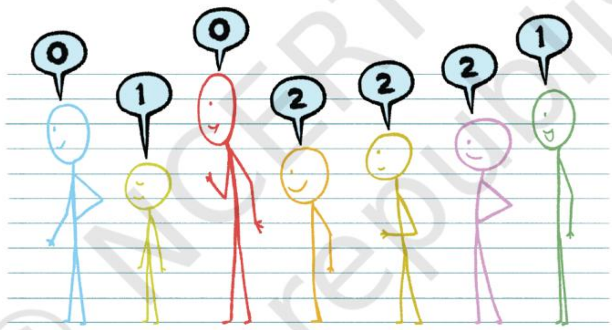
६ ंबर प्ले

0774CH06

६.१ संख्या आपल्याला गोष्टी सांगतात

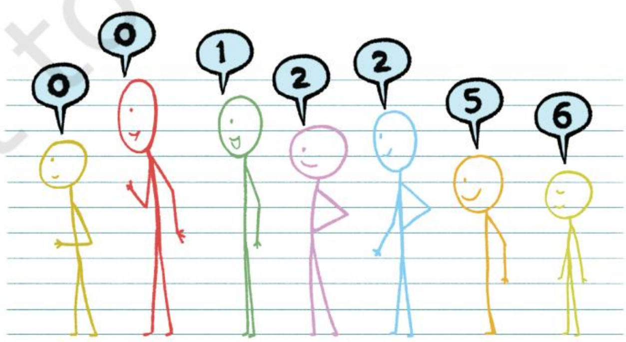
? खालील आकृतीतील संख्या आपल्याला काय सांगतात?

सहावीच्या गणिताच्या पाठ्यपुस्तकातील मुले आठवतात का?
आता, ते वेगळ्या नियमाचा वापर करून संख्यांना कॉल करतात.



? तुम्हाला काय वाटते या संख्यांचा अर्थ काय?

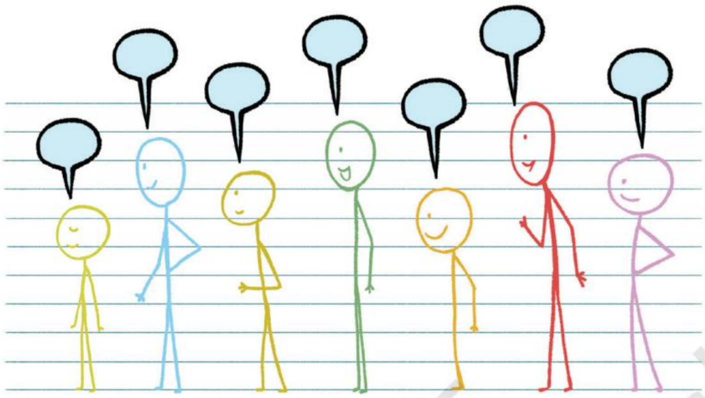
मुले स्वतःची पुनर्रचना करतात आणि प्रत्येकजण एक संख्या म्हणतो.
नवीन व्यवस्थेवर आधारित.



? या संख्या काय दर्शवतात ते तुम्ही शोधू शकाल का? निरीक्षण करा आणि शोधण्याचा प्रयत्न करा.

नियम असा आहे की - प्रत्येक मूल त्यांच्या समोर असलेल्या मुलांची संख्या उच्चारते जे त्यांच्यापेक्षा उंच आहेत. दोन्ही मांडणींमध्ये प्रत्येक मुलाने सांगितलेली संख्या या नियमाशी जुळते का ते तपासा.

? खाली दाखवलेल्या व्यवस्थेसाठी या नियमाच्या आधारे प्रत्येक मुलाने म्हणावे अशी संख्या लिहा.



? समजून घ्या

१. पुस्तकाच्या शेवटी दिलेले स्टिक फिगर कटआउट्स व्यवस्थित करा किंवा उंचीची अशी मांडणी काढा की क्रम खालीलप्रमाणे असेल:

(अ) ०, १, १, २, ४, १, ५

(ब) ०, ०, ०, ०, ०, ०, ०, ०

(क) ०, १, २, ३, ४, ५, ६

(ड) ०, १, ०, १, ०, १, ०

(इ) ०, १, १, १, १, १, १

(फ) ०, ०, ०, ३, ३, ३, ३

२. खाली दिलेल्या प्रत्येक विधानासाठी, ते नेहमी खरे आहे का, फक्त कधीकधी खरे आहे का, की कधीच खरे नाही का ते विचार करा आणि ओळखा. तुमचे तर्क सांगा.

(अ) जर एखाद्या व्यक्तीने '०' म्हटले तर तो गटातील सर्वात उंच आहे.

(b) जर एखादी व्यक्ती सर्वात उंच असेल तर त्यांची संख्या '0' आहे.

(c) पहिल्या व्यक्तीचा क्रमांक '0' आहे.

(ड) जर एखादी व्यक्ती रांगेत पहिल्या किंवा शेवटच्या क्रमांकावर नसेल (म्हणजेच, जर ती मध्ये कुठेतरी उभी असेल), तर ती '०' म्हणू शकत नाही.

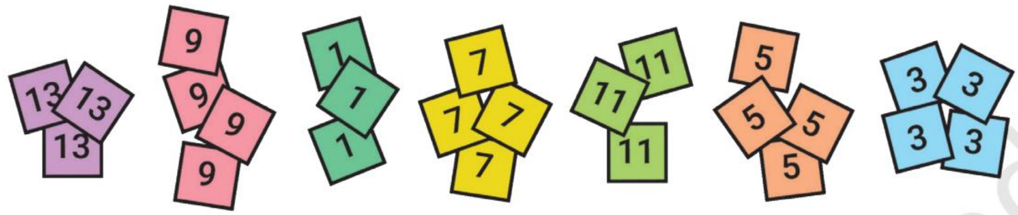
(इ) सर्वात मोठी संख्या उच्चारणारी व्यक्ती सर्वात लहान असते.

(f) ८ लोकांच्या गटात सर्वात मोठी संख्या कोणती असू शकते?

६.२ निवड समता

किशोरकडे काही नंबर कार्ड आहेत आणि तो एका कोड्यावर काम करत आहे: ५ बॉक्स आहेत आणि प्रत्येक बॉक्समध्ये अगदी १ नंबर कार्ड असायला हवे. बॉक्समधील संख्यांची बेरीज ३० असावी. तुम्ही त्याला ते कसे करायचे ते शोधण्यात मदत करू शकाल का?

□ + □ + □ + □ + □ = ३०



३० मध्ये कोणती ५ कार्डे जोडली जातात हे तुम्ही शोधू शकता का? हे शक्य आहे का?
या संग्रहातून ५ कार्डे निवडण्याचे अनेक मार्ग आहेत.
सर्व शक्यता तपासून न पाहता उपाय शोधण्याचा काही मार्ग आहे का?
चला जाणून घेऊया.

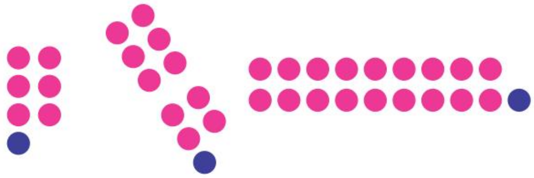
? काही सम संख्या एकत्र करा. तुम्हाला कोणत्या प्रकारची संख्या मिळेल?
किती संख्या जोडल्या तरी काही फरक पडतो का?

कोणतीही सम संख्या जोड्यांमध्ये ठेवता येते, त्यात काहीही शिल्लक राहत नाही.
काही सम संख्या येथे जोड्यांमध्ये मांडलेल्या आहेत.

आकृतीत पाहिल्याप्रमाणे, सम संख्यांची कितीही बेरीज केल्यास त्यामुळे अशी संख्या तयार होईल जी जोड्यांमध्ये व्यवस्थित ठेवता येईल आणि कोणतेही शिल्लक राहणार नाही. दुसऱ्या शब्दांत, बेरीज नेहमीच सम संख्या असेल.

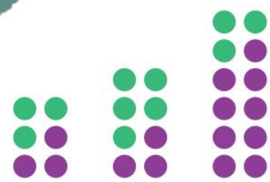
? आता, काही विषम संख्या एकत्र जोडा. तुम्हाला कोणत्या प्रकारची संख्या मिळेल? किती विषम संख्या जोडल्या तरी काही फरक पडतो का?

विषम संख्या जोड्यांमध्ये मांडता येत नाहीत. एक विषम संख्या ही जोड्यांच्या संग्रहापेक्षा एक जास्त असते. काही विषम संख्या खाली दाखवल्या आहेत:



आपण एखाद्या विषम संख्येला जोड्यांच्या संग्रहापेक्षा एक कमी मानू शकतो का?

ही आकृती दाखवते की दोन विषम संख्यांची बेरीज नेहमीच सम असली पाहिजे! हे आणि येथे दिलेले इतर आकडे पुराव्याची आणखी उदाहरणे आहेत !



३ विषम संख्या जोडल्या तर काय होईल? परिणामी बेरीज जोड्यांमध्ये मांडता येईल का? नाही.

(a) 4 विषम संख्या, (b) 5 विषम संख्या आणि (c) 6 विषम संख्यांच्या बेरजेचे काय होते ते शोधा.

किशोर ज्या कोड्याचे निराकरण करण्याचा प्रयत्न करत होता त्याकडे परत जाऊया. ५ रिकामे खोके आहेत. म्हणजे त्याच्याकडे विषम संख्येच्या खोक्या आहेत. सर्व क्रमांकाच्या कार्डांमध्ये विषम संख्या आहेत.

त्यांना ३० ची बेरीज करावी लागेल, जी एक सम संख्या आहे. कोणत्याही ५ विषम संख्या जोडल्याने कधीही सम संख्या मिळणार नाही, किशोर हे कार्ड ३० पर्यंत बेरीज करण्यासाठी बॉक्समध्ये ठेवू शकत नाही.

मार्टिन आणि मारिया या दोन भावंडांचा जन्म अगदी एका वर्षाच्या अंतराने झाला.
आज ते त्यांचा वाढदिवस साजरा करत आहेत. मारिया उद्गारते की त्यांच्या वयाची बेरीज ११२ आहे. हे शक्य आहे का? का किंवा का नाही?

त्यांचा जन्म एका वर्षाच्या अंतराने झाला असल्याने, त्यांच्या वयात (दोन) सलग संख्या असतील. त्यांची वये ५१ आणि ५२ असू शकतात का? ५१ + ५२ = १०३. इतर काही सलग संख्या वापरून पहा आणि त्यांची बेरीज ११२ आहे का ते पहा.

सम आणि विषम संख्यांमध्ये पर्यायी १, २, ३, ४, ५, ... या मोजणीच्या संख्या. कोणत्याही दोन सलग संख्यांमध्ये, एक नेहमीच सम आणि दुसरी नेहमीच विषम असेल!

सम संख्या आणि विषम संख्या यांची बेरीज किती होईल? आपण पाहू शकतो की त्यांची बेरीज जोड्यांमध्ये मांडता येत नाही आणि म्हणून ती विषम संख्या असेल.

११२ ही सम संख्या असल्याने आणि मार्टिन आणि मारिया यांच्या वयांची क्रमिक संख्या असल्याने, त्यांची बेरीज ११२ पर्यंत होऊ शकत नाही.

सम किंवा विषम असण्याचा गुणधर्म दर्शविण्यासाठी आपण समता हा शब्द वापरतो .
उदाहरणार्थ, कोणत्याही दोन सलग संख्यांच्या बेरजेची समता विषम असते. त्याचप्रमाणे, कोणत्याही दोन विषम संख्यांच्या बेरजेची समता सम असते.

समजून घ्या

१. सम आणि विषम संख्यांच्या चित्रमय प्रतिनिधित्वाची तुमची समज वापरून, खालील बेरजेची समता शोधा:

(अ) २ सम संख्या आणि २ विषम संख्यांची बेरीज (उदा., सम + सम + विषम + विषम)

(b) २ विषम संख्या आणि ३ सम संख्यांची बेरीज

(c) ५ सम संख्यांची बेरीज

(d) ८ विषम संख्यांची बेरीज

२. लक्पाकडे त्याच्या पिगी बँकेत १ रुपयांची विषम संख्या, ५ रुपयांची विषम संख्या आणि १० रुपयांची सम संख्या असलेली नाणी आहेत. त्याने एकूण रक्कम काढली आणि त्याला २०५ रुपये मिळाले. त्याने चूक केली का? जर त्याने चूक केली असेल तर का ते स्पष्ट करा. जर त्याने चूक केली नसेल तर त्याच्याकडे प्रत्येक प्रकारची किती नाणी असू शकतात?

३. आपल्याला माहित आहे की:

(अ) सम + सम = सम

(ब) विषम + विषम = सम

(c) सम + विषम = विषम

त्याचप्रमाणे, खालील परिस्थितींसाठी समता शोधा:

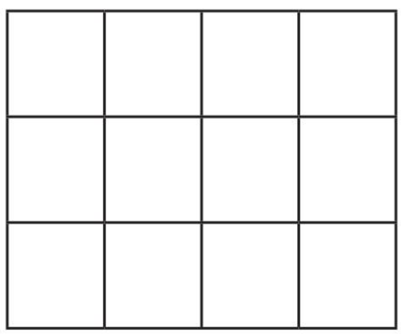
(ड) सम – सम = ____________

(इ) विषम – विषम = (फ) सम – ____________

विषम = (ग) विषम – सम = ____________

____

ग्रिडमध्ये लहान चौरस



३ × ३ ग्रिडमध्ये ९ लहान वर्ग असतात, जे एक विषम संख्या असते. तर ३ × ४ ग्रिडमध्ये १२ लहान वर्ग असतात, जे एक सम संख्या असते.

ग्रिडची परिमाणे पाहता, गुणाकार न काढता तुम्ही लहान चौरसांच्या संख्येची समता सांगू शकता का?

? या ग्रिडमधील लहान चौरसांच्या संख्येची समता शोधा:

(अ) २७ × १३

(ब) ४२ × ७८

(क) १३५ × ६५४

अभिव्यक्तींची समता

बीजगणितीय राशी विचारात घ्या: 3n + 4. n च्या वेगवेगळ्या मूल्यांसाठी , राशीची समता वेगळी असते:

एन	3n + 4 ची किंमत	मूल्याची समता
३	१३	विचित्र
८	२८	सम
१०	३४	सम

? नेहमीच समता असलेली अभिव्यक्ती शोधा.

काही उदाहरणे आहेत: १००p आणि ४८w – २. अधिक शोधण्याचा प्रयत्न करा.

? नेहमी विषम समता असलेल्या अभिव्यक्ती शोधा.

? इतर पदावली तयार करा, जसे की 3n + 4, ज्यात विषम किंवा सम समता असू शकते.

? 6k + 2 ही पदावली 8, 14, 20,... (k = 1, 2, 3,... साठी) मिळते — अनेक सम संख्या गहाळ आहेत.

? सर्व सम संख्यांची यादी करण्यासाठी काही पदावली आहेत का?

सूचना: सर्व सम संख्यांना २ हा घटक असतो.

? सर्व विषम संख्यांची यादी करण्यासाठी काही पदावली आहेत का?

आपण आधी पाहिले की ४ च्या गुणाकारांच्या क्रमातील n वा पद कसा व्यक्त करायचा , जिथे n हा अक्षर-संख्या आहे जो क्रमातील स्थान दर्शवतो (उदा., पहिला, तेविसावा, शंभरावा आणि सतरावा, इ.).

? २ च्या पटीत n वा पद काय असेल ? किंवा, n वा सम संख्या किती असेल?

चला विषम संख्यांचा विचार करूया.

? १०० वी विषम संख्या कोणती?

या प्रश्नाचे उत्तर देण्यासाठी, खालील प्रश्न विचारात घ्या:

१०० वी सम संख्या किती आहे?

हे २ × १०० = २०० आहे.

हे १०० वी विषम संख्या शोधण्यास मदत करते का? चला तुलना करूया टर्म-दर-टर्म सम आणि विषमतेचा क्रम.

सम संख्या: २, ४, ६, ८, १०, १२,...

विषम संख्या: १, ३, ५, ७, ९, ११,...

आपल्याला दिसते की कोणत्याही स्थानावर, विषम संख्या क्रमातील मूल्य सम संख्या क्रमातील मूल्यापेक्षा एक ने कमी असते. अशा प्रकारे, १०० वी विषम संख्या २०० – १ = १९९ आहे.

नववी विषम संख्या शोधण्यासाठी एक सूत्र लिहा .

प्रथम आपण विषम शोधण्यासाठी शिकलेल्या पद्धतीचे वर्णन करूया.

दिलेल्या स्थानावरील संख्या:

(a) त्या स्थानावरील सम संख्या शोधा. ही स्थिती संख्येच्या 2 पट आहे. (b) नंतर सम संख्येतून 1 वजा करा.

हे पदावलीत लिहिल्यास, आपल्याला मिळते

(अ) २न

(ब) २न – १

अशाप्रकारे, 2n हे सूत्र आहे जे n वी सम संख्या देते आणि 2n – 1 हे सूत्र आहे जे n वी विषम संख्या देते.

६.३ ग्रिडमधील काही शोध

या ३ × ३ ग्रिडचे निरीक्षण करा. हे एका साध्या नियमानुसार भरले आहे - १ ते ९ पर्यंतच्या संख्या वापरा, त्यापैकी कोणत्याहीची पुनरावृत्ती न करता. ग्रिडच्या बाहेर वर्तुळाकार संख्या आहेत.

४	७	५	१६
६	१	२	९
३	९	८	२०
१३	१७	१५	

वर्तुळाकार संख्या काय दर्शवतात ते तुम्हाला दिसते का?

पिवळ्या वर्तुळांमधील संख्या संबंधित पंक्ती आणि स्तंभांची बेरीज आहेत.

वर नमूद केलेल्या नियमानुसार खालील ग्रिड भरा:

९			१३
			१४
		५	१८
२४	९	१२	

			२४
४			१५
		३	६
१२	१६	१७	

असे काही प्रश्न स्वतः तयार करा आणि तुमच्या समवयस्कांना आव्हान द्या.

खालील समस्या सोडवण्याचा प्रयत्न करा.

			५
		६	२१
			१९
९	११	२६	

तुम्हाला कदाचित हे लक्षात आले असेल की या ग्रिडसाठी उपाय शोधणे शक्य नाही. असे का आहे?

शक्य तितकी लहान बेरीज ६ = १ + २ + ३ आहे. शक्य तितकी मोठी बेरीज २४ = ९ + ८ + ७ आहे. स्पष्टपणे, वर्तुळातील कोणतीही संख्या ६ पेक्षा कमी किंवा २४ पेक्षा जास्त असू शकत नाही. ग्रिडमध्ये ५ आणि २६ बेरीज आहेत.

म्हणून, हे अशक्य आहे!

आम्ही सोडवलेल्या आधीच्या ग्रिड्समध्ये, किशोरच्या लक्षात आले की वर्तुळांमधील सर्व संख्यांची बेरीज नेहमीच 90 असते. तसेच, विद्याने पाहिले की तिन्ही ओळींसाठी किंवा तिन्ही स्तंभांसाठी वर्तुळातील संख्यांची बेरीज नेहमीच 45 असते. तुम्ही सोडवलेल्या मागील ग्रिड्समध्ये हे खरे आहे का ते तपासा.

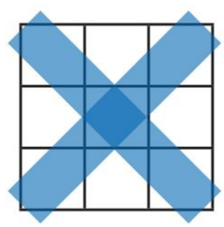
पंक्तीची बेरीज आणि स्तंभांची बेरीज नेहमी ४५ मध्ये का जोडली पाहिजे?

या ग्रिडवरून, आपण पाहू शकतो की सर्व ओळींची बेरीज एकत्रितपणे १ - ९ संख्यांच्या बेरजेइतकीच असेल. हे स्तंभांच्या बेरजेसाठी देखील पाहिले जाऊ शकते. १ - ९ संख्यांची बेरीज आहे

४	७	५	४+७+५
६	१	२	६+१+२
३	९	८	३+९+८
४+६+३	७+१+९	५+२+८	

१ + २ + ३ + ४ + ५ + ६ + ७ + ८ + ९ = ४५.

जर प्रत्येक पंक्ती, प्रत्येक स्तंभ आणि प्रत्येक कर्ण यांची बेरीज समान संख्या झाली तर संख्यांच्या चौरस ग्रिडला जादूचा चौरस म्हणतात.
या संख्येला जादूची बेरीज म्हणतात .
चित्रात कर्ण दाखवले आहेत.



ग्रिडमध्ये संख्या यादृच्छिकपणे भरून जादूचा चौरस तयार करण्याचा प्रयत्न करणे कठीण असू शकते! कारण पुनरावृत्ती न करता १ ते ९ संख्या वापरून ३ × ३ ग्रिड भरण्याचे अनेक मार्ग आहेत. खरं तर, असे आढळून येते की अशा अगदी ३,६२,८८० मार्ग आहेत.

आश्चर्याची गोष्ट म्हणजे, ग्रिड भरण्याचे किती मार्ग आहेत हे सर्व सूचीबद्ध न करताही आढळू शकते. हे कसे करायचे ते आपण नंतरच्या वर्षांत पाहू.

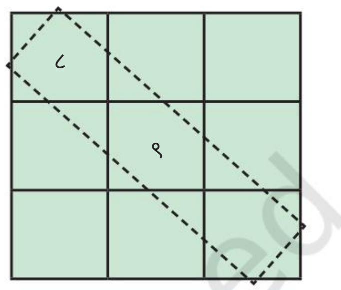
त्याऐवजी, आपण एक जादूचा चौरस बनवण्यासाठी पद्धतशीरपणे पुढे जायला हवे. यासाठी, आपण स्वतःला काही प्रश्न विचारूया.

१. जादूची बेरीज किती असू शकते? ती कोणतीही संख्या असू शकते का?

सध्या आपण फक्त पंक्तींच्या बेरीजवर लक्ष केंद्रित करूया. आपण पाहिले आहे की १ - ९ संख्या असलेल्या ३ × ३ ग्रिडमध्ये, पंक्तींच्या बेरीजची एकूण संख्या नेहमीच ४५ असेल. जादूच्या चौकोनामध्ये पंक्तींच्या बेरीज सर्व समान असल्याने आणि त्यांची बेरीज ४५ पर्यंत असल्याने, त्या प्रत्येकी १५ असाव्यात. अशा प्रकारे, आपल्याला खालील निरीक्षण मिळते.

निरीक्षण १: १ - ९ या संख्या वापरून बनवलेल्या जादूच्या चौकोनामध्ये, जादूची बेरीज १५ असावी.

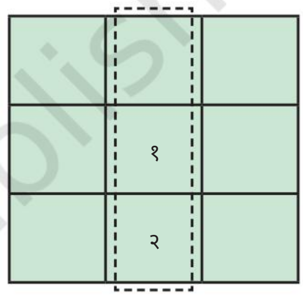
२. जादूच्या चौकोनाच्या मध्यभागी कोणत्या संख्या येऊ शकतात?



चला एक-एक करून शक्यतांचा विचार करूया.
मध्यवर्ती संख्या 9 असू शकते का? जर हो, तर 8 हा इतर एका वर्गात आला पाहिजे. उदाहरणार्थ,

यामध्ये, आपल्याकडे 8 + 9 + दुसरी संख्या = 15 असणे आवश्यक आहे.
पण हे शक्य नाही! आपण ८ कुठेही ठेवले तरी तीच समस्या उद्भवेल.

तर, ९ हा केंद्रस्थानी असू शकत नाही. मध्यवर्ती क्रमांक १ असू शकतो का?

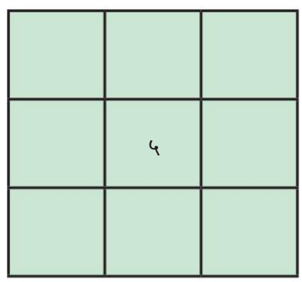


जर हो, तर २ हे इतर एका चौकोनात आले पाहिजेत.

येथे, आपल्याकडे २ + १ + दुसरी संख्या = १५ असणे आवश्यक आहे.
पण हे शक्य नाही कारण आपण फक्त १ - ९ हे आकडे वापरत आहोत. आपण १ कुठेही ठेवले तरी हीच समस्या उद्भवेल.

म्हणून, १ देखील केंद्रस्थानी असू शकत नाही.

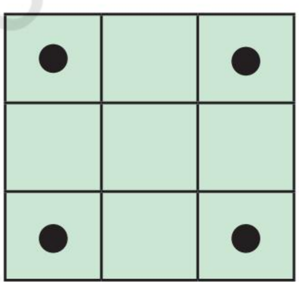
? अशा तर्काचा वापर करून, केंद्रस्थानी १ - ९ या इतर कोणत्या संख्या येऊ शकत नाहीत ते शोधा.

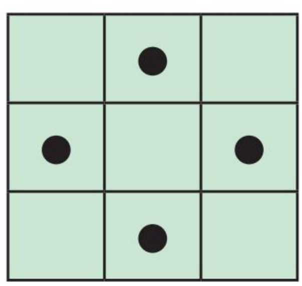


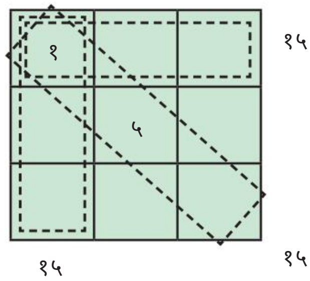
या शोधामुळे आपल्याला पुढील मनोरंजक निरीक्षणाकडे नेले जाईल.

निरीक्षण २: १ - ९ वापरून भरलेल्या जादूच्या चौकोनाच्या मध्यभागी येणारी संख्या ५ असणे आवश्यक आहे.

आता आपण पाहूया की जादूच्या चौकोनामध्ये सर्वात लहान संख्या १ आणि सर्वात मोठी संख्या ९ कुठे येईल. आपले दुसरे निरीक्षण आपल्याला सांगते की त्यांना सीमा स्थानांपैकी एकामध्ये यावे लागेल. आपण या स्थानांचे दोन श्रेणींमध्ये वर्गीकरण करूया:







१ कोपऱ्याच्या स्थितीत येऊ शकते का? उदाहरणार्थ, ते खालीलप्रमाणे ठेवता येईल का?

जर हो, तर १५ मिळविण्यासाठी १ आणि इतर दोन संख्या जोडण्याचे तीन मार्ग असले पाहिजेत.
आपल्याकडे १ + ५ + ९ = १ + ६ + ८ = १५ आहे. दुसरे कोणतेही संयोजन शक्य आहे का?

त्याचप्रमाणे, ९ हे कोपऱ्यात ठेवता येईल का?

निरीक्षण ३: १ आणि ९ हे अंक कोणत्याही कोपऱ्यात येऊ शकत नाहीत, म्हणून ते मधल्या एका स्थितीत असले पाहिजेत.

१ आणि ९ साठी इतर संभाव्य पदे तुम्हाला सापडतील का?

१	५	९

	१	
	५	
	९	

आता, आपल्याकडे जादूच्या चौकोनाची एक पूर्ण पंक्ती किंवा स्तंभ आहे!
ते पूर्ण करण्याचा प्रयत्न करा!
[सूचना: प्रथम १ आणि ९ असलेली पंक्ती किंवा स्तंभ भरा]

समजून घ्या

गणित चर्चा

१. वापरून किती वेगवेगळे जादूचे चौरस बनवता येतात? संख्या १ - ९?

२. २ - १० या संख्या वापरून एक जादूचा चौरस तयार करा. यासाठी तुम्ही कोणती रणनीती वापराल? १ - ९ वापरून बनवलेल्या जादूच्या चौरसांशी त्याची तुलना करा.

३. एक जादूचा वर्ग घ्या आणि (अ) प्रत्येक संख्येत
१ ने वाढ करा.
(b) प्रत्येक संख्या दुप्पट करा
प्रत्येक बाबतीत, परिणामी ग्रिड देखील एक जादूचा चौरस आहे का? प्रत्येक बाबतीत जादूची बेरीज कशी बदलतात?

गणित चर्चा

४. एका जादूच्या चौकोनावर आणखी कोणत्या ऑपरेशन्स करून दुसरा जादूचा चौकोन मिळवता येईल?

५. सलग ९ संख्यांचा संच (जसे की २ – १०, ३ – ११, ९ – १७, इत्यादी) वापरून जादूचा चौरस कसा तयार करायचा यावर चर्चा करा.

३ × ३ मॅजिक स्क्वेअरचे सामान्यीकरण

जादूच्या चौकोनातील संख्या एकमेकांशी कशा संबंधित आहेत, म्हणजेच जादूच्या चौकोनाची रचना, याचे आपण वर्णन करू शकतो.

तुम्ही आतापर्यंत बनवलेला कोणताही जादूचा चौकोन निवडा.
जर मध्यभागी असलेल्या संख्येचा अक्षर क्रमांक m **असेल, तर इतर संख्या** m शी कशा संबंधित आहेत, m पेक्षा किती जास्त किंवा कमी आहेत ते **स्पष्ट करा** .

	मी	

[सूचना: बीजगणितीय अभिव्यक्ती प्रकरणात आपण कॅलेंडर महिन्याच्या २ × २ ग्रिडचे वर्णन कसे केले आहे ते लक्षात ठेवा].

गणित चर्चा

एकदा सामान्यीकृत फॉर्म प्राप्त झाला की, तुमचे निरीक्षणे शेअर करा.
वर्गासोबत.

समजून घ्या

१. या सामान्यीकृत स्वरूपात, जर केंद्र क्रमांक २५ असेल तर एक जादूचा चौरस शोधा.

२. कोणत्याही पंक्ती, स्तंभ किंवा कर्णाचे ३ पद जोडून मिळणारी राशी कोणती?

३. खालीलपैकी कोणते निकाल मिळाले ते लिहा.

(अ) सामान्यीकृत स्वरूपात प्रत्येक पदाला १ जोडणे.

(b) सामान्यीकृत स्वरूपात प्रत्येक पद दुप्पट करणे

४. एक जादूचा वर्ग तयार करा ज्याची जादूची बेरीज ६० असेल.

५. नऊ भरून जादूचा चौरस मिळवणे शक्य आहे का?
सलग नसलेल्या संख्या?

प्रयत्न करा हे

पहिला ४ × ४ मॅजिक स्क्वेअर

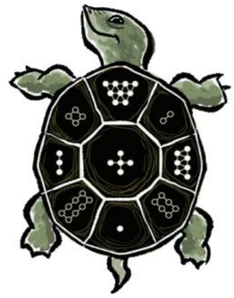
भारतातील खजुराहो येथील पार्श्वनाथ जैन मंदिरात १० व्या शतकातील एका शिलालेखात ४ × ४ आकाराचा पहिला जादूचा चौकोन आढळतो आणि त्याला चौतीसा यंत्र म्हणून ओळखले जाते.

७	१२	१	१४
२	१३	८	११
१६	३	१०	५
९	६	१५	४

भारतातील खजुराहो येथे पहिला रेकॉर्ड केलेला ४ × ४ जादूचा चौरस, चौतीसा यंत्र.

चौतीस म्हणजे ३४. तुम्हाला काय वाटते की त्यांनी त्याला चौतीसा यंत्र का म्हटले?
या जादूच्या चौकोनातील प्रत्येक पंक्ती, स्तंभ आणि कर्ण ३४ पर्यंत बेरीज करतात.
तुम्हाला वर्गात 34 पर्यंत बेरीज करणाऱ्या चार संख्यांचे इतर नमुने सापडतील का?

इतिहास आणि संस्कृतीतील जादूचे चौक



आतापर्यंत नोंदवलेला पहिला जादूचा चौक, लो शु चौक, २००० वर्षांपूर्वीचा प्राचीन चीनमधील आहे. आख्यायिका लो नदीवर आलेल्या एका भयानक पुराची सांगते, त्या दरम्यान देवतांनी लोकांना वाचवण्यासाठी एका कासवाला पाठवले होते. कासवाच्या पाठीवर ३ × ३ आकाराचा ग्रिड होता, ज्यामध्ये १ ते ९ हे अंक जादुई पद्धतीने मांडलेले होते.

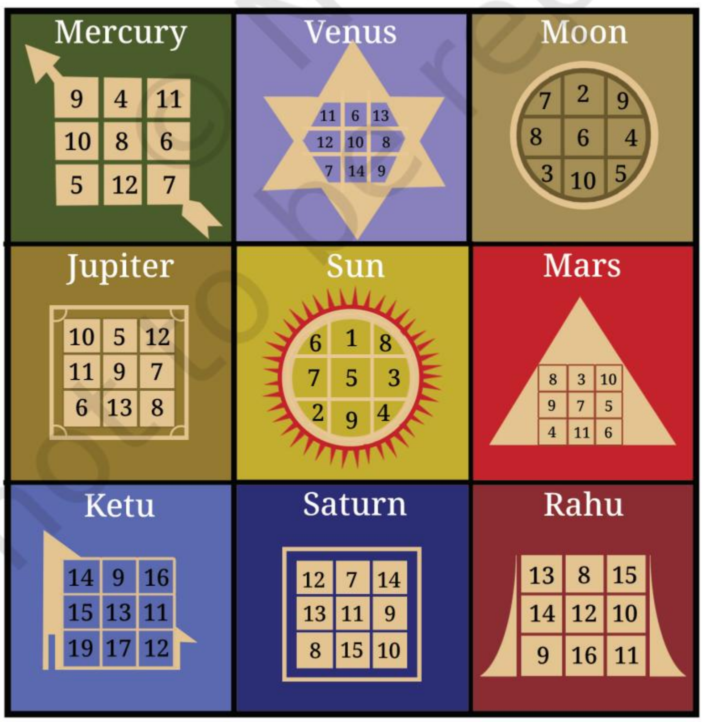
२ ७	६	
९ ५	१	
४ ३	८	

भारत, जपान, मध्य आशिया आणि युरोपसह जगाच्या वेगवेगळ्या भागात वेगवेगळ्या वेळी जादूच्या चौकोनांचा अभ्यास केला गेला.

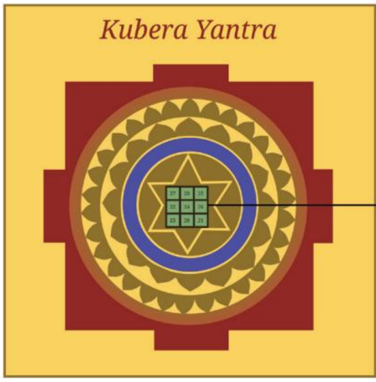
भारतीय गणितज्ञांनी जादूच्या चौकोनांवर मोठ्या प्रमाणात काम केले आहे, ते बांधण्याच्या सामान्य पद्धतींचे वर्णन केले आहे.
भारतीय गणितज्ञांचे कार्य केवळ ३ × ३ आणि ४ × ४ ग्रिडपुरते मर्यादित नव्हते, ज्याचा आपण वर विचार केला, तर ते ५ × ५ आणि इतर मोठ्या चौरस ग्रिडपर्यंत देखील विस्तारित होते. आपण पुढील इयत्तांमध्ये याबद्दल अधिक जाणून घेऊ.

जादूई चौकोनांची घटना केवळ विद्वत्तापूर्ण गणितीय कामांपुरती मर्यादित नाही. ती भारतात अनेक ठिकाणी आढळतात.
उजवीकडील चित्र तामिळनाडूतील पलानी येथील एका मंदिरातील खांबावर सापडलेल्या ३ × ३ आकाराच्या जादूच्या चौकोनाचे आहे. हे मंदिर ८ व्या शतकातील आहे.

भारतातील घरे आणि दुकानांमध्ये ३ × ३ आकाराचे जादूचे चौरस देखील आढळू शकतात. नवग्रह यंत्र हे असेच एक उदाहरण आहे जे खाली दाखवले आहे.



लक्षात घ्या की प्रत्येक ग्रहाशी एक वेगळी जादूची बेरीज जोडलेली आहे . अ.
कुबेर यंत्राचे चित्र खाली दाखवले आहे:



२७	२०	२५
२२	२४	२६
२३	२८	२१

६.४ निसर्गाचा आवडता क्रम: विरहांक– फिबोनाची संख्या!

१, २, ३, ५, ८, १३, २१, ३४, . . . (विरहांक-फिबोनाची संख्या) हा क्रम गणितातील सर्वात प्रसिद्ध क्रमांपैकी एक आहे - तो कला, विज्ञान आणि गणिताच्या जगात आढळतो. जरी हे संख्या विज्ञानात वारंवार आढळतात, तरी हे उल्लेखनीय आहे की या संख्या प्रथम कलेच्या संदर्भात (विशेषतः कविता) शोधल्या गेल्या!

अशाप्रकारे विरहांक -फिबोनाची संख्या कला, विज्ञान आणि गणित यांच्यातील जवळच्या संबंधांचे एक सुंदर उदाहरण देतात.

विरहांक संख्यांचा शोध

विरहंक संख्या प्रथम हजारो वर्षांपूर्वी संस्कृत आणि प्राकृत भाषाशास्त्रज्ञांच्या काव्याच्या अभ्यासात आढळल्या!

प्राकृत, संस्कृत, मराठी, मल्याळम, तमिळ आणि तेलगू यासारख्या अनेक भारतीय भाषांमधील काव्यात प्रत्येक अक्षर दीर्घ किंवा लघु असे वर्गीकृत केले आहे.

एका मोठ्या अक्षराचा उच्चार लहान अक्षरापेक्षा जास्त काळासाठी केला जातो - खरं तर, अगदी दुप्पट वेळ. अशी कविता गाताना, एक लहान अक्षराचा उच्चार एका ठोक्यापर्यंत टिकतो आणि एक मोठा अक्षराचा उच्चार दोन ठोक्यांपर्यंत असतो.

यामुळे असंख्य गणितीय प्रश्न निर्माण होतात, ज्यांचा या भाषांमधील प्राचीन कवींनी सखोल विचार केला. कवितेबद्दल हे प्रश्न विचारण्याच्या आणि त्यांची उत्तरे देण्याच्या प्रक्रियेत अनेक महत्त्वाचे गणितीय शोध लागले.

यापैकी एक विशेषतः महत्त्वाचा प्रश्न खालीलप्रमाणे होता.

लहान अक्षरे (१ बीट) आणि लांब अक्षरे (२ बीट) असलेल्या ८ बीट्ससह किती ताल आहेत? म्हणजेच, एक व्यक्ती किती प्रकारे करू शकते?

८ बीट्स लहान आणि लांब अक्षरांनी भरा, जिथे एका लहान अक्षरासाठी एक बीट वेळ लागतो आणि एका मोठ्या अक्षरासाठी दोन बीट्स वेळ लागतो.

येथे काही शक्यता आहेत: खूप लांब लांब

लांब
लहान लहान लहान लहान लहान लहान लहान लहान लहान लहान लहान

लहान लांब लांब लहान लांब
लांब लांब लहान लहान लांब
⋮

तुम्हाला इतर सापडतील का?

अधिक गणितीय पद्धतीने वाक्यांश: एखादी व्यक्ती किती वेगवेगळ्या प्रकारे १ आणि २ ची बेरीज म्हणून ८ अशी संख्या लिहा ?

उदाहरणार्थ, आमच्याकडे आहे:

८ = २ + २ + २ + २,
८ = १ + १ + १ + १ + १ + १ + १ + १,
८ = १ + २ + २ + १ + २,
८ = २ + २ + १ + १ + २,
इ.

तुम्हाला इतर मार्ग दिसतात का?

१, २, ३ आणि ४ या संख्या १ आणि २ ची बेरीज म्हणून लिहिण्याचे सर्व मार्ग येथे आहेत .

	वेगवेगळे मार्ग	मार्गांची संख्या
n = १	१	१
n = २	१ + १ २	२
n = ३	१ + १ + १ १ + २ २ + १	३
n = ४	१ + १ + १ + १ १ + १ + २ १ + २ + १ २ + १ + १ २ + २	५

तुमच्या वहीत सर्व शक्य मार्गांनी १ आणि २ ची बेरीज म्हणून ५ ही संख्या लिहिण्याचा प्रयत्न करा ! तुम्हाला किती मार्ग सापडले? (तुम्हाला ८ वेगवेगळे मार्ग सापडले पाहिजेत!) सर्व शक्यतांची यादी न करता तुम्ही उत्तर शोधू शकता का? तुम्ही n = ८ साठी प्रयत्न करू शकता का?

५ बीट्स असलेल्या लहान आणि मोठ्या अक्षरांच्या सर्व लय लिहिण्याची पद्धतशीर पद्धत येथे आहे. ४ बीट्स असलेल्या सर्व लयींसमोर '१+' लिहा आणि नंतर ३ बीट्स असलेल्या सर्व लयींसमोर '२+' लिहा. यामुळे आपल्याला ५ बीट्स असलेल्या सर्व लयी मिळतात:

n = ५	१ + १ + १ + १ + १ १ + १ + १ + २ १ + १ + २ + १ १ + २ + १ + १ १ + २ + २	२ + १ + १ + १ २ + १ + २ २ + २ + १

अशाप्रकारे, ५ बीट्स असलेल्या ८ लय आहेत!

ही पद्धत का काम करते याचे कारण म्हणजे प्रत्येक ५-बीट लय '१+' किंवा '२+' ने सुरू होणे आवश्यक आहे. जर ती '१+' ने सुरू झाली, तर उर्वरित संख्या ४-बीट लय देतील आणि आपण त्या सर्व लिहू शकतो.

जर ते २+ ने सुरू होत असेल, तर उर्वरित संख्येने ३-बीट लय दिली पाहिजे आणि आपण त्या सर्व लिहू शकतो. म्हणून, ५-बीट लयची संख्या ही ४-बीट लयची संख्या आणि ३-बीट लयची संख्या आहे.

६-बीट लय किती आहेत? त्याच तर्कानुसार, ५-बीट लयांची संख्या अधिक ४-बीट लयांची संख्या, म्हणजेच ८ + ५ = १३ असेल. अशाप्रकारे, ६ बीट असलेल्या १३ लय आहेत.

? सर्व ६-बीट लय लिहिण्यासाठी पद्धतशीर पद्धतीचा वापर करा, म्हणजेच, शक्य तितक्या सर्व प्रकारे १ आणि २ ची बेरीज म्हणून ६ लिहा. तुम्हाला १३ मार्ग मिळाले का?

लहान अक्षरे आणि लांब अक्षरांच्या सर्व लयी मोजण्याची ही सुंदर पद्धत प्रथम इ.स. ७०० च्या सुमारास महान प्राकृत विद्वान विरांगक यांनी दिली होती . त्यांनी त्यांची पद्धत प्राकृत काव्याच्या स्वरूपात दिली! या कारणास्तव, १, २, ३, ५, ८, १३, २१, ३४, ... या क्रमाला विरांगक क्रम म्हणतात आणि त्या क्रमातील संख्यांना विरांगक संख्या म्हणतात.

विरहंक हा इतिहासातील पहिला ज्ञात व्यक्ती होता ज्याने या महत्त्वाच्या संख्यांचा स्पष्टपणे विचार केला आणि त्यांच्या निर्मितीचा नियम लिहिला.

भारतातील इतर विद्वानांनीही या संख्यांचा विचार त्याच काव्यात्मक संदर्भात केला. विरहांक हे संस्कृत विद्वान पिंगल यांच्या पूर्वीच्या कामापासून प्रेरित होते, जे सुमारे ३०० ईसापूर्व जगले होते. विरहांकानंतर , गोपाळ (सुमारे ११३५ ईसापूर्व) आणि नंतर हेमचंद्र (सुमारे ११५० ईसापूर्व) यांनीही या संख्या लिहिल्या.

पश्चिमेकडे, या संख्यांना फिबोनाची संख्या म्हणून ओळखले जाते, इ.स. १२०२ मध्ये - विरांकानंतर सुमारे ५०० वर्षांनी - इ.स. २०१६ मध्ये इ.स. २०१६ मध्ये लिहिलेल्या एका इटालियन गणितज्ञाच्या नावावरून . आपण पाहू शकतो की, या संख्यांबद्दल लिहिणारा फिबोनाची पहिला किंवा दुसरा नव्हता, अगदी तिसराही नव्हता! कधीकधी "विरांक-फिबोनाची संख्या" हा शब्द वापरला जातो जेणेकरून प्रत्येकाला काय संदर्भित केले जात आहे ते समजेल.

तर, लहान आणि लांब अक्षरांच्या किती लय आहेत ज्यांचे ८ ठोके? आपण विरहांक अनुक्रमातील ८ वा घटक घेऊ:

१, २, ३, ५, ८, १३, २१, ३४, ५५, ...

अशाप्रकारे, ८ बीट्स असलेल्या ३४ ताल आहेत.

५५ नंतरच्या क्रमाने पुढील संख्या लिहा.

आपण पाहिले की क्रमातील पुढील संख्या मागील दोन संख्या जोडून दिली आहे. वर दिलेल्या संख्यांसाठी हे खरे आहे का ते तपासा. पुढील संख्या 34 + 55 = 89 आहे.

? क्रमाने पुढील ३ संख्या लिहा:

१, २, ३, ५, ८, १३, २१, ३४, ५५, ८९, ____, ____, ____, ...

जर तुम्हाला वरील क्रमात आणखी एक संख्या लिहायची असेल, तर ती संख्या विषम असेल की सम असेल हे तुम्ही सांगू शकाल का (मागील दोन संख्या न जोडता)?

? क्रमातील प्रत्येक संख्येची समता किती आहे? समतेच्या क्रमात तुम्हाला काही नमुना दिसतो का?

आज, विरहांक-फिबोनाची संख्या कविता ते ढोलकी वाजवणे, दृश्य कला आणि वास्तुकला, विज्ञान अशा अनेक गणितीय आणि कलात्मक सिद्धांतांचा आधार बनतात. कदाचित या संख्यांपैकी सर्वात आश्चर्यकारक घटना निसर्गात घडतात. उदाहरणार्थ, डेझीवरील पाकळ्यांची संख्या ही सामान्यतः विरहांक संख्या असते.

या प्रत्येक फुलावर तुम्हाला किती पाकळ्या दिसतात?


१३ पाकळ्या असलेले डेझी


२१ पाकळ्या असलेले डेझी


३४ पाकळ्या असलेले डेझी

विरहांकाचे इतरही अनेक उल्लेखनीय गणितीय गुणधर्म आहेत -

फिबोनाची संख्या जी आपण नंतर गणितात तसेच इतर विषयांमध्ये पाहू.

हे आकडे खरोखरच कला, विज्ञान आणि गणित यांच्यातील जवळच्या संबंधांचे उदाहरण देतात.

वेशात ६.५ अंक

तुम्ही अंकांसह अंकगणितीय क्रिया केल्या आहेत. अक्षरांसहही असेच कसे करायचे?

खालील गणितांमध्ये, अंकांची जागा अक्षरांनी घेतली आहे. प्रत्येक अक्षर एका विशिष्ट अंकाचे प्रतिनिधित्व करते (० - ९). तुम्हाला प्रत्येक अक्षर कोणत्या अंकाचे प्रतिनिधित्व करते हे शोधून काढावे लागेल.

ट

ट

+ टी

बाहेर

येथे, आपल्याकडे एक-अंकी संख्या आहे जी स्वतःमध्ये दोनदा जोडल्यास 2-अंकी बेरीज मिळते. बेरजेचा एकक अंक जोडल्या जाणाऱ्या एकक अंकासारखाच असतो.

? U आणि T काय असू शकतात? T 2 असू शकते का? ते 3 असू शकते का?

एकदा तुम्ही एक्सप्लोर केले की, तुम्हाला दिसेल की T = 5 आणि UT = 15.

उजवीकडे दाखवलेले आणखी एक उदाहरण पाहू.

येथे K2 म्हणजे संख्या ही २-अंकी संख्या आहे ज्याच्या एककाच्या ठिकाणी '२' आणि दहाच्या ठिकाणी 'K' हा अंक आहे. K2 ला स्वतःमध्ये जोडून ३-अंकी बेरीज HMM मिळते. M अक्षर कोणत्या अंकाशी जुळले पाहिजे?

के२

+ के२

हम्म

बेरजेचे दशक स्थान आणि एकक स्थान दोन्हीमध्ये समान अंक आहेत.

? H बद्दल काय? ते २ असू शकते का? ते ३ असू शकते का?

या प्रकारचे प्रश्न सोडवणे मनोरंजक आणि मजेदार असू शकते! येथे असेच काही प्रश्न आहेत जे तुम्ही वापरून पाहू शकता. प्रत्येक अक्षराचा अर्थ काय आहे ते शोधा.

प्रत्येक प्रश्नाबद्दल तुम्ही कसे विचार केले ते तुमच्या वर्गमित्रांसोबत शेअर करा; तुम्हाला काही नवीन दृष्टिकोन सापडतील.

वायवाय	बी५	केपी	सी१
+ झेड	+ थ्रीडी	+ केपी	+ क
चांगले	ईडी५	पीआरआर	१ एफएफ

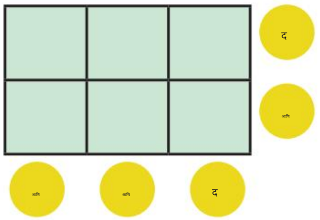
या प्रकारच्या प्रश्नांना 'क्रिप्टॅरिथम्स' किंवा 'अल्फामेटिक्स' म्हणतात.

? समजून घ्या

१. एक विजेचा बल्ब चालू आहे. दोर्जी त्याचा स्विच ७७ वेळा टॉगल करतो. बल्ब चालू किंवा बंद? का?

२. लिस्विनीकडे एक मोठा जुना विश्वकोश आहे. जेव्हा तिने तो उघडला तेव्हा त्यातून अनेक मोकळी पाने पडली. तिने एकूण ५० पाने मोजली, प्रत्येक पाने दोन्ही बाजूंनी छापलेली होती. मोकळी पाने असलेल्या पानांची बेरीज ६००० असू शकते का? का किंवा का नाही?

३. येथे २ × ३ ग्रिड आहे. प्रत्येक पंक्ती आणि स्तंभासाठी, वर्तुळात बेरजेची समता लिहिली आहे; सम साठी 'e' आणि विषम साठी 'o'. पंक्ती आणि स्तंभ बेरजेची समता पूर्ण करण्यासाठी 6 चौकटी 3 विषम संख्या ('o') आणि 3 सम संख्या ('e') ने भरा.



४. ३ × ३ चा जादूचा वर्ग बनवा ज्याची जादूची बेरीज ० असेल. सर्व संख्या शून्य असू शकत नाहीत. गरजेनुसार ऋण संख्या वापरा.

५. खालील रिकाम्या जागा 'विषम' किंवा 'सम' ने भरा:

(a) सम संख्यांच्या विषम संख्येची बेरीज आहे ____

(b) विषम संख्यांच्या सम संख्येची बेरीज आहे (c) सम संख्यांच्या सम संख्येची ____

बेरीज आहे (d) विषम संख्यांच्या विषम संख्येची बेरीज आहे ____

____

६. १ ते १०० पर्यंतच्या संख्यांच्या बेरजेची समता किती आहे?

७. विरहांक क्रमातील दोन सलग संख्या ९८७ आणि १५९७ आहेत. क्रमातील पुढील २ संख्या कोणत्या आहेत? क्रमातील मागील २ संख्या कोणत्या आहेत?

८. अंगानला ८ पायऱ्यांचा जिना चढायचा आहे. त्याचा खेळकर नियम असा आहे की तो एका वेळी १ किंवा २ पायऱ्या चढू शकतो. उदाहरणार्थ, त्याचा एक मार्ग म्हणजे १, २, २, १, २. तो किती वेगवेगळ्या मार्गांनी शिखरावर पोहोचू शकतो?

९. विरहांक अनुक्रमाच्या २० व्या पदाची समता किती आहे?

१०. सत्य विधाने ओळखा.

(a) $4m - 1$ ही पदावली नेहमी विषम संख्या देते.

(b) सर्व सम संख्या $6j - 4$ म्हणून व्यक्त करता येतात .

(c) $2p + 1$ आणि $2q - 1$ दोन्ही पदावली सर्व विषम संख्यांचे वर्णन करतात.

(d) $2f + 3$ ही पदावली सम आणि विषम दोन्ही संख्या देते.

११. हे क्रिप्टॅरिथम सोडवा:

बाहेर

\+ आयटी

टॅट

सारांश

या प्रकरणात, आपण खालील गोष्टींचा शोध घेतला आहे:

- पहिल्या कृतीमध्ये, आपण प्रत्यक्ष संख्या जाणून घेतल्याशिवाय संख्यांचा क्रम (उदा. उंचीचे माप) कसा मांडला जातो याबद्दल माहिती कशी दर्शवायची ते पाहिले.
- आपण समतेची संकल्पना शिकलो - जोडीमध्ये मांडता येणाऱ्या संख्या (सम संख्या) आणि जोडीमध्ये मांडता न येणाऱ्या संख्या (विषम संख्या).
- आपण बेरीज आणि उत्पादनांची समता कशी ठरवायची हे शिकलो.
- ग्रिडमधील बेरीज एक्सप्लोर करताना, पंक्ती आणि स्तंभ बेरीज पाहून आपण ग्रिड भरणे अशक्य आहे की नाही हे ठरवू शकतो. आम्ही हे जादूचे चौरस बांधण्यासाठी वाढवले.
- आपण पाहिले की इतिहासात विरांगक संख्या पहिल्यांदा कलांद्वारे कशा शोधल्या गेल्या. विरांगक क्रम १, २, ३, ५, ८, १३, २१, ३४, ५५, ... आहे.
- आपण क्रिप्टॅरिथम्सद्वारे गणित-शोधक बनलो, जिथे अंकांची जागा अक्षरांनी घेतली जाते.