \vec{\nabla} G) dV$$

$$\text{et } \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V (G \Delta \mu + \vec{\nabla} G \cdot \vec{\nabla} \mu) dV$$

$$\text{or: } \oint_{\Sigma} (\mu \vec{\nabla} G - G \vec{\nabla} \mu) \cdot \vec{n} dS = \oint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS - \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

$$\text{d'où: } \oint_{\Sigma} (\mu \vec{\nabla} G - G \vec{\nabla} \mu) \cdot \vec{n} dS = \iiint_V (\mu \Delta G - G \Delta \mu) dV \quad (\text{II.2.4})$$

Th de Green.

3. Théorème intégral de Helmholtz et Kirchhoff.

• Considérons que : $\mathcal{M} = \psi$ tq
$$\boxed{-\frac{1}{v^2} \partial_t^2 \psi + \Delta \psi = 0 \quad (\text{H})}$$

Supposons que ψ soit de la forme :

$$\psi = \psi_0 e^{ikr} e^{-i\omega t}$$

Dans ce cas $\partial_t \psi = -i\omega \psi \Rightarrow \partial_t^2 \psi = -\omega^2 \psi$

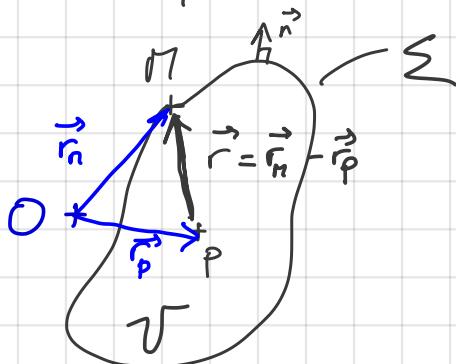
d'où : $(\text{H}) \Rightarrow \boxed{\Delta \psi + k^2 \psi = 0} \quad (\text{III.3.1})$

où $k^2 = \omega^2/v^2$

• Considérons G comme une autre solution de (H) qui vérifie aussi (III.3.1) mais avec un second membre de type point source que l'on modélise avec une fonction δ qui vaut zéro sauf en \vec{r}_p (qui définit le pt source)

$$\boxed{\Delta G + k^2 G = -\delta(\vec{r}_n - \vec{r}_p)} \quad (\text{III.3.2})$$

La fonction $G(\vec{r}_n, \vec{r}_p)$ ainsi définie par (III.3.2) est appelée fonction de Green de l'équation (III.3.1).



La fonction δ vérifie :
$$\iiint \psi(\vec{r}') \delta(\vec{r}' - \vec{r}_p) d\vec{r}' = \psi(\vec{r}_p) \quad (\text{III.3.3}).$$

• Le théorème de Green implique alors :

$$\oint_{\Sigma} [\Psi \vec{\nabla} \phi - G \vec{\nabla} \Psi] \cdot \vec{n} dS = \iiint_V [-\delta\Psi - k^2 \Psi G + \lambda^2 G \Psi] dV = -\Psi(P)$$

et puisque : $\vec{\nabla} X \cdot \vec{n} =: \frac{\partial X}{\partial n}$, on obtient :

$$\oint_{\Sigma} \left(G \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = \Psi(P)$$

(III.3.2), où $G| \Delta f + k^2 G = \delta(\vec{r}_n - \vec{r}_P)$.
 $dS = r_n^2 d\Omega$.

↑ angle solide

(III.3.2) est valide $\forall P \in V$.

Avec (III.3.2.) on est capable de déterminer l'état vibratoire au point P , sachant Ψ et/ou $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ sur Σ modulo la fonction de Green G choisie.

4. Exemples de fonctions de Green possibles

- Notre finalité est de retrouver (II.2).

Il faut donc choisir la fonction auxiliaire G , qui est la fonction de Green du problème, en conséquence. De plus, il faut garder à l'esprit que l'on traite un problème aux limites et que G vérifie une édp : $\Delta G + k^2 G = -\delta(\vec{r}_m - \vec{r}_p)$

- Il se trouve qu'il y a plusieurs possibilités pour G :

ex1: $G(\vec{r}_p, \vec{r}_m) = G(r = \| \vec{r}_m - \vec{r}_p \|) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{ikr}}{r}$

on rappelle que : $\Delta(fg) = \operatorname{div}(g \vec{\operatorname{grad}}(fg)) = f \Delta g + g \Delta f + 2 \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g$

d'où : $\Delta G = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \Delta e^{ikr} + (-4\pi \delta(r)) e^{ikr} + 2 \left(\frac{-1}{r^2} \right) \cdot ikr e^{ikr} \right)$

or : $\Delta e^{ikr} = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r e^{ikr}) = \frac{1}{r} (2ikr e^{ikr} - k^2 r e^{ikr})$

$$\Rightarrow \Delta G = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{k^2}{r} e^{ikr} - 4\pi \delta(r) e^{ikr} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta G + k^2 G = -\delta(r) e^{ikr}$$

$\Delta(\vec{r}) = -\vec{w}\delta(r)$

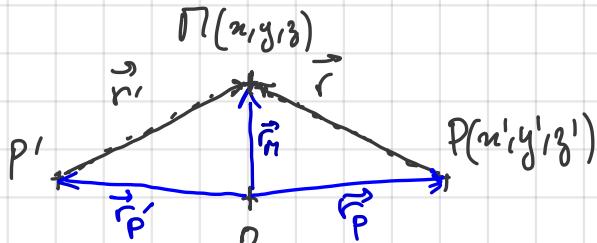
or $\delta(r) = \begin{cases} +\infty & \text{si } r=0 \Leftrightarrow \vec{r}_m = \vec{r}_p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow \delta(r) e^{ikr} = \delta(r) \cos e^{ikr} = 1$

donc au final : $\boxed{\Delta G + k^2 G = -\delta(\vec{r}_m - \vec{r}_p)}$

ex2 et 3: on pose $r' = \|\vec{r}_m - \vec{r}'_p\|$ avec $\vec{r}'_p = -\vec{r}_p$

$$\begin{cases} r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \\ r'^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 \end{cases}$$

$$r^2 - r'^2 = -4zz' \Rightarrow r^2 = r'^2 - 4zz'$$



Si l'on pose

$$G(\vec{r}_m, \vec{r}_p) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \pm \frac{e^{ikr'}}{r'} \right)$$

$$G = G_1 \pm G_2$$

$$\text{d'où: } \Delta G = \Delta G_1 \pm \Delta G_2$$

$$\begin{aligned} \Delta G + k^2 G &= \Delta G_1 \pm \Delta G_2 + k^2 (G_1 \pm G_2) \\ &= (\Delta G_1 + k^2 G_1) \pm (\Delta G_2 + k^2 G_2) \\ &= -\delta(r) e^{ikr} \pm -\delta(r') e^{ikr'} \\ &= -\delta(r) \pm -\delta(r') \end{aligned}$$

$$\text{Or: } \delta(\|\vec{r}\|) = \delta(\|\vec{r}_m - \vec{r}_p\|) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \vec{r}_m = \vec{r}_p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et: } \delta(\|\vec{r}'\|) = \delta(\|\vec{r}_m + \vec{r}_p\|) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \vec{r}_m = -\vec{r}_p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{donc: } - \left(\delta(\|\vec{r}\|) \pm \delta(\|\vec{r}'\|) \right) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \vec{r}_m = \vec{r}_p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = -\delta(r_m - r_p)$$

dans ce cas on a bien: $\boxed{\Delta G(r_m, r_p) + k^2 G(r_m, r_p) = -\delta(r_m - r_p)}$

Il y a donc au moins trois fonctions de Green possibles:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_0(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \\ G_-(r) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr'}}{r'} \right) \\ G_+(r) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr'}}{r'} \right) \end{array} \right.$$

$$r = \|\vec{r}_p\| = \|\vec{r}_m\|$$

→ Comment choisir?

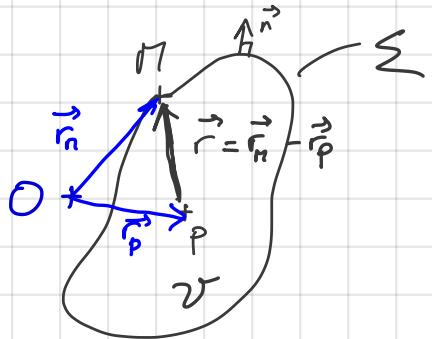
Pour $G = \frac{1}{4\pi r} e^{ikr} = G_0$, (II.3.2). porte le nom de théorème Intégral de Helmholtz-Kirchhoff.

$$\frac{\partial G_0}{\partial n} = \vec{\nabla} G_0 \cdot \vec{n} = \frac{\partial G_0}{\partial r} \vec{e}_r \cdot \vec{n} = \frac{\partial G_0}{\partial r}$$

$$\text{et } \frac{\partial G_0}{\partial r} = \left[\frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{ikr} \right] = \frac{\partial G_0}{\partial n}$$

d'où :

$$\Psi(P) = \iint_{\Sigma} \left(G \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \right) dS$$



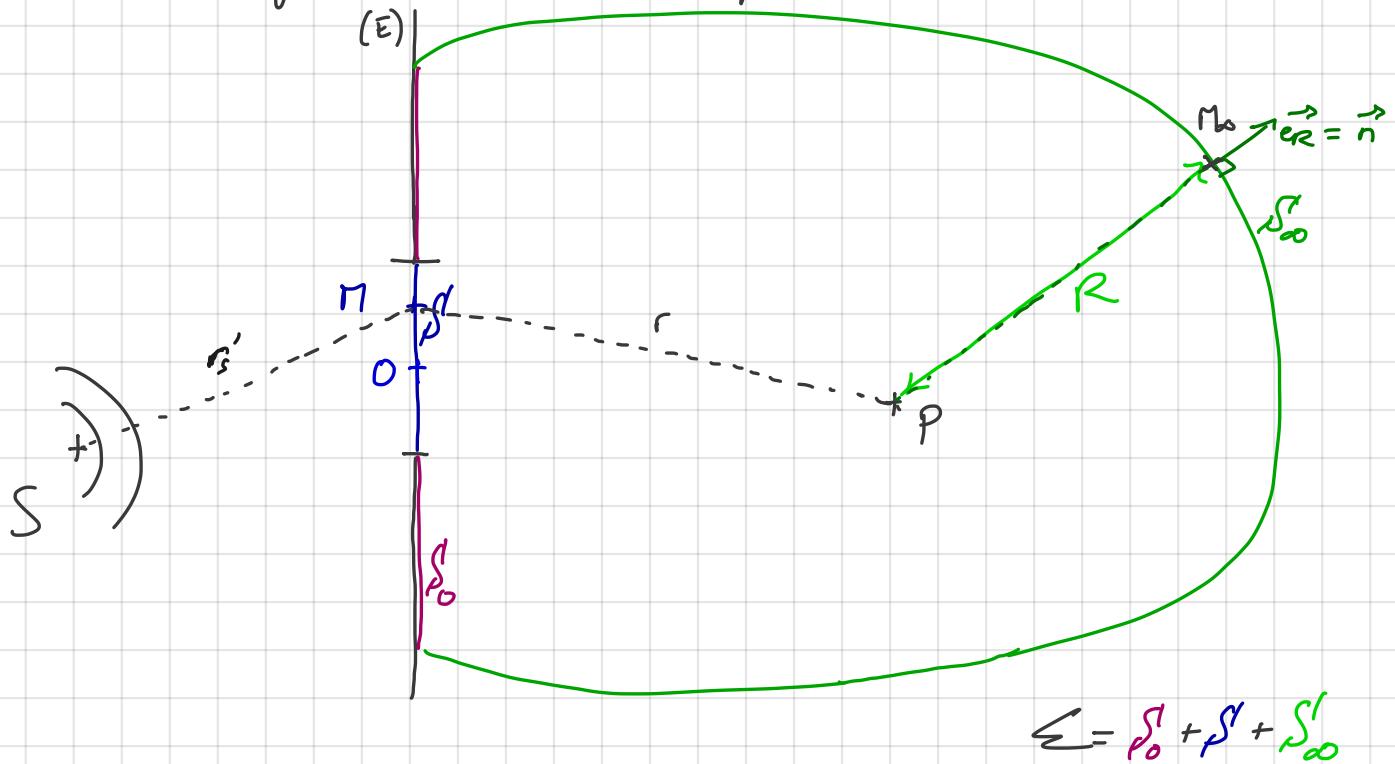
Remarque: on peut obtenir cette formule en faisant faire des distributions; il suffit d'exclure une sphère de rayon ϵ autour du point P (pour éviter la singularité en O), appliquer le th de Green sur le volume V' délimité par $\Sigma + \Sigma_\epsilon$, puis passer à la limite $\epsilon \rightarrow 0$. Il faut penser à exprimer l'élément de surface dS de Σ_ϵ comme $\epsilon^2 d\Omega$ où $d\Omega$ est l'élément d'angle solide : $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$.

Cependant comme nous le verrons ci-après le choix de G_0 pour fonction de Green n'est pas pertinent pour le problème physique considéré.

IV. Application: diffraction par une ouverture plane.

1. Condition de Radiation de Sommerfeld

Dans le cas de la diffraction, la surface Σ peut se décomposer en 2 surfaces : une surface S_∞ située à l'infini et une surface $S'_0 + S'$ composée de la surface de l'écran opaque et de son ouverture.



Discutons de la contribution sur S'_∞ .

$$\rightarrow \text{Que vaut } J_\infty := \iint_{S'_\infty} \left(G \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds ?$$

• Commençons par raisonner avec : $G \equiv G_0 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{ikr}}{r}$

$$- G_0|_R = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{ikR}}{R}$$

$$- \frac{\partial G_0}{\partial n} = \vec{\nabla} G_0 \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} G_0 = \frac{\partial G_0}{\partial r} \hat{e}_R \quad \text{au centre le syst de coordonnées en } P.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial G_0}{\partial r} = \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{1}{4\pi} \\ \hat{e}_R \cdot \vec{n} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left. \frac{\partial G_0}{\partial n} \right|_R = \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \frac{1}{4\pi}$$

$$J_\infty = \iint_{S_\infty} \left(G \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\infty} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial n}|_R - \Psi \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \right) R^2 d\Omega$$

où : $d\Omega$ est l'angle solide sous lequel est vue la surface dS centrée en P_∞ située à une distance R de P .

$$J_\infty = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\infty} R \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n}|_R - \Psi \left(ik - \frac{1}{R} \right) \right) e^{ikR} d\Omega$$

$$\begin{aligned} J_\infty &\xrightarrow[R \rightarrow \infty]{=} 0 \iff \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\left| R \left[\frac{\partial_n \Psi}{R} - \Psi \left(ik - \frac{1}{R} \right) \right] e^{ikR} \right| \right] = 0 \\ &\iff \boxed{\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\left| R \left(\frac{\partial_n \Psi}{R} - ik \Psi \right) + \Psi \right| \right] = 0} \end{aligned}$$

C'est ce que l'on appelle la condition de radiation de Sommerfeld.

Cette condition est vérifiée si Ψ a une amplitude qui décroît au moins en $1/r$:

→ preuve

$$\text{Posons : } \Psi = \frac{1}{r^\alpha} e^{ikr},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{e}_r}_{=1} = \left(-\alpha r^{-(\alpha+1)} + ik r^{-\alpha} \right) e^{ikr} = r^{-\alpha} e^{ikr} \left(ik - \frac{\alpha}{r} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial n} - ik \Psi = r^{-\alpha} e^{ikr} \left(ik - \frac{\alpha}{r} \right) - ik r^{-\alpha} e^{ikr} = -\alpha r^{-(\alpha+1)} e^{ikr}$$

$$\Rightarrow r(\partial_n \Psi - ik \Psi) + \Psi = -\alpha r^{-\alpha} e^{ikr} + r^{-\alpha} e^{ikr}$$

$$r(\partial_n \Psi - ik \Psi) + \Psi = r^{-\alpha} e^{ikr} (1 - \alpha)$$

$$\text{d'où : } |r(\partial_n \Psi - ik \Psi) + \Psi| = \frac{1-\alpha}{r^\alpha} \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 1 \quad \text{cqd}$$

Puisque δ_∞ est de forme sphérique par définition, cela revient simplement à ne considérer que des ondes divergents passant à travers δ_∞ .

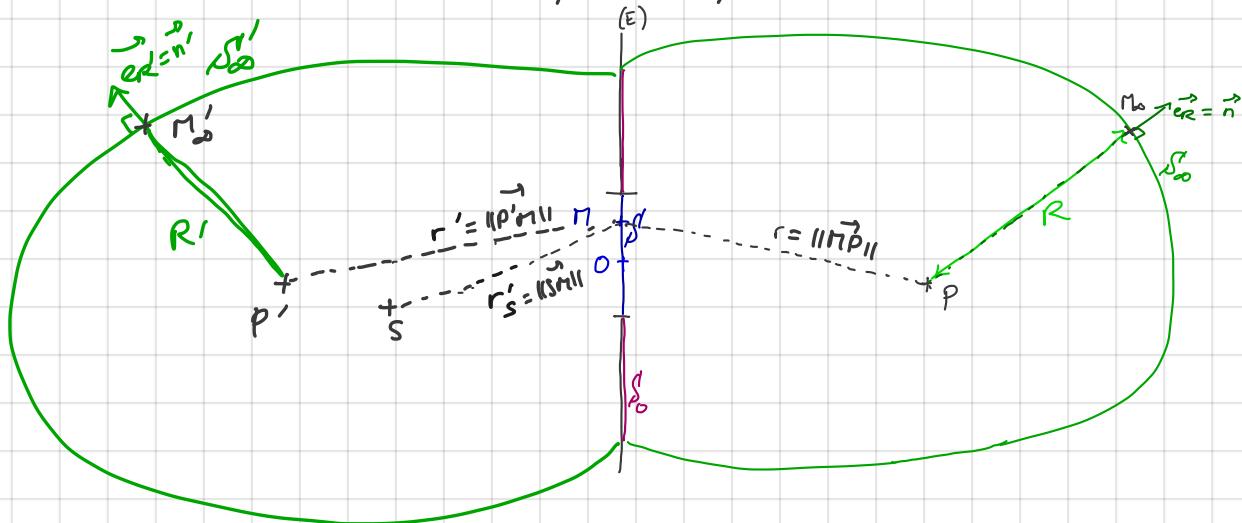
Puisque c'est le cas dans notre situation physique d'intérêt, on considérera que :

$$\oint_{\delta_\infty} \left(\delta_\infty \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \delta_\infty}{\partial n} \right) ds = 0$$

•• Si l'on considère $G = G_+$ ou $G = G_-$, alors en fait : $G = G_0 \pm G_{0'}$, avec G_0 définie à partir d'un système de coordonnées sphériques centré en P et $G_{0'}$ définie à partir d'un système de coord. sphériques centré en P'

$$G_{0'} = \frac{1}{4\pi r'} e^{ikr'}$$

La surface S_{00}' devient : $S_{00,\text{tot}} = S_{00} + S_{00}'$, où S_{00}' est sa réflexion miroir p/r à (E) de même que P' est la réflexion miroir de P p/r à (E) . Cette fois $S_{00,\text{tot}}$ correspond à $R, R' \rightarrow +\infty$.



On raisonne de même que pour établir la condition pour laquelle $J_{00} = 0$; on trouve la même pour

$$J_{00'} = 0 \Leftrightarrow \lim_{R' \rightarrow +\infty} [|R'(\partial_n \Psi|_{R'} - ik\Psi|_{R'}) + \Psi|_{R'} |] = 0$$

Puisque S_{00}' est de forme sphérique par définition, là aussi cela revient juste à considérer des ondes divergentes passant à travers S_{00}' .

Puisque cela est le cas dans notre situation physique,

$$\oint_{S_{00,\text{tot}}} (G_\pm \partial_n \Psi - \Psi \partial_n G_\pm) ds = 0$$

On retiendra donc que quelque soit la fonction de Green choisie :

$$\oint_{\partial\Omega} (G \partial_n \Psi - \Psi \partial_n G) ds = 0$$

et donc que le théorème intégral (III.3.2.) se réduit à l'intégration sur $\partial\Omega + \delta'$:

$$\Psi(p) = \oint_{\partial\Omega + \delta'} (G \partial_n \Psi - \Psi \partial_n G) ds$$

2. Différents choix de conditions aux limites

a. Rappels sur les conditions aux limites.

La liberté dans la définition de G provient du choix des conditions aux limites, c'est à dire la valeur de Ψ ou de sa dérivée normale $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ sur $S_0 + S'$.

Si l'on impose la valeur de Ψ sur $S_0 + S'$:

$$\Psi = K \text{ sur } S_0 + S' \quad (\text{CL de Dirichlet})$$

alors la fonction de Green satisfait une CL homogène:

$$G = 0 \text{ sur } S_0 + S'$$

Si l'on impose la valeur de $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ sur $S_0 + S'$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = J \text{ sur } S_0 + S' \quad (\text{CL de Neumann})$$

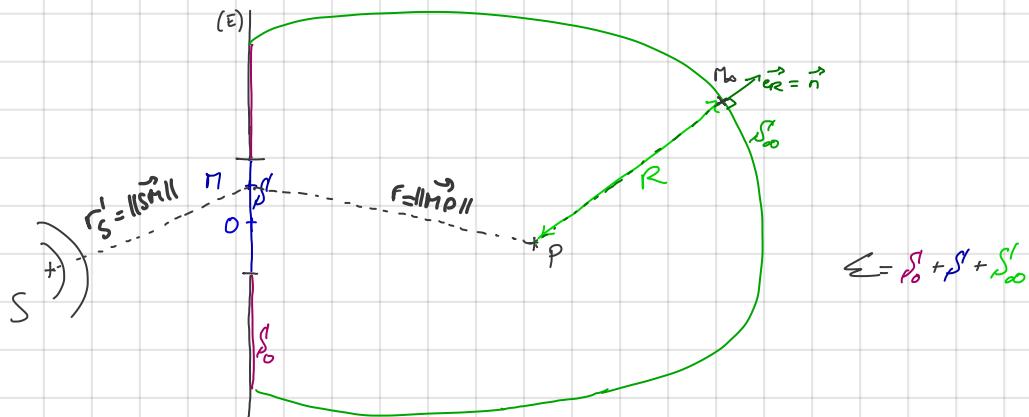
alors la fonction de Green satisfait une CL homogène

$$\frac{\partial G}{\partial n} = 0 \text{ sur } S_0 + S'$$

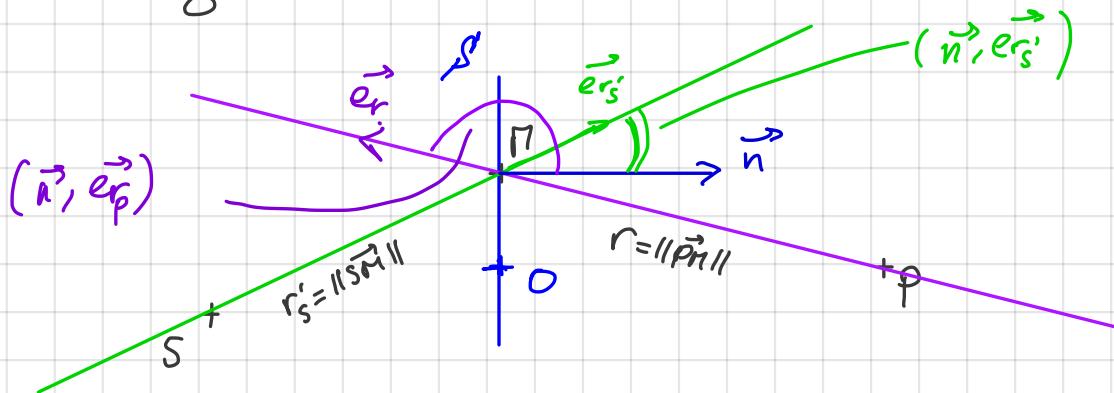
b. hypothèses

Dans tout ce qui suit on suppose que l'écran (E) est éclairé par une onde sphérique émise depuis S :

$$\Psi(M) = \Psi_0 \frac{e^{ikr'_S}}{r'_S} \quad (\text{HO})$$



Si l'on zoom sur l'ouverture au des angles:



On supposera de plus que: $r \gg \lambda \Leftrightarrow k \gg \frac{1}{r}$ (#1)

$$r'_S \gg \lambda \Leftrightarrow k \gg \frac{1}{r'_S} \quad (\#2)$$

c. Solution de Kirchhoff.

Kirchhoff a fait les hypothèses suivantes :

HK1 - sur S' Ψ et $\partial_n \Psi$ sont identiques à ce qu'elles seraient en l'absence de (E).

HK2 - sur S'_0 (surface devant (E)) Ψ et $\partial_n \Psi$ sont nulles.

HK3 - La fonction de Green est $G_0 = \frac{1}{4\pi r} e^{ikr}$.

$$\text{Le théorème intégral } \Psi(p) = \iint_{S' = S_0 + S} (G \partial_n \Psi - \Psi \partial_n G) ds$$

$$\text{devient alors : } \Psi(p) = \iint_S (G_0 \partial_n \Psi - \Psi \partial_n G_0) ds$$

$$\text{puisque : } \partial_n G_0 = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{ikr} \cos(\vec{n}, \vec{e}_r)$$

$$\text{avec (H1): } \partial_n G_0|_r = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \cos(\vec{n}, \vec{e}_r) \stackrel{(H1)}{=} \frac{ik}{4\pi} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \cos(\vec{n}, \vec{e}_r)$$

$$\text{HMT, } S' \quad \Psi(M) = \Psi_0 \frac{e^{ikr_s}}{r_s} \Rightarrow \partial_n \Psi \Big|_M = \Psi_0 \left(ik - \frac{1}{r_s} \right) \frac{e^{ikr_s}}{r_s} \cos(\vec{n}, \vec{e}_{r_s}) \\ \stackrel{(H2)}{=} ik \Psi_0 \frac{e^{ikr_s}}{r_s} \cos(\vec{n}, \vec{e}_{r_s})$$

on obtient :

$$\Psi(p) = \iint_S \left(\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \cdot ik \Psi_0 \frac{e^{ikr_s}}{r_s} \cos(\vec{n}, \vec{e}_{r_s}) - \frac{\Psi_0}{r_s} e^{ikr_s} \frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \cos(\vec{n}, \vec{e}_r) \right) ds$$

$$\text{soit : } \boxed{\Psi(p) = \frac{i\Psi_0}{\lambda} \iint_S \frac{e^{ik(r_s + r)}}{r_s r} X_K ds}$$

$$\text{où } X_K = X_K(\vec{e}_{r_s}, \vec{e}_r) = \frac{1}{2} [\cos(\vec{n}, \vec{e}_{r_s}) - \cos(\vec{n}, \vec{e}_r)]$$

C'est ce que l'on appelle la formule de Fresnel - Kirchhoff

Critique :

L'hypothèse HK₂, bien qu'intuitive, est absurde : on peut montrer en maths que si un chp Ψ et sa dérivée normale, tous 2 bidimensionnels, s'annulent sur un segment fini, alors Ψ doit s'annuler sur tout le plan $(E), \vec{r}_p$, ce qui ne correspond pas à la situation physique décrite.

Kirchhoff a en fait imposé une condition aux limites de type Robin, ce qui est acceptable du point de vue mathématique, mais qui donne un résultat non physique.

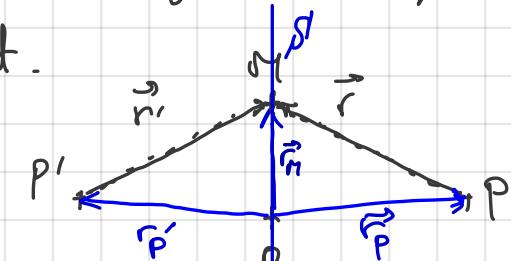
d. Première solution de Rayleigh-Sommerfeld

Pour remédier à l'incohérence du choix de Kirchhoff pour la fonction de Green, Rayleigh et Sommerfeld considèrent d'autres fonctions de Green.

Il reste deux autres choix de conditions aux limites : Dirichlet ($G=0$ sur $\mathcal{S}^r + \mathcal{S}_0^r$) et Neumann ($\partial_n G=0$ sur $\mathcal{S}^r + \mathcal{S}_0^r$).

La première solution de Rayleigh-Sommerfeld correspond à un choix de CL de type Dirichlet.

$$G_- = \frac{1}{\pi a} \left(\frac{1}{r} e^{ikr} - \frac{1}{r'} e^{ikr'} \right)$$



Pour $M \in \mathcal{S}^r + \mathcal{S}_0^r$, $G(n) = 0$, car $r' = r$

Le théorème intégral se réduit alors à :

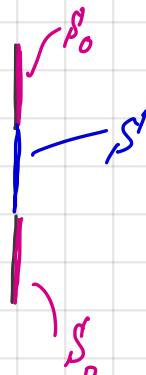
$$\Psi(P) = \iint_{\mathcal{S}^r + \mathcal{S}_0^r} (-\Psi \partial_n G) ds$$

ici il est important
 que $\mathcal{S}^r + \mathcal{S}_0^r$ soit
 un plan
 si non
 $G_- \neq 0$
 sur cette
 surface.

Comme de plus il est raisonnable de poser $\Psi = 0$ sur \mathcal{S}_0^r

$$\boxed{\Psi(P) = - \iint_{\mathcal{S}} \Psi \partial_n G ds}$$

Reste à calculer $\partial_n G_-$:



$$G_- = G_0 - G_{01}$$

$$\partial_n G_- = \partial_n G_0 - \partial_n G_{01}$$

$$\text{or } \partial_n G_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \cos(\vec{n}, \vec{e}_r)$$

$$\text{et } \partial_n G_{01} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr'}}{r'} \left(ik - \frac{1}{r'} \right) \cos(\vec{n}, \vec{e}_{r'})$$

$$\text{or sum } \vec{r}' , \quad r' = r \quad \text{et} \quad \pi - (\vec{n}, \vec{e}_r) = (\vec{n}, \vec{e}_{r'})$$



$$\text{d'où: } \partial_n G_- = \frac{ik}{4\pi r} e^{ikr} \cdot 2 \cos(\vec{n}, \vec{e}_r)$$

$$\boxed{\partial_n G_- = \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \cos(\vec{n}, \vec{e}_r)}$$

et puisque l'on suppose que $\forall M \in S, \Psi(M) = \Psi_0 e^{ikr_s}/r_s$

il vient:

$$\boxed{\Psi(P) = \frac{+i\Psi_0}{\lambda} \iint_S \frac{e^{ik(r+r_s)}}{rr_s} \chi_{RS1} ds}$$

$$\text{où } \chi_{RS1} = -\cos(\vec{n}, \vec{e}_r)$$

Rq: ici on peut laisser $\Psi(M)$ tel quel:

$$\boxed{\Psi(P) = - \iint_S \Psi \partial_n G_- ds = \iint_S \Psi(M) \frac{e^{ikr}}{r} \chi ds = \Psi(P)}$$

où $\chi = \frac{-i}{2} \cos(\vec{n}, \vec{e}_r)$

e. Deuxième solution de Rayleigh-Sommerfeld.

La seconde proposition de Rayleigh et Sommerfeld est de considérer une fonction de Green qui satisfasse des conditions aux limites de Neumann :

$$\partial_n G = 0 \text{ sur } \delta + \rho_0^c.$$

si $\delta + \rho_0^c$ est un plan.

La fonction : $G_f = G_0 + G_o$, vérifie cela (voir calcul du c)

Le théorème intégral de Helmholtz Kirchhoff se réduit alors à :

$$\Psi(p) = \iint_{\delta + \rho_0^c} G \partial_n \Psi$$

En imposant de plus que $\partial_n \Psi = 0$ sur ρ_0^c ce qui est acceptable,

$$\boxed{\Psi(p) = \iint_{\delta} G \partial_n \Psi}$$

et puisque $\Psi(\text{MES}) = \Psi_0 \frac{e^{ikr_s'}}{r_s'}$, il vient :

$$\partial_n \Psi = \Psi_0 \left(ik - \frac{1}{r_s'} \right) \frac{e^{ikr_s'}}{r_s'} \cos(\vec{n}, \vec{e}_{r_s'})$$

$$\partial_n \Psi = ik \Psi_0 \frac{e^{ikr_s'}}{r_s'} \cos(\vec{n}, \vec{e}_{r_s'})$$

de plus sur δ , $G_f = \frac{1}{2\pi r} \left(\frac{1}{r} e^{ikr} + \frac{1}{r} e^{-ikr} \right) = \boxed{\frac{1}{2\pi r} e^{ikr} = G_f(r)}$

car $r_p' = r_p$

d'où

$$\boxed{\Psi(p) = \frac{i\Psi_0}{2} \iint_{\delta} \frac{e^{ik(r_s' + r)}}{r_s' r} X_{RS2} ds}$$

où $X_{RS2} = \cos(\vec{n}, \vec{e}_{r_s'})$

f. Conclusion.

Dans les 3 cas : G_0 , G_- , et G_+ , avec les hypothèses :

H0 : onde sphérique depuis S

H1 : $k \gg 1/r \Leftrightarrow r \gg \lambda$

H2 : $k \gg 1/r'_S \Leftrightarrow r'_S \gg \lambda$

On obtient une expression de l'état vibratoire en P du type :

$$\Psi(P) = \frac{i\Psi_0}{\lambda} \iint_S \frac{e^{ik(r'_S + r)}}{r'_S r} X \, ds$$

S : surface du diaphragme

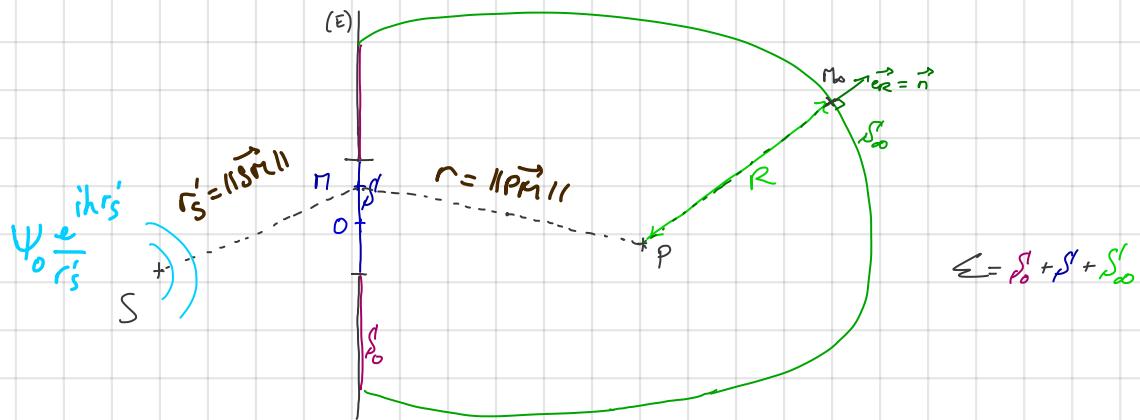
$r = \|\vec{PP}\|$, $M \in S$

$r'_S = \|\vec{SM}\|$, $M \in S$

où

$$X = \begin{cases} \frac{1}{2} [\cos(\vec{n}, \vec{e}_{r'_S}) - \cos(\vec{n}, \vec{e}_r)] & \text{si } G = G_0 \quad (\text{Kirchhoff}) \\ -\cos(\vec{n}, \vec{e}_r) & \text{si } G = G_- \quad (\text{Rayleigh-S}) \\ \cos(\vec{n}, \vec{e}_{r'_S}) & \text{si } G = G_+ \quad ("") \end{cases}$$

est le facteur d'obliquité



- Avec $G = G_0$ l'hypothèse de planéité de S est relaxée, et on suppose que Ψ et $\partial_n \Psi$ sont nuls sur S'_0 ce qui impose $\Psi = 0$ sur le plan S'_0 .
- Avec $G = G_-$, S' doit être plane, et on suppose que $\Psi = 0$ sur S'_0 (cas G_-) et $\partial_n \Psi = 0$ sur S'_0 (cas G_+).

La théorie permet bien d'obtenir (II.2) :

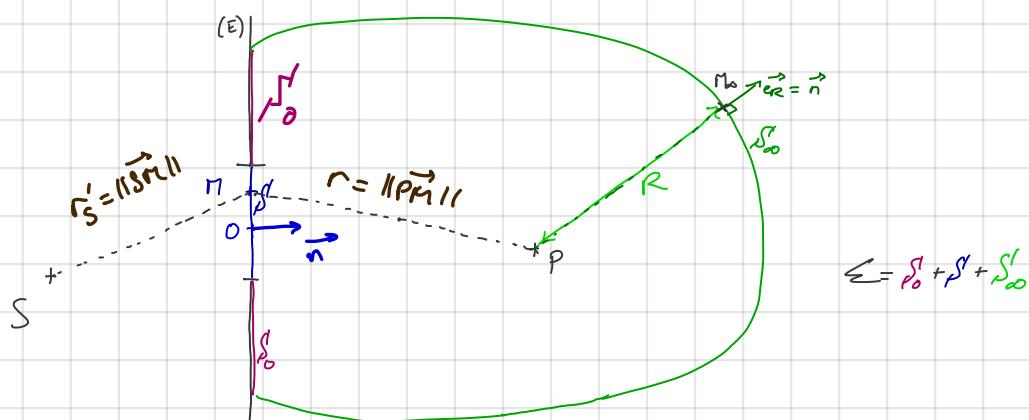
$$\boxed{\Psi(P) = \iint_S \frac{e^{ikr}}{r} \Psi(M) X(M, P) dS} \quad (\text{II.2})$$

Si l'on choisit $G = G_-$;

$$\Psi(P) = \iint_S \frac{e^{ikr}}{r} \Psi(M) X dS \quad \circlearrowleft$$

$$\text{où } X = -\frac{i}{\lambda} \cos(\vec{n}, \vec{e}_r), \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|}$$

La théorie scalaire de la diffraction avec H_1 et H_2
et S' plane et $\Psi = 0$ sur S' , permet bien d'obtenir
le principe de Huyghens-Fresnel !



V. Diffraction par une ouverture plane en optique

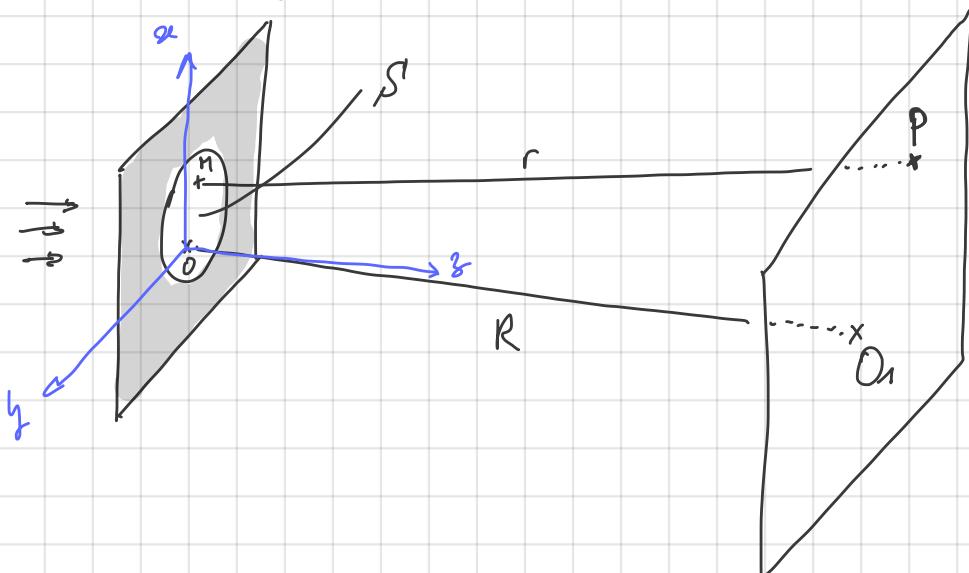
1. Formulation pratique du ppe de Huyghens - Fresnel (général).

$$\psi(P) = \iint_S \frac{e^{ikr}}{r} \psi(M) \chi dS$$

Lorsque l'on utilise le modèle scalaire de la lumière pour décrire la diffraction il faut prendre garde au fait que l'on ne peut sommer les différentes contributions que si les champs correspondants aux vibrations scalaires, sont colinéaires (rayons quasi- \parallel) et dans le même état de polarisation.

Pour la diffraction c'est la condition de parallélisme qui n'est à priori pas vérifiée.

Cependant la situation d'intérêt se résume en pratique à la géométrie suivante :



avec $\left\{ \begin{array}{l} R = \|\overrightarrow{O_1P}\| \gg \|\overrightarrow{O_1M}\| \\ R \gg \|\overrightarrow{OM}\| = r_M \end{array} \right.$ (C)

Avec (C) les différents rayons allant d'un point M quelconque de S' vers P ont pratiquement la même direction; ils sont quasi-parallèles.

On peut donc appliquer la formule (II.2) en bonne approximation, étant entendu que S' est éclairée par une même source.

$$\Psi(P) = \iint_{S'} \frac{e^{ikr}}{r} \Psi(M) X \, ds \quad (\text{II.2})$$

Autrement dit le facteur d'obliquité :

$$X = -\frac{i}{\lambda} \cos(\vec{n}, \vec{er}) \approx \text{cste} \quad (C1)$$

est quasiment constant puisque $\forall M, P, (\vec{n}, \vec{er}) \approx \text{cste}$

De plus puisque, $R \gg \|\vec{OP}\|$ et $\|\vec{OM}\|$,

on peut considérer que $\forall M, P, r \approx \text{cste} \approx R$

et par conséquent

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{R} \quad (C2)$$

Par contre, puisque $k \gg 1/r$, e^{ikr} n'est pas constant.

Ainsi, le principe de Huyghens-Fresnel se réécrit :

$$\Psi(P) \approx A \iint_{S'} e^{ikr} \Psi(M) \, ds, \quad r = \|\vec{PM}\|$$

$$\text{au : } A = \frac{X}{R} = \frac{-i}{R\lambda} \cos(\vec{n}, \vec{er}) \approx \text{cste}.$$

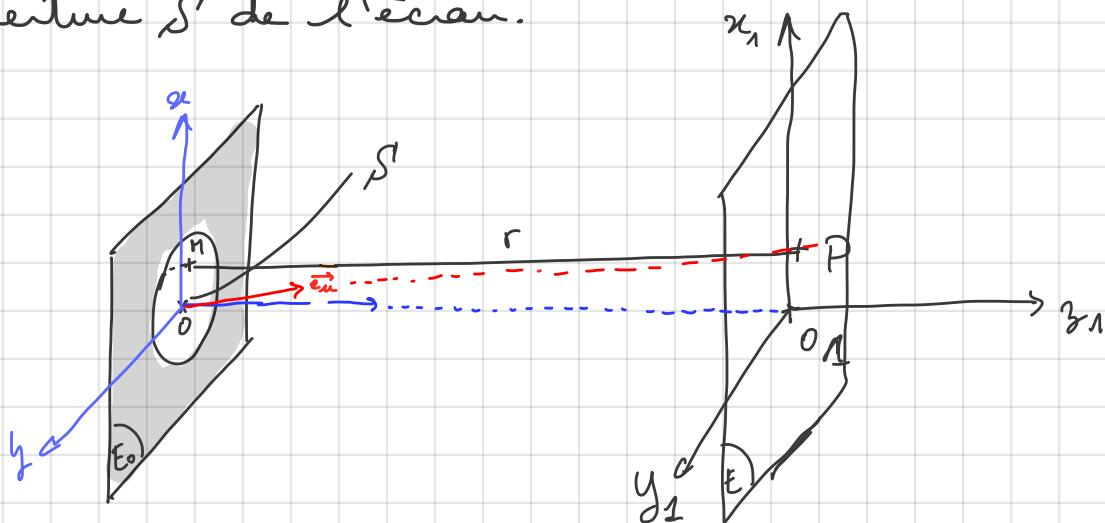
C'est la formulation pratique du principe de Huyghens-Fresnel.

2. Mise en évidence de deux régimes

Nous allons maintenant révéler deux régimes dans cette situation pratique.

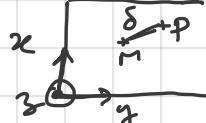
$$\Psi(P) \approx A \iint_S e^{ikr} \Psi(M) dS \quad (\hookrightarrow \text{l'intégration se fait sur } \Omega \in S)$$

Considérons un repérage cartésien centré sur l'ouverture S' de l'écran.



On note : (x_p, y_p, z_p) les coord. de P $z_p = R = \| \vec{OP} \|$

On note : $(x_M, y_M, 0)$ les coord. de M sur S' . L'intégration

se fait sur x_M et y_M . On note δ :  $\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2}$ $\delta_x^2 = (x_M - x_p)^2$
 $\delta_y^2 = (y_M - y_p)^2$

$$r^2 = R^2 + (x_M - x_p)^2 + (y_M - y_p)^2 = R^2 + \delta_x^2 + \delta_y^2$$

$$r^2 = R^2 \left(1 + \frac{\delta_x^2 + \delta_y^2}{R^2} \right) = R^2 \left(1 + \frac{\delta^2}{R^2} \right)$$

On $\delta := \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} \ll R$ car $R \gg \| \vec{OM} \|$ et $\| \vec{OP} \|$.

Notons $\varepsilon = \frac{\delta}{R}$, $r^2 = R^2 \left(1 + \varepsilon^2 \right)$

A l'aide d'un DL : $r = R \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^4}{8} + o(\varepsilon^4) \right)$

sait $r = R \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) + o(\varepsilon^2)$

$r = R + \frac{\delta^2}{2R} + o(\varepsilon^2)$ (IV.2.1)

$$\frac{\delta^2}{2R} = \frac{(x_m - x_p)^2 + (y_m - y_p)^2}{2R} = \frac{x_m^2 + y_m^2 + x_p^2 + y_p^2}{2R} - \frac{2x_m x_p + 2y_m y_p}{R}$$

Possons $\alpha = \frac{x_p}{R}$ et $\beta = \frac{y_p}{R}$ $x_p^2 = R^2 \alpha^2$ $y_p^2 = R^2 \beta^2$

$$\frac{\delta^2}{2R} = \frac{x_p^2 + y_p^2}{2R} - (\alpha x_m + \beta y_m) + \frac{x_m^2 + y_m^2}{2R}$$

d'au: $r = \underbrace{\frac{x_p^2 + y_p^2}{2R}}_{r_0} - (\alpha x_m + \beta y_m) + \frac{x_m^2 + y_m^2}{2R} + o(\varepsilon^2)$

$$r = r_0 - (\alpha x_m + \beta y_m) + \frac{x_m^2 + y_m^2}{2R} + o(\varepsilon^2) \quad (\text{IV.2.2})$$

- si $R \rightarrow +\infty$ il n'y a plus de terme quadratique en x_m et y_m (variables d'intégrat° sur S').
- si $\frac{x_m^2 + y_m^2}{2R}$ n'est pas négligeable $\Psi = kr$ est un polynôme d'ordre 2 en x_m et y_m .
on est dans le régime de diffraction appelé diffraction de Fresnel.

3. Régime de Diffraction à l'infini.

Pour $R \rightarrow +\infty$: $r = -(\alpha_{nr} + \beta_{ym})$ (IV. 2.2bis)

il n'y a plus de terme quadratique en x_m^2 et y_m^2

c'est le régime de diffraction que l'on appelle

"diffraction à l'infini" ou "diffraction de Fraunhofer".

a. une première analyse.

Plus précisément, c'est le cas si :

$$\text{HMEs}, k \frac{x_m^2 + y_m^2}{2R} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\|\vec{o_m}\|^2}{2R} \ll 1, \text{ HMEs}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\sup(\|\vec{o_m}\|^2)}{2R} \ll 1$$

$$\Leftrightarrow R \gg \pi \frac{\sup(\|\vec{o_m}\|^2)}{\lambda} \quad (\text{IV. 2.3})$$

AN: avec une ouverture circulaire S' de rayon $a = 0,5 \text{ mm}$

$$\lambda = 600 \text{ nm}, R \gg \pi \cdot \frac{(0,5 \cdot 10^{-3})^2}{600 \cdot 10^{-9}} = 1,31 \text{ m}$$

ce qui impose R de l'ordre de 100 m!

Ce n'est jamais le cas en pratique!

Alors comment faire?

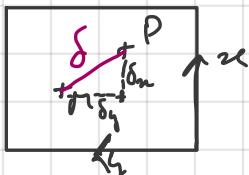
Analysons de manière différente la situation où

P tend vers l'infini.

b. Une autre traduction de $R \rightarrow +\infty$.

$R \rightarrow +\infty$ signifie que P s'éloigne infiniment de E₀. cela revient à dire que tous les rayons qui arrivent en P ont une même direction $\lim_{R \rightarrow +\infty} (\vec{e}_u)$.

En effet :



$$\vec{MP} = \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ R \end{pmatrix}_{n,y,z} \quad \|\vec{MP}\|^2 = \delta_x^2 + \delta_y^2 + R^2 = R^2 \left(1 + \frac{\delta_x^2 + \delta_y^2}{R^2} \right) = R \sqrt{1 + \epsilon^2}$$

$$\Rightarrow -\vec{e}_r = \frac{1}{R \sqrt{1 + \epsilon^2}} \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_x / R \sqrt{1 + \epsilon^2} \\ \delta_y / R \sqrt{1 + \epsilon^2} \\ 1 / \sqrt{1 + \epsilon^2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or : } \vec{e}_u = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x_p^2 + y_p^2}{R^2}}} \begin{pmatrix} x_p/R \\ y_p/R \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

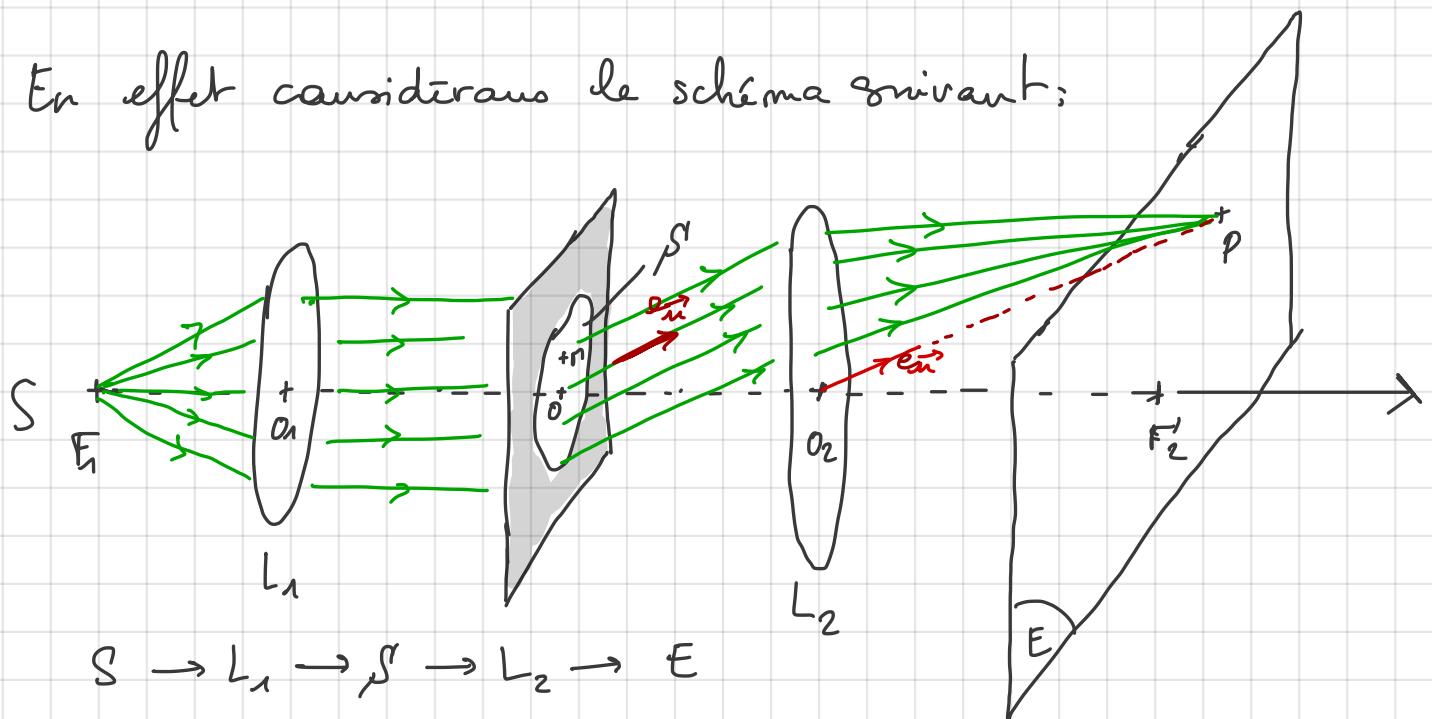
Dans le régime de diffraction à l'infini correspond en fait au cas où tous les rayons provenant de S' en P ont une même direction : " $R \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \chi = \text{cste}$ "
 ↳ onde plane !

Rq : Dans ce cas la condition de parallélisme nécessaire pour sommer les \neq contributions dans le modèle scalaire est parfaitement vérifiée : $\chi = \text{cste}$ (C1 ok)

C'est ce qui se produit lorsque l'on cherche à former l'image d'un objet en optique !

c. Lieu avec la formation des images

En effet considérons le schéma suivant :

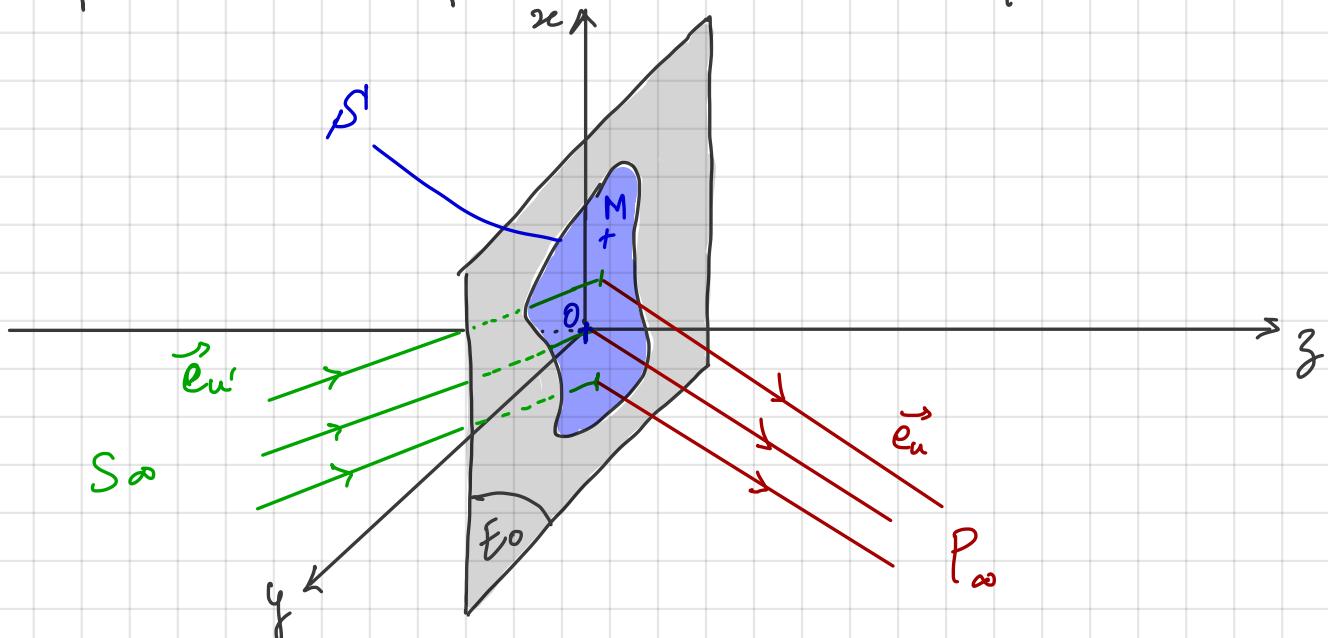


Pour observer la diffraction à l'âge correspondant à une direction \vec{e}_n donnée, il suffit de se placer dans le plan focal de L_2 . Un faisceau parallèle arrivant sur L_2 vient converger en un point P dont la position s'obtient à partir du rayon de dir \vec{e}_n passant par O_2 (ce rayon n'est pas deviné par définition).

En P on est donc sûr que tous les rayons issus de S' et arrivant en P ont la même direction.

d. Diffraction à l'infini d'une ouverture plane par une OMP

En optique au sera souvent amené à considérer la diffraction à l'infini d'un diaphragme plan par une onde plane monochromatique.



On prend pour origine des phases la phase du rayon diffracté en O.

Le principe de Huygen-Fresnel assume que la diffraction ne change pas la nature de l'onde diffractée : l'onde diffractée est plane si l'onde incidente l'est.

$$\Psi(P_\infty) \approx A \iint_S \Psi(M) e^{i\frac{2\pi}{\lambda} ds} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{déphasage dû à la} \\ \text{propagation de M à } P_\infty \end{matrix}$$

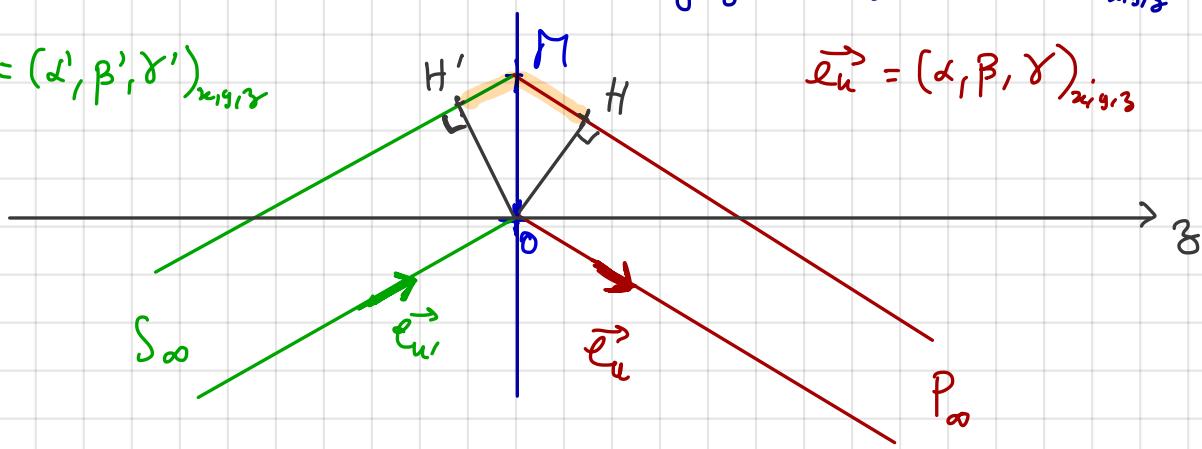
↑ ↑
 état vibratoire état vibratoire d'une
 d'une onde plane onde plane

La phase d'un rayon diffracté en un point M, relativement à cette origine, peut se calculer à l'aide de la différence de marche géométrique.

$$\vec{OM} = x \vec{e_x} + y \vec{e_y} + 0 \vec{e_z} = (x, y, 0)_{\mathbb{R}^3}$$

$$\vec{e}_{u'} = (\alpha', \beta', \gamma')_{\mathbb{R}^3}$$

$$\vec{e}_u = (\alpha, \beta, \gamma)_{\mathbb{R}^3}$$



$$\delta = H'M + MH$$

$$\delta = \vec{OM} \cdot \vec{e}_{u'} + \vec{OM} \cdot (-\vec{e}_u)$$

$$\delta = \vec{OM} \cdot (\vec{e}_{u'}, -\vec{e}_u)$$

$$\Rightarrow \Psi := k\delta \quad \text{donc} : \quad \Psi = (\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{OM}$$

$$\text{soit : } \boxed{\Psi = k [(\alpha' - \alpha)x + (\beta' - \beta)y]}.$$

point pris pour l'origine
des phases

On obtient alors :

$$\Psi(P_\infty) \approx A \iint_{xy} \Psi(M) e^{ik[(\alpha' - \alpha)x + (\beta' - \beta)y]} dxdy$$

$\chi = \text{cste}$ vrai ds la diff're ∞ ,

mais : $\frac{1}{r} \approx \text{cste}$, d'où le $\Psi(P_\infty) \approx \dots$

trajet RP
vraie perte
entre les
diff. rayons

Rq : On peut introduire un coefficient de transmission
en amplitude $t(x, y)$ propre à \mathcal{S}' . Il est contenu
dans $\Psi(M)$.