> *#Лабораторная работа 1*

> *#Группа 353502, Згирская Дарья*

>

> *#Задание 1*

> $expr := \dfrac{\dfrac{4\cdot x^5 + 40\cdot x^4 + 100\cdot x^3 - 80\cdot x^2 - 320\cdot x + 256}{x^4 + x^3 - 9\cdot x^2 + 11\cdot x - 4}}{\dfrac{\left(x^2 + 8\cdot x + 16\right)}{3\cdot x^3 - 3\cdot x^2}}:$

> $normal(expr);$ *#команда приводит дробь к несократимой*

$$12\,x^2 \tag{1}$$

> $restart;$

>

> *#Задание 2*

> $expr := (2\cdot x - 9)\cdot\left(4\cdot x^2 + 3\right)\cdot(3\cdot x + 1):$

> $expand(expr);$ *#команда приводит многочлен к стандартному виду*

$$24\,x^4 - 100\,x^3 - 18\,x^2 - 75\,x - 27 \tag{2}$$

> $restart;$

>

> *#Задание 3*

> $expr := 2\cdot x^4 + 14\cdot x^3 + 12\cdot x^2 - 56\cdot x - 80:$

> $factor(expr);$ *#команда раскладывает выражение на множители*

$$2\,(x+5)\,(x-2)\,(x+2)^2 \tag{3}$$

> $restart;$

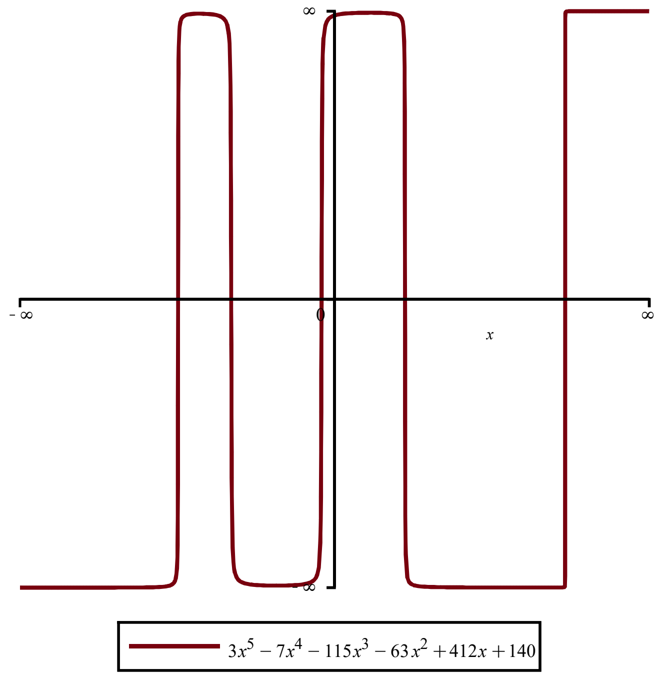
>

> *#Задание 4*

> $P(x) := 3\cdot x^5 - 7\cdot x^4 - 115\cdot x^3 - 63\cdot x^2 + 412\cdot x + 140:$

> *#команда строит график заданной функции (первый параметр) на нектором диапазоне (второй параметр) с добавлением легенды к графику. Причем обязателен только 1-ый параметр*

> $plot(P(x), x = -\mathrm{infinity}..\mathrm{infinity}, legend = P(x));$



> *fsolve*$(P(x) = 0)$; *#команда находит приближенные решения для указанного уравнения*

$$-3.980055036, -2.629274144, -0.3329187587, 1.789268946, 7.486312326 \tag{4}$$

> *restart*;

>

> ***#Задание 5***

> $expr := \frac{2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 4}{(x^2+4) \cdot (x-2)^2 \cdot (x^2-9)}$:

> *convert*(*expr*, *parfrac*, *x*) ;
#команда переводит объект одного типа данных в объект другого типа данных (в данном случае, рациональныю дробь в простейшие дроби)

$$-\frac{71}{1950\,(x+3)} - \frac{297}{100\,(x-2)} + \frac{-7\,x-10}{52\,(x^2+4)} - \frac{7}{5\,(x-2)^2} + \frac{245}{78\,(x-3)} \tag{5}$$

> *restart*;

>

> ***#Задание 6***

> $eq := \ln^2(x-3) = -3 \cdot \cos(2 \cdot x) - 2;$

$$eq := \ln(x-3)^2 = -3\cos(2\,x) - 2 \tag{6}$$

> *Digits* = 6;

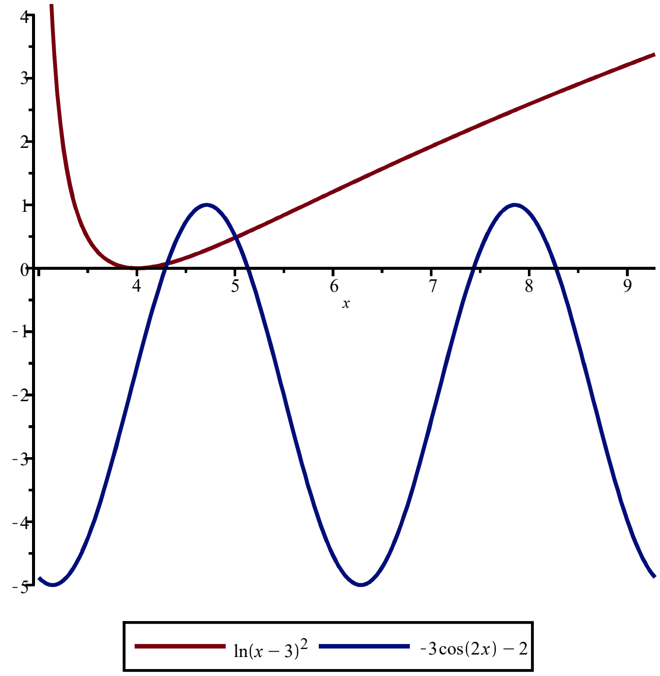
$$10 = 6 \tag{7}$$

> *#Способ 1. Точки пересечение графиков функций из левой и правой части уравнения - искомые корни*

> *f1* := *lhs*(*eq*) : *#команда предоставляет доступ к левой части уравнения*

> *f2* := *rhs*(*eq*) : *#команда предоставляте доступ к правой части уравнения*

> *plot*([*f1*, *f2*], *legend* = [*f1*, *f2*])



> $fsolve(eq, x = 4..4.5);$

$$4.308239951 \quad (8)$$

> $fsolve(eq, x = 5..5.5);$

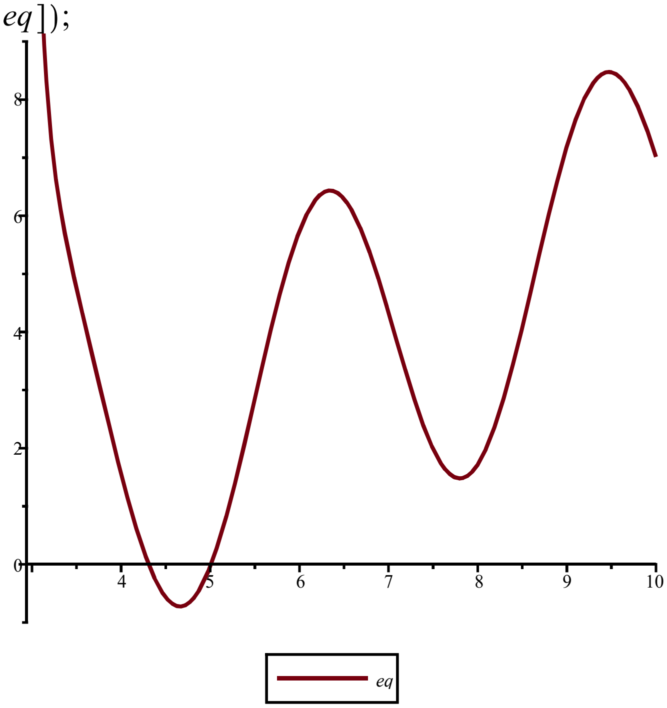
$$5.009181190 \quad (9)$$

>

> *#Способ 2. Перенос правой части уравнения в левую и нахождение точек, в которых график полученной функции пересекает ось абсцисс*

> $eq(x) := \ln^2(x-3) + 3\cdot\cos(2\cdot x) + 2 :$

> $plot(eq, legend = [eq]);$



> $fsolve(eq(x) = 0, x = 4..4.5);$

$$4.308239951 \quad (10)$$

> $fsolve(eq(x), x = 4.5..5.5);$

$$5.009181190 \quad \textbf{(11)}$$

> $restart;$

>

> ***#Задание 7***

> $a(n) := \dfrac{7 \cdot n + 5}{5 \cdot n - 1}$: *#формула n-ого члена последовательности*

> $\varepsilon := \dfrac{1}{10}$:

> $expr := \dfrac{7}{5} - \varepsilon < a(n) < \dfrac{7}{5} + \varepsilon$: *#неравенство, показываеющее, что n -ый член последовательности лежит* в ε - *окрестности точки* $A = \dfrac{7}{5}$, *где A - предел этой последовательности*

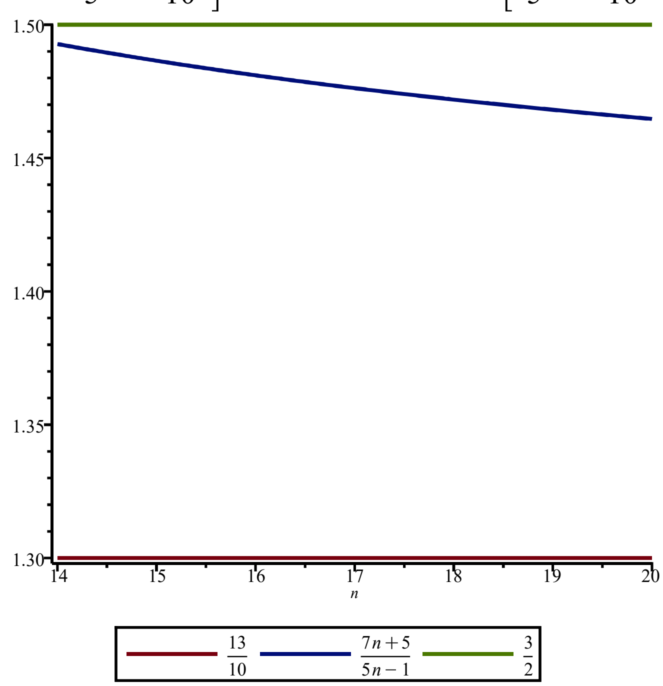
> $solve(expr, n);$

$$\left(-\infty, -\frac{63}{5}\right), (13, \infty) \quad \textbf{(12)}$$

> *#Из (12) следует, что:*

> $N := 14$:
#N - номер, начиная с которого все члены последоывательности попадут в ε-окрестность точки a

> $plot\left(\left[\dfrac{7}{5} - \dfrac{1}{10}, a(n), \dfrac{7}{5} + \dfrac{1}{10}\right], n = 14..20, legend = \left[\dfrac{7}{5} - \dfrac{1}{10}, a(n), \dfrac{7}{5} + \dfrac{1}{10}\right]\right);$



> $restart;$

>

> ***#Задание 8***

> $expr1 := n - \mathrm{sqrt}(n \cdot (n - 1));$

$$expr1 := n - \sqrt{n\,(n-1)} \qquad (13)$$

> *limit*(*expr1*, *n* = infinity);
#команда находит предел функции(первый параметр) при n, стремящемся ко 2-ому параметру

$$\frac{1}{2} \qquad (14)$$

> $expr2 := \left(\frac{4\cdot n^2 + 4\cdot n - 1}{4\cdot n^2 + 2\cdot n + 3}\right)^{1 - 2\cdot n}$:

> *limit*(*expr2*, *n* = infinity);

$$e^{-1} \qquad (15)$$

> *restart*;

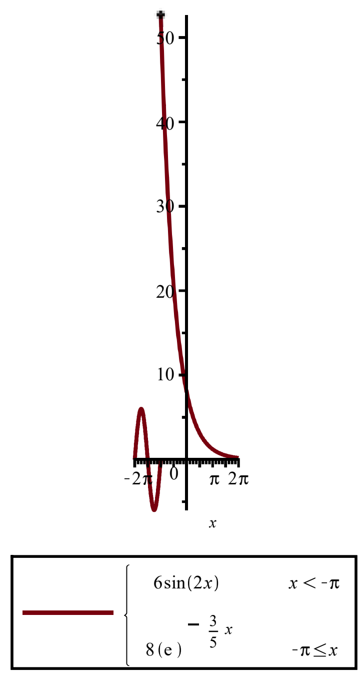
>

> ***#Задание 9***

> $f := x \rightarrow piecewise\left(x < -\mathrm{Pi}, 6\cdot \sin(2\cdot x), -\mathrm{Pi} \le x, 8\cdot \exp(1)^{-\frac{3}{5}\cdot x}\right)$;

$$f := x \mapsto \begin{cases} 6\cdot\sin(2\cdot x) & x < -\pi \\ 8\cdot(e)^{-\frac{3\cdot x}{5}} & -\pi \le x \end{cases} \qquad (16)$$

> *plot*(*f*(*x*), *legend*=*f*(*x*), *scaling*=*constrained*, *discont*=*true*);



> *#x=-π- точка разрыва*

> *limit*(*f*(*x*), *x* =−Pi, *left*);

$$0 \qquad (17)$$

> *limit*(*f*(*x*), *x* =−Pi, *right*);

$$8\,e^{\frac{3\pi}{5}} \qquad \textbf{(18)}$$

> *limit*$(f(x), x = \text{infinity})$;

$$0 \qquad \textbf{(19)}$$

> *limit*$(f(x), x = -\text{infinity})$;

$$-6\,..6 \qquad \textbf{(20)}$$

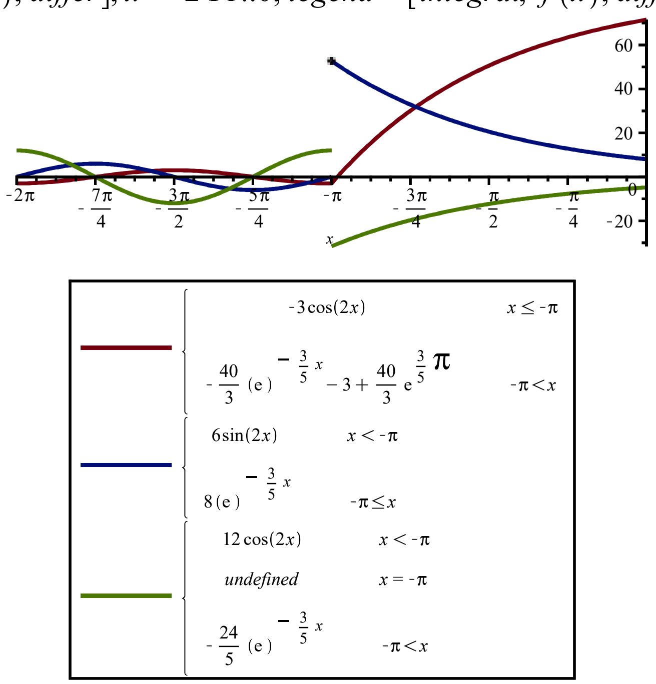
> *differ* := *diff*$(f(x), x)$;

$$differ := \begin{cases} 12\cos(2x) & x < -\pi \\ undefined & x = -\pi \\ -\dfrac{24\,(e)^{-\frac{3x}{5}}}{5} & -\pi < x \end{cases} \qquad \textbf{(21)}$$

> *integral* := *int*$(f(x), x)$;

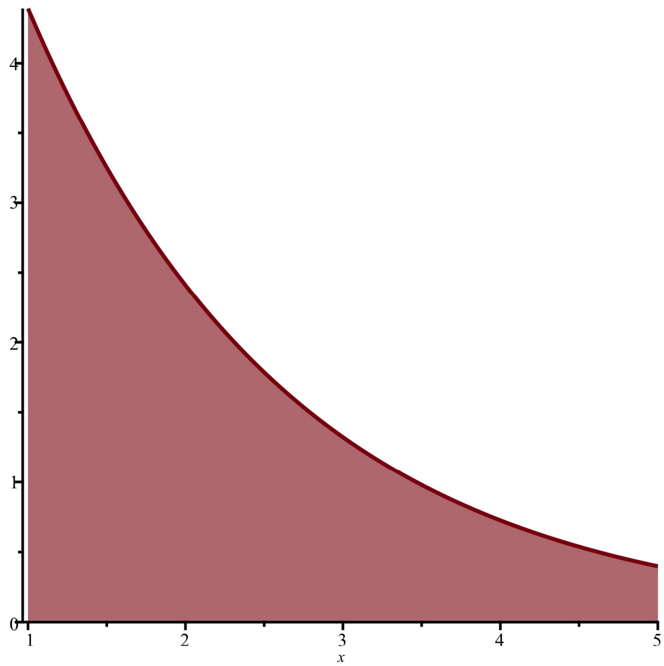
$$integral := \begin{cases} -3\cos(2x) & x \le -\pi \\ -\dfrac{40\,(e)^{-\frac{3x}{5}}}{3} - 3 + \dfrac{40\,e^{\frac{3\pi}{5}}}{3} & -\pi < x \end{cases} \qquad \textbf{(22)}$$

> *plot*$([integral,\ f(x),\ differ], x = -2\,\text{Pi}\,..0, legend = [integral,\ f(x),\ differ], discont = true)$;



> *plot*$(f(x), x = 1\,..5, filled = true)$;
int$(f(x), x = 1\,..5)$;

#Искомая площадь трапеции вычисляется определенным двойным интегралом, где x=1..5, а y= 0..8$\cdot e^{-\frac{3}{5}\cdot x}$



$$\frac{40\,e^{-\frac{3}{5}}}{3} - \frac{40\,e^{-3}}{3} \qquad \textbf{(23)}$$

> *restart*;

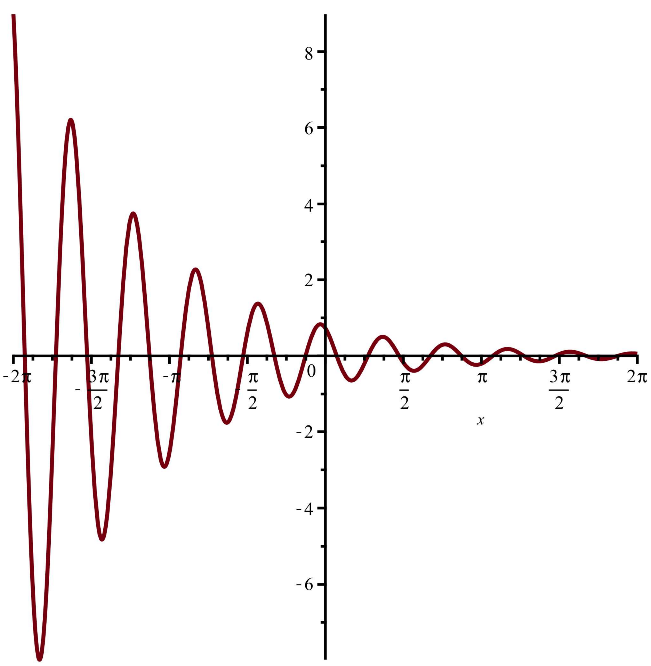
>

> ***#Задание 10***

> ***#1***

> $y := \frac{4}{5} \cdot \exp(1)^{-\frac{2}{5} \cdot x} \cdot \sin(5 \cdot x + 2)$:

> *plot*(y);



> *restart*;

> **#2**

> $f := 4\cdot x^2 - 12\cdot x\cdot y + 9\cdot y^2 - 2\cdot x + 3\cdot y - 2 = 0;$

$$f := 4\,x^2 - 12\,x\,y + 9\,y^2 - 2\,x + 3\,y - 2 = 0 \tag{24}$$

>

> $with(LinearAlgebra):$

> *#Запишем матрицу квадратичной формы f(x,y): a11=4, a22=9, a12=-6*

> $A := Matrix([[4, -6], [-6, 9]]);$

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \tag{25}$$

> $det := Determinant(A);$

$$det := 0 \tag{26}$$

> *#Тк* $det(A) = 0$, *то заданная прямая - прямая параболического типа*

> *#Найдем собственные знчения* λ *и собственные вектора матрицы*

> $vectors := Eigenvectors(A);$

$$vectors := \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

> *#Теперь нормируем первый вектор*

> $e1 := Normalize(Column(vectors[2], [2]), Euclidean);$

$$e1 := \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{3\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix} \tag{28}$$

> *#И второй*

> $e2 := Normalize(Column(vectors[2], [1]), Euclidean);$

$$e2 := \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix} \tag{29}$$

> *#Получим формулы x и y через x1 и y1 системы координат, образованной единичными векторами e1 и e2*

> *#Подставив эти значения в f и упростив, получим*

> $expr := subs(x = e1[1]\cdot x1 + e2[1]\cdot y1, y = e1[2]\cdot x1 + e2[2]\cdot y1, f):$

> $expr := simplify(expr);$

$$expr := 13\,x1^2 + x1\sqrt{13} - 2 = 0 \tag{30}$$

> *#Выделим полный квадрат*

> $expr\_pseudocanon := Student[Precalculus][CompleteSquare](expr);$

$$expr\_pseudocanon := 13\left(x1+\frac{\sqrt{13}}{26}\right)^2-\frac{9}{4}=0 \quad \textbf{(31)}$$

> #Тогда x2=x1 + $\frac{\text{sqrt}(13)}{26}$, и каноническое уравнение имеет вид

> $expr\_canon := subs\left(x1 = x2 - \frac{\text{sqrt}(13)}{26}, expr\_pseudocanon\right);$

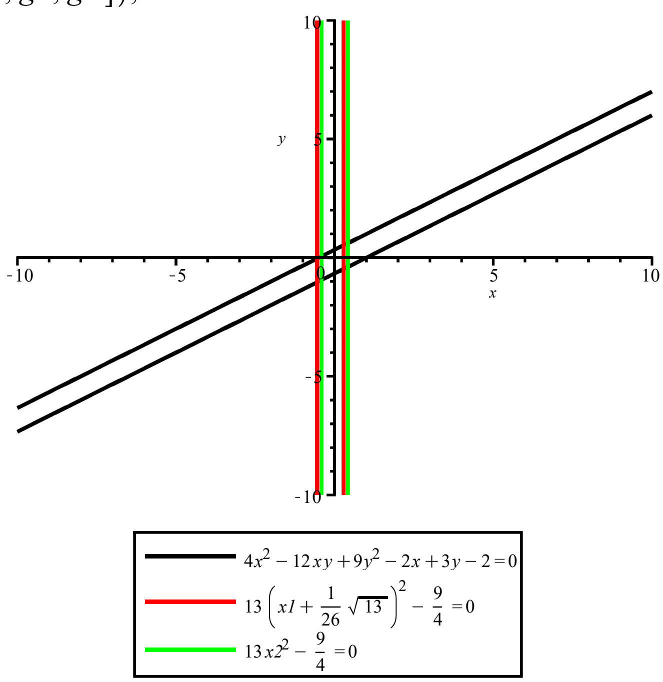
$$expr\_canon := 13\,x2^2-\frac{9}{4}=0 \quad \textbf{(32)}$$

> $g1 := plots[implicitplot](f,\ x = -10..10, y = -10..10, color = black, legend = f):$

> $g2 := plots[implicitplot](expr\_pseudocanon, x1 = -10..10, y1 = -10..10, color = red, legend = expr\_pseudocanon):$

> $g3 := plots[implicitplot](expr\_canon, x2 = -10..10, y2 = -10..10, color = green, legend = expr\_canon):$

> $plots[display]([g1, g2, g3]);$



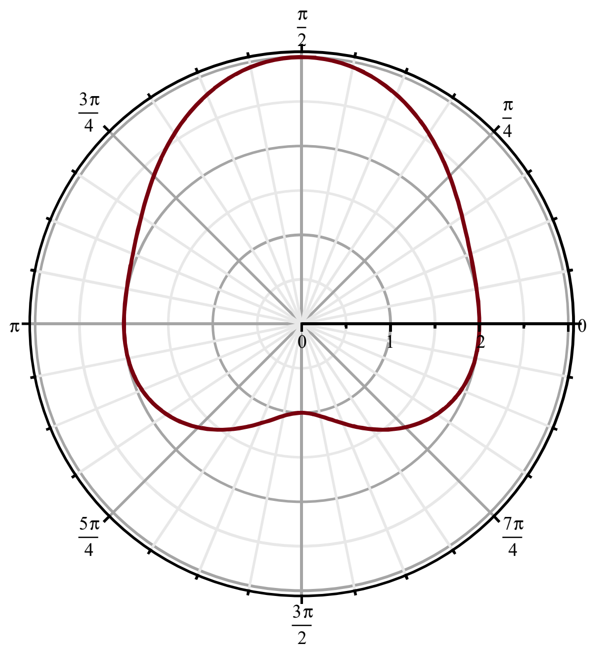
> $restart;$

> **#3**

> $x(t) := 2 + \sin^3(t):$

> $y(t) := 1 - \cos^3 t:$

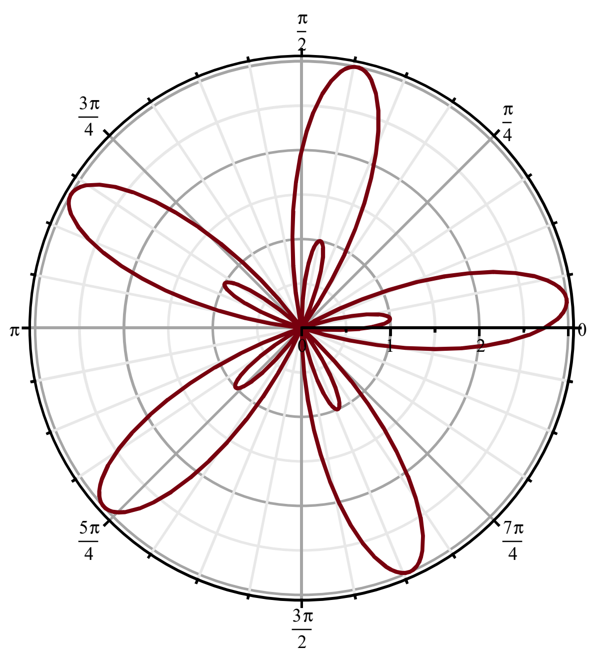
> $plots[polarplot]([x(t), y(t)]);$



> **#4**

> $\rho := 1 + 2 \cdot \cos\left(5 \cdot \varphi - \frac{\mathrm{Pi}}{6}\right) :$

> *plots*[*polarplot*](ρ);



>