Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра информатики
Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЁТ
к лабораторной работе
на тему

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)
методом Гаусса и с помощью его модификаций

Выполнил: студент группы 353502
Згирская Дарья Денисовна
Проверил: Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2024

ЦЕЛИ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

- изучить метод Гаусса и его модификации, составить алгоритм метода и программу его реализации, получить численное решение заданной СЛАУ;
- составить алгоритм решения СЛАУ указанными методами, применимый для организации вычислений на ЭВМ;
- составить программу решения СЛАУ по разработанному алгоритму;
- выполнить задание и проверить правильность работы программы.

ЗАДАНИЕ

Вариант 5. Методом Гаусса и методом выбора главного элемента найти с точностью 0,0001 численное решение системы Ax=b, где A=k*C+D, A – исходная матрица для расчета, k – номер варианта (0-15), матрицы C, D и вектор свободных членов b задаются ниже (рис. 1).

Исходные данные:

Вектор **b**= (4,2; 4,2; 4,2 ; 4,2; 4,2)^{T},

$$C=\begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix} 2,33 & 0,81 & 0,67 & 0,92 & -0,53 \\ -0,53 & 2,33 & 0,81 & 0,67 & 0,92 \\ 0,92 & -0,53 & 2,33 & 0,81 & 0,67 \\ 0,67 & 0,92 & -0,53 & 2,33 & 0,81 \\ 0,81 & 0,67 & 0,92 & -0,53 & 2,33 \end{bmatrix}.$$

Рисунок 1 – Исходные данные

ХОД РАБОТЫ

Метод Гаусса.

Для выполнения первой части задания была написана функция gaussian_elimination, реализующая стандартный метод Гаусса (рис. 2).

```
> gaussian_elimination := proc(AugmentedMatrix)
    local i, j, k, n, m, q;
    n := RowDimension(AugmentedMatrix);
   m := ColumnDimension(AugmentedMatrix);

   for i from 1 to n do
     for j from i + 1 to n do
       q := AugmentedMatrix[j, i] / AugmentedMatrix[i, i];
       AugmentedMatrix[j, i ..m] := AugmentedMatrix[j, i ..m] - q ·AugmentedMatrix[i, i ..m];
     end do;
    end do;

    return AugmentedMatrix;
  end proc:
```

Рисунок 2 – Реализация стандартного метода Гаусса

Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

Далее была реализована функция, использующая метод Гаусса с главным элементом по столбцу (рис. 3).

```
> gaussian_main_column_el := proc(AugmentedMatrix)
    local n, m, i, j, k, pivot, q, temp;

    n := RowDimension(AugmentedMatrix);
    m := ColumnDimension(AugmentedMatrix);

   for k from 1 to n−1 do
     pivot := k;
     for i from k + 1 to n do
       if abs(AugmentedMatrix[i, k]) > abs(AugmentedMatrix[pivot, k]) then
         pivot := i;
       end if;
     end do;

     if pivot ≠ k then
        temp := AugmentedMatrix[k, 1 ..m];
        AugmentedMatrix[k, 1 ..m] := AugmentedMatrix[pivot, 1 ..m];
        AugmentedMatrix[pivot, 1 ..m] := temp;
     end if;

     for i from k + 1 to n do
        q := AugmentedMatrix[i, k] / AugmentedMatrix[k, k];
        AugmentedMatrix[i, k ..m] := AugmentedMatrix[i, k ..m] − q · AugmentedMatrix[k, k ..m];
     end do;
   end do;

    return AugmentedMatrix;
  end proc:
```

Рисунок 3 – Реализайия метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцу

Метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице.

Для завершения работы остается написать функцию, использующую метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице (рис. 4).

```
> gaussian_main_full_el := proc(AugmentedMatrix)
    local n, m, i, j, k, pivot_row, pivot_col, q, temp, max_val;

    n := RowDimension(AugmentedMatrix);
    m := ColumnDimension(AugmentedMatrix);

    for k to n - 1 do
      max_val := 0;
      pivot_row := k;
      pivot_col := k;

      for i from k to n do
        for j from k to n do
          if abs(AugmentedMatrix[i, j]) > max_val then
            max_val := abs(AugmentedMatrix[i, j]);
            pivot_row := i;
            pivot_col := j;
          end if;
        end do;
      end do;

      if pivot_row ≠ k then
        temp := AugmentedMatrix[k, 1 .. m];
        AugmentedMatrix[k, 1 .. m] := AugmentedMatrix[pivot_row, 1 .. m];
        AugmentedMatrix[pivot_row, 1 .. m] := temp;
      end if;

      if pivot_col ≠ k then
        for i from 1 to n do
          temp := AugmentedMatrix[i, k];
          AugmentedMatrix[i, k] := AugmentedMatrix[i, pivot_col];
          AugmentedMatrix[i, pivot_col] := temp;
        end do;
      end if;

      for i from k + 1 to n do
        q := AugmentedMatrix[i, k] / AugmentedMatrix[k, k];
        AugmentedMatrix[i, k .. m] := AugmentedMatrix[i, k .. m] - q * AugmentedMatrix[k, k .. m];
      end do;
    end do;

    return AugmentedMatrix;
  end proc:
```

Рисунок 4 – Реализация метода Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице

ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты будут получены для системы уравнений, коэффициенты левой части которого задает матрица A, а значения правой части – матрица b. Матрица A, полученная в результате вычисления A=3C+D (рис. 5).

$$A := \begin{bmatrix} 3.33000000000000 & 0.810000000000000 & 1.67000000000000 & 0.920000000000000 & -0.530000000000000 \\ -0.530000000000000 & 3.33000000000000 & 0.810000000000000 & 1.67000000000000 & 0.920000000000000 \\ 1.92000000000000 & -0.530000000000000 & 3.33000000000000 & 0.810000000000000 & 1.67000000000000 \\ 0.670000000000000 & 1.92000000000000 & -0.530000000000000 & 3.33000000000000 & 0.810000000000000 \\ 0.810000000000000 & 0.670000000000000 & 1.92000000000000 & -0.530000000000000 & 3.33000000000000 \end{bmatrix}$$

Рисунок 5 – Матрица A

Матрица b, заданная в условии (рис. 6).

$$b := \begin{bmatrix} 4.2 \\ 4.2 \\ 4.2 \\ 4.2 \\ 4.2 \end{bmatrix}$$

Рисунок 6 – Матрица b

Написанные в ходе выполнения работы функции используются на расширенных матрицах. Расширенная матрица, составленная из матрицы A и матрицы b (рис. 7).

$$AugmentedMatrixA := \begin{bmatrix} 3.33000000000000 & 0.810000000000000 & 1.67000000000000 & 0.920000000000000 & -0.530000000000000 & 4.2 \\ -0.530000000000000 & 3.33000000000000 & 0.810000000000000 & 1.67000000000000 & 0.920000000000000 & 4.2 \\ 1.92000000000000 & -0.530000000000000 & 3.33000000000000 & 0.810000000000000 & 1.67000000000000 & 4.2 \\ 0.670000000000000 & 1.92000000000000 & -0.530000000000000 & 3.33000000000000 & 0.810000000000000 & 4.2 \\ 0.810000000000000 & 0.670000000000000 & 1.92000000000000 & -0.530000000000000 & 3.33000000000000 & 4.2 \end{bmatrix}$$

Рисунок 7 – Расширенная матрица

Результы, полученные при тестировании всех трех написанных функций приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты применения методов

Стандартный метод Гаусса	Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу	Метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице
$x1 := \begin{bmatrix} 0.817170141605852 \\ 0.828808970382211 \\ 0.432919085461906 \\ 0.510931680106577 \\ 0.727441237691533 \end{bmatrix}$	$x2 := \begin{bmatrix} 0.817170141605852 \\ 0.828808970382211 \\ 0.432919085461906 \\ 0.510931680106577 \\ 0.727441237691533 \end{bmatrix}$	$x3 := \begin{bmatrix} 0.828808970382211 \\ 0.817170141605852 \\ 0.727441237691533 \\ 0.432919085461907 \\ 0.510931680106577 \end{bmatrix}$
$x1 := \begin{bmatrix} 0.81717 \\ 0.82881 \\ 0.43292 \\ 0.51093 \\ 0.72744 \end{bmatrix}$	$x2 := \begin{bmatrix} 0.81717 \\ 0.82881 \\ 0.43292 \\ 0.51093 \\ 0.72744 \end{bmatrix}$	$x3 := \begin{bmatrix} 0.82881 \\ 0.81717 \\ 0.72744 \\ 0.43292 \\ 0.51093 \end{bmatrix}$

ОЦЕНКА

Теперь для векторов решений, полученных в каждом случае, вычислим вектор невязки: v_nev = b – A*x и получим следующие результаты (рис.8).

$$v\_nev1 := \begin{bmatrix} -8.88178419700125 \times 10^{-16} \\ 0. \\ 0. \\ 8.88178419700125 \times 10^{-16} \\ -8.88178419700125 \times 10^{-16} \end{bmatrix}$$

$$v\_nev2 := \begin{bmatrix} -8.88178419700125 \times 10^{-16} \\ 0. \\ 0. \\ 8.88178419700125 \times 10^{-16} \\ -8.88178419700125 \times 10^{-16} \end{bmatrix}$$

$$v\_new3 := \begin{bmatrix} -8.88178419700125 \times 10^{-16} \\ 0. \\ 0. \\ 8.88178419700125 \times 10^{-16} \\ -8.88178419700125 \times 10^{-16} \end{bmatrix}$$

Рисунок 8 – Векторы невязки

Теперь найдем абсолютную погрешность решения системы уравнений с учетом того, что погрешность вводных даных составляет 0,3% (рис. 9).

#Вычисление абсолютной погрешности при погрешности вводных данных = 0,03%

$b1 := b - \langle 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03 \rangle;$

$$b1 := \begin{bmatrix} 4.17000000000000 \\ 4.17000000000000 \\ 4.17000000000000 \\ 4.17000000000000 \\ 4.17000000000000 \end{bmatrix}$$

$b2 := b + \langle 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03 \rangle;$

$$b2 := \begin{bmatrix} 4.23000000000000 \\ 4.23000000000000 \\ 4.23000000000000 \\ 4.23000000000000 \\ 4.23000000000000 \end{bmatrix}$$

$absolytnaya\_pogreshnost := \dfrac{\mathrm{abs}(b1 - b2) + \mathrm{abs}(b - b1) + \mathrm{abs}(b - b2)}{3};$

$$absolytnaya\_pogreshnost := \begin{bmatrix} 0.0400000000000003 \\ 0.0400000000000003 \\ 0.0400000000000003 \\ 0.0400000000000003 \\ 0.0400000000000003 \end{bmatrix}$$

Рисунок 9 – Абсолютная погрешность

ВЫВОДЫ

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы был применён метод Гаусса, метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу (схема частичного выбора) и метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице (схема полного выбора) для решения системы линейных уравнений, рассмотрены решения СЛАУ методом Гаусса на конкретном примере, составлены алгоритмы и реализации соответствующих программ в Maple для решения поставленной задачи, также проведена оценка и проверена правильность работы программы.

Итак, метод Гаусса применим к любой системе линейных уравнений, он идеально подходит для решения систем, содержащих больше трех линейных уравнений. Метод Гаусса решения СЛАУ с числовыми коэффициентами в силу простоты и однотипности выполняемых операций пригоден для счета на электронно-вычислительных машинах.

Достоинства метода:

1. Менее трудоёмкий по сравнению с другими методами.
2. Позволяет однозначно установить, совместна система или нет, и если совместна, найти её решение.
3. Позволяет найти максимальное число линейно независимых уравнений – ранг матрицы системы.

Существенным недостатком этого метода является невозможность сформулировать условия совместности и определенности системы в зависимости от значений коэффициентов и свободных членов. С другой стороны, даже в случае определенной системы этот метод не позволяет найти общие формулы, выражающие решение системы через ее коэффициенты и свободные члены, которые необходимо иметь при теоретических исследованиях.