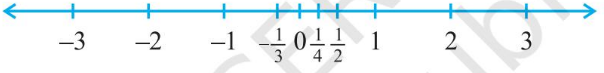
0962CH01

प्रकरण १

संख्या प्रणाली

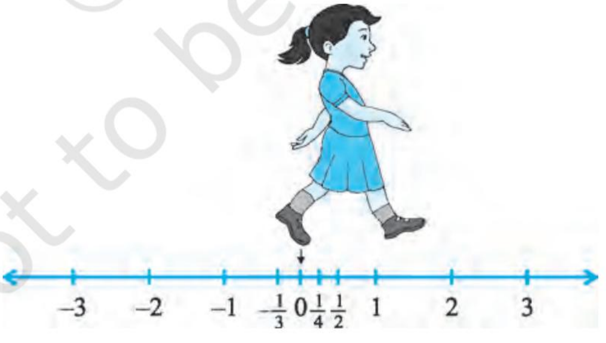
१.१ परिचय

तुमच्या मागील वर्गांमध्ये, तुम्ही संख्यारेषा आणि त्यावर विविध प्रकारच्या संख्या कशा दर्शवायच्या याबद्दल शिकलात (आकृती १.१ पहा).



आकृती १.१: संख्यारेषा

कल्पना करा की तुम्ही शून्यापासून सुरुवात करता आणि या संख्यारेषेवरून सकारात्मक दिशेने चालत जाता. तुमच्या नजरेपर्यंत, संख्या, संख्या आणि संख्या आहेत!

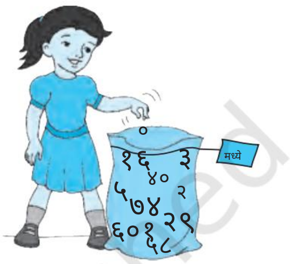


आकृती १.२

आता समजा तुम्ही संख्यारेषेवरून चालायला सुरुवात केली आणि काही संख्या गोळा केली.
संख्या. त्यांना साठवण्यासाठी एक बॅग तयार ठेवा!

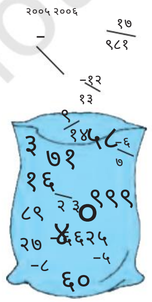
तुम्ही फक्त १, २, ३ इत्यादी नैसर्गिक संख्या घेऊन सुरुवात करू शकता. तुम्हाला माहिती आहे की ही यादी कायमची चालू राहते. (हे खरे का आहे?) तर, आता तुमच्या बॅगेत असंख्य नैसर्गिक संख्या आहेत! लक्षात ठेवा की आपण हा संग्रह N या चिन्हाने दर्शवितो.

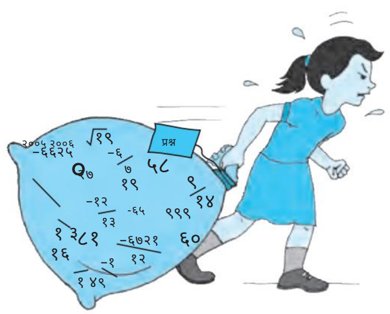
आता वळा आणि मागे जा, शून्य उचला आणि बॅगेत टाका. आता तुमच्याकडे पूर्णांक संख्यांचा संग्रह आहे जो W या चिन्हाने दर्शविला जातो.



आता, तुमच्या समोर अनेक ऋण पूर्णांक आहेत. सर्व ऋण पूर्णांक तुमच्या बॅगेत टाका. तुमचा नवीन संग्रह कोणता आहे? लक्षात ठेवा की तो सर्व पूर्णांकांचा संग्रह आहे आणि तो Z या चिन्हाने दर्शविला जातो.

रेषेवर अजूनही काही संख्या शिल्लक आहेत का? अर्थात! असे काही संख्या आहेत $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{४}$, किंवा अगदी $\frac{-२००५}{२००६}$. जर तुम्ही असे सर्व आकडे बॅगेत ठेवले तर ते आता असेल





परिमेय संख्यांचा संग्रह . परिमेय संख्यांचा संग्रह Q ने दर्शविला जातो.
'रॅशनल' हा शब्द 'रेशो' या शब्दापासून आला आहे आणि 'क्यू' हा 'भागफल' या शब्दापासून आला आहे.

तुम्हाला परिमेय संख्यांची व्याख्या आठवत असेल:

जर 'r' ही संख्या p या स्वरूपात लिहिता आली तर तिला परिमेय संख्या म्हणतात . $\frac{}{\text{प्रश्न}}$,

जिथे p आणि q पूर्णांक आहेत आणि q ≠ 0 **आहेत.** (आपण q ≠ 0 असा आग्रह का धरतो ?)

लक्षात घ्या की बॅगेतील सर्व संख्या आता फॉर्ममध्ये लिहिता येतात $\frac{\text{पी}}{\text{प्रश्न}}$, जिथे पी

आणि q हे पूर्णांक आहेत आणि q ≠ 0 आहे. उदाहरणार्थ, –25 असे लिहिले जाऊ शकते $\frac{-२५}{१}$; येथे p = –25

आणि q = 1. म्हणून, परिमेय संख्यांमध्ये नैसर्गिक संख्या देखील समाविष्ट असतात, पूर्ण संख्या आणि पूर्णांक.

तुम्हाला हे देखील माहित आहे की परिमेय संख्यांना एक अद्वितीय प्रतिनिधित्व नसते

फॉर्म p $\frac{}{\text{प्रश्न}}$, जिथे p आणि q पूर्णांक आहेत आणि q ≠ 0 आहे. उदाहरणार्थ, 2 $\frac{१}{} = \frac{२}{४} = \frac{१०}{२०} = \frac{२५}{५०}$

$= \frac{४७}{९४}$, आणि असेच. या समतुल्य परिमेय संख्या (किंवा अपूर्णांक) आहेत. तथापि,

जेव्हा आपण म्हणतो की p $\frac{}{\text{प्रश्न}}$ ही एक परिमेय संख्या आहे, किंवा जेव्हा आपण q दर्शवतो $\frac{\text{पी}}{}$ नंबरवर

रेषेवर, आपण असे गृहीत धरतो की q ≠ 0 आणि p आणि q मध्ये 1 व्यतिरिक्त कोणतेही सामान्य घटक नाहीत (म्हणजेच, p आणि q **सह-प्राइम** आहेत). तर, संख्यारेषेवर, अनंत अनेकांमध्ये

२ च्या समतुल्य अपूर्णांक $\frac{१}{}$, आम्ही त्या सर्वांचे प्रतिनिधित्व करण्याचे निवडू. $\frac{१}{२}$

आता, आपण विविध प्रकारच्या संख्यांबद्दल काही उदाहरणे सोडवूया, जी तुम्ही आधीच्या वर्गात शिकलो आहे.

उदाहरण १ : खालील विधाने खरी आहेत की खोटी? तुमच्या उत्तरांची कारणे द्या.

(i) प्रत्येक पूर्णांक संख्या ही एक नैसर्गिक संख्या आहे.

(ii) प्रत्येक पूर्णांक ही एक परिमेय संख्या आहे.

(iii) प्रत्येक परिमेय संख्या ही एक पूर्णांक असते.

उपाय: (i) चुकीचे, कारण शून्य ही पूर्ण संख्या आहे परंतु नैसर्गिक संख्या नाही.

(ii) खरे आहे, कारण प्रत्येक पूर्णांक m हा परिमेय संख्येच्या स्वरूपात व्यक्त करता येतो. $\frac{\text{मी}}{१}$, आणि म्हणून ते एक आहे

(iii) खोटे, कारण ५ $\frac{३}{}$ पूर्णांक नाही.

उदाहरण २: १ आणि २ मधील पाच परिमेय संख्या शोधा.

आपण या समस्येला कमीत कमी दोन प्रकारे तोंड देऊ शकतो.

उपाय १: लक्षात ठेवा की r आणि s मधील परिमेय संख्या शोधण्यासाठी , तुम्ही r आणि

s आणि बेरजेला 2 ने भागा, म्हणजे $\frac{रु +}{२}$ r आणि s मध्ये आहे . तर, $\frac{३}{२}$ एक संख्या आहे

१ आणि २ च्या दरम्यान. तुम्ही आणखी चार परिमेय संख्या शोधण्यासाठी या पद्धतीने पुढे जाऊ शकता.

१ आणि २ च्या दरम्यान. या चार संख्या ४ ८ ८ आहेत $\frac{५}{}, \frac{११}{}, \frac{१३}{}$ आणि $\frac{७}{४}$

उपाय २: दुसरा पर्याय म्हणजे एकाच चरणात पाचही परिमेय संख्या शोधणे. कारण आपल्याला पाच संख्या हव्या आहेत, आपण १ आणि २ हे परिमेय संख्या म्हणून लिहू ज्यांचे छेद ५ + १ आहे,

म्हणजेच, १ = ६ $\frac{६}{}$ आणि २ = · $\frac{१२}{}$ मग तुम्ही ६ तपासू शकता $\frac{७}{६}, \frac{८}{६}, \frac{९}{६}, \frac{१०}{६}$ आणि सर्व तर्कसंगत आहेत $\frac{११}{६}$

१ आणि २ मधील संख्या. तर, पाच संख्या आहेत $\frac{७}{६}, \frac{४}{३}, \frac{३}{२}, \frac{५}{३}$, — आणि $\frac{११}{६}$.

टिप्पणी : लक्षात घ्या की उदाहरण २ मध्ये तुम्हाला पाच परिमेय संख्या शोधण्यास सांगितले होते. १ आणि २ च्या दरम्यान. पण, तुम्हाला हे लक्षात आले असेलच की प्रत्यक्षात असंख्य १ आणि २ मधील परिमेय संख्या. सर्वसाधारणपणे, असंख्य परिमेय संख्या असतात दिलेल्या कोणत्याही दोन परिमेय संख्यांमधील संख्या.

चला पुन्हा संख्यारेषेवर एक नजर टाकूया. तुम्ही सर्व संख्या उचलल्या आहेत का? अजून नाही. खरं तर, त्या संख्येवर अजून असंख्य संख्या शिल्लक आहेत. रेषा! तुम्ही निवडलेल्या संख्यांच्या जागांमध्ये अंतर आहे, आणि फक्त नाही एक किंवा दोन पण अनंत अनेक. आश्चर्यकारक गोष्ट अशी आहे की अनंत अनेक आहेत या दोन्ही अंतरांमधील संख्या देखील!

म्हणून आपल्याकडे खालील प्रश्न शिल्लक आहेत:

१. संख्येवर कोणते अंक शिल्लक आहेत? ओळ, म्हणतात?

२. आपण त्यांना कसे ओळखावे? म्हणजेच, आपण कसे ओळखावे त्यांना तर्कसंगत (तर्कसंगत) पासून वेगळे करा संख्या)?

या प्रश्नांची उत्तरे पुढील भागात दिली जातील.

सराव १.१

१. शून्य ही परिमेय संख्या आहे का? तुम्ही ती खालील स्वरूपात लिहू शकाल का? $\frac{p}{\text{प्रश्न}}$, जिथे p आणि q पूर्णांक आहेत आणि q ≠ 0?

२. ३ आणि ४ मधील सहा परिमेय संख्या शोधा.

३ ३. ५ मधील पाच परिमेय संख्या शोधा. — आणि $\frac{४}{५}$.

४. खालील विधाने खरी आहेत की खोटी ते सांगा. तुमच्या उत्तरांची कारणे द्या.

(i) प्रत्येक नैसर्गिक संख्या ही एक पूर्णांक संख्या असते. (ii) प्रत्येक पूर्णांक ही एक पूर्णांक संख्या असते. (iii) प्रत्येक परिमेय संख्या ही एक पूर्णांक संख्या असते.

१.२ अपरिमेय संख्या

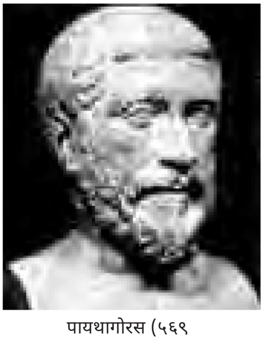
आपण मागील भागात पाहिले की संख्यारेषेवर अशा संख्या असू शकतात ज्या परिमेय नाहीत. या भागात आपण या संख्यांचा शोध घेणार आहोत. आतापर्यंत, सर्व

तुम्हाला आढळलेल्या संख्या p या स्वरूपात आहेत. $\frac{}{\text{प्रश्न}}$, जिथे p आणि q पूर्णांक आहेत

आणि q ≠ 0. तर, तुम्ही विचाराल: अशा संख्या आहेत का ज्या या स्वरूपात नाहीत? खरोखर अशा संख्या आहेत.

ग्रीसमधील पायथागोरियन, प्रसिद्ध गणितज्ञ आणि तत्वज्ञानी पायथागोरसचे अनुयायी, यांनी ४०० ईसापूर्व, परिमेय नसलेल्या संख्या शोधणारे पहिले होते. या संख्यांना अपरिमेय संख्या (अपरिमेय) म्हणतात, कारण त्या पूर्णांकांच्या गुणोत्तराच्या स्वरूपात लिहिता येत नाहीत. पायथागोरियन, क्रोटनच्या हिप्पाकसने अपरिमेय संख्यांच्या शोधाभोवती अनेक मिथके आहेत. सर्व मिथकांमध्ये, हिप्पाकसला एक

दुर्दैवी अंत, एकतर २ हे अतार्किक आहे हे शोधल्याबद्दल किंवा २ बद्दलचे $\sqrt{}$ रहस्य गुप्त पायथागोरियन पंथाबाहेरील लोकांना उघड केल्याबद्दल! $\sqrt{}$



पायथागोरस (५६९ ईसापूर्व - ४७९ ईसापूर्व)

आकृती १.३

चला या संख्यांची औपचारिक व्याख्या करूया.

जर 's' संख्या p या स्वरूपात लिहिता येत नसेल तर तिला अपरिमेय म्हणतात . $\frac{}{\text{प्रश्न}}$, जिथे पी आणि q हे पूर्णांक आहेत आणि q ≠ 0 आहेत.

तुम्हाला आधीच माहित आहे की अमर्यादित असंख्य परिमेय संख्या आहेत. असे दिसून आले की अमर्यादित असंख्य अपरिमेय संख्या देखील आहेत. काही उदाहरणे अशी आहेत:

$\sqrt{२}$, $३\sqrt{१५}$, $\sqrt{}$ाय, ०.१०११०१११०११११०...

टिप्पणी : जेव्हा आपण संख्येचे धन वर्गमूळ हे चिन्ह वापरतो तेव्हा लक्षात ठेवा. तर ४ = २, जरी $\sqrt{}$, आपण असे गृहीत धरतो की ते २ आणि –२ दोन्ही ४ चे वर्गमूळ आहेत. $\sqrt{}$

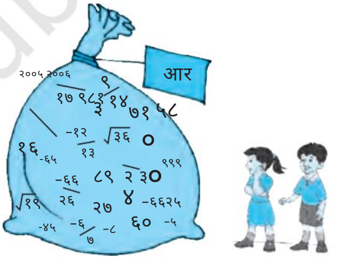
वर सूचीबद्ध केलेल्या काही अपरिमेय संख्या तुम्हाला परिचित आहेत. उदाहरणार्थ, तुम्ही वर सूचीबद्ध केलेल्या अनेक वर्गमूळांना आणि π संख्यांना आधीच पाहिले आहे.

पायथागोरियन लोकांनी सिद्ध केले की २ अपरिमेय $\sqrt{}$ आहे. नंतर सुमारे ४२५ ईसापूर्व, सायरेनच्या थियोडोरसने दाखवून दिले की ३, ५, ६, ७, १०, ११, १२, १३, १४, १५ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$

आणि $\sqrt{१७}$ हे देखील अपरिमेय आहेत. २ च्या अपरिमेयतेचे पुरावे , ज्याची चर्चा दहावीच्या $\sqrt{}$ $\sqrt{३}$, $\sqrt{}$, इत्यादी, ५ असतील वर्गात केली आहे. π बद्दल , ते हजारो वर्षांपासून विविध संस्कृतींना ज्ञात होते, ते १७०० च्या उत्तरार्धातच लॅम्बर्ट आणि लेजेंड्रे यांनी अपरिमेय असल्याचे सिद्ध केले.

पुढील भागात, आपण 0.10110111011110... आणि π अपरिमेय का आहेत यावर चर्चा करू.

मागील भागाच्या शेवटी उपस्थित केलेल्या प्रश्नांकडे परत जाऊया. परिमेय संख्यांची पिशवी आठवा. जर आपण आता सर्व अपरिमेय संख्या पिशवीत टाकल्या तर संख्यारेषेवर काही संख्या शिल्लक राहील का? उत्तर नाही आहे! असे दिसून आले की संग्रह



सर्व परिमेय संख्या आणि अपरिमेय संख्या एकत्रितपणे मिळून आपण वास्तव संख्यांचा संग्रह बनवतो , जो R ने दर्शविला जातो. म्हणून, वास्तव संख्या परिमेय किंवा अपरिमेय असते. म्हणून, आपण असे म्हणू शकतो की प्रत्येक वास्तव संख्या संख्यारेषेवरील एका अद्वितीय बिंदूने दर्शविली जाते. तसेच, संख्यारेषेवरील प्रत्येक बिंदू एक अद्वितीय वास्तव संख्या दर्शवितो.

म्हणूनच आपण संख्यारेषेला, वास्तविक संख्यारेषा म्हणतो.

आर. डेडेकिंड (१८३१-१९१६)

आकृती १.४

१८७० च्या दशकात कॅन्टर आणि डेडेकिंड या दोन जर्मन गणितज्ञांनी हे दाखवून दिले की: प्रत्येक वास्तव संख्येशी संबंधित, वास्तव संख्यारेषेवर एक बिंदू असतो आणि संख्यारेषेवरील प्रत्येक बिंदूशी संबंधित, एक अद्वितीय वास्तव संख्या असते.

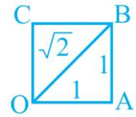
जी. कॅन्टर (१८४५-१९१८)

आकृती १.५

संख्यारेषेवर काही अपरिमेय संख्या कशा शोधता येतील ते पाहू.

उदाहरण ३ : संख्यारेषेवर २ शोधा$\sqrt{\ }$

उपाय: ग्रीक लोकांनी कसे शोधले असेल हे पाहणे सोपे आहे

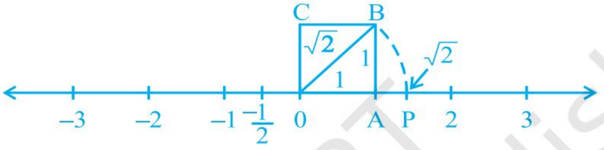


आकृती १.६

$\sqrt{२}$. प्रत्येक बाजूची लांबी १ युनिट असेल अशा चौरस OABC चा विचार करा (पहा आकृती १.६). मग पायथागोरसच्या प्रमेयावरून तुम्ही पाहू शकता की

ओबी = $\sqrt{१^2 \ _२ + १}$ $\sqrt{२}$. संख्यारेषेवर आपण २ कसे दर्शवू ?$\sqrt{\ }$

हे सोपे आहे. आकृती १.६ संख्यारेषेवर स्थानांतरित करा आणि शिरोबिंदू O आहे याची खात्री करा. शून्याशी जुळते (आकृती १.७ पहा).



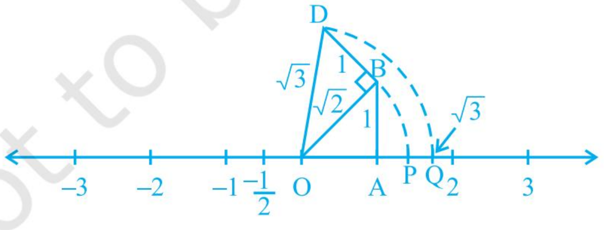
आकृती १.७

आपण आत्ताच पाहिले की OB = 2. केंद्र O$\sqrt{\ }$आणि त्रिज्या OB असलेल्या होकायंत्राचा वापर करून,

बिंदू P वर संख्यारेषेला छेदणारा चाप काढा. नंतर P हा बिंदू 2 शी संबंधित असेल. $\sqrt{\ }$
संख्यारेषा.

उदाहरण ४ : संख्यारेषेवर ३ शोधा$\sqrt{\ }$

उपाय: आकृती १.७ वर परत जाऊया.



आकृती १.८

(आकृती १.८ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे) OB ला लंब असलेल्या युनिट लांबीचा BD तयार करा. नंतर

पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार, आपल्याला दिसते की OD = ($\sqrt{\sqrt{२}_{)२} + १^{२}}$ $\sqrt{३}$. कंपास वापरून,

केंद्र O आणि त्रिज्या OD घेऊन, बिंदू Q वर संख्यारेषेला छेदणारा कंस काढा.

मग Q हा 3 शी संबंधित आहे . $\sqrt{\ }$

Machine Translated by Google

त्याच प्रकारे, तुम्ही शोधू शकता $\sqrt{\text{एन}}$ कोणत्याही धन पूर्णांक n साठी, n – 1 नंतर $\sqrt{}$ स्थित.

सराव १.२

१. खालील विधाने खरी आहेत की खोटी ते सांगा. तुमच्या उत्तरांचे समर्थन करा.

(i) प्रत्येक अपरिमेय संख्या ही एक वास्तव संख्या असते.

(ii) संख्यारेषेवरील प्रत्येक बिंदू m या स्वरूपात आहे. $\sqrt{}$, जिथे m ही एक नैसर्गिक संख्या आहे.

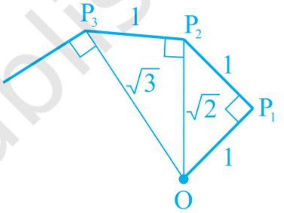
(iii) प्रत्येक वास्तव संख्या ही एक अपरिमेय संख्या असते.

२. सर्व धन पूर्णांकांची वर्गमूळे अपरिमेय असतात का? जर नसतील तर उदाहरण द्या. परिमेय संख्या असलेल्या संख्येचे वर्गमूळ.

३. संख्यारेषेवर ५ कसे द$\sqrt{}$खवता येते ते दाखवा .

४. वर्गातील क्रियाकलाप ('वर्गमूळ सर्पिल' तयार करणे): कागदाचा एक मोठा पत्रा घ्या आणि 'वर्गमूळ सर्पिल' खालील पद्धतीने तयार करा. बिंदू O ने सुरुवात करा आणि एकक लांबीचा OP1 रेषाखंड काढा . एकक लांबीच्या OP1 ला लंब असलेला रेषाखंड P1 P2 काढा (आकृती १.९ पहा). आता OP2 ला लंब असलेला रेषाखंड P2 P3 काढा. नंतर OP3 ला लंब असलेला रेषाखंड P3 P4 काढा. या पद्धतीने पुढे चालू ठेवताना, OPn–1 ला लंब असलेला एकक लांबीचा रेषाखंड काढून तुम्ही Pn–1Pn रेषाखंड मिळवू शकता . अशा प्रकारे, तुम्ही P2 , P3 ,...., Pn ,... हे बिंदू तयार केले असतील आणि त्यांना जोडून २, ३, ४, ... दर्शविणारा एक सुंदर सर्पिल तयार कराल.

$\sqrt{}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$



आकृती १.९ : वर्गमूळ सर्पिल तयार करणे

१.३ वास्तव संख्या आणि त्यांचे दशांश विस्तार

या भागात, आपण परिमेय आणि अपरिमेय संख्यांचा अभ्यास वेगळ्या दृष्टिकोनातून करणार आहोत. आपण वास्तविक संख्यांचे दशांश विस्तार पाहू आणि परिमेय आणि अपरिमेय यांच्यातील फरक ओळखण्यासाठी विस्तारांचा वापर करू शकतो का ते पाहू. आपण संख्यारेषेवरील वास्तविक संख्यांचे दशांश विस्तार वापरून प्रतिनिधित्व कसे दृश्यमान करायचे ते देखील स्पष्ट करू. परिमेय आपल्याला अधिक परिचित असल्याने, आपण सुरुवात करूया

त्यांना. चला तीन उदाहरणे घेऊ: $\frac{१०}{३}, \frac{७}{८}, \frac{१}{७}$.

उर्वरित भागांकडे विशेष लक्ष द्या आणि तुम्हाला काही नमुना सापडतो का ते पहा.

Machine Translated by Google

उदाहरण ५ : चे दशांश विस्तार शोधा $\frac{१०}{३}$, $\frac{७}{८}$ आणि $\frac{१}{७}$.

उपाय:

```
      ३.३३३...            ०.८७५            ०.१४२८५७...
३ | १०               ८ | ७.०           ७ | १.०
    ९                    ६४                ७
    १०                   ६०                ३०
    ९                    ५६                २८
    १०                   ४०                २०
    ९                    ४०                १४
    १०                   ०                 ६०
    ९                                      ५६
    १                                      ४०
                                           ३५
                                           ५०
                                           ४९
                                           १
```

उर्वरित : १, १, १, १, १... उर्वरित : ६, ४, ० विभाजक : ३ विभाजक : ८

उर्वरित: ३, २, ६, ४, ५, १,
३, २, ६, ४, ५, १,...
विभाजक : ७

तुम्हाला काय लक्षात आले आहे? तुम्हाला कमीत कमी तीन गोष्टी लक्षात यायला हव्या होत्या:

(i) एका विशिष्ट टप्प्यानंतर उर्वरित एकतर 0 होतात किंवा स्वतःची पुनरावृत्ती करू लागतात.

(ii) पुनरावृत्ती होणाऱ्या शेषांच्या स्ट्रिंगमधील नोंदींची संख्या विभाजकापेक्षा कमी आहे.

(एका संख्येत पुनरावृत्ती होते आणि विभाजक ३ असतो, मध्ये $\frac{१०}{३}$ $\frac{१}{७}$ सहा नोंदी आहेत.

(रिपीटिंग स्ट्रिंगमध्ये 326451 आणि 7 हा विभाजक आहे).

(iii) जर उर्वरित भाग पुनरावृत्ती होत असतील, तर आपल्याला भागफलामध्ये अंकांचा पुनरावृत्ती होणारा ब्लॉक मिळेल.

(च्या साठी $\frac{१०}{३}$, भागफलात आणि ७ साठी ३ पुनरावृत्ती $\frac{१}{}$, आपल्याला रिपीटिंग ब्लॉक १४२८५७ मिळतो.

भागफलात).

जरी आपण फक्त वरील उदाहरणे वापरून हा नमुना लक्षात घेतला असला तरी, तो सर्वांसाठी खरा आहे

फॉर्म p चे तर्क $\frac{}{\text{प्रश्न}}$ (q ≠0). p ला q ने भागल्यावर , दोन मुख्य गोष्टी घडतात - एकतर

उर्वरित शून्य होते किंवा कधीही शून्य होत नाही आणि आपल्याला पुनरावृत्ती होणारी स्ट्रिंग मिळते उर्वरित भाग. आपण प्रत्येक प्रकरण स्वतंत्रपणे पाहू.

केस (i): उर्वरित शून्य होते

८ च्या उदाहरणात $\frac{७}{}$, आम्हाला आढळले की काही पायऱ्यांनंतर उर्वरित शून्य होते आणि

= ०.८७५ चा दशांश विस्तार. इतर उदाहरणे $\frac{७}{८}$ आहेत. $\frac{१}{२}$ = ०.५, = $\frac{६३९}{२५०}$ २.५५६. एकूण

या प्रकरणांमध्ये, दशांश विस्तार मर्यादित संख्येच्या चरणांनंतर संपतो किंवा संपतो. अशा संख्यांच्या दशांश विस्ताराला आपण समाप्ती म्हणतो.

केस (ii): उर्वरित कधीही शून्य होत नाही

च्या उदाहरणांमध्ये $\frac{१०}{३}$ आणि $\frac{१}{७}$, आपल्याला लक्षात येते की उर्वरित भाग एका विशिष्ट नंतर पुनरावृत्ती होतात

दशांश विस्तार कायमचा चालू राहण्यास भाग पाडणारा टप्पा. दुसऱ्या शब्दांत, आपल्याकडे एक आहे भागफलातील अंकांचे पुनरावृत्ती होणारे ब्लॉक. आपण म्हणतो की हा विस्तार अ-समाप्त आहे

आवर्ती. उदाहरणार्थ, = ३.३३३३... आणि $\frac{१०}{३}$ ७ $\frac{१}{}$ = ०.१४२८५७१४२८५७१४२८५७...

भागफलात 3 पुनरावृत्ती होतात हे दाखवण्याची नेहमीची पद्धत $\frac{१०}{३}$ ते $३.\overline{३}$ असे लिहायचे आहे .

त्याचप्रमाणे, १४२८५७ अंकांचा ब्लॉक ७ च्या भागफलात पुनरावृत्ती होत असल्याने $\frac{१}{}$, आपण ७ लिहितो. $\frac{१}{}$ म्हणून

$०.\overline{१४२८५७}$, जिथे अंकांवरील पट्टी पुनरावृत्ती होणाऱ्या अंकांच्या ब्लॉकला दर्शवते.

तसेच ३.५७२७२... हे $३.५\overline{७२}$ असे लिहिता येते . तर, ही सर्व उदाहरणे आपल्याला नॉन-टर्मिनेटिंग देतात आवर्ती (पुनरावृत्ती) दशांश विस्तार.

अशाप्रकारे, आपल्याला दिसते की परिमेय संख्यांच्या दशांश विस्ताराला फक्त दोनच पर्याय आहेत: ते एकतर समाप्त होत आहेत किंवा नॉन-टर्मिनेटिंग आवर्ती आहेत.

आता समजा, दुसरीकडे, संख्यारेषेवरून चालताना तुम्हाला एक ३.१४२६७८ सारखी संख्या ज्याचा दशांश विस्तार संपत आहे किंवा सारखी संख्या १.२७२७२७... म्हणजेच $१.\overline{२७}$ हा एक , ज्याचा दशांश विस्तार अ-समाप्त आवर्ती आहे, तो करू शकतो परिमेय क्रमांक आहे असा निष्कर्ष काढता का? उत्तर हो आहे!

आम्ही ते सिद्ध करणार नाही परंतु काही उदाहरणांसह हे तथ्य स्पष्ट करणार आहोत. समाप्ती प्रकरणे सोपे आहेत.

उदाहरण ६ : ३.१४२६७८ ही परिमेय संख्या आहे हे दाखवा. दुसऱ्या शब्दांत, ३.१४२६७८ व्यक्त करा.

p या स्वरूपात — , जिथे p आणि q पूर्णांक आहेत आणि q ≠ 0 आहे.
प्रश्न

उकल: आपल्याकडे 3.142678 = $\frac{३१४२६७८}{१०००००००}$ आहे, आणि म्हणून ती एक ~~परिमेय संख्या~~ आहे.

आता, दशांश विस्तार नॉन-टर्मिनेटिंग रिकरिंग असतानाच्या केसचा विचार करूया.

उदाहरण ७: ०.३३३३... = ०$.\overline{३}$. हे p या स्वरूपात व्यक्त करता येते हे दाखवा. — , जिथे p आणि
प्रश्न

q हे पूर्णांक आहेत आणि q ≠ 0 आहेत.

उपाय: आपल्याला ०$.\overline{३}$. म्हणजे काय हे माहित नसल्याने , चला त्याला 'x' म्हणूया आणि म्हणून

x = ०.३३३३...

आता इथेच युक्ती कामी येते. बघा

१० x = १० × (०.३३३...) = ३.३३३...

आता, ३.३३३३... = ३ + x, कारण x = ०.३३३३...

म्हणून, १० x = ३ + x

x साठी सोडवताना , आपल्याला मिळते

९x = ३, म्हणजे, x = $\frac{१}{३}$

उदाहरण ८: दाखवा की १.२७२७२७... = १$.\overline{२७}$. p या स्वरूपात व्यक्त करता येते — , जिथे पी
प्रश्न

आणि q हे पूर्णांक आहेत आणि q ≠ 0 आहेत.

उकल: समजा x = 1.272727... दोन अंक पुनरावृत्ती होत असल्याने, आपण x ला 100 ने गुणू शकतो जेणेकरून मिळवा

१०० x = १२७.२७२७...

तर, १०० x = १२६ + १.२७२७२७... = १२६ + x

म्हणून, 100 x – x = 126, म्हणजे, 99 x = 126

म्हणजेच, $x = \frac{१२६}{९९} = \frac{१४}{११}$

तुम्ही उलट तपासू शकता की $\frac{१४}{११} = १.\overline{२७}$.

उदाहरण ९: ०.२३५३५३५... = $०.२\overline{३५}$. या स्वरूपात व्यक्त करता येते हे दाखवा . $\frac{पी}{प्रश्न}$,

जिथे p आणि q पूर्णांक आहेत आणि q ≠0 आहे.

उकल: समजा $x = 0.2\overline{35}$. येथे, लक्षात घ्या की 2 पुनरावृत्ती होत नाही, परंतु ब्लॉक 35 पुनरावृत्ती होते. दोन अंक पुनरावृत्ती होत असल्याने, आपण x ला 100 ने **गुणाकार करून**

$$१०० x = २३.५३५३५...$$

तर, $१०० x = २३.३ + ०.२३५३५... = २३.३ + x$

म्हणून, $९९ x = २३.३$

म्हणजेच, $९९ x = \frac{२३३}{१०}$, जे $x = \frac{२३३}{990}$ देते

तुम्ही उलट देखील तपासू शकता की $\frac{२३३}{९९०} = ०.२\overline{३५}$.

म्हणून, नॉन-टर्मिनेटिंग रिकरिंग दशांश विस्तार असलेली प्रत्येक संख्या व्यक्त करता येते

p या स्वरूपात $\frac{}{प्रश्न}$ (q ≠0), जिथे p आणि q पूर्णांक आहेत. चला आपले निकाल सारांशित करूया

खालील फॉर्म:

परिमेय संख्येचा दशांश विस्तार एकतर समाप्ती किंवा अ-समाप्ती आवर्ती असतो. शिवाय, ज्या संख्येचा दशांश विस्तार

समाप्त करणे किंवा न समाप्त करणे आवर्ती तर्कसंगत आहे.

तर, आता आपल्याला माहित आहे की परिमेय संख्येचा दशांश विस्तार काय असू शकतो.
अपरिमेय संख्यांच्या दशांश विस्ताराबद्दल? वरील गुणधर्मामुळे,
आपण असा निष्कर्ष काढू शकतो की त्यांचे दशांश विस्तार हे नॉन-टर्मिनेटिंग नॉन-रिकरिंग आहेत.

तर, अपरिमेय संख्यांसाठीचा गुणधर्म, परिमेय संख्यांसाठी वर नमूद केलेल्या गुणधर्मासारखाच
संख्या, आहे

अपरिमेय संख्येचा दशांश विस्तार हा अ-समाप्त, अ-आवर्ती असतो.
शिवाय, ज्या संख्येचा दशांश विस्तार अ-समाप्त आहे तो आवर्ती नाही
तर्कहीन आहे.

मागील विभागातील s = 0.10110111011110... आठवा . लक्षात घ्या की ते अ-समाप्त आणि अ-आवर्ती आहे. म्हणून, वरील गुणधर्मावरून, ते अपरिमेय आहे.

शिवाय, लक्षात घ्या की तुम्ही s सारखे असीम असंख्य अपरिमेय संख्या निर्माण करू शकता .

प्रसिद्ध अपरिमेय संख्या 2 आणि π बद्दल काय? येथे त्यांचे √ दशांश विस्तार आहेत एका विशिष्ट टप्प्यापर्यंत.

$\sqrt{२}$ = १.४१४२१३५६२३७३०९५०४८८०१६८८७२४२०९६...

पाय = ३.१४१५९२६५३५८९७९३२३८४६२६४३३८३२७९५०...

(लक्षात ठेवा, आपण अनेकदा घेतो $\frac{२२}{७}$ π साठी अंदाजे मूल्य म्हणून , परंतु π ≠ $\frac{२२}{७}$.)

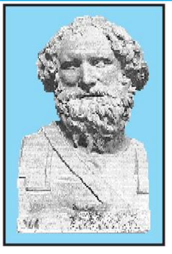
गेल्या काही वर्षांत, गणितज्ञांनी अधिक उत्पादन करण्यासाठी विविध तंत्रे विकसित केली आहेत आणि अपरिमेय संख्यांच्या दशांश विस्तारात अधिक अंक. उदाहरणार्थ, तुम्ही भागाकार पद्धतीने 2 च्या दशांश विस्तारात अंक शोधणे शिकले असेल . √

मनोरंजक गोष्ट म्हणजे, वैदिक काळातील गणितीय ग्रंथ सुल्भासूत्रांमध्ये (जीवांचे नियम) कालावधी (800 BC - 500 BC), तुम्हाला खालीलप्रमाणे 2 चे अंदाजे मूल्य मिळेल : √

√ − २ = १ १ १ १ + + × १ × × २ = २ ४ १ ४ २ १ ५.६
३ ४ ३ ३४ ४ ३

लक्षात घ्या की पहिल्या पाच दशांश स्थानांसाठी ते वर दिलेल्या क्रमांकासारखेच आहे. π च्या दशांश विस्तारात अंकांच्या शोधाशोधाचा इतिहास खूप मनोरंजक आहे.

ग्रीक प्रतिभाशाली आर्किमिडीजने गणना करणारे पहिले होते π च्या दशांश विस्तारातील अंक . त्याने 3.140845 दाखवले < π < ३.१४२८५७. आर्यभट्ट (476 - 550 CE), महान भारतीय गणितज्ञ आणि खगोलशास्त्रज्ञांना मूल्य सापडले π चा चार दशांश स्थानांपर्यंत बरोबर (३.१४१६). उच्च वापरणे वेगवान संगणक आणि प्रगत अल्गोरिदम, π केले गेले आहे १.२४ ट्रिलियन दशांश स्थानांवर गणना केली!



आर्किमिडीज (२८७ ईसापूर्व - २१२ ईसापूर्व)

आकृती १.१०

आता, अपरिमेय संख्या कशा मिळवायच्या ते पाहू.

उदाहरण १० : ७ मधील अपरिमेय संख्या शोधा. $\frac{१}{}$ आणि $\frac{२}{}$. ७

उपाय: आपण पाहिले की $\frac{१}{७}$ = ०$\overline{१४२८५७}$ . . तर, तुम्ही सहजपणे गणना करू शकता $\frac{२}{७}$ = ०.$\overline{२८५७१४}$.

दरम्यान एक अपरिमेय संख्या शोधण्यासाठी $\frac{१}{७}$ आणि $\frac{२}{७}$, आपल्याला एक संख्या सापडते जी

त्यांच्यामध्ये नॉन-टर्मिनेटिंग नॉन-रिकरिंग. अर्थात, तुम्हाला अनंतपणे सापडेल
अशा अनेक संख्या.

अशा संख्येचे उदाहरण म्हणजे ०.१५०१५००१५०००१५०००...

सराव १.३

१. खालील दशांश स्वरूपात लिहा आणि प्रत्येक दशांश विस्तार कोणत्या प्रकारचा आहे ते सांगा.
आहे:

(मी) $\frac{३६}{१००}$ (ii) $\frac{१}{११}$ (३) $४\frac{१}{८}$

(iv) $\frac{३}{१३}$ (मध्ये) $\frac{२}{११}$ (आम्ही) $\frac{३२९}{४००}$

२. तुम्हाला माहिती आहे = $\frac{१}{७}$ = $०.\overline{१४२८५७}$. $\frac{२}{७}, \frac{३}{७}, \frac{४}{७}, \frac{५}{७}, \frac{६}{७}$. ७ चे दशांश विस्तार किती असतील याचा अंदाज तुम्ही लावू शकता का? प्रत्यक्षात लांब भागाकार न करता? जर असेल तर कसे?

[सूचना: उर्वरित भागांचा अभ्यास करा आणि त्यांची किंमत काळजीपूर्वक शोधा.] $\frac{१}{७}$

३. खालील गोष्टी p या स्वरूपात व्यक्त करा . $\frac{p}{q}$, जिथे p आणि q पूर्णांक आहेत आणि q ≠ 0 आहे.

(i) $०.\overline{६}$ (ii) $०.४\overline{७}$ (iii) $०.\overline{००१}$

४. एक्सप्रेस ०.९९९९.... p या स्वरूपात $\frac{p}{q}$. तुमच्या उत्तराने तुम्हाला आश्चर्य वाटले का? तुमच्या
शिक्षक आणि वर्गमित्र उत्तर का अर्थपूर्ण आहे यावर चर्चा करतात.

५. अंकांच्या पुनरावृत्ती ब्लॉकमध्ये जास्तीत जास्त किती अंक असू शकतात?
$\frac{१}{१७}$ चे दशांश विस्तार ? तुमचे उत्तर तपासण्यासाठी भागाकार करा.

६. p या स्वरूपात परिमेय संख्यांची अनेक उदाहरणे पहा. $\frac{p}{q}$ (q ≠ 0), जिथे p आणि q आहेत
१ व्यतिरिक्त कोणतेही सामान्य घटक नसलेले आणि दशांश समाप्त करणारे पूर्णांक
प्रतिनिधित्व (विस्तार). तुम्ही अंदाज लावू शकता का की q कोणत्या गुणधर्माचे समाधान करेल?

७. ज्यांचे दशांश विस्तार अ-समाप्ती-अ-आवर्ती आहेत अशा तीन संख्या लिहा.

८. परिमेय संख्यांमधील तीन वेगवेगळ्या अपरिमेय संख्या शोधा. $\frac{५}{७}$ आणि $\frac{९}{११}$.

९. खालील संख्यांचे परिमेय किंवा अपरिमेय असे वर्गीकरण करा:

(मी) $\sqrt{२३}$ (ii) $\sqrt{२२५}$ (iii) ०.३७९६

(iv) ७.४७८४७८... (मध्ये) १.१०१००१०००१००००१...

१.४ वास्तविक संख्यांवरील क्रिया

तुम्ही मागील वर्गांमध्ये शिकलात की परिमेय संख्या परिवर्तनीयतेचे समाधान करतात, बेरीज आणि गुणाकारासाठी सहचर आणि वितरणात्मक नियम. शिवाय, जर आपण बेरीज केली तर, दोन परिमेय संख्या वजा करा, गुणाकार करा किंवा भागाकार करा (शून्य वगळता), तरीही आपल्याला परिमेय मिळते संख्या (म्हणजेच, परिमेय संख्या बेरीज, वजाबाकीच्या बाबतीत 'बंद' असतात, गुणाकार आणि भागाकार). असे दिसून आले की अपरिमेय संख्या देखील बेरीज आणि गुणाकारासाठी परिवर्तनीय, सहचर आणि वितरणात्मक नियम. तथापि, अपरिमेय संख्यांची बेरीज, फरक, भागाकार आणि गुणाकार नेहमीच नसतात

अपरिमेय. उदाहरणार्थ, (6) + −( ) ,(2) − ( ),( ) ($\sqrt{६}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{२}$ $\sqrt{३}$ $\sqrt{३}$) आणि $\frac{\sqrt{१७}}{\sqrt{१७}}$ आहेत तर्कसंगत.

जेव्हा आपण एका परिमेय संख्येची बेरीज करतो आणि गुणाकार करतो तेव्हा काय होते ते पाहूया. अपरिमेय संख्या. उदाहरणार्थ, ३ अपरिमेय आहे. २ ३ + आणि २ ३ बद्दल काय ? कारण $\sqrt{}$ $\sqrt{}$

$\sqrt{३}$ मध्ये नॉन-टर्मिनेटिंग नॉन-रिकरिंग दशांश विस्तार आहे, हेच खरे आहे

२ ३ + आणि २ ३. म्हणून $\sqrt{२}$ आणि २ ३ दोन्हीही अपरिमेय संख्या आहेत $\sqrt{}$ $\sqrt{}$

उदाहरण ११ : ७ ५ आहे का ते तपासा $\sqrt{}$, $\frac{७}{\sqrt{५}}$, $+\sqrt{२}$ २१ २ , अपरिमेय संख्या आहेत किंवा नाही.

ऊत्तराची: ५ = २.२३६... , २ = १.४१४२..., π = ३.१४१५...

मग ७ ५ = १५.६५२..., $\frac{७}{\sqrt{५}} = \frac{७\sqrt{५}}{\sqrt{५}\sqrt{५}} = \frac{७\sqrt{५}}{५}$ = ३.१३०४...

$\sqrt{2}$ + 21 = 22.4142..., π − 2 = 1.1415...

हे सर्व नॉन-टर्मिनेटिंग नॉन-रिकिरिंग दशांश आहेत. म्हणून, या सर्व अपरिमेय संख्या आहेत.

आता, जर आपण बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार, घेतले तर साधारणपणे काय होते ते पाहूया या अपरिमेय संख्यांचे वर्गमूळ आणि सम nवे मुळे, जिथे n ही कोणतीही नैसर्गिक संख्या. चला काही उदाहरणे पाहू.

उदाहरण १२ : २ २ ५ ३ + आणि २ ३ ३ जोडा – $\sqrt{}$ $\sqrt{}$.

उकल : (२ २ ५ ३ +(+)) = (२ २ + ३) (३ ३ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{२}$ ५ ३ ३ ३ $\sqrt{}$)

= (२ + १) २ (५ ३) ३ + ३ २ २ ३ $\sqrt{}$ = $\sqrt{}$ + $\sqrt{}$

उदाहरण १३ : ६ ५ ला २ ५ ने गुणा . √ √

उकल : ६ ५ × २ ५ = √६ × २ × ५ × √५ = १२ × ५ = ६० √ √

उदाहरण १४: ८ १५ ला २ ३ ने भागा . √ √

उपाय: ८ √१ २ ३ ÷ √ = $\frac{८ \sqrt{३} ५ \times \sqrt{}}{२ \sqrt{३}}$ = ४ √५ √

या उदाहरणांवरून तुम्हाला खालील तथ्ये अपेक्षित वाटू शकतात, जी खरी आहेत:

(i) परिमेय संख्या आणि अपरिमेय संख्येची बेरीज किंवा फरक अपरिमेय आहे.

(ii) अपरिमेय संख्येसह शून्य नसलेल्या परिमेय संख्येचा गुणाकार किंवा भागफल आहे तर्कहीन.

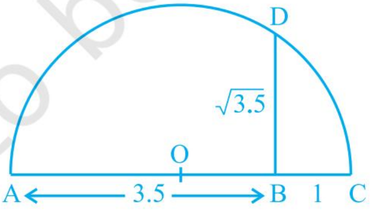
(iii) जर आपण दोन अपरिमेय संख्या जोडल्या, वजा केल्या, गुणाकार केल्या किंवा भागल्या तर परिणाम परिमेय असू शकतो किंवा तर्कहीन.

आता आपण आपले लक्ष वास्तविक संख्यांचे वर्गमूळ काढण्याच्या क्रियेकडे वळवू. लक्षात ठेवा की, जर a ही नैसर्गिक संख्या असेल, तर ab = म्हणजे b √ २ = a आणि b > 0. समान सकारात्मक वास्तव संख्यांसाठी व्याख्या वाढवता येते.

समजा a > 0 ही वास्तव संख्या आहे. मग √अ = b म्हणजे b २ = अ आणि ब > ०.

विभाग १.२ मध्ये, आपण संख्येवरील कोणत्याही धन पूर्णांक n साठी √n कसे दर्शवायचे ते पाहिले. रेषा. आता आपण कोणत्याही दिलेल्या धन वास्तव संख्येचा √x भौमितिक पद्धतीने कसा शोधायचा ते दाखवू .

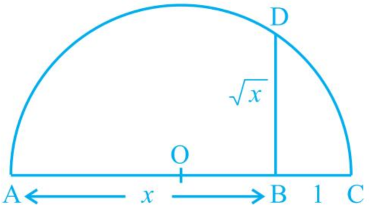
उदाहरणार्थ, आपण ते x = 3.5 साठी शोधू, म्हणजेच, आपल्याला भौमितिकदृष्ट्या 3 5. √ सापडतो.



आकृती १.११

दिलेल्या रेषेवर एका निश्चित बिंदू A पासून 3.5 एकक अंतर चिन्हांकित करा जेणेकरून बिंदू B मिळेल. AB = 3.5 एकके (आकृती 1.11 पहा). B पासून 1 एककाचे अंतर काढा आणि नवीन बिंदू C म्हणून काढा. AC चा मध्यबिंदू शोधा आणि तो बिंदू O म्हणून चिन्हांकित करा. अर्धवर्तुळ काढा. केंद्र O आणि त्रिज्या OC घेऊन. B मधून जाणारी AC ला लंब असलेली रेषा काढा आणि अर्धवर्तुळाला D वर छेदणे. नंतर, BD = 3.5 √ .

अधिक सामान्यतः, कोणत्याही सकारात्मक वास्तवासाठी x शोधण्यासाठी $\sqrt{x}$ संख्या x, आपण B चिन्हांकित करू जेणेकरून AB = x एकके, आणि, जसे की आकृती १.१२ मध्ये, C असे चिन्हांकित करा की BC = १ एकक. मग, जसे आपण केस x = 3.5 साठी केले आहे, आपल्याला BD = $\sqrt{x}$ आढळते (आकृती १.१२ पहा). आपण हे निष्कर्ष खालील सूत्र वापरून सिद्ध करू शकतो. पायथागोरियन प्रमेय.



आकृती १.१२

लक्षात घ्या की, आकृती १.१२ मध्ये, $\triangle$ OBD हा एक काटकोन त्रिकोण आहे. तसेच, वर्तुळाची त्रिज्या आहे $\frac{x+1}{2}$ युनिट्स.

म्हणून, OC = OD = OA = $\frac{x+1}{2}$ युनिट्स.

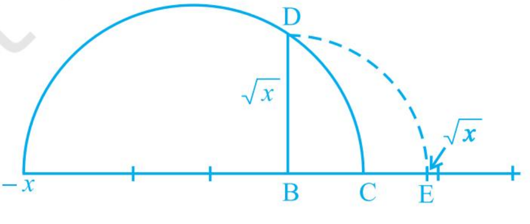
आता, OB = $x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$

तर, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार, आपल्याकडे आहे

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x.$$

हे दर्शविते की BD = $\sqrt{x}$.

हे बांधकाम आपल्याला ते दाखवण्याचा एक दृश्यमान आणि भौमितिक मार्ग देते $\sqrt{x}$ साठी अस्तित्वात आहे सर्व वास्तव संख्या x > 0. जर तुम्हाला संख्यारेषेवरील $\sqrt{x}$ चे स्थान जाणून घ्यायचे असेल, तर आपण रेषा BC ला संख्यारेषा मानू, B ला शून्य, C ला 1, इत्यादी. संख्यारेषेला E मध्ये छेदणारा केंद्र B आणि त्रिज्या BD असलेला कंस काढा. (आकृती १.१३ पहा). नंतर, E हा $\sqrt{x}$ दर्शवतो.



आकृती १.१३

आता आपण वर्गमूळांची कल्पना घनमूळ, चौथ्या मुळांपर्यंत वाढवू इच्छितो, आणि सर्वसाधारणपणे n व्या मुळांमध्ये, जिथे n हा एक धन पूर्णांक आहे. तुमची समज आठवा मागील वर्गांमधील वर्गमूळ आणि घनमूळ.

३ म्हणजे काय? $\sqrt{८}$? बरं, आपल्याला माहित आहे की ती काही धन संख्या असावी ज्याचा घन ८ आहे, आणि तुम्ही अंदाज लावला असेल ३ $\sqrt{८}$ = २. चला प्रयत्न करूया $\sqrt[५]{२४३}$. तुम्हाला अशी काही संख्या b माहित आहे का? ते ब ^{५} = २४३? उत्तर ३ आहे. म्हणून, ५ $\sqrt{२४३}$ = ३.

या उदाहरणांवरून, तुम्ही n परिभाषित करू शकता का? $\sqrt{अ}$ वास्तविक संख्या a > 0 आणि धन साठी पूर्णांक n?

समजा a > 0 ही वास्तव संख्या आहे आणि n ही धन पूर्णांक आहे. मग n $\sqrt{अ}$ = b, जर bn = a आणि b > 0. लक्षात घ्या की ' हे चिन्ह $\sqrt{\ }$ ' मध्ये वापरले $\sqrt{२}$, $\sqrt[३]{८}$, एन $\sqrt{अ}$, इत्यादींना मूलगामी चिन्ह म्हणतात .

आता आपण वर्गमूळांशी संबंधित काही ओळखी सूचीबद्ध करू, ज्या विविध बाबतीत उपयुक्त आहेत. तुमच्या आधीच्या वर्गातील काही मार्गांशी तुम्ही आधीच परिचित आहात. उर्वरित भाग वास्तविक बेरीजपेक्षा गुणाकाराच्या वितरणात्मक नियमाचे पालन करतात संख्या, आणि ओळख (x + y) (x – y) = x पासून ^{२} - आणि ^{२}, कोणत्याही वास्तविक संख्यांसाठी x आणि y.

समजा a आणि b हे धन वास्तव संख्या आहेत. मग

(i) अब $\sqrt{अब}$ = $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$ (ii) $\sqrt{\frac{अ}{ब}} = \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}}$

(iii) (a ($\sqrt{\ }$) + $\sqrt{बा}$) ($\sqrt{\ }$ - $\sqrt{बा}$ ळ)= - (iv) (आबा + $\sqrt{\ }$) (- $\sqrt{बा}$ ळ)= - २

(a $\sqrt{\ }$ + $\sqrt{बी}$ सीडी + $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$) = $\sqrt{एसी}$ ते बीसी + $\sqrt{डी}$ + + $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$

(आम्ही) ($\sqrt{अ}$ + $\sqrt{ब}$)^२ + अ + $\sqrt{२अ ब}$ ब =

या ओळखींच्या काही विशिष्ट घटना पाहूया.

उदाहरण १५ : खालील पदावली सोपी करा:

(i) (५ + $\sqrt{७}$ २ +) ($\sqrt{५}$) (ii) (५ + $\sqrt{५}$ ५ ५ –) ( ) ($\sqrt{\ }$)

(iii) ($\sqrt{३}$ ७ + $\sqrt{\ }$)^२ (iv) (11 $\sqrt{\ }$ - $\sqrt{७}$ $\sqrt{११}$ + $\sqrt{७}$)

उपाय : (i) (5) (+ √७ ?)५ १० ५√ २)७ + = + √ + √ + √३५

(ii) ५ + √५ ५ - = √५ ५² (√५)² = २५ ५-२०

((iii) √३ + √७ ² = (√३)² २ √३ √७ + (√७)² ३ २ २१ √ १० २ २१ = + + = + √

((iv)) (√११ - √७) ११ √ + √७) = (√११)² - (√७)² = - ११ ७ ४

टीप: लक्षात ठेवा की वरील उदाहरणात 'सरलीकृत करा' हे शब्द राशी ही परिमेय आणि अपरिमेय संख्येच्या बेरीज म्हणून लिहावी.

खालील समस्येचा विचार करून आपण हा विभाग संपवू. संख्यारेषेवर ते कुठे दिसते ते पहा? तुम्हाला $\frac{१}{\sqrt{२}}$ तुम्हाला सांगता येईल का? माहिती आहे की ते अपरिमेय आहे. कदाचित ते सोपे असेल छेद हा परिमेय संख्या आहे का ते कसे हाताळायचे ते पाहूया. आपण 'तर्क्य' करू शकतो का ते पाहूया. छेद, म्हणजेच छेद परिमेय संख्येत बदलण्यासाठी. असे करण्यासाठी, आपण वर्गमूळांसह ओळखींची आवश्यकता आहे. कसे ते पाहूया.

उदाहरण १६ : च्या छेदाचे तर्कसंगतीकरण करा $\frac{१}{\sqrt{२}}$.

उपाय: आम्हाला लिहायचे आहे $\frac{१}{\sqrt{२}}$ समतुल्य पदावली म्हणून ज्यामध्ये भाजक

ही एक परिमेय संख्या आहे. आपल्याला माहित आहे की २√. २ परिमेय आहे. आपल्याला हे देखील माहित आहे की गुणाकार

$\frac{१}{\sqrt{}}$ २ पर्यंत $\frac{\sqrt{२}}{\sqrt{२}}$ आपल्याला समतुल्य अभिव्यक्ती देईल, कारण $\frac{\sqrt{२}}{\sqrt{२}}$ = १. तर, आपण हे दोन ठेवले तथ्ये एकत्रित करणे

$$\frac{१}{\sqrt{२}} \; १ = \times = \; \frac{\sqrt{२}}{\sqrt{२}} \quad \frac{\sqrt{२}}{\sqrt{२}} \quad \frac{\sqrt{२}}{२}$$

या स्वरूपात, शोधणे सोपे आहे $\frac{१}{\sqrt{२}}$ संख्यारेषेवर. ते ० च्या मध्यभागी आहे आणि २√ .

उदाहरण १७ : २ ३ च्या छेदाचे तर्कसंगतीकरण करा. $\frac{१}{२ + \sqrt{३}}$

उकल : आपण आधी दिलेली ओळख (iv) वापरतो. गुणाकार आणि भागाकार करा. $\frac{१}{२ + \sqrt{३}}$ द्वारे

२ ३ − मिळवण्यासाठी $\frac{१}{२ + \sqrt{३}} \times \frac{२ - \sqrt{३}}{२ - \sqrt{३}} = \frac{२ - \sqrt{३}}{४ - ३} = २ - \sqrt{३}$.

उदाहरण १८ : च्या छेदाचे तर्कसंगतीकरण करा $\frac{५}{\sqrt{३} - \sqrt{५}}$

उपाय: येथे आपण आधी दिलेली ओळख (iii) वापरतो.

तर, $$\frac{५}{\sqrt{३} - \sqrt{५}} = \frac{५}{\sqrt{३} - \sqrt{५}} \times \frac{\sqrt{३} + \sqrt{५}}{\sqrt{३} + \sqrt{५}} = \frac{५(\sqrt{३} + \sqrt{५})}{३ - ५} = \frac{-५}{२}(\sqrt{३} + \sqrt{५})$$

उदाहरण १९ : ७ ३ २ चा छेद तर्कसंगत करा. $\frac{१}{७ + ३\sqrt{२}}$

उपाय: $$\frac{१}{७ + ३\sqrt{२}} = \frac{१}{७ + ३\sqrt{२}} \times \frac{७ - ३\sqrt{२}}{७ - ३\sqrt{२}} = \frac{७ - ३\sqrt{२}}{४९ - १८} = \frac{७ - ३\sqrt{२}}{३१}$$

म्हणून, जेव्हा एखाद्या पदाच्या छेदात वर्गमूळ असलेला पद असतो (किंवा मूलगामी चिन्हाखाली असलेली संख्या), तिला समतुल्य अभिव्यक्तीमध्ये रूपांतरित करण्याची प्रक्रिया ज्याचा छेद परिमेय संख्या आहे त्याला छेदाचे परिमेयीकरण म्हणतात .

सराव १.४

१. खालील संख्यांचे परिमेय किंवा अपरिमेय असे वर्गीकरण करा:

(i) $२ - \sqrt{५}$ (ii) $(३ + \sqrt{२३}) - \sqrt{२३}$ (३) $\frac{२\sqrt{७}}{७\sqrt{७}}$

(iv) $\frac{१}{\sqrt{२}}$ (v) 2π

२. खालील प्रत्येक अभिव्यक्ती सोपी करा:

(i) (३) $+\sqrt{३}$ +२) (२ $\sqrt{\ }$) (ii) (3) $+\sqrt{३}$ ३) ($\sqrt{३}$)

(iii) ($\sqrt{५}$ २ + $\sqrt{\ }$)^{२} (iv) (५ 2 5) $\sqrt{\ }$ + $\sqrt{२}$)

३. आठवा, π ची व्याख्या वर्तुळाच्या परिघाचे (म्हणजे c) व्यासाशी असलेले गुणोत्तर म्हणून केली जाते.

(म्हणजे d). म्हणजेच, π = c/d हे π अपरिमेय आहे या वस्तुस्थितीच्या विरोधात असल्याचे दिसते . d कसे होईल?

तुम्ही हा विरोधाभास सोडवता का?

४. संख्यारेषेवर ९ ३. दर्शवा $\sqrt{\ }$

५. खालील घटकांचे छेद तर्कसंगत करा:

(मी) $\frac{१}{\sqrt{७}}$ (ii) $\frac{१}{\sqrt{\ }\ ६ - \sqrt{७}}$

(३) $\frac{१}{\sqrt{५}\ २ + \sqrt{\ }}$ (iv) $\frac{१}{\sqrt{७}\ २ -}$

१.५ वास्तव संख्यांसाठी घातांकांचे नियम

खालील गोष्टी कशा सोप्या करायच्या ते आठवते का? (i) १७२ . १७५ =

(ii) (५२) ^{७} =

(३) $\frac{२३^{१०}}{२३^{७}}$ = (iv) ७ ३ . ९३ =

तुम्हाला ही उत्तरे मिळाली का? ती खालीलप्रमाणे आहेत:

(i) १७२ . १७५ = १७७ (ii) (५२) ^{७} = ५१४

(३) $\frac{२३^{१०}}{२३^{७}}$ = २३ ^{३} (iv) ७ ३ . ९३ = ६३३

ही उत्तरे मिळविण्यासाठी, तुम्ही तुमच्या मागील वर्गात शिकलेले खालील घातांकांचे नियम वापरले असते. (येथे a, n आणि m हे नैसर्गिक संख्या आहेत.)

लक्षात ठेवा, a ला पाया म्हणतात आणि m आणि n हे घातांक आहेत.) (ii) (a m) n

(i) अ $^{मी}$. एक = सकाळी $^{+ एन}$ = अ ^{एमएन}

(३) $\frac{अ^{मी}}{अ^{एन}}$ = अ $^{एमएनै}$, एमएन> (iv) a mb m = (ab) m

(अ) म्हणजे काय ? ^{0}? हो, ते १ आहे! तर तुम्हाला कळले असेल की (a) ^{0} = १. म्हणून, (iii) वापरून, आपण मिळवा $\frac{१}{अ^{एन}}$ = $अ^{-एन}$ आता आपण ऋण घातांकांनाही नियमांचा विस्तार करू शकतो.

तर, उदाहरणार्थ:

(मी) $१७^{२} \cdot १७^{-५} = १७^{-३} = \frac{१}{१७^{३}}$ (ii) $(५^{२})^{-७} = ५^{-१४}$

(३) $\frac{२३^{-१०}}{२३^{७}} = २३^{-१७}$ (iv) $(७)^{-३} \cdot (९)^{-३} = (६३)^{-३}$

समजा आपल्याला खालील गणना करायची आहे:

(मी) $२^{\frac{२}{३}} \cdot २^{\frac{१}{३}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^{४}$

(३) $\frac{७^{\frac{१}{५}}}{७^{\frac{१}{३}}}$ (iv) $१३^{\frac{१}{५}} \cdot १७^{\frac{१}{५}}$

आपण ते कसे करू? असे दिसून आले की आपण घातांकांचे नियम वाढवू शकतो. आपण आधी अभ्यासलेला आहे, जरी पाया हा एक धन वास्तव संख्या असला तरीही आणि घातांक हे परिमेय संख्या आहेत. (नंतर तुम्ही अभ्यास कराल की ते आणखी वाढवता येते) जेव्हा घातांक वास्तविक संख्या असतात.) परंतु आपण हे नियम सांगण्यापूर्वी, आणि सम करण्यासाठी या नियमांचा अर्थ समजून घेण्यासाठी, आपल्याला प्रथम समजून घेणे आवश्यक आहे, उदाहरणार्थ $४^{\frac{३}{२}}$ म्हणजे काय. तर, आपल्याला काही काम करायचे आहे!

आम्ही n परिभाषित करतो $\sqrt[n]{अ}$ वास्तविक संख्येसाठी a > 0 खालीलप्रमाणे:

समजा a > 0 ही वास्तव संख्या आहे आणि n ही धन पूर्णांक आहे. मग $\sqrt[n]{अ}$ = b, जर b^{n} = अ आणि ब > ०.

घातांकांच्या भाषेत, आपण n ची व्याख्या करतो $\sqrt[n]{अ} = अ^{\frac{१}{एन}}$. तर, विशेषतः, $\sqrt[३]{२} = २^{\frac{१}{३}}$.

आता $४^{\frac{३}{२}}$ कडे पाहण्याचे दोन मार्ग आहेत .

$$४^{\frac{३}{२}} = \left(४^{\frac{१}{२}}\right)^{३} = २^{३} = ८$$

$$४^{\frac{३}{२}} = \left(४^{३}\right)^{\frac{१}{२}} = (६४)^{\frac{१}{२}} = ८$$

म्हणून, आपल्याकडे खालील व्याख्या आहे:

समजा a > 0 ही वास्तव संख्या आहे. m आणि n ही पूर्णांक संख्या आहेत ज्यांच्यामुळे m आणि n ला कोणतेही पूर्णांक नाहीत.
१ आणि n > ० व्यतिरिक्त इतर सामान्य घटक. नंतर,

$$अ^{\frac{मी}{एन}} = (\sqrt[एन]{अ})^{मी} = \sqrt[एन]{अ^{म}}$$

आपल्याकडे आता घातांकांचे खालील विस्तारित नियम आहेत:

समजा a > 0 ही वास्तव संख्या आहे आणि p आणि q ही परिमेय संख्या आहेत. तर, आपल्याकडे आहे

(i) एक p · a q = a p+q (ii) (a p) q = a pq

(३) $\frac{अ^{पी}}{अ^{क्यू}} = अ^{बिंदू -}$ (iv) a p b p = (ab) p

आता तुम्ही या कायद्यांचा वापर करून आधी विचारलेल्या प्रश्नांची उत्तरे देऊ शकता.

उदाहरण २० : सरलीकृत करा (i) $२^{\frac{२}{३}} \cdot २^{\frac{१}{३}}$ (ii) $\left(३^{\frac{१}{५}}\right)^{४}$

(३) $\frac{७^{\frac{१}{५}}}{७^{\frac{१}{३}}}$ (iv) $१३^{\frac{१}{५}} \cdot १७^{\frac{१}{५}}$

उपाय:

(मी) $२^{\frac{२}{३}} \cdot २^{\frac{१}{३}} = २^{\left(\frac{२}{३}+\frac{१}{३}\right)} = २^{\frac{३}{३}} = २^{१} = २$ (ii) $\left(३^{\frac{१}{५}}\right)^{४} = ३^{\frac{४}{५}}$

(३) $\frac{७^{\frac{१}{५}}}{७^{\frac{१}{३}}} = ७^{\left(\frac{१}{५}-\frac{१}{३}\right)} = ७^{\frac{३-५}{१५}} = ७^{\frac{-२}{१५}}$ (iv) $१३^{\frac{१}{५}} \cdot १७^{\frac{१}{५}} = (१३ \times १७)^{\frac{१}{५}} = २२१^{\frac{१}{५}}$

सराव १.५

१. शोधा : (मी) $६४^{\frac{१}{२}}$ (ii) $३२^{\frac{१}{५}}$ (३) $१२५^{\frac{१}{३}}$

२. शोधा : (मी) $९^{\frac{३}{२}}$ (ii) $३२^{\frac{२}{५}}$ (३) $१६^{\frac{३}{४}}$ (iv) $१२५^{\frac{-१}{३}}$

३. सोपे करा: (मी) $२^{\frac{२}{३}} \cdot २^{\frac{१}{५}}$ (ii) $\left(\frac{१}{३^{३}}\right)^{७}$ (३) $\frac{११^{\frac{१}{२}}}{११^{\frac{१}{४}}}$ (iv) $७^{\frac{१}{२}} \cdot ८^{\frac{१}{२}}$

१.६ सारांश

या प्रकरणात, तुम्ही खालील मुद्द्यांचा अभ्यास केला आहे:

१. जर r ही संख्या खालील स्वरूपात लिहिता आली तर तिला परिमेय संख्या म्हणतात. $\frac{\text{पी}}{\text{प्रश्न}}$, जिथे p आणि q आहेत
पूर्णांक आणि q ≠ 0.

२. जर s संख्या या स्वरूपात लिहिता येत नसेल तर तिला अपरिमेय संख्या म्हणतात. $\frac{\text{पी}}{\text{प्रश्न}}$, जिथे p आणि
q हे पूर्णांक आहेत आणि q ≠ 0 आहेत.

३. परिमेय संख्येचा दशांश विस्तार हा एकतर समाप्ती किंवा अ-समाप्ती आवर्ती असतो.
शिवाय, ज्या संख्येचा दशांश विस्तार समाप्त होत आहे किंवा समाप्त होत नाही तो आवर्ती आहे
तर्कसंगत आहे.

४. अपरिमेय संख्येचा दशांश विस्तार हा अ-समाप्त, अ-आवर्ती असतो. शिवाय,
ज्या संख्येचा दशांश विस्तार अ-समाप्त आहे, अ-आवर्ती आहे ती संख्या अपरिमेय आहे.

५. सर्व परिमेय आणि अपरिमेय संख्या वास्तविक संख्यांचा संग्रह बनवतात.

6. जर r परिमेय असेल आणि s अपरिमेय असेल, तर r + s आणि r – s या अपरिमेय संख्या आहेत, आणि rs आणि $\frac{\text{आर}}{\text{एस}}$ आहेत
अपरिमेय संख्या, r ≠ 0.

७. धन वास्तव संख्या अ आणि ब साठी, खालील ओळखी धारण करतात:

(i) $\sqrt{\text{अब}} = \sqrt{\text{अ}}\sqrt{\text{ब}}$ (ii) $\sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{ब}}} = \frac{\sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{ब}}}$

(iii) $(\sqrt{\text{अ}} + \sqrt{\text{ब}})(\sqrt{\text{अ}} - \sqrt{\text{ब}}) = \text{अ} - \text{ब}$ (iv) $(\text{अ} + \sqrt{\text{ब}})(\text{अ} - \sqrt{\text{ब}}) = \text{अ}^२ - \text{ब}$

(मध्ये) $(\sqrt{\text{अ}} + \sqrt{\text{ब}})^२ = \text{अ} + २\sqrt{\text{अब}} + \text{ब}$

८. च्या छेदाचे तर्कसंगतीकरण करणे $\frac{१}{\sqrt{\text{अ}} + \text{ब}}$, आपण याला गुणाकार करतो $\frac{\sqrt{\text{अ}} - \text{ब}}{\sqrt{\text{अ}} - \text{ब}}$, जिथे अ आणि ब आहेत
पूर्णांक.

९. a > ० ही वास्तव संख्या आणि p आणि q ही परिमेय संख्या समजा. मग

(i) एक p · a q = a p + q (ii) (a p) q = a pq

(३) $\frac{\text{अ}^{\text{पी}}}{\text{अ}^{\text{q}}} = \text{अ}^{\text{p} - \text{q}}$ (iv) a p b p = (ab) p