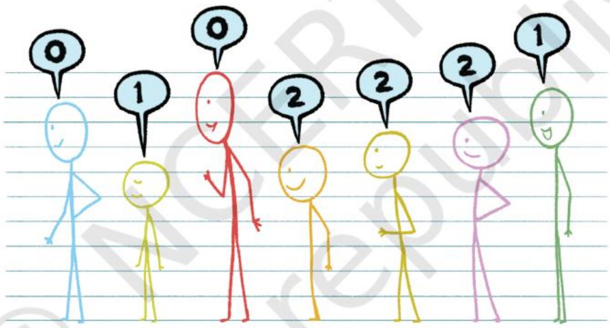
6 नंबर प्ले

0774CH06

6.1 संख्याएँ हमें बातें बताती हैं

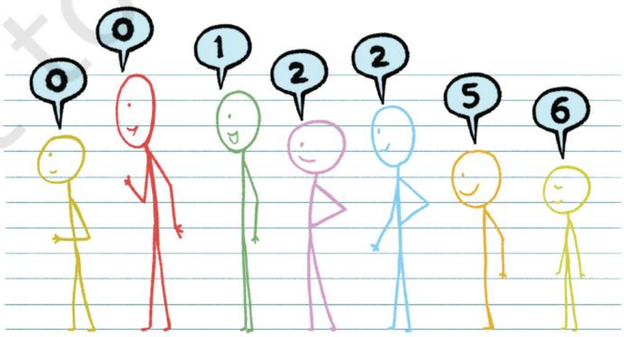
? नीचे दिए गए चित्र में संख्याएं हमें क्या बताती हैं?

क्या आपको कक्षा 6 की गणित की पाठ्यपुस्तक के बच्चे याद हैं? अब, वे एक अलग नियम का उपयोग करके संख्याएँ पुकारते हैं।



? आपके अनुसार इन संख्याओं का क्या अर्थ है?

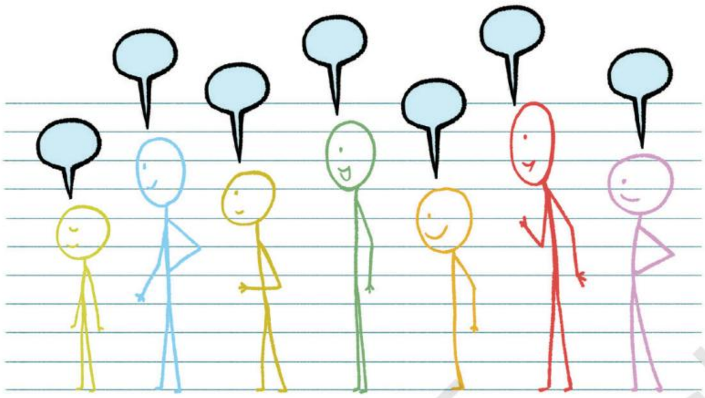
बच्चे अपनी-अपनी जगह पुनः व्यवस्थित करते हैं और प्रत्येक एक संख्या कहता है नई व्यवस्था के आधार पर।



? क्या आप समझ पाए कि ये संख्याएँ क्या बताती हैं? गौर कीजिए और जानने की कोशिश कीजिए।

नियम यह है कि हर बच्चा अपने सामने खड़े उन बच्चों की संख्या पुकारे जो उससे लंबे हैं। जाँच करें कि क्या दोनों व्यवस्थाओं में हर बच्चे द्वारा बताई गई संख्या इस नियम से मेल खाती है।

? नीचे दी गई व्यवस्था के लिए इस नियम के आधार पर प्रत्येक बच्चे को जो संख्या बोलनी चाहिए उसे लिखें।



? समझ से बाहर

1. पुस्तक के अंत में दिए गए स्टिक फिगर कटआउट को व्यवस्थित करें या ऊंचाई की व्यवस्था इस प्रकार बनाएं कि अनुक्रम इस प्रकार हो:

   (ए) 0, 1, 1, 2, 4, 1, 5

   (बी) 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0

   (सी) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

   (घ) 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0

   (ई) 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1

   (च) 0, 0, 0, 3, 3, 3, 3

2. नीचे दिए गए प्रत्येक कथन पर विचार करें और पहचानें कि क्या यह हमेशा सत्य है, केवल कभी-कभी सत्य है, या कभी सत्य नहीं है। अपना तर्क प्रस्तुत करें।

   (a) यदि कोई व्यक्ति '0' कहता है, तो वह समूह में सबसे लंबा है।

   (b) यदि कोई व्यक्ति सबसे लंबा है, तो उसका अंक '0' होगा।

   (c) पहले व्यक्ति का नंबर '0' है।

   (घ) यदि कोई व्यक्ति पंक्ति में पहले या अंतिम स्थान पर नहीं है (अर्थात् यदि वे कहीं बीच में खड़े हैं), तो वे '0' नहीं कह सकते।

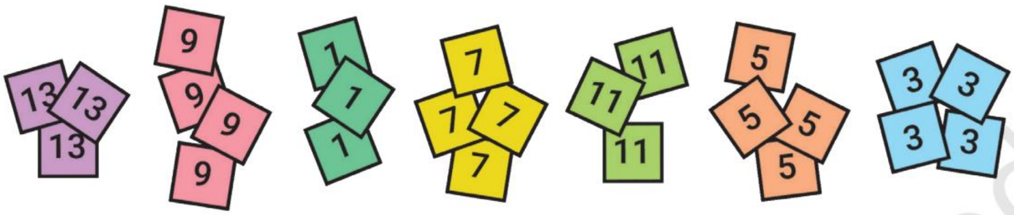
   (ई) जो व्यक्ति सबसे बड़ी संख्या बोलता है वह सबसे छोटा है।

   (च) 8 व्यक्तियों के समूह में सबसे बड़ी संभावित संख्या क्या है?

6.2 पिकिंग पैरिटी

किशोर के पास कुछ संख्या कार्ड हैं और वह एक पहेली पर काम कर रहा है: पाँच डिब्बे हैं, और हर डिब्बे में सिर्फ़ एक संख्या कार्ड होना चाहिए। डिब्बों में संख्याओं का योग 30 होना चाहिए। क्या आप उसे यह पहेली हल करने में मदद कर सकते हैं?

□ + □ + □ + □ + □ = 30



क्या आप बता सकते हैं कि कौन से 5 कार्ड का योग 30 होता है? क्या यह संभव है?

इस संग्रह से 5 कार्ड चुनने के कई तरीके हैं।

क्या सभी संभावनाओं की जांच किये बिना समाधान ढूंढने का कोई तरीका है?
आइये पता लगाएं।

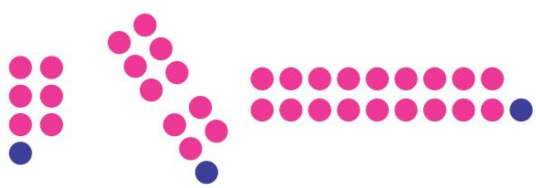
? कुछ सम संख्याओं को जोड़िए। आपको कैसी संख्या प्राप्त होगी?
क्या इससे कोई फर्क पड़ता है कि कितनी संख्याएं जोड़ी जाती हैं?

किसी भी सम संख्या को बिना किसी अवशेष के जोड़े में व्यवस्थित किया जा सकता है।
यहां कुछ सम संख्याएं जोड़ियों में व्यवस्थित करके दिखाई गई हैं।

जैसा कि हम चित्र में देख सकते हैं, किसी भी सम संख्या को जोड़ने पर इससे एक ऐसी संख्या प्राप्त होगी जिसे बिना किसी अतिरिक्त अंक के जोड़े में व्यवस्थित किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में, योग हमेशा एक सम संख्या होगी।

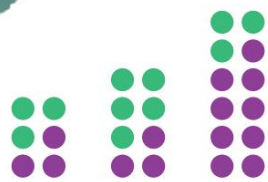
? अब कुछ विषम संख्याओं को जोड़ो। आपको कैसी संख्या मिलेगी? कितनी भी विषम संख्याएँ जोड़ी जाएँ, क्या इससे कोई फ़र्क़ पड़ता है?

विषम संख्याओं को जोड़े में व्यवस्थित नहीं किया जा सकता। एक विषम संख्या, जोड़ों के संग्रह से एक अधिक होती है। कुछ विषम संख्याएँ नीचे दी गई हैं:



क्या हम विषम संख्या को युग्मों के संग्रह से एक कम के रूप में भी सोच सकते हैं?

यह चित्र दर्शाता है कि दो विषम संख्याओं का योग हमेशा सम होना चाहिए! यह और यहाँ दिए गए अन्य चित्र प्रमाण के और भी उदाहरण हैं!



तीन विषम संख्याओं को जोड़ने के बारे में क्या ख्याल है? क्या परिणामी योग को जोड़े में व्यवस्थित किया जा सकता है? नहीं।

(a) 4 विषम संख्याओं, (b) 5 विषम संख्याओं, और (c) 6 विषम संख्याओं के योग का क्या होता है, इसका पता लगाएं।

चलिए उस पहेली पर वापस चलते हैं जिसे किशोर सुलझाने की कोशिश कर रहा था। पाँच खाली डिब्बे हैं। इसका मतलब है कि उसके पास विषम संख्या में डिब्बे हैं। सभी संख्या कार्डों में विषम संख्याएँ हैं।

उन्हें 30 तक जोड़ना चाहिए, जो एक सम संख्या है। चूँकि किसी भी 5 विषम संख्याओं को जोड़ने पर कभी भी सम संख्या नहीं आती, इसलिए किशोर इन कार्डों को बक्सों में इस तरह व्यवस्थित नहीं कर सकता कि उनका योग 30 हो।

दो भाई-बहन, मार्टिन और मारिया, ठीक एक वर्ष के अंतराल पर पैदा हुए थे।
आज वे अपना जन्मदिन मना रहे हैं। मारिया कहती है कि उनकी उम्र का योग 112 है। क्या यह संभव है? क्यों या क्यों नहीं?

चूँकि उनका जन्म एक वर्ष के अंतर पर हुआ था, इसलिए उनकी उम्रें (दो) क्रमागत संख्याएँ होंगी। क्या उनकी उम्रें 51 और 52 हो सकती हैं? 51 + 52 = 103. कुछ अन्य क्रमागत संख्याएँ आज़माएँ और देखें कि क्या उनका योग 112 है।

गिनती की संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5, ... सम और विषम संख्याओं के बीच बारी-बारी से आती हैं। किन्हीं दो क्रमागत संख्याओं में से एक हमेशा सम होगी और दूसरी हमेशा विषम!

एक सम संख्या और एक विषम संख्या का परिणामी योग क्या होगा? हम देख सकते हैं कि उनका योग युग्मों में व्यवस्थित नहीं किया जा सकता, इसलिए यह एक विषम संख्या होगी।

चूंकि 112 एक सम संख्या है, तथा मार्टिन और मारिया की आयु क्रमागत संख्याएं हैं, इसलिए उनका योग 112 नहीं हो सकता।

हम समता शब्द का प्रयोग सम या विषम होने के गुण को दर्शाने के लिए करते हैं।
उदाहरण के लिए, किन्हीं दो क्रमागत संख्याओं के योग की समता विषम होती है। इसी प्रकार, किन्हीं दो विषम संख्याओं के योग की समता सम होती है।

समझ से बाहर

1. विषम और सम संख्याओं के चित्रात्मक निरूपण की अपनी समझ का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित योगों की समता ज्ञात कीजिए:

   (a) 2 सम संख्याओं और 2 विषम संख्याओं का योग (जैसे, सम + सम + विषम + विषम)

   (b) 2 विषम संख्याओं और 3 सम संख्याओं का योग

   (c) 5 सम संख्याओं का योग

   (d) 8 विषम संख्याओं का योग

2. लकपा के गुल्लक में विषम संख्या में ₹1 के सिक्के, विषम संख्या में ₹5 के सिक्के और सम संख्या में ₹10 के सिक्के हैं। उसने कुल योग निकाला और ₹205 निकले। क्या उससे कोई गलती हुई? अगर हुई, तो बताइए क्यों? अगर नहीं, तो उसके पास हर तरह के कितने सिक्के हो सकते थे?

3. हम जानते हैं कि:

   (a) सम + सम = सम

   (b) विषम + विषम = सम

   (c) सम + विषम = विषम

   इसी प्रकार, नीचे दिए गए परिदृश्यों के लिए समता ज्ञात कीजिए:

   (घ) सम – सम = ____________

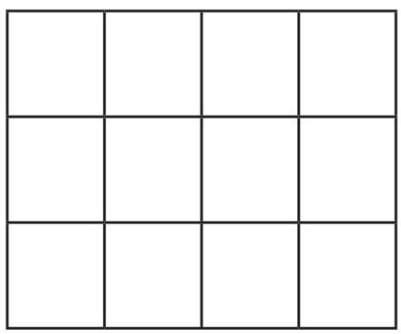
   (e) विषम – विषम = (f) सम – ____________

   विषम = (g) विषम – सम = ____________

   ____

ग्रिड में छोटे वर्ग

3×3 ग्रिड में 9 छोटे वर्ग हैं, जो एक विषम संख्या है। वहीं, 3×4 ग्रिड में 12 छोटे वर्ग हैं, जो एक सम संख्या है।



ग्रिड के आयाम दिए जाने पर, क्या आप गुणनफल की गणना किए बिना छोटे वर्गों की संख्या की समता बता सकते हैं?

इन ग्रिडों में छोटे वर्गों की संख्या की समता ज्ञात कीजिए:

(ए) 27 × 13

(बी) 42 × 78

(सी) 135 × 654

अभिव्यक्तियों की समता

बीजीय व्यंजक पर विचार करें: 3n + 4. n के विभिन्न मानों के लिए , व्यंजक की समता भिन्न होती है:

एन	3n + 4 का मान	मूल्य की समता
3	13	विषम
8	28	यहां तक की
10	34	यहां तक की

ऐसा व्यंजक बनाइये जिसमें सदैव समता हो।

कुछ उदाहरण हैं: 100p और 48w - 2. अधिक खोजने का प्रयास करें।

ऐसे व्यंजक बनाइये जिनमें सदैव विषम समता हो।

अन्य व्यंजक, जैसे 3n + 4, बनाइये , जिनकी समता विषम या सम हो सकती है।

व्यंजक 6k + 2 का मान 8, 14, 20,... (k = 1, 2, 3,... के लिए) है - कई सम संख्याएँ लुप्त हैं।

क्या ऐसे कोई व्यंजक हैं जिनके प्रयोग से हम सभी सम संख्याओं को सूचीबद्ध कर सकते हैं?

संकेत: सभी सम संख्याओं का गुणनखंड 2 होता है।

क्या ऐसे कोई व्यंजक हैं जिनके प्रयोग से हम सभी विषम संख्याओं को सूचीबद्ध कर सकते हैं?

हमने पहले देखा कि 4 के गुणजों के अनुक्रम के nवें पद को कैसे व्यक्त किया जाता है , जहाँ n वह अक्षर-संख्या है जो अनुक्रम में एक स्थिति को दर्शाता है (उदाहरण के लिए, पहला, तेईसवां, एक सौ सत्रहवां, आदि)।

2 के गुणजों का nवाँ पद क्या होगा ? या, n वाँ सम संख्या क्या है?

आइए विषम संख्याओं पर विचार करें।

100वीं विषम संख्या क्या है?

इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए निम्नलिखित प्रश्न पर विचार करें:

? 100वीं सम संख्या क्या है?

यह $2 \times 100 = 200$ है।

क्या इससे 100वीं विषम संख्या ज्ञात करने में मदद मिलती है? आइए तुलना करें सम और विषम संख्याओं का क्रम।

सम संख्याएँ: 2, 4, 6, 8, 10, 12,...

विषम संख्याएँ: 1, 3, 5, 7, 9, 11,...

हम देखते हैं कि किसी भी स्थिति में, विषम संख्या अनुक्रम का मान सम संख्या अनुक्रम के मान से एक कम होता है। इस प्रकार, 100वीं विषम संख्या 200 - 1 = 199 है।

? nवीं विषम संख्या ज्ञात करने का सूत्र लिखिए ।

आइए सबसे पहले उस विधि का वर्णन करें जो हमने विषम संख्या ज्ञात करने के लिए सीखी है। किसी निश्चित स्थान पर संख्या:

(a) उस स्थान पर सम संख्या ज्ञात कीजिए। यह स्थान संख्या का 2 गुना है। (b) फिर सम संख्या में से 1 घटाएँ।

इसे भावों में लिखने पर, हमें प्राप्त होता है

(ए) 2एन

(बी) 2एन – 1

इस प्रकार, $2n$ वह सूत्र है जो nवीं सम संख्या देता है, और $2n - 1$ वह सूत्र है जो nवीं विषम संख्या देता है।

6.3 ग्रिड में कुछ अन्वेषण

इस 3×3 ग्रिड को देखिए। इसे एक सरल नियम के अनुसार भरा गया है—1 से 9 तक की संख्याओं का प्रयोग करें, उनमें से किसी को भी दोहराए बिना। ग्रिड के बाहर गोलाकार संख्याएँ हैं।

4	7	5	16
6	1	2	9
3	9	8	20
13	17	15	

? क्या आप देख पा रहे हैं कि गोलाकार संख्याएं क्या दर्शाती हैं?

पीले वृत्तों में अंकित संख्याएं संबंधित पंक्तियों और स्तंभों का योग हैं।

ऊपर बताए गए नियम के आधार पर नीचे दिए गए ग्रिड भरें:

9			13
			14
		5	18
24	9	12	

			24
4			15
		3	6
12	16	17	

? इस तरह के कुछ प्रश्न स्वयं बनाएं और अपने साथियों को चुनौती दें।

नीचे दी गई समस्या को हल करने का प्रयास करें.

			5
		6	21
			19
9	11	26	

? आपको शायद यह एहसास हो गया होगा कि इस ग्रिड का कोई समाधान ढूँढना संभव नहीं है। ऐसा क्यों है?

सबसे छोटा संभव योग 6 = 1 + 2 + 3 है। सबसे बड़ा संभव योग 24 = 9 + 8 + 7 है। स्पष्ट रूप से, वृत्त में कोई भी संख्या 6 से कम या 24 से अधिक नहीं हो सकती। ग्रिड में योग 5 और 26 हैं।

इसलिए, यह असंभव है!

पहले हल किए गए ग्रिडों में, किशोर ने देखा कि वृत्तों में सभी संख्याओं का योग हमेशा 90 होता था। साथ ही, विद्या ने यह भी देखा कि तीनों पंक्तियों या तीनों स्तंभों के लिए वृत्ताकार संख्याओं का योग हमेशा 45 होता था। जाँच करें कि क्या यह बात आपके द्वारा हल किए गए पिछले ग्रिडों में भी सत्य है।

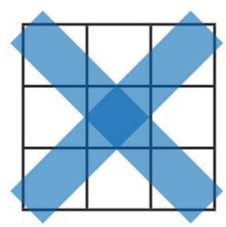
? पंक्ति योग और स्तंभ योग का योग हमेशा 45 क्यों होना चाहिए?

इस ग्रिड से, हम देख सकते हैं कि सभी पंक्तियों का योग 1 से 9 तक की संख्याओं के योग के बराबर होगा। यह स्तंभों के योग के लिए भी देखा जा सकता है। 1 से 9 तक की संख्याओं का योग है

4	7	5	4+7+5
6	1	2	6+1+2
3	9	8	3+9+8
4+6+3	7+1+9	5+2+8	

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

संख्याओं के वर्गाकार ग्रिड को जादुई वर्ग कहा जाता है , यदि प्रत्येक पंक्ति, प्रत्येक स्तंभ और प्रत्येक विकर्ण का योग एक ही संख्या हो।
इस संख्या को जादुई योग कहा जाता है।
चित्र में विकर्ण दिखाए गए हैं।



ग्रिड को बेतरतीब ढंग से संख्याओं से भरकर एक जादुई वर्ग बनाना मुश्किल हो सकता है! ऐसा इसलिए है क्योंकि 1 से 9 तक की संख्याओं का इस्तेमाल करके बिना दोहराव के 3 × 3 ग्रिड को भरने के कई तरीके हैं। वास्तव में, ऐसा पाया जा सकता है कि ऐसे कुल 3,62,880 तरीके हैं।

हैरानी की बात है कि ग्रिड को भरने के कई तरीके हैं, लेकिन उन सभी को सूचीबद्ध किए बिना भी। हम आगे देखेंगे कि यह कैसे किया जाता है।

इसके बजाय, हमें जादुई वर्ग बनाने के लिए व्यवस्थित रूप से आगे बढ़ना चाहिए। इसके लिए आइये हम स्वयं से कुछ प्रश्न पूछें।

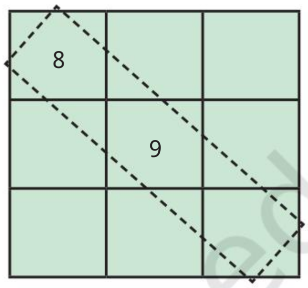
1. जादुई योग क्या हो सकता है? क्या यह कोई भी संख्या हो सकती है?

आइए, फिलहाल, केवल पंक्ति योग पर ध्यान केंद्रित करें। हमने देखा है कि 1 से 9 तक की संख्याओं वाले 3 × 3 ग्रिड में, पंक्ति योगों का योग हमेशा 45 होगा। चूँकि एक जादुई वर्ग में सभी पंक्ति योग बराबर होते हैं, और उनका योग 45 होता है, इसलिए प्रत्येक 15 होना चाहिए। इस प्रकार, हमें निम्नलिखित अवलोकन प्राप्त होता है।

अवलोकन 1: संख्याओं 1 - 9 का उपयोग करके बनाए गए एक जादुई वर्ग में, जादुई योग 15 होना चाहिए.

2. जादुई वर्ग के केंद्र पर कौन सी संभावित संख्याएं हो सकती हैं?

आइये हम एक-एक करके संभावनाओं पर विचार करें।
क्या केंद्रीय संख्या 9 हो सकती है? अगर हाँ, तो 8 किसी दूसरे वर्ग में आना चाहिए।
उदाहरण के लिए,
इसमें हमें 8 + 9 + अन्य संख्या = 15 प्राप्त होगा।
लेकिन यह संभव नहीं है! हम 8 को कहीं भी रखें, समस्या यही होगी।

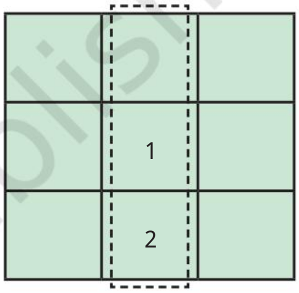


तो, 9 केंद्र में नहीं हो सकता। क्या केंद्रीय संख्या 1 हो सकती है?

यदि हाँ, तो 2 को अन्य वर्गों में से किसी एक में आना चाहिए।

यहाँ, हमारे पास 2 + 1 + अन्य संख्या = 15 होना चाहिए।

लेकिन यह संभव नहीं है क्योंकि हम केवल 1 - 9 तक की संख्याओं का ही उपयोग कर रहे हैं। हम 1 को कहीं भी रखें, यही समस्या उत्पन्न होगी।

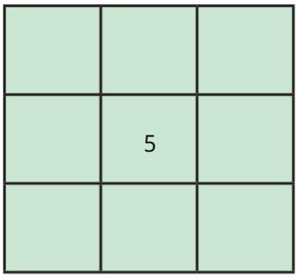


अतः 1 भी केन्द्र में नहीं हो सकता।

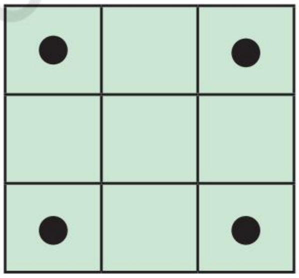
? इस तर्क का उपयोग करके पता लगाएं कि 1 – 9 में से कौन सी अन्य संख्याएं केंद्र में नहीं आ सकती हैं।

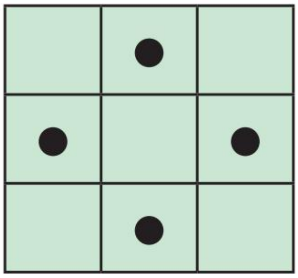
यह अन्वेषण हमें निम्नलिखित दिलचस्प अवलोकन की ओर ले जाएगा।

अवलोकन 2: 1 - 9 का उपयोग करके भरे गए जादुई वर्ग के केंद्र में आने वाली संख्या 5 होनी चाहिए।

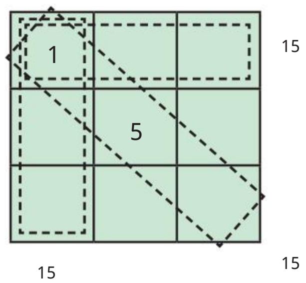


आइए अब देखें कि जादुई वर्ग में सबसे छोटी संख्या 1 और सबसे बड़ी संख्या 9 कहाँ आनी चाहिए। हमारा दूसरा अवलोकन हमें बताता है कि उन्हें किसी एक सीमांत स्थिति में आना होगा। आइए इन स्थितियों को दो श्रेणियों में वर्गीकृत करें:





क्या 1 कोने की स्थिति में हो सकता है? उदाहरण के लिए, क्या इसे निम्न प्रकार रखा जा सकता है?



? यदि हाँ, तो 1 को दो अन्य संख्याओं के साथ जोड़ने पर 15 प्राप्त करने के तीन तरीके होने चाहिए।
हमारे पास 1 + 5 + 9 = 1 + 6 + 8 = 15 है। क्या कोई अन्य संयोजन संभव है?

? इसी प्रकार, क्या 9 को कोने में रखा जा सकता है?

अवलोकन 3: संख्या 1 और 9 किसी भी कोने में नहीं आ सकती, इसलिए उन्हें बीच के किसी स्थान पर आना चाहिए।

? क्या आप 1 और 9 के लिए अन्य संभावित स्थितियां ज्ञात कर सकते हैं?

1	5	9

	1	
	5	
	9	

अब, हमारे पास जादुई वर्ग की एक पूरी पंक्ति या स्तंभ है!
इसे पूरा करने का प्रयास करें!
[संकेत: सबसे पहले 1 और 9 वाली पंक्ति या कॉलम भरें]

? **समझ से बाहर**

गणित बात करना

1. इसका उपयोग करके कितने अलग-अलग जादुई वर्ग बनाए जा सकते हैं? संख्या 1 – 9?

2. 2 से 10 तक की संख्याओं का उपयोग करके एक जादुई वर्ग बनाएँ। इसके लिए आप कौन सी रणनीति अपनाएँगे? इसकी तुलना 1 से 9 तक की संख्याओं से बनाए गए जादुई वर्गों से करें।

3. एक जादुई वर्ग लें, और (a) प्रत्येक संख्या में
   1 की वृद्धि करें
   (b) प्रत्येक संख्या को दोगुना करें
   क्या हर मामले में परिणामी ग्रिड भी एक जादुई वर्ग है? हर मामले में जादुई योग कैसे बदलते हैं?

गणित बात करना

4. एक जादुई वर्ग पर अन्य कौन सी क्रियाएं की जा सकती हैं जिससे दूसरा जादुई वर्ग प्राप्त हो सके?

5. किसी भी 9 क्रमागत संख्याओं (जैसे 2 - 10, 3 - 11, 9 - 17, आदि) के सेट का उपयोग करके जादुई वर्ग बनाने के तरीकों पर चर्चा करें।

3 × 3 जादुई वर्ग का सामान्यीकरण

हम यह वर्णन कर सकते हैं कि जादुई वर्ग के भीतर संख्याएं एक दूसरे से किस प्रकार संबंधित हैं, अर्थात् जादुई वर्ग की संरचना।

अब तक आपने जो भी जादुई वर्ग बनाया है उसे चुनें
क्रमागत संख्याओं का उपयोग करते हुए। यदि m केंद्र में स्थित संख्या का अक्षर-अंक है, तो व्यक्त कीजिए कि अन्य संख्याएँ m से किस प्रकार संबंधित हैं , m से कितनी अधिक या कितनी कम ।

	एम	

[संकेत: याद रखें, हमने बीजगणितीय व्यंजक अध्याय में एक कैलेंडर माह के 2 × 2 ग्रिड का वर्णन कैसे किया था]।

गणित बात करना

एक बार सामान्यीकृत रूप प्राप्त हो जाने पर, अपने अवलोकन साझा करें कक्षा के साथ.

समझ से बाहर

1. इस सामान्यीकृत रूप का उपयोग करते हुए, जादुई वर्ग ज्ञात कीजिए यदि केंद्रीय संख्या 25 है।

2. किसी पंक्ति, स्तंभ या विकर्ण के 3 पदों को जोड़ने पर प्राप्त व्यंजक क्या है?

3. प्राप्त परिणाम लिखें—

   (a) सामान्यीकृत रूप में प्रत्येक पद में 1 जोड़ना।

   (b) सामान्यीकृत रूप में प्रत्येक पद को दोगुना करना

4. एक जादुई वर्ग बनाएं जिसका जादुई योग 60 हो।

5. क्या नौ भरकर जादुई वर्ग प्राप्त करना संभव है? गैर-लगातार संख्याएँ?

कोशिश यह

पहली बार 4 × 4 मैजिक स्क्वायर

सबसे पहला 4 × 4 जादुई वर्ग भारत के खजुराहो में पार्श्वनाथ जैन मंदिर में 10वीं शताब्दी के एक शिलालेख में पाया जाता है, और इसे चौतीसा यंत्र के रूप में जाना जाता है।

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

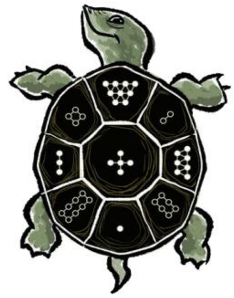
भारत के खजुराहो में पहली बार दर्ज किया गया 4 × 4 जादुई वर्ग, चौतीसा यंत्र

चौतीस का अर्थ है 34. आपको क्या लगता है कि उन्होंने इसे चौतीसा यंत्र क्यों कहा?

इस जादुई वर्ग में प्रत्येक पंक्ति, स्तंभ और विकर्ण का योग 34 होता है।

क्या आप वर्ग में चार संख्याओं के अन्य पैटर्न ढूंढ सकते हैं जिनका योग 34 हो?

इतिहास और संस्कृति में जादुई वर्ग



अब तक का पहला जादुई चौक, लो शू चौक, 2000 साल से भी पहले प्राचीन चीन में दर्ज किया गया था। यह किंवदंती लो नदी में आई एक भयावह बाढ़ के बारे में बताती है, जिसके दौरान देवताओं ने लोगों को बचाने के लिए एक कछुआ भेजा था। कछुए की पीठ पर 3×3 का एक ग्रिड था, जिस पर 1 से 9 तक की संख्याएँ एक जादुई पैटर्न में व्यवस्थित थीं।

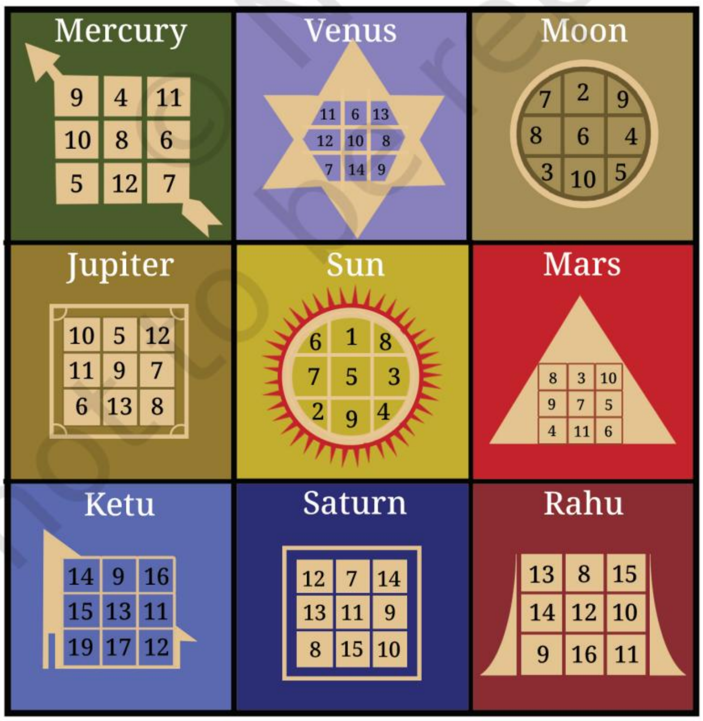
2	7	6
9	5	1
4	3	8

जादुई वर्गों का अध्ययन विश्व के विभिन्न भागों में अलग-अलग समय पर किया गया, जिनमें भारत, जापान, मध्य एशिया और यूरोप शामिल हैं।

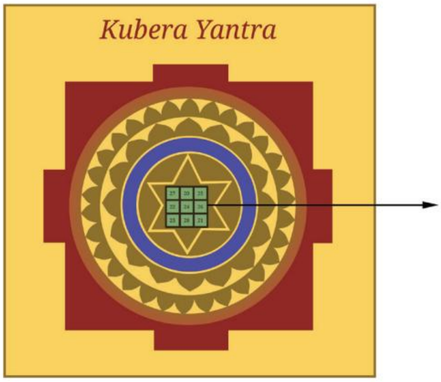
भारतीय गणितज्ञों ने जादुई वर्गों पर व्यापक रूप से काम किया है, तथा उन्हें बनाने की सामान्य विधियों का वर्णन किया है।
भारतीय गणितज्ञों का कार्य केवल 3×3 और 4×4 ग्रिड तक ही सीमित नहीं था, जैसा कि हमने ऊपर चर्चा की है, बल्कि 5×5 और अन्य बड़े वर्ग ग्रिड तक भी विस्तृत था। हम इनके बारे में आगे की कक्षाओं में और जानेंगे।

जादुई वर्गों का अस्तित्व केवल गणितीय शोध-कार्यों तक ही सीमित नहीं है। ये भारत में कई स्थानों पर पाए जाते हैं।
दाईं ओर की तस्वीर तमिलनाडु के पलानी स्थित एक मंदिर के स्तंभ पर लगे 3×3 के जादुई वर्ग की है। यह मंदिर आठवीं शताब्दी का है।

भारत में घरों और दुकानों में 3×3 जादुई वर्ग भी मिल सकते हैं। नीचे दिखाया गया नवग्रह यंत्र ऐसा ही एक उदाहरण है।



ध्यान दें कि प्रत्येक ग्रह के साथ एक अलग जादुई योग जुड़ा हुआ है ।
कुबेर यंत्र का चित्र नीचे दिखाया गया है:



27	20	25
22	24	26
23	28	21

6.4 प्रकृति का पसंदीदा क्रम: विरहङ्क–फिबोनाची संख्याएँ!

अनुक्रम 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,... (विरांगक-फिबोनाची संख्याएँ) गणित के सबसे प्रसिद्ध अनुक्रमों में से एक है—यह कला, विज्ञान और गणित की दुनिया में हर जगह पाया जाता है। हालाँकि ये संख्याएँ विज्ञान में बहुत बार पाई जाती हैं, लेकिन यह उल्लेखनीय है कि इन संख्याओं की खोज सबसे पहले कला (विशेषकर कविता) के संदर्भ में हुई थी!

इस प्रकार विरहङ्क -फिबोनाची संख्याएं कला, विज्ञान और गणित के बीच घनिष्ठ संबंधों का एक सुंदर चित्रण प्रस्तुत करती हैं।

विरहांक संख्याओं की खोज

विरहांक संख्याएं पहली बार हजारों साल पहले संस्कृत और प्राकृत भाषाविदों के काव्य-अध्ययन में सामने आईं!

प्राकृत, संस्कृत, मराठी, मलयालम, तमिल और तेलुगु सहित कई भारतीय भाषाओं की कविताओं में प्रत्येक शब्दांश को दीर्घ या लघु के रूप में वर्गीकृत किया जाता है।

एक दीर्घ शब्दांश का उच्चारण एक लघु शब्दांश की तुलना में अधिक समय तक होता है—वास्तव में, ठीक दुगुने समय तक। ऐसी कविता गाते समय, एक लघु शब्दांश एक लय तक और एक दीर्घ शब्दांश दो लय तक होता है।

इससे अनेक गणितीय प्रश्न उठते हैं, जिन पर इन भाषाओं के प्राचीन कवियों ने गहन विचार किया। कविता से संबंधित इन प्रश्नों को पूछने और उनके उत्तर देने की प्रक्रिया में कई महत्वपूर्ण गणितीय खोजें हुईं।

इनमें से एक विशेष रूप से महत्वपूर्ण प्रश्न निम्नलिखित था।
छोटे अक्षरों (1 ताल) और लंबे अक्षरों (2 ताल) वाली 8 तालों वाली कितनी लयें हैं? यानी, कितने तरीकों से कोई व्यक्ति

छोटे और लंबे अक्षरों से 8 बीट भरें, जहां एक छोटा अक्षर एक बीट समय लेता है और एक लंबा अक्षर दो बीट समय लेता है।

यहां कुछ संभावनाएं हैं: लंबा लंबा लंबा लंबा

छोटा छोटा छोटा छोटा छोटा छोटा छोटा छोटा छोटा

छोटा लंबा लंबा छोटा लंबा

लंबा लंबा छोटा छोटा लंबा

⋮

क्या आप अन्य लोगों को ढूंढ सकते हैं?

गणितीय रूप से कहें तो: कितने अलग-अलग तरीकों से कोई व्यक्ति एक संख्या, मान लीजिए 8, को 1 और 2 के योग के रूप में कैसे लिखें ?

उदाहरण के लिए, हमारे पास है:

$$8 = 2 + 2 + 2 + 2,$$
$$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$
$$8 = 1 + 2 + 2 + 1 + 2,$$
$$8 = 2 + 2 + 1 + 1 + 2,$$

वगैरह।

क्या आप अन्य रास्ते देखते हैं?

यहां 1, 2, 3 और 4 को 1 और 2 के योग के रूप में लिखने के सभी तरीके दिए गए हैं ।

	विभिन्न तरीके	तरीकों की संख्या
एन = 1	1	1
एन = 2	1 + 1 2	2
एन = 3	1 + 1 + 1 1 + 2 2 + 1	3
एन = 4	1 + 1 + 1 + 1 1 + 1 + 2 1 + 2 + 1 2 + 1 + 1 2 + 2	5

अपनी नोटबुक में संख्या 5 को 1 और 2 के योग के रूप में हर संभव तरीके से लिखने की कोशिश करो! आपको कितने तरीके मिले? (आपको 8 अलग-अलग तरीके मिलने चाहिए!) क्या आप सभी संभावनाओं को सूचीबद्ध किए बिना उत्तर निकाल सकते हैं? क्या आप इसे n = 8 के लिए आज़मा सकते हैं?

यहाँ पाँच ताल वाले सभी लघु और दीर्घ अक्षरों की लय लिखने का एक व्यवस्थित तरीका दिया गया है। चार ताल वाले सभी तालों के आगे '1+' लिखें, और फिर तीन ताल वाले सभी तालों के आगे '2+' लिखें। इससे हमें पाँच ताल वाली सभी लय मिल जाएँगी:

एन = 5	1 + 1 + 1 + 1 + 1 1 + 1 + 1 + 2 1 + 1 + 2 + 1 1 + 2 + 1 + 1 1 + 2 + 2	2 + 1 + 1 + 1 2 + 1 + 2 2 + 2 + 1

इस प्रकार, 5 ताल वाली 8 लयें हैं!

इस विधि के कारगर होने का कारण यह है कि प्रत्येक 5-बीट लय या तो '1+' या '2+' से शुरू होनी चाहिए। यदि यह '1+' से शुरू होती है, तो शेष संख्याएँ 4-बीट लय प्रदान करेंगी, और हम उन सभी को लिख सकते हैं।

अगर यह 2+ से शुरू होता है, तो बाकी संख्याएँ 3-बीट लय देंगी, और हम उन सभी को लिख सकते हैं। इसलिए, 5-बीट लय की संख्या 4-बीट लय की संख्या और 3-बीट लय की संख्या के योग के बराबर होती है।

6-ताल वाली कितनी लयें होती हैं? इसी तर्क से, 5-ताल वाली लयों की संख्या और 4-ताल वाली लयों की संख्या का योग 8 + 5 = 13 होगा। इस प्रकार, 6 ताल वाली 13 लयें होती हैं।

? सभी 6-ताल लय को व्यवस्थित तरीके से लिखें, यानी 1 और 2 के योग को सभी संभावित तरीकों से 6 लिखें। क्या आपको 13 तरीके मिले?

किसी भी निश्चित संख्या में लय वाले छोटे अक्षरों और दीर्घ अक्षरों की सभी लयों की गणना करने की यह सुंदर विधि सर्वप्रथम महान प्राकृत विद्वान विरहांक ने लगभग 700 ई. में दी थी। उन्होंने अपनी यह विधि एक प्राकृत कविता के रूप में दी थी! इसीलिए, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,... के अनुक्रम को विरहांक अनुक्रम कहा जाता है, और इस क्रम की संख्याओं को विरहांक संख्याएँ कहा जाता है।

विरहङ्क इतिहास में पहले ज्ञात व्यक्ति थे जिन्होंने स्पष्ट रूप से इन महत्वपूर्ण संख्याओं पर विचार किया और उनके निर्माण के नियम को लिखा।

भारत के अन्य विद्वानों ने भी इन संख्याओं पर इसी काव्यात्मक संदर्भ में विचार किया। विरहांक , लगभग 300 ईसा पूर्व के महान संस्कृत विद्वान पिंगला की प्रारंभिक कृतियों से प्रेरित था। विरहांक के बाद, गोपाल (लगभग 1135 ई.) और फिर हेमचंद्र (लगभग 1150 ई.) ने भी इन संख्याओं के बारे में लिखा।

पश्चिम में, इन संख्याओं को फिबोनाची संख्याओं के नाम से जाना जाता है, एक इतालवी गणितज्ञ के नाम पर जिन्होंने इनके बारे में 1202 ई . में लिखा था - विरहांक के लगभग 500 साल बाद। जैसा कि हम देख सकते हैं, फिबोनाची इन संख्याओं के बारे में लिखने वाले न तो पहले व्यक्ति थे, न ही दूसरे, यहाँ तक कि तीसरे भी नहीं! कभी-कभी "विरहांक-फिबोनाची संख्याएँ" शब्द का प्रयोग इसलिए किया जाता है ताकि सभी समझ सकें कि क्या कहा जा रहा है।

तो, लघु और दीर्घ अक्षरों की कितनी लय हैं
8 धड़कन? हम विरहांक अनुक्रम का 8वाँ तत्व लेते हैं :

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

इस प्रकार, 8 ताल वाली 34 लयें हैं।

अनुक्रम में अगली संख्या 55 के बाद लिखें।

हमने देखा कि अनुक्रम में अगली संख्या पिछली दो संख्याओं को जोड़कर प्राप्त की गई है। जाँच कीजिए कि क्या यह ऊपर दी गई संख्याओं के लिए भी सही है। अगली संख्या 34 + 55 = 89 है।

अनुक्रम में अगली 3 संख्याएँ लिखें:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ___, ___, ___, ...

यदि आपको उपरोक्त क्रम में एक और संख्या लिखनी हो, तो क्या आप बता सकते हैं कि वह विषम संख्या होगी या सम संख्या (पिछली दो संख्याओं को जोड़े बिना)?

अनुक्रम में प्रत्येक संख्या की समता क्या है? क्या आपको समता के अनुक्रम में कोई पैटर्न दिखाई देता है?

आज, विरहांक-फिबोनाची संख्याएँ कविता से लेकर ढोल-वादन, दृश्य कला और वास्तुकला से लेकर विज्ञान तक, कई गणितीय और कलात्मक सिद्धांतों का आधार बनती हैं। शायद इन संख्याओं की सबसे आश्चर्यजनक घटनाएँ प्रकृति में ही होती हैं। उदाहरण के लिए, डेज़ी पर पंखुड़ियों की संख्या आमतौर पर एक विरहांक संख्या होती है।

इनमें से प्रत्येक फूल पर आपको कितनी पंखुड़ियाँ दिखाई देती हैं?

13 पंखुड़ियों वाला एक डेज़ी

21 पंखुड़ियों वाला एक डेज़ी

34 पंखुड़ियों वाला एक डेज़ी

विरहङ्क के कई अन्य उल्लेखनीय गणितीय गुण हैं-

फिबोनाची संख्याएं जिन्हें हम बाद में गणित के साथ-साथ अन्य विषयों में भी देखेंगे।

ये संख्याएँ वास्तव में कला, विज्ञान और गणित के बीच घनिष्ठ संबंधों का उदाहरण हैं।

6.5 अंक छिपे हुए

आपने संख्याओं के साथ अंकगणितीय संक्रियाएँ की हैं। अक्षरों के साथ भी ऐसा ही करने के बारे में आप क्या सोचते हैं?

नीचे दी गई गणनाओं में, अंकों को अक्षरों से बदल दिया गया है। प्रत्येक अक्षर एक विशिष्ट अंक (0 – 9) को दर्शाता है। आपको यह पता लगाना है कि प्रत्येक अक्षर किस अंक को दर्शाता है।

टी
टी
+ टी
बाहर

यहाँ, हमारे पास एक अंकीय संख्या है, जिसे स्वयं में दो बार जोड़ने पर दो अंकों का योग प्राप्त होता है। योगफल का इकाई अंक और जोड़ा जा रहा एकल अंक समान है।

? U और T क्या हो सकते हैं? क्या T 2 हो सकता है? क्या यह 3 हो सकता है?

के2
+ के2
हम्म

एक बार जब आप खोज करेंगे तो आप देखेंगे कि T = 5 और UT = 15 है।

आइये दाईं ओर दिखाए गए एक और उदाहरण पर नजर डालें।

यहाँ K2 का अर्थ है कि यह संख्या एक दो अंकों की संख्या है जिसमें इकाई के स्थान पर अंक '2' और दहाई के स्थान पर 'K' है। K2 को स्वयं में जोड़ने पर तीन अंकों का योगफल HMM प्राप्त होता है। अक्षर M किस अंक के अनुरूप होना चाहिए?

योगफल के दहाई तथा इकाई दोनों स्थानों पर अंक समान हैं।

? H का क्या? क्या यह 2 हो सकता है? क्या यह 3 हो सकता है?

इस तरह के सवाल हल करने में दिलचस्प और मज़ेदार हो सकते हैं! यहाँ आपके लिए ऐसे ही कुछ और सवाल दिए गए हैं जिन्हें आप आज़मा सकते हैं। जानिए हर अक्षर का क्या मतलब है।

प्रत्येक प्रश्न के बारे में आपने क्या सोचा, अपने सहपाठियों के साथ साझा करें; हो सकता है आपको कुछ नए दृष्टिकोण मिलें।

वर्ष	बी5	केपी	सी 1
+ जेड	+ 3डी	+ केपी	+ सी
अच्छा	ईडी5	पीआरआर	1एफएफ

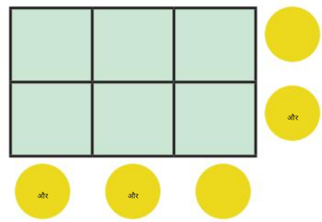
इस प्रकार के प्रश्नों को 'क्रिप्टारिथ्म' या 'अल्फामेटिक्स' कहा जाता है।

? समझ से बाहर

1. एक लाइट बल्ब जल रहा है। दोरजी इसका स्विच 77 बार घुमाते हैं। क्या बल्ब जलेगा या बुझेगा? क्यों?

2. लिस्विनी के पास एक बड़ा पुराना विश्वकोश है। जब उसने उसे खोला, तो उसमें से कई ढीले पन्ने बाहर गिरे। उसने कुल 50 पन्ने गिने, जिनमें से प्रत्येक दोनों तरफ छपा हुआ था। क्या ढीले पन्ने की पृष्ठ संख्याओं का योग 6000 हो सकता है? क्यों या क्यों नहीं?

3. यहाँ 2 × 3 ग्रिड है। प्रत्येक पंक्ति और स्तंभ के लिए, योग की समता वृत्त में लिखी गई है; सम के लिए 'e' और विषम के लिए 'o'। पंक्ति और स्तंभ के योग की समता को संतुष्ट करने के लिए 6 बॉक्स में 3 विषम संख्याएँ ('o') और 3 सम संख्याएँ ('e') भरें।



4. 0 को जादुई योग मानकर 3 × 3 का जादुई वर्ग बनाएँ। सभी संख्याएँ शून्य नहीं हो सकतीं। आवश्यकतानुसार ऋणात्मक संख्याओं का प्रयोग करें।

5. निम्नलिखित रिक्त स्थानों को 'विषम' या 'सम' से भरें:

(a) विषम संख्या और सम संख्याओं का योग होता है ____

(b) विषम संख्याओं की सम संख्या का योग है (c) सम संख्याओं की सम संख्या का योग ____

है (d) विषम संख्याओं की विषम संख्या का योग है ____

____

6. 1 से 100 तक की संख्याओं के योग की समता क्या है?

7. विरहांक अनुक्रम में दो क्रमागत संख्याएँ 987 और 1597 हैं। इस अनुक्रम में अगली 2 संख्याएँ क्या हैं? इस अनुक्रम में पिछली 2 संख्याएँ क्या हैं?

8. आँगन 8 सीढ़ियों वाली सीढ़ी चढ़ना चाहता है। उसका मज़ेदार नियम यह है कि वह एक बार में या तो 1 या 2 कदम चढ़ सकता है। उदाहरण के लिए, उसका एक रास्ता 1, 2, 2, 1, 2 है। वह कितने अलग-अलग तरीकों से ऊपर पहुँच सकता है?

9. विरहांक अनुक्रम के 20वें पद की समता क्या है?

10. सत्य कथनों को पहचानें।

(a) व्यंजक 4m – 1 सदैव विषम संख्याएँ देता है।

(b) सभी सम संख्याओं को 6j – 4 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

(c) दोनों व्यंजक 2p + 1 और 2q – 1 सभी विषम संख्याओं का वर्णन करते हैं।

(d) व्यंजक 2f + 3 सम और विषम दोनों संख्याएँ देता है।

11. इस क्रिप्टारिथ्म को हल करें:

बाहर
+ आईटी
———
गूंथना

Machine Translated by Google

सारांश

इस अध्याय में हमने निम्नलिखित बातों का अन्वेषण किया है:

- पहली गतिविधि में, हमने देखा कि वास्तविक संख्याओं को जाने बिना संख्याओं के अनुक्रम (जैसे, ऊँचाई माप) को कैसे व्यवस्थित किया जाता है, इसके बारे में जानकारी कैसे प्रस्तुत की जाती है।

- हमने समता की अवधारणा सीखी - वे संख्याएँ जिन्हें जोड़ों में व्यवस्थित किया जा सकता है (सम संख्याएँ) और वे संख्याएँ जिन्हें जोड़ों में व्यवस्थित नहीं किया जा सकता (विषम संख्याएँ)।

- हमने सीखा कि योग और गुणनफल की समता कैसे निर्धारित की जाती है।
- ग्रिड में योगों की खोज करते समय, हम पंक्ति और स्तंभ के योगों को देखकर यह निर्धारित कर सकते थे कि ग्रिड को भरना असंभव है या नहीं। हमने इसे जादुई वर्ग बनाने के लिए विस्तारित किया।

- हमने देखा कि कैसे कला के माध्यम से इतिहास में सबसे पहले विरहांक संख्याओं की खोज हुई। विरहांक अनुक्रम 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... है।

- हम क्रिप्टारिथ्म के माध्यम से गणित-जासूस बन गए, जहां अंकों को अक्षरों से बदल दिया जाता है।