> *#Лабораторная работа 2*

> *#Группа 353502, Згирская Дарья*

> *#Вариант 9*

>

> *restart*;

> *#Задание* **1**

> *#1.1*

> $f(x) := piecewise\left(-\mathrm{Pi} \le x < 0, -\frac{\mathrm{Pi}}{4} - \frac{x}{2},\ 0 \le x < \mathrm{Pi}, -\frac{\mathrm{Pi}}{4}\right);$

$$f := x \mapsto \begin{cases} -\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} & -\pi \le x < 0 \\ -\frac{\pi}{4} & 0 \le x < \pi \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

> *#Вычисление коэффициентов Фурье*

> $a0 := \frac{1}{\mathrm{Pi}} \cdot int(f(x), x = -\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi});$

$$a0 := -\frac{\pi}{4} \qquad \textbf{(2)}$$

> $an := \frac{1}{\mathrm{Pi}} \cdot int(f(x) \cdot \cos(n \cdot x), x = -\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi}):$

> $an := simplify(an);$

$$an := \frac{\cos(n\,\pi) - 1}{2\,\pi\,n^2} \qquad \textbf{(3)}$$

> $bn := \frac{1}{\mathrm{Pi}} \cdot int(f(x) \cdot \sin(n \cdot x), x = -\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi}):$

>

> *#Ряд суммы для данной функции (первые 10 членов, т.к. n=infinity ноутбук не посчитает)*

> $Sn1 := \frac{a0}{2} + sum(an \cdot \cos(n \cdot x) + bn \cdot \sin(n \cdot x), n = 1..10);$

$$Sn1 := -\frac{\pi}{8} - \frac{\cos(x)}{\pi} - \frac{\sin(x)}{2} + \frac{\sin(2\,x)}{4} - \frac{\cos(3\,x)}{9\,\pi} - \frac{\sin(3\,x)}{6} + \frac{\sin(4\,x)}{8} - \frac{\cos(5\,x)}{25\,\pi} - \frac{\sin(5\,x)}{10} + \frac{\sin(6\,x)}{12} - \frac{\cos(7\,x)}{49\,\pi} - \frac{\sin(7\,x)}{14} + \frac{\sin(8\,x)}{16} - \frac{\cos(9\,x)}{81\,\pi} - \frac{\sin(9\,x)}{18} + \frac{\sin(10\,x)}{20} \qquad \textbf{(4)}$$

> *#1.2*

> *#Процедура разложения функции в ряд Фурье*

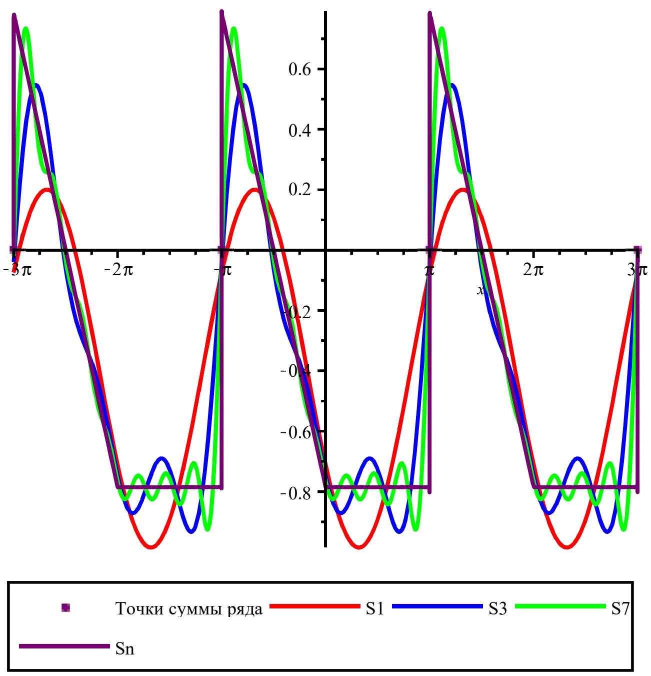
> *fourier_series* :=**proc**(*f*, *x*, *x1*, *x2*, *n*)
>   **local** *k*, *l*, *a*, *b*, *s*;

```
    l := (x2-x1)/2;
    a[0] := int(f, x = x1 .. x2)/l;
    a[k] := int(f*cos(k*Pi*x/l), x = x1 .. x2)/l;
    b[k] := int(f*sin(k*Pi*x/l), x = x1 .. x2)/l;
    s := a[0]/2 + sum(a[k]*cos(k*Pi*x/l) + b[k]*sin(k*Pi*x/l), k = 1 .. n);
  end:
> #Процедура построения графика тригонометрического ряда Фурье
> fourier_graphic := proc(f, x, x1, x2, n, t1, t2, my_color)
    local k, l, a, b, Sn;

    Sn := fourier_series(f, x, x1, x2, n);
    return plot(Sn, x = t1 .. t2, color = my_color);
  end:
> #Первые 10 членов ряда суммы (совпадают с S1n)
> Sn2 := fourier_series(f(x), x, -Pi, Pi, 10);
```

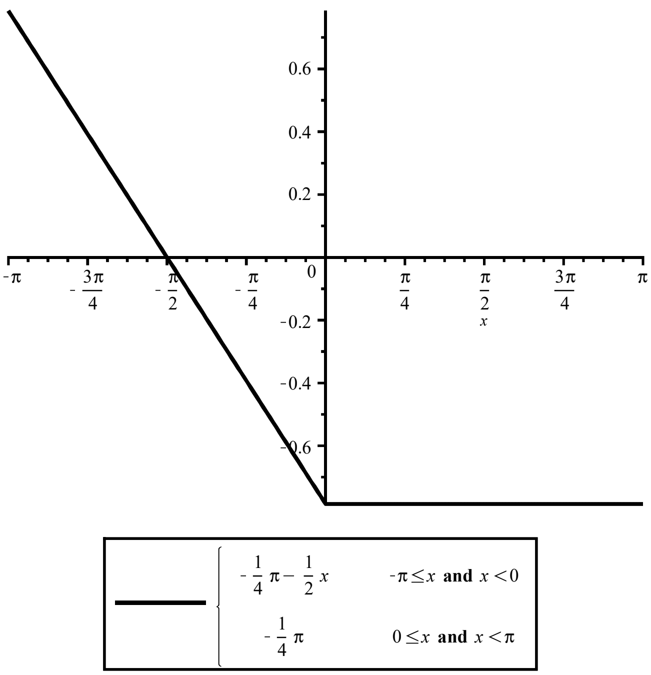
$$Sn2 := -\frac{\pi}{8} - \frac{\cos(x)}{\pi} - \frac{\sin(x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{\cos(3x)}{9\pi} - \frac{\sin(3x)}{6} + \frac{\sin(4x)}{8} - \frac{\cos(5x)}{25\pi} - \frac{\sin(5x)}{10} + \frac{\sin(6x)}{12} - \frac{\cos(7x)}{49\pi} - \frac{\sin(7x)}{14} + \frac{\sin(8x)}{16} - \frac{\cos(9x)}{81\pi} - \frac{\sin(9x)}{18} + \frac{\sin(10x)}{20} \qquad \textbf{(5)}$$

```
> #1.3
> #Графики частичных сумм S1(x), S3(x), S7(x) и суммы S(x) (при n=10000 в силу
      вычислительных ограничений ноутбука, без них - n=infinity)
> S1 := fourier_graphic(f(x), x, -Pi, Pi, 1, -3*Pi, 3*Pi, red) :
> S3 := fourier_graphic(f(x), x, -Pi, Pi, 3, -3*Pi, 3*Pi, blue) :
> S7 := fourier_graphic(f(x), x, -Pi, Pi, 7, -3*Pi, 3*Pi, green) :
> Sx := fourier_graphic(f(x), x, -Pi, Pi, 10000, -3*Pi, 3*Pi, purple) :
> points := [[-3* Pi, 0], [-Pi, 0], [Pi, 0], [3* Pi, 0]] :
> p := plots[pointplot](points, symbol = solidcircle, color = purple, symbolsize = 10) :
>
> plots[display]([S1, S3, S7, Sx, p], legend = ["S1", "S3", "S7", "Sn", "Точки суммы ряда"]);
```



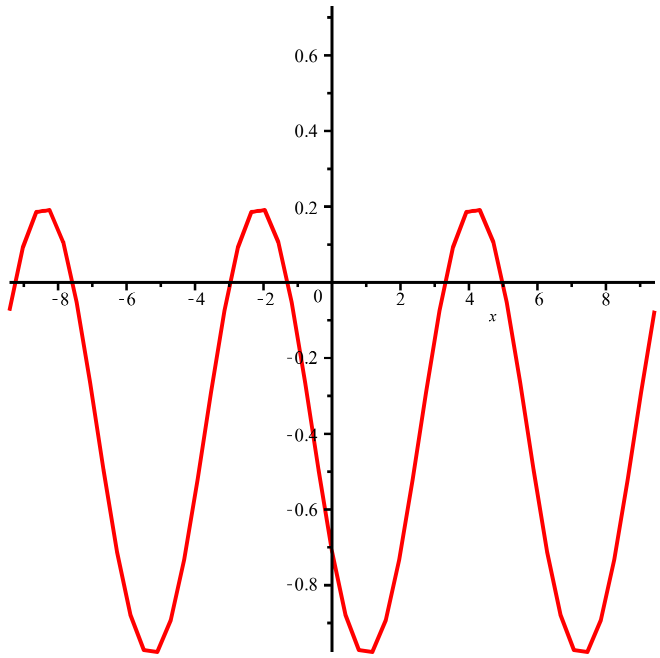
> *#График порождающей функции на главном периоде*

> $plot(f(x), x = -\mathrm{Pi}\,..\mathrm{Pi}, color = black, legend = [f(x)]);$



> ***#1.4***

> $plots[animate]\left(\frac{a0}{2} + sum(an \cdot \cos(n \cdot x) + bn \cdot \sin(n \cdot x), n = 1\,..k), x = -3 \cdot \mathrm{Pi}\,..3 \cdot \mathrm{Pi}, k = 1\,..10, frames = 10\right);$



> restart;

>

> **#Задание 2**

> $a := \frac{3}{4} : b := 1 : c := -3 : x1 := 2 : x2 := 4 :$

> $f := piecewise(0 < x < x1, a \cdot x + b, x1 \le x \le x2, c);$

$$f := \begin{cases} \frac{3\,x}{4} + 1 & 0 < x < 2 \\ -3 & 2 \le x \le 4 \end{cases} \qquad (6)$$

> **#2.1**

> #Вычисление коэффициентов Фурье

> $l := \frac{x2 - 0}{2};$

$$l := 2 \qquad (7)$$

> $a0 := \frac{1}{l}\,(int(f, x = 0\,..x1) + int(f, x = x1\,..x2));$

$$a0 := -\frac{5}{4} \qquad (8)$$

> $an := \frac{1}{l}\left(int\left(f \cdot \cos\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot n \cdot x}{l}\right), x = 0\,..x1\right) + int\left(f \cdot \cos\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot n \cdot x}{l}\right), x = x1\,..x2\right)\right) :$

> $an := simplify(an);$

$$an := \frac{(-12\,\pi\,n \sin(\pi\,n) + 3)\cos(\pi\,n) + 11\,\pi\,n \sin(\pi\,n) - 3}{2\,\pi^2\,n^2} \qquad (9)$$

> $bn := \frac{1}{l}\left(int\left(f \cdot \sin\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot n \cdot x}{l}\right), x = 0\,..x1\right) + int\left(f \cdot \sin\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot n \cdot x}{l}\right), x = x1\,..x2\right)\right) :$

> $bn := simplify(bn);$

$$bn := \frac{3\sin(\pi n) + 12\pi n\cos(\pi n)^2 - 11\pi\cos(\pi n)\,n - 4\pi n}{2\pi^2 n^2} \quad (10)$$

> *#2.2*

> *#Модификация процедуры разложения функции в ряд Фурье (для функций, имеющих точку разрыва первого рода)*

> $fourier\_series := \mathbf{proc}(f, x, x0, x1, x2, n)$

local $k, l, a, b, s;$

$l := (x2 - x0)/2;$

$a[0] := \dfrac{int(f, x = x0..x1) + int(f, x = x1..x2)}{l};$

$a[k] := \dfrac{int\left(f\cdot\cos\left(\frac{k\cdot \mathrm{Pi}\cdot x}{l}\right), x = x0..x1\right) + int\left(f\cdot\cos\left(\frac{k\cdot \mathrm{Pi}\cdot x}{l}\right), x = x1..x2\right)}{l};$

$b[k] := \dfrac{int\left(f\cdot\sin\left(\frac{k\cdot \mathrm{Pi}\cdot x}{l}\right), x = x0..x1\right) + int\left(f\cdot\sin\left(\frac{k\cdot \mathrm{Pi}\cdot x}{l}\right), x = x1..x2\right)}{l};$

$s := a[0]/2 + sum\left(a[k]\cdot\cos\left(\frac{k\cdot \mathrm{Pi}\cdot x}{l}\right) + b[k]\cdot\sin\left(\frac{k\cdot \mathrm{Pi}\cdot x}{l}\right), k = 1..n\right);$

end:

> *#Модификация процедуры построения графика такой функции*

> $fourier\_graphic := \mathbf{proc}(f, x, x0, x1, x2, n, t1, t2, my\_color)$

local $k, l, a, b, Sn;$

$Sn := fourier\_series(f, x, x0, x1, x2, n);$

return $plot(Sn, x = t1..t2, color = my\_color);$

end:

> *#2.3*

> *#Графики частичных сумм ряда S1, S3, S7 и Sx (при n =10000)*

> $S1 := fourier\_graphic(f, x, 0, x1, x2, 1, -2\cdot x2, 2\cdot x2, red):$

> $S3 := fourier\_graphic(f, x, 0, x1, x2, 3, -2\cdot x2, 2\cdot x2, blue):$

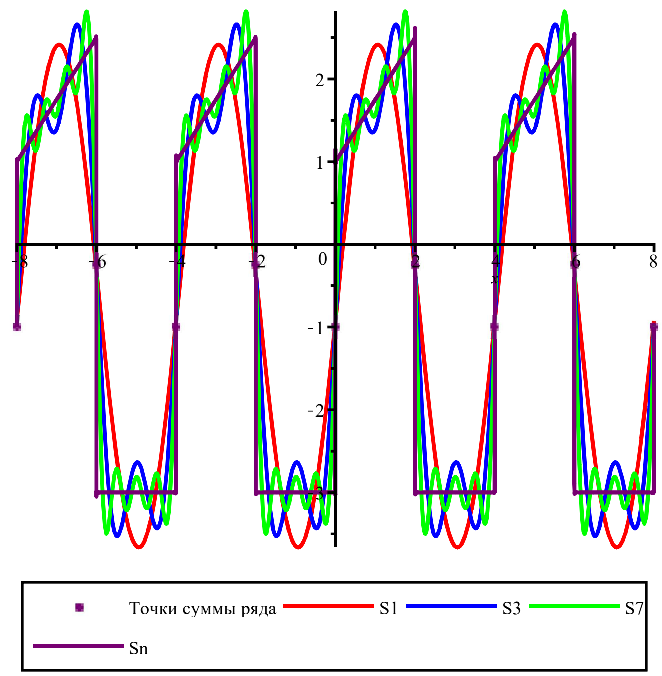
> $S7 := fourier\_graphic(f, x, 0, x1, x2, 7, -2\cdot x2, 2\cdot x2, green):$

> $Sx := fourier\_graphic(f, x, 0, x1, x2, 10000, -2\cdot x2, 2\cdot x2, purple):$

> $points := \left[[-8, -1], \left[-6, -\frac{1}{4}\right], [-4, -1], \left[-2, -\frac{1}{4}\right], [0, -1], \left[2, -\frac{1}{4}\right], [4, -1], \left[6, -\frac{1}{4}\right], [8, -1]\right]:$

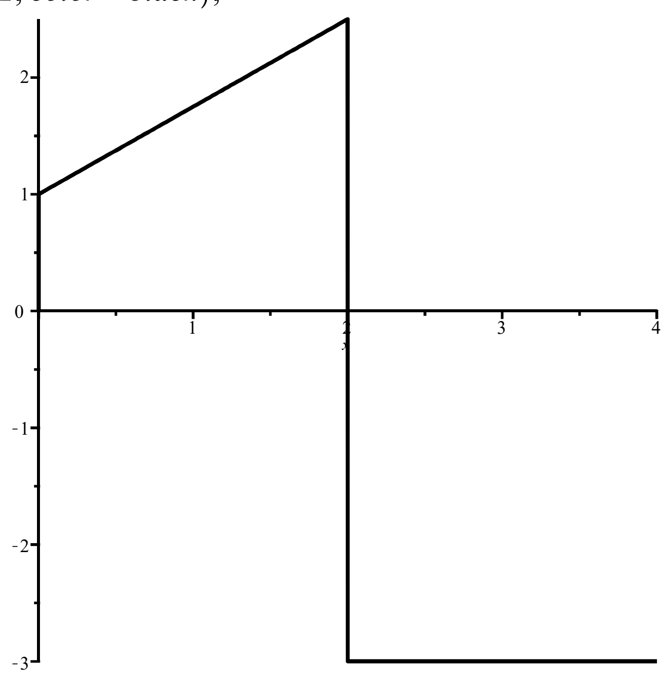
> $p := plots[pointplot](points, symbol = solidcircle, color = purple, symbolsize = 10):$

> $plots[display]([S1, S3, S7, Sx, p], legend = [$"S1", "S3", "S7", "Sn", "Точки суммы ряда"$]);$



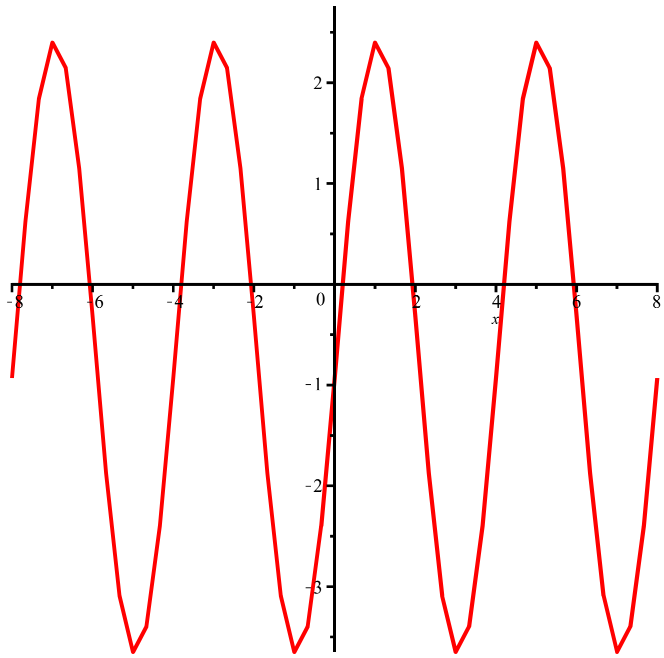
> *#Порождающая функция в главном периоде*

> $plot(f(x), x = 0\,..x2, color = black);$



> ***#2.4***

> $plots[animate]\left(\frac{a0}{2} + sum\left(an\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{l}\right) + bn\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{l}\right), n = 1\,..k\right), x = -2\cdot x2\,..2\cdot x2, k = 1\,..10, frames = 10\right)$



> *restart*;

>

> ***#Задание 3***

> $f(x) := piecewise\left(0 \le x < 4, -\frac{1}{2}\cdot x^2 + 2\cdot x - 2, 4 \le x \le 6, x - 6\right);$

$$f := x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2}\cdot x^2 + 2\cdot x - 2 & 0 \le x < 4 \\ x - 6 & 4 \le x \le 6 \end{cases} \qquad (11)$$

>

> ***#3.1 - на полном периоде***

> $f1 := piecewise\left(0 \le x < 4, -\frac{1}{2}\cdot x^2 + 2\cdot x - 2, 4 \le x \le 6, x - 6\right);$

$$f1 := \begin{cases} -\frac{1}{2}\, x^2 + 2\, x - 2 & 0 \le x < 4 \\ x - 6 & 4 \le x \le 6 \end{cases} \qquad (12)$$

> $l1 := 3;$

$$l1 := 3 \qquad (13)$$

> *#Вычисление коэффициентов Фурье*

> $a10 := \frac{1}{l1}\cdot(int(f1, x = 0..4) + int(f1, x = 4..6));$

$$a10 := -\frac{14}{9} \qquad (14)$$

> $a1n := \frac{1}{l1}\cdot\left(int\left(f1\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{l1}\right), x = 0..4\right) + int\left(f1\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{l1}\right), x = 4..6\right)\right);$

$$a1n := -\frac{2\pi^2 n^2 \sin\left(\frac{4\pi n}{3}\right) + 6\pi n \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) + 6\pi n - 9\sin\left(\frac{4\pi n}{3}\right)}{\pi^3 n^3} + \frac{2\pi n \sin\left(\frac{4\pi n}{3}\right) + 3\cos(2\pi n) - 3\cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right)}{\pi^2 n^2} \tag{15}$$

> $b1n := \frac{1}{l1} \cdot \left(int\left(f1 \cdot \sin\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot n \cdot x}{l1} \right), x = 0..4 \right) + int\left(f1 \cdot \sin\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot n \cdot x}{l1} \right), x = 4..6 \right) \right);$

$$b1n := \frac{2\pi^2 n^2 \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) - 2\pi^2 n^2 - 6\pi n \sin\left(\frac{4\pi n}{3}\right) - 9\cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) + 9}{\pi^3 n^3} + \frac{-2\pi n \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) + 3\sin(2\pi n) - 3\sin\left(\frac{4\pi n}{3}\right)}{\pi^2 n^2} \tag{16}$$

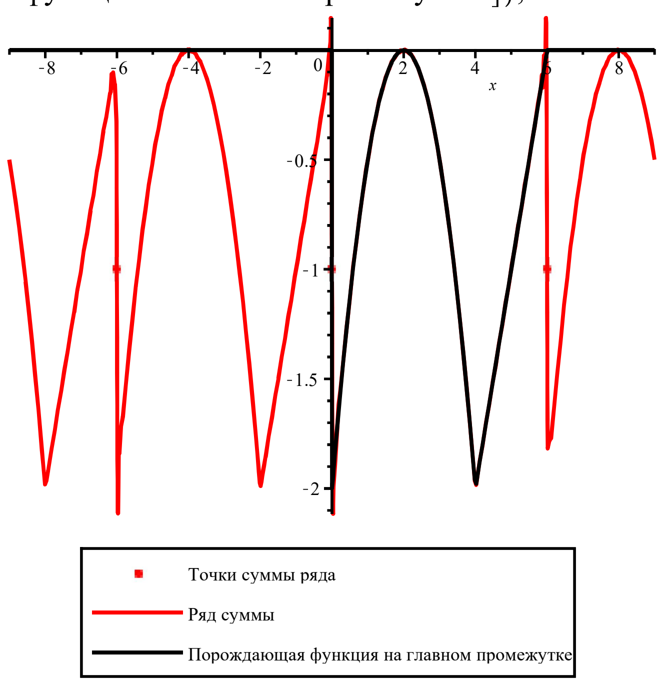
> $P1 := plot\left(\frac{a10}{2} + sum\left(a1n \cdot \cos\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot n \cdot x}{l1} \right) + b1n \cdot \sin\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot n \cdot x}{l1} \right), n = 1..100 \right), x = -9..9, color = red \right):$

> $points := [[-6, -1], [0, -1], [6, -1]]:$

> $p := plots[pointplot](points, symbol = solidcircle, color = red, symbolsize = 10):$

> $F1 := plot(f1, x = -9..9, color = black):$

> $plots[display]([P1, p, F1], legend = [$"Ряд суммы", "Точки суммы ряда", "Порождающая функция на главном промежутке"$]);$



>

> *#3.2 - на полупериоде, четная*

> $f2 := piecewise\left(\operatorname{abs}(x) < 4, -\frac{1}{2}\cdot x^2 + 2\cdot\operatorname{abs}(x) - 2, 4 \le \operatorname{abs}(x) \le 6, \operatorname{abs}(x) - 6\right);$

$$f2 := \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 2\,|x| - 2 & |x| < 4 \\ |x| - 6 & 4 \le |x| \le 6 \end{cases} \tag{17}$$

> $l2 := 6;$

$$l2 := 6 \tag{18}$$

> *#Вычисление коэффициентов Фурье*

> $a20 := \frac{2}{l2}\cdot(int(f2, x=0..4) + int(f2, x=4..6));$

$$a20 := -\frac{14}{9} \tag{19}$$

> $a2n := \frac{2}{l2}\cdot\left(int\left(f2\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{l2}\right), x=0..4\right) + int\left(f2\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{l2}\right), x=4..6\right)\right);$

$$a2n := -\frac{4\left(\pi^2 n^2 \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 6\pi n\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 6\pi n - 18\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)}{\pi^3 n^3} + \frac{4\left(\pi n\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 3\cos(\pi n)\right)}{\pi^2 n^2} \tag{20}$$

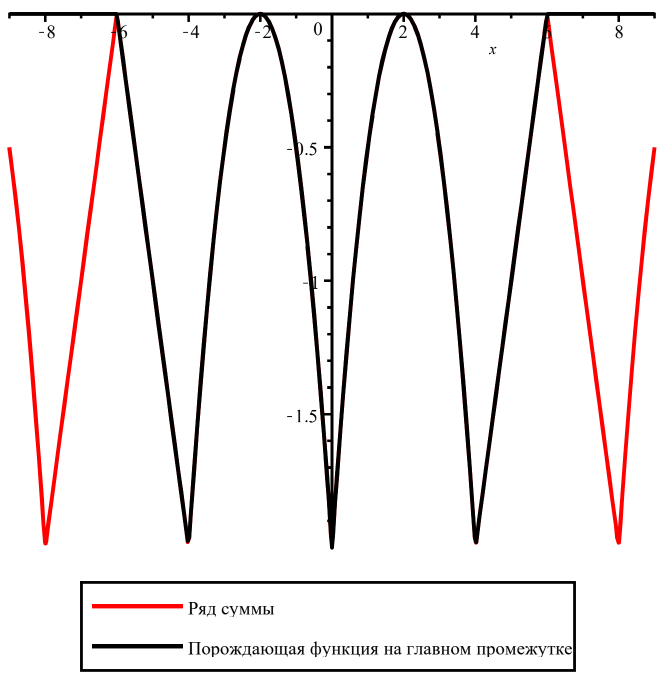
> $b2n := 0;$

$$b2n := 0 \tag{21}$$

> $P2 := plot\left(\frac{a20}{2} + sum\left(a2n\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{l2}\right), n=1..100\right), x=-9..9, color=red\right):$

> $F2 := plot(f2, x=-9..9, color=black):$

> *plots[display]*([*P2*, *F2*], *legend* = ["Ряд суммы",
"Порождающая функция на главном промежутке"]);



> **_#3.3 - на полупериоде, нечетная_**

> $f3 := piecewise\left(\text{abs}(x) < 4, \text{signum}(x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot x^2 + 2\cdot\text{abs}(x) - 2\right), 4 \le \text{abs}(x) \le 6, \text{signum}(x)\cdot(\text{abs}(x) - 6)\right);$

$$f3 := \begin{cases} \text{signum}(x)\left(-\frac{x^2}{2} + 2|x| - 2\right) & |x| < 4 \\ \text{signum}(x)\,(|x| - 6) & 4 \le |x| \le 6 \end{cases} \quad \textbf{(22)}$$

> $l3 := 6;$

$$l3 := 6 \quad \textbf{(23)}$$

> *#Вычисление коэффициентов Фурье*

> $a30 := 0;$

$$a30 := 0 \quad \textbf{(24)}$$

> $a3n := 0;$

$$a3n := 0 \quad \textbf{(25)}$$

> $b3n := \frac{2}{l3}\cdot\left(int\left(f3\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}\cdot n\cdot x}{l3}\right), x = 0..4\right) + int\left(f3\cdot\sin\left(\frac{\text{Pi}\cdot n\cdot x}{l3}\right), x = 4..6\right)\right);$

$$b3n := -\frac{4\left(-\pi^2 n^2 \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \pi^2 n^2 + 6\pi n \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 18\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - 18\right)}{\pi^3 n^3} - \frac{4\left(\pi n \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + 3\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - 3\sin(\pi n)\right)}{\pi^2 n^2} \quad \textbf{(26)}$$

>

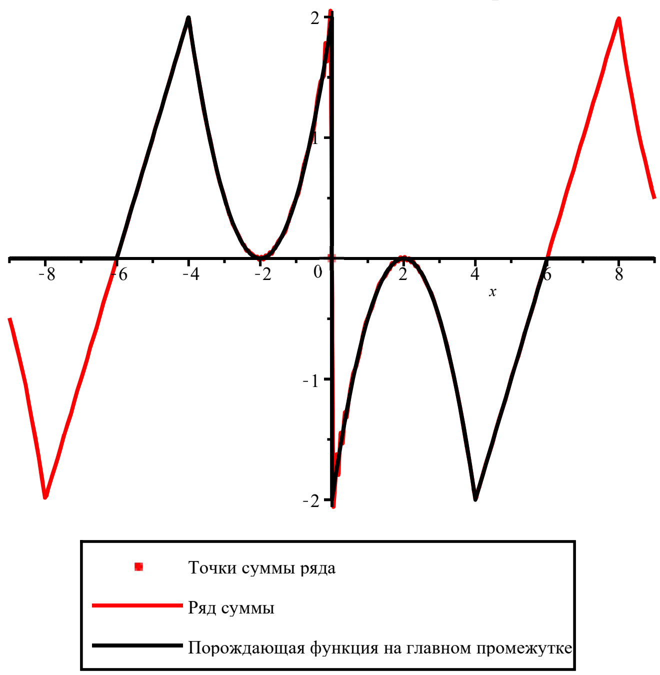
> $P3 := plot\left(sum\left(b3n \cdot \sin\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot n \cdot x}{l3}\right), n = 1..100\right), x = -9..9, color = red\right):$

> $points := [0, 0]:$

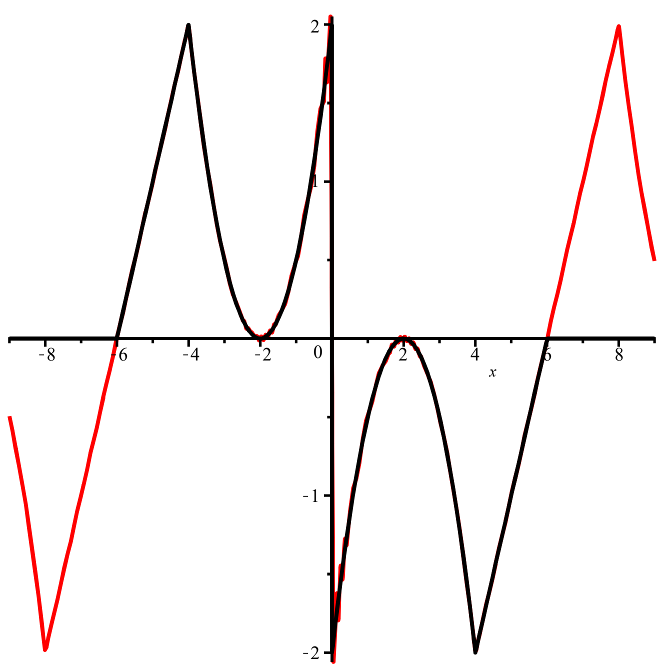
> $p := plots[pointplot](points, symbol = solidcircle, color = red, symbolsize = 10):$

> $F3 := plot(f3, x = -9..9, color = black):$

> $plots[display]([P3, p, F3], legend = [$"Ряд суммы", "Точки суммы ряда", "Порождающая функция на главном промежутке"$]);$



>



> $restart;$

>

> *#Задание 4*

>

> *#Процедура нахождения частичной суммы ряда порядка N (по многочленам Лежандра)*

```
> legendre_series := proc(f, x, N)
  local n, cn, Pn, sum, P;

  sum := 0;

  P := proc(x, n)
     if n = 0 then return 1;
     elif n = 1 then return x;
     else
        return (2*n-1)/n * x*P(x, n-1) - (n-1)/n * P(x, n-2);
     end if;
  end proc;

  for n from 0 to N do
        cn := int(f * P(x, n), x = -1..1) / int(P(x, n)*P(x, n), x = -1..1);

       Pn := P(x, n);

        sum := sum + cn*Pn;
     end do;

    return sum;
  end proc:
```

>

> *#Процедура построения графика частичной суммы порядка N (по многочленам Лежандра)*

```
> legendre_graphic := proc (f, x, N, mycolor)
  local sum, graphic;

  sum := legendre_series(f, x, N);
  graphic := plot(sum, x = -1..1, color = mycolor);
  return graphic;
  end proc:
```

>

> *#Процедура нахождения частичной суммы ряда порядка N (по многочленам Чебышева)*

```
> chebyshev_series := proc(f, x, N)
     local n, cn, Tn, sum, T;

    sum := 0;

    T := proc(n, x)
       if n = 0 then
```

```
            return 1;
        elif n = 1 then
            return x;
        else
            return 2·x·T(n - 1, x) - T(n - 2, x);
        end if;
    end proc;

    for n from 0 to N do
```

$$cn := \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f\cdot T(n,x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x;$$

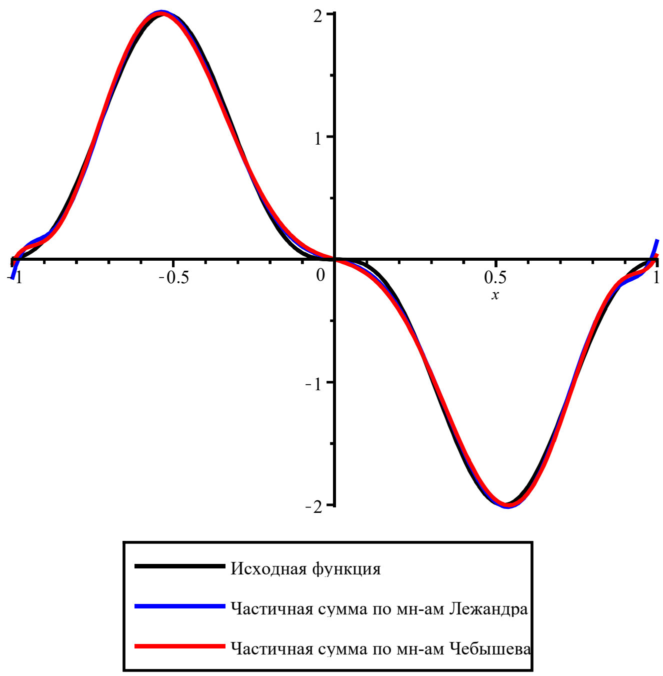
```
        Tn := T(n, x);
        sum := sum + cn·Tn;
    end do;

    return sum;
end proc:
```

```
> #Процедура построения графика частичной суммы порядка N (по многочленам Чебышева)

> chebyshev_graphic :=proc (f, x, N, mycolor)
  local  sum, graphic;

  sum := chebyshev_series(f, x, N);
  graphic := plot(sum, x =-1 ..1, color = mycolor);
  return graphic;
  end proc:
>
> #1
> f :=-2·sin^3(3·x) :
> f_plot := plot(f, x =-1 ..1, color = black) :
>
> #Графики заданной функции и частичных сумм порядка 10
> legendre_plot := legendre_graphic(f, x, 10, blue) :
> chebyshev_plot := chebyshev_graphic(f, x, 10, red) :
> plots[display](f_plot, legendre_plot, chebyshev_plot, legend = ["Исходная функция",
      "Частичная сумма по мн-ам Лежандра", "Частичная сумма по мн-ам Чебышева"]);
```



> *#Экспериментальное нахождение наименьшего порядка частичной суммы, равномерно аппрокисмирующей на всем промежутке заданную функцию с точностью 0,1*

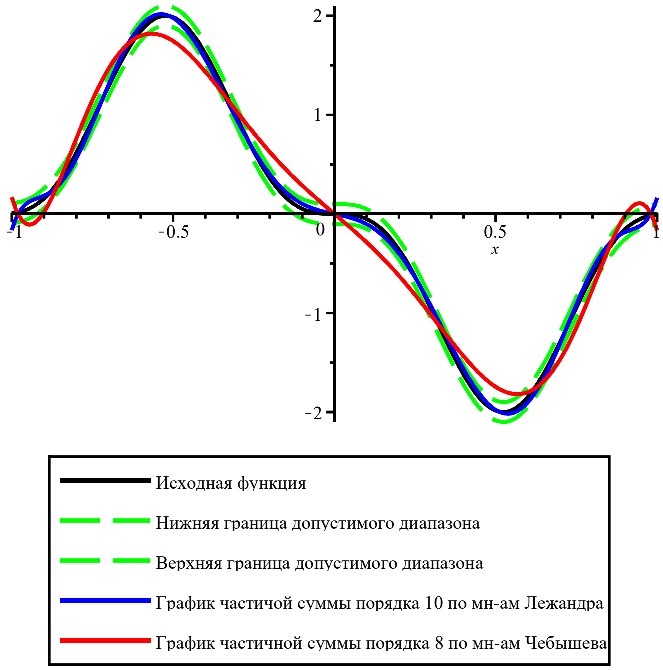
> $f\_plot\_min := plot(f - 0.1, x = -1 ..1, color = green, linestyle = dash)$: *#нижняя граница диапазона допустимой точности*

> $f\_plot\_max := plot(f + 0.1, x = -1 ..1, color = green, linestyle = dash)$: *#верхняя граница диапазона допустимой точности*

> $legendre\_plot\_min := legendre\_graphic(f, x, 10, blue)$:

> $chebyshev\_plot\_min := chebyshev\_graphic(f, x, 8, red)$:

> *plots[display](f_plot, f_plot_min, f_plot_max, legendre_plot_min, chebyshev_plot_min, legend* = ["Исходная функция", "Нижняя граница допустимого диапазона", "Верхняя граница допустимого диапазона", "График частичой суммы порядка 10 по мн-ам Лежандра", "График частичной суммы порядка 8 по мн-ам Чебышева"]);



> *#Как видно на графике, при N=10 и N=8 графики частичных сумм (по мн-ам Лежандра и Чебышева соответственно) выходят за диапазон допустимой точности*

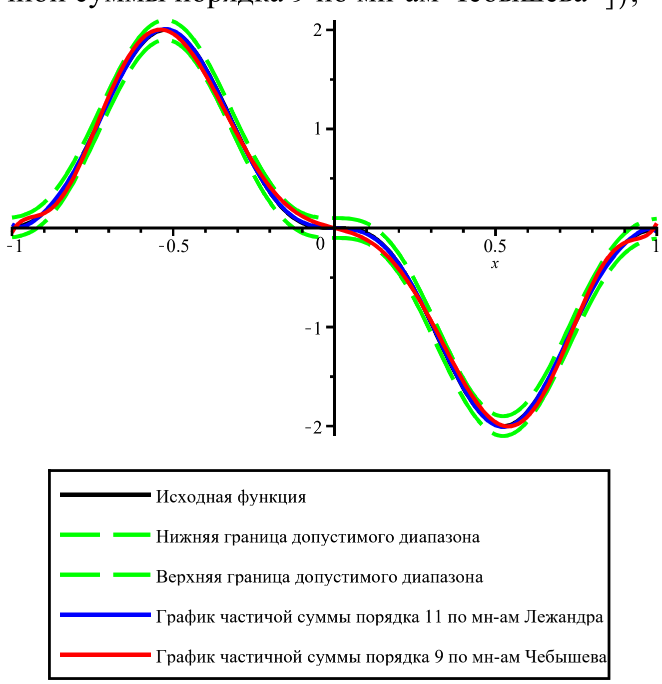
>

> *#Подставим N=11 и N=9*

> $legendre\_plot\_ok := legendre\_graphic(f, x, 11, blue)$:

> $chebyshev\_plot\_ok := chebyshev\_graphic(f, x, 9, red)$:

> *plots*[*display*](*f_plot*, *f_plot_min*, *f_plot_max*, *legendre_plot_ok*, *chebyshev_plot_ok*, *legend* = ["Исходная функция", "Нижняя граница допустимого диапазона", "Верхняя граница допустимого диапазона", "График частичой суммы порядка 11 по мн-ам Лежандра", "График частичной суммы порядка 9 по мн-ам Чебышева"]);



> *#Таким образом, при N = 11 и N=9 оба графика частичных сумм аппроксимируют*

заданную функцию на всем промежутке с точностью 0,1. Значит, искомый минимальный порядок частичной суммы = 11 и 9 соответственно

>

> *#Теперь разложим исходную функцию в тригонометрический и степенной ряды*

>

> *#Процедура разложения функции в ряд Фурье на промежутке -1..1*

> $fourier\_series := \textbf{proc}(f, x, n)$

$\textbf{local}\ k, l, a, b, s;$

$l := 1;$

$a[0] := \dfrac{int(f, x = -1..1)}{l};$

$a[k] := \dfrac{int\left(f \cdot \cos\left(\dfrac{k \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{l}\right), x = -1..1\right)}{l};$

$b[k] := \dfrac{int\left(f \cdot \sin\left(\dfrac{k \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{l}\right), x = -1..1\right)}{l};$

$s := a[0]/2 + sum\left(a[k] \cdot \cos\left(\dfrac{k \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{l}\right) + b[k] \cdot \sin\left(\dfrac{k \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{l}\right), k = 1..n\right);$

$\textbf{end}:$

>

> *#Процедура построения графика тригонометрического ряда Фурье*

> $fourier\_graphic := \textbf{proc}(f, x, n, my\_color)$

$\textbf{local}\ Sn;$

$Sn := fourier\_series(f, x, n);$

$\textbf{return}\ plot(Sn, x = -1..1, color = my\_color);$

$\textbf{end}:$

>

> $power\_graphic := \textbf{proc}(f, x, n, my\_color)$

$\textbf{local}\ sum, graphic;$

$sum := convert(taylor(f, x = 0, n), polynom);$

$graphic := plot(sum, x = -1..1, y = -5..5, color = my\_color);$

$\textbf{end}:$

>

> $f\_fourier := fourier\_series(f, x, 10):$

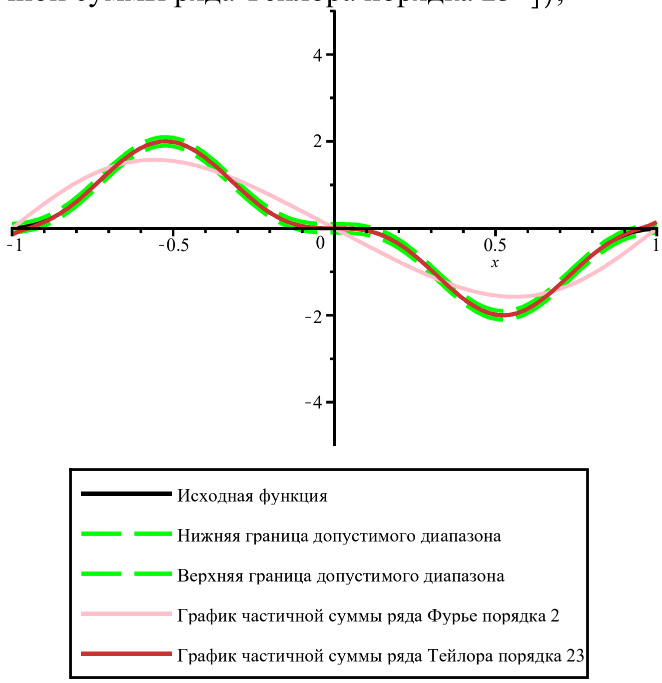
> $fourier\_plot\_min := fourier\_graphic(f, x, 2, pink):$

> $power := convert(taylor(f, x = 0, 20), polynom):$

> $power\_plot\_min := power\_graphic(f, x, 23, orange):$

> $plots[display](f\_plot, f\_plot\_min, f\_plot\_max, fourier\_plot\_min, power\_plot\_min, legend$
= ["Исходная функция", "Нижняя граница допустимого диапазона",
"Верхняя граница допустимого диапазона",
"График частичной суммы ряда Фурье порядка 2",

"График частичной суммы ряда Тейлора порядка 23"]);



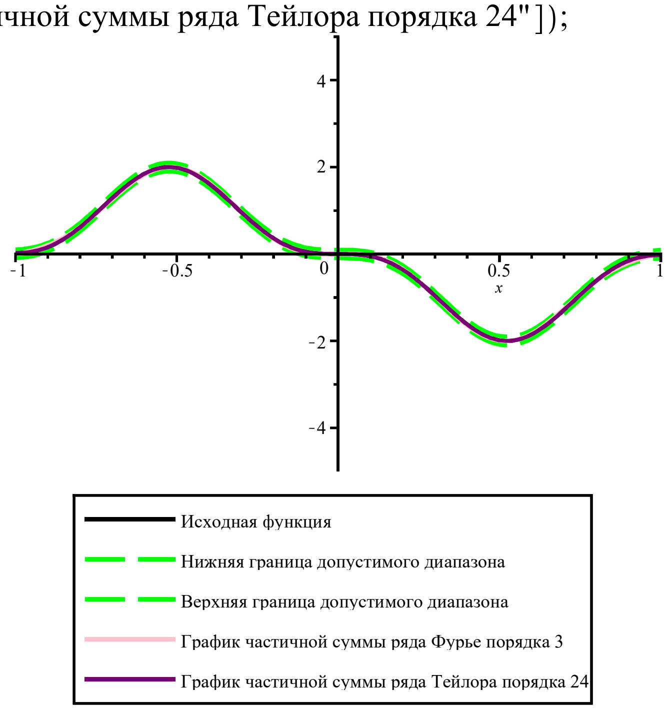
> *#Как видно, обе частичные суммы не попадают в допустимый диапазон (при N=3 для ряда Фурье и при N=23 для ряда Тейлора)*

> *#Подставим N=4 для ряда Фурье и N=24 для ряда Тейлора*

> *fourier_plot_ok* := *fourier_graphic*(*f*, *x*, 3, *pink*) :

> *power_plot_ok* := *power_graphic*(*f*, *x*, 24, *purple*) :

> *plots*[*display*](*f_plot*, *f_plot_min*, *f_plot_max*, *fourier_plot_ok*, *power_plot_ok*, *legend* = ["Исходная функция", "Нижняя граница допустимого диапазона", "Верхняя граница допустимого диапазона", "График частичной суммы ряда Фурье порядка 3", "График частичной суммы ряда Тейлора порядка 24"]);



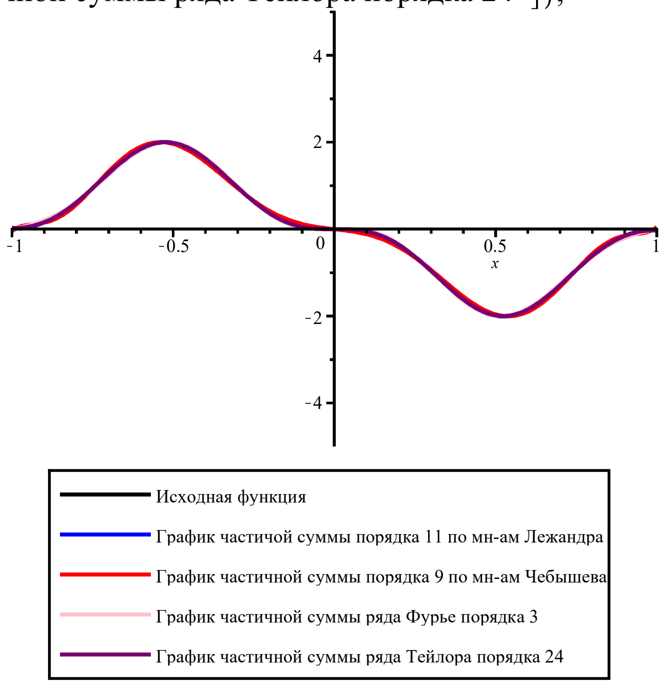
> *#Таким образом, при N=3 и при N=24 графики частичных сумм (ряда Фурье и ряда*

Тейлора соответственно) аппроксимируют заданную функцию на всем промежутке с точностью 0,1. Значит, искомый минимальный порядок частичной суммы = 3 и 24 соответственно

\>

\> *#Графики исходной функции и всех аппроксимирующих многочленов*

\> *plots*[*display*](*f_plot*, *legendre_plot_ok*, *chebyshev_plot_ok*, *fourier_plot_ok*, *power_plot_ok*, *legend* = ["Исходная функция",
"График частичой суммы порядка 11 по мн-ам Лежандра",
"График частичной суммы порядка 9 по мн-ам Чебышева",
"График частичной суммы ряда Фурье порядка 3",
"График частичной суммы ряда Тейлора порядка 24"]);



\>

\> ***#2***

\>

\> *#Процедура нахождения коэффициента для частичной суммы ряда порядка N (по многочленам Чебышева)*

```
> T := proc(n, x)
    if n = 0 then
      return 1;
    elif n = 1 then
      return x;
    else
      return cos(n·arccos(x));
    end if;
  end proc:
```

\>

\> $f := \arccos(x) - 3$:

\> *f_plot* := *plot*(*f*, *x* = −1 ..1, *color* = *black*) :

\>

> $cn := n \rightarrow \frac{2}{\text{Pi}}\ int\left(\frac{T(n,x)\ \cdot f}{\text{sqrt}(1-x^2)}, x=-1..1\right):$

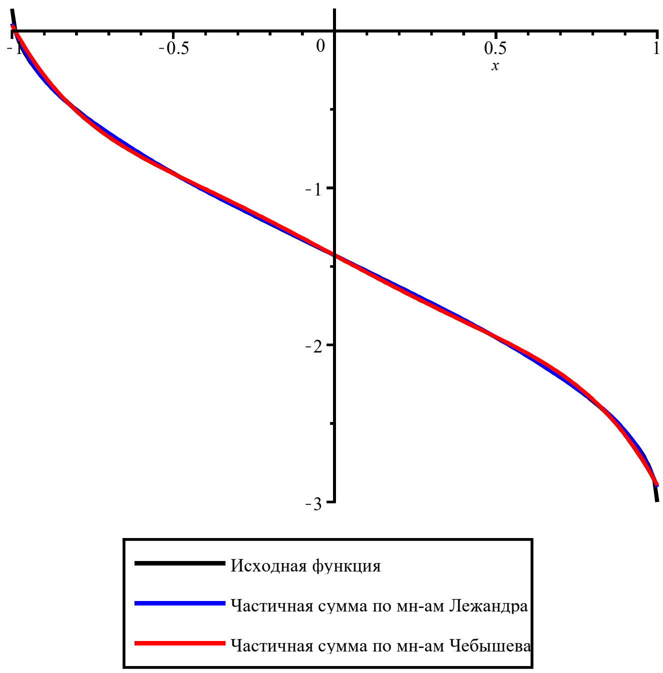
$f\_chebyshev := \frac{cn(0)}{2} + sum(cn(n) \cdot T(n,x), n=1..5):$

> *#Графики заданной функции и частичных сумм порядка 10*

> $legendre\_plot := legendre\_graphic(f, x, 10, blue):$

> $chebyshev\_plot := plot(f\_chebyshev, x=-1..1, color=red):$

> *plots*[*display*](*f_plot*, *legendre_plot*, *chebyshev_plot*, *legend* = ["Исходная функция", "Частичная сумма по мн-ам Лежандра", "Частичная сумма по мн-ам Чебышева"]);



> *#Экспериментальное нахождение наименьшего порядка частичной суммы, равномерно аппрокисмирующей на всем промежутке заданную функцию с точностью 0,1*

>

> $f\_plot\_min := plot(f - 0.1, x=-1..1, color=green, linestyle=dash):$ *#нижняя граница диапазона допустимой точности*

> $f\_plot\_max := plot(f + 0.1, x=-1..1, color=green, linestyle=dash):$ *#верхняя граница диапазона допустимой точности*

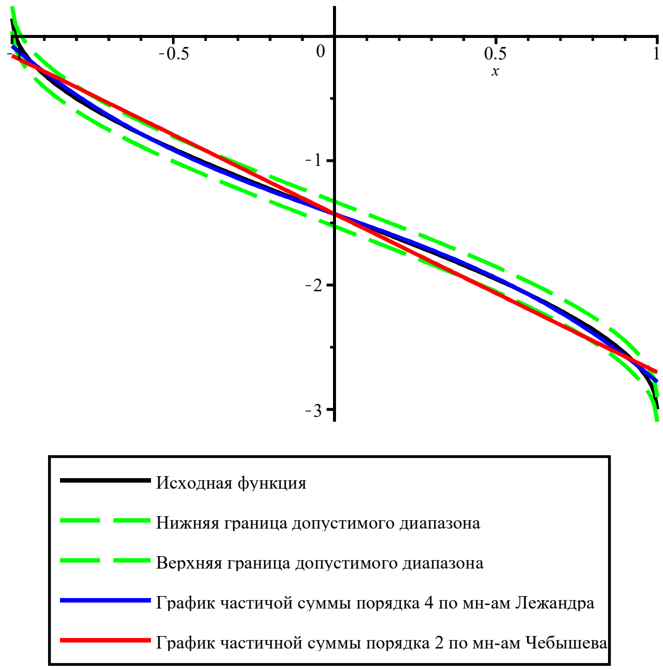
>

> $legendre\_plot\_min := legendre\_graphic(f, x, 4, blue):$

> $f\_chebyshev := \frac{cn(0)}{2} + sum(cn(n) \cdot T(n,x), n=1..2):$

> $chebyshev\_plot\_min := plot(f\_chebyshev, x=-1..1, color=red):$

> *plots*[*display*](*f_plot*, *f_plot_min*, *f_plot_max*, *legendre_plot_min*, *chebyshev_plot_min*, *legend* = ["Исходная функция", "Нижняя граница допустимого диапазона", "Верхняя граница допустимого диапазона", "График частичой суммы порядка 4 по мн-ам Лежандра", "График частичной суммы порядка 2 по мн-ам Чебышева"]);



> *#Как видно на графике, при N=4 и N=2 графики частичных сумм (по мн-ам Лежандра и Чебышева соответственно) выходят за диапазон допустимой точности*

>

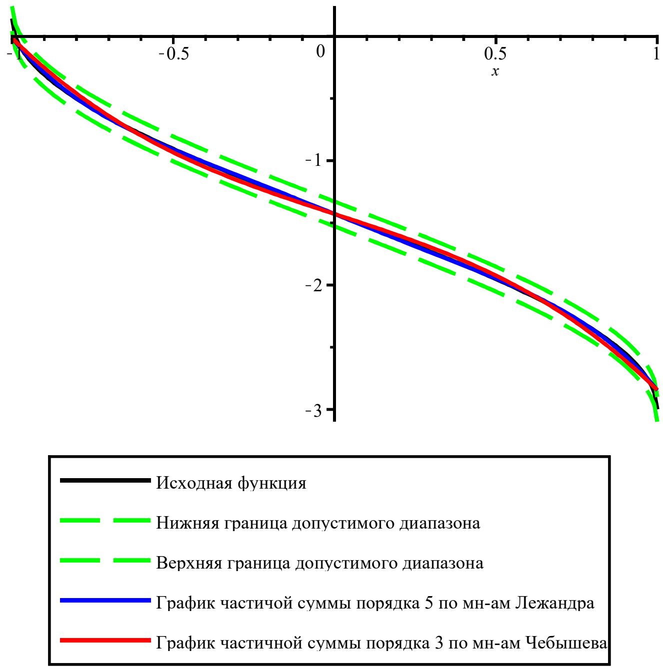
> *#Подставим N=4 и N=3 (по мн-ам Лежандра и Чебышева соответственно)*

> $legendre\_plot\_ok := legendre\_graphic(f, x, 5, blue)$:

> $f\_chebyshev := \frac{cn(0)}{2} + sum(cn(n)\cdot T(n, x), n = 1..3)$:

> $chebyshev\_plot\_ok := plot(f\_chebyshev, x = -1..1, color = red)$:

> $plots[display](f\_plot, f\_plot\_min, f\_plot\_max, legendre\_plot\_ok, chebyshev\_plot\_ok,\ legend$ = ["Исходная функция", "Нижняя граница допустимого диапазона", "Верхняя граница допустимого диапазона", "График частичой суммы порядка 5 по мн-ам Лежандра", "График частичной суммы порядка 3 по мн-ам Чебышева"]);



> *#Таким образом, при N = 5 и N=3 (по мн-ам Лежандра и Чебышева соответственно) оба графика частичных сумм аппроксимируют заданную функцию на всем промежутке с точностью 0,1. Значит, искомый минимальный порядок частичной суммы = 5 и 3 соответственно*

>

> *#Теперь разложим исходную функцию в тригонометрический и степенной ряды*

>

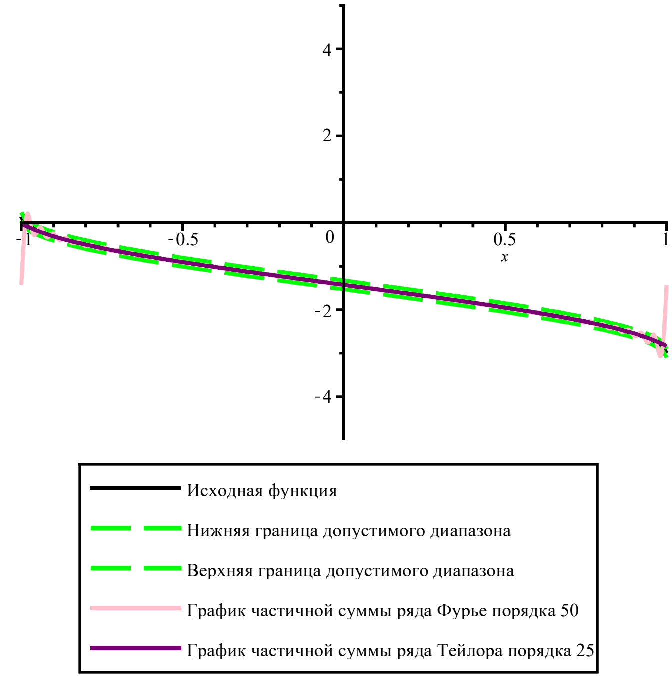
> $f\_fourier := fourier\_series(f, x, 10)$:

> $fourier\_plot\_min := fourier\_graphic(f, x, 50, pink)$:

> $power := convert(taylor(f, x = 0, 10), polynom)$:

> $power\_plot\_min := power\_graphic(f, x, 25, purple)$:

> $plots[display](f\_plot, f\_plot\_min, f\_plot\_max, fourier\_plot\_min, power\_plot\_min, legend$ = ["Исходная функция", "Нижняя граница допустимого диапазона", "Верхняя граница допустимого диапазона", "График частичной суммы ряда Фурье порядка 50", "График частичной суммы ряда Тейлора порядка 25"]);



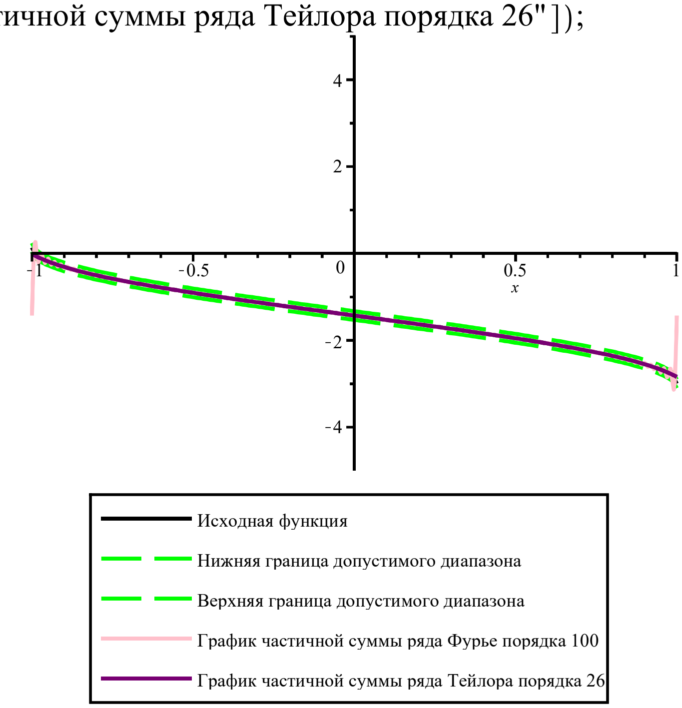
> *#Как видно, обе частичные суммы не попадают в допустимый диапазон (при N=50 для ряда Фурье и при N=25 для ряда Тейлора)*

> *#Подставим N=100 для ряда Фурье и N=26 для ряда Тейлора*

> $fourier\_plot\_ok := fourier\_graphic(f, x, 100, pink)$:

> $power\_plot\_ok := power\_graphic(f, x, 26, purple)$:

> $plots[display](f\_plot, f\_plot\_min, f\_plot\_max, fourier\_plot\_ok, power\_plot\_ok, legend$
= ["Исходная функция", "Нижняя граница допустимого диапазона",
"Верхняя граница допустимого диапазона",
"График частичной суммы ряда Фурье порядка 100",
"График частичной суммы ряда Тейлора порядка 26"]);



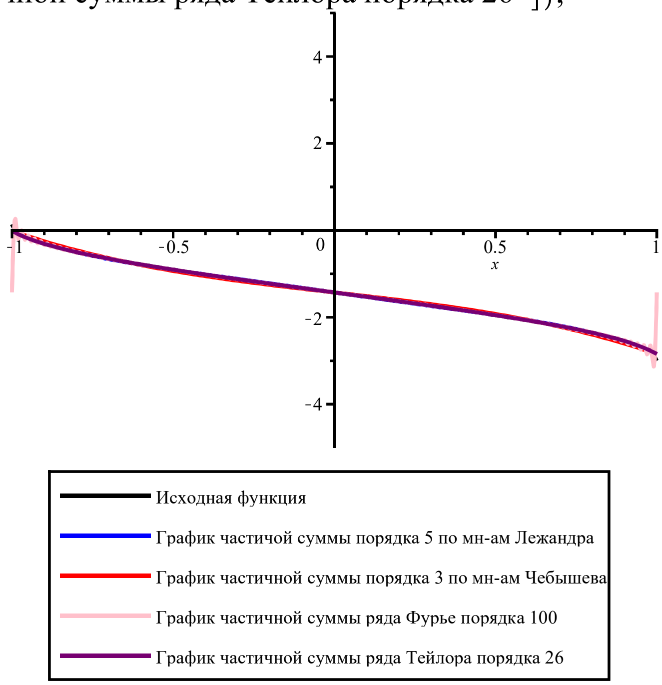
> *#Таким образом, при N=100 и при N=26 графики частичных сумм (ряда Фурье и ряда Тейлора соответственно) аппроксимируют заданную функцию на всем промежутке с*

точностью 0,1. Значит, искомый минимальный порядок частичной суммы = 100 и 26 соответственно

\>

\> *#Графики исходной функции и всех аппроксимирующих многочленов*

\> *plots*[*display*](*f_plot*, *legendre_plot_ok*, *chebyshev_plot_ok*, *fourier_plot_ok*, *power_plot_ok*, *legend* = ["Исходная функция",
"График частичой суммы порядка 5 по мн-ам Лежандра",
"График частичной суммы порядка 3 по мн-ам Чебышева",
"График частичной суммы ряда Фурье порядка 100",
"График частичной суммы ряда Тейлора порядка 26"]);



\>