
V2: Interferenz und Wellenlängenmessung

Durchführende: Alea Tokita, Julia Stachowiak
Assistentin: Annemarie Kehl
Versuchsdatum: 09.11.2015
Datum 1. Abgabe: 16.11.2015
Datum 2. Abgabe: 30.11.2015
Datum 3. Abgabe: 07.12.2015

Werte:

$$\Delta\lambda = (680 \pm 170) \text{ nm}$$

$$d = (72 \pm 8) \text{ }\mu\text{m}$$

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen	3
1.1	Elektromagnetische Wellen	3
1.2	Phasengeschwindigkeit und Gangunterschied	3
1.3	Interferenz	5
1.4	Streuung und Beugung	5
2	Experimentelles	7
2.1	Versuchsaufbau	7
2.1.1	Skizze der Apparatur	7
2.2	Durchführung	7
3	Messwerte	7
4	Auswertung	8
4.1	Bestimmung von λ aus der Auftragung	9
4.2	Bestimmung von d aus der Auftragung	10
5	Fehlerrechnung	11
5.1	Fehlerfortpflanzung	11
5.2	Diskussion systematischer Fehler	13
5.3	Vergleich mit Literaturwerten	13
6	Literaturverzeichnis	14

1 Theoretische Grundlagen

Gegeben sind zwei Siebgitter, eines davon mit bekannter und eines mit unbekannter Gitterkonstante. Nacheinander werden sie mit einem Laserstrahl durchleuchtet und das entstehende Interferenzmuster ausgewertet. Ziel des Versuches ist es, daran die Wellenlänge des Lasers und anschließend die unbekannte Gitterkonstante berechnen zu können.

1.1 Elektromagnetische Wellen

Licht ist elektromagnetische Strahlung, die aus einzelnen Transversalwellen besteht. Diese harmonischen Wellen bewegen sich mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 299792458 \text{ m s}^{-1}$ ¹ durch den Raum. Sie können durch folgende Sinusfunktion in Abhängigkeit des Ortes x und der Zeit t beschrieben werden:

$$f(x, t) = A \cdot \sin(kx - \omega t) \quad (1)$$

Die Wellenzahl k mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ beschreibt hierbei den Zusammenhang zwischen der Wellenlänge und der Frequenz.

Die Relation zu der Periodendauer T gibt die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ an.

1.2 Phasengeschwindigkeit und Gangunterschied

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c , mit der sich eine Phase einer Welle (der augenblickliche Zustand, z.B. ein Minimum) im Raum fortbewegt, wird als Phasengeschwindigkeit \vec{v}_p in Abhängigkeit zu der Frequenz $v = \frac{1}{T}$ und der Wellenlänge λ beschrieben:

$$\vec{v}_p = v \cdot \lambda \quad (2)$$

Phasengeschwindigkeit und Gangunterschied werden in Abbildung 1 verdeutlicht. Werden zwei Wellen mit gleicher Phasengeschwindigkeit zeitlich verzögert ausgesandt, so ergibt sich eine Wegdifferenz Δx , der sogenannte Gangunterschied δ (siehe Abbildung 1 und 2).

¹<http://www.einstein-online.info/einsteiger/spezRT/lichtgeschw>

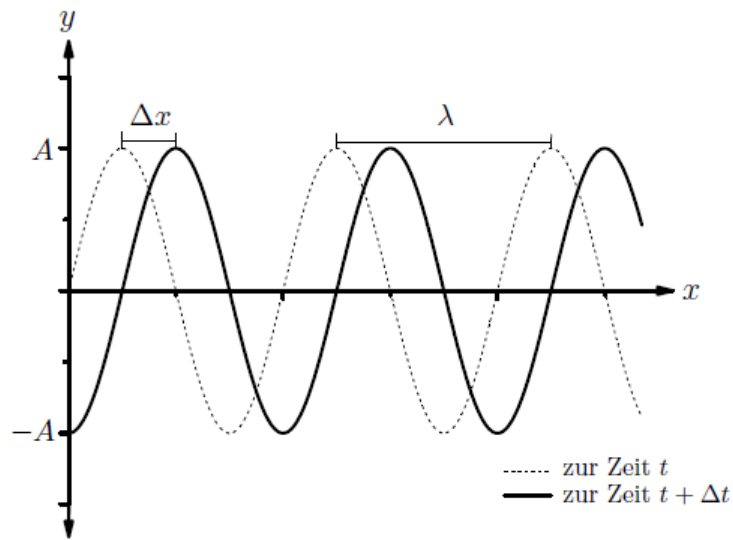


Abbildung 1: Phasengeschwindigkeit und Gangunterschied ²

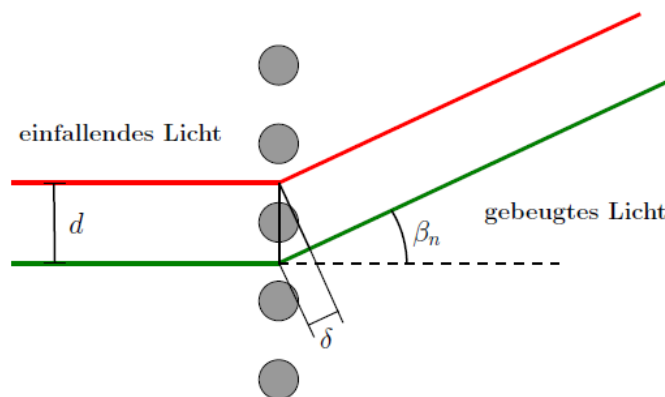


Abbildung 2: Entstehung des Gangunterschiedes δ bei Beugung an einem Gitter ³

²Skriptum für das Praktikum zur Einführung in die Physikalische Chemie, Institut für physikalische Chemie, Uni Göttingen, 2015, Seite 7

³Skriptum für das Praktikum zur Einführung in die Physikalische Chemie, Institut für physikalische Chemie, Uni Göttingen, 2015, Seite 11

1.3 Interferenz

Überlagern sich zwei oder mehr Wellen, so führt dies zu einer Amplitudenänderung. Die Wellen verschmelzen zu einer neuen Welle mit größerer oder kleinerer Amplitude, je nachdem, ob gleiche oder unterschiedliche Phasen aufeinandertreffen. Diese Erscheinung wird Interferenz genannt. Treffen Maxima oder Minima aufeinander, so wird die Amplitude verstärkt (konstruktive Interferenz); trifft Maximum auf Minimum so löschen sich die Wellen gegenseitig aus (destruktive Interferenz). Eine konstruktive Interferenz zweier Wellen ist demnach nur möglich, wenn der Gangunterschied ebendieser ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge beträgt:

$$\delta = n \cdot \lambda \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Ist δ jedoch ein ungradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge, so tritt destruktive Interferenz auf.

$$\delta = \frac{(2n + 1)\lambda}{2} \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

1.4 Streuung und Beugung

Trifft eine Welle auf ein Hindernis, so verändert sie ihren geometrisch vorgeschriebenen Weg, dh. sie wird gestreut. Trifft ein Wellenzug senkrecht auf ein Gitter mit der Gitterkonstante d , so werden seine verschiedenen Wellen an benachbarten Gitterstäben unter dem Beugungswinkel β_n gebeugt. Konstruktive Interferenz ergibt sich nur, wenn (3) zutrifft, dh. der Gangunterschied δ ein ganzzahliges Vielfaches von λ beträgt.

Bei Abbildung des entstehenden Musters (Abbildung 3) auf einen Schirm wird ein Beugungsbild der Wellen mit konstruktiver Interferenz sichtbar. Die Beugungsordnung beschreibt, an welcher Gitterebene die Welle gebeugt wurde.

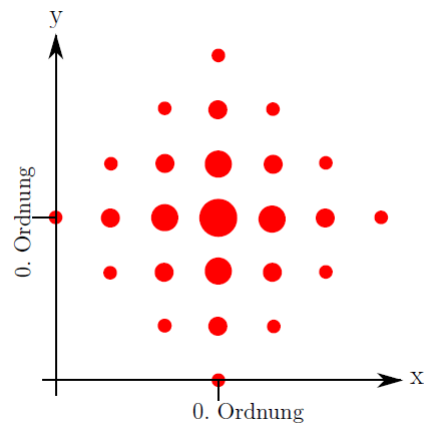


Abbildung 3: Auf den Schirm abgebildetes Beugungsbild ⁴

⁴Skriptum für das Praktikum zur Einführung in die Physikalische Chemie, Institut für physikalische Chemie, Uni Göttingen, 2015, Seite 10

2 Experimentelles

2.1 Versuchsaufbau

2.1.1 Skizze der Apparatur

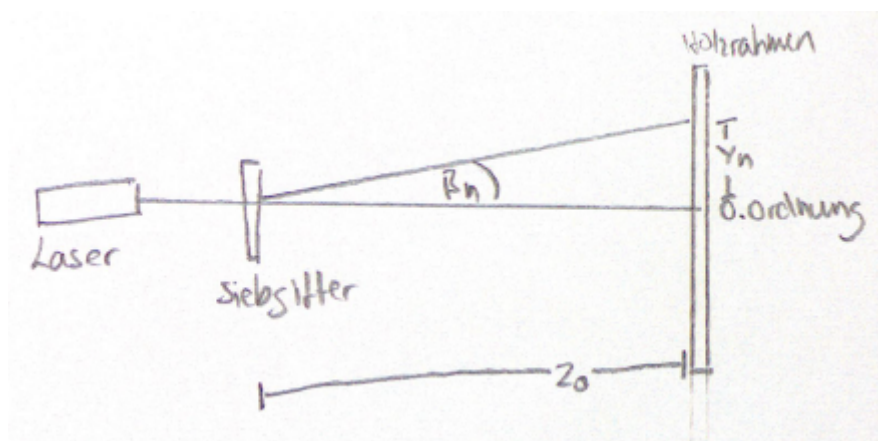


Abbildung 4: Versuchsaufbau

Zunächst wird der Versuch wie auf Abbildung 4 beschrieben aufgebaut. Ein Laser strahlt auf ein Siebgitter, wodurch auf einem sich dahinter befindenden, an ein Holzrahmen befestigten Millimeterpapier ein Interferenzmuster entsteht. Anschließend wird das Siebgitter durch ein anderes Siebgitter, nun unbekannter Gitterkonstante, ersetzt.

2.2 Durchführung

Die entstehenden Beugungsmuster werden auf das Papier übertragen. Dabei werden jeweils die drei Punkte oberhalb und unterhalb des nullten Beugungsmaximums übertragen. Anschließend werden die Millimeterpapiere von dem Holzrahmen genommen und die Abstände y_1, y_2, y_3 der Punkte oberhalb des nullten Maximum zu diesem und die Abstände y_{-1}, y_{-2}, y_{-3} unterhalb des nullten Maximum zu diesem gemessen. Außerdem wird der Abstand z_0 vom Laser zum Holzrahmen gemessen.

3 Messwerte

Die Messwerte sind im Messprotokoll zu finden.

Ergänzender Wert:

Abstand Laser- Holzrahmen: $z_0 = 70 \text{ cm}$

4 Auswertung

Die auf dem Schirm abgebildeten Punkte bilden die Beugungsebenen nullten bis 3. bzw. -3. Grades unterhalb und oberhalb der nullten Ebene. Die Abstände der Punkte oberhalb und unterhalb der nullten Beugungsebene ergeben die Strecke y_n . $z_0 = 0,7$ m beschreibt den Abstand zwischen Laser und Holzrahmen.

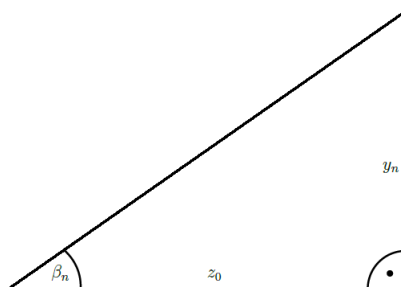


Abbildung 5: Beugungswinkel β_n im Verhältnis zu z_0 und y_n ⁵

Es ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck (Abbildung 5), sodass die Beugungswinkel β_n folgendermaßen zu errechnen sind:

$$\beta_n = \arctan\left(\frac{y_n}{z_0}\right) \quad (5)$$

Somit ergeben sich für die Winkel folgende Werte:

n	β_n
3	2,291°
2	1,555°
1	0,737°
-1	0,737°
-2	1,473°
-3	2,291°

⁵Skriptum für das Praktikum zur Einführung in die Physikalische Chemie, Institut für physikalische Chemie, Uni Göttingen, 2015, Seite 11

Wie auf Abbildung 2 ersichtlich, ergibt sich ein zweites Dreieck mit dem gleichen Winkel β_n , dessen Seitenlängen die (für das erste Gitter bekannte) Gitterkonstante $d = 50,1 \mu\text{m} = 50,1 \cdot 10^{-6} \text{m}$, als auch den unbekannten Gangunterschied δ zeigen. Damit ist folgende Formel aufgestellt:

$$\sin \beta_n = \frac{\delta}{d} \cdot n \quad (6)$$

Da nach Formel 3 λ für die konstruktive Interferenz ein Vielfaches der von δ sein muss, ergibt sich durch Umstellen der Gleichung nach δ bzw. λ folgende Formel:

$$\lambda = \frac{d \cdot \sin \beta_n}{|n|} \quad (7)$$

Für die Wellenlängen ergeben sich so folgende Werte:

n	λ in m
3	$6,676 \cdot 10^{-7}$
2	$6,789 \cdot 10^{-7}$
1	$6,444 \cdot 10^{-7}$
-1	$6,444 \cdot 10^{-7}$
-2	$6,440 \cdot 10^{-7}$
-3	$6,676 \cdot 10^{-7}$

Für den Mittelwert nach

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i$$

mit $N=6$

ergibt sich für $\bar{\lambda} = 6,580 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

4.1 Bestimmung von λ aus der Auftragung

Nach der Allgemeinform für lineare Gleichungssysteme ergibt sich aus Gleichung 7 λ als Steigung und kann der Auftragung entnommen werden. Somit werden für λ gegen $\frac{|n|}{d}$ folgende Werte aufgetragen:

n	$\sin(\beta_n)$	$\frac{ n }{d}$
3	0,040	59880 m
2	0,028	39920 m
1	0,013	19960 m
-1	0,013	19960 m
-2	0,026	39920 m
-3	0,040	59880 m

Aus dem Steigungsdreieck in der Auftragung ergibt sich somit für λ :

$$\lambda = \frac{\Delta \sin(\beta_n)}{\Delta \frac{n}{d}} = \frac{0,04 - 0,013}{59880 - 19960} = 6,764 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad (8)$$

Nun lässt sich aus den Messwerten für das zweite Gitter dessen Gitterkonstante errechnen. Mit folgender Formel ergeben sich die Werte:

$$d = \frac{n \cdot \lambda}{\sin(\beta_{|n|})} \quad (9)$$

n	d in m
3	$8,81 \cdot 10^{-5}$
2	$8,44 \cdot 10^{-5}$
1	$7,88 \cdot 10^{-5}$
-1	$9,46 \cdot 10^{-5}$
-2	$8,44 \cdot 10^{-5}$
-3	$8,44 \cdot 10^{-5}$

Für den Mittelwert ergibt sich: $\bar{d} = 8,58 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

4.2 Bestimmung von d aus der Auftragung

Bei einer Auftragung von $\sin \beta$ gegen $n \cdot \lambda$ ergibt sich d als Steigung (siehe Formel 9). Nach Formel 5 ergeben sich für β_n folgende Werte:

n	β_n
3	$1,309^\circ$
2	$0,900^\circ$
1	$0,491^\circ$
-1	$0,490^\circ$
-2	$0,900^\circ$
-3	$1,391^\circ$

Daraus errechnet sich der $\sin \beta_n$:

n	$\sin(\beta_n)$
3	0,023
2	0,016
1	0,0086
-1	0,0071
-2	0,016
-3	0,024

Somit ergibt sich für d aus der Auftragung:

$$d = \frac{\Delta n \cdot \lambda}{\Delta \sin(\beta_n)} = 7,2 \cdot 10^{-5} = 72 \text{ } \mu\text{m}$$

5 Fehlerrechnung

5.1 Fehlerfortpflanzung

Im Versuch entstehen Fehler sowohl durch die Messungen mit dem Zollstock als auch bei der Übertragung und dem Ausmessen der Werte auf dem Millimeterpapier. Messungenauigkeiten beim Messen mit dem Zollstock entstehen dadurch, dass es schwierig ist, den Zollstock exakt so anzulegen, dass die kürzeste Strecke zwischen Holzrahmen und Laser gemessen wird. Auch ist die Skalierung nur auf einen Millimeter genau gegeben. Daher wird hier von folgendem Fehler ausgegangen: $\Delta_Z = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Die Messungenauigkeiten bezüglich des Millimeterpapiers entstehen durch ungenaue Übertragung, etwa nehmen die Laserpunkte eher eine Tropfenform ein, sodass der Mittelpunkt nicht exakt bestimmt werden kann. Des weiteren ist die Messung der Abstände nur auf Millimeter genau, sodass sich folgender Fehler für das Millimeterpapier ergibt:

$$\Delta_y = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Diese Fehler setzten sich nun in den weiteren Berechnungen fort. Zunächst lassen sich mithilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung maximale und minimale Werte mithilfe folgender Formel für die erste Berechnung des $\sin \beta$ errechnen:

$$\Delta \sin \beta = \sqrt{\left(\frac{1}{z_0} \cdot \Delta y_n\right)^2 + \left(-\frac{y_n}{z_0^2} \cdot \Delta z_0\right)^2} \quad (10)$$

Dabei wird näherungsweise davon ausgegangen, dass für kleine Winkel β $x \approx z_0$ gilt und daher $\sin \beta_n \approx \frac{y_n}{z_0}$ ist.

Es ergeben sich die folgenden Werte:

n	$\sin \beta_n$	$\sin \beta_{max}$	$\sin \beta_{min}$
1	0,013	0,017	0,009
2	0,028	0,032	0,024
3	0,040	0,044	0,036
-1	0,013	0,017	0,009
-2	0,026	0,030	0,022
-3	0,040	0,044	0,036

Diese Werte lassen sich nun in der Auftragung von $\beta_{|n|}$ gegen $\frac{|n|}{d}$ als Fehlerbalken einzeichnen. Durch Einzeichnen einer Ausgleichsgeraden ergibt sich eine minimale und maximale Steigung von λ .

$$\lambda_{max} = 875 \text{ nm}$$

$$\lambda_{min} = 536 \text{ nm}$$

Daraus lässt sich nun der Absolute Fehler mithilfe folgender Formel berechnen:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{2} = 170 \text{ nm}$$

Der Fehler von $\Delta\lambda$ lässt sich nun in Form von Fehlerbalken in die zweite Auftragung zur Bestimmung von d eintragen. Es ergeben sich folgende Werte für die Fehlerbalken:

Obere Grenze des Fehlerbalkens: $ n \cdot \lambda_{max}$ in [m]	Untere Grenze des Fehlerbalkens: $ n \cdot \lambda_{min}$ in [m]
$0,88 \cdot 10^{-6}$	$0,54 \cdot 10^{-6}$
$1,8 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$
$2,6 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$

In diese Auftragung lässt sich wieder eine Ausgleichsgerade maximaler und minimaler Steigung zeichnen und so ein maximaler und minimaler Wert für d ermitteln:

$$d_{max} = 77 \text{ } \mu\text{m}$$

$$d_{min} = 61 \text{ } \mu\text{m}$$

Der Absolute Fehler wird nun wie folgt berechnet: $\Delta d = \frac{d_{max} - d_{min}}{2} = 8 \text{ } \mu\text{m}$

5.2 Diskussion systematischer Fehler

Im Versuch können zunächst systematische Fehler beim Abmessen der Längen auftreten. Etwa könnte der Zollstock oder das Geodreieck fehlerhaft sein und immer zu kleine oder zu große Längen messen. Das Messen eines zu großen z_0 oder zu kleinen y_n würde zum Ermitteln einer zu kleinen Wellenlänge und daraus folgend einer zu kleinen Gitterkonstante führen. Wird der Abstand $y_{|n|}$ oder z_0 zu groß gemessen, ergibt sich umgekehrt eine zu große Wellenlänge und Gitterkonstante.

Des weiteren ist auch der Laser fehlerhaft, in dem Sinne, dass nicht nur Strahlung einer bestimmten Wellenlänge ausgesandt wird, sondern die Wellenlänge ein wenig variiert. Dadurch kommt es beim Beugungsmuster zu tropfenförmigen anstelle von runden Lichtpunkten. Hier muss darauf geachtet werden, einheitlich an einer Stelle des jeweiligen Tropfens zu messen. Würde der kleinstmöglichen Abstand vom oberen Ende des einen Tropfens zum unteren Ende des anderen genommen, ergäbe sich daraus wieder ein zu kleiner Abstand von $y_{|n|}$, wieder mit oben genannten Folgen.

Da die ermittelte Wellenlänge im oberen Bereich der Herstellerangabe liegt, ist es also gut möglich, dass der Wert für z_0 zu groß oder der für y_n zu klein war.

5.3 Vergleich mit Literaturwerten

Für die Wellenlänge aus der Auftragung ergibt sich folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= (680 \pm 170) \text{ nm} \\ \text{Herstellerangabe } \Delta\lambda &= 630 - 680 \text{ nm}\end{aligned}$$

Die gemessene Wellenlänge liegt im Bereich der Herstellerangaben. Die Fehlergrenzen weichen ein wenig von den Fehlergrenzen der Herstellerangabe ab.

Für die Gitterkonstante ergibt sich, ebenfalls aus der Auftragung, folgenden Wert:

$$d = (72 \pm 8) \text{ }\mu\text{m}$$

Für die Gitterkonstante liegen keine Herstellerangaben vor. Jedoch ist die Gitterkonstante des ersten Gitters mit $d = 50,1 \text{ }\mu\text{m}$ vom Hersteller gegeben. Bei dem Vergleich der Beugungsmuster ist auffällig, dass die Punkte bei dem zweiten Gitter enger aneinander liegen, was bedeutet, dass es sich um ein Gitter mit einer größeren Gitterkonstante handeln muss. Bei Vergleich des Wertes und den Fehlergrenzen mit dem Herstellerwert wird ersichtlich, dass der Wert mindestens in dieser Beziehung

stimmt. Durch Minimierung des Fehlers lassen sich noch genauere Ergebnisse erzielen, die mit den Herstellerangaben besser übereinstimmen. So könnte etwa anstelle des doch eher ungenauen Zollstocks und Geodreiecks etwa eine Schieblehre verwendet werden und mit einem Winkelmesser den Abstand zwischen Laser und Holzrahmen exakter bestimmt werden. Mit einem Laser, der nur Licht einer Wellenlänge aussendet, könnten die Punkte des Beugungsmusters genauer übertragen werden. Dies würde ebenfalls durch einen fest installierten Holzrahmen vereinfacht werden.

6 Literaturverzeichnis

- 1 Gerd Wedler: *Lehrbuch der physikalischen Chemie*, 5. Aufl., WILEY-VCH Verlag GmbH Co. KGaA, Weinheim, **2004**.
- 2 Götz, Eckold: *Skriptum zur Einführung in die physikalische Chemie*, Institut für physikalische Chemie, Uni Göttingen, **2015**.
- 3 *Skriptum für das Praktikum zur Einführung in die Physikalische Chemie*, Institut für physikalische Chemie, Uni Göttingen, **2015**.