Universidade Federal da Integração Latino-Americana
Professor: Elvis M R Torrealba

Lista de exercicios Março 2023

Disciplina: MAT-0098 **Data:** 10/03/2023

Instruções:

- Os cálculos e justificativas devem estar demonstrados e de forma organizada, sob pena de anulação;
- O **limite máximo** de alunos para realizar a atividade é 3.
- Resoluções/justificativas de questões iguais em listas de diferentes grupos serão anuladas.
- A **data e horário** para entrega da atividade é 31/03/2023 às 23h59.

1. Qual dos seguintes sistemas lineares são consistentes? No caso de ser consistente, quantas soluções possuem, uma única solução ou infinitas soluções? Em qualquer caso, sendo o sistema consistente ou não, justifique e motive a sua resposta, podendo usar gráficos auxiliares, cálculo do determinante, e demais justificativas aderentes ao exercício proposto.

$$\begin{cases} x + 2y &= 2 \\ -3x + y &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - y &= 10 \\ -\frac{1}{5}x + \frac{y}{25} &= -\frac{2}{5} \\ 3x + 4y &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - z &= 2 \\ -x - y + z &= 0 \\ x + 2y - 3z &= 4 \end{cases}$$

2. Faça o que se pede:

   - Escreva e envie em alguma linguagem de programação o código dos métodos de eliminação de Gauss e Gauss com pivotamento. (Anexe o arquivo da resposta).
   - Considere o sistema $Ax = b$, em que $A = \begin{bmatrix} 0.4096 & 0.1234 & 0.3678 & 0.2943 \\ 0.2246 & 0.3872 & 0.4015 & 0.1129 \\ 0.3645 & 0.1920 & 0.3781 & 0.0643 \\ 0.1784 & 0.4002 & 0.2786 & 0.3927 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0.4043 \\ 0.1550 \\ 0.4240 \\ 0.2557 \end{bmatrix}$. Use o método definido no item anterior e verifique a solução é $x^* = \begin{bmatrix} 3.4606 \\ 1.5610 \\ -2.9342 \\ -0.4301 \end{bmatrix}$. Mostre as Matrizes L e U de cada método.

- Use novamente os métodos do item 1, para resolver o sistema $Ax = b$, em que: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2\times 10^9 \\ 1 & -1 & 10^9 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. A solução encontrada de cada método foi a mesma? as soluções encontradas resolvem o problema inicial?

3. Considere uma matriz tridiagonal simétrica dada por

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

- Escreva e envie em alguma linguagem de programação o código para realizar a decomposição de Cholesky.
- Use o seu código para obter a Matriz G decomposição de Cholesky para A de ordem 4×4 e 5×5.
- Use a decomposição anterior para Resolver um sistema de ordem 20, 30, 40, 50 $Ax = b$, em que $b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \dots n. \end{bmatrix}$ para $n = 20, 30, 40, 50$. Se n é 1000 ou 1.000.000.? Acredita que essa estratégia é a melhor? Justifique.

(1) Considere a seguir três sistemas lineares de dimensão 6 do tipo $Ax = b$, sendo o vetor $b = (1,1,1,1,1,1)^t$, com matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,6}$ dada como segue em cada caso:

$$(1.1)\quad a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

$$(1.2)\quad a_{ij} = \begin{cases} -2 & \text{se } i = j \\ 0.5 & \text{se } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

$$(1.3)\quad a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{se } i = j \\ 2 & \text{se } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

Para cada sistema linear $Ax = b$ associado às matrizes acima, pede-se:

a) Verifique sobre a convergência, ou não, dos dois métodos: Jacobi e Gauss-Seidel. Em qualquer caso, motive e justifique sua resposta.

b) No caso positivo de convergência aplique o método iterativo correspondente, calculando uma aproximação $x^{(k)}$ da solução em cada caso, tal que o resíduo $\|r^{(k)}\| = \|b - Ax^{(k)}\|$ seja menor do que a tolerância $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ na norma do máximo, e ao mesmo tempo também seja satisfeito o critério das distâncias relativas como segue, $d_r^{(k)} = \dfrac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k)}\|_\infty} < \varepsilon_2$, tal que $\varepsilon_2 = 10^{-1}$.

c) Em relação ao item (b) faça, para alguma iteração k incluindo a primeira iteração, a impressão das soluções, distancias relativas e residuos achados, imprimindo ao final o número total de iterações para o qual o critério de parada foi satisfeito, e a solução final achada.

(2) Dado o **sistema não linear**

$$(\star)\quad \begin{cases} (x-3)^2 + (y+1)^2 = 16 \\ y^2 = x - 1 \end{cases} \qquad \text{pede-se:}$$

a) Verifique graficamente quantas são as soluções do sistema não linear $(\star)$.

b) Escreva um **código computacional** do método de Newton (*em uma linguagem de programação de sua escolha*) para calcular as soluções aproximadas do sistema $(\star)$, usando o critério de parada $\|F(x^{(k)})\|_\infty < 10^{-2}$.

c) Em relação ao item (b) faça, para cada iteração k, a impressão das soluções calculadas, imprimindo ao final o número total de iterações para o qual o critério de parada foi satisfeito.