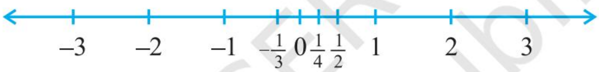
0962CH01

अध्याय 1

संख्या प्रणालियाँ

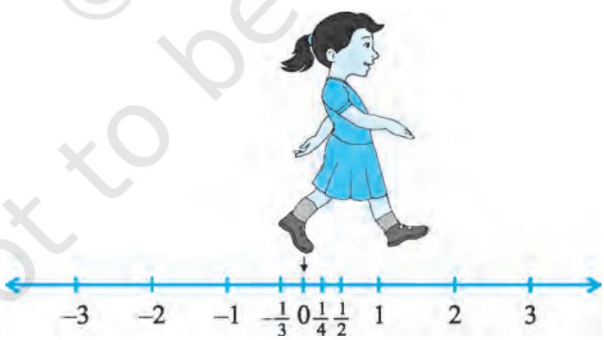
1.1 परिचय

अपनी पिछली कक्षाओं में, आपने संख्या रेखा और उस पर विभिन्न प्रकार की संख्याओं को दर्शाने के बारे में सीखा है (चित्र 1.1 देखें)।



चित्र 1.1: संख्या रेखा

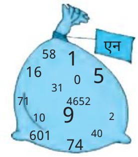
ज़रा सोचिए, आप शून्य से शुरू करते हैं और इस संख्या रेखा पर धनात्मक दिशा में चलते जाते हैं। जहाँ तक आपकी नज़र जाती है, संख्याएँ ही संख्याएँ हैं!



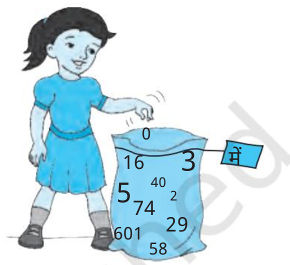
चित्र 1.2

अब मान लीजिए आप संख्या रेखा पर चलना शुरू करते हैं, और कुछ संख्याएँ एकत्रित करते हैं नंबर। उन्हें रखने के लिए एक बैग तैयार रखें!

आप शुरुआत में केवल प्राकृतिक संख्याएँ जैसे 1, 2, 3, इत्यादि चुन सकते हैं। आप जानते हैं कि यह सूची अनंत तक चलती है। (ऐसा क्यों है?) तो, अब आपके बैग में अनंत प्राकृतिक संख्याएँ हैं! याद रखें कि हम इस संग्रह को N चिन्ह से दर्शाते हैं।



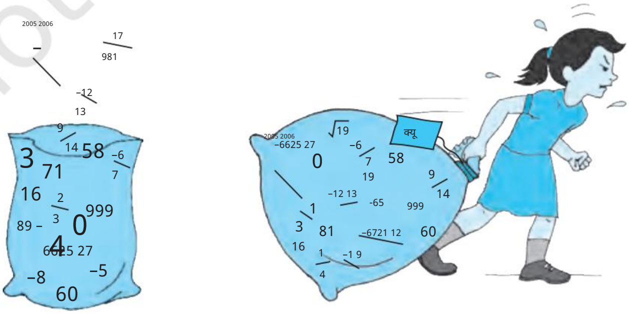
अब मुड़ें और पीछे की ओर चलें, शून्य उठाएँ और उसे थैले में डाल दें। अब आपके पास पूर्ण संख्याओं **का संग्रह है** जिसे W चिन्ह से दर्शाया गया है।



अब, आपके सामने ढेर सारे ऋणात्मक पूर्णांक फैले हुए हैं। सभी ऋणात्मक पूर्णांकों को अपने बैग में रख लीजिए। आपका नया संग्रह क्या है? याद कीजिए कि यह सभी पूर्णांकों का संग्रह है, और इसे Z चिह्न से दर्शाया जाता है।

क्या लाइन पर अभी भी कुछ नंबर बचे हैं? बिलकुल! कुछ नंबर ऐसे हैं जैसे

$\frac{1}{4}$, $\frac{3}{\ }$, या यहाँ तक कि $2\ \frac{-2005}{2006}$ · यदि आप ऐसी सभी संख्याओं को भी बैग में डाल दें, तो यह अब होगा



परिमेय संख्याओं का संग्रह । परिमेय संख्याओं के संग्रह को Q द्वारा दर्शाया जाता है। 'परिमेय' शब्द 'अनुपात' से आया है, और Q शब्द 'भागफल' से आया है।

आपको परिमेय संख्याओं की परिभाषा याद होगी:

एक संख्या 'r' को **परिमेय संख्या** कहा जाता है , **यदि इसे** p के रूप में लिखा जा सके $\frac{}{\text{क्यू}}$,

जहाँ p और q पूर्णांक हैं और q ≠ 0. (हम इस बात पर क्यों जोर देते हैं कि q ≠ 0?)

ध्यान दें कि अब बैग में मौजूद सभी संख्याओं को इस रूप में लिखा जा सकता है $\frac{\text{पी}}{\text{क्यू}}$, जहाँ p

और q पूर्णांक हैं और q ≠ 0. उदाहरण के लिए, –25 को इस प्रकार लिखा जा सकता है $\frac{-25}{1}$; यहाँ p = –25

और q = 1. इसलिए, परिमेय संख्याओं में प्राकृतिक संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ भी शामिल हैं संख्याएँ और पूर्णांक.

आप यह भी जानते हैं कि परिमेय संख्याओं का कोई अद्वितीय प्रतिनिधित्व नहीं होता है।

फॉर्म पी $\frac{}{\text{क्यू}}$, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और q ≠ 0. उदाहरण के लिए, 2 $\frac{1}{} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50}$

$= \frac{47}{94}$, इत्यादि। ये समतुल्य परिमेय संख्याएँ (या भिन्न) हैं। हालाँकि,

जब हम कहते हैं कि p $\frac{}{\text{क्यू}}$ एक परिमेय संख्या है, या जब हम q को दर्शाते हैं $\frac{\text{पी}}{}$ नंबर पर

रेखा पर, हम मानते हैं कि q ≠ 0 और p तथा q में 1 के अलावा कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है (अर्थात, p और q **सह-अभाज्य** हैं)। अतः, संख्या रेखा पर, अनंत संख्याओं में से

2 के बराबर भिन्न $\frac{1}{}$, हम उन सभी का प्रतिनिधित्व $\frac{1}{2}$ करना चुनेंगे।

अब, आइए विभिन्न प्रकार की संख्याओं के बारे में कुछ उदाहरण हल करें, जिन्हें आप हल कर सकते हैं। पिछली कक्षाओं में पढ़ा है।

उदाहरण 1: क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य? अपने उत्तरों के लिए कारण बताइए।

(i) प्रत्येक पूर्ण संख्या एक प्राकृतिक संख्या होती है।

(ii) प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या होती है।

(iii) प्रत्येक परिमेय संख्या एक पूर्णांक होती है।

हल : (i) असत्य, क्योंकि शून्य एक पूर्ण संख्या है परन्तु प्राकृत संख्या नहीं है।

(ii) सत्य, क्योंकि प्रत्येक पूर्णांक m को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। $\frac{\text{एम}}{1}$, और इसलिए यह एक

Machine Translated by Google

(iii) असत्य, क्योंकि 5 $\frac{3}{}$ पूर्णांक नहीं है.

उदाहरण 2 : 1 और 2 के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हम इस समस्या का समाधान कम से कम दो तरीकों से कर सकते हैं।

समाधान 1: याद रखें कि r और s के बीच एक परिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए , आप r और s को जोड़ सकते हैं

s और योग को 2 से विभाजित करें, अर्थात $\frac{\text{आरएस +}}{2}$ r और s के बीच स्थित है । इसलिए, $\frac{3}{2}$ एक संख्या है

1 और 2 के बीच। आप चार और परिमेय संख्याएँ ज्ञात करने के लिए इस तरीके से आगे बढ़ सकते हैं

1 और 2 के बीच। ये चार संख्याएँ 4 8 8 हैं 5 11 13 7 —, —, — और ।— 4

समाधान 2: दूसरा विकल्प एक ही चरण में सभी पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात करना है। चूँकि हमें पाँच संख्याएँ चाहिए, हम 1 और 2 को हर 5 + 1 वाली परिमेय संख्याओं के रूप में लिखते हैं,

अर्थात, 1 = 6 $\frac{6}{}$ और 2 = $\frac{12}{}$ · तो आप जाँच सकते हैं कि 6 $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{10}{6}$ और सभी तर्कसंगत हैं $\frac{11}{6}$

1 और 2 के बीच की संख्याएँ। तो, पाँच संख्याएँ हैं 7 4 3 5 11 —, —, —, —, — और — . 6 3 2 3 6

टिप्पणी: ध्यान दें कि उदाहरण 2 में, आपसे पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात करने के लिए कहा गया था 1 और 2 के बीच। लेकिन, आपको यह एहसास हो गया होगा कि वास्तव में अनंत संख्याएँ हैं 1 और 2 के बीच परिमेय संख्याएँ। सामान्यतः, अनंत रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं किसी भी दो दी गई परिमेय संख्याओं के बीच की संख्याएँ।

आइए संख्या रेखा पर फिर से नज़र डालें। क्या आपने सभी संख्याएँ पढ़ ली हैं? अभी नहीं। सच तो यह है कि अभी भी अनगिनत संख्याएँ बाकी हैं। रेखा! आपके द्वारा उठाए गए नंबरों के स्थानों के बीच में अंतराल हैं, और सिर्फ एक या दो, लेकिन अनंत संख्या में। आश्चर्यजनक बात यह है कि अनंत संख्या में हैं इनमें से किसी भी दो अंतरालों के बीच स्थित संख्याओं को भी शामिल करें!

अतः हमारे सामने निम्नलिखित प्रश्न रह जाते हैं:

1. वे कौन सी संख्याएँ हैं, जो संख्या पर शेष हैं रेखा, क्या कहलाती है?

2. हम उन्हें कैसे पहचानते हैं? यानी, हम उन्हें कैसे पहचानते हैं? उन्हें तर्कसंगत (तर्कसंगत) से अलग करें संख्याएँ)?

इन प्रश्नों के उत्तर अगले भाग में दिये जायेंगे।

अभ्यास 1.1

पृष्ठ 1. क्या शून्य एक परिमेय संख्या है? क्या आप इसे इस रूप में लिख सकते हैं? — , जहाँ p और q पूर्णांक हैं
क्यू

और q ≠ 0?

2. 3 और 4 के बीच छः परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

3 3. 5 के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए — और 5 — 4 .

4. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों के लिए कारण भी बताइए।

(i) प्रत्येक प्राकृतिक संख्या एक पूर्ण संख्या होती है। (ii) प्रत्येक पूर्णांक एक पूर्ण संख्या होती है। (iii) प्रत्येक परिमेय संख्या एक पूर्ण संख्या होती है।

1.2 अपरिमेय संख्याएँ

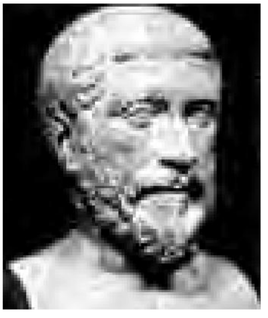
पिछले भाग में हमने देखा कि संख्या रेखा पर ऐसी संख्याएँ भी हो सकती हैं जो परिमेय नहीं हैं। इस भाग में, हम इन संख्याओं की जाँच करेंगे। अब तक, सभी

आपके सामने जो संख्याएँ आई हैं, वे p के रूप की हैं — , जहाँ p और q पूर्णांक हैं
क्यू

और q ≠ 0. तो, आप पूछ सकते हैं: क्या ऐसी संख्याएँ हैं जो इस रूप की नहीं हैं? सचमुच ऐसी संख्याएँ होती हैं।

यूनान के पाइथागोरस, जो प्रसिद्ध गणितज्ञ और दार्शनिक पाइथागोरस के अनुयायी थे, लगभग 400 ईसा पूर्व उन संख्याओं की खोज करने वाले पहले व्यक्ति थे जो परिमेय नहीं थीं। इन संख्याओं को अपरिमेय संख्याएँ (अपरिमेय) कहा जाता है, क्योंकि इन्हें पूर्णांकों के अनुपात के रूप में नहीं लिखा जा सकता। क्रोटन के पाइथागोरस हिप्पाकस द्वारा अपरिमेय संख्याओं की खोज के बारे में कई मिथक हैं। सभी मिथकों में, हिप्पाकस का एक

दुर्भाग्यपूर्ण अंत, या तो यह पता लगाने के लिए कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय है या गुप्त पाइथागोरस संप्रदाय के बाहर के लोगों के लिए $\sqrt{2}$ के रहस्य का खुलासा करने के लिए!



पाइथागोरस (569 ईसा पूर्व – 479 ईसा पूर्व)

चित्र 1.3

आइये इन संख्याओं को औपचारिक रूप से परिभाषित करें।

एक संख्या 's' को अपरिमेय कहा जाता है, यदि इसे p के रूप में नहीं लिखा जा सकता है — , जहाँ p
क्यू

और q पूर्णांक हैं और q ≠ 0.

आप पहले से ही जानते हैं कि परिमेय संख्याएँ अनंत होती हैं। यह भी पता चलता है कि अपरिमेय संख्याएँ भी अनंत होती हैं। कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं:

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}$, पाई, 0.10110111011110...

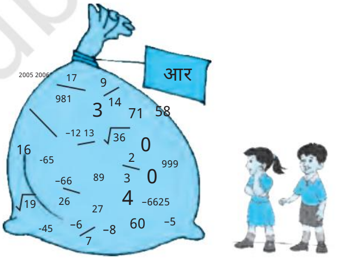
टिप्पणी: याद कीजिए कि जब हम संख्या का धनात्मक वर्गमूल चिह्न प्रयोग करते हैं, तो $\sqrt{4} = 2$, हम मानते हैं कि यह होता है, हालाँकि 2 और -2 दोनों ही 4 के वर्गमूल हैं।

ऊपर सूचीबद्ध कुछ अपरिमेय संख्याओं से आप परिचित हैं। उदाहरण के लिए, आप ऊपर सूचीबद्ध कई वर्गमूलों और संख्या π से पहले ही परिचित हो चुके हैं।

पाइथागोरस ने सिद्ध किया कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय है। बाद में लगभग 425 ईसा पूर्व में, साइरेन के थियोडोरस ने सिद्ध किया कि $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ और $\sqrt{17}$ भी अपरिमेय हैं। $\sqrt{2}$ की अपरिमेयता के प्रमाण , कक्षा X में चर्चा किए गए हैं। जहाँ तक π का प्रश्न है, यह विभिन्न संस्कृतियों को हजारों वर्षों से ज्ञात था, इसे लैम्बर्ट और लीजेंड्रे ने 1700 के दशक के अंत में ही अपरिमेय सिद्ध किया था।

अगले भाग में हम चर्चा करेंगे कि 0.10110111011110... और π अपरिमेय क्यों हैं।

आइए पिछले भाग के अंत में उठाए गए प्रश्नों पर वापस लौटें। परिमेय संख्याओं के थैले को याद करें। अगर हम अब सभी अपरिमेय संख्याओं को थैले में डाल दें, तो क्या संख्या रेखा पर कोई संख्या बचेगी? उत्तर है नहीं! यह पता चलता है कि संग्रह



सभी परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं का योग मिलकर वास्तविक संख्याओं का समूह बनता है, जिसे R से दर्शाया जाता है। इसलिए, एक वास्तविक संख्या या तो परिमेय होती है या अपरिमेय। अतः, हम कह सकते हैं कि प्रत्येक वास्तविक संख्या संख्या रेखा पर एक अद्वितीय बिंदु द्वारा निरूपित होती है। साथ ही, संख्या रेखा पर प्रत्येक बिंदु एक अद्वितीय वास्तविक संख्या को दर्शाता है।

इसीलिए हम संख्या रेखा को वास्तविक संख्या रेखा कहते हैं।

1870 के दशक में दो जर्मन गणितज्ञों, कैंटर और डेडेकिंड ने दिखाया कि: प्रत्येक वास्तविक संख्या के अनुरूप, वास्तविक संख्या रेखा पर एक बिंदु होता है, और संख्या रेखा पर प्रत्येक बिंदु के अनुरूप, एक अद्वितीय वास्तविक संख्या मौजूद होती है।

आर. डेडेकिंड (1831-1916)

चित्र 1.4

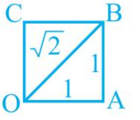
जी. कैंटर (1845-1918)

चित्र 1.5

आइए देखें कि हम संख्या रेखा पर कुछ अपरिमेय संख्याओं का पता कैसे लगा सकते हैं।

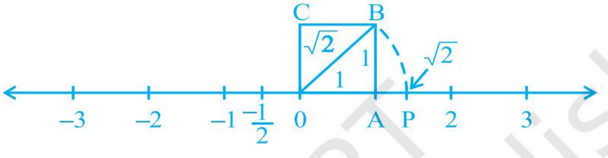
उदाहरण 3: संख्या रेखा पर $\sqrt{2}$ का पता लगाएँ ।

समाधान: यह देखना आसान है कि यूनानियों ने कैसे खोज की होगी $\sqrt{2}$. एक वर्ग OABC पर विचार करें, जिसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई 1 इकाई है (देखें चित्र 1.6)। तब आप पाइथागोरस प्रमेय से देख सकते हैं कि ओबी = $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. संख्या रेखा पर $\sqrt{2}$ को हम कैसे दर्शाते हैं?



चित्र 1.6

यह आसान है। चित्र 1.6 को संख्या रेखा पर स्थानांतरित करें और सुनिश्चित करें कि शीर्ष O शून्य के साथ मेल खाता है (चित्र 1.7 देखें)।

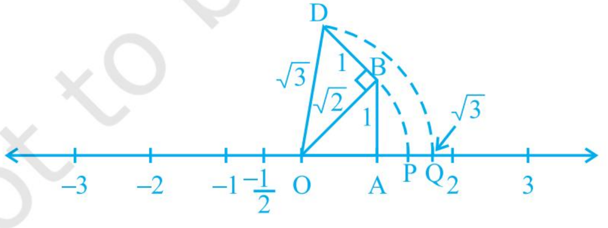


चित्र 1.7

हमने अभी देखा कि OB = $\sqrt{2}$ है । केंद्र O और त्रिज्या OB वाले परकार का प्रयोग करते हुए, संख्या रेखा को बिंदु P पर प्रतिच्छेद करने वाला एक चाप खींचिए। तब P, $\sqrt{2}$ के संगत होगा संख्या रेखा.

उदाहरण 4 : संख्या रेखा पर $\sqrt{3}$ का पता लगाएँ ।

समाधान : आइए हम चित्र 1.7 पर वापस आते हैं।



चित्र 1.8

OB पर लंबवत इकाई लंबाई की BD की रचना कीजिए (जैसा कि चित्र 1.8 में है)। फिर पाइथागोरस प्रमेय से हम देखते हैं कि OD = $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. कम्पास का उपयोग करके, केन्द्र O और त्रिज्या OD लेकर एक चाप खींचिए जो संख्या रेखा को बिन्दु Q पर प्रतिच्छेद करता है। तो Q, $\sqrt{3}$ के अनुरूप है ।

इसी तरह, आप पता लगा सकते हैं $\sqrt{\text{एन}}$ किसी भी धनात्मक पूर्णांक n के लिए, n – 1 के $\sqrt{}$ बाद स्थित.

अभ्यास 1.2

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए।

   (i) प्रत्येक अपरिमेय संख्या एक वास्तविक संख्या होती है।

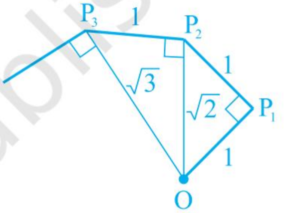
   (ii) संख्या रेखा पर प्रत्येक बिंदु m के रूप का होता है $\sqrt{}$, जहाँ m एक प्राकृतिक संख्या है.

   (iii) प्रत्येक वास्तविक संख्या एक अपरिमेय संख्या होती है।

2. क्या सभी धनात्मक पूर्णांकों के वर्गमूल अपरिमेय होते हैं? यदि नहीं, तो इसका एक उदाहरण दीजिए। किसी संख्या का वर्गमूल जो एक परिमेय संख्या है।

3. दर्शाइए कि संख्या रेखा पर $\sqrt{5}$ को किस प्रकार दर्शाया जा सकता है।

4. कक्षा गतिविधि ('वर्गमूल सर्पिल' का निर्माण) : कागज की एक बड़ी शीट लें और निम्नलिखित तरीके से 'वर्गमूल सर्पिल' का निर्माण करें। बिंदु O से शुरू करें और इकाई लंबाई का एक रेखाखंड OP1 खींचें । OP1 के लंबवत इकाई लंबाई का एक रेखाखंड P1 P2 खींचें (आकृति 1.9 देखें)। अब OP2 के लंबवत एक रेखाखंड P2 P3 खींचें। फिर OP3 के लंबवत एक रेखाखंड P3 P4 खींचें । इस तरीके को जारी रखते हुए, आप OPn–1 के लंबवत इकाई लंबाई का एक रेखाखंड खींचकर रेखाखंड Pn–1Pn प्राप्त कर सकते हैं। इस तरीके से, आपने बिंदु P2 , P3 ,...., Pn ,... बनाए होंगे, और उन्हें जोड़कर 2, 3, 4, ...



चित्र 1.9: वर्गमूल सर्पिल का निर्माण

$\sqrt{}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$

1.3 वास्तविक संख्याएँ और उनके दशमलव प्रसार

इस खंड में, हम परिमेय और अपरिमेय संख्याओं का एक अलग दृष्टिकोण से अध्ययन करेंगे। हम वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसारों पर विचार करेंगे और देखेंगे कि क्या हम इन प्रसारों का उपयोग परिमेय और अपरिमेय संख्याओं में अंतर करने के लिए कर सकते हैं। हम यह भी समझाएँगे कि संख्या रेखा पर वास्तविक संख्याओं को उनके दशमलव प्रसारों का उपयोग करके कैसे दर्शाया जाए। चूँकि परिमेय संख्याएँ हमारे लिए अधिक परिचित हैं, इसलिए आइए शुरुआत करते हैं

आइए तीन उदाहरण लेते हैं: $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$.

शेष बचे भाग पर विशेष ध्यान दें और देखें कि क्या आप कोई पैटर्न ढूंढ सकते हैं।

उदाहरण 5: का दशमलव विस्तार ज्ञात कीजिए $\frac{10}{3}$, $\frac{7}{8}$ और $\frac{1}{7}$.

समाधान :

3.333...
3) 10
9
10
9
10
9
10
9
1

0.875
8) 7.0
64
60
56
40
40
0

0.142857...
7) 1.0
7
30
28
20
14
60
56
40
35
50
49
1

शेषफल : 1, 1, 1, 1, 1... शेषफल : 6, 4, 0 भाजक : 3 भाजक : 8

शेषफल : 3, 2, 6, 4, 5, 1,
3, 2, 6, 4, 5, 1,...
भाजक : 7

आपने क्या नोटिस किया? आपको कम से कम तीन चीज़ें नोटिस करनी चाहिए थीं:

(i) शेषफल एक निश्चित अवस्था के बाद या तो 0 हो जाते हैं, या स्वयं को दोहराने लगते हैं।

(ii) शेषफलों की दोहराई जाने वाली श्रृंखला में प्रविष्टियों की संख्या भाजक से कम है

(एक संख्या स्वयं को दोहराती है और भाजक 3 है, $\frac{10}{3}$ $\frac{1}{7}$ इसमें छह प्रविष्टियाँ हैं

शेषफलों की पुनरावृत्ति श्रृंखला में 326451 तथा 7 भाजक है)।

(iii) यदि शेषफल दोहराए जाते हैं, तो हमें भागफल में अंकों का एक दोहराव वाला ब्लॉक प्राप्त होता है

(के लिए $\frac{10}{3}$, भागफल में 3 बार दोहराव और 7 के लिए $\frac{1}{\;}$, हमें दोहराए जाने वाला ब्लॉक 142857 मिलता है

भागफल में)।

Machine Translated by Google

यद्यपि हमने इस पैटर्न को केवल ऊपर दिए गए उदाहरणों का उपयोग करके देखा है, यह सभी के लिए सत्य है

p रूप के परिमेय $\frac{}{\text{क्यू}}$ (q ≠ 0). p को q से भाग देने पर , दो मुख्य चीजें होती हैं – या तो

शेष शून्य हो जाता है या कभी शून्य नहीं होता है और हमें एक दोहराव वाली स्ट्रिंग मिलती है
आइए हम प्रत्येक मामले को अलग से देखें।

स्थिति (i) : शेष शून्य हो जाता है

8 के उदाहरण में $\frac{7}{}$, हमने पाया कि कुछ चरणों के बाद शेष शून्य हो जाता है और

का दशमलव प्रसार = 0.875. अन्य उदाहरण हैं 8 $\frac{7}{}$ $\frac{1}{2}$ = 0.5, = 2.556. कुल मिलाकर $\frac{639}{250}$

इन मामलों में, दशमलव विस्तार एक निश्चित संख्या में चरणों के बाद समाप्त हो जाता है।
हम ऐसी संख्याओं के दशमलव प्रसार को सांत कहते हैं।

स्थिति (ii) : शेष कभी शून्य नहीं होता

के उदाहरणों में $\frac{10}{3}$ और $\frac{1}{7}$, हम देखते हैं कि शेषफल एक निश्चित समय के बाद दोहराए जाते हैं

चरण दशमलव विस्तार को अनंत काल तक जारी रखने के लिए बाध्य करता है। दूसरे शब्दों में, हमारे पास एक
भागफल में अंकों का दोहराव वाला ब्लॉक। हम कहते हैं कि यह विस्तार अनवसानी है

आवर्ती। उदाहरण के लिए, = 3.3333... और $\frac{10}{3}$ 7 $\frac{1}{}$ = 0.142857142857142857...

यह दिखाने का सामान्य तरीका है कि भागफल में 3 दोहराया जाता है $\frac{10}{3}$ इसे $3.\overline{3}$ के रूप में लिखना है .

इसी प्रकार, चूँकि अंकों का ब्लॉक 142857 भागफल 7 में दोहराया जाता है $\frac{1}{}$, हम 7 लिखते हैं $\frac{1}{}$ जैसा

$0.\overline{142857}$, जहां अंकों के ऊपर की पट्टी अंकों के उस ब्लॉक को इंगित करती है जो दोहराया जाता है।

इसके अलावा 3.57272... को $3.5\overline{72}$ के रूप में भी लिखा जा सकता है । अतः, ये सभी उदाहरण हमें अनवसानी संख्याएँ देते हैं।
आवर्ती (दोहराए जाने वाले) दशमलव विस्तार.

इस प्रकार, हम देखते हैं कि परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार में केवल दो विकल्प हैं:
या तो वे समाप्त होने वाले या गैर-समाप्त होने वाले आवर्ती होते हैं।

अब मान लीजिए, दूसरी ओर, संख्या रेखा पर चलते हुए आप एक रेखा पर आते हैं
3.142678 जैसी संख्या जिसका दशमलव प्रसार अंत है या जैसी संख्या
1.272727... यानी $1.\overline{27}$, क्या , जिसका दशमलव विस्तार अनवसानी आवर्ती है,
आप यह निष्कर्ष निकालते हैं कि यह एक परिमेय संख्या है? जवाब है हाँ!

हम इसे सिद्ध नहीं करेंगे, बल्कि कुछ उदाहरणों से इस तथ्य को स्पष्ट करेंगे।
आसान हैं.

उदाहरण 6: दर्शाइए कि 3.142678 एक परिमेय संख्या है। दूसरे शब्दों में, 3.142678 को व्यक्त कीजिए।

फॉर्म पी में $\frac{}{\text{क्यू}}$, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और q ≠ 0.

हल : हमारे पास $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ है, और इसलिए यह एक परिमेय संख्या है।

अब, आइए उस स्थिति पर विचार करें जब दशमलव प्रसार अनवसानी आवर्ती हो।

उदाहरण 7: दर्शाइए कि $0.3333... = 0.\overline{3}$ को p के रूप में व्यक्त किया जा सकता है $\frac{}{\text{क्यू}}$, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और q ≠ 0.

हल : चूँकि हम नहीं जानते कि $0.\overline{3}$ क्या है, आइए इसे 'x' कहें और इसी तरह

एक्स = 0.3333...

अब यहीं पर चाल काम आती है। देखिए

$$10\,x = 10 \times (0.333...) = 3.333...$$

अब, $3.3333... = 3 + x$, क्योंकि $x = 0.3333...$

इसलिए, $10\,x = 3 + x$

x के लिए हल करने पर , हमें प्राप्त होता है

$$9x = 3, \text{ अर्थात, } x = \frac{1}{3}$$

उदाहरण 8 : दर्शाइए कि $1.272727... = 1.\overline{27}$. p के रूप में व्यक्त किया जा सकता है $\frac{}{\text{क्यू}}$, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और q ≠ 0.

हल: मान लीजिए x = 1.272727... चूँकि दो अंक दोहराए जा रहे हैं, हम x को 100 से गुणा करते हैं
पाना

$$100\,x = 127.2727...$$

इसलिए, $100\,x = 126 + 1.272727... = 126 + x$

इसलिए, $100\,x - x = 126$, अर्थात, $99\,x = 126$

वह है, एक्स = $\frac{126}{99} = \frac{14}{11}$

आप इसके विपरीत जाँच कर सकते हैं कि $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$.

उदाहरण 9: दर्शाइए कि 0.2353535... = $0.2\overline{35}$ को इस रूप में व्यक्त किया जा सकता है $\frac{p}{q}$,

जहाँ p और q पूर्णांक हैं और q ≠ 0.

हल : मान लीजिए x = $0.2\overline{35}$. यहाँ पर, ध्यान दें कि 2 दोहराया नहीं गया है, लेकिन ब्लॉक 35 दोहराता है। चूँकि दो अंक दोहराए जा रहे हैं, इसलिए हम x को 100 से गुणा करके प्राप्त करते हैं

$$100x = 23.53535...$$

इसलिए,

$$100x = 23.3 + 0.23535... = 23.3 + x$$

इसलिए,

$$99x = 23.3$$

वह है, $99x = \frac{233}{10}$, जो x = $\frac{233}{990}$ देता है

आप इसका उल्टा भी देख सकते हैं $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$.

इसलिए, गैर-समाप्ति आवर्ती दशमलव विस्तार वाली प्रत्येक संख्या को व्यक्त किया जा सकता है

फॉर्म पी में $\frac{p}{q}$ (q ≠ 0), जहाँ p और q पूर्णांक हैं। आइए अपने परिणामों को संक्षेप में प्रस्तुत करें।

निम्नलिखित प्रपत्र:

एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो अंतक या असांतक आवर्ती होता है। इसके अलावा, एक संख्या जिसका दशमलव प्रसार

समाप्त या गैर-समाप्त आवर्ती तर्कसंगत है।

तो, अब हम जानते हैं कि एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार क्या हो सकता है।
अपरिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार के बारे में क्या? उपरोक्त गुण के कारण,
हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि उनके दशमलव विस्तार अनवसानी अनावर्ती हैं।

अतः अपरिमेय संख्याओं का गुणधर्म, ऊपर परिमेय संख्याओं के लिए बताए गए गुणधर्म के समान है
संख्याएँ, है

एक अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती होता है।
इसके अलावा, एक संख्या जिसका दशमलव विस्तार अनवसानी अनावर्ती है
तर्कहीन है.

पिछले भाग से s = 0.10110111011110... याद कीजिए । ध्यान दीजिए कि यह अनवसानी और अनावर्ती है। इसलिए, उपरोक्त गुणधर्म के अनुसार, यह अपरिमेय है।

इसके अलावा, ध्यान दें कि आप s के समान अनंत रूप से कई अपरिमेय संख्याएं उत्पन्न कर सकते हैं।

प्रसिद्ध अपरिमेय संख्याएँ $\sqrt{2}$ और π क्या हैं? यहाँ उनके दशमलव प्रसार दिए गए हैं।
एक निश्चित स्तर तक.

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096...$$

पाई = 3.14159265358979323846264338327950...

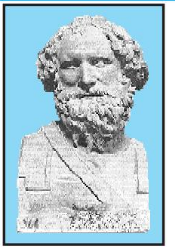
(ध्यान दें कि, हम अक्सर $\frac{22}{7}$ π के लिए एक अनुमानित मान के रूप में , लेकिन π ≠ $\frac{22}{7}$.)

पिछले कुछ वर्षों में, गणितज्ञों ने अधिक सटीक गणना करने के लिए विभिन्न तकनीकों का विकास किया है। और अपरिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार में अधिक अंक। उदाहरण के लिए, आप शायद उन्होंने विभाजन विधि द्वारा $\sqrt{2}$ के दशमलव प्रसार में अंक ज्ञात करना सीख लिया होगा । दिलचस्प बात यह है कि वैदिक काल के गणितीय ग्रंथ शुल्बसूत्र (तार के नियम) में काल (800 ई.पू. - 500 ई.पू.) में, आपको $\sqrt{2}$ का अनुमान इस प्रकार मिलता है:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} - \frac{1}{34}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3} = 1.4142156.$$

ध्यान दें कि यह पहले पाँच दशमलव स्थानों के लिए ऊपर दिए गए मान के समान है। π के दशमलव विस्तार में अंकों की खोज का इतिहास बहुत दिलचस्प है।

यूनानी प्रतिभाशाली आर्किमिडीज़ ने सबसे पहले गणना की थी π के दशमलव प्रसार में अंक । उन्होंने 3.140845 दिखाया < π < 3.142857. Aryabhatta (476 – 550 C.E.), the great भारतीय गणितज्ञ और खगोलशास्त्री ने इसका मान ज्ञात किया π का चार दशमलव स्थानों तक सही मान (3.1416)। उच्च मान का उपयोग करते हुए गति कंप्यूटर और उन्नत एल्गोरिदम, π रहा है 1.24 ट्रिलियन दशमलव स्थानों तक गणना की गई!



आर्किमिडीज़ (287 ईसा पूर्व – 212 ईसा पूर्व)

चित्र 1.10

अब, आइए देखें कि अपरिमेय संख्याएँ कैसे प्राप्त करें।

उदाहरण 10: $\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए .

समाधान: हमने देखा कि $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$. तो, आप आसानी से गणना कर सकते हैं $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$.

$\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच एक अपरिमेय संख्या ज्ञात करना , हम एक संख्या पाते हैं जो

उनके बीच स्थित अनवसानी अनावर्ती। बेशक, आप अनंत रूप से पा सकते हैं
ऐसी कई संख्याएँ.

ऐसी संख्या का एक उदाहरण है 0.150150015000150000...

अभ्यास 1.3

1. निम्नलिखित को दशमलव रूप में लिखें और बताएं कि प्रत्येक किस प्रकार का दशमलव प्रसार है
है :

(मैं) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

(iv) $\frac{3}{13}$ (में) $\frac{2}{11}$ (हम) $\frac{329}{400}$

2. आप जानते हैं कि $\frac{1}{7}$ = $0.\overline{142857}$. क्या आप भविष्यवाणी कर सकते हैं कि 7 का दशमलव प्रसार क्या होगा? $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ बिना लंबा भाग किए, क्या हैं? अगर हाँ, तो कैसे?

[संकेत: का मान ज्ञात करते समय शेषफल का ध्यानपूर्वक अध्ययन करें।] $\frac{1}{7}$

3. निम्नलिखित को p के रूप में व्यक्त करें — क्यू, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और q ≠ 0.

(i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. 0.99999 व्यक्त करें.... फॉर्म पी में — क्यू क्या आप अपने जवाब से हैरान हैं? अपने जवाब से
शिक्षक और सहपाठी इस बात पर चर्चा करते हैं कि उत्तर क्यों उचित है।

5. अंकों के दोहराए जाने वाले ब्लॉक में अंकों की अधिकतम संख्या कितनी हो सकती है?
$\frac{1}{17}$ का दशमलव प्रसार क्या होगा? अपने उत्तर की जांच के लिए भाग दीजिए।

6. p के रूप में परिमेय संख्याओं के कई उदाहरण देखें — क्यू (q ≠ 0), जहाँ p और q हैं
पूर्णांक जिनमें 1 के अलावा कोई सामान्य कारक नहीं है और जिनका अंत दशमलव है
निरूपण (विस्तार)। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि q को कौन सा गुण संतुष्ट करना चाहिए?

7. तीन संख्याएँ लिखिए जिनके दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती हैं।

8. परिमेय संख्याओं के बीच तीन भिन्न अपरिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए $\frac{5}{7}$ और $\frac{9}{11}$.

9. निम्नलिखित संख्याओं को परिमेय या अपरिमेय के रूप में वर्गीकृत करें:

(मैं) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

(iv) 7.478478... (में) 1.101001000100001...

1.4 वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएँ

आपने पिछली कक्षाओं में सीखा है कि परिमेय संख्याएँ क्रमविनिमेय नियम को संतुष्ट करती हैं। जोड़ और गुणा के लिए साहचर्य और वितरण नियम। इसके अलावा, अगर हम जोड़ते हैं, दो परिमेय संख्याओं को घटाएँ, गुणा करें या भाग दें (शून्य को छोड़कर), फिर भी हमें एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है संख्या (अर्थात, परिमेय संख्याएँ जोड़, घटाव के संबंध में 'बंद' हैं, गुणन और भाग)। यह पता चला है कि अपरिमेय संख्याएँ भी इस नियम को संतुष्ट करती हैं। जोड़ और गुणा के लिए क्रमविनिमेय, साहचर्य और वितरण नियम। हालाँकि, अपरिमेय संख्याओं का योग, अंतर, भागफल और गुणनफल हमेशा समान नहीं होते हैं

अपरिमेय। उदाहरण के लिए, $(\sqrt{6}) + (-\sqrt{6}), (\sqrt{2}) - (\sqrt{2}), (\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3})$ और $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ हैं तर्कसंगत.

आइए देखें कि क्या होता है जब हम किसी परिमेय संख्या को जोड़ते हैं और उससे गुणा करते हैं एक अपरिमेय संख्या। उदाहरण के लिए, $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। $2+\sqrt{3}$ और $2\sqrt{3}$ के बारे में क्या ? चूँकि $\sqrt{3}$ में एक अनवसानी अनावर्ती दशमलव विस्तार है, यही बात इसके लिए भी सत्य है $2+\sqrt{3}$ और $2\sqrt{3}$. इसलिए, $2+\sqrt{3}$ और $2\sqrt{3}$ दोनों भी अपरिमेय संख्याएँ हैं।

उदाहरण 11 : जाँच करें कि क्या $7\sqrt{5}$, $\frac{7}{\sqrt{5}}$, $\sqrt{2}+21$, $\pi-2$ अपरिमेय संख्याएँ हैं या नहीं।

समाधान: $\sqrt{5} = 2.236...$, $\sqrt{2} = 1.4142...$, $\pi = 3.1415...$

तो $7\sqrt{5} = 15.652...$, $\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304...$

$\sqrt{2} + 21 = 22.4142...$, $\pi - 2 = 1.1415...$

ये सभी अनवसानी अनावर्ती दशमलव संख्याएँ हैं। अतः ये सभी अपरिमेय संख्याएँ हैं।

अब, आइए देखें कि आम तौर पर क्या होता है जब हम जोड़ते हैं, घटाते हैं, गुणा करते हैं, भाग देते हैं, घटाते हैं इन अपरिमेय संख्याओं के वर्गमूल और सम nवें मूल, जहाँ n कोई भी प्राकृतिक संख्या है आइए कुछ उदाहरण देखें।

उदाहरण 12 : $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ और $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ को जोड़ें.

हल : $(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}) + (\sqrt{2}-3\sqrt{3}) = (2\sqrt{2}+\sqrt{2}) + (5\sqrt{3}-3\sqrt{3})$

$= (2+1)\sqrt{2} + (5-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

उदाहरण 13 : 6 5 को 2 5 से गुणा करें। √ √

हल : 6 5 × 2 5 = 6 √2 × 5 × 5 = √12 × 5 = 60 √ √

उदाहरण 14: 8 15 को 2 3 से भाग दें। √ √

समाधान : $8 \sqrt{15} \div 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

इन उदाहरणों से आप निम्नलिखित तथ्यों की अपेक्षा कर सकते हैं, जो सत्य हैं:

(i) एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का योग या अंतर अपरिमेय होता है।

(ii) एक शून्येतर परिमेय संख्या का एक अपरिमेय संख्या के साथ गुणनफल या भागफल है तर्कहीन.

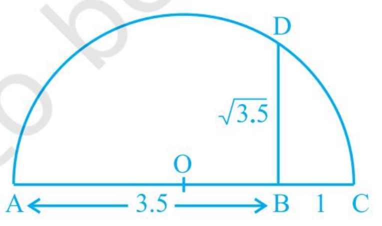
(iii) यदि हम दो अपरिमेय संख्याओं को जोड़ते हैं, घटाते हैं, गुणा करते हैं या भाग देते हैं, तो परिणाम परिमेय या परिमेय हो सकता है तर्कहीन.

अब हम अपना ध्यान वास्तविक संख्याओं के वर्गमूल निकालने की प्रक्रिया की ओर मोड़ते हैं। याद रखें कि, यदि a एक प्राकृतिक संख्या है, तो ab = का अर्थ है b √ ^{2} = a और b > 0. वही परिभाषा को सकारात्मक वास्तविक संख्याओं के लिए विस्तारित किया जा सकता है।

मान लीजिए a > 0 एक वास्तविक संख्या है। तब √ए = b का अर्थ है b 2 = a और b > 0.

अनुभाग 1.2 में, हमने देखा कि संख्या पर किसी भी धनात्मक पूर्णांक n √के लिए n को कैसे दर्शाया जाता है रेखा। अब हम दिखाते हैं कि किसी भी दी गई धनात्मक √वास्तविक संख्या x को ज्यामितीय रूप से कैसे ज्ञात किया जाए।

उदाहरण के लिए, आइए हम इसे x = 3.5 के लिए ज्ञात करें, अर्थात, हम 3 5. को ज्यामितीय रूप से √ज्ञात करते हैं।

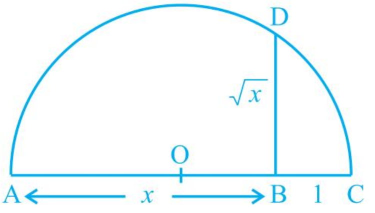


चित्र 1.11

एक निश्चित बिंदु A से 3.5 इकाई की दूरी दी गई रेखा पर अंकित कीजिए, जिससे एक बिंदु B प्राप्त हो सके। AB = 3.5 इकाई (देखिए आकृति 1.11)। B से 1 इकाई की दूरी अंकित कीजिए और नया बिंदु C बनाएं। AC का मध्य-बिंदु ज्ञात करें और उस बिंदु को O से चिह्नित करें। एक अर्धवृत्त बनाएं केंद्र O और त्रिज्या OC रखें। AC पर लंबवत एक रेखा B से होकर गुजरती हुई खींचें और अर्धवृत्त को D पर प्रतिच्छेदित करते हुए, BD = 3.5 √ .

Machine Translated by Google

अधिक सामान्यतः, किसी भी धनात्मक वास्तविक $\sqrt{\ }$ के लिए x ज्ञात करने के लिए संख्या x पर, हम B को इस प्रकार चिह्नित करते हैं कि AB = x इकाइयाँ, और, जैसा कि आकृति 1.12 में, C को इस प्रकार चिन्हित करें कि BC = 1 इकाई हो। फिर, जैसा कि हम x = 3.5 की स्थिति में , हम पाते हैं कि BD = x $\sqrt{\ }$ (चित्र 1.12 देखें)। हम इस परिणाम को निम्न का उपयोग करके सिद्ध कर सकते हैं: पाइथागोरस प्रमेय।



चित्र 1.12

ध्यान दें कि, आकृति 1.12 में, OBD एक समकोण त्रिभुज है। साथ ही, वृत्त की त्रिज्या है $\frac{\text{एक्स} + 1}{2}$ इकाइयाँ.

इसलिए, OC = OD = OA = $\frac{\text{एक्स} + 1}{2}$ इकाइयाँ.

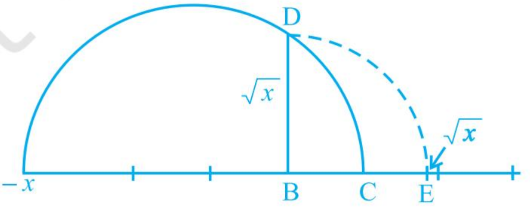
अब, OB = $\text{एक्स} - \left(\frac{\text{एक्स} + 1}{2}\right) = \frac{\text{एक्स} - 1}{2}$

तो, पाइथागोरस प्रमेय से, हमारे पास है

$$BD2 = OD2 - OB2 = \left(\frac{x + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{एक्स} - 1}{2}\right)^2 = \frac{4\text{एक्स}}{4} = \text{एक्स}.$$

इससे पता चलता है कि BD = $\sqrt{\text{एक्स}}$।

यह निर्माण हमें यह दिखाने का एक दृश्य और ज्यामितीय तरीका देता है कि $\sqrt{\text{एक्स}}$ के लिए मौजूद है सभी वास्तविक संख्याएँ x > 0. यदि आप संख्या रेखा पर x $\sqrt{\ }$ की स्थिति जानना चाहते हैं , तो आइए हम रेखा BC को संख्या रेखा मानें, जिसमें B को शून्य, C को 1, इत्यादि। केंद्र B और त्रिज्या BD लेकर एक चाप खींचिए जो संख्या रेखा को E पर प्रतिच्छेद करता है (चित्र 1.13 देखें)। तब, E, x $\sqrt{\ }$ को दर्शाता है .



चित्र 1.13

अब हम वर्गमूल के विचार को घनमूल, चतुर्थमूल, और सामान्यतः nवें मूल, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है। अपनी समझ को याद करें पिछली कक्षाओं से वर्गमूल और घनमूल।

3 क्या है? $\sqrt{8}$? खैर, हम जानते हैं कि यह कोई धनात्मक संख्या होनी चाहिए जिसका घन 8 हो, और आपने अनुमान लगाया होगा 3 $\sqrt{8}$ = 2. आइए प्रयास करें $\sqrt[5]{243}$. क्या आप ऐसी कोई संख्या b जानते हैं? वह बी ^{5} = 243? उत्तर 3 है। अतः, 5 $\sqrt{243}$ = 3.

इन उदाहरणों से, क्या आप n को परिभाषित कर सकते हैं? $\sqrt{ए}$ एक वास्तविक संख्या a > 0 और एक धनात्मक के लिए पूर्णांक n?

मान लीजिए a > 0 एक वास्तविक संख्या है और n एक धनात्मक पूर्णांक है। तब n $\sqrt{ए}$ = b, यदि bn = a और b > 0. ध्यान दें कि प्रतीक ' $\sqrt{\ }$ ' में प्रयुक्त $\sqrt{2}$, 8, $\sqrt[3]{एम}$ $\sqrt{ए}$, आदि को मूलांक चिह्न कहा जाता है।

अब हम वर्गमूलों से संबंधित कुछ सर्वसमिकाओं को सूचीबद्ध करते हैं, जो विभिन्न प्रकार से उपयोगी हैं इनमें से कुछ तरीकों से आप अपनी पिछली कक्षाओं से पहले से ही परिचित हैं। शेष संख्याएँ वास्तविक संख्याओं के योग पर गुणन के वितरण नियम से अनुसरण करती हैं संख्याएँ, और पहचान (x + y) (x – y) = x से ^{2} - और ^{2}, किसी भी वास्तविक संख्या x और y के लिए।

मान लीजिए a और b धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं। तब

(i) अब $\sqrt{अब}$ = $\sqrt{\ }\sqrt{\ }$ (ii) $\sqrt{\frac{ए}{बी}} = \frac{\sqrt{ए}}{\sqrt{बी}}$

(iii) (ए ($\sqrt{\ }$) + $\sqrt{बी}$) (ए $\sqrt{\ }$ – $\sqrt{बाब}$) = – (iv) (अबा + $\sqrt{\ }$) (– $\sqrt{बाब}$) = – ^{2}

(ए $\sqrt{\ }$ + $\sqrt{बीसीडी}$ +)($\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$) = $\sqrt{एसी विज्ञापन बीसी बीडी + +}$ $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$

(हम) ($\sqrt{ए}$ + $\sqrt{बी}$)^2 + 2 $\sqrt{अब बी = + ए}$

आइये इन पहचानों के कुछ विशेष मामलों पर नजर डालें।

उदाहरण 15: निम्नलिखित व्यंजकों को सरल कीजिए:

(i) (5 + $\sqrt{7}$ 2 +) ($\sqrt{5}$) (ii) (5 + $\sqrt{5}$ 5 5 –) ( ) ($\sqrt{\ }$)

(iii) ($\sqrt{3}$ 7 + $\sqrt{\ }$)^2 (iv) (11 $\sqrt{\ }$ – $\sqrt{7}$ $\sqrt{11}$ + $\sqrt{7}$)

हल : (i) $(5+\sqrt{7})(2+\sqrt{5}) = 10 + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + \sqrt{35}$

(ii) $(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5}) = 5^2 - (\sqrt{5})^2 = 25 - 5 = 20$

(iii) $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = 3 + 2\sqrt{21} + 7 = 10 + 2\sqrt{21}$

(iv) $(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7}) = (\sqrt{11})^2 - (\sqrt{7})^2 = 11 - 7 = 4$

टिप्पणी: ध्यान दें कि उपरोक्त उदाहरण में 'सरलीकरण' का प्रयोग इस अर्थ में किया गया है कि अभिव्यक्ति को एक परिमेय और एक अपरिमेय संख्या के योग के रूप में लिखा जाना चाहिए।

हम इस भाग का समापन निम्नलिखित समस्या पर विचार करके करते हैं। देखिए यह संख्या रेखा पर कहाँ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ □ क्या आप बता सकते हैं? दिखाई देती है? आप जानते हैं कि यह अपरिमेय है। शायद यह आसान हो।
यदि हर एक परिमेय संख्या है, तो उसे कैसे संभालना है? आइए देखें कि क्या हम हर को 'तर्कसंगत' बना सकते हैं। हर को एक परिमेय संख्या में बदलना। ऐसा करने के लिए, हम वर्गमूलों से संबंधित सर्वसमिकाओं की आवश्यकता है। आइए देखें कैसे।

उदाहरण 16: के हर को परिमेय बनाएँ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ।

समाधान: हम लिखना चाहते हैं $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक समतुल्य अभिव्यक्ति के रूप में जिसमें हर एक परिमेय संख्या है। हम जानते हैं कि $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ परिमेय संख्या है। हम यह भी जानते हैं कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ को गुणा करने पर $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ से 2 हमें एक समतुल्य अभिव्यक्ति देगा, क्योंकि $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$. तो, हमने इन दोनों को रखा तथ्यों को एक साथ लाने के लिए

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

इस फॉर्म में, इसे ढूंढना आसान है $\frac{1}{\sqrt{2}}$ संख्या रेखा पर। यह 0 के बीच में है और $\sqrt{2}$.

उदाहरण 17 : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ के हर को परिमेय बनाएँ।

हल: हम पहले दी गई सर्वसमिका (iv) का उपयोग करते हैं। $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ को $2-\sqrt{3}$ द्वारा गुणा और भाग करें, प्राप्त करना

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}.$$

उदाहरण 18: $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ के हर को परिमेय बनाएँ।

हल : यहाँ हम पहले दी गई सर्वसमिका (iii) का प्रयोग करेंगे।

इसलिए, $$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

उदाहरण 19 : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ के हर को परिमेय बनाएँ।

समाधान : $$\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right) = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$$

इसलिए, जब किसी व्यंजक के हर में वर्गमूल वाला पद होता है (या एक मूलांक चिह्न के अंतर्गत एक संख्या), इसे समतुल्य व्यंजक में परिवर्तित करने की प्रक्रिया जिसका हर एक परिमेय संख्या है उसे हर को परिमेय बनाना कहते हैं।

अभ्यास 1.4

1. निम्नलिखित संख्याओं को परिमेय या अपरिमेय के रूप में वर्गीकृत करें:

(i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $(3+\sqrt{23})-\sqrt{23}$ (iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. निम्नलिखित प्रत्येक व्यंजक को सरल कीजिए:

(i) $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$ (ii) $(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$

(iii) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$ (iv) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

3. याद रखें, π को वृत्त की परिधि (मान लीजिए c) और उसके व्यास के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है (मान लीजिए d)। अर्थात्, $\pi = \frac{c}{d}$ यह इस तथ्य का खंडन करता प्रतीत होता है कि π अपरिमेय है। d कैसे होगा? क्या आप इस विरोधाभास को हल कर सकते हैं?

4. संख्या रेखा पर $\sqrt{9.3}$ को दर्शाइए।

5. निम्नलिखित के हरों को तर्कसंगत बनाएं:

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.5 वास्तविक संख्याओं के लिए घातांक के नियम

क्या आपको याद है कि निम्नलिखित को सरल कैसे किया जाता है? (i) $17^2 \cdot 17^5 =$

(ii) $(5^2)^7 =$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 \cdot 9^3 =$

क्या आपको ये उत्तर मिले? ये इस प्रकार हैं:

(i) $17^2 \cdot 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3 \cdot 9^3 = 63^3$

इन उत्तरों को प्राप्त करने के लिए, आपको घातांक के निम्नलिखित नियमों का उपयोग करना होगा, जिन्हें आपने अपनी पिछली कक्षाओं में सीखा है। (यहाँ a, n और m प्राकृतिक संख्याएँ हैं।
याद रखें, a को आधार कहा जाता है और m और n घातांक हैं।)

(i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

क्या है एक) ^{0} हाँ, यह 1 है! तो आपने सीखा कि (a) ^{0} = 1. अतः, (iii) का उपयोग करके, हम कर सकते हैं

पाना $\frac{1}{ए^{एन}}$ = $ए^{-एन}$ अब हम इन नियमों को ऋणात्मक घातांकों तक भी विस्तारित कर सकते हैं।

तो, उदाहरण के लिए:

(मैं) $17^2 17^{-5} = = 17^{-3} \frac{1}{17^3}$ (ii) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3} \cdot (9)^{-3} = (63)^{-3}$

मान लीजिए हम निम्नलिखित गणनाएँ करना चाहते हैं:

(मैं) $3^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} 17^{\frac{1}{5}}$

हम यह कैसे करेंगे? पता चला है कि हम घातांक के नियमों का विस्तार कर सकते हैं जिसका अध्ययन हम पहले कर चुके हैं, तब भी जब आधार एक धनात्मक वास्तविक संख्या हो और घातांक परिमेय संख्याएँ हैं। (बाद में आप पढ़ेंगे कि इसे और आगे बढ़ाया जा सकता है जब घातांक वास्तविक संख्याएँ हों।) लेकिन इससे पहले कि हम इन नियमों को बताएँ, और यहाँ तक कि इन नियमों को समझने के लिए, हमें पहले यह समझना होगा कि, उदाहरण के लिए, $4^{\frac{3}{2}}$ क्या है। तो, हमें कुछ काम करना है!

हम n को परिभाषित करते हैं $\sqrt[n]{ए}$ वास्तविक संख्या a > 0 के लिए निम्न प्रकार:

मान लीजिए a > 0 एक वास्तविक संख्या है और n एक धनात्मक पूर्णांक है। तब $\sqrt[n]{ए}$ = b, यदि b^n = ए और बी > 0.

घातांक की भाषा में, हम n को परिभाषित करते हैं $\sqrt[n]{ए} = ए^{\frac{1}{एन}}$. इसलिए, विशेष रूप से, $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$.

अब $4^{\frac{3}{2}}$ को देखने के दो तरीके हैं ।

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

इसलिए, हमारे पास निम्नलिखित परिभाषा है:

मान लीजिए a > 0 एक वास्तविक संख्या है। मान लीजिए m और n ऐसे पूर्णांक हैं कि m और n का कोई मान नहीं है 1 के अलावा अन्य सामान्य कारक, और n > 0. तब,

$$ए^{\frac{एम}{एन}} = (\sqrt[एन]{ए})^{एम} = \sqrt[एन]{ए^{एम}}$$

अब हमारे पास घातांक के निम्नलिखित विस्तारित नियम हैं:

मान लीजिए a > 0 एक वास्तविक संख्या है और p और q परिमेय संख्याएँ हैं। तब, हमें प्राप्त होता है

(i) एक पी $\cdot$ a q = a p+q (ii) (a p) q = a pq

(iii) $\frac{ए^{पी}}{ए^{क्यू}} = ए^{पी-क्यू}$ (iv) ए पी बी पी = (एबी) पी

अब आप इन नियमों का उपयोग पहले पूछे गए प्रश्नों के उत्तर देने के लिए कर सकते हैं।

उदाहरण 20 : (i) को सरल कीजिए $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$ (iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

समाधान :

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \times 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$

अभ्यास 1.5

1. ज्ञात करें: (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$

2. ज्ञात करें: (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$

3. सरलीकरण करें: (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

1.6 सारांश

इस अध्याय में आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. एक संख्या r को परिमेय संख्या कहा जाता है, यदि इसे इस रूप में लिखा जा सके $\frac{पी}{क्यू}$, जहाँ p और q हैं पूर्णांक और q ≠ 0.

2. एक संख्या s को अपरिमेय संख्या कहा जाता है, यदि इसे रूप में नहीं लिखा जा सकता है $\frac{पी}{क्यू}$, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और q ≠ 0.

3. किसी परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो अंतकारी या असांतकारी आवर्ती होता है। इसके अलावा, एक संख्या जिसका दशमलव विस्तार अंत या असांत आवर्ती है तर्कसंगत है.

4. एक अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती होता है। इसके अलावा, वह संख्या जिसका दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती है, अपरिमेय है।

5. सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याएँ मिलकर वास्तविक संख्याओं का संग्रह बनाती हैं।

6. यदि r परिमेय है और s अपरिमेय है, तो r + s और r – s अपरिमेय संख्याएँ हैं, और rs और $\frac{आर}{एस}$ हैं अपरिमेय संख्याएँ, r ≠ 0.

7. धनात्मक वास्तविक संख्याओं a और b के लिए, निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ मान्य हैं:

(i) अब $\sqrt{अब} = \sqrt{\ }\sqrt{\ }$ (ii) $\sqrt{\frac{ए}{बी}} = \frac{\sqrt{ए}}{\sqrt{बी}}$

(अबाबमब) (√) (iii) (iv) (अबाबब) (– √) = – 2

(में) ($\sqrt{अब} + \sqrt{\ }$ $)^2$ = +ए 2 $\sqrt{अब बी}$ +

8. के हर को तर्कसंगत बनाना $\frac{1}{\sqrt{अब} +}$, हम इसे से गुणा करते हैं $\frac{\sqrt{अब}}{\sqrt{अब}}$, जहाँ a और b हैं पूर्णांकों.

9. मान लीजिए a > 0 एक वास्तविक संख्या है और p और q परिमेय संख्याएँ हैं। तब

(i) एक पी · ए क्यू = ए पी + क्यू (ii) (a p) q = a pq

(iii) $\frac{ए^{पी}}{ए^{क्यू}} = ए^{पी-क्यू}$ (iv) ए पी बी पी = (एबी) पी