LP20 : diffraction par des structures périodiques.

pourquoi s'intéresse-t-on à cela ?

on connait la structure mais pas la radiation

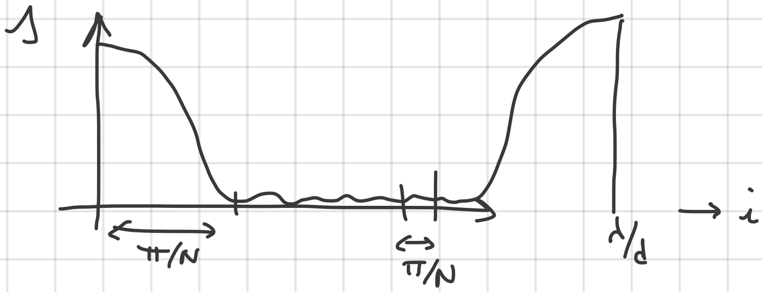
→ problème de spectroscopie par réseau

on ne connait pas la structure mais on connait la radiation

→ diffraction par rayons X pour se renseigner sur la matière.

Plan : **I. Diffraction par des structures périodiques**

1. Facteur de forme - facteur de structure
2. Objet périodique 1D.
3. Etude de la fonction d'Airy.
   - → Tracé
   - → Interprétation des maximums



II. Application aux réseaux.

1. Expériences (qualitatives : influence de N et d, quantitatives : mesure de la fonction d'Airy)
2. Calcul du pouvoir de résolution
3. Applications numériques. réalisations pratiques.

III. Application aux mesures de structures périodiques

1. Position du problème

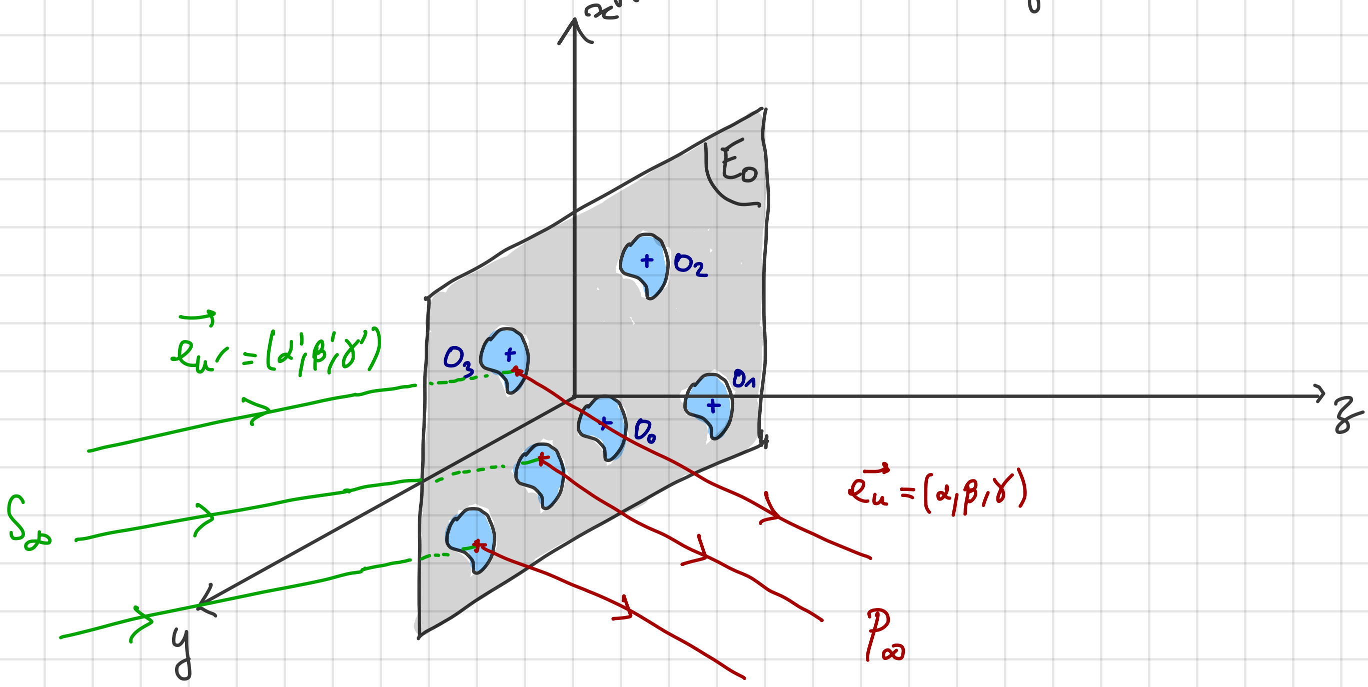
2. Bragg.

I. Diffraction à l'infini par un ensemble d'ouvertures planes identiques.

1. Position du problème.

Soit un plan (E_0) contenant une suite $(S_m)_m$ d'ouvertures de centres $(O_m)_m$ toutes identiques.

Le plan (E_0) est éclairé par une OPPM, on se place dans les conditions de diffraction à l'infini.



L'état vibratoire Ψ_0 associé à l'onde diffractée en un point M d'une ouverture S_0 de centre O_0 s'écrit en un point P_0 caractérisé par une direction $\vec{e_u} = (\alpha, \beta, \gamma)$:

$$\Psi_0(\alpha, \beta) \simeq A \iint_{S_0} \Psi_0(M)\, e^{ik[(\alpha'-\alpha)x + (\beta'-\beta)y]}\, dx\, dy$$

L'origine des phases est fixée par la phase de l'onde diffractée en O_0.

2. Facteur de forme - Facteur de structure.

L'état vibratoire de l'onde diffractée par la même ouverture S_m translatée en un centre O_m est :

$$\Psi_m(\alpha,\beta) = \Psi_0(\alpha,\beta)\, e^{-i\phi_m}$$

où ϕ_m est le déphasage entre l'onde diffractée en O_m et celle diffractée en O_0 (référence).

Dans les conditions de la diffract° à l'∞, les états vibratoires du modèle scalaire peuvent se sommer sans précautions (car les rayons sont parallèles et correspondent à un même état de polarisation, étant entendu qu'il n'y a qu'une seule source en jeu)

$$\Psi(\alpha,\beta) = \sum_{m=0}^{N-1} \Psi_m(\alpha,\beta)$$

$$\Psi(\alpha,\beta) = \Psi_0(\alpha,\beta) \sum_{m=0}^{N-1} e^{-i\phi_m} \quad , \quad \phi_0 = 0$$

L'intensité diffractée dans la direction $\vec{e_u}$ a alors pour expression :

$$I(\alpha,\beta) = \Psi^*(\alpha,\beta)\, \Psi(\alpha,\beta)$$

$$I(\alpha,\beta) = |\Psi_0|^2 \cdot \left| \sum_{m=0}^{N-1} e^{-i\phi_m} \right|^2$$

$$\boxed{I(\alpha,\beta) = D(\alpha,\beta) \cdot \mathcal{S}(\alpha,\beta)} \qquad (I.2.1)$$

facteur de forme
↳ dépend de la forme de S_0

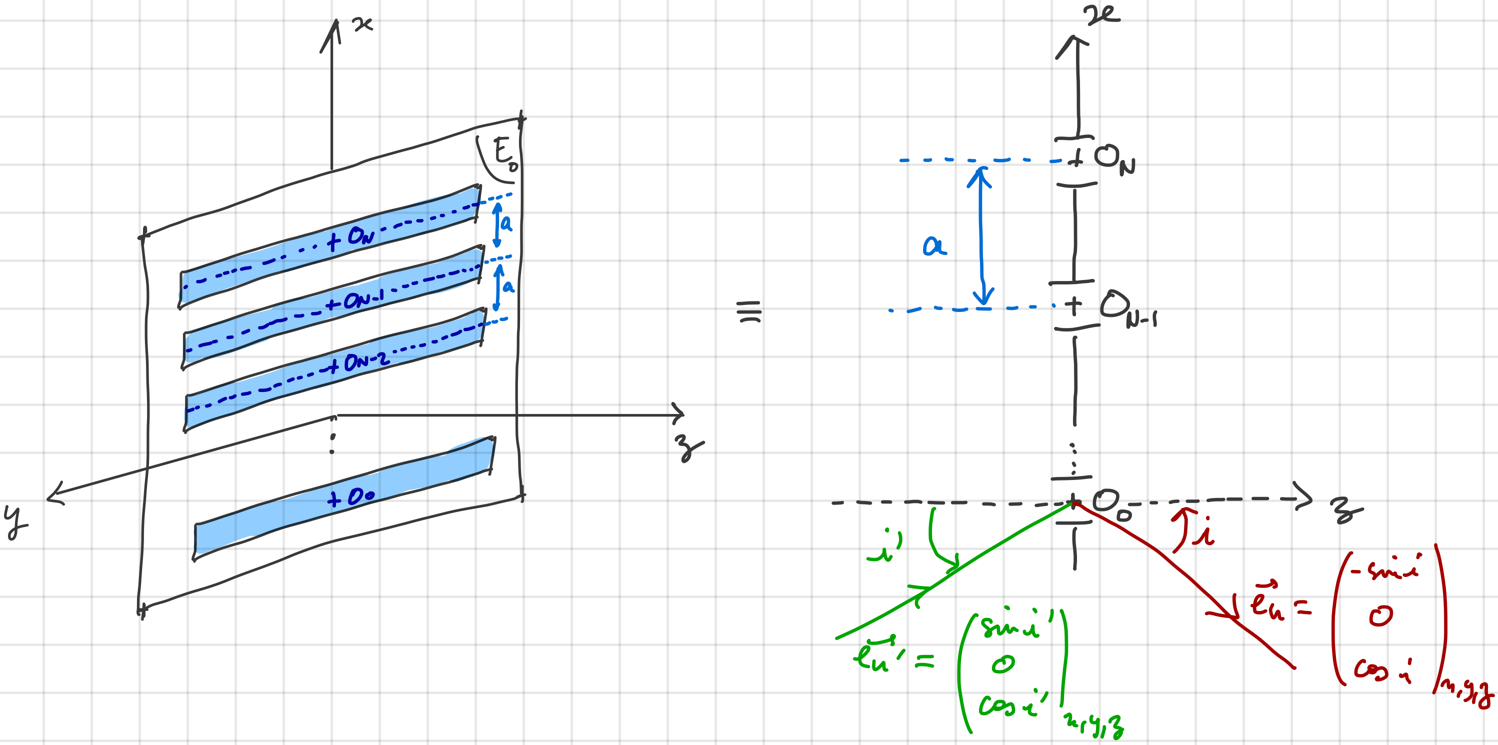
facteur de structure
↳ dépend de la répartition des $(S_m)_m$

II. Ouvertures planes identiques périodiquement distribuées selon une dimension.

Comment se simplifie ce que l'on a vu précédemment si les ouvertures sont périodiquement distribuées selon une dimension ?

1. Définitions et notations

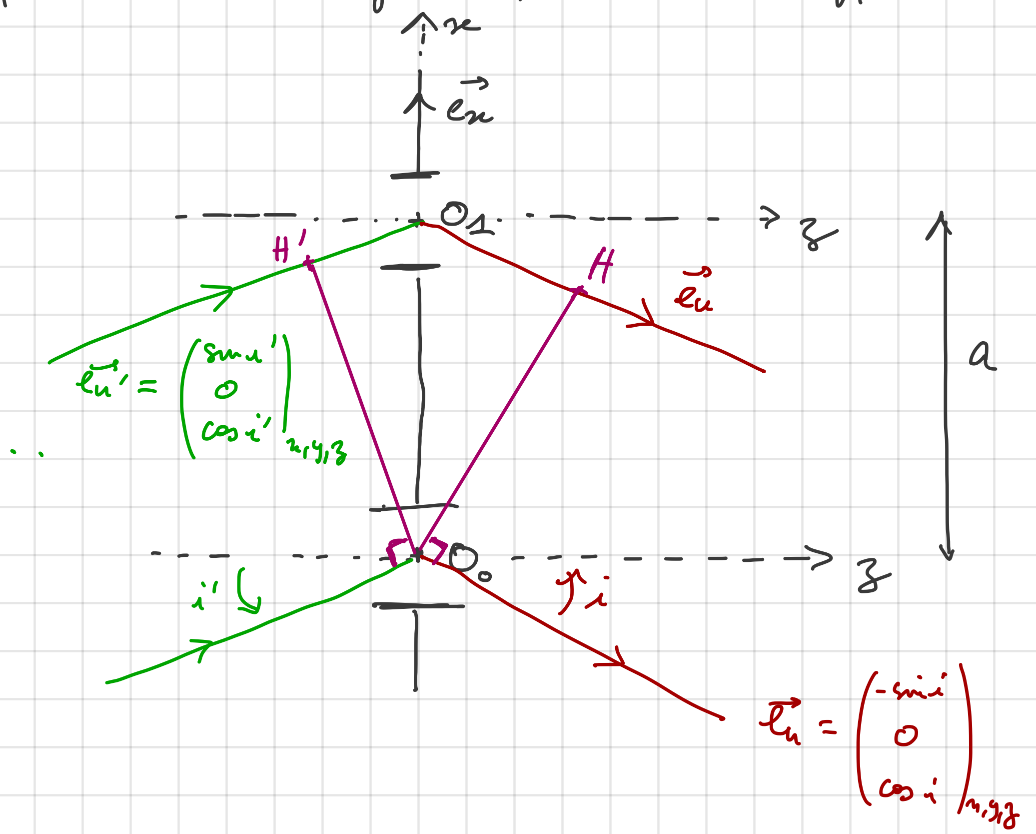
On considère la situation suivante :



Peu importe la forme de $(S'_m)_m$.

2. Calcul de la différence de phase

Calculons la différence de phase entre le rayon diffracté en O_0 (référence) et celui diffracté en O_1.



$$\phi_1 = k\delta_1, \quad \delta_1 = H'O_1 + O_1H$$

$$= \vec{O_0O_1} \cdot \vec{e_u}' + \vec{O_0O_1} \cdot (-\vec{e_u})$$

$$\delta_1 = a\,\vec{e_x} \cdot (\vec{e_u}' - \vec{e_u})$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_1 = ka(\sin i' + \sin i)}, \quad \phi_1 \equiv \phi_1(\underbrace{\alpha}_{= -\sin i}) \qquad \text{II.2.1}$$

Rq : si $\vec{e_u}$ est de l'autre côté de Oz, $\phi_1 = ka(\sin i' - \sin i)$

on retiendra donc $\boxed{\phi_1 = ka(\sin i' \pm \sin i)}$.

La différence de phase entre le rayon diffracté par O_m et celui diffracté par O_0 est obtenue par homotétie : $\boxed{\phi_m = m\,\phi_1. \quad \forall m \geq 1.}$ (II.2.2)

3. Facteur de structure : fonction des réseaux.

Avec (II.2.2) le facteur de structure $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\alpha = -\sin i)$ devient :

$$\mathcal{S} = \left| \sum_{m=0}^{N-1} e^{-i\phi_m} \right|^2$$

$$\mathcal{S} = \left| \sum_{m} (e^{-i\phi_1})^m \right|^2$$

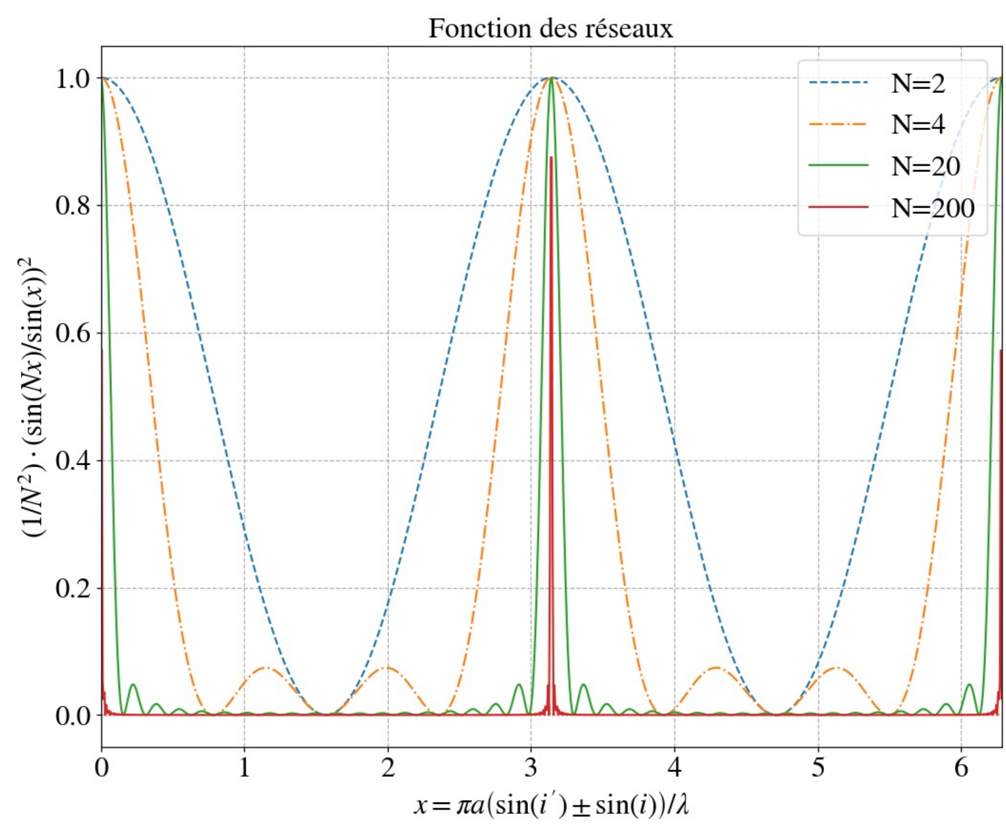
$$\mathcal{S} = \left| \frac{1 - e^{iN\phi_1}}{1 - e^{i\phi_1}} \right|^2$$

$$\mathcal{S} = \left(\frac{\sin(N\phi_1/2)}{\sin(\phi_1/2)} \right)^2$$

si l'on pose $x = \phi_1/2 = \boxed{\frac{\pi a}{\lambda}(\sin i' \pm \sin i) =: x.}$ (II.3.0)

$$\boxed{\mathcal{S}(x) = N^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{N} \cdot \frac{\sin(Nx)}{\sin(x)} \right)^2}_{= R(x)}} \quad \text{(II.3.1)}$$

R(x) est ce que l'on appelle la fonction des réseaux. Son graphe est donné ci-dessous :



Etudions cette fonction : $\boxed{\mathcal{J} = N^2 R}$

- fonction paire et périodique de période $\pi \to [0;\pi]$
- Étude des variations sur $x \in [0;\pi]$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x} = 2 \frac{\sin Nx}{\sin x} \cdot \frac{N\cos(Nx)\sin x - \cos x \sin(Nx)}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x} = 2\mathcal{J}\left(N \cotan(Nx) - \cotan x\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{J}(x) = 0 \quad \text{et/ou} \quad N\cotan(Nx) - \cotan(x) = 0$$

- $\mathcal{J}(x) = 0 \Leftrightarrow \sin Nx = 0$ et $\sin x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \quad Nx = l'\pi, \; l' \in [\![1; N-1]\!]$$

$$\mathcal{J}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{l'\pi}{N}, \; l' \in [\![1; N-1]\!]$$

$\forall x \in]0;\pi[,$

- $N\cotan(Nx) = \cotan(x)$ est une équation transcendante qui ne se résoud que graphiquement. $\left\{ \begin{matrix} \cotan x \\ \cotan Nx \end{matrix} \right\} \xrightarrow[x\to 0]{x\to\pi} +\infty$

On peut calculer $\mathcal{J}_{max,sec}(x)$ correspondant aux valeurs de $x \in]0;\pi[$ satisfaisant cette relation :

$$\forall x, \quad \mathcal{J}(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \sin^2(Nx)$$

or si x tq : $N\cotan(Nx) = \cotan(x) \Leftrightarrow \cos(Nx) = \frac{\sin Nx}{N} \cdot \cotan x$

$$\sin^2(Nx) := 1 - \cos^2(Nx) = 1 - \left(\frac{\sin Nx}{N}\right)^2 \cotan^2 x$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2(Nx)\left[1 + \frac{1}{N^2}\cotan^2 x\right] = 1$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2 Nx = \frac{1}{1 + \frac{1}{N^2}\cotan^2 x} = \boxed{\frac{N^2}{N^2 + \cotan^2 x} = \sin^2(Nx)}$$

On en déduit la valeur de $\mathcal{I}$ car x tq $N\cotan(Nx) = \cotan x$

$$\mathcal{I}_{max,sec}(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{N^2}{N^2 + \cotan^2 x}$$

$$= N^2 \cdot \frac{1}{(N^2-1)\sin^2 x + 1}$$

$$\boxed{\mathcal{I}_{max,sec}(x) = N^2 \cdot \frac{1}{1+(N^2-1)\sin^2 x}} \qquad (\text{II}.3.3)$$

- Reste à calculer la valeur en $x = 0$ ou π.

Utilisons pour cela la règle de l'Hopital :

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin Nx}{\sin x}\right) = \left.\frac{N\cos Nx}{\cos x}\right|_{x=0} = N$$

d'où $\boxed{\mathcal{I}(x \equiv 0[\pi]) = N^2 =: \mathcal{I}_0}$

On remarque que : $\boxed{\forall N \geq 2, \quad \mathcal{I}_{max,sec} < \mathcal{I}_0}$

puisque : $\dfrac{\mathcal{I}_{max,sec}}{\mathcal{I}_0} = \dfrac{1}{1+(N^2-1)\sin^2 x}$

- En résumé :

i. $\mathcal{I}(x)$ présente un max global en $x \equiv 0[\pi]$

$$\mathcal{I}(x \equiv 0[\pi]) =: \mathcal{I}_0 = N^2$$

ii. $0 \leq \mathcal{I}(x)$ s'annule pour $x = \frac{l'\pi}{N}$, $l' \in [\![1; N-1]\!]$

il y a donc $(N-1)$ annulations entre 0 et π

iii. pour $x \in]0;\pi[$, $\mathcal{I}(x)$ atteint des max locaux

donnés par : $\boxed{\mathcal{I}_{max,sec}(x) = \mathcal{I}_0 \cdot \frac{1}{1+(N^2-1)\sin^2 x}}$

Résumé.

i. Maximum global

$I(x)$ présente un max global en $x \equiv 0[\pi]$

$$\boxed{I(x \equiv 0[\pi]) =: I_0 = N^2}$$

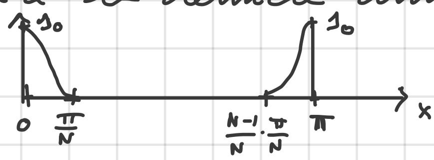
ii. Annulations (minimums)

$$\boxed{I(x) = 0 \iff x = \frac{l'\pi}{N}, \; l' \in [\![1; N-1]\!]}$$

il y a donc $(N-1)$ annulations entre 0 et π

iii. Maxima locaux (nombres, valeurs de I, largeur)

pour $x \in]0;\pi[$, $I(x)$ atteint des max locaux entre chaque annulations, à partir de la premièr annulation en $\frac{\pi}{N}$ et jusqu'à la dernièr annulation en $\frac{N-1}{N}\pi$, il y en a donc



$(N-1) - 1 = N-2$, et ils sont donnés par : $N \operatorname{cotan}(Nx) = \operatorname{cotan}(x)$, et les valeurs de I sont alors:

$$\boxed{I_{max,sec}(x) = I_0 \cdot \frac{1}{1 + (N^2-1)\sin^2 x}}$$

Leur largeur est donnée par la distance entre 2 annulations:

$$\left| l' \frac{\pi}{N} - (l'+1)\frac{\pi}{N} \right| = \boxed{\frac{\pi}{N} = \Delta x_{max,sec}}$$

III. Applications aux réseaux optiques

1. Position du problème

Comment la disposition d'ouvertures précédentes peut-elle nous renseigner sur le rayonnement incident ?

Soit une direction de diffraction donnée i_ℓ correspond-ant à un max : $x \equiv 0\ [\pi]$ ie : $\frac{\phi_1}{2} = \ell\pi$, $\ell \in \mathbb{N}$

ie : $\frac{\pi a}{\lambda}\left(\sin(i') \pm \sin(i_\ell)\right) = \ell\pi$

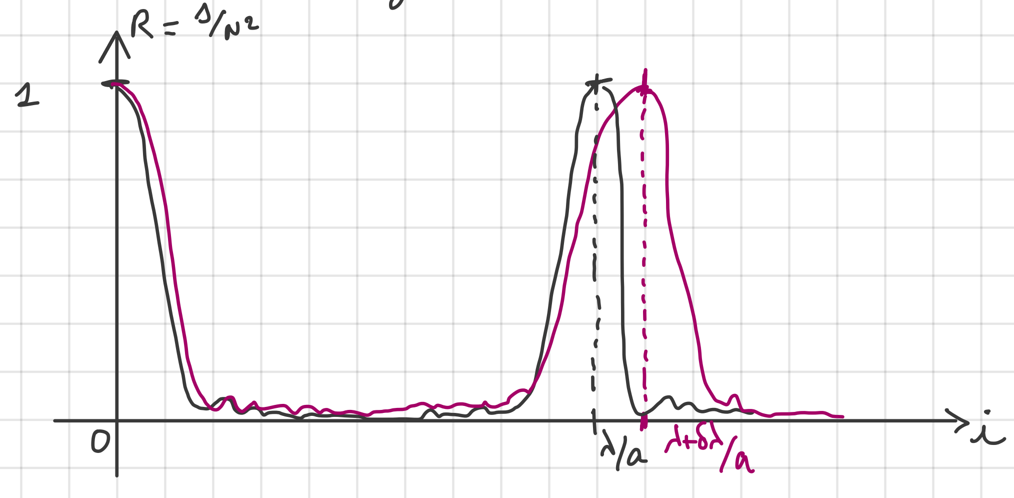
Par soucis de simplicité, posons $i' = 0$, il vient

$$\frac{\pi a}{\lambda} \sin(i_\ell) = \ell\pi$$

et considérons $i_\ell \ll 1$ (diffraction proche de l'axe optique) ; on a : $\boxed{i_\ell = \ell\ \lambda/a}$ (III.1.1)

$\Rightarrow$ si $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$ alors (III.1.1) dévoile que la direction i_ℓ des max d'intensité diffractée sera modifiée ! $\rightarrow$ mesure de $\delta i_\ell \Rightarrow$ mesure de $\delta\lambda$.

↳ Reste à estimer l'effet de $\delta\lambda$ sur la variation de direction angulaire δi_ℓ.



La condition nécessaire pour obtenir un effet "séparateur" du réseau est que les max secondaires ne doivent pas être ni trop larges ni trop intenses.

- leur largeur est en $\Delta x = \frac{\pi}{N}$ (tout comme celle du max principal)
- leur intensité est en $\frac{I_{max,sec}}{I_0} = \frac{1}{1+(N^2-1)\sin^2 x}$

$$I_{max,sec} / I_0 \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

→ $\boxed{\text{il faut un grand nombre } N \text{ de fentes dans le réseau.}}$

2. Calcul du pouvoir de résolution.

- Pour une longueur d'onde λ donnée, le déphasage entre 2 fentes successives est :

$$\boxed{\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin i' + \sin i),} \quad (\text{III}.2.1.)$$

et le max d'intensité pour $\phi_1 = 2\pi \ell$, $\ell \in \mathbb{N}$; correspond à une direction i tq :

$$\boxed{\sin i = \frac{\ell \lambda}{a} - \sin i',} \quad (\text{III}.2.2)$$

Autour de i, le premier minimum de J se trouve en $\phi_1 + \frac{2\pi}{N}$ (où N est le nbre de fentes du réseau).
La variation $\delta\phi_1 = \frac{2\pi}{N}$ correspond, pour λ donné, à une variation δi telle que (on différencie III.2.1) :

$$\delta \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} a (\cos i)\, \delta i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi a}{\lambda} \cos i\, \delta i \iff \boxed{\delta i = \frac{\lambda}{a N \cos i}}$$

- Or quand on passe, pour un ℓ fixé, de λ à $\lambda + \delta\lambda$ le déplacement δi_ℓ de i_ℓ s'obtient en différentiant (III.2.2.) autour de i_ℓ :

$$\cos i_\ell\, \delta i_\ell = \frac{\ell}{a} \delta\lambda$$

soit :

$$\boxed{\delta i_\ell = \frac{\ell}{a \cos i_\ell} \cdot \delta\lambda}$$

- On exprime le critère de Rayleigh en écrivant que l'effet de $\delta\lambda$ doit être tel que : $\boxed{\delta i_\ell > \delta i|_{i=i_\ell}}$

soit à la limite : $\boxed{\frac{\lambda}{\delta\lambda} = N\ell} \iff \delta\lambda = \frac{\lambda}{N\ell}$

Cette valeur limite du rapport $\lambda/\delta\lambda$ porte le nom de pouvoir de résolution du réseau.

3. Discussions et applications.

La finalité étant d'atteindre le plus petit $\delta\lambda$ possible cela impose de considérer un réseau tel que :

$$N \gg 1 \quad \text{et} \quad l \gg 1$$

Trois remarques s'imposent :

→ $N \gg 1$ ⇒ la largeur des fentes doit être petite pour que les dimensions du réseaux soient acceptables.

→ En fait la liberté sur l (on parle de spectre d'ordre l) n'est pas totale :

En effet, (III. 2. 2.) impose :

$$\sin i = \frac{l\lambda}{a} \qquad (i' = 0)$$

$$\text{or} \quad \sin i \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad l \cdot \frac{\lambda}{a} \leq 1 \Leftrightarrow l \leq \frac{a}{\lambda}$$

$\boxed{\text{le ratio } a/\lambda \text{ fixe les valeurs de } l \text{ possibles;}}$

$$l_{max} = \mathbb{E}\{a/\lambda\}.$$

→ le pas "a" du réseau doit vérifier une condition.

En effet pour qu'il existe au moins 1 max de I il faut que : $\sin i' + \sin i \geq \frac{\lambda}{a} \Leftrightarrow a \geq \frac{\lambda}{\sin i' + \sin i}$

Ex : $i' = 0$, $i = \frac{\pi}{3}$, $\sin i = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ⇒ $a \geq 2\lambda/\sqrt{3}$

$\boxed{\text{On retiendra que le pas du réseau doit être bien supérieur à } \lambda}$

IV. Expérience : déflecteur acousto-optique mesure de la vitesse du son dans l'eau.