Визуализация поточечной и равномерной сходимости функциональных рядов

Згирская Дарья Денисовна, группа 353502

Поточечная сходимость функциональных рядов

Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x),\ \ u_k : E \to R, k \in N, E \subset \mathrm{R}, (1.1)$$

называется *сходящимся в точке* $x_0 \in E$, если сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k\,(x_0)$.

Множеством поточечной сходимости функционального ряда (1.1) называется множество всех точек $X \subset E$, в которых сходится этот ряд.

Сумма $S(x)$ *сходящегося функционального ряда* есть предел функциональной последовательности его *частных сумм* $\big(S_n(x)\big)$,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

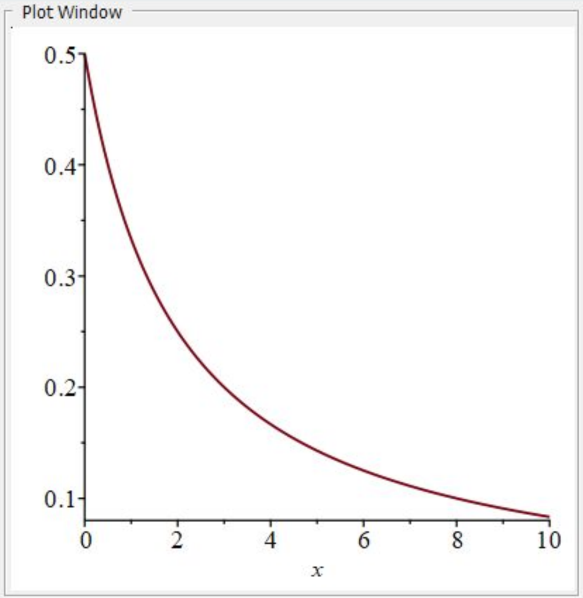
Признаки поточечной сходимости функциональных рядов

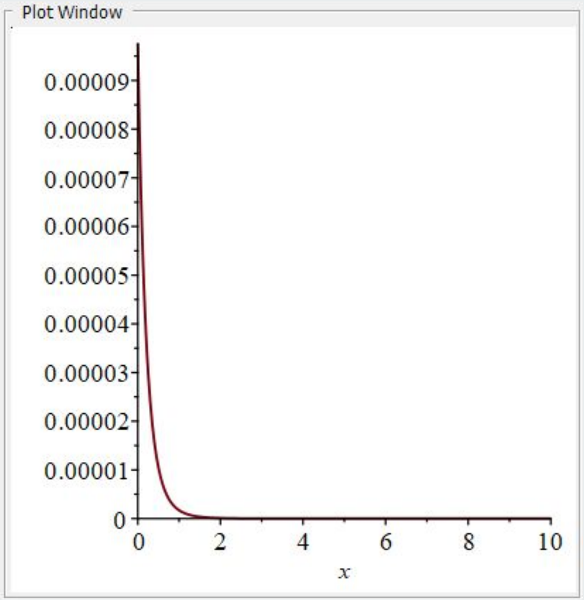
Поскольку при каждом фиксированном значении x0 принадлежащего E функциональный ряд (1.1) является обычным числовым рядом, то для исследования его сходимости применимы все признаки сходимости числовых рядов.

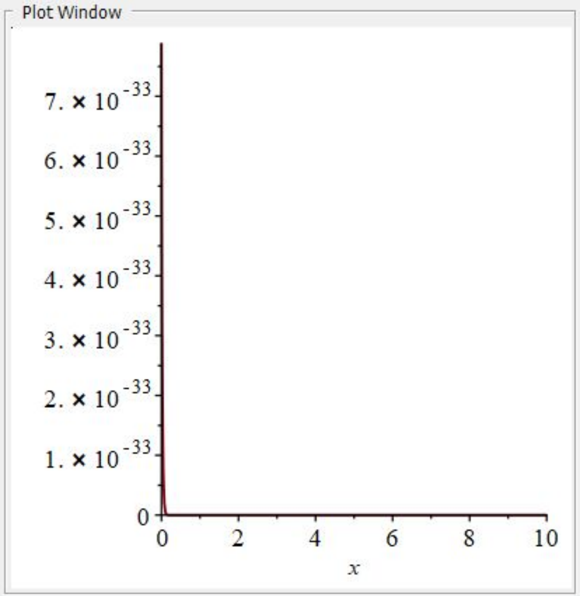
Признаки сходимости числовых рядов:

1. Признак сходимости Д’Аламбера.
2. Радикальный признак Коши.
3. Интегральный признак Коши.
4. Признак сравнения.
5. Предельный признак сравнения.

Функциональный ряд с поточечной сходимостью







Графики ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$ при n = 1, n = 10, n = 100 соответственно

График частичных сумм функционального ряда с поточечной сходимостью

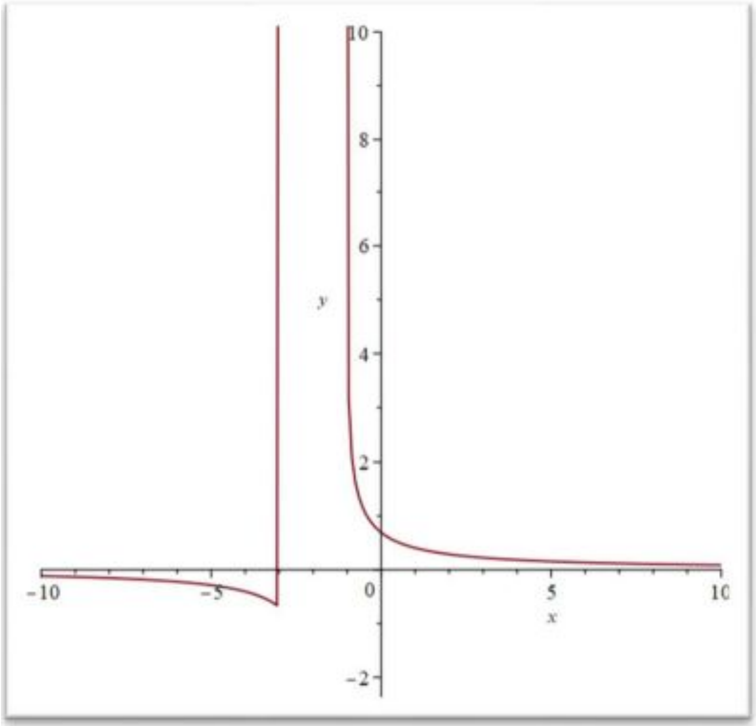


График суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$

Равномерная сходимость функциональных рядов

Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (2.1)$$

сходится (поточечно) на $G \subset R$ и $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ – сумма ряда. Ряд называется *равномерно сходящимся* на множестве $X \subset G$, если последовательность его частных сумм $\left(S_n(x)\right)$ сходится равномерно на X, $S_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists v_\varepsilon\ \forall n \geq v_\varepsilon\ \forall x \in X \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon$$

Критерий Коши равномерной сходимости

Критерий Коши равномерной сходимости. Для равномерной сходимости на X функционального ряда (2.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равномерное условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu(\varepsilon) \ \forall n \geq \nu(\varepsilon) \ \forall p \geq 0 \ \forall x \in X \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Следствия критерия Коши равномерной сходимости

Следствие 1. (Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда.) Если ряд (2.1) сходится равномерно на множестве X, то на этом множестве равномерно сходится к нулю последовательность членов ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows} \;\Rightarrow\; u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0,\, k \to \infty.$$

Следствие 2. Если

$$\forall \varepsilon_0 > 0\ \exists \nu\ \forall n \geq \nu\ \exists p \geq 0\ \exists x \in X\ \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right| > \varepsilon_0,$$

то ряд (2.1) не является равномерно сходящимся на множестве X.

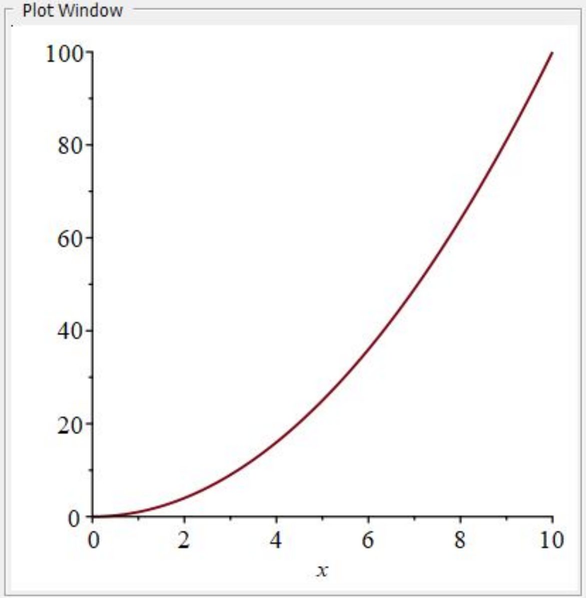
Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

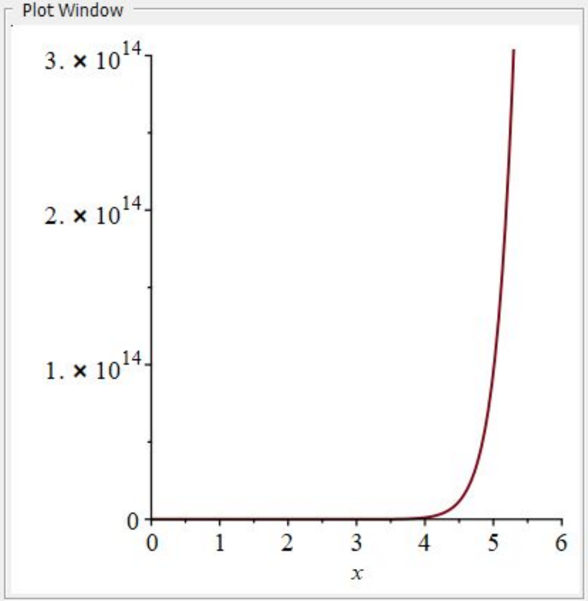
1. Признак Вейерштрасса (мажорантный).
2. Признак Абеля.
3. Признак Дирихле.
4. Признак Лейбница.

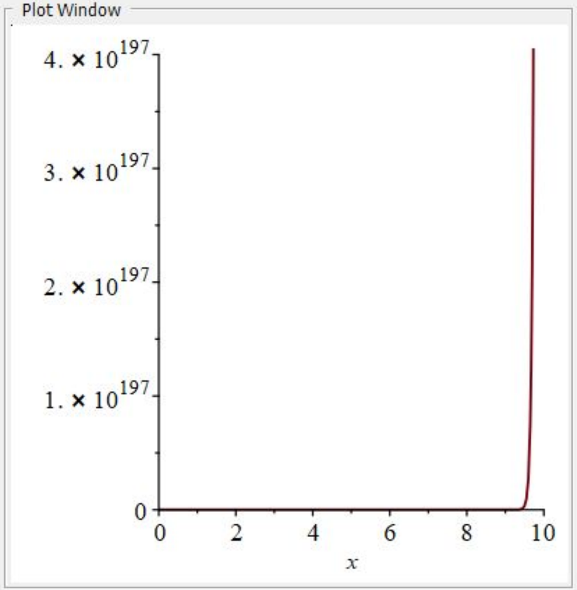
Также, из определения равномерной сходимости следуют следующие утверждения:

1. Если ряды $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ равномерно сходятся на множестве E, то любая из линейная комбинация $\{\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\}$, где α и β – постоянные, равномерно сходится на E.
2. Если ряд сходится равномерно на множестве E, то сходимость будет равномерной на любом множестве $E_1 \subset E$.
3. На всяком конечном подмножестве множества сходимости ряда этот ряд сходится равномерно.
4. Если ряд равномерно сходится на каждом из множеств E_1 и E_2, то на множестве $E = E_1 \cup E_2$ этот ряд сходится равномерно. (При этом данное утверждение не переносится на бесконечное объединение множеств).

Функциональный ряд с равномерной сходимостью







Графики ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$ при n = 1, n = 10, n = 100 соответственно

График частичных сумм функционального ряда с равномерной сходимостью

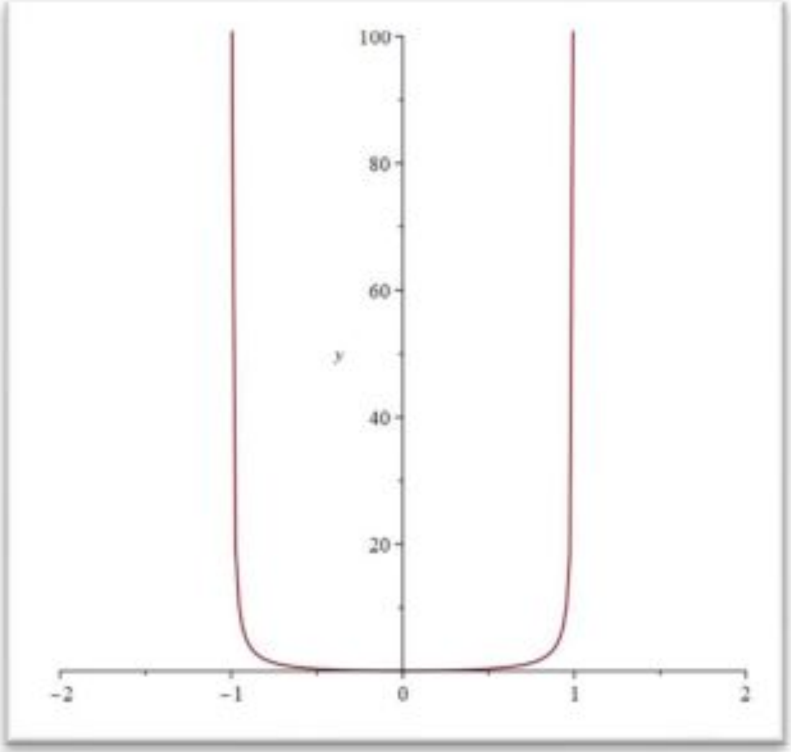


График суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$