Soit $\mathcal{O}$ un observateur de ligne d'univers $\mathcal{L}_0(\vec{u}_0, t)$

Soit $\mathcal{P}$ une particule de ligne d'univers $\mathcal{L}$, sans structure interne, de masse m, telle que sa dynamique soit entièrement décrite par une forme linéaire $\underline{p}$ définie le long de $\mathcal{L}$ telle que $\forall M \in \mathcal{L}$, $\vec{p}(M)$ tangent à $\mathcal{L}$ et orienté vers le futur, et telle que $[\underline{p}] = M.V$.

$\underline{p}$ est appellée <u>quadri-impulsion</u>.

$\vec{p}$ appellé <u>vecteur quadri-impulsion</u>.

On appelle masse m de $\mathcal{P}$ le scalaire : $m := \dfrac{\|\vec{p}\|_g}{c}$

soit $\boxed{-\vec{p}\cdot\vec{p} = m^2c^2}$ (0)

Ainsi puisque $\vec{p}$ tangent à $\mathcal{L}$: $\vec{p} = \alpha\,\vec{u}$

$$\begin{cases} -\vec{p}\cdot\vec{p} = m^2c^2 \\ \vec{u}\cdot\vec{u} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = mc$$

d'où : $\underline{p} = mc\,\underline{u}$ ou $\vec{p} = mc\,\vec{u}$

On appelle <u>énergie de $\mathcal{P}$ mesurée</u> par $\mathcal{O}$ à la date t le scalaire : $\boxed{E := -c\,\vec{p}\cdot\vec{u}_0}$ (1)

On appelle <u>impulsion de $\mathcal{P}$ mesurée</u> par $\mathcal{O}$ à la date t la forme linéaire : $P := \underline{p} \circ \perp_{u_0}$ $\leftarrow$ projecteur $\perp$ sur E_{u_0} (espace local de repos de $\mathcal{O}$)

Soit $\boxed{\vec{P} = \vec{p} + (\vec{u}_0\cdot\vec{p})\,\vec{u}_0}$ (2), le 4-vect. associé

On en déduit :

$$\vec{P}\cdot\vec{P} = \vec{p}\cdot\vec{p} + 2(\vec{u}_0\cdot\vec{p})^2 - (\vec{u}_0\cdot\vec{p})^2$$

$$\vec{P}\cdot\vec{P} = \vec{p}\cdot\vec{p} + (\vec{u}_0\cdot\vec{p})^2 = -m^2c^2 + \left(\frac{-E}{c}\right)^2$$

Soit la relation d'Einstein :

$$\boxed{\vec{P}^2 c^2 + m^2 c^4 = E^2} \quad (3)$$

Si $m = 0$ la relation d'Einstein devient

$$E^2 = \vec{P}^2 c^2$$

Soit : $\boxed{E = \|\vec{P}\|_g \, c}$ (4)

Si on introduit $\vec{V}$ la vit. rela. de $\mathcal{P}/\mathcal{O}$ (vitesse de $\mathcal{P}$ mesurée par $\mathcal{O}$), Γ le fact. de Lorentz de $\mathcal{P}$ p/r à $\mathcal{O}$ la quadrivitesse de $\mathcal{L}$ peut être reliée aux pptés de $\mathcal{L}_0$:

$$\vec{u} = \Gamma\left[(1+\vec{a_0}\cdot\vec{OM})\,\vec{u_0} + \frac{1}{c}\left(\vec{V} + \vec{\omega_0} \times_{u_0} \vec{OM}\right)\right]$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\vec{P} &:= \vec{\underline{P}} + (\vec{u_0}\cdot\vec{\underline{P}})\,\vec{u_0} \\
&= mc\,\vec{u} + mc\,(\vec{u_0}\cdot\vec{u})\,\vec{u_0} \\
&= mc\left(\Gamma[\quad] + -(1+\vec{a_0}\cdot\vec{OM})\,\vec{u_0} + \frac{1}{c}\big(\underbrace{\vec{V}\cdot\vec{u_0}}_{=0} + 0\big)\,\vec{u_0}\right) \\
&= mc\,\Gamma\,\frac{1}{c}\left(\vec{V} + \vec{\omega_0} \times_{u_0} \vec{OM}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{P} = \Gamma m\left(\vec{V} + \vec{\omega_0} \times_{u_0} \vec{OM}\right)} \quad (5)$$

et $E = -c\,\vec{\underline{P}}\cdot\vec{u_0} = -mc^2\,\vec{u}\cdot\vec{u_0} = \boxed{\Gamma mc^2(1+\vec{a_0}\cdot\vec{OM}) = E}$ (6)

On peut alors exprimer l'impulsion mesurée $\vec{P}$ en fonction de E, $\vec{V}$ et des propriétés géométrique de $\mathcal{L}_0$:

$$(6) \Rightarrow \Gamma m = \frac{E}{c^2}(1+\vec{a_0}\cdot\vec{OM})^{-1} \text{ d'où } \boxed{\vec{P} = \frac{E}{c^2}\left(\frac{\vec{V} + \vec{\omega_0} \times_{u_0} \vec{OM}}{1+\vec{a_0}\cdot\vec{OM}}\right)} \quad (7)$$

Si $\mathcal{O}$ est inertiel ou si $M(t) \in \mathcal{L}_0$ ($\mathcal{L}$ croise $\mathcal{L}_0$)

$$\boxed{\vec{P} = \Gamma m \vec{V}}\ (8), \quad \boxed{E = \Gamma mc^2}\ (9), \quad \boxed{\vec{P} = \frac{E}{c^2}\vec{V}}\ (10) \quad \Gamma = \left[1 - \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{3} V_i^2\right]^{-1/2}$$

Pour une particule de masse nulle :

$$m = 0 \quad \text{or} \quad m := \frac{\|\vec{\underline{p}}\|}{c} \Rightarrow \|\vec{\underline{p}}\| = 0$$

Soit $\vec{n}$ le 4-vect. direction de propagation du photon, par définition $\vec{n} \in E_{u_0}$ et $\vec{\ell} = \vec{u_0} + \vec{n}$ tangent à $\mathcal{L}$

donc : $\vec{\underline{p}} = \alpha(\vec{u_0} + \vec{n})$

Alors : $\vec{P} = \vec{\underline{p}} + (\vec{u_0} \cdot \vec{\underline{p}})\vec{u_0} = \alpha(\vec{u_0} + \vec{n}) - \alpha \vec{u_0} = \alpha \vec{n}$

or : $\vec{u_0} \cdot \vec{\underline{p}} = -\frac{E}{c}$ d'après (1)

donc : $\vec{P} = \vec{\underline{p}} - \frac{E}{c}\vec{u_0} = \left(\alpha - \frac{E}{c}\right)\vec{u_0} + \alpha \vec{n}$

et donc : $\vec{P} = \alpha \vec{n} \Leftrightarrow \alpha = \frac{E}{c}$

d'où : $\boxed{\vec{P} = \frac{E}{c}\vec{n}}$ (11)

De plus, $E = \frac{hc}{\lambda}$, d'où $\boxed{\vec{P} = \frac{h}{\lambda}\vec{n}}$ (12)

De plus, $\vec{n}$ s'exprime en fonction de la vitesse relative du photon p/r à $\mathcal{O}$, $\vec{V}$, comme suit :

$$\vec{n} = \frac{\vec{V} + \vec{\omega_0} \times_{u_0} \vec{OM}}{c(1 + \vec{a_0} \cdot \vec{OM})} \quad \text{(on peut montrer que)}$$

et donc on retrouve la même expression que (7) :

$$\boxed{\vec{P} = \frac{E}{c^2} \cdot \left(\frac{\vec{V} + \vec{\omega_0} \times_{u_0} \vec{OM}}{1 + \vec{a_0} \cdot \vec{OM}}\right)}$$ valable $\forall m$

$\Rightarrow$ si $\mathcal{O}$ est inertiel ou si $M(t) = \mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L}$ alors : $\boxed{\vec{P} = \frac{E}{c^2}\vec{V}}$

On retiendra donc $\forall m$, $\mathcal{O}$ inertiel ou $M(t) = \mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L}$

$$\boxed{\vec{P} = \frac{E}{c^2}\vec{V} \; , \quad \begin{array}{l} \text{si } m = 0,\ E = \frac{hc}{\lambda} \text{ et } \vec{V} = c\vec{n} \\ \text{si } m \neq 0,\ E = \Gamma m c^2 \text{ et } \Gamma = \left[1 - \frac{1}{c^2}\vec{V}^2\right]^{-1/2} \end{array}}$$

Montrer que pour une particule de masse nulle la vitesse mesurée par un observateur inertiel, au tel que la particule intersecte sa ligne d'univers, vaut en norme c.

- Soit $\vec{V}$, $\vec{P}$ et E, la vitesse, l'impulsion et l'énergie d'une particule $\mathcal{P}$ relativement à un observateur $\mathcal{O}$

Si à la date t de temps propre de $\mathcal{O}$, $\mathcal{P}$ intersecte sa ligne d'univers, au si $\mathcal{O}$ est inertiel, alors

$$\begin{cases} \vec{P} = \dfrac{E}{c^2}\,\vec{V} & (10) \\ E^2 = m^2c^4 + \vec{P}^2c^2 & (3) \end{cases}$$

- Ainsi, si $m = 0$, $(3) \Rightarrow E^2 = \vec{P}^2c^2 \Leftrightarrow \|\vec{P}\| = \dfrac{E}{c}$

La relation (10) valide $\forall m$ donne :

$$\vec{P} = \frac{E}{c^2}\,\vec{V} = \frac{\|\vec{P}\|}{c}\,\vec{V}$$

donc $\|\vec{P}\| = \|\vec{P}\| \Leftrightarrow \|\vec{V}\| = c$, cqfd