DnA PVA7 Nachbereitung

Fibonacci Baum Induktion

IH: $n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{h+2}\right) - 1$

BC: $n(1) = 1$

$$n(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{3}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+3\sqrt{5}+3\cdot 5+5\sqrt{5})}{8}\right) - \left(\frac{1-3\sqrt{5}+3\cdot 5-5\sqrt{5}}{8}\right)\right) - 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{6\sqrt{5}+10\sqrt{5}}{8}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{16\sqrt{5}}{8}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\sqrt{5}\right) - 1$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - 1$$

$$= 2 - 1$$

$$= 1 \checkmark$$

Base Case ist erfüllt

BC2: $n(0) = 0$

$$n(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) - 1$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - 1$$

$$= 1 - 1$$

$$= 0 \checkmark$$

Wir berechnen 2 Base Cases da die Formel die wir beweisen jeweils 2 Schritte zurückgreift und daher einer nicht reicht.

IS: $n(h) = 1 + n(h-1) + n(h-2)$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{h-1}\right) - 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{h-2}\right) - 1$$

$$= -1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{h-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{h-2}\right)$$

$$= -1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h-2} \cdot \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{h-2} \cdot \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{x}\right)$$

$$x \quad \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Umformung zu den Quadraten als Beweis, dass es stimmt

$$= -1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h-2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{h-2} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{h}\right) - 1 = n(h) \checkmark$$

Beweis folgt aus der Definition, dass ein Fibonacci Baum immer aus den kleineren Bäumen mit h-1 und h-2 besteht

---

2. $h \leq 1.45 \cdot \log_2(n+2)$

$h \leq \frac{1}{\log_2(\phi)} \cdot \log(n+2) \quad \Big| \cdot \log_2(\phi)$

$\log_2(\phi)\, h \leq \log(n+2)$

$\phi^h \leq n+2$ Das hier wollen wir beweisen

$n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h+2} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h+2}\right) - 1 \quad \Big| +1 \cdot \sqrt{5}$

ϕ = goldener Schnitt $= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\tilde{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,66 \Rightarrow |\tilde{\phi}| < 1 \Rightarrow |\tilde{\phi}|^h < 1$

$$\phi^{h+2} - \tilde{\phi}^{h+2} = \sqrt{5} \cdot (n+1) \quad \Big| + \tilde{\phi}^{h+2}$$

$$\phi^{h+2} = \sqrt{5} \cdot (n+1) + \tilde{\phi}^{h+2} \quad \Big| \cdot \phi^{-2}$$

$$\phi^{h} = \phi^{-2} (\sqrt{5} \cdot (n+1) + \tilde{\phi}^{h+2})$$

$$\phi^{h} = \frac{1}{5 + 2\sqrt{5} + 1} \cdot (\sqrt{5} \cdot (n+1) + \tilde{\phi}^{h+2})$$

$$= \frac{2}{3+\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{5}n + \tilde{\phi}^{h+2})$$

$$\underbrace{\frac{2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}_{\geq 1} + \underbrace{\frac{2\sqrt{5}n}{3+\sqrt{5}}}_{\geq n} + \underbrace{\frac{\tilde{\phi}^{h+2}}{3+\sqrt{5}}}_{\geq 1} \geq n+2$$

---

3. Ein Teil der Definition von AVL Bäumen ist, dass sich die Höhe der beiden Teilbäume um höchstens 1 unterscheidet. Dieses selbe Muster ergibt sich bei Fibonacci Bäumen aufgrund der Zusammensetzung aus den kleineren Fibo Bäumen.

   Der Fibonacci Baum stellt einen AVL Baum mit der minimalen Anzahl Knoten an. Da der Fibo Baum bei jedem Step immer nur die minimale Anzahl Knoten hinzufügt um die Bedingungen zu erfüllen.