

4

अभिव्यक्ति अक्षर का प्रयोग- संख्याएँ



4.1 अक्षर-संख्याओं की धारणा

इस अध्याय में हम गणितीय संबंधों और प्रतिमानों को व्यक्त करने का एक संक्षिप्त तरीका देखेंगे। हम देखेंगे कि यह हमें इन संबंधों और प्रतिमानों के बारे में सोचने में कैसे मदद करता है, और यह समझाने में कि ये क्यों सत्य हो सकते हैं।

- ❓ उदाहरण 1: शबनम, आफ़ताब से 3 वर्ष बड़ी है। जब आफ़ताब की आयु 10 वर्ष होगी, तो शबनम की आयु 13 वर्ष होगी। अब आफ़ताब की आयु 18 वर्ष है, तो शबनम की आयु क्या होगी?

- ❓ आफ़ताब की उम्र को देखते हुए, आप शबनम की उम्र कैसे पता लगाएंगे?

आसान: शबनम की उम्र जानने के लिए हम आफ़ताब की उम्र में 3 जोड़ते हैं।

- ❓ क्या हम इसे अभिव्यक्ति के रूप में लिख सकते हैं?

शबनम की उम्र आफ़ताब से 3 साल ज़्यादा है। संक्षेप में इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है:

शबनम की उम्र = आफ़ताब की उम्र + 3.

ऐसे गणितीय संबंधों को आमतौर पर संक्षिप्त रूप में दर्शाया जाता है। ऊपर

दिए गए संबंध में, 'आफ़ताब की उम्र' वाक्यांश लिखने के बजाय, किसी सुविधाजनक प्रतीक का प्रयोग किया जाता है। आमतौर पर, इसके लिए अक्षरों या छोटे वाक्यांशों का प्रयोग किया जाता है।

मान लीजिए कि हम आफ़ताब की उम्र बताने के लिए a अक्षर का इस्तेमाल करते हैं (हम कोई और अक्षर भी इस्तेमाल कर सकते थे), और शबनम की उम्र बताने के लिए s का इस्तेमाल करते हैं। तो शबनम की उम्र जानने का व्यंजक $a + 3$ होगा, जिसे इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$s = a + 3.$$

यदि a 23 है (आफ़ताब की आयु वर्षों में) तो शबनम की आयु क्या है?

शबनम की उम्र 4+ के लिए 3 अभिव्यक्ति

$$10 + 3$$

$$23 + 3$$

$$? + 3$$

$$एक + 3$$

आफ़ताब की उम्र 4 10 23

?

ए

चित्र 4.1

व्यंजक $a + 3$ में a के स्थान पर 23 रखने पर, हमें प्राप्त होता है, $s = 23 + 3 = 26$ वर्ष।

संख्याओं को दर्शाने के लिए प्रयुक्त होने वाले अक्षर जैसे a और s , अक्षर-संख्याएँ कहलाते हैं। अक्षर-संख्याओं वाले गणितीय व्यंजक, जैसे व्यंजक $a + 3$, बीजीय व्यंजक कहलाते हैं।

? शबनम की आयु दी गई है, आफताब की आयु ज्ञात करने के लिए एक व्यंजक लिखिए।

हम जानते हैं कि आफताब, शबनम से 3 साल छोटा है। इसलिए, आफताब की उम्र शबनम से 3 साल कम होगी। इसे इस तरह से वर्णित किया जा सकता है:

$$\text{आफताब की उम्र} = \text{शबनम की उम्र} - 3.$$

यदि हम पुनः आफताब की आयु दर्शाने के लिए अक्षर a का उपयोग करें और शबनम की आयु को दर्शाने के लिए, तो बीजीय व्यंजक होगा: $a = s - 3$, जिसका अर्थ है s से 3 कम।

? यदि शबनम की आयु 20 वर्ष है तो आफताब की आयु ज्ञात करने के लिए इस व्यंजक का प्रयोग कीजिए।

? उदाहरण 2: पार्थिव माचिस की तीलियों से पैटर्न बना रहा है। वह बार-बार L को एक-दूसरे के बगल में रखता है। प्रत्येक L में दो माचिस की तीलियाँ हैं, जैसा कि चित्र 4.2 में दिखाया गया है।



चित्र 4.2

5 L बनाने के लिए कितनी माचिस की तीलियाँ चाहिए? यह 5×2 होगा।

7 L बनाने के लिए कितनी माचिस की तीलियाँ चाहिए? यह 7×2 होगा।

45 L बनाने के लिए कितनी माचिस की तीलियों की ज़रूरत होगी? यह 45×2 होगा।

अब, L की संख्या और छड़ियों की संख्या के बीच क्या संबंध है?

सबसे पहले, आइए यहाँ संबंध या पैटर्न को समझें। प्रत्येक L के लिए 2 माचिस की तीलियों की आवश्यकता होती है। इसलिए आवश्यक माचिस की तीलियों की संख्या L की संख्या की 2 गुनी होगी। इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\text{माचिस की तीलियों की संख्या} = 2 \times L \text{ की संख्या}$$

अब, हम L की संख्या दर्शाने के लिए किसी भी अक्षर का इस्तेमाल कर सकते हैं। आइए n का इस्तेमाल करें।

माचिस की तीलियों की संख्या के लिए बीजगणितीय व्यंजक होगा:

$$2 \times \text{एन.}$$

यह व्यंजक हमें बताता है कि n L बनाने के लिए कितनी माचिस की तीलियों की आवश्यकता होगी। माचिस की तीलियों की संख्या ज्ञात करने के लिए, हम n को L की संख्या से बदल देते हैं।

? उदाहरण 3: केतकी नारियल-गुड़ के लड्डू बनाकर बेचती है। एक नारियल की कीमत ₹35 है और 1 किलो गुड़ की कीमत ₹60 है।

? यदि वह 10 नारियल और 5 किलो गुड़ खरीदती है तो उसे कितना भुगतान करना होगा?

$$10 \text{ नारियल का मूल्य} = 10 \times ₹35$$

$$5 \text{ किलो गुड़ का मूल्य} = 5 \times ₹60$$

$$\text{कुल लागत} = 10 \times ₹35 + 5 \times ₹60 = ₹350 + ₹300 = ₹650.$$

? यदि वह 8 नारियल और 9 किलो गुड़ खरीदती है तो उसे कितना भुगतान करना होगा?

? नारियल की दी गई संख्या और गुड़ की मात्रा के लिए भुगतान की जाने वाली कुल राशि ज्ञात करने के लिए एक बीजीय व्यंजक लिखिए।

आइए हम संबंधों की पहचान करें और फिर अभिव्यक्तियाँ लिखें।

आवश्यक मात्रा	संबंध	अभिव्यक्ति
नारियल की कीमत	नारियल की संख्या $\times 35$	सी $\times 35$
गुड़ की कीमत	गुड़ की किलोग्राम संख्या \times 60	जे $\times 60$

यहाँ, 'c' नारियल की संख्या को दर्शाता है और 'j' नारियल की संख्या को दर्शाता है।
गुड़ की कुल मात्रा (किलोग्राम में) भुगतान की जाने वाली कुल राशि होगी:

$$\text{नारियल की कीमत} + \text{गुड़ की कीमत}.$$

संगत बीजीय व्यंजक इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\text{सी} \times 35 + \text{जे} \times 60$$

? 7 नारियल और 4 किलोग्राम गुड़ के लिए भुगतान की जाने वाली कुल राशि ज्ञात करने के लिए इस व्यंजक (या सूत्र) का उपयोग करें।

ध्यान दें कि 'c' और 'j' के विभिन्न मानों के लिए, व्यंजक का मान भी परिवर्तित होता है।

इस व्यंजक को पदों के योग के रूप में लिखने पर हमें प्राप्त होता है:

$$\boxed{\text{सी} \times 35 + \text{जे} \times 60}$$

? उदाहरण 4: हम सरल आकृतियों के परिमाणों की गणना करने से परिचित हैं। परिमाणों के लिए व्यंजक लिखिए।

एक वर्ग का परिमाण उसकी भुजा की लंबाई का 4 गुना होता है। इसे $4 \times q$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ q भुजा की लंबाई दर्शाता है।

? 7 सेमी भुजा वाले एक वर्ग का परिमाण क्या है? व्यंजक का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।

आपने अवश्य ही यह महसूस किया होगा कि अक्षर-संख्याओं और बीजीय अभिव्यक्तियों का उपयोग हमें सामान्य गणितीय संबंधों को व्यक्त करने की अनुमति देता है।

संक्षिप्त तरीके से। इस तरह व्यक्त किए गए गणितीय संबंधों को अक्सर सूत्र कहा जाता है।



समझ से बाहर

1. परिमाण के लिए सूत्र लिखें:

(a) त्रिभुज जिसकी सभी भुजाएँ बराबर हों।

(ख) एक नियमित पंचभुज (जैसा कि हमने पिछले वर्ष सीखा था, हम 'नियमित' शब्द का प्रयोग यह कहने के लिए करते हैं कि सभी भुजाओं की लम्बाई और कोण की माप समान होती है)

(c) एक नियमित षट्भुज

2. मुनिरत्न के पास 20 मीटर लंबा एक पाइप है। हालाँकि, वह अपने बगीचे के लिए एक लंबा पानी देने वाला पाइप चाहता है। वह इस पाइप से कुछ लंबाई का एक और पाइप जोड़ता है। पाइप की संयुक्त लंबाई का व्यंजक दीजिए। दूसरे पाइप की लंबाई मीटर में दर्शाने के लिए अक्षर-संख्या 'k' का प्रयोग कीजिए।

3. कृतिका के पास कुल कितनी राशि है, यदि उसके पास निम्नलिखित है?

₹100, ₹20 और ₹5 के नोटों की संख्या कितनी है? निम्नलिखित तालिका को पूरा करें:

₹100 के नोटों की संख्या	₹20 के नोटों की संख्या	₹5 के नोटों की संख्या	अभिव्यक्ति और कुल राशि
3	5	6	
			$6 \times 100 + 4 \times 20 + 3 \times 5 = 695$
8	4	साथ	
एक	और	साथ	

4. वेंकट लक्ष्मी के पास एक आटा चक्की है। रोलर मिल को चलाने में 10 सेकंड लगते हैं। एक बार चलाने के बाद, प्रत्येक किलो अनाज को पाउंडर बनाने में 8 सेकंड लगते हैं। नीचे दिए गए व्यंजकों में से कौन सा 'y' किलो अनाज को पीसने में लगने वाले समय को दर्शाता है, यह मानते हुए कि मशीन शुरू में बंद है?

(ए) $10 + 8 + \text{वाई (सी)}$

(बी) $(10 + 8) \times y$

$10 \times 8 \times \text{वाई (ई)}$ $10 \times$

(घ) $10 + 8 \times y$

वाई + 8

5. अपनी पसंद के अक्षरों का उपयोग करके बीजीय व्यंजक लिखें।

(a) किसी संख्या से 5 अधिक

(b) किसी संख्या से 4 कम

- (c) किसी संख्या के 13 गुने से 2 कम
- (d) किसी संख्या के 2 गुने से 13 कम
6. निम्नलिखित बीजीय समीकरणों के अनुरूप स्थितियों का वर्णन कीजिए अभिव्यक्तियाँ:
- (ए) $8 \times x + 3 \times y$
- (बी) $15 \times जे - 2 \times के$
7. किसी कैलेंडर माह में, यदि चित्र में दर्शाए अनुसार तिथियों से भरा कोई 2×3 ग्रिड चुना गया है, तो रिक्त कक्षों में तिथियों के लिए व्यंजक लिखें, यदि नीचे के मध्य कक्ष में तिथि 'w' है।

November 2024

Mon	Tue	Wed	Thu	Fri	Sat	Sun
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

इंच - 1 इंच		

4.2 अंकगणितीय व्यंजकों का पुनरीक्षण

हमने व्यंजकों को पदों के योग के रूप में लिखना सीखा और अंकगणितीय व्यंजकों को पढ़ना हमारे लिए आसान हो गया। कई बार उन्हें कई तरीकों से पढ़ा जा सकता था और यह भ्रामक होता था। हमने अदला-बदली का इस्तेमाल किया।

व्यंजकों के मूल्यांकन के आसान तरीके खोजने के लिए (किसी भी क्रम में दो संख्याओं को जोड़ना) और समूहीकरण (संख्याओं को सुविधाजनक ढंग से समूहीकृत करके जोड़ना) का उपयोग किया। पदों की अदला-बदली और समूहीकरण से व्यंजक का मान नहीं बदलता। हमने व्यंजकों में कोष्ठकों का प्रयोग करना भी सीखा, जिसमें बाहर ऋणात्मक चिह्न वाले कोष्ठक भी शामिल हैं। हमने वितरण गुण (योग का गुणज, गुणजों के योग के समान होता है) सीखा।

आइये इन अवधारणाओं को संशोधित करें और निम्नलिखित अभिव्यक्तियों के मान ज्ञात करें:

1. $23 - 10 \times 2$

2. $83 + 28 - 13 + 32$

3. $34 - 14 + 20$

4. $42 + 15 - (8 - 7)$

5. $68 - (18 + 13)$

6. $7 \times 4 + 9 \times 6$

$\times (16 - 6)$

आइए पहले व्यंजक, $23 - 10 \times 2$, का मान ज्ञात करें। सबसे पहले हम व्यंजक के पद लिखेंगे। ध्यान दें कि इनमें से एक पद एक संख्या है, जबकि दोनों पदों को जोड़ने से पहले दूसरे पद को एक संख्या में बदलना होगा।

$$23 - 10 \times 2 = 23 + -10 \times 2 = 23 + -20 = 3$$

आइए अब दूसरे का मूल्यांकन करें। इस व्यंजक के सभी पद संख्याएँ हैं। यदि हम पदों पर ध्यान दें, तो हम पाते हैं कि पदों को आपस में बदलकर समूहीकृत करने से मूल्यांकन करना आसान होगा।

$$83 + 28 - 13 + 32 =$$

$$= 111 + 19 = 130$$

आइए अब पाँचवें व्यंजक पर नज़र डालें। इसमें कोष्ठक हैं जिनके बाहर ऋणात्मक चिह्न है। इसका मूल्यांकन दो तरीकों से किया जा सकता है - पहले कोष्ठक को हल करके (जैसे बाईं ओर वाला हल) या कोष्ठकों को उचित रूप से हटाकर (जैसे दाईं ओर वाला हल)।

$$= 68 + -(18 + 13)$$

$$= 68 + -31$$

$$= 37$$

या

$$= 68 + -18 + -13$$

$$= 50 + -13 = 37$$

अब, अन्य अंकगणितीय व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए।

बीजीय व्यंजक भी संख्यात्मक मान लेते हैं जब उनमें निहित अक्षर-संख्याओं को संख्याओं से बदल दिया जाता है। उदाहरण 1 में, शबनम की आयु ज्ञात करने के लिए, जब आफ़ताब 23 वर्ष का है, हमने व्यंजक $a + 3$ में अक्षर-संख्या a को 23 से बदल दिया, और इसका मान 26 हो गया।

4.3 बीजीय व्यंजकों में गुणन चिह्न का लोप

इस संख्या अनुक्रम को देखें:

$$4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \dots$$

हम इस क्रम या पैटर्न का वर्णन कैसे कर सकते हैं? आसान: ये 4 की गुणन सारणी में दिखाई देने वाली संख्याएँ हैं (4 के गुणज बढ़ते क्रम में)।

इस अनुक्रम का तीसरा पद क्या है? यह 4×3 है।

इस अनुक्रम का 29वाँ पद क्या है? यह 4×29 है।



इस अनुक्रम का n वाँ पद प्राप्त करने के लिए एक बीजीय व्यंजक ज्ञात कीजिए।

ध्यान दें कि यहां ' n ' एक अक्षर-संख्या है जो अनुक्रम में एक स्थिति को दर्शाता है।

चूँकि यह 4 के गुणजों का अनुक्रम है, यह देखा जा सकता है कि n वाँ पद n का 4 गुना होगा :

$$4 \times \text{एन}$$

एक मानक अभ्यास के रूप में, हम गुणन चिह्न को छोड़कर $4 \times n$ को $4n$ तक छोटा कर देते हैं। हम पहले संख्या लिखते हैं, उसके बाद अक्षर लिखते हैं।

व्यंजक $7k$ का मान ज्ञात कीजिए जब $k = 4$ हो। मान $7 \times 4 = 28$ है।

जब $m = 2$ हो तो व्यंजक $5m + 3$ का मान ज्ञात कीजिए।

चूँकि $5m$ का अर्थ $5 \times m$ है, $m = 2$ होने पर व्यंजक का मान है $5 \times 2 + 3 = 13$ ।

गलती पर ध्यान दें, गलती सुधारें

नीचे कुछ सरलीकरण दर्शाए गए हैं, जहाँ अक्षर-संख्याओं को संख्याओं से प्रतिस्थापित किया जाता है और अभिव्यक्ति का मान प्राप्त किया जाता है।

1. प्रत्येक का अवलोकन करें और पहचानें कि कहीं कोई गलती तो नहीं है।
2. यदि आपको लगता है कि कोई गलती हुई है, तो यह समझाने का प्रयास करें कि क्या हुआ होगा। गलत।
3. फिर, इसे सही करें और अभिव्यक्ति का मान दें।

1 यदि $a = -4$, तो $10 - a = 6$.	2 यदि $d = 6$, तो $3d = 36$.	3 यदि $s = 7$, तो $3s - 2 = 15$.
4 यदि $r = 8$, तो $2r + 1 = 29$.	5 यदि $j = 5$, तो $2j = 10$.	6 यदि $m = -6$, तो $3(\text{एम} + 1) = 19$.
7 यदि $f = 3$, $g = 1$ तो $2f - 2g = 2$.	8 यदि $t = 4$, $b = 3$ तो $2t + b = 24$.	9 यदि $h = 5$, $n = 6$ तो $h - (3 - n) = 4$.

4.4 बीजीय व्यंजकों का सरलीकरण

पहले हमने विभिन्न सम आकृतियों के परिमाणों को उनकी भुजाओं के पदों में ज्ञात करने के व्यंजक खोजे थे। आइए अब एक आयत का परिमाण ज्ञात करने के लिए एक व्यंजक खोजें।



पिछले मामलों की तरह, हम पहले यह बताएंगे कि परिमाण कैसे प्राप्त करें
जब आयत की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात हो: लंबाई + चौड़ाई + लंबाई + चौड़ाई का योग ज्ञात कीजिए।

आइए लंबाई और चौड़ाई के स्थान पर क्रमशः अक्षर-संख्या l और b का प्रयोग करें। मान लीजिए p आयत का परिमाण दर्शाता है। तब हमें प्राप्त होता है: $p = l + b + l + b$

जैसा कि हम जानते हैं, ये संख्याएँ दर्शाते हैं, इसलिए किसी भी व्यंजक के पदों को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है। इसलिए उपरोक्त व्यंजक को इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$= \text{एल} + \text{एल} + \text{बी} + \text{बी}$$

चूँकि $l + l = 2 \times l = 2l$, तथा $b + b = 2 \times b = 2b$, हमारे पास है

$$p = 2\text{एल} + 2\text{बी}.$$

ध्यान दें कि परिमाण के लिए प्राप्त प्रारंभिक व्यंजक $(l + b + l + b)$ और अंतिम व्यंजक $(2l + 2b)$ अलग-अलग दिखते हैं। हालाँकि, वे बराबर हैं क्योंकि यह व्यंजक प्रारंभिक व्यंजक से उन्हीं नियमों और संक्रियाओं को लागू करके प्राप्त किया गया है जो हम संख्याओं के लिए करते हैं; वे इस अर्थ में बराबर हैं कि जब अक्षर-संख्याओं को संख्याओं से बदल दिया जाता है, तो दोनों के मान समान हो जाते हैं।

उदाहरण के लिए, यदि हम $l = 3$, $b = 4$ मान लें, तो हमें मिलता है

$$l + b + l + b = 3 + 4 + 3 + 4 = 14, \text{ और}$$

$$2\text{एल} + 2\text{बी} = 2 \times 3 + 2 \times 4 = 14.$$

हम व्यंजक $2l + 2b$ को $l + b + l + b$ का सरलीकृत रूप कहते हैं।
आइये सरलीकरण के कुछ और उदाहरण देखें।

? उदाहरण 5: यहाँ एक दुकान में बेची गई पेंसिलों और रबड़ों की संख्या दर्शाने वाली एक तालिका दी गई है। प्रति पेंसिल की कीमत c है, और प्रति रबड़ की कीमत d है। इन तीन दिनों में दुकानदार द्वारा अर्जित कुल धनराशि ज्ञात कीजिए।

	दिन 1	दिन 2	तीसरा दिन
पेंसिल (मूल्य 'सी')	5	3	10
इरेज़र (मूल्य 'डी')	4	6	1

आइए सबसे पहले पेंसिलों की बिक्री से अर्जित धन ज्ञात करें।

पहले दिन पेंसिल बेचकर $5c$ की कमाई हुई। इसी तरह, तीसरे दिन भी पेंसिल बेचकर $5c + 3c + 10c$ की दूसरे दिन पेंसिल बेचकर अर्जित धन है _____ कमाई हुई। क्या _____

हम यह कर सकते हैं?

इस अभिव्यक्ति को और सरल बनाएं तथा पदों की संख्या कम करें?

इस व्यंजक का अर्थ है कि 5 गुना c को 3 गुना c में जोड़ा जाता है और 10 गुना c को जोड़ा जाता है। इस प्रकार, कुल मिलाकर, अक्षर-संख्या c को $(5 + 3 + 10)$ बार जोड़ा जाता है। इसे हम संख्याओं के वितरण गुण के रूप में देखते हैं। इस प्रकार,

$$5 \times \text{सी} + 3 \times \text{सी} + 10 \times \text{सी} = (5 + 3 + 10) \times \text{सी}$$

$(5 + 3 + 10) \times c$ को सरल करके $18 \times c = 18c$ किया जा सकता है।

? यदि $c = ₹50$ हो, तो पेंसिल के पैमाने से अर्जित कुल राशि ज्ञात कीजिए।

? रबड़ बेचकर अर्जित कुल धनराशि का व्यंजक लिखिए।
फिर, अभिव्यक्ति को सरल बनाएं।

पेंसिल और अन्य सामान बेचकर अर्जित कुल धन का व्यंजक इन तीन दिनों के दौरान रबड़ का औसत $18c + 11d$ है।

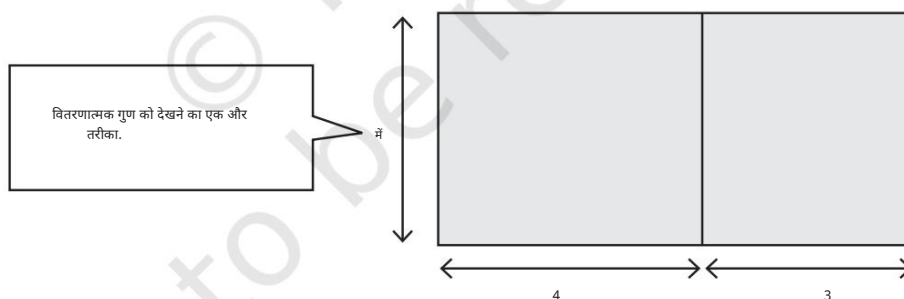
? क्या व्यंजक $18c + 11d$ को और सरल बनाया जा सकता है?

इस व्यंजक को और सरल बनाने का कोई तरीका नहीं है क्योंकि इसमें अलग-अलग अक्षर-संख्याएँ हैं। यह अपने सरलतम रूप में है।

इस समस्या में, हमने व्यंजक $5c + 3c + 10c$ को सरल होते देखा अभिव्यक्ति $18c$ के लिए।

? जाँच करें कि जब c को विभिन्न संख्याओं से प्रतिस्थापित किया जाता है तो दोनों व्यंजक समान मान लेते हैं।

? उदाहरण 6: एक बड़ा आयत चित्र में दिखाए अनुसार दो छोटे आयतों में विभाजित है। बड़े आयत का क्षेत्रफल बताने वाला एक व्यंजक लिखिए।



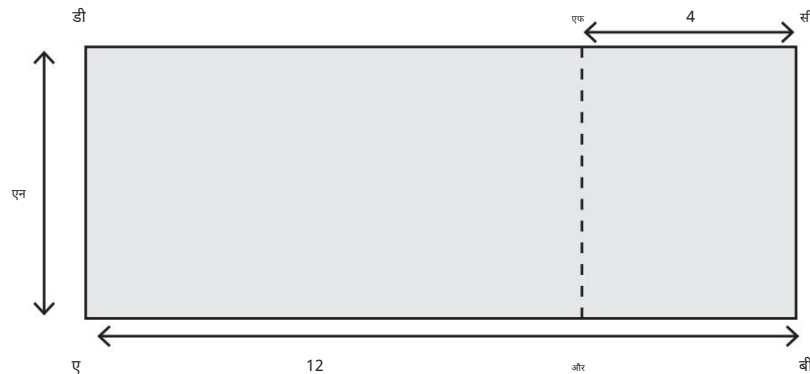
छोटे आयतों का क्षेत्रफल $4v$ वर्ग इकाई और $3v$ वर्ग इकाई है।

बड़े आयत का क्षेत्रफल दो तरीकों से ज्ञात किया जा सकता है: (i) इसकी भुजाओं की लंबाई v और $(4 + 3)$ का सीधे उपयोग करके, या (ii) छोटे आयतों के क्षेत्रफलों को जोड़कर।

पहला तरीका $7v$ देता है, और दूसरा तरीका $4v + 3v$ देता है। हम जानते हैं कि ये दोनों बराबर हैं: $4v + 3v = 7v$, और यह बड़े आयत के क्षेत्रफल के लिए आवश्यक व्यंजक है।

जैसा कि पहले दिखाया गया है, एक बड़ा आयत दो छोटे आयतों में विभाजित है नीचे दिए गए चित्र में आयत AEFD का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए व्यंजक लिखिए।

इस स्थिति में भी, आयत AEFD का क्षेत्रफल दो तरीकों से ज्ञात किया जा सकता है: (i) भुजा की लंबाई n और $(12 - 4)$ का सीधे उपयोग करके, या (ii) आयत EBCF के क्षेत्रफल को ABCD के क्षेत्रफल से घटाकर।



पहली विधि हमें $8n$ देती है, और दूसरी विधि हमें $12n - 4n$ देती है, और ये दोनों बराबर हैं, क्योंकि $12n - 4n = 8n$ है। यह आयत AEFD के क्षेत्रफल का व्यंजक है।

पदों के समुच्चय जैसे $(5c, c, 10c)$, $(12n, -4n)$ जिनमें समान अक्षर-संख्याएँ शामिल होती हैं, समान पद कहलाते हैं। पदों के समुच्चय जैसे $\{18c, 11d\}$ असमान पद कहलाते हैं क्योंकि उनमें भिन्न-भिन्न अक्षर-संख्याएँ होती हैं।

जैसा कि हमने देखा है, समान पदों को एक साथ जोड़ा जा सकता है और सरलीकृत करके एकल पद बनाया जा सकता है।

उदाहरण 7: एक दुकान एक दिन के उपयोग के लिए कुर्सियाँ और मेजें किराए पर देती है। उन्हें किराए पर लेने के लिए, पहले प्रति टुकड़ा निम्नलिखित राशि का भुगतान करना होगा।

वस्तु	मात्रा
कुर्सी	₹40
मेज़	₹75

जब फर्नीचर वापस किया जाता है तो दुकानदार कुछ राशि वापस देता है।

यदि x कुर्सियाँ और y मेजें किराए पर ली जाती हैं, तो भुगतान किए गए कुल रुपयों की संख्या के लिए एक व्यंजक लिखें।

	वापस की गई राशि
कुर्सी	₹6
मेज़	₹10

x कुर्सियों और y मेजों के लिए, आइए शुरुआत में भुगतान की गई कुल राशि और फर्नीचर वापस करने के बाद प्राप्त होने वाली राशि ज्ञात करें।

इन राशियों को प्राप्त करने की प्रक्रिया का वर्णन करें।

शुरुआत में भुगतान की गई कुल राशि (रुपये में) $40x + 75y$ है, और वापस की गई कुल राशि $6x + 10y$ है।

तो, कुल भुगतान की गई राशि $= (40x + 75y) - (6x + 10y)$.

क्या हम इस व्यंजक को सरल बना सकते हैं? यदि हाँ, तो कैसे? यदि नहीं, तो क्यों नहीं?



याद करें कि हम अंकगणितीय व्यंजक में कोष्ठक कैसे खोलते हैं, तो हमें मिलता है

$$(40x + 75y) - (6x + 10y) = (40x + 75y) - 6x - 10y$$

चूँकि पदों को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है, शेष कोष्ठक को खोला जा सकता है और व्यंजक $40x + 75y + - 6x + - 10y$ हो जाता है हम समान पदों को एक साथ समूहित कर सकते हैं, इसका परिणाम यह होता है

$$40x + - 6x + 75y + - 10y$$

$$= (40 - 6)x + (75 - 10)y$$

$$= 34x + 65y.$$

व्यंजक $(40x + 75y) - (6x + 10y)$ को सरलीकृत करके $34x + 65y$ किया गया है, जो कि रुपये में भुगतान की गई कुल राशि है।

? क्या हम प्रारंभिक व्यंजक को $(40x + 75y) + (- 6x - 10y)$ के रूप में लिख सकते थे?



? उदाहरण 8: चार एक प्रश्नोत्तरी के तीन दौर से गुज़र चुकी है। तीनों दौर में उसके अंक $7p - 3q$, $8p - 4q$, और $6p - 2q$ हैं। यहाँ, p सही उत्तर के लिए अंक और q गलत उत्तर के लिए दंड को दर्शाता है।

? प्रत्येक अभिव्यक्ति का क्या अर्थ है?

यदि सही उत्तर के लिए अंक 4 ($p = 4$) है और गलत उत्तर के लिए दंड 1 ($q = 1$) है, तो पहले राउंड में चार का अंक ज्ञात कीजिए।

चार का स्कोर $7 \times 4 - 3 \times 1$ है। हम इस व्यंजक का मूल्यांकन इसे पदों के योग के रूप में लिखकर कर सकते हैं।

$$7 \times 4 - 3 \times 1 = 7 \times 4 + - 3 \times 1 = 28 + - 3 = 25 \text{ दूसरे और तीसरे राउंड में उसके स्कोर क्या हैं?}$$

अगर कोई जुमाना न हो तो क्या होगा? उस स्थिति में q का मान क्या होगा ?

तीन राउंड के बाद उसका अंतिम स्कोर क्या है?

उसका अंतिम स्कोर तीन स्कोरों का योग होगा: $(7p - 3q) + (8p - 4q) + (6p - 2q)$.

चूँकि पदों को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है, हम कोष्ठक हटा सकते हैं और लिख सकते हैं

$$7p + - 3q + 8p + - 4q + 6p + - 2q$$

$$= 7p + 8p + 6p + - (3q) + - (4q) + - (2q) \text{ (स्वैपिंग और समूहीकरण द्वारा)}$$

$$= (7 + 8 + 6)p + - (3 + 4 + 2)q$$

$$= 21p + - 9q$$

$$= 21p - 9q$$

तीन राउंड के बाद चार का कुल स्कोर $21p - 9q$ है। उसकी दोस्त कृशिता का तीन राउंड के बाद स्कोर $23p - 7q$ है।

? तीनों राउंड में कृशिता के लिए कुछ संभावित अंक दीजिए ताकि उनका योग $23p - 7q$ हो।

? क्या हम बता सकते हैं कि किसने ज़्यादा अंक हासिल किए? क्या आप बता सकते हैं कि क्यों?

कृशिता ने चार से कितने ज़्यादा अंक प्राप्त किए हैं? यह दोनों के अंकों के बीच का अंतर ज्ञात करके पता लगाया जा सकता है।

$$23p - 7q - (21p - 9q)$$

? इस अभिव्यक्ति को और सरल कीजिए।

? उदाहरण 9: व्यंजक $4(x + y) - y$ को सरल कीजिए

वितरण गुण का उपयोग करके, इस अभिव्यक्ति को सरल बनाया जा सकता है

$$4(x + y) - y = 4x + 4y - y$$

$$= 4x + 4y - y$$

$$= 4x + (4 - 1)y$$

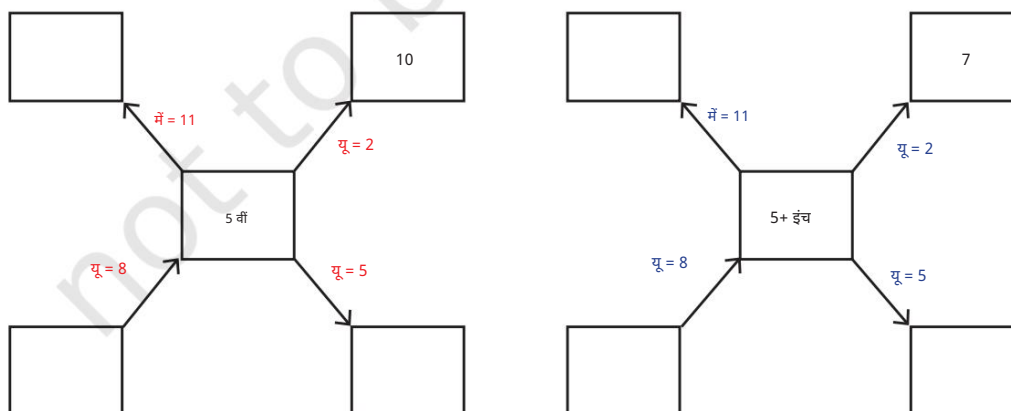
$$= 4x + 3y.$$

? उदाहरण 10: क्या व्यंजक $5u$ और $5 + u$ एक दूसरे के बराबर हैं?

व्यंजक $5u$ का अर्थ संख्या u का 5 गुना है, और व्यंजक $5 + u$ का अर्थ संख्या u से 5 अधिक है। ये दोनों अलग-अलग संक्रियाएँ हैं, इसलिए इनसे u के अधिकांश मानों के लिए अलग-अलग मान प्राप्त होने चाहिए।

आइये इसकी जांच करें।

? नीचे दिए गए रिक्त स्थानों को अक्षर-संख्याओं के स्थान पर संख्याएँ रखकर भरें; एक उदाहरण दिखाया गया है। फिर $5u$ और $5 + u$ के मानों की तुलना करें।



यदि व्यंजक $5u$ और $5 + u$ बराबर हैं, तो उन्हें लेना चाहिए

u के किसी भी दिए गए मान के लिए समान मान हैं। लेकिन हम देख सकते हैं कि ऐसा नहीं है।

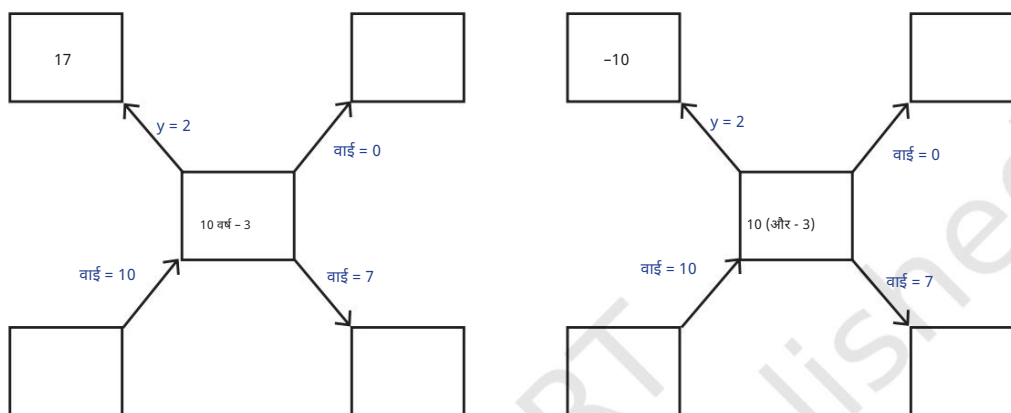
अतः ये दोनों अभिव्यक्तियाँ समान नहीं हैं।

क्या व्यंजक $10y - 3$ और $10(y - 3)$ समान हैं?

$10y - 3$, $10 \times y - 3$ का संक्षिप्त रूप, जिसका अर्थ है y के 10 गुने से 3 कम,

$10(y - 3)$, $10 \times (y - 3)$ का संक्षिप्त रूप, का अर्थ है 10 गुना (y से 3 कम)।

आइए हम y के विभिन्न मानों के लिए इन अभिव्यक्तियों के मानों की तुलना करें।



❓ दोनों आरेखों को भरने के बाद, क्या आपको लगता है कि दोनों अभिव्यक्तियाँ समान हैं?

❓ उदाहरण 11: चित्र में संख्याओं का योग क्या है (अज्ञात मान अक्षर-संख्याओं द्वारा दर्शाए गए हैं)?

ऐसा करने के कई तरीके हैं। यहाँ हम उनमें से कुछ बता रहे हैं।

1. पंक्तिवार जोड़ने पर प्राप्त होता है:

$$(4 \times 3) + (\text{आर} + \text{एस}) + (\text{आर} + \text{एस}) + (4 \times 3)$$

2. समान पदों को एक साथ जोड़ने पर प्राप्त होता है:

$$(8 \times 3) + (\text{आर} + \text{आर}) + (\text{एस} + \text{एस})$$

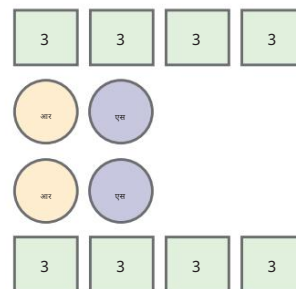
3. ऊपरी आधे भाग को जोड़ने और दोगुना करने पर प्राप्त होता है:

$$2 \times (4 \times 3 + \text{आर} + \text{एस})$$

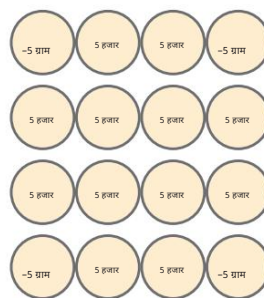
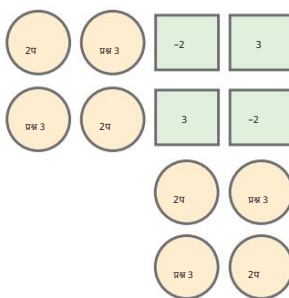
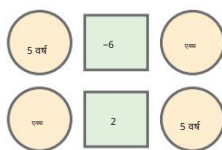
तीनों भाव अलग-अलग लग सकते हैं। हम प्रत्येक को सरल बना सकते हैं एक और देखें कि वे सभी समान हैं: $2r + 2s + 24$.

❓ समझ से बाहर

1. नीचे दिए गए प्रत्येक चित्र में दी गई संख्याओं को जोड़ें। उनके संगत व्यंजक लिखें और उन्हें सरल बनाएँ। प्रत्येक चित्र में दी गई संख्याओं को कुछ अलग तरीकों से जोड़ने का प्रयास करें और देखें।



कि आपको वही चीज़ मिले.



2. निम्नलिखित प्रत्येक व्यंजक को सरल कीजिए:

(a) $p + p + p + p$, $p + p + p + q$, (b) $p - q +$

$p - q$, (c) $p + q - (p +$

$q)$, (d) $2d - d - d - d$, (e)

$2d - d - (d - c)$, (f) $2d - d$

$- c - c$

पी + क्यू + पी - क्यू,

पी + क्यू - पी + क्यू,

पी - क्यू - पी - क्यू

2डी - डी - डी - सी,

2डी - (डी - डी) - सी,

गलती पर ध्यान दें, गलती सुधारें

बीजीय व्यंजकों के कुछ सरलीकरण नीचे दिए गए हैं। दाईं ओर का व्यंजक अपने सरलतम रूप में होना चाहिए।

- उनमें से प्रत्येक का अवलोकन करें और देखें कि क्या कोई गलती है।
- यदि आपको लगता है कि कोई गलती हुई है, तो यह समझाने का प्रयास करें कि क्या हुआ होगा गलत हो गया।
- फिर, इसे सही ढंग से सरल बनाएं।

अभिव्यक्ति

सरलतम रूप

सही सरलतम रूप

1. $3a + 2b$

5

2. $3बी - 2बी - बी$

0

3. $6(पी + 2) 6पी + 8$

4. $(4x + 3y) - (3x + 4y) x + y$

5. $5 - (2 - 6z)$

3 - 6ज़

6. $2 + (x + 3)$

$2x - 6$

7. $2y + (3y - 6) 8. 7p$

- और + 6

- $p + 5q - 2q 9. 5(2w +$

$7पी + 3क्यू$

$3x + 4w)$

$10w + 15x + 20w$

$$10. 3j + 6k + 9h + 12 \quad 11. 4(2r + 3) \quad 3(\text{जे} + 2k + 3h + 4) \\ + 3s + 5) \quad - 20 - 8r - 12s$$

- ❓ सभी संशोधित सरलतम रूपों पर एक नज़र डालें (अर्थात कोष्ठक हटा दिए गए हैं, समान पद जोड़े गए हैं, और केवल संख्याओं वाले पद भी जोड़े गए हैं)। क्या इन व्यंजकों में पदों की संख्या और अक्षर-संख्याओं की संख्या के बीच कोई संबंध है?

4.5 पैटर्न चुनें और संबंध प्रकट करें

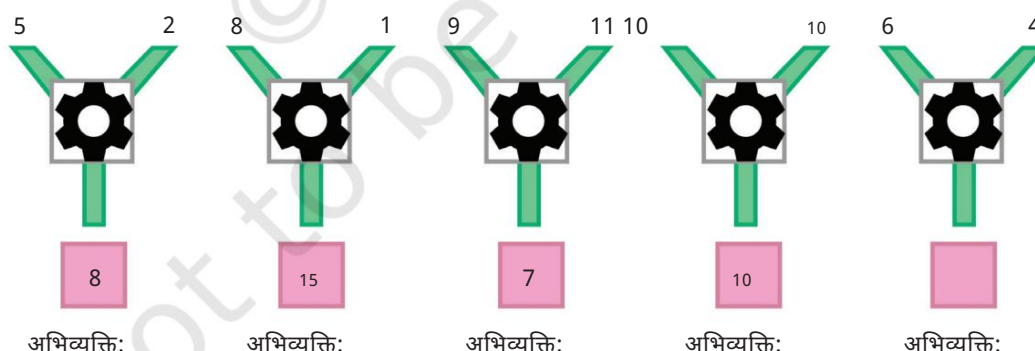
पहले भाग में हमने बीजीय व्यंजकों की एक झलक देखी और यह भी जाना कि सरल पैटर्न और संबंधों को संक्षिप्त और सुंदर ढंग से कैसे वर्णित किया जाए। यहाँ, हम विभिन्न परिदृश्यों में राशियों के बीच सामान्य संबंधों की खोज जारी रखते हैं, पैटर्न ढूँढ़ते हैं और दिलचस्प बात यह है कि यह भी बताते हैं कि ये पैटर्न क्यों होते हैं।

उन्हें अभिव्यक्ति के रूप में लिखने का प्रयास करने से पहले, सरल भाषा में वर्णन करने या गणितीय संबंधों की कल्पना करने के महत्व को याद रखें।

फॉर्मूला डिटेक्टिव

दिए गए चित्र को देखिए। प्रत्येक स्थिति में, संख्या मशीन 'Y' के ऊपर की दो संख्याओं को इनपुट के रूप में लेती है, कुछ संक्रियाएँ करती है और नीचे परिणाम प्रदर्शित करती है। मशीन प्रत्येक स्थिति में अपने इनपुट पर समान संक्रियाएँ करती है।

- ❓ इस संख्या मशीन का सूत्र ज्ञात कीजिए।



अभिव्यक्ति:

अभिव्यक्ति:

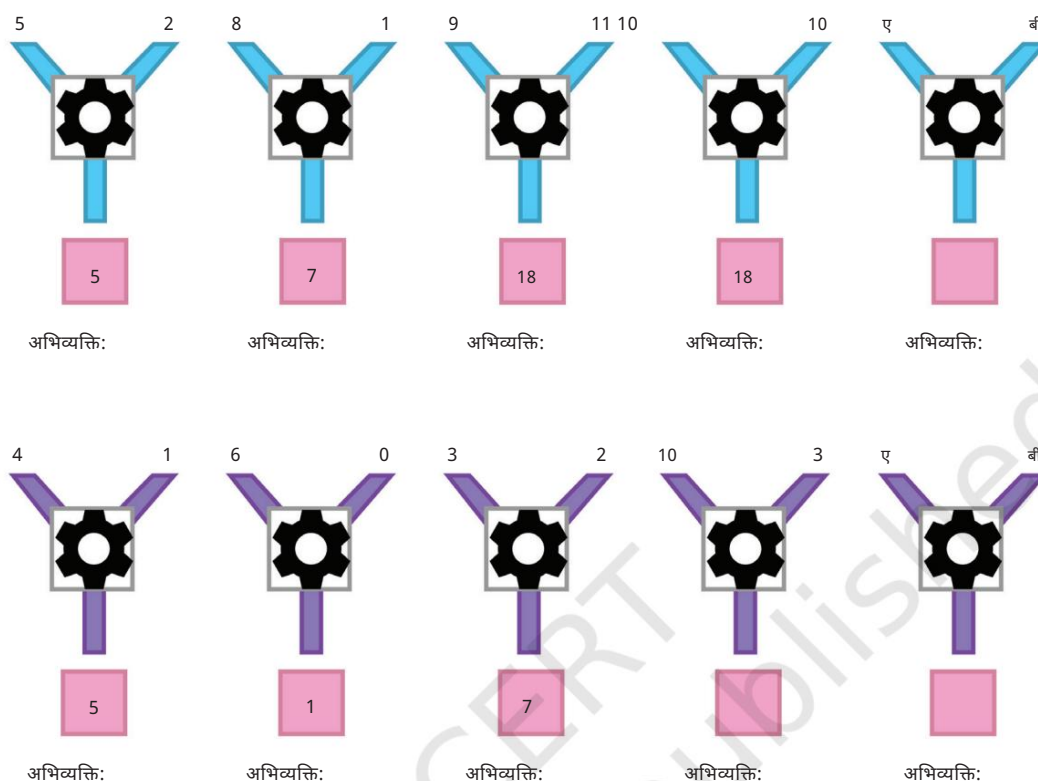
अभिव्यक्ति:

अभिव्यक्ति:

अभिव्यक्ति:

ऊपर दी गई संख्या मशीन का सूत्र है "पहली संख्या का दुगुना - दूसरी संख्या"। बीजीय व्यंजक के रूप में लिखने पर, सूत्र $2a - b$ होता है। इनपुट के पहले सेट के लिए व्यंजक $2 \times 5 - 2 = 8$ है। जाँच करें कि यह सूत्र इनपुट के प्रत्येक सेट के लिए सही है या नहीं।

? नीचे दी गई संख्या मशीनों के सूत्र ज्ञात कीजिए तथा इनपुट के प्रत्येक सेट के लिए व्यंजक लिखिए।

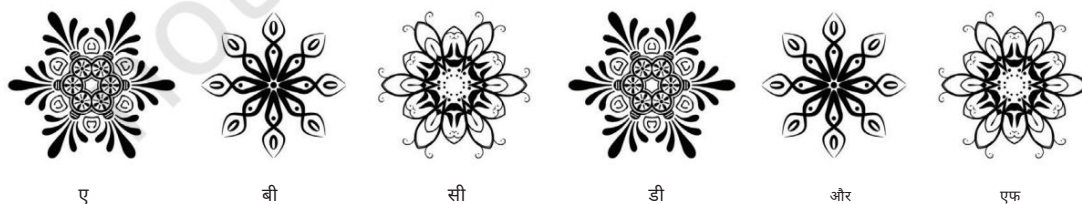


? अब, खुद एक सूत्र बनाइए। उस सूत्र का उपयोग करके कुछ संख्या मशीनों के उदाहरण लिखिए। अपने सहपाठियों को इसे हल करने की चुनौती दीजिए!

शिक्षक के लिए नोट: केवल समस्याओं को हल करना ही नहीं, बल्कि नए प्रश्न बनाना भी गणित सीखने और करने का एक महत्वपूर्ण हिस्सा है!

पैटर्न का वर्णन करने के लिए बीजीय व्यंजक

? उदाहरण 12: सोमजीत ने एक साड़ी के किनारे पर एक दोहरावदार पैटर्न देखा।



? सोमजीत को आश्चर्य है कि क्या उन सभी स्थितियों का वर्णन करने का कोई तरीका है जहां (i) डिजाइन ए होता है, (ii) डिजाइन बी होता है, और (iii) डिजाइन सी होता है।

आइए डिज़ाइन C से शुरू करें। यह पहली बार स्थिति 3 पर दिखाई देता है, दूसरी बार 6वें स्थान पर।

? डिज़ाइन C, n वीं बार कहाँ दिखाई देगा ?

हम देख सकते हैं कि यह डिज़ाइन उन स्थितियों में दिखाई देता है जो के गुणज हैं 3. अतः डिज़ाइन C की n वीं घटना स्थिति $3n$ पर होगी।

? इसी प्रकार, वह सूत्र ज्ञात कीजिए जो वह स्थिति बताता है जहाँ अन्य डिज़ाइन n वीं बार दिखाई देते हैं।

वे स्थान जहाँ B आता है वे हैं 2, 5, 8, 11, 14, इत्यादि।

हम देख सकते हैं कि डिज़ाइन B की n वीं उपस्थिति की स्थिति, डिज़ाइन C की n वीं बार उपस्थिति की स्थिति से एक कम है। इस प्रकार, डिज़ाइन B की n वीं उपस्थिति इस स्थिति पर है:

$$3n - 1$$

इसी प्रकार, डिज़ाइन A जिस स्थिति पर n वीं बार दिखाई देता है, उसे वर्णित करने वाला व्यंजक है: $3n - 2$.

? एक स्थान संख्या दिए जाने पर क्या हम वहाँ दिखाई देने वाले डिज़ाइन का पता लगा सकते हैं? कौन सा डिज़ाइन स्थिति 122 पर दिखाई देता है?

यदि स्थिति 3 का गुणज है, तो स्पष्टतः हमारे पास डिज़ाइन C है। जैसा कि पहले देखा गया है, यदि स्थिति 3 के गुणज से 1 कम है, तो इसका डिज़ाइन B है, और यदि यह 3 के गुणज से 2 कम है, तो इसका डिज़ाइन A है।

? क्या स्थिति संख्या को 3 से भाग देने पर प्राप्त शेषफल का उपयोग इसके लिए किया जा सकता है? नीचे दी गई तालिका को देखिए।

पद सं.	3 से भाग देने पर भागफल	शेष
99	33	0
122	40	2
148	49	1

? इसका उपयोग यह जानने के लिए करें कि 99, 122 और 148 स्थानों पर कौन सा डिज़ाइन दिखाई देता है।

कैलेंडर में पैटर्न

यहाँ नवंबर 2024 का कैलेंडर दिया गया है। कैलेंडर में अंकित 2×2 के वर्गों पर विचार करें। इस वर्ग में अंकित संख्याएँ एक दिलचस्प गुण दर्शाती हैं।

November 2024

Mon	Tue	Wed	Thu	Fri	Sat	Sun
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

12	13
19	20

आइए हम 2×2 के चिह्नित वर्ग को लें, और विकर्णों पर स्थित संख्याओं पर विचार करें; 12 और 20; 13 और 19। उनका योग ज्ञात करें; $12 + 20$, $13 + 19$ । आप क्या देखते हैं?

वे बराबर हैं।

आइए हम कैलेंडर में संख्याओं को 30 से आगे बढ़ाते हुए अंतहीन पंक्तियाँ बनाएँ।

November 2024

Mon	Tue	Wed	Thu	Fri	Sat	Sun
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

❓ क्या इस अंतहीन ग्रीड में हर 2×2 वर्ग में विकर्णों का योग बराबर होगा? हम कैसे सुनिश्चित हो सकते हैं?

इस बात को सुनिश्चित करने के लिए हम सभी 2×2 वर्गों की जाँच नहीं कर सकते क्योंकि उनमें से असीमित संख्या।

आइए एक 2×2 वर्ग पर विचार करें। इसके ऊपर बाईं ओर की संख्या कोई भी संख्या हो सकती है। आइए इसे 'अ' कहें।

❓ यह देखते हुए कि हमें ऊपर बाईं ओर की संख्या ज्ञात है, हम इस 2×2 वर्ग में अन्य संख्याएँ कैसे ज्ञात करेंगे?

जैसा कि हम करते आ रहे हैं, पहले हम दूसरे का वर्णन करते हैं संख्याओं को शब्दों में बदलना।

अ	?
?	?

- 'a' के दाईं ओर की संख्या उससे 1 अधिक होगी।
- 'a' के नीचे की संख्या उससे 7 अधिक होगी।
- 'a' के विकर्ण की संख्या उससे 8 अधिक होगी।

तो 2×2 वर्ग में अन्य संख्याओं को ग्रिड में दिखाए अनुसार दर्शाया जा सकता है। आइए विकर्ण योग ज्ञात करें; $a + (a + 8)$, और $(a + 1) + (a + 7)$ ।

आ + 1	
ए + 7	ए + 8

आइये हम इन्हें सरल बनाते हैं।

चूँकि पदों को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है, कोष्ठक खोले जा सकते हैं।

$$a + (a + 8) = a + a + 8 = 2a + 8$$

$$(a + 1) + (a + 7) = a + 1 + a + 7 = a + a + 1 + 7 = 2a + 8$$

हम देखते हैं कि दोनों विकर्णों का योग $2a + 8$ (a के 2 गुने से 8 अधिक) के बराबर है।

? किसी भी 2×2 वर्ग पर विचार करके और उसके ऊपरी बाएँ अंक को 'a' मानकर विकर्ण योगों के लिए इस व्यंजक का सत्यापन कीजिए।

इस प्रकार, हमने दिखाया है कि विकर्ण योग a के किसी भी मान के लिए समान हैं, अर्थात्, किसी भी 2×2 वर्ग के लिए!



यह समस्या एक उदाहरण है जो यह सत्यापित करने में बीजीय मॉडलिंग की शक्ति को दर्शाता है कि क्या कोई पैटर्न हमेशा कायम रहेगा।

कैलेंडर से संख्याओं के एक समूह (अंतहीन पंक्तियों वाले) पर विचार करें जो निम्नलिखित आकृति में बन रहा है:

	8	
14	15	16
	22	

? सभी संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए। इसकी तुलना बीच में दी गई संख्या 15 से कीजिए। इसी आकृति को बनाने वाली संख्याओं के दूसरे समूह के लिए भी यही प्रक्रिया दोहराइए। आप क्या देखते हैं?

हम देखते हैं कि कुल योग सदैव केन्द्र में स्थित संख्या का 5 गुना होता है।

? क्या ऐसा हमेशा होता रहेगा? आप इसे कैसे दिखाएँगे?

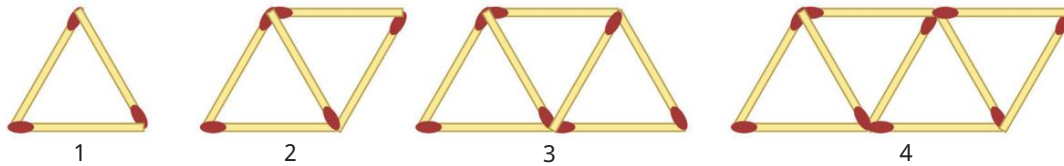
[संकेत: संख्याओं के एक सामान्य समूह पर विचार करें जो इस आकृति का निर्माण करता है। केंद्र की संख्या को 'a' मानिए। अन्य संख्याओं को 'a' के रूप में व्यक्त कीजिए।]

अन्य आकृतियाँ ज्ञात कीजिए जिनके लिए आकृति के भीतर संख्याओं का योग हमेशा किसी एक संख्या का गुणज होता है।



माचिस की तीलियों के पैटर्न

नीचे दी गई तस्वीर को देखिए। यह माचिस की तीलियों से बना एक पैटर्न है। क्या आप पहचान सकते हैं कि यह पैटर्न क्या है?



हम देख सकते हैं कि चरण 1 में 1 त्रिभुज है, चरण 2 में 2 त्रिभुज हैं, चरण 3 में 3 त्रिभुज हैं, इत्यादि।

क्या आप बता सकते हैं कि अगले चरण, यानी पाँचवें चरण में कितनी माचिस की तीलियाँ होंगी? यह 11 हैं। आप इसे भी बनाकर देख सकते हैं।

? चरण 33, चरण 84 और चरण 108 में कितनी माचिस की तीलियाँ होंगी?

बेशक, हम चित्र बना सकते हैं और गिन सकते हैं, लेकिन क्या यहां मौजूद पैटर्न का उपयोग करके उत्तर खोजने का कोई तेज़ तरीका है?

अगले चरण में माचिस की तीलियों की संख्या ज्ञात करने का सामान्य नियम क्या है? हम देख सकते हैं कि प्रत्येक चरण में अगली तीली प्राप्त करने के लिए 2 तीलियाँ रखी जाती हैं, अर्थात् हर बार माचिस की तीलियों की संख्या 2 बढ़ जाती है।

चरण संख्या 1	2	3	4	5	6	
माचिस की तीलियों की संख्या	3	5	7	9	11	13

इसका उपयोग करके माचिस की तीलियों की संख्या ज्ञात करने का कोई तरीका सोचिए।

चरण 33 (संख्याएँ लिखना जारी रखे बिना)।

चूँकि हर बार दो माचिस की तीलियाँ जोड़ी जा रही हैं, इसलिए चरण 33 में कितनी तीलियाँ 2 जोड़ी जाएँगी, यह जानने से मदद मिलेगी। नीचे दी गई तालिका देखें और पता लगाने की कोशिश करें।

चरण संख्या 1		2	3	4	5	6
माचिस की तीलियों की संख्या	3	5	7	9	11	13
		3 + 2 3 + 2 + 2 3 + 2 + 2 + 2 3 + 2 + 2 + 2 + 2				

33 त्रिभुज बनाने के लिए आवश्यक माचिस की तीलियों की संख्या (चरण 33) _____ है। इसी प्रकार, चरण 84 और चरण 108 के लिए आवश्यक माचिस की तीलियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

किसी भी चरण पर माचिस की तीलियों की संख्या ज्ञात करने के नियम/सूत्र का वर्णन करने वाला व्यंजक क्या हो सकता है?

पैटर्न इस प्रकार है कि चरण 10 में, नौ 2 और एक जोड़ा 3 ($3 + 2 \times 9$) माचिस की तीलियों की संख्या देता है; चरण 11 में, दस 2 और एक जोड़ा 3 ($3 + 2 \times 10$) माचिस की तीलियों की संख्या देता है। चरण y के लिए, व्यंजक क्या है?

यह है: y से एक कम (अर्थात $y - 1$) 2s और a 3.

इसलिए, अभिव्यक्ति है

$$3 + 2 \times (\text{और} - 1).$$

यह व्यंजक चरण y में माचिस की तीलियों की संख्या देता है। अब हम किसी भी चरण पर माचिस की तीलियों की संख्या शीघ्रता से ज्ञात कर सकते हैं।

आपने शायद पहले ही देखा होगा कि पहले चरण में भी 2 है, $3 = 1 + 2$. इसका उपयोग करने पर, हमें $2y + 1$ प्राप्त होता है।

- ❓ क्या उपरोक्त व्यंजक प्रत्येक चरण में माचिस की तीलियों की संख्या भी सही-सही बताता है? क्या ये व्यंजक एक जैसे हैं?

हम व्यंजक $3 + 2 \times (y - 1)$ को सरल करके जाँच सकते हैं।

$$3 + 2 \times (y - 1) = 3 + 2y - 2$$

$$= 2y + 1.$$

दोनों अभिव्यक्तियाँ एक जैसी हैं।

गिनने या पैटर्न देखने का एक अलग तरीका है। आइए तस्वीर पर फिर से नज़र डालें।



माचिस की तीलियाँ दो दिशाओं में रखी जाती हैं - (क) ऊपर और नीचे क्षैतिज तीलियाँ, और (ख) बीच में तिरछी तीलियाँ।

उदाहरण के लिए, चरण 2 में 2 माचिस की तीलियाँ क्षैतिज रूप से रखी गई हैं और 3 माचिस की तीलियाँ तिरछी रूप से रखी गई हैं।

- ❓ चरण 3 और चरण 4 में ये संख्याएँ क्या हैं?
- ❓ जैसे-जैसे चरण बढ़ते हैं, प्रत्येक अभिविन्यास में माचिस की तीलियों की संख्या कैसे बदलती है? प्रत्येक अभिविन्यास में चरण ' y ' पर माचिस की तीलियों की संख्या के लिए एक व्यंजक लिखिए। क्या दोनों व्यंजकों का योग $2y + 1$ होता है?



समझ से बाहर

उपयुक्त व्यंजक खोजने के लिए पूछे जाने वाले प्रश्नों के लिए, पहले वर्णित स्थिति में विभिन्न राशियों के बीच संबंध को समझने का प्रयास करें। यदि आवश्यक हो, तो अज्ञात राशियों के लिए कुछ मान मान लें और संबंध ज्ञात करने का प्रयास करें।

1. ज्वार की रोटी की एक प्लेट की कीमत ₹30 और पुलाव की एक प्लेट की कीमत ₹20 है।

यदि एक दिन में ज्वार की रोटी की x प्लेट और पुलाव की y प्लेटें मंगाई गईं, तो कौन-सा/से व्यंजक उस दिन अर्जित कुल राशि को रुपए में दर्शाते हैं/बताते हैं?

(a) $30x + 20y$ (c) $20x$

(बी) $(30 + 20) \times (x + y)$ (डी) $(30 + 20)$

$+ 30y$ (e) $30x - 20y$

$\times x + y$

2. पुष्पिता स्वतंत्रता दिवस पर दो प्रकार के फूल बेचती है: चंपक और गेंदा। 'p' ग्राहकों ने केवल चंपक खरीदा, 'q' ग्राहकों ने केवल गेंदा खरीदा, और 'r' ग्राहकों ने दोनों खरीदे। उसी दिन, उसने प्रत्येक ग्राहक को एक छोटा राष्ट्रीय ध्वज दिया। उस दिन उसने कितने झंडे दिए?

(a) $p + q + r$ (c)

(बी) $\text{पी} + \text{क्यू} + 2\text{आर}$

$2 \times (p + q + r)$ (e) $p +$

(डी) $\text{पी} + \text{क्यू} + \text{आर} + 2$

$q + r + 1$ 3. एक घोंघा

(एफ) $2 \times (\text{पी} + \text{क्यू})$

एक गहरे कुएँ की दीवार पर चढ़ने की कोशिश कर रहा है। इस दौरान दिन में यह 'u' सेमी ऊपर चढ़ता है और रात में धीरे-धीरे 'd' सेमी नीचे खिसकता है। ऐसा 10 दिन और 10 रातों तक होता है।

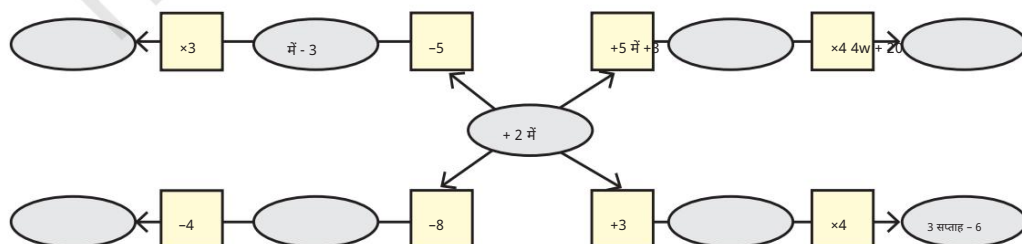
(क) एक व्यंजक लिखिए जो यह बताए कि घोंघा अपनी प्रारंभिक स्थिति से कितनी दूर है।

(b) यदि $d > u$ हो तो हम घोंघे की गति के बारे में क्या कह सकते हैं ?

4. राधा एक साइकिल रेस की तैयारी कर रही है और रोज़ाना अभ्यास करती है। पहले हफ़्ते वह रोज़ 5 किलोमीटर साइकिल चलाती है। हर हफ़्ते वह रोज़ाना साइकिल चलाने की दूरी 'z' किलोमीटर बढ़ा देती है। 3 हफ़्ते बाद राधा कितने किलोमीटर साइकिल चला चुकी होगी?



5. निम्नलिखित आकृति में, देखें कि कैसे व्यंजक $w + 2$ एक पथ पर $4w + 20$ हो जाता है। शेष पथों पर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए। अंडाकार में व्यंजक और बक्सों में संक्रियाएँ हैं।



6. याहापुर से वहापुर जाने वाली एक लोकल ट्रेन रास्ते में तीन समान दूरी पर स्थित स्टेशनों पर रुकती है। एक स्टेशन से अगले स्टेशन तक पहुँचने में लगने वाला समय मिनटों में समान है और इसे t से दर्शाया जाता है।

ट्रेन तीनों स्टेशनों पर 2 मिनट रुकती है।

- (a) यदि $t = 4$, तो जयपुर से पटना तक यात्रा करने में कितना समय लगेगा?

Vahapur?

- (b) याहापुर से वहापुर तक यात्रा में लगने वाले समय के लिए बीजीय व्यंजक क्या है? [संकेत: स्थिति को स्पष्ट करने के लिए एक कच्चा चित्र बनाइए]

7. निम्नलिखित अभिव्यक्तियों को सरल कीजिए:

(ए) $3ए + 9बी - 6 + 8 ए - 4बी - 7ए + 16 (बी) 3(3ए - 3बी) -$

$8 ए - 4बी - 16$

(सी) $2 (2x - 3) + 8x + 12$

(घ) $8x - (2x - 3) + 12$

(ई) $8 घंटे - (5 + 7 घंटे) + 9$

(एफ) $23 + 4(6एम - 3एन) - 8एन - 3एम - 18$

8. नीचे दिए गए भावों को जोड़ें:

(a) $4d - 7c + 9$ और $8c - 11 + 9d$

(b) $-6f + 19 - 8s$ और $-23 + 13f + 12s$

(c) $8d - 14c + 9$ और $16c - (11 + 9d)$

(d) $6f - 20 + 8s$ और $23 - 13f - 12s$

(ई) $13मी - 12एन$ और $12एन - 13मी$

(f) $-26m + 24n$ और $26m - 24n$

9. नीचे दिए गए व्यंजकों को घटाएँ:

(a) $9a - 6b + 14$ से $6a + 9b - 18$ (b) $-15x + 13 - 9y$

से $7y - 10 + 3x$

(c) $17 ग्राम + 9 - 7 घंटे$ से $11 - 10 ग्राम + 3 घंटे$

(d) $9a - 6b + 14$ से $6a - (9b + 18)$

(e) $10x + 2 + 10y$ से $-3y + 8 - 3x$

(च) $8g + 4h - 10$ से $7h - 8g + 20$

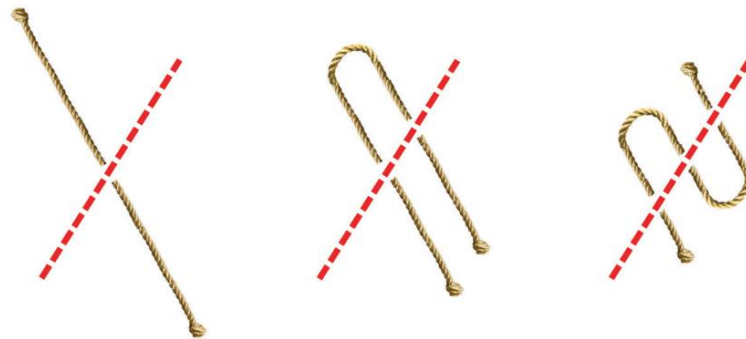
10. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों से संबंधित स्थितियों का वर्णन करें:

(ए) $8x + 3y$

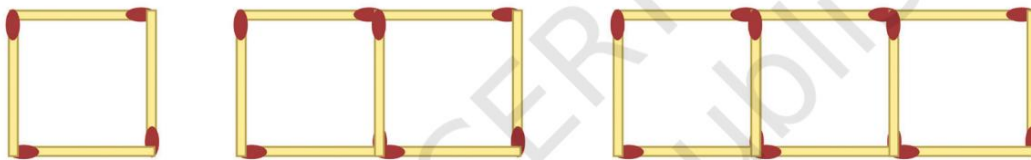
(बी) $15x - 2x$

11. एक सीधी रस्सी की कल्पना कीजिए। यदि इसे चित्र में दिखाए अनुसार एक बार काटा जाए, तो हमें दो टुकड़े मिलते हैं। यदि रस्सी को एक बार मोड़कर चित्र में दिखाए अनुसार काटा जाए, तो हमें दो टुकड़े मिलते हैं।

3 टुकड़े प्राप्त करें। पैटर्न को देखकर, यदि रस्सी को 10 बार मोड़कर काटा जाए, तो टुकड़ों की संख्या ज्ञात कीजिए। जब रस्सी को r बार मोड़कर काटा जाए, तो टुकड़ों की संख्या का व्यंजक क्या होगा ?

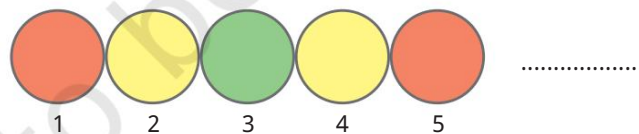


12. नीचे दिए गए माचिस के पैटर्न को देखिए। पैटर्न को देखिए और पहचानिए। ऐसे 10 वर्ग बनाने के लिए कितनी माचिस की तीलियों की ज़रूरत होगी? w वर्ग बनाने के लिए कितनी तीलियों की ज़रूरत होगी?

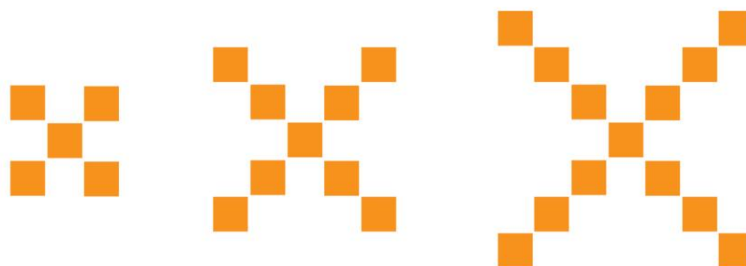


13. क्या आपने देखा है कि ट्रैफ़िक सिग्नल में रंग कैसे बदलते हैं? रंग परिवर्तन का क्रम नीचे दिखाया गया है।

90, 190 और 343 स्थानों पर रंग ज्ञात कीजिए। प्रत्येक रंग की स्थिति का वर्णन करने के लिए व्यंजक लिखिए।



14. नीचे दिए गए पैटर्न को देखिए। चरण 4, चरण 10, चरण 50 में कितने वर्ग होंगे? एक सामान्य सूत्र लिखिए। अगर हम सभी वर्गों के शीर्षों की संख्या गिनना चाहें तो सूत्र में क्या बदलाव आएगा?



15. इस अंतहीन 4-स्तंभ ग्रीड में संख्याएँ एक विशेष क्रम में लिखी गई हैं।

(a) दिए गए कॉलम (1, 2, 3, 4) में सभी संख्याएँ उत्पन्न करने के लिए व्यंजक दीजिए।

(b) किस पंक्ति और स्तंभ में निम्नलिखित संख्याएँ दिखाई देती हैं:

(i) 124

(ii) 147

(iii) 201

(c) पंक्ति r और स्तंभ c में कौन सी संख्या दिखाई देती है?

(d) 3 के गुणजों की स्थिति का अवलोकन करें।

क्या आपको इसमें कोई पैटर्न दिखाई देता है? आपको जो अन्य पैटर्न दिखाई देते हैं, उनकी सूची बनाएँ।

1	2	3	4
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16



सारांश

- बीजीय अभिव्यक्तियों का उपयोग सूत्रों में पैटर्न और मात्राओं के बीच गणितीय संबंधों को मॉडल करने और भविष्यवाणियां करने के लिए किया जाता है।
- बीजीय व्यंजकों में न केवल संख्याओं का बल्कि अक्षर-संख्याओं का भी उपयोग होता है। अंकगणितीय व्यंजकों में हेरफेर करने के नियम बीजीय व्यंजकों पर भी लागू होते हैं। इन नियमों का उपयोग बीजीय व्यंजकों को उनके सरलतम रूप में परिवर्तित करने के लिए किया जा सकता है।
- बीजीय व्यंजकों को सामान्य भाषा में और बीजीय व्यंजकों को सामान्य भाषा में भी वर्णित किया जा सकता है। बीजगणित का उपयोग करके आसानी से लिखे जाने वाले पैटर्न या संबंध सामान्य भाषा में अक्सर लंबे और जटिल हो सकते हैं। यह बीजगणित का एक लाभ है।