# 8 साथ काम करना

## अंशों

0774CH08

### 8.1 भिन्नों का गुणन

एरोन 1 घंटे में 3 किलोमीटर चलता है।
वह 5 घंटे में कितनी दूर चल सकता है?

यह एक आसान सवाल है। हम जानते हैं कि दूरी निकालने के लिए हमें 5 और 3 का गुणनफल निकालना होगा, यानी 5 और 3 को गुणा करना होगा।

1 घंटे में तय की गई दूरी = 3 किमी.

इसलिए,

5 घंटे में तय की गई दूरी

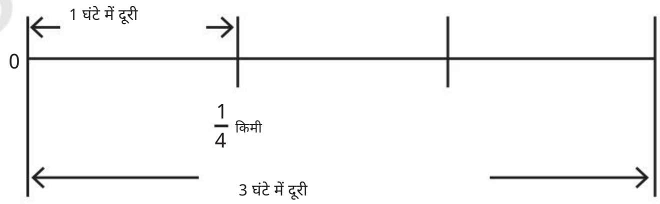
= 5 × 3 किमी

= 3 + 3 + 3 + 3 + 3 किमी

= 15 किमी.

एरन का पालतू कछुआ बहुत धीमी गति से चलता है। वह 1 घंटे में केवल एक किलोमीटर चल सकता है। वह 3 घंटे में कितनी दूरी चल सकता है? $\frac{1}{4}$

यहाँ, एक घंटे में तय की गई दूरी एक अंश है। इससे कोई फ़र्क़ नहीं पड़ता। कुल तय की गई दूरी की गणना भी गुणा करने की तरह ही की जाती है।




1 घंटे में तय की गई दूरी = किमी. $\frac{1}{4}$

इसलिए, 3 घंटे में तय की गई दूरी = 3 × $\frac{1}{4}$ किमी

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ किमी

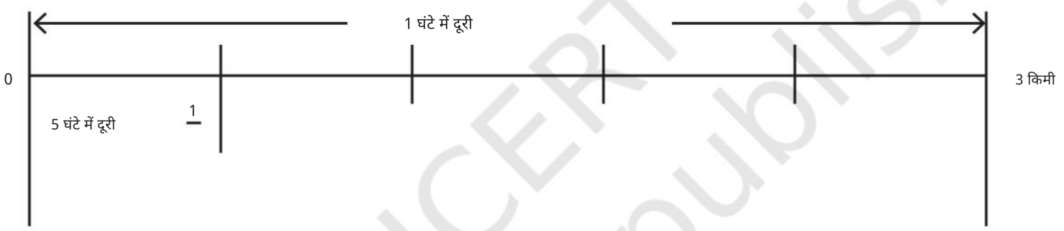
$= \frac{3}{4}$ किमी.

कछुआ 3 घंटे में 1 किमी चल सकता है। $\frac{3}{4}$

आइए हम एक ऐसे मामले पर विचार करें जहां पैदल चलने में बिताया गया समय एक घंटे का एक अंश मात्र है।

? हमने देखा कि एरोन 1 घंटे में 3 किलोमीटर चल सकता है। वह कितनी दूर तक चल सकता है?
घंटों में चलना? $\frac{1}{5}$

हम गुणा के माध्यम से तय की गई कुल दूरी की गणना जारी रखते हैं।




तय की गई दूरी (घंटों में) = 5 $\frac{1}{}$ $\frac{1}{5}$ × 3 किमी.

उत्पाद ढूँढना:

1 घंटे में तय की गई दूरी = 3 किमी.

5 में $\frac{1}{}$ घंटे, तय की गई दूरी उस लंबाई के बराबर होती है जो हमें विभाजित करके मिलती है

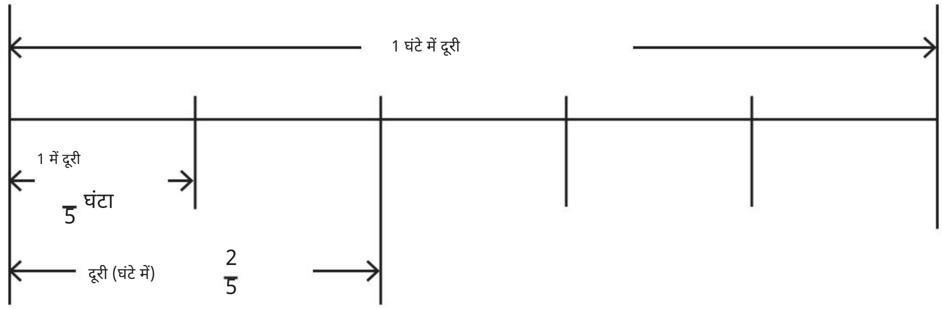
3 किमी को 5 बराबर भागों में बाँटें, जो कि $\frac{3}{5}$ किमी.

इससे हमें पता चलता है कि × 3 = $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$.

? एरोन कितने घंटों में कितनी दूरी तक चल सकता है? $\frac{2}{5}$

एक बार फिर, हमारे पास —

तय की गई दूरी = $\frac{2}{5}$ × 3 किमी.




उत्पाद ढूँढना:

1. हम सबसे पहले तय की गई दूरी घंटों में ज्ञात कर सकते हैं। $\frac{1}{5}$

2. चूंकि, अवधि 5 $\frac{2}{}$ दोगुना है $\frac{1}{5}$, हम इस दूरी को 2 से गुणा करते हैं

कुल तय की गई दूरी प्राप्त करें।

यहाँ गणना है.

1 घंटे में तय की गई दूरी = 3 किमी.

1. 5 घंटे में तय की गई दूरी $\frac{1}{}$

= 3 किमी को 5 बराबर भागों में विभाजित करने पर प्राप्त लंबाई

= $\frac{3}{5}$ किमी.

2. इस दूरी को 2 से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$2 \times 5 \frac{3}{} = \frac{6}{5} \text{ किमी.}$$

इससे हम देख सकते हैं कि

$$\frac{2}{} \times 3 = 5 \ \frac{6}{5}.$$

## बहस


$\frac{2}{5} \times 3$

हमने यह गुणन निम्न प्रकार किया:

• सबसे पहले, हमने विभाजित किया

गुण्य, 3 , 3 से

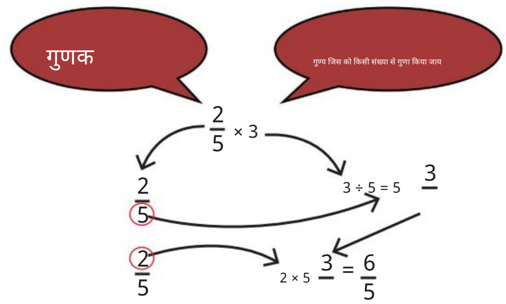
गुणक का हर 5, 5 प्राप्त करने के लिए

—.

• फिर हमने परिणाम को गुणक के अंश से गुणा किया,

यानी 2, 5 पाने के लिए $\frac{6}{}$.

इस प्रकार, जब भी हमें किसी भिन्न और पूर्ण संख्या को गुणा करना होता है, तो हम उपरोक्त चरणों का पालन करते हैं।




उदाहरण 1: एक किसान के पास 5 2

पोते-पोतियों को। उसने 3 एकड़ ज़मीन बाँटी —

वह अपने प्रत्येक पोते-पोती को 10 लाख रुपये की ज़मीन देगी।

उसने अपने पोते-पोतियों को कुल कितनी ज़मीन दी?

$$5 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}.$$

उदाहरण 2: 1 घंटे के इंटरनेट समय की कीमत ₹8 है। 1 घंटे 4 घंटे के इंटरनेट समय की कीमत कितनी होगी? $\frac{1}{}$

इंटरनेट समय की लागत?

$1\frac{1}{4}$ घंटे घंटे हैं $\frac{5}{4}$ (मिश्रित अंश से परिवर्तित)।

इंटरनेट समय के $\frac{5}{}$ घंटे की लागत = × 8 4 $\frac{5}{4}$

$= 5 \times 4 \ \frac{8}{}$

$= 5 \times 2$

$= 10.$

1 घंटे के इंटरनेट समय के लिए ₹10 $\frac{1}{4}$ का शुल्क लगता है।

## समझ से बाहर

1. तेनज़िन पेय 2 $\frac{1}{}$ रोज़ाना कितने गिलास दूध पिएँ?

   वह एक हफ़्ते में कितना दूध पीता है? उसने एक हफ़्ते में कितने गिलास दूध पिया?
   जनवरी का महीना?

2. मजदूरों की एक टीम 8 दिनों में 1 किमी पानी की नहर बना सकती है। इसलिए, एक दिन में, टीम पानी की नहर के किमी बना सकती है।
   यदि वे एक सप्ताह में पानी की नहर के किमी काम करते हैं, तो यह संख्या क्या होगी?
   सप्ताह में 5 दिन, वे बना सकते हैं —

3. मंजू और उसकी दो पड़ोसी हर हफ्ते 5 लीटर तेल खरीदती हैं और उसे तीनों परिवारों में बराबर-बराबर बाँट देती हैं। हर परिवार को एक हफ्ते में कितना तेल मिलता है? एक परिवार को 4 हफ्ते में कितना तेल मिलेगा?

4. सफिया ने सोमवार रात 10 बजे चांद को डूबते देखा। उसकी माँ, जो 5 साल की है,

   एक वैज्ञानिक ने उसे बताया कि हर दिन चंद्रमा शाम 6 बजे से एक घंटा देर से अस्त होता है —

पिछले दिन। गुरुवार को रात 10 बजे के कितने घंटे बाद चाँद अस्त होगा?

5. गुणा करें और फिर इसे मिश्रित भिन्न में बदलें:

(ए) 7 × 5 $\frac{3}{}$

(बी) 4 × 3 $\frac{1}{}$

(सी) $\frac{9}{}$ × 6 7

(डी) $\frac{13}{11}$ × 6

अब तक हमने एक पूर्ण संख्या का भिन्न से और एक भिन्न का पूर्ण संख्या से गुणन करना सीखा है। क्या होगा जब गुणन में दोनों संख्याएँ भिन्न हों?

## दो भिन्नों का गुणा करना

? हम जानते हैं कि एरोन का पालतू कछुआ 1 घंटे में केवल 4 किलोमीटर ही चल सकता है। यह आधे घंटे में कितनी दूर चल सकता है?

$\frac{1}{}$

| घंटे की दूरी | |
|---|---|
| 1 | $\frac{1}{4}$ |
| $\frac{1}{2}$ | ? |

ऐसी समस्याओं को हल करने के लिए गुणन का उपयोग करने के हमारे दृष्टिकोण का अनुसरण करते हुए, हमने पाया,

घंटे में तय की गई दूरी = 2 $\frac{1}{}$ $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{4}$ किमी.

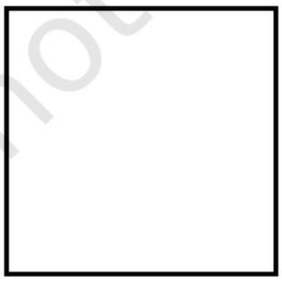
उत्पाद ढूँढना:

1 घंटे में तय की गई दूरी = किमी. $\frac{1}{4}$

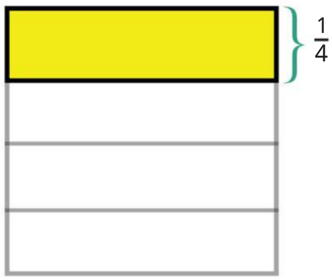
इसलिए, एक घंटे में तय की गई दूरी 2 से प्राप्त लंबाई है $\frac{1}{}$

4 को विभाजित करना $\frac{1}{}$ 2 बराबर भागों में बाँटें।

इसे ज्ञात करने के लिए, भिन्नों को इकाई वर्ग का उपयोग करके दर्शाना उपयोगी होता है एक "संपूर्ण" के लिए खड़े होना।



इकाई वर्ग को "संपूर्ण" के रूप में



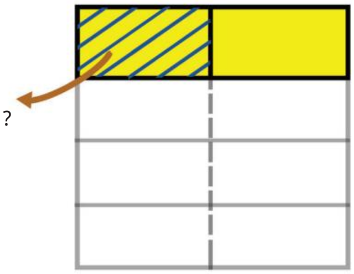

$\frac{1}{4}$ पूरे का

Machine Translated by Google



अब हम इसे 4 से विभाजित करते हैं $\frac{1}{}$ दो बराबर भागों में बाँटें। हमें क्या मिलेगा?

सम्पूर्ण का कितना भाग छायांकित है?




$\frac{1}{4}$ दो बराबर भागों में विभाजित

चूँकि संपूर्ण को 8 बराबर भागों में विभाजित किया गया है 1

और एक भाग छायांकित है, तो हम कह सकते हैं कि 8 —

पूरे का क्षेत्रफल छायांकित है। इसलिए, तय की गई दूरी

कछुए द्वारा आधे घंटे में तय की गई दूरी किमी है। $\frac{1}{8}$

इससे हमें पता चलता है कि 2 $\frac{1}{} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

यदि कछुआ तेज़ चलता है और वह 1 घंटे में 5 किमी की दूरी तय कर सकता है, तो 5 किमी की दूरी तय करने में उसे कितना समय लगेगा? $\frac{2}{}$

यह एक घंटे में चलता है? $\frac{3}{4}$

तय की गई दूरी = × 4 $\frac{3}{} \quad \frac{2}{5}$.

उत्पाद ढूँढना:

(मैं) सबसे पहले एक घंटे में तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए। $\frac{1}{4}$

(ii) 4 में तय की गई दूरी प्राप्त करने के लिए परिणाम को 3 से गुणा करें $\frac{3}{}$

घंटा।

(i) एक घंटे में तय की गई दूरी (किमी में) $\frac{1}{4}$

= 5 से विभाजित करने पर प्राप्त राशि $\frac{2}{}$
4 बराबर भाग.

इकाई वर्ग को पूर्ण मानते हुए, छायांकित भाग (आकृति 8.1 में) एक क्षेत्र है जो हमें

प्राप्त होता है

जब हम इसे 4 बराबर भागों में विभाजित करते हैं। $\frac{2}{5}$

यह कुल कितना है?

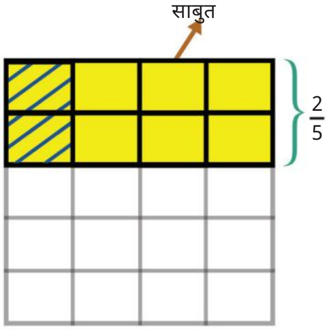
संपूर्ण को विभाजित किया गया है

5 पंक्तियाँ और 4 कॉलम,

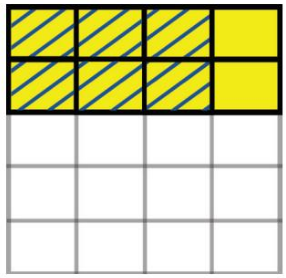
5 × 4 = 20 बराबर भाग बनाएं।

छायांकित भागों की संख्या = 2.

अतः एक घंटे में तय की गई दूरी = 20 4 $\frac{1}{} \quad \frac{2}{}$ .




चित्र 8.1



(ii) अब, हमें 3 से गुणा करना होगा। $\frac{2}{20\ 3}$

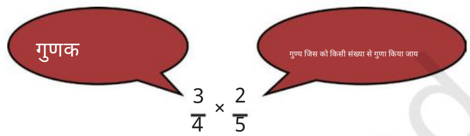
एक घंटे में तय की गई दूरी = 3 × 4 — $\frac{2}{20}$

= $\frac{6}{20\ 3}$ .

तो, $\frac{}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10.}$

## बहस

किसी भिन्न को किसी अन्य भिन्न से गुणा करने पर, हम उसी विधि का प्रयोग करते हैं जो हमने किसी भिन्न को किसी पूर्ण संख्या से गुणा करते समय अपनाई थी। हमने इस प्रकार गुणा किया:




$\frac{3}{4}$ $\frac{2}{} \div 4 = 5$ $\frac{2}{20}$ गुण्य को 4 से भाग दें।

$\frac{3}{4}$ $3 \times \frac{2}{20} = \frac{6}{}$ = गुण्य को 3 से भाग दें। 20

इस समझ का उपयोग करते हुए, 4 को गुणा करें $\frac{5}{} \times \frac{3}{2}$.

गणित बात करना

सबसे पहले, आइए इकाई वर्ग को 2 के रूप में दर्शाते हैं 3

पूर्ण। चूँकि, भिन्न एक पूर्ण और 2 है $\frac{3}{}$

आधे भाग को इस प्रकार देखा जा सकता है:

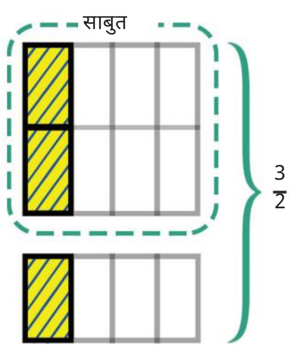
गुणन के चरणों का पालन करते हुए, हमें

पहले इस भिन्न को 4 बराबर भागों में बाँटें। यह $\frac{3}{2}$ हो सकती है

चित्र 8.2 में पीले रंग के साथ दिखाए अनुसार किया जाना चाहिए

प्राप्त अंश का प्रतिनिधित्व करने वाला छायांकित क्षेत्र 3

इसे चार बराबर भागों में बाँटकर प्राप्त किया जाता है। इसका मान क्या है? 2




चित्र 8.2

हम देखते हैं कि सम्पूर्ण भाग विभाजित है -

2 पंक्तियाँ और 4 कॉलम,

2 × 4 = 8 बराबर भाग बनाएं।

छायांकित भागों की संख्या = 3.

अतः पीला छायांकित भाग = 8 $\frac{3}{}$.

अब, अगला चरण इस परिणाम को 5 से गुणा करना है। इससे 5 प्राप्त होता है

और का गुणनफल : $\frac{\ }{4}$ $\frac{3}{2}$

$\frac{5}{4} \times \frac{3}{\ }$ = 5 × 2 $\frac{3}{8} = \frac{15}{8}$.

## आयत के क्षेत्रफल और भिन्न के बीच संबंध गुणा

आकृति 8.3 में, छायांकित आयत की लंबाई और चौड़ाई क्या है?
चूँकि हमने एक इकाई वर्ग (भुजा 1 इकाई) से शुरुआत की थी, इसलिए लंबाई और चौड़ाई इकाई और इकाई हैं। $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$


चित्र 8.3

इस आयत का क्षेत्रफल क्या है? हम देखते हैं कि ऐसे 8 आयतों का क्षेत्रफल 1 वर्ग इकाई है। इसलिए, प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल

वर्ग $\frac{1}{8}$ इकाई है।

? क्या आप क्षेत्रफल और लम्बाई व चौड़ाई के गुणनफल के बीच कोई संबंध देखते हैं?

भिन्नात्मक भुजाओं वाले आयत का क्षेत्रफल उसकी भुजाओं के गुणनफल के बराबर होता है।

सामान्यतः, यदि हम दो भिन्नों का गुणनफल ज्ञात करना चाहते हैं, तो हम दो भिन्नों को भुजा मानकर बने आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं।

? समझ से बाहर

1. निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए। भिन्नों को दर्शाने के लिए इकाई वर्ग का प्रयोग कीजिए:

(ए) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$

(बी) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$

(सी) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$

(डी) $\frac{1}{6} \times \frac{1}{5}$

अब, 12 ज्ञात कीजिए $\frac{1}{\ } \times \frac{1}{18}$.

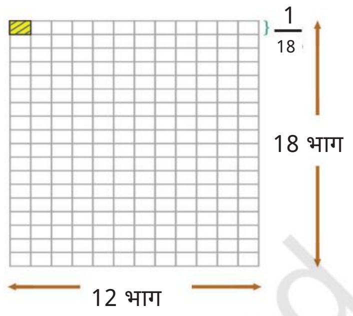
भिन्नों को इकाई वर्ग का उपयोग करके दर्शाना बोझिल है। आइए, ऊपर दिए गए उदाहरणों को देखकर गुणनफल ज्ञात करें।

प्रत्येक मामले में, संपूर्ण को पंक्तियों और स्तंभों में विभाजित किया गया है।

पंक्तियों की संख्या गुण्य का हर है, जो इस मामले में 18 है।

स्तंभों की संख्या हर है गुणक का, जो इस मामले में 12 है।

इस प्रकार, सम्पूर्ण भाग 18 × 12 बराबर भागों में विभाजित हो जाता है।




तो, $\frac{1}{18} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{(18 \times 12)} = \frac{1}{216.}$

इस प्रकार, जब दो भिन्नात्मक इकाइयाँ गुणा करने पर, उनका गुणनफल होता है

$$\frac{1}{(\text{हरों का गुणनफल}).}$$

हम इसे इस प्रकार व्यक्त करते हैं:

$$\frac{1}{\text{बी}} \times \frac{1}{\text{डी}} = \frac{1}{\text{बी} \times \text{डी}}.$$

2. निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए। भिन्नों को दर्शाने और संक्रियाएँ करने के लिए एक इकाई वर्ग का उपयोग कीजिए।

(ए) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ (बी) $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$

(सी) $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$ (डी) $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5}$

## अंश और हर का गुणन

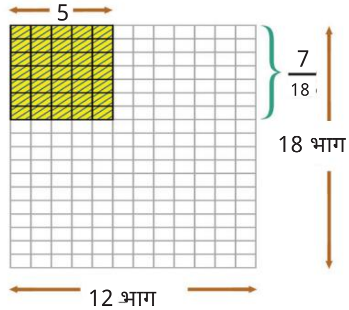
अब, 12 ज्ञात कीजिए $\frac{5}{\ } \times \frac{7}{18.}$

पिछले मामले की तरह, आइए हम चरण दर चरण गुणा करके गुणनफल ज्ञात करें।

सबसे पहले, पूरे को 18 पंक्तियों और 12 स्तंभों में विभाजित किया जाता है, जिससे 12 × 18 बराबर भाग बनते हैं।


12 को भाग देने पर जो मान प्राप्त होता है वह 18 होता है $\frac{7}{\ }$

भागों का योग $\frac{7}{(12 \times 18) \text{ है}}$ .




फिर, हम इस परिणाम को 5 से गुणा करके (5 × 7) प्राप्त करते हैं

गुणनफल यह (12 × 18) है।

तो, $\frac{5}{12} \times \frac{7}{8} = \frac{(5 \times 7)}{(12 \times 18)} = \frac{35}{216}.$

इससे हम देख सकते हैं कि, सामान्य तौर पर,

$$\frac{\text{ए}}{\text{बी}} \times \frac{\text{सी}}{\text{डी}} = \frac{\text{ए} \times \text{सी}}{\text{बी} \times \text{डी}}.$$

इस सूत्र को सर्वप्रथम सामान्य रूप में ब्रह्मगुप्त ने 628 ई. में अपने ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त में प्रस्तुत किया था।

उपरोक्त सूत्र तब भी काम करता है जब गुणक या गुणज एक पूर्ण संख्या हो। हम पूर्ण संख्या को हर 1 वाली भिन्न के रूप में आसानी से लिख सकते हैं। उदाहरण के लिए,

3 × $\frac{3}{4}$ को लिखा जा सकता है $\frac{3}{1} \times \frac{3}{4}$

$$= \frac{3 \times 3}{1 \times 4} = \frac{9}{4}.$$

और,

$\frac{3}{5}$ × 4 को लिखा जा सकता है $\frac{3}{5} \times \frac{4}{1}$

$$= \frac{3 \times 4}{5 \times 1} = \frac{12}{5}.$$

## भिन्नों का गुणन—न्यूनतम रूप में सरलीकरण

? निम्नलिखित भिन्नों को गुणा करें और गुणनफल को उसके न्यूनतम रूप में व्यक्त करें:

$$\frac{12}{7} \times \frac{5}{24}$$

अंश (12 और 5) और हर को गुणा करने के बजाय
पहले (7 और 24) और फिर सरलीकरण करके, हम निम्नलिखित कर सकते हैं:

$$\frac{12}{7} \times \frac{5}{24} = \frac{12 \times 5}{7 \times 24}$$

हम देखते हैं कि दोनों गोलाकार संख्याओं का उभयनिष्ठ गुणनखंड 12 है।
हम जानते हैं कि अंश और हर को सार्व गुणनखंड से भाग देने पर भिन्न अपरिवर्तित रहती है। इस स्थिति में, हम उन्हें 12 से भाग दे सकते हैं।

Machine Translated by Google



$$\frac{\cancel{12}^{1} \times 5}{7 \times \cancel{24}_{2}} = \frac{1 \times 5}{7 \times 2} = \frac{5}{14}.$$

आइये इसी तकनीक का उपयोग करके एक और गुणा करें।

$$\frac{14}{15} \times \frac{25}{42}$$

$$\frac{\cancel{14}^{1} \times \cancel{25}^{5}}{\cancel{15}_{3} \times \cancel{42}_{3}} = \frac{1 \times 5}{3 \times 3} = \frac{5}{9}.$$

भिन्नों को गुणा करते समय, हम अंश और हर को गुणा करने से पहले उनके सार्व गुणनखंडों से भाग दे सकते हैं। इसे सार्व गुणनखंडों को रद्द करना कहते हैं।

## इतिहास की एक चुटकी

भारत में, किसी भिन्न को उसके न्यूनतम पदों में बदलने की प्रक्रिया — जिसे अपवर्तन कहते हैं — इतनी प्रसिद्ध है कि इसका उल्लेख एक गैर-गणितीय ग्रंथ में भी मिलता है। एक जैन विद्वान उमास्वाति (लगभग 150 ई.) ने एक दार्शनिक ग्रंथ में इसे उपमा के रूप में प्रयोग किया था।

## ? समझ से बाहर

7

1. एक पानी की टंकी को एक नल से भरा जाता है। यदि नल 1 घंटे के लिए खुला रहता है, तो 10

टंकी भर जाती है। यदि नल खुला है तो टंकी का कितना भाग भर गया है?

के लिए

(ए) 1 घंटा 3 ______

(बी) 2 घंटा 3 ______

(सी) 3 घंटा 4 ______

(डी) 7 घंटा 10 ______

(ई) टंकी को भरने के लिए नल को कितनी देर तक चलना चाहिए?

कोशिश यह

1

2. सरकार ने सड़क बनाने के लिए सोमू की ज़मीन ले ली है।

अब सोमू के पास ज़मीन का कितना हिस्सा बचा है? वह आधा हिस्सा दे देती है

$\frac{1}{}$

शेष भूमि अपनी बेटी कृष्णा को और 3

वह इसे अपने बेटे बोरा को दे देती है। उन्हें उनका हिस्सा देने के बाद, वह उसे अपने पास रख लेती है।

शेष भूमि अपने लिए रख ली।

(क) कृष्ण को मूल भूमि का कितना भाग मिला?

(ख) बोरा को मूल भूमि का कितना हिस्सा मिला?

(ग) सोमू ने मूल भूमि का कितना भाग अपने लिए रखा?

3. 3 फीट और 9 फीट भुजाओं वाले एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{5}$

4. त्सेवांग अपने बगीचे में एक पंक्ति में चार पौधे लगाता है।

दो पौधों के बीच का अंतर और अंतिम पौधा है। $\frac{3}{}$ मी. पहले 4 के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए

[संकेत: चार पौधों वाला एक कच्चा चित्र बनाइए 3

दो पौधों के बीच की दूरी के साथ $\frac{}{4}$ एम]

5. कौन भारी है: 15 $\frac{12}{}$ 500 ग्राम या 4 किलो? $\frac{3}{20}$

## क्या गुणनफल सदैव गुणित संख्याओं से अधिक होता है?

चूंकि, हम जानते हैं कि जब किसी संख्या को 1 से गुणा किया जाता है, तो गुणनफल अपरिवर्तित रहता है, इसलिए हम संख्याओं के उन युग्मों को गुणा करने पर विचार करेंगे जिनमें से कोई भी 1 नहीं है।

जब हम 1 से बड़ी दो गिनती संख्याओं को गुणा करते हैं, मान लीजिए 3 और 5, गुणनफल दोनों गुणा की जा रही संख्याओं से अधिक है।

$$3 \times 5 = 15$$

गुणनफल 15, 3 और 5 दोनों से अधिक है।

लेकिन जब हम 8 को गुणा करते हैं तो क्या होता है? $\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4} \times 8 = 2$$

उपरोक्त गुणन में गुणनफल 2, 4 से बड़ा है $\frac{1}{}$, लेकिन कम

8 से अधिक.

जब हम और को गुणा करते हैं तो क्या होता है? $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$$

आइए इस गुणनफल की तुलना संख्याओं और से करें। इसके लिए, $\frac{6}{20}$ 4 $\frac{3}{}$ $\frac{2}{5}$

आइए हम इसे 4 के रूप में व्यक्त करें $\frac{3}{}$ $\frac{15}{20}$ 5 $\frac{2}{}$ $\frac{8}{20}$.

इससे हम देख सकते हैं कि गुणनफल दोनों संख्याओं से कम है।

आपके अनुसार गुणनफल कब दोनों संख्याओं के गुणनफल से बड़ा होता है, कब यह दोनों संख्याओं के बीच में होता है, तथा कब यह दोनों संख्याओं से छोटा होता है?

[संकेत: गुणनफल और गुणित संख्याओं के बीच संबंध इस बात पर निर्भर करता है कि वे 0 और 1 के बीच हैं या 1 से बड़ी हैं। संख्याओं के विभिन्न युग्म लीजिए और उनका गुणनफल देखिए। प्रत्येक गुणनफल के लिए, निम्नलिखित प्रश्नों पर विचार कीजिए।]

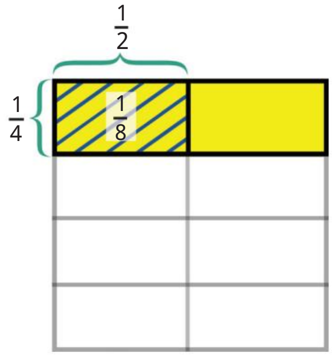
| परिस्थिति | गुणा | संबंध |
|---|---|---|
| स्थिति 1 | दोनों संख्याएँ 1 4 से बड़ी हैं (उदाहरणार्थ, × 4) $\frac{}{3}$ | उत्पाद (16 $\frac{}{3}$) है दोनों से अधिक नंबर |
| स्थिति 2 | दोनों संख्याएँ 0 और 1 3 के बीच हैं (उदाहरणार्थ, 4 — × $\frac{2}{5}$) | उत्पाद ( $\frac{3}{10}$) है दोनों संख्याओं से कम |
| स्थिति 3 | एक संख्या 0 और 1 के बीच है, और एक संख्या 1 3 से बड़ी है (उदाहरणार्थ, × 5) $\frac{}{4}$ | उत्पाद (15 —) है संख्या से 4 कम 1 से बड़ा और 0 और 1 के बीच की संख्या से बड़ा |

प्रत्येक स्थिति के लिए ऐसे और उदाहरण बनाएं तथा गुणनफल और गुणा की जाने वाली संख्याओं के बीच संबंध का अवलोकन करें।

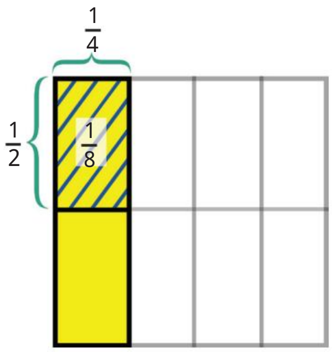
? गुणनफल और गुणनफल के बीच संबंध के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? रिक्त स्थान भरें:

- जब गुणा की जाने वाली संख्याओं में से एक 0 और 1 के बीच होती है, तो गुणनफल दूसरी संख्या से ____________ (अधिक/कम) होता है।
- जब गुणा की जाने वाली संख्याओं में से एक 1 से बड़ी हो, तो गुणनफल दूसरी संख्या से _____________ (बड़ी/छोटी) होता है।

## गुणन का क्रम




हम जानते हैं कि 2 $\frac{1}{\ } \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.




अब, 4 क्या है? $\frac{1}{\ } \times \frac{1}{2}$?

वह भी. $\frac{1}{8}$

सामान्यतः ध्यान रखें कि आयत का क्षेत्रफल वही रहता है, भले ही उसकी लम्बाई और चौड़ाई आपस में बदल दी जाए।

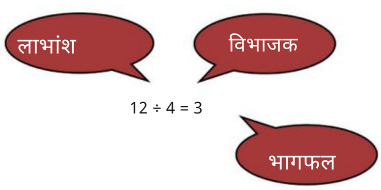
गुणन का क्रम मायने नहीं रखता। इस प्रकार,

$$\frac{\text{ए}}{\text{बी}} \times \frac{\text{सी}}{\text{डी}} = \frac{\text{सी}}{\text{डी}} \times \frac{\text{ए}}{\text{बी}}.$$

इसे ब्रह्मगुप्त के भिन्नों को गुणा करने के सूत्र से भी देखा जा सकता है।

## 8.2 भिन्नों का विभाजन

12 ÷ 4 क्या होता है? यह तो आप जानते ही हैं।
लेकिन क्या इस समस्या को गुणन समस्या के रूप में पुनः प्रस्तुत किया जा सकता है?
12 पाने के लिए 4 से क्या गुणा करना होगा? यानी,




$$4 \times ? = 12$$

हम भाग को गुणन में बदलने की इस तकनीक का उपयोग कर सकते हैं
भिन्नों को विभाजित करने की समस्याएँ. 2

1 ÷ क्या है ? $\frac{\ }{3}$

आइए इसे गुणन समस्या के रूप में पुनः लिखें

$$\frac{2}{3} \times ? = 1$$

3 से क्या गुणा करना चाहिए? $\frac{2}{\ }$ उत्पाद 1 प्राप्त करने के लिए?

यदि हम किसी तरह 2 और 3 को हटा दें तो हमारे पास 1 बचेगा।

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \underbrace{\boxed{\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}}}_{\text{उत्तर}} = 1$$

इसलिए,

$$1 \div 3\ \frac{2}{\ } = \frac{3}{2}.$$

आइये एक और समस्या का प्रयास करें:

$$3 \div 3\ \frac{2}{\ }.$$

यह वैसा ही है

$$\frac{2}{3} \times ? = 3.$$

क्या आप इसका उत्तर ढूंढ सकते हैं?

हम जानते हैं कि 1 पाने के लिए किससे गुणा करना है। 2 हमें बस उस 3 को गुणा करना है

3 से गुणा करने पर 3 प्राप्त होगा। अतः,

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \underbrace{\boxed{\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times 3}}_{\text{उत्तर}} = 3$$

इसलिए,

$$3 \div 3\ \frac{2}{\ } = \frac{3}{\ } \times 3 = 2\ \frac{9}{2}.$$

क्या है $\frac{1}{5} \div \frac{1}{2}$ ?

इसे गुणन समस्या के रूप में पुनः लिखने पर, हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{1}{\ } \times ? = 2\ \frac{1}{5}.$$

हम इसका समाधान कैसे करें?

$$\frac{1}{\cancel{\ }} \times \boxed{\cancel{2} \times 2\ 5\ \frac{1}{\ }} = \frac{1}{5}$$

उत्तर

इसलिए,

$$\frac{1}{5} \div \frac{1}{\ } = 2 \times 2\ \ \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

क्या है $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$ ?

इसे गुणन के रूप में पुनः लिखने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{3}{\ } \times ? = 5\ \ \frac{2}{3}.$$

हम इसका समाधान कैसे करेंगे?

$$\frac{3}{\cancel{5}} \times \boxed{\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} \times \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

उत्तर

इसलिए,

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = \frac{5}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}.$$

## बहस

ऊपर दिए गए प्रत्येक भाग के प्रश्न में, देखिए कि हमने उत्तर कैसे पाया। क्या हम कोई ऐसा नियम बना सकते हैं जो हमें बताए कि दो भिन्नों का भाग कैसे किया जाता है?

आइये हम पिछली समस्या पर विचार करें।

हर भाग समस्या में हमारे पास एक भागफल, भाजक और भागफल होता है। भागफल निकालने के लिए हम जिस तकनीक का इस्तेमाल करते हैं वह है:

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$$

लाभांश

विभाजक

$$= \frac{5}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$$

भागफल

1. सबसे पहले वह संख्या ज्ञात कीजिए जिसे भाजक से गुणा करने पर 1 प्राप्त हो।

हम देखते हैं कि परिणामी संख्या एक भिन्न है जिसका अंश भाजक का हर है तथा हर भाजक का अंश है।

भाजक के लिए यह भिन्न है। हम 5 $\frac{3}{\ }$ का व्युत्क्रम कहते हैं $\frac{5}{3}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{3}{5}$.

जब हम किसी भिन्न को उसके व्युत्क्रम से गुणा करते हैं, तो हमें 1 प्राप्त होता है। अतः हमारी तकनीक में पहला चरण भाजक का व्युत्क्रम ज्ञात करना है।

2. फिर हम लाभांश को इस व्युत्क्रम से गुणा करके प्राप्त करते हैं भागफल।

संक्षेप में, दो भिन्नों को विभाजित करने के लिए:

• भाजक का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए

• भागफल प्राप्त करने के लिए इसे लाभांश से गुणा करें।

इसलिए,

$$\frac{\text{ए}}{\text{बी}} \div \frac{\text{सी}}{\text{डी}} = \frac{\text{डी}}{\text{सी}} \times \frac{\text{ए}}{\text{बी}} = \frac{\text{डी} \times \text{ए}}{\text{सी} \times \text{बी}}.$$

इसे इस प्रकार पुनः लिखा जा सकता है:

$$\frac{\text{ए}}{\text{बी}} \div \frac{\text{सी}}{\text{डी}} = \frac{\text{ए}}{\text{बी}} \times \frac{\text{डी}}{\text{सी}} = \frac{\text{ए} \times \text{डी}}{\text{बी} \times \text{सी}}.$$

जैसा कि आपने पहले भिन्नों के जोड़, घटाव और गुणन के तरीकों और सूत्रों के बारे में सीखा था, भिन्नों के विभाजन के लिए यह तरीका और सूत्र, इस सामान्य रूप में, पहली बार ब्रह्मगुप्त ने अपने ब्रह्मस्फुटसिद्धांत (628 ई.) में स्पष्ट रूप से बताया था।

तो, उदाहरण के लिए, मूल्यांकन करने के लिए, 3 $\frac{2}{} \div \frac{3}{}$ ब्रह्मगुप्त के सूत्र 5 का उपयोग करके ऊपर, हम लिखते हैं:

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 3} = \frac{10}{9}.$$

## लाभांश, भाजक और भागफल

जब हम दो पूर्ण संख्याओं को विभाजित करते हैं, मान लीजिए 6 ÷ 3, तो हमें भागफल 2 प्राप्त होता है। यहाँ भागफल, लाभांश से कम है।

$$6 \div 3 = 2,\ 2 < 6$$

लेकिन जब हम 6 को से विभाजित करते हैं तो क्या होता है? $\frac{1}{4}$

$$6 \div \frac{1}{4} = 24.$$

यहाँ भागफल लाभांश से अधिक है!

क्या होता है जब हम से भाग देते हैं? $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

यहाँ भी भागफल, लाभांश से अधिक है।

आपको कब लगता है कि भागफल लाभांश से कम है और कब क्या यह लाभांश से अधिक है?

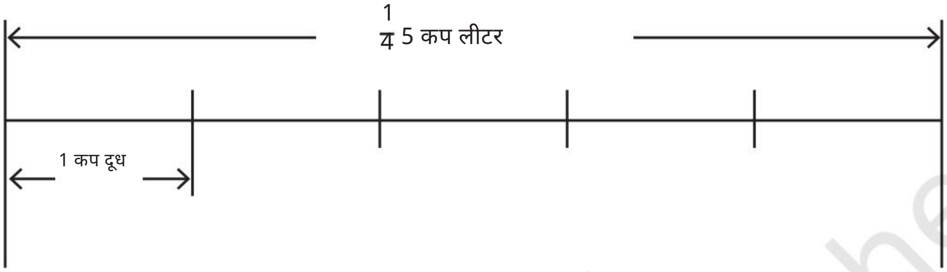
क्या भाजक और भागफल के बीच भी ऐसा ही संबंध है?

गुणन में ऐसे संबंधों की अपनी समझ का उपयोग करें
उपरोक्त प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

## 8.3 भिन्नों से संबंधित कुछ समस्याएँ

उदाहरण 3: लीना ने 5 कप चाय बनाई। इसके लिए उसने 4 लीटर दूध का इस्तेमाल किया। $\frac{1}{}$

प्रत्येक कप चाय में कितना दूध है?




लीना ने 5 कप चाय में 4 $\frac{1}{}$ लीटर दूध इस्तेमाल किया। तो, 1 कप चाय में 4 लीटर दूध

दूध की मात्रा होनी चाहिए:

$$\frac{1}{4} \div 5.$$

इसे गुणन के रूप में लिखने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

5 × (प्रति कप दूध) = 4 $\frac{1}{}$.

हम ब्रह्मगुप्त की विधि के अनुसार विभाजन इस प्रकार करते हैं:

5 का व्युत्क्रम (भाजक) 5 है $\frac{1}{}$.

इस व्युत्क्रम को लाभांश से गुणा करने पर ( 4 $\frac{1}{}$ ), हम पाते हैं

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20.}$$

अतः प्रत्येक कप चाय में एक लीटर दूध होता है। $\frac{1}{20}$

उदाहरण 4: गैर-इकाई भिन्नों के साथ काम करने के कुछ सबसे पुराने उदाहरण मानवता के सबसे पुराने ज्यामिति ग्रंथ, शुल्बसूत्र में पाए जाते हैं।
यहाँ बौधायन के शुल्बसूत्र (लगभग 800 ईसा पूर्व) से एक उदाहरण दिया गया है।

7 वर्ग इकाइयों के क्षेत्र को वर्गाकार $\frac{1}{}$ ईंटों से ढकें, जिनमें से प्रत्येक की 2

भुजाएँ इकाई है। $\frac{1}{5}$

ऐसी कितनी वर्गाकार ईंटों की आवश्यकता है?

प्रत्येक वर्गाकार ईंट का क्षेत्रफल 5 वर्ग मीटर है। $\frac{1}{} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$ वर्ग इकाइयाँ.

कवर किया जाने वाला कुल क्षेत्रफल 7 2 है $\frac{1}{}$ वर्ग इकाई = $\frac{15}{2}$ वर्ग इकाई.

चूँकि (ईंटों की संख्या) × (ईंट का क्षेत्रफल) = कुल क्षेत्रफल,

ईंटों की संख्या = 2 $\frac{15}{} \div \frac{1}{25.}$

भाजक का व्युत्क्रम 25 है।

व्युत्क्रम को लाभांश से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$25 \times 2 \quad \frac{15}{} = \frac{25 \times 15}{2} = \frac{375}{2.}$$

उदाहरण 5: यह समस्या चतुर्वेद पृथुदकस्वामी (लगभग 860 ई.) ने ब्रह्मगुप्त की पुस्तक ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त पर अपनी टिप्पणी में प्रस्तुत की थी।

चार फव्वारे एक कुण्ड को भरते हैं। पहला फव्वारा कुण्ड को एक दिन में भर सकता है। दूसरा इसे आधे दिन में भर सकता है। तीसरा इसे एक चौथाई दिन में भर सकता है। चौथा फव्वारा कुण्ड को एक दिन के पाँचवें हिस्से में भर सकता है। यदि वे सभी एक साथ बहें, तो वे कुण्ड को कितने समय में भरेंगे?

आइये इस समस्या को चरणबद्ध तरीके से हल करें।

एक दिन में, जितनी बार —

- पहला फव्वारा टंकी को भर देगा 1÷ 1 = 1
- दूसरा फव्वारा टंकी को 1 ÷ 2 से भर देगा $\frac{1}{} = $ ___
- तीसरा फव्वारा टंकी को भर देगा 1 ÷ $\frac{1}{4} = $ ___
- चौथा फव्वारा टंकी को 1 ÷ 5 से भर देगा $\frac{1}{} = $ ___

एक दिन में चारों फव्वारे मिलकर टंकी को कितनी बार भरेंगे = 12.

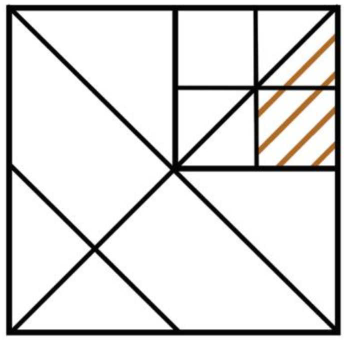
__ + ___ + __ + ___

इस प्रकार, चारों फव्वारों द्वारा टंकी को भरने में लगा कुल समय 1 है।

एक साथ दिन है. $\frac{}{12}$

## भिन्नात्मक संबंध

यहाँ एक वर्ग है जिसके अन्दर कुछ रेखाएँ खींची गई हैं।



चित्र 8.4

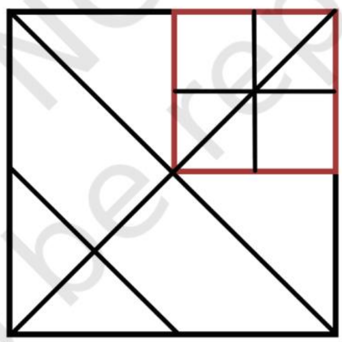
छायांकित क्षेत्र पूरे वर्ग के क्षेत्रफल का कितना भाग है?
कब्ज़ा?

गणित
बात करना

इस समस्या को हल करने के कई तरीके हैं। उनमें से एक यह है:
मान लीजिए पूरे वर्ग का क्षेत्रफल 1 वर्ग इकाई है।

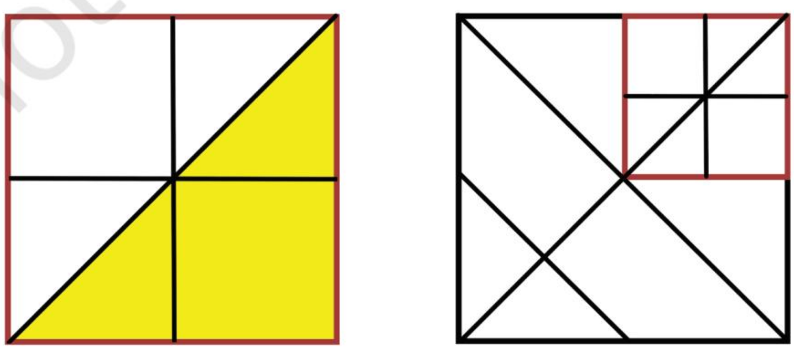
हम देख सकते हैं कि ऊपरी दायाँ वर्ग (चित्र 8.5 में), 4 में से 4 भाग घेरता है $\frac{1}{}$

पूरे वर्ग का क्षेत्रफल.



चित्र 8.5

लाल वर्ग का क्षेत्रफल = वर्ग इकाई $\frac{1}{4}$



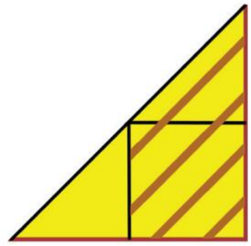
चित्र, 8.6

Machine Translated by Google



आइए इस लाल वर्ग को देखें। इसके अंदर बने त्रिभुज (पीले रंग का) का क्षेत्रफल लाल वर्ग के क्षेत्रफल का आधा है। तो,

पीले त्रिभुज का क्षेत्रफल = 2 $\frac{1}{\ } \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ वर्ग इकाइयाँ.



इस पीले त्रिभुज का कितना भाग छायांकित है?

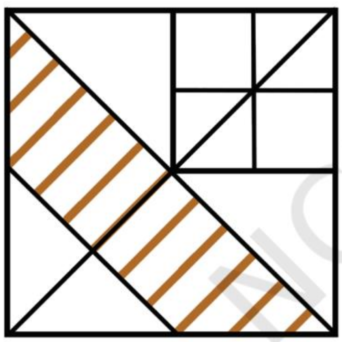
छायांकित क्षेत्र व्याप्त है $\frac{3}{\ }$ 4 के क्षेत्रफल का

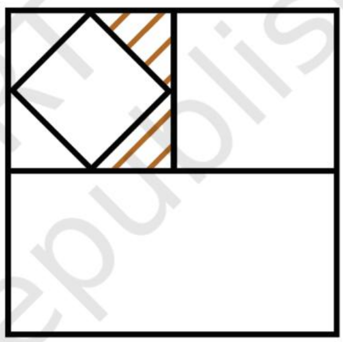
पीला त्रिकोण। क्या आप समझ पा रहे हैं क्यों?

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = 4 $\frac{3}{\ } \times \frac{1}{8} = \frac{3}{32}$ वर्ग इकाइयाँ.

इस प्रकार, छायांकित क्षेत्र पूरे वर्ग के क्षेत्रफल का 1/2 भाग $\frac{3}{32}$ घेरता है।

नीचे दी गई प्रत्येक आकृति में, बड़े वर्ग का वह अंश ज्ञात कीजिए जो छायांकित क्षेत्र घेरता है।





हम अगले अध्याय में इस तरह की और अधिक रोचक समस्याओं का समाधान करेंगे।

## एक नाटकीय दान

निम्नलिखित समस्या भास्कराचार्य (भास्कर द्वितीय) की पुस्तक, लीलावती, जो 1150 ई. में लिखी गई थी, से अनुवादित है। 1

"हे बुद्धिमान! एक कंजूस ने एक भिखारी को पाँच में से पाँच दिए।" — $\frac{1}{16\ 4}$ $\frac{1}{\ }$ $\frac{1}{\ }$ 2 में से $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$

एक ड्रामा। अगर तुम्हें भिन्नों का गणित अच्छी तरह आता है, तो मुझे बताओ ओ

बच्चे, कंजूस ने भिखारी को कितनी कौड़ियाँ दीं।"

द्रम्मा उस ज़माने में इस्तेमाल होने वाले चाँदी के सिक्के को कहते हैं। कहानी कहती है कि एक द्रम्मा 1280 कौड़ियों के बराबर होता था। आइए देखें कि उस व्यक्ति ने द्रम्मा का कितना अंश दिया:

$$\frac{\ }{(1\ 2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{16} \times \frac{\ }{1\ 4)\text{ वें}}$$ एक नाटक का हिस्सा.

इसका मूल्यांकन करने पर 7680 प्राप्त होता है। 6

इसके निम्नतम रूप में सरलीकरण करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{6}{7680} = \frac{1}{1280}.$$

अतः एक कौड़ी भिखारी को दे दी गई।

आप उत्तर में भास्कराचार्य का हास्य देख सकते हैं! कंजूस ने भिखारी को सबसे कम मूल्य का केवल एक सिक्का (कौड़ी) दिया गया।

बारहवीं शताब्दी के आसपास, भारतीय उपमहाद्वीप के विभिन्न राज्यों में कई प्रकार के सिक्के प्रचलन में थे। सबसे अधिक प्रचलित सिक्के थे सोने के सिक्के (जिन्हें दीनार/गद्याना और हूण कहा जाता था), चाँदी के सिक्के (जिन्हें द्रम्मा/टंका कहा जाता था), ताँबे के सिक्के (जिन्हें कसु/पण और मशक कहा जाता था), और कौड़ियाँ। इन सिक्कों के बीच सटीक विनिमय दर क्षेत्र, समयावधि, आर्थिक परिस्थितियों, सिक्कों के भार और उनकी शुद्धता के आधार पर भिन्न होती थी।

सोने के सिक्के उच्च मूल्य के होते थे और इनका उपयोग बड़े लेन-देन और धन संचय के लिए किया जाता था। चाँदी के सिक्के रोज़मर्रा के लेन-देन में ज़्यादा इस्तेमाल होते थे। ताँबे के सिक्के कम मूल्य के होते थे और इनका उपयोग छोटे लेन-देन में किया जाता था। कौड़ियाँ सबसे कम मूल्य की होती थीं और इनका उपयोग बहुत छोटे लेन-देन और छुट्टे के रूप में किया जाता था।

यदि हम मान लें कि 1 स्वर्ण दीनार = 12 चांदी के द्रम्मा, 1 चांदी के द्रम्मा = 4 तांबे के पण, 1 तांबे के पण = 6 मशक, और 1 पण = 30 कौड़ियां,

1 तांबे का पैना = 48 $\frac{1}{\phantom{0}}$ gold dinar ( 1 $\frac{\phantom{0}}{12}$ × $\frac{\phantom{0}}{1\ 4}$)

1 कौड़ी का खोल =____ तांबे का पैन

1 कौड़ी खोल =____ सोने का दीनार.

## इतिहास की एक चुटकी

जैसा कि आपने देखा, भिन्न एक महत्वपूर्ण प्रकार की संख्या है, जो विभिन्न प्रकार की रोज़मर्रा की समस्याओं में महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है, जिनमें मात्राओं को बराबर बाँटना और विभाजित करना शामिल है। गैर-इकाई भिन्नों की सामान्य अवधारणा, जैसा कि हम आज उपयोग करते हैं—जो जोड़, घटाव, गुणा और भाग की अंकगणितीय संक्रियाओं से युक्त होती है—का विकास मुख्यतः भारत में हुआ। प्राचीन भारतीय ज्यामिति ग्रंथ, जिन्हें शुल्बसूत्र कहा जाता है—जो 800 ईसा पूर्व तक जाते हैं, और अनुष्ठानों के लिए अग्नि वेदियों के निर्माण से संबंधित थे—सामान्य गैर-इकाई भिन्नों का व्यापक रूप से उपयोग करते थे, जिसमें ऐसी भिन्नों का विभाजन भी शामिल था, जैसा कि हमने उदाहरण 3 में देखा।

150 ईसा पूर्व से ही भारत की लोकप्रिय संस्कृति में भिन्नों का प्रयोग आम बात हो गई थी, जैसा कि प्रतिष्ठित जैन विद्वान उमास्वाति के दार्शनिक कार्य में भिन्नों को न्यूनतम पदों में कम करने के एक अनौपचारिक संदर्भ से स्पष्ट होता है।

भिन्नों पर अंकगणितीय संक्रियाएँ करने के सामान्य नियम—अर्थात् आधुनिक रूप में, जिसमें हम आज उन्हें करते हैं—सर्वप्रथम ब्रह्मगुप्त ने 628 ई. में अपने ब्रह्मस्फुटसिद्धांत में संहिताबद्ध किए थे । हम सामान्य भिन्नों के योग और योग के उनके तरीकों को पहले ही देख चुके हैं। सामान्य भिन्नों को गुणा करने के लिए, ब्रह्मगुप्त ने

लिखा:

"दो या दो से अधिक भिन्नों का गुणनफल अंशों के गुणनफल को हरों के गुणनफल से भाग देकर प्राप्त किया जाता है।"

(ब्रह्मस्फुटसिद्धांत, श्लोक 12.1.3)

वह है,

$$\frac{\text{ए}}{\text{बी}} \times \frac{\text{सी}}{\text{डी}} = \frac{\text{ए} \times \text{सी}}{\text{बी} \times \text{डी}}.$$

सामान्य भिन्नों के विभाजन के लिए ब्रह्मगुप्त ने लिखा:

"भिन्नों का विभाजन भाजक के अंश और हर को आपस में बदलकर किया जाता है; फिर भाज्य के अंश को (नए) अंश से गुणा किया जाता है, और हर को (नए) हर से गुणा किया जाता है।"

1150 ई. में भास्कर द्वितीय ने अपनी पुस्तक लीलावती में पारस्परिकता की धारणा के संदर्भ में ब्रह्मगुप्त के कथन को और स्पष्ट किया है:

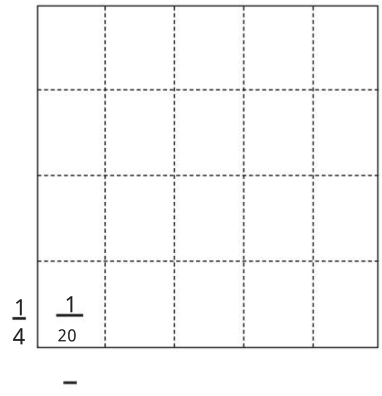
"एक भिन्न को दूसरी भिन्न से भाग देना, पहली भिन्न को दूसरी भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करने के बराबर है।" (लीलावती, श्लोक 2.3.40)

ये दोनों श्लोक इस सूत्र के समतुल्य हैं:

$$\frac{\text{ए}}{\text{बी}} \div \frac{\text{सी}}{\text{डी}} = \frac{\text{ए}}{\text{बी}} \times \frac{\text{डी}}{\text{सी}} = \frac{\text{ए} \times \text{डी}}{\text{बी} \times \text{सी}}.$$

भास्कर प्रथम ने अपनी 629 ई. की टीका आर्यभटीयभाष्य में आर्यभट्ट के 499 ई. के कार्य में, भिन्नों के गुणन की ज्यामितीय व्याख्या (जिसे हमने पहले देखा था) को एक वर्ग को लंबाई और चौड़ाई के साथ समान भागों में विभाजित करके आयतों में विभाजित करने के रूप में वर्णित किया गया था।

कई अन्य भारतीय गणितज्ञ, जैसे श्रीधराचार्य (लगभग 750 ई.), महावीराचार्य (लगभग 850 ई.), चतुर्वेद प्रियथूदकस्वामी (लगभग 860 ई.), और भास्कर द्वितीय 1




(लगभग 1150 ई.) ने अंकगणित का प्रयोग विकसित किया 5

अंशों का काफी आगे तक विस्तार।

भास्कर प्रथम की दृश्य व्याख्या कि 1 $\frac{1}{5}$ 4 $\frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

भिन्नों और x का भारतीय सिद्धांत

अंकगणितीय संक्रियाओं का सिद्धांत मोरक्को के अल-हस्सार (लगभग 1192 ई.) जैसे अरब और अफ्रीकी गणितज्ञों तक पहुँचा और उनके प्रयोग को और आगे बढ़ाया। अगले कुछ वर्षों में यह सिद्धांत अरबों के माध्यम से यूरोप तक पहुँचा।

सदियों से चली आ रही इस अवधारणा का यूरोप में व्यापक उपयोग 17वीं शताब्दी के आसपास हुआ, जिसके बाद यह दुनिया भर में फैल गई। यह सिद्धांत आज आधुनिक गणित में वास्तव में अपरिहार्य है।

## ? समझ से बाहर

1. निम्नलिखित का मूल्यांकन करें:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $3 \div 9\ \frac{7}{\ }$ | $\frac{14}{4} \div 2$ | $\frac{2}{3} \div \frac{2}{3}$ | $\frac{14}{6} \div \frac{7}{3}$ |
| $\frac{4}{3} \div \frac{3}{4}$ | $\frac{7}{4} \div \frac{1}{7}$ | $\frac{8}{2} \div \frac{4}{15}$ | |
| $\frac{1}{5} \div \frac{1}{9}$ | $\frac{1}{6} \div \frac{11}{12}$ | $3 \div \frac{2}{13}\ \frac{3}{8}$ | |

2. नीचे दिए गए प्रत्येक प्रश्न के लिए, उस व्यंजक का चयन कीजिए जो समाधान का वर्णन करें। फिर उसे सरल बनाएँ।

(a) मारिया ने अपने द्वारा बनाए गए बैगों को सजाने के लिए 8 मीटर फीता खरीदा

स्कूल। उसने हर बैग के लिए m का $\frac{1}{\ }$ इस्तेमाल किया और लेस तैयार कर ली। कैसे 4

उसने कितने बैग सजाए?

(i) $8 \times 4\ \frac{1}{\ }$ (ii) $\frac{1}{8} \times \frac{1}{4}$

(iii) $8 \div 4\ \frac{1}{\ }$ (iv) $\frac{1}{4} \div 8$

(बी) $\frac{1}{\ }$ 8 बैज बनाने के लिए 1 मीटर रिबन का उपयोग किया जाता है। 2 मीटर रिबन का मान क्या है?

प्रत्येक बैज के लिए प्रयुक्त रिबन की लंबाई कितनी है?

(मैं) $8 \times 2\ \frac{1}{1}$ (ii) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$

(iii) $8 \div 2$ – (iv) $\frac{1}{2} \div 8$

(c) एक बेकर को चाहिए $\frac{1}{\ }$ एक रोटी बनाने के लिए उसे 6 किलो आटा चाहिए।

5 किलो आटा। वह कितनी रोटियाँ बना सकता है?

(मैं) $5 \times 6\ \frac{1}{1}$ (ii) $\frac{1}{6} \div 5$

(iii) $5 \div 6$ – (iv) $5 \times 6$

3. यदि 4 $\frac{1}{}$ 12 रोटियां बनाने के लिए कितने किलो आटे का उपयोग किया जाता है?

6 रोटियां बनाओ?

4. पाटीगणित, श्रीधराचार्य द्वारा 9वीं शताब्दी में लिखी गई एक पुस्तक

सी.ई., इस समस्या का उल्लेख करते हैं: "मित्र, सोचने के बाद, कौन सी राशि निकलेगी

1 ÷ और 1, ÷ 1 ÷ 1 ÷ 6 , 10 , 13 , 9 को एक साथ जोड़कर प्राप्त किया जा सकता है, $\frac{1}{}$ $\frac{1}{}$ $\frac{1}{}$ $\frac{1}{}$

1 ÷ 2 $\frac{1}{}$ . दोस्त को क्या कहना चाहिए?

5. मीरा 400 पृष्ठों वाला एक उपन्यास पढ़ रही है। उसने 5 पृष्ठों में से 5 पृष्ठ पढ़े। $\frac{1}{}$

कल के पृष्ठों का और आज के पृष्ठों का। 10 पृष्ठों में कितने पृष्ठ और हैं? $\frac{3}{}$

उपन्यास ख़त्म करने के लिए उसे क्या पढ़ने की ज़रूरत है?

6. एक कार 1 लीटर पेट्रोल से 16 किमी चलती है। 2 लीटर पेट्रोल से वह कितनी दूरी तय करेगी? $\frac{3}{}$

लीटर पेट्रोल?

7. अमृतपाल अपनी छुट्टियों के लिए एक जगह तय करता है। अगर वह

ट्रेन, इसमें उसे 5 लगेंगे $\frac{1}{}$ वहाँ पहुँचने में उसे 6 घंटे लगेंगे। अगर वह हवाई जहाज़ से जाता है, तो उसे 6 घंटे लगेंगे।

उसे एक घंटा लगेगा। $\frac{1}{}$ विमान कितने घंटे बचाता है? 2

8. मरियम की दादी ने केक बनाया। मरियम और उसके चचेरे भाई-बहन

केक खत्म हो गया। $\frac{4}{}$ बचा हुआ केक 5 लोगों में बराबर-बराबर बाँट दिया गया।

मरियम की तीन सहेलियाँ। हर सहेली को केक का कितना हिस्सा मिला?

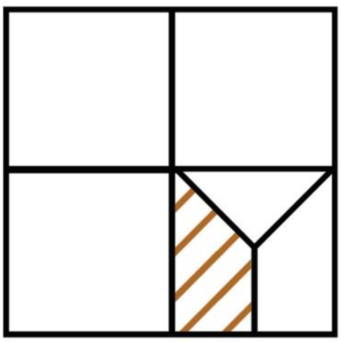
9. (565 ) के गुणनफल का वर्णन करने वाले विकल्प का चयन करें $\frac{}{465} \times \frac{707}{676}$ ):

(ए) > $\frac{565}{465}$ (बी) < 465 $\frac{565}{}$

(सी) > $\frac{707}{676}$ (घ) < $\frac{707}{676}$

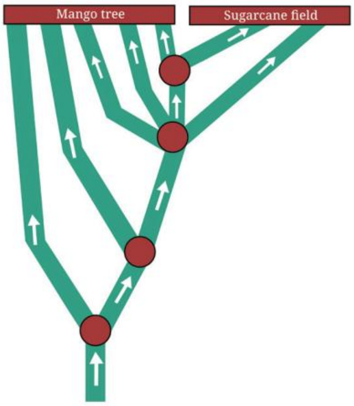
(ई) > 1 (च) < 1

10. सम्पूर्ण वर्ग का कितना भाग छायांकित है?



11. चींटियों का एक समूह भोजन की तलाश में निकला।

खोज करते हुए, वे प्रत्येक बिंदु पर समान रूप से विभाजित होते जाते हैं (जैसा कि चित्र 8.7 में दिखाया गया है) और दो खाद्य स्रोतों तक पहुँचते हैं, एक आम के पेड़ के पास और दूसरा गन्ने के खेत के पास। मूल समूह का कितना भाग प्रत्येक खाद्य स्रोत तक पहुँचा?




चित्र 8.7

12. 1 – 2 क्या है? 1

(1 – 1 2) × (1 – 1 3) ? (1 – 1 2) × (1 – 1

3) × (1 – 1 4) × (1 – 1 5) ? (1 – 1 2) × (1 – 1 3) × (1 – 1 4) × (1 – 1 5) × (1 – 1 6) × (1

– 1 7) × (1 – 1 8) × (1 – 1 9) × (1 – 1 10) ?

एक सामान्य कथन बनाइये और समझाइये।

## सारांश

- भिन्नों के गुणन के लिए ब्रह्मगुप्त का सूत्र:

$$\frac{\text{ए}}{\text{बी}} \times \frac{\text{सी}}{\text{डी}} = \frac{\text{ए} \times \text{सी}}{\text{बी} \times \text{डी}}.$$

- भिन्नों को गुणा करते समय, यदि अंश और हर में कुछ सामान्य गुणनखंड हों, तो हम अंश और हर को गुणा करने से पहले उन्हें रद्द कर सकते हैं।

- गुणन में — जब गुणा की जाने वाली संख्याओं में से एक 0 और 1 के बीच हो, तो गुणनफल दूसरी संख्या से छोटा होता है। यदि गुणा की जाने वाली संख्याओं में से एक 1 से बड़ी हो, तो गुणनफल दूसरी संख्या से बड़ा होता है।

- भिन्न b का व्युत्क्रम $\frac{\text{ए}}{}$ है। $\frac{\text{बी}}{\text{ए}}$ जब हम किसी भिन्न को उसके से गुणा करते हैं पारस्परिक, उत्पाद 1 है.

- भिन्नों के विभाजन के लिए ब्रह्मगुप्त का सूत्र:

$$\frac{\text{ए}}{\text{बी}} \div \frac{\text{सी}}{\text{डी}} = \frac{\text{ए}}{\text{बी}} \times \frac{\text{डी}}{\text{सी}} = \frac{\text{ए} \times \text{डी}}{\text{बी} \times \text{सी}}.$$

- भाग देने में - जब भाजक 0 और 1 के बीच होता है, तो भागफल भाज्य से बड़ा होता है। जब भाजक 1 से बड़ा होता है, तो भागफल भाज्य से छोटा होता है।

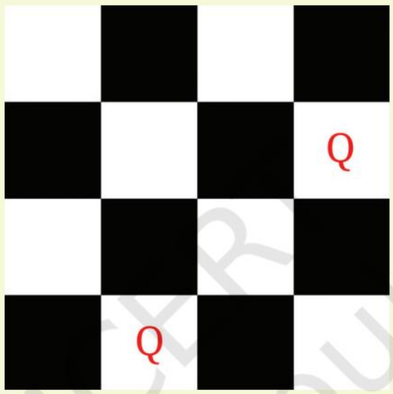
IT'S PUZZLE TIME!

## शतरंज पहेलियाँ—

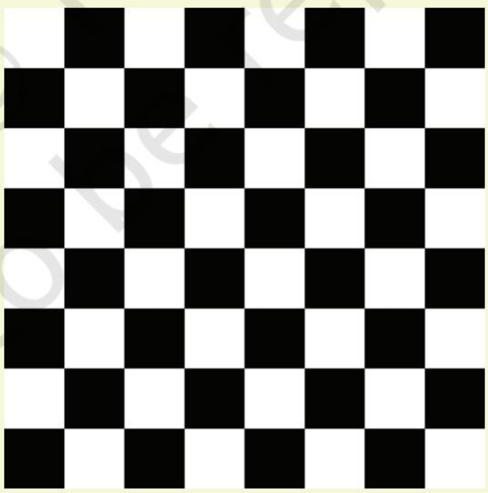
## गैर-आक्रमणकारी क्वींस

शतरंज एक लोकप्रिय दो-खिलाड़ियों वाला रणनीतिक खेल है। इस खेल की उत्पत्ति भारत में हुई है। यह 8x8 के चेकर्ड ग्रिड पर खेला जाता है। इसमें मोहरों के दो सेट होते हैं - काला और सफ़ेद - प्रत्येक खिलाड़ी के लिए एक सेट। जानें कि प्रत्येक मोहरे को कैसे चलना चाहिए और खेल के नियम क्या हैं।

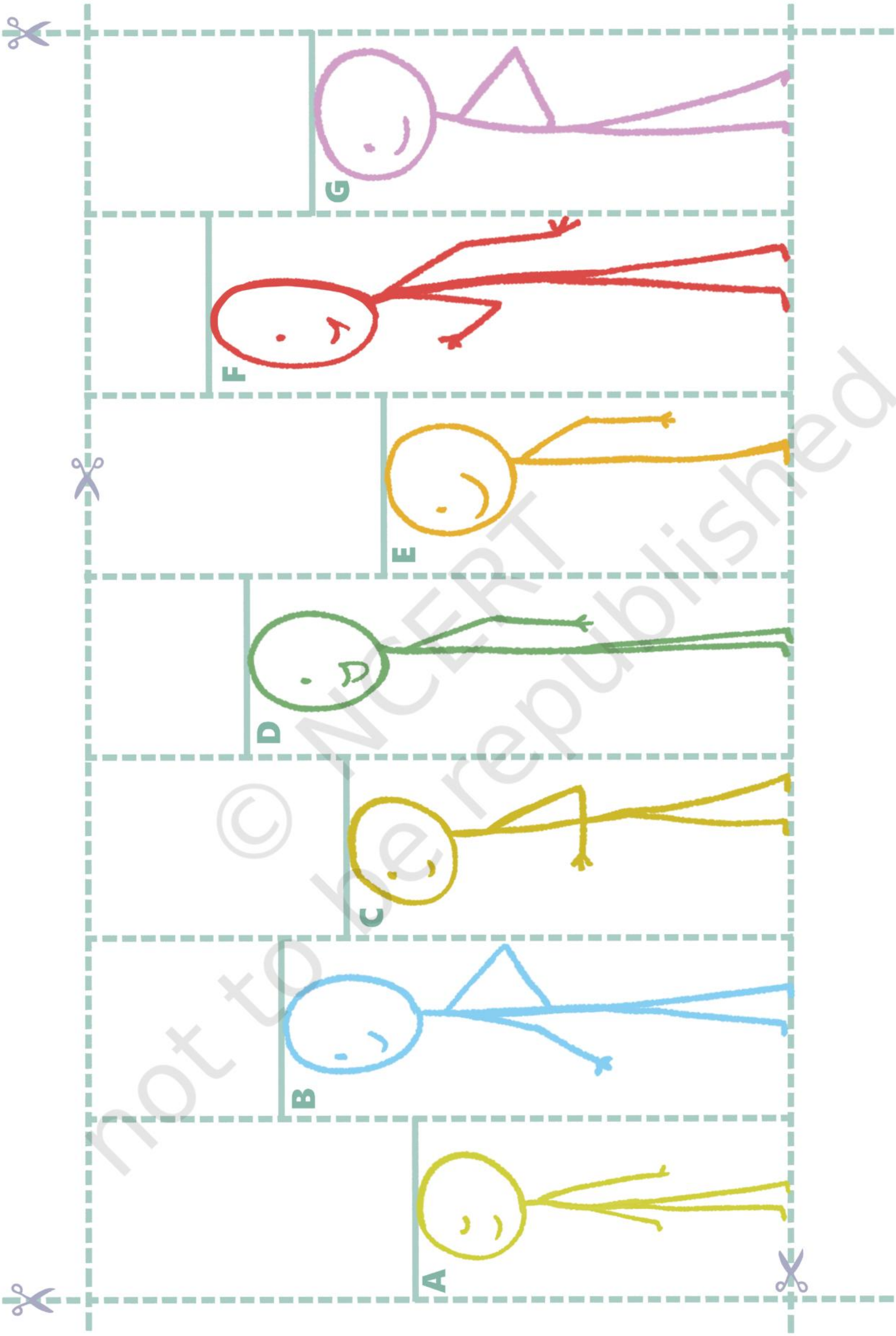
यहाँ एक प्रसिद्ध शतरंज-आधारित पहेली है। अपनी वर्तमान स्थिति से, रानी का मोहरा क्षैतिज, ऊर्ध्वाधर या विकर्ण दिशा में गति कर सकता है।
4 रानियों को इस तरह रखें कि कोई भी 2 रानियाँ एक-दूसरे पर हमला न करें। उदाहरण के लिए, नीचे दी गई व्यवस्था मान्य नहीं है क्योंकि रानियाँ एक-दूसरे पर हमला करने की रेखा में हैं।




अब, इस 8 × 8 ग्रिड पर 8 रानियों को रखें ताकि कोई भी 2 रानियां एक दूसरे पर हमला न करें!



शिक्षण सामग्री पत्रक


G
F
E
D
C
B
A

टिप्पणी