Cinématique relativiste (L3)

Composition des vitesses.

Composition des vitesses pour MTRUR

Énoncé inspiré de :

* (Lumbroso, 1993, PRR, Mcgraw hill, exo 6 p21)
* (Renault, 1990, Exo de Méca, Dunod, exo 15 p128 Relati Chp11)

Savoirs et techniques

* connaître la TLRS qui transforme $(ct, \vec{r})$ en $(ct', \vec{r}\,')$.
* Savoir exprimer $\vec{X}_\perp$ et $\vec{X}_\parallel$ par rapport à une direction $\vec{e_u}$.

Savoir et techniques en jeu : Transformation de Lorentz Restreinte Spéciale (TLRS) et loi relativiste de composition des vitesses.

Exo : Loi relativiste de composition des vitesses d'une particule entre deux référentiels en MTRUR.

Antonin Siciak

Résumé

L'exercice propose de dériver la loi de composition des vitesses d'une particule entre deux référentiels en mouvement de translation rectiligne uniforme relativiste (MTRUR). Le changement de direction de la particule par rapport à celle du mouvement, dans le référentiel en mouvement, est révélé comme une conséquence relativiste.

Savoir et techniques en jeu : Transformation de Lorentz Restreinte Spéciale (TLRS).

Table des matières

1 Loi de composition

Soit 2 référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ dans les conditions de la Transformée de Lorentz Restreinte Spéciale. Ils ont leurs systèmes d'axes parallèles, et sont en MTRUR de direction $\vec{e}_u$:

$$\vec{u}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = c\beta\vec{e}_u = \vec{u} = \vec{\text{cste}}$$

Les origines des dates coïncident à $t = t' = 0$. On note $\vec{v}$ la vitesse d'une particule dans $\mathcal{R}$ et on note $\vec{v'}$ la vitesse d'une particule dans $\mathcal{R}'$. On utilise le sous-script $\perp$ pour indiquer que le vecteur est projeté orthogonalement à $\vec{e}_u$, et on utilise le sous-script $\parallel$ pour indiquer que le vecteur est projeté sur $\vec{e}_u$.

Q1. Exprimer $\vec{v'}_\perp$ et $\vec{v'}_\parallel$ en fonction de $\vec{u}$, et de $\vec{v}$ ainsi que de ces composantes parallèles et perpendiculaires à $\vec{u}$.
Comment s'écarte-t-on de la loi de composition galiléenne ? Sur quelle composante l'effet relativiste est-il le plus fort ?

2 Vérification de l'invariance de c

Q2. Montrer que : si $v_\perp^2 + v_\parallel^2 = c^2$ alors $(v'_\perp)^2 + (v'_\parallel)^2 = c^2$. Quid de la réciproque ?

Q3. Établir la relation :

$$1 - \beta_{v'}^2 = \frac{(1-\beta_v^2)(1-\beta^2)}{\left(1 - \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{\beta}}{c}\right)^2},$$

où : $\beta = u/c$ et $\beta_\mathrm{x} = \mathrm{x}/c$. Retrouver ainsi directement l'invariance de c.

3 Aspect géométrique

Q4. On désigne par θ et θ' les angles que font respectivement $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ avec $\vec{e}_u$. Exprimer $\tan(\theta')$ en fonction de u, v, et θ. Application numérique avec $\theta = \pi/3$, $u = c\sqrt{3}/2$, et $v = c$. Conclusion ?

1. Loi de composition

Soit (R) un référentiel galiléen

Soit (R') un second référentiel galiléen qui se déplace par rapport à (R) avec une vitesse constante (ds R) : $\vec{u}_{R'/R} := \vec{u} = \vec{\beta}\, c = \vec{cste}$, de direction $\vec{e_u} = \frac{\vec{u}}{u}$

Les origines O et O' des deux réf. coïncident à $t = t' = 0$ et les systèmes d'axes sont //.

Une particule matérielle M est animée de la vitesse $\vec{v}$ dans (R) et $\vec{v}\,'$ dans (R').

1. Exprimer $\vec{v}_{//}\,'$ et $\vec{v}_{\perp}\,'$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et de $\vec{v}_{//}$ et $\vec{v}_{\perp}$ respectivement, où "$\perp$" est une composante normale à $\vec{u}$ et "//" une composante parallèle à $\vec{u}$. Comment retrouve-t-on la loi de composition galiléenne des vitesses ? Sur quelle composante l'effet relativiste est le plus fort ?

La transformée de Lorentz restreinte spéciale s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{r}_{\perp}\,' = \vec{r}_{\perp} & , \quad \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - (\vec{r}\cdot\vec{e_u})\,\vec{e_u} \\ \vec{r}_{//}\,' = \Gamma(\vec{r}_{//} - \vec{\beta}\, ct) & , \quad \vec{r}_{//} = (\vec{r}\cdot\vec{e_u})\,\vec{e_u} \\ ct' = \Gamma(ct - \underbrace{\vec{\beta}\cdot\vec{r}_{//}}_{=\vec{\beta}\cdot\vec{r} \text{ car } \vec{\beta}\cdot\vec{r}_{\perp} = 0 \text{ par déf.}}) & , \quad \vec{\beta} = \beta\,\vec{e_u} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_{\perp}\,' + \vec{r}_{//}\,' = \vec{r} - (\vec{r}\cdot\vec{e_u})\vec{e_u} + \Gamma(\vec{r}\cdot\vec{e_u})\vec{e_u} - \Gamma u t\, \vec{e_u}$$

$$\boxed{\vec{r}\,' = \vec{r} + (\Gamma - 1)(\vec{r}\cdot\vec{e_u})\,\vec{e_u} - \Gamma u t\,\vec{e_u}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v} + (\Gamma-1)(\vec{v}\cdot\vec{e_u})\vec{e_u} - \Gamma u\,\vec{e_u}$$

de plus : $dt' = \Gamma\, dt\left(1 - \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{v}}{c}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{v}}{c}\right)}}$$

d'où :

$$\vec{v}' := \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{\vec{v} + (\Gamma-1)(\vec{v}\cdot\vec{e_u})\vec{e_u} - \Gamma u\,\vec{e_u}}{\Gamma\left(1-\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{v}}{c}\right)}$$

si l'on pose : $\boxed{\vec{v_{/\!/}} = (\vec{v}\cdot\vec{e_u})\vec{e_u}}$ et $\boxed{\vec{v_\perp} = \vec{v} - \vec{v_{/\!/}}}$

alors :

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v_\perp} + \vec{v_{/\!/}} + (\Gamma-1)\vec{v_{/\!/}} - \Gamma\vec{u}}{\Gamma\left(1-\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{v}}{c}\right)}$$

soit :

$$\boxed{\vec{v}' = \frac{\vec{v_\perp} + \Gamma(\vec{v_{/\!/}} - \vec{u})}{\Gamma\left(1-\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{v}}{c}\right)} = \vec{v_\perp}' + \vec{v_{/\!/}}'} \quad (1)$$

avec :

$$\boxed{\vec{v_\perp}' = \frac{\vec{v_\perp}}{\Gamma\left(1-\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{v}}{c}\right)} \quad (3)} \text{ et } \boxed{\vec{v_{/\!/}}' = \frac{\vec{v_{/\!/}} - \vec{u}}{1-\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{v}}{c}} \quad (2)}$$

Rq : on peut aussi définir $\vec{v_{/\!/}}$ en fonction de $\vec{\beta}$:

$$\vec{v_{/\!/}} = \frac{1}{\beta^2}(\vec{v}\cdot\vec{\beta})\,\vec{\beta} \quad , \quad \vec{e_u} = \frac{\vec{\beta}}{\beta}$$

Dans le cas $u \ll c$,

$(3) \Leftrightarrow \vec{v_\perp}' = \vec{v_\perp}$ et $\vec{v_{/\!/}}' = \vec{v_{/\!/}} - \vec{u}$

on retrouve bien la loi de compositº galiléenne

Comment s'en approche-t-on ?

$\hookrightarrow$

Posons $\vec{\beta_v} = \frac{\vec{v}}{c}$;

$$\boxed{\vec{v_\perp}' = \frac{\vec{v_\perp}}{\Gamma\,(1-\vec{\beta}\cdot\vec{\beta_v})} \quad \text{et} \quad \vec{v_\parallel}' = \frac{\vec{v_\parallel} - \vec{u}}{1 - \vec{\beta}\cdot\vec{\beta_v}}}$$

si : $\beta, \beta_v \ll 1$, alors : $\Gamma^{-1} = (1-\beta^2)^{1/2} = 1 - \frac{\beta^2}{2} + o(\beta^2)$

$$(1-\vec{\beta}\cdot\vec{\beta_v})^{-1} = 1 + \vec{\beta}\cdot\vec{\beta_v} + o(\vec{\beta}\cdot\vec{\beta_v})$$

d'où :
$$\boxed{\begin{cases} \vec{v_\perp}' = \vec{v_\perp}\left(1+\vec{\beta}\cdot\vec{\beta_v} - \frac{\beta^2}{2} + o(\beta^2) + o(\vec{\beta}\cdot\vec{\beta_v})\right) \\ \vec{v_\parallel}' = (\vec{v_\parallel} - \vec{u})(1+\vec{\beta}\cdot\vec{\beta_v} + o(\vec{\beta}\cdot\vec{\beta_v})) \end{cases}}$$

→ on s'aperçoit que sur $\vec{v_\perp}'$ l'écart à la relation classique apparaît via deux termes du même ordre qui peuvent être de signes opposés, si $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$, comme du même signe, si $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$. Au quel cas, l'écart à la loi classique est plus visible sur $\vec{v_\perp}'$ que sur $\vec{v_\parallel}'$.

2. Vérification de l'invariance de c

Q2 Montrer que si $V_\perp^2 + V_\parallel^2 = c^2$ alors $V_\perp'^2 + V_\parallel'^2 = c^2$

quid de la réciproque ?

On utilise :

$$(3) : \vec{V}_\perp' = \frac{\vec{V}_\perp}{\Gamma\left(1 - \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{V}}{c}\right)} \quad \text{et} \quad (2) : \vec{V}_\parallel' = \frac{\vec{V}_\parallel - \vec{u}}{1 - \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{V}}{c}}$$

$$V_\perp'^2 = \frac{V_\perp^2}{\Gamma^2\left(1 - \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{V}}{c}\right)^2} \qquad V_\parallel'^2 \propto (\vec{V}_\parallel - \vec{u})^2 = V_\parallel^2 - 2\vec{V}_\parallel\cdot\vec{u} + u^2$$

$$\Rightarrow \quad V_\perp'^2 + V_\parallel'^2 = \frac{V_\perp^2(1-\beta^2) + V_\parallel^2 - 2V_\parallel u + u^2}{\left(1 - \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{V}}{c}\right)^2}$$

$$V_\perp'^2 + V_\parallel'^2 = \frac{(c^2 - V_\parallel^2)\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + V_\parallel^2 - 2V_\parallel u + u^2}{\left(1 - \frac{uV_\parallel}{c^2}\right)^2}$$

$$= \frac{c^2 + V_\parallel^2 u^2/c^2 \cancel{- V_\parallel^2} - \cancel{u^2} + \cancel{V_\parallel^2} - 2V_\parallel u \cancel{+ u^2}}{\left(1 - \frac{uV_\parallel}{c^2}\right)^2}$$

$$= c^2 \cdot \frac{1 + \frac{V_\parallel^2 u^2}{c^4} - 2V_\parallel u/c^2}{\left(1 - \frac{uV_\parallel}{c^2}\right)^2}$$

$$= c^2 \cdot \frac{\left(1 - \frac{uV_\parallel}{c^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{uV_\parallel}{c}\right)^2}$$

$$\boxed{V_\perp'^2 + V_\parallel'^2 = c^2}$$

On montre la réciproque en utilisant

$$(3') = \vec{V}_\perp = \frac{\vec{V}_\perp'}{\Gamma\left(1 + \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{V}'}{c}\right)} \quad \text{et} \quad (2') : \vec{V}_\parallel = \frac{\vec{V}_\parallel' + \vec{u}}{\left(1 + \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{V}}{c}\right)}$$

Q3. Établir la relation :

$$1-\left(\frac{v'}{c}\right)^2 = \frac{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)\left(1-\beta^2\right)}{\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{\beta}}{c}\right)^2} \quad ; \quad \beta^2 = \frac{u^2}{c^2}$$

et retrouver l'invariance de la vitesse c dans le vide.

$$v'^2 = v_\perp'^2 + v_\parallel'^2 + 2\underbrace{\vec{v}_\parallel'\cdot\vec{v}_\perp'}_{=0} = v_\perp'^2 + v_\parallel'^2$$

or $(3) \Rightarrow v_\perp'^2 = \dfrac{v_\perp^2}{\Gamma^2\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{\beta}}{c}\right)^2}$ et $(2) \Rightarrow v_\parallel'^2 = \dfrac{\left(\vec{v}_\parallel - \vec{u}\right)^2}{\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{\beta}}{c}\right)^2}$

$$\vec{v}_\parallel = \left(\vec{v}\cdot\vec{\beta}\right)\vec{\beta}\,\frac{1}{\beta^2}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_\parallel\cdot\vec{u} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}\,\vec{\beta}\cdot\vec{u} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\cancel{\frac{u^2}{c^2}}}\,\cancel{\frac{u^2}{c^2}} = c\,\vec{v}\cdot\vec{\beta}$$

$$\left(\vec{v}_\parallel - \vec{u}\right)^2 = \frac{\left(\vec{v}\cdot\vec{\beta}\right)^2}{\beta^2} - 2c\,\vec{v}\cdot\vec{\beta} + u^2$$

$$\vec{v}_\perp = \vec{v} - \vec{v}_\parallel \Rightarrow v_\perp^2 = v^2 + \frac{\left(\vec{v}\cdot\vec{\beta}\right)^2}{\beta^2} - 2\,\frac{\left(\vec{v}\cdot\vec{\beta}\right)^2}{\beta^2}$$

$$\Rightarrow v_\perp^2 = v^2 - \frac{\left(\vec{v}\cdot\vec{\beta}\right)^2}{\beta^2}$$

$$v'^2 = \frac{v^2 - \frac{1}{\beta^2}\left(\vec{v}\cdot\vec{\beta}\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{\beta^2}\left(\vec{v}\cdot\vec{\beta}\right)^2 - 2c\left(\vec{v}\cdot\vec{\beta}\right)\Gamma^2 + \left(u\Gamma\right)^2}{\Gamma^2\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{\beta}}{c}\right)^2}$$

$$\frac{v'^2}{c^2} = \frac{\frac{v^2}{c^2} + \frac{\left(\vec{v}\cdot\vec{\beta}\right)^2}{c^2\beta^2}\left(\Gamma^2-1\right) - 2\frac{\left(\vec{v}\cdot\vec{\beta}\right)}{c}\Gamma^2 + \left(\beta\Gamma\right)^2}{\Gamma^2\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{\beta}}{c}\right)^2}$$

$$\frac{v'^2}{c^2} = \frac{\frac{v^2}{c^2} + \frac{\left(\vec{v}\cdot\vec{\beta}\right)^2}{c^2}\Gamma^2 - 2\frac{\left(\vec{v}\cdot\vec{\beta}\right)}{c}\Gamma^2 + \left(\beta\Gamma\right)^2}{\Gamma^2\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{\beta}}{c}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{v'^2}{c^2} - 1 = \frac{\frac{v^2}{c^2} + \cancel{\frac{\left(\vec{v}\cdot\vec{\beta}\right)^2}{c^2}\Gamma^2} - \cancel{2\frac{\left(\vec{v}\cdot\vec{\beta}\right)}{c}\Gamma^2} + \beta^2\Gamma^2 - \Gamma^2 + \cancel{2\Gamma^2\frac{\vec{v}\cdot\vec{\beta}}{c}} - \cancel{\frac{\left(\vec{v}\cdot\vec{\beta}\right)^2}{c^2}\Gamma^2}}{\Gamma^2\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{\beta}}{c}\right)^2}$$

$$\frac{V'^2}{c^2} - 1 = \frac{\frac{V^2}{c^2} + \Gamma^2(\beta^2 - 1)}{\Gamma^2\left(1 - \frac{\vec{V}\cdot\vec{\beta}}{c}\right)^2}$$

or : $\beta^2 - 1 = -\Gamma^{-2}$

donc : $$\left(\frac{V'}{c}\right)^2 - 1 = \frac{\left(\frac{V}{c}\right)^2 - 1}{\Gamma^2\left(1 - \frac{\vec{V}\cdot\vec{\beta}}{c}\right)^2}$$

càd : $$\boxed{1 - \left(\frac{V'}{c}\right)^2 = \frac{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}{\Gamma^2\left(1 - \frac{\vec{V}\cdot\vec{\beta}}{c}\right)^2}} \quad (9)$$

si la particule est en fait un photon

càd si $V = c$

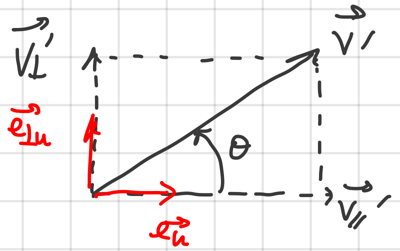
alors $\forall u$, $1 - \left(\frac{V'}{c}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow V' = \pm c$

→ l'invariance de c est vérifiée par la loi de composition des vitesses

3. Aspect géométrique

Q4. On désigne par θ et θ' les angles que font respectivement $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ avec $\vec{e_u}$.

Exprimer $\tan\theta'$ en fonction de u, v et θ.



$$\vec{V}'\cdot\vec{e_u} = \vec{V_{/\!/}}'\cdot\vec{e_u} = V'\cos\theta$$

$$\vec{V}'\cdot\vec{e_{\perp u}} = \vec{V_\perp}'\cdot\vec{e_{\perp u}} = V'\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)}_{=\sin\theta}$$

1/- $\displaystyle \vec{V_{/\!/}}'\cdot\vec{e_u} = \frac{(\vec{V}\cdot\vec{e_u}) - u}{1-\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{v}}{c}}$, d'après (2)

or $\vec{v}\cdot\vec{e_u} = v\cos\theta$; et $\vec{\beta}\cdot\vec{v} = \beta v\cos\theta$

donc :

$$v'\cos\theta' = \frac{v\cos\theta - u}{1-\frac{\beta v\cos\theta}{c}} = \boxed{\frac{v\cos\theta - u}{1-\frac{uv\cos\theta}{c^2}} = v'\cos\theta'} \quad (4)$$

2/- $\displaystyle \vec{V_\perp}'\cdot\vec{e_{\perp u}} = \frac{\vec{V_\perp}\cdot\vec{e_{\perp u}}}{\Gamma\left(1-\frac{uv\cos\theta}{c^2}\right)}$ d'après (3)

or $\vec{V_\perp}\cdot\vec{e_{\perp u}} = v\sin\theta$

$$\Rightarrow \boxed{v'\sin\theta' = \frac{v\sin\theta}{\Gamma\left(1-\frac{uv\cos\theta}{c^2}\right)}}, \quad (5)$$

d'où : $\displaystyle \frac{(5)}{(4)} \Leftrightarrow \tan\theta' = \frac{v\sin\theta}{\Gamma\left(1-\frac{uv\cos\theta}{c^2}\right)}\cdot\frac{1-\frac{uv\cos\theta}{c^2}}{v\cos\theta - u}$

$$(6) \quad \boxed{\tan\theta' = \frac{v\sin\theta}{\Gamma(v\cos\theta - u)}, \quad \Gamma = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \Gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}}$$

Si $u \ll c$ ie : $\Gamma \simeq 1$

$$\boxed{\tan\theta' = \frac{v\sin\theta}{v\cos\theta - u}} \quad (7)$$

cas non relativiste.

Si $v = c$

alors $$\boxed{\tan\theta' = \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta - \beta}\ ,\ \beta = \frac{u}{c}} \quad (8)$$

cas d'un photon

Tracer : $\theta' = f(\theta)$

pas une bonne idée.

$$\theta' = \arctan\left[\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{v\sin\theta}{v\cos\theta - u}\right][\pi]$$

$$\theta' = \arctan\left[\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{\frac{v}{c}\sin\theta}{\frac{v}{c}\cos\theta - \beta}\right][\pi]$$

$\theta' = f(\beta, \frac{v}{c}, \theta)$

regarder pour une valeur de θ comment θ' évolue avec : i) β et ii) $\frac{v}{c}$.

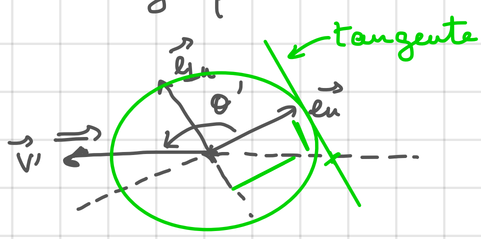
<u>Application numérique:</u> $\theta = \pi/3$, $u = \frac{\sqrt{3}}{2}c$, $v = c$

on déduit : $\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Gamma = 2$ et $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$v' = c$ par invariance cf quest° suivante

$$(4) \Rightarrow \quad \cos\theta' = \frac{1/2 - \sqrt{3}/2}{1 - \sqrt{3}/4} < 0$$

$$\sin\theta' = \frac{\sqrt{3}/2}{2(1 - \frac{\sqrt{3}}{4})} > 0$$



$\Rightarrow$ ⚠ il faut ajouter π

$$\theta' = \arctan\left(\frac{v\sin\theta}{\Gamma(v\cos\theta - u)}\right)[\pi]$$

ici $$\theta' = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})}\right) + \pi = \pi + \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)$$

soit $\underline{\theta' = 130{,}21°}$