

गणित

कक्षा ८



नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमि, भक्तपुर

गणित

कक्षा ८

प्रकाशक

नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

प्रकाशक

नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

◎ सर्वाधिकार पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

यस पाठ्यपुस्तकसम्बन्धी सम्पूर्ण अधिकार पाठ्यक्रम विकास केन्द्र सानोठिमी, भक्तपुरमा निहित रहेको छ । पाठ्यक्रम विकास केन्द्रको लिखित स्वीकृतिबिना व्यापारिक प्रयोजनका लागि यसको पुरै वा आंशिक भाग हुबहु प्रकाशन गर्ने, परिवर्तन गरेर प्रकाशन गर्ने, कुनै विद्युतीय साधन वा अन्य प्रविधिबाट रेकर्ड गर्ने र प्रतिलिपि निकालन पाइने छैन ।

प्रथम संस्करण : वि.सं. २०७२

परिमार्जित दोस्रो संस्करण : वि.सं २०७६

मुद्रणः जनक शिक्षा सामग्री केन्द्र लि.
सानोठिमी, भक्तपुर ।

मूल्य रु.

पाठ्यपुस्तकसम्बन्धी पाठकहरूका कुनै पनि प्रकारका सुझावहरू भएमा पाठ्यक्रम विकास केन्द्र, समन्वय तथा प्रकाशन शाखामा पठाइदिनुहुन अनुरोध छ । पाठकहरूबाट आउने सुझावहरूलाई केन्द्र हार्दिक स्वागत गर्दछ । तपाइँले किनेको पाठ्यपुस्तकमा कुनै त्रुटि भएमा नजिकको वितरकबाट उक्त पुस्तक साट्न सक्नुहुने छ ।

हाम्रो भनाइ

शिक्षालाई उद्देश्यमूलक, व्यावहारिक र समसामयिक बनाउन पाठ्यक्रम विकास केन्द्रले विद्यालय तहका पाठ्यक्रमतथा पाठ्यपुस्तक विकास तथा परिमार्जन गर्ने कार्यलाई निरन्तरता दिई आएको छ । विद्यार्थीमा राष्ट्रप्रेम, राष्ट्रियता प्रतिको समर्पण र लोकतान्त्रिक पद्धतिलाई आत्मसात गर्ने भावनाको विकास गराई नैतिकवान्, अनुशासित, स्वावलम्बी तथा सिर्जनशील भई समावेशी समाज निर्माणमा योगदान दिन सक्ने क्षमता विकास हुन आवश्यक छ । उनीहरूमा भाषिक तथा गणितीय सिपका साथै विज्ञान, सूचना तथा सञ्चार प्रविधि, वातावरण, स्वास्थ्य तथा जनसङ्ख्यासम्बन्धी आधारभूत ज्ञान तथा जीवनोपयोगी सिपको विकास हुन जरुरी छ । त्यसै गरी विद्यार्थीहरूमा कला तथा सौन्दर्य प्रतिको अनुराग र मानवीय मूल्य मान्यता, आदर्श तथा वैशिष्ट्यहरूप्रतिको सचेतता सहित तिनको संरक्षण, संवर्धन गर्ने भावनाको विकास आवश्यक छ । समता मूलक समाजको निर्माणमा सहयोग पुऱ्याउन उनीहरूमा विभिन्न जातजाति, लिङ्ग, भाषा, धर्म, संस्कृति र क्षेत्रलगायतका विविधताहरूको सम्मान गर्ने र मानव अधिकार तथा समाजिक मूल्य मान्यता प्रति सचेत भई जिम्मेवारी वहन गर्ने भावनाको विकास गराउनु आवश्यक छ । उल्लिखित आवश्यकतालाई दृष्टिगत गरी आधारभूत शिक्षा पाठ्यक्रम (कक्षा ६-८), २०६९ लाई मूल आधारमानी शिक्षासम्बन्धी विभिन्न आयोगका सुभाव, शिक्षक, विद्यार्थी तथा अभिभावकलगायत शिक्षासँग सम्बद्ध विभिन्न व्यक्ति सम्मिलित गोष्ठी र अन्तर्राष्ट्रियाका निष्कर्ष र विभिन्न विद्यालयमा परीक्षण गरी प्राप्त पृष्ठपोषण समेतलाई समेटी यो पाठ्यपुस्तक तयार पारिएको हो ।

पाठ्यपुस्तकलाई यस स्वरूपमा ल्याउने कार्यमा केन्द्रका कार्यकारी निर्देशक श्री दिवाकर ढुङ्गेल, प्रा.डा. मीनबहादुर श्रेष्ठ, डा. बालकृष्ण रञ्जित, प्रा. डा. लेखनाथ शर्मा, सुरेन्द्र आचार्य, वैकुण्ठ खनाल, वरुण वैद्य, विजय बानिया, गोमा श्रेष्ठ, डण्डपाणि शर्मा, हेमराज पोखरेल, जीवराज आचार्य, रमेश अवस्थी, राजेन्द्र देवकोटा, मैना अधिकारी, राजकुमार माथेमा, सरस्वती आचार्यलगायतका महानुभावको विशेष यो गदान रहेको छ । यसको भाषा सम्पादन हरिप्रसाद निरौला तथा टाइप सेटिङ र लेआउट डिजाइन जयराम कुङ्केलबाट भएको हो । पाठ्यपुस्तकलाई अध्यावधिक तथा परिमार्जन गरी प्रकाशित गर्ने कार्यमा यस केन्द्रका महानिर्देशक डा. लेखनाथ पौडेल, श्री गणेशप्रसाद भट्टराई र श्री चिनाकुमारी निरौलाको योगदान रहेको छ । यस पाठ्यपुस्तकको विकास तथा परिमार्जन कार्यमा संलग्न सबैप्रति पाठ्यक्रम विकास केन्द्र धन्यवाद प्रकट गर्दछ ।

पाठ्यपुस्तकलाई शिक्षण सिकाइको महत्त्वपूर्ण साधनका रूपमा लिइन्छ । यस पाठ्यपुस्तकको प्रयोगबाट पाठ्यक्रमद्वारा लक्षित सक्षमता हासिल गर्ने विद्यार्थीलाई सहयोग पुर्ने अपेक्षा गरिएको छ । पाठ्यपुस्तकलाई सकेसम्म क्रियाकलापमुखी र सचिकर बनाउने प्रयत्न गरिएको छ । यस पाठ्यपुस्तकलाई अझै परिष्कृत पार्नका लागि शिक्षक, विद्यार्थी, अभिभावक, बुद्धिजीवी एवम् सम्पूर्ण पाठकहरूको समेत महत्त्वपूर्ण भूमिका रहने हुँदा सम्बद्ध सबैको रचनात्मक सुभावका लागि पाठ्यक्रम विकास केन्द्र हार्दिक अनुरोध गर्दछ ।

नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

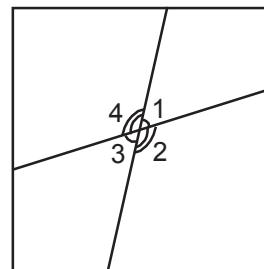
विषयसूची

एकाइ	शीर्षक	पृष्ठसंख्या
1.	रेखा र कोण	1
2.	त्रिभुज, चतुर्भुज र बहुभुजहरू	10
3.	त्रिभुजको अनुरूपता र समरूपता	27
4.	वृत्त	38
5.	ठोस आकृतिहरू	45
6.	निर्देशाङ्कहरू	50
7.	क्षेत्रफल र आयतन	57
8.	स्थानान्तरण	68
9.	दिशास्थिति र स्केल ड्राइड	77
10.	समूह	83
11.	पूर्ण सङ्ख्याहरू	93
12.	पूर्णाङ्कहरू	100
13.	आनुपातिक सङ्ख्याहरू	104
14.	वास्तविक सङ्ख्याहरू	110
15.	अनुपात, समानुपात र प्रतिशत	119
16.	नाफा र नोक्सान	129
17.	ऐकिक नियम	136
18.	साधारण व्याज	141
19.	तथ्याङ्क शास्त्र	148
20.	बीजीय अभिव्यञ्जकहरू	161
21.	घाताङ्क	188
22.	समीकरण, असमानता र लेखाचित्र	193
	उत्तरमाला	210

1.0 पुनरवलोकन (Review)

क्रियाकलाप 1

एउटा सादा कागजको पाना लेउ । त्यसलाई एक पटक ठाडोतिर र अर्को पटक ते सौंतिरबाट छुड्के गरी पट्याऊ । त्यसपछि पट्याएको भाग खोल । त्यहाँ चित्रमा देखाए जस्तै दुईओटा रेखाहरू आपसमा प्रतिच्छेदित देख्ने छौ । अब ती रेखालाई सिसाकलमले तान । त्यहाँ कोणहरू बनेको देख्ने छौ । तिनीहरूलाई क्रमशः 1, 2, 3 र 4 नामकरण गर ।



(क) 1 र 2, 2 र 3, 3 र 4, 4 र 1 कस्ता प्रकारका जोडी कोणहरू हुन् ?

(ख) 1 र 3, 2 र 4 कस्ता प्रकारका जोडी कोणहरू हुन् ? साथीहरूसँग छलफल गर ।

माथि (क) का जोडा कोणहरूमा एउटै शीर्षविन्दु र एउटा साभा भुजा छ । यस्ता जोडा कोणहरू आसन्न कोणहरू हुन् ।

त्यसै (ख) मा भएका जोडा कोणहरूमध्ये एउटा कोण अर्को कोणको विपरीत दिशातिर छ । यी कोणहरू शीर्षभिमुख कोणहरू हुन् ।

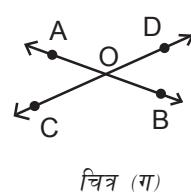
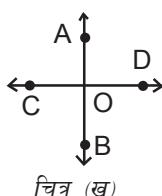
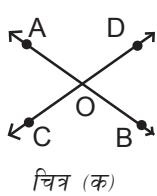
दुई सरल रेखाखण्ड आपसमा काट्दा बन्ने जोडी कोणहरूमा उद्गम बिन्दु एउटै र एउटा भुजा साभा छ भने त्यस्ता कोणहरूलाई आसन्न कोणहरू (adjacent angles) भनिन्छ । त्यसै यदि एउटा कोण अर्को कोणको विपरीत दिशामा छ भने त्यस्ता जोडी कोणहरूलाई शीर्षभिमुख कोणहरू (vertically opposite angles) भनिन्छ ।

1.1. दुई सरल रेखाहरू आपसमा काट्दा बन्ने जोडी कोणहरूको प्रयोगात्मक परीक्षण

(Experimental Verification of Pair of Angles Formed by Intersecting Two Lines)

परीक्षण 1 : आसन्न कोणहरूको योगफल (Sum of adjacent angles)

दिइएका चित्रहरूमा सरल रेखा AB र CD बिन्दु O मा प्रतिच्छेदन भएका छन् ।



अब, प्रोटेक्टर प्रयोग गरी कोणहरू नाप र तलको तालिकामा भर ।

चित्र नं.	$\angle AOC$	$\angle AOD$	$\angle AOC + \angle AOD$	परिणाम
(क)				
(ख)				
(ग)				

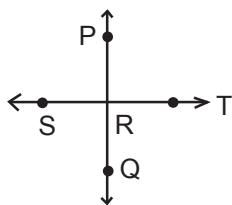
माथिको प्रयोगबाट के निष्कर्ष पायौ ?

यदि दुईओटा सरल रेखाहरू आपसमा प्रतिच्छेदन भएका छन् भने एक जोडा आसन्न कोणहरूको योगफल 180° वा दुई समकोण हुन्छ ।

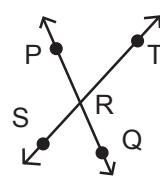
परीक्षण 2 : शीर्षाभिमुख कोणहरूको सम्बन्ध (Relation between opposite angles)

तल चित्रमा सरल रेखा PQ र ST विन्दु R मा प्रतिच्छेदन भएका छन् ।

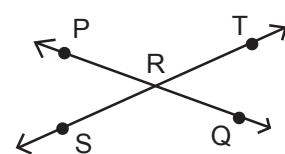
अब, प्रोटेक्टरको प्रयोग गरी दिइएका कोणहरूको नाप लेउ र तलको तालिकामा भर :



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

चित्र नं.	$\angle PRS$	$\angle QRT$	$\angle SRQ$	$\angle PRT$	परिणाम
(क)					
(ख)					
(ग)					

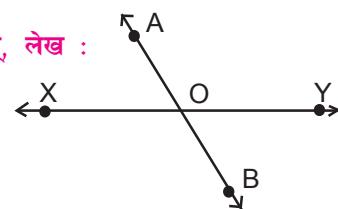
माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष पायौ, आआफ्नो कापीमा लेख ।

दुई ओटा सरल रेखाहरू आपसमा प्रतिच्छेदित हुदा बन्ने शीर्षाभिमुख कोणहरू (vertically opposite angles) बराबर हुन्छन् ।

उदाहरण 1

तल दिइएको चित्रमा निम्नलिखित जोडी कोणहरू कस्ता कोणहरू हुन्, लेख :

- (क) $\angle XOB$ र $\angle BOY$ (ख) $\angle AOY$ र $\angle XOB$
 (ग) $\angle BOX$ र $\angle AOX$ (घ) $\angle AOX$ र $\angle BOY$



हाम्रो गणित, कक्षा ८

समाधान

यहाँ सरल रेखाहरू AB र XY बिन्दु O मा काटिएका छन्।

(क) $\angle XOB$ र $\angle BOY$ आसन्न कोणहरू हुन्। (ख) $\angle AOX$ र $\angle XOB$ शीर्षाभिमुख कोणहरू हुन्।

(ग) $\angle BOX$ र $\angle AOX$ आसन्न कोणहरू हुन्। (घ) $\angle AOX$ र $\angle BOY$ शीर्षाभिमुख कोणहरू हुन्।

उदाहरण 2

दिइएको चित्रमा x र y को मान पत्ता लगाऊ।

समाधान

यहाँ $\angle ROQ = 50^\circ$

$$\angle ROQ = \angle POS \quad (\text{शीर्षाभिमुख कोणहरू})$$

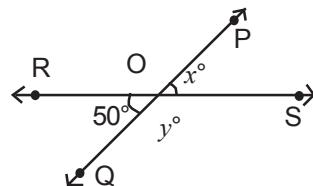
$$\therefore x = 50^\circ$$

फेरि $x + y = 180^\circ$ (आसन्न कोणहरूको योगफल = 180° हुन्दै)

अथवा, $50^\circ + y = 180^\circ$

अथवा, $y = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

$$\therefore y = 130^\circ$$



अभ्यास 1.1

1. तल दिइएका कोणहरूमध्ये कुन कुन कोणहरू आसन्न कोणहरू हुन् र कुन कुन शीर्षाभिमुख कोणहरू हुन्, लेख :

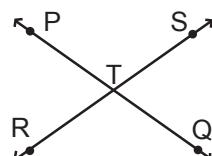
(क) $\angle PTS$ र $\angle STQ$

(ख) $\angle PTR$ र $\angle STQ$

(ग) $\angle PTS$ र $\angle RTQ$

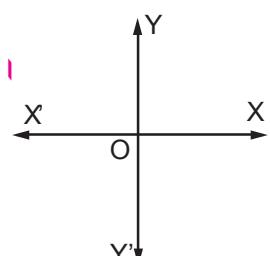
(घ) $\angle PTS$ र $\angle PTR$

(ड) $\angle RTQ$ र $\angle QTS$



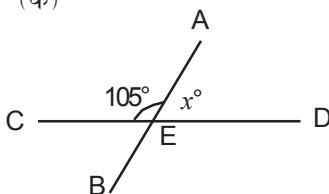
2. सँगैको चित्रमा रेखाहरू XX' र YY' बिन्दु O मा प्रतिच्छेदन भएका छन्।

अब चित्रबाट 4 जोडा आसन्न कोण र दुई जोडा शीर्षाभिमुख कोणहरूको सूची बनाऊ।

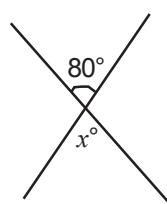


3. तल दिइएका चित्रहरूमा x को मान पत्ता लगाऊ :

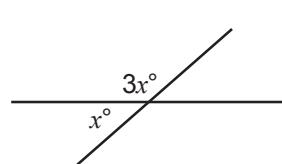
(क)



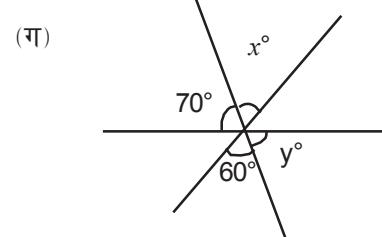
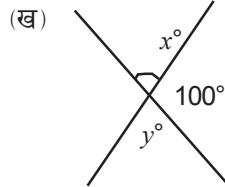
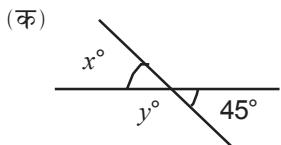
(ख)



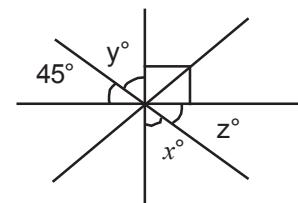
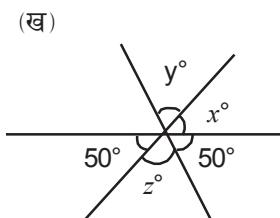
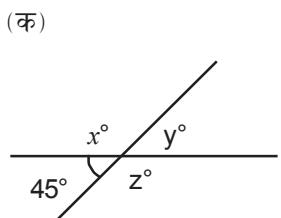
(ग)



4. तल दिइएका चित्रहरूमा x र y को मान पत्ता लगाऊ :



5. दिइएका चित्रहरूमा x , y र z कोणहरूको मान पत्ता लगाऊ :

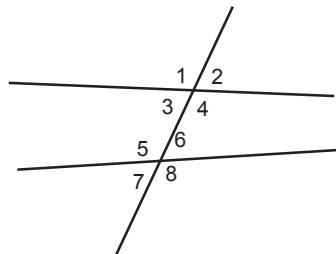


1.2. दुईओटा सरल रेखालाई एउटा छेदकले काटदा बन्ने कोणहरू (Angles formed by a Transversal with two Straight Lines)

सँगैको चित्रमा दुई सरल रेखालाई एउटा छेदकले काटेको छ । तलका प्रश्नहरूबाटे साथीहरूसँग छलफल गर :

- कति ओटा कोणहरू बनेका छन् ?
- कुन कुन कोणहरू बाहिरी कोण हुन् ?
- कुन कुन कोणहरू भित्री कोणहरू हुन् ?

यहाँ $\angle 1, \angle 2, \angle 7$ र $\angle 8$ बाहिरी कोणहरू हुन्
भने $\angle 3, \angle 4, \angle 5$ र $\angle 6$ भित्री कोणहरू हुन् ।



(क) एकान्तर कोणहरू (Alternate Angles)

माथिको चित्रमा $\angle 3$ र $\angle 6$ लाई हेर ।

$\angle 3$ र $\angle 6$ छेदकको दुवैतिर परेका छन् र दुवै भित्री अनासन्न कोणहरू हुन् । तसर्थ यी कोणहरूलाई एकान्तर कोणहरू भनिन्छ ।

यस्तै अर्को जोडी कोणहरू कुन कुन होलान् ?

दुई सरल रेखालाई छेदकले काटदा छेदकको दुवैतिर परेका भित्री अनासन्न कोणहरूलाई एकान्तर कोणहरू (alternate angles) भनिन्छ ।

माथि चित्रमा दिइएका $\angle 3$ र $\angle 6$; $\angle 4$ र $\angle 5$ एकान्तर कोणहरू हुन् ।

(ख) सङ्गत कोणहरू (Corresponding Angles)

माथिको चित्रमा $\angle 1$ र $\angle 5$ लाई हेरौँ ।

दुवै कोणहरू छेदकको एकैतिर परेका छन् । $\angle 1$ बाहिरी कोण हो भने $\angle 5$ भित्री कोण हो । तसर्थ $\angle 1$ र $\angle 5$ लाई सङ्गत कोणहरू भनिन्छ । माथि चित्रमा कति जोडी सङ्गत कोण होलान् ? लेख ।

दुई सरल रेखालाई छेदकले काटदा छेदकको एकैतिर परेका एउटा भित्री र अर्को बाहिरी अनासन्न कोणहरूलाई सङ्गत कोणहरू (corresponding angles) भनिन्छ ।

माथि चित्रमा दिइएका $\angle 1$ र $\angle 5$; $\angle 2$ र $\angle 6$; $\angle 3$ र $\angle 7$; $\angle 4$ र $\angle 8$ सङ्गत कोणहरू हुन् ।

(ग) क्रमागत भित्री कोणहरू (Co-interior Angles)

माथिको चित्र हेरौँ । $\angle 3$ र $\angle 5$ कस्ता जोडी कोणहरू हुन् ?

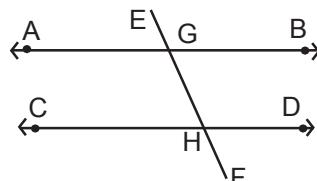
दुवै भित्री अनासन्न कोणहरू हुन् र दुवै छेदकको एकैतिर परेका छन् । यिनीहरूलाई क्रमागत भित्री कोणहरू भनिन्छ ।

दुई सरल रेखालाई एउटा छेदकले काटदा बन्ने छेदकको एकैतिर परेका भित्री अनासन्न कोणहरूलाई क्रमागत भित्री कोणहरू (co-interior angles) भनिन्छ ।

माथिको चित्रमा $\angle 3$ र $\angle 5$; $\angle 4$ र $\angle 6$ क्रमागत भित्री कोणहरू हुन् ।

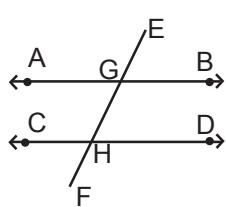
1.2.1 दुईओटा समानान्तर रेखालाई छेदकले काटदा बन्ने कोणहरूको सम्बन्ध

यदि चित्रमा AB र CD समानान्तर रेखाहरू भए
माथि प्रस्तुत गरिएका जोडी कोणहरूको सम्बन्ध
कस्तो होला तलका परीक्षणहरूबाट हेरौँ ।

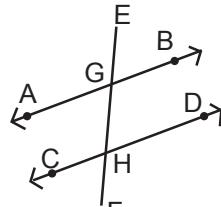


परीक्षण 1 : एकान्तर कोणहरूको सम्बन्ध

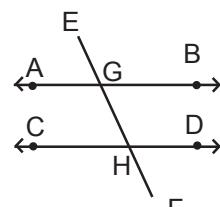
चित्रमा दुईओटा समानान्तर रेखाहरू AB र CD लाई छेदक EF ले क्रमशः विन्दु G र H मा काटेको छ ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

अब तल तालिकामा दिइएका कोणहरू प्रोटेक्टरको प्रयोग गरेर नाप र तालिकामा भर :

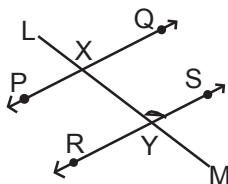
चित्र नं.	$\angle AGH$	$\angle GHD$	परिणाम	$\angle BGH$	$\angle GHC$	परिणाम
(क)						
(ख)						
(ग)						

- माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष पायौ ?
- दिइएका जोडी कोणहरू कस्ता प्रकारका कोणहरू हुन्, साथीहरूसँग छलफल गरी निष्कर्ष पत्ता लगाउ ।

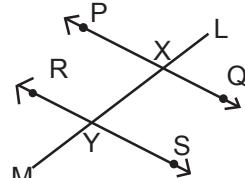
दुईओटा समानान्तर रेखाहरू एउटा छेदकले काटदा बनेका एकान्तर कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

परीक्षण 2 : क्रमागत भित्री कोणहरूको योगफल

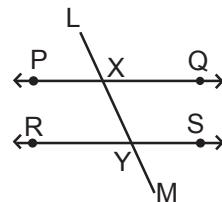
दिइएको चित्रमा दुईओटा समानान्तर रेखाहरू PQ र RS लाई छेदक LM ले क्रमशः बिन्दु X र Y मा काटेको छ ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

अब, प्रोटेक्टरको सहायताले तल दिइएका कोणहरूको नाप र तालिकामा भर :

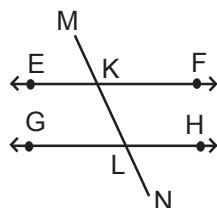
चित्र नं.	$\angle PXY$	$\angle XYR$	$\angle PXY + \angle XYR$	$\angle QXY$	$\angle XYS$	$\angle QXY + \angle XYS$	परिणाम
(क)							
(ख)							
(ग)							

- माथिको तालिकामा भएका जोडा कोणहरू कस्ता प्रकारका कोणहरू हुन् ?
- जोडी कोणहरूको योगफल कति भयो ?
- यो परीक्षणको निष्कर्ष के होला, सँगैको साथीसँग छलफल गर ।

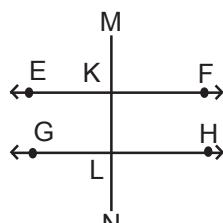
दुई समानान्तर रेखाहरूलाई छेदकले काटदा बन्ने क्रमागत भित्री कोणहरूको योगफल 180° वा दुई समकोण हुन्छ ।

परीक्षण 3 : सद्गत कोणहरूको सम्बन्ध

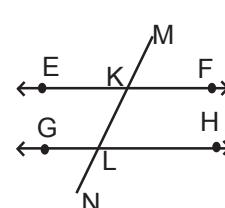
तलका चित्रहरूमा दुई समानान्तर रेखाहरू EF र GH लाई छेदक MN ले क्रमशः बिन्दु K र L मा काटेको छ ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

प्रोटेक्टरको प्रयोग गरी तल तालिकामा दिइएका कोणहरू नाप र तालिकामा भर :

चित्र नं.	$\angle MKE$	$\angle KLG$	$\angle MKF$	$\angle KLH$	$\angle EKL$	$\angle GLN$	$\angle FKL$	$\angle HLN$	परिणाम
(क)	55°	55°							
(ख)	90°	90°							
(ग)	140°	140°							

माथिको तालिकामा कस्ता प्रकारका जोडी कोणहरू छन् ?

माथिको परीक्षणबाट के निष्कर्ष निकाल्न सकिन्द्ध, निष्कर्ष लेखी साथीहरूबिच छलफल गर ।

दुई समानान्तर रेखाहरूलाई छेदकले काटदा बन्ने सङ्गत कोणहरू बराबर हुन्दैन ।

माथिका परीक्षणहरूबाट हामीले निम्नलिखित कुराहरू पनि थाहा पाउन सक्छौँ :

दुई सरल रेखालाई एउटा छेदकले काटदा बन्ने,

- एकान्तर कोणहरू बराबर भएमा
- क्रमागत भित्री कोणहरूको योगफल 180° भएमा वा
- सङ्गत कोणहरू बराबर भएमा

ती दुई सरल रेखाहरू समानान्तर हुन्दैन ।

उदाहरण 1

सैंको चित्रमा दुईओटा समानान्तर रेखाहरूलाई छेदकले काटेको छ । यसमा a , b , x , y , z को मान पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ $x + 125^\circ = 180^\circ$ (आसन्न कोणहरू)

अथवा, $x = 180^\circ - 125^\circ$

अथवा, $x = 55^\circ$

फेरी, $x = y$ (सङ्गत कोणहरू)

अथवा, $y = x = 55^\circ$

चित्रअनुसार, $y = z = 55^\circ$ (एकान्तर कोणहरू)

$$\therefore z = 55^\circ$$

$z + b = 180$ (क्रमागत भित्री कोणहरू)

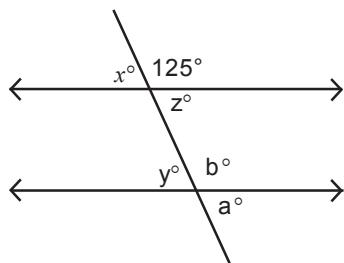
$$55^\circ + b = 180^\circ$$

$$\therefore b = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$

अन्त्यमा $z = a$ (सङ्गत कोणहरू)

$$\therefore a = 55^\circ$$

हाम्रो गणित, कक्षा ८



अभ्यास 1.2

1. सँगैको चित्रमा दुईओटा सरल रेखालाई एउटा छेदकले काटेको छ । उक्त चित्रवाट निम्नलिखित जोडा कोणहरूको सूची तयार पार :

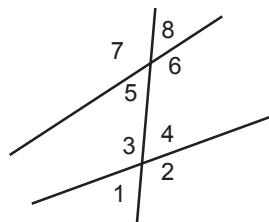
(क) बाहिरी कोणहरू

(ख) भित्री कोणहरू

(ग) एकान्तर कोणहरू

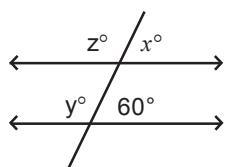
(घ) क्रमागत भित्री कोणहरू

(ड) सद्वितीय कोणहरू

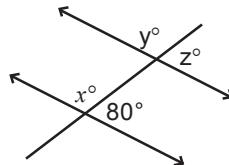


2. तल दिइएका चित्रहरू x , y र z को मान पत्ता लगाऊ (दुईओटा समानान्तर रेखालाई छेदकले काटेको छ) :

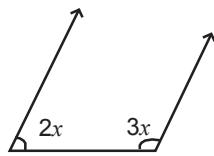
(क)



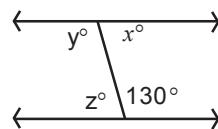
(ख)



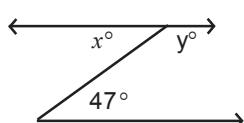
(ग)



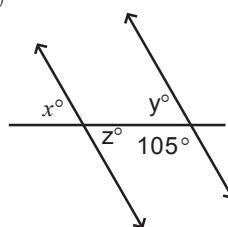
(घ)



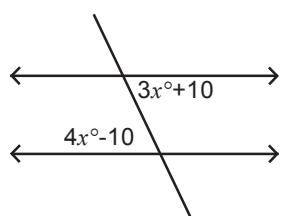
(ड)



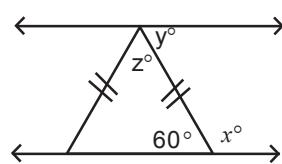
(च)



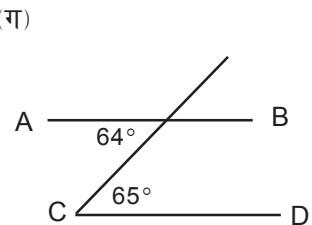
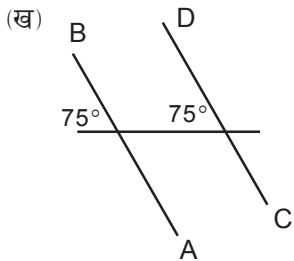
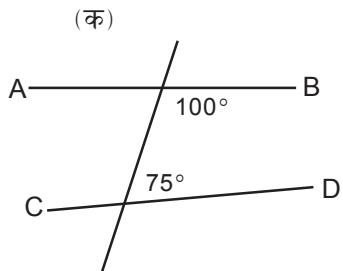
(छ)



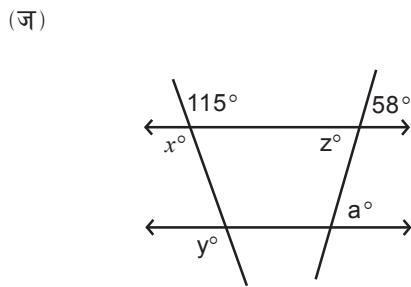
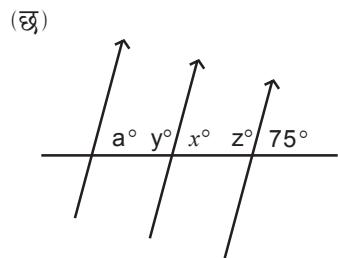
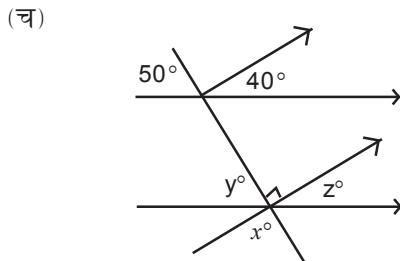
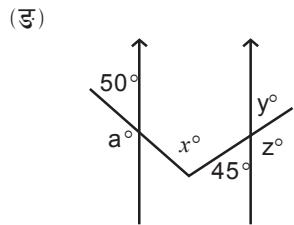
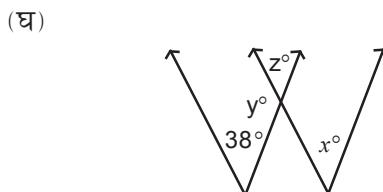
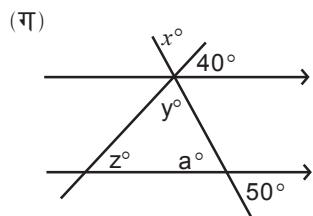
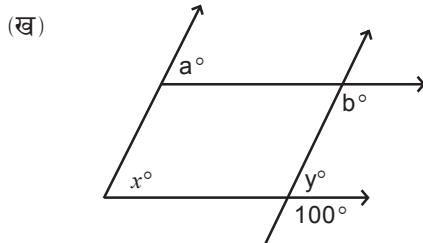
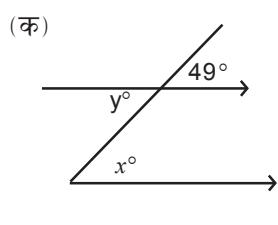
(ज)



3. कोणहरूको नापका आधारमा तलका दुई रेखाहरू AB र CD आपसमा समानान्तर छन् वा छैन्, कारणसहित लेख :



4. तल दिएका चित्रहरूमा a, b, c, x, y, z को मान पत्ता लगाऊ :



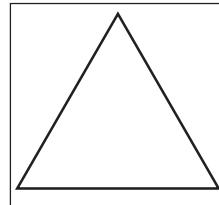
त्रिभुज, चतुर्भुज र बहुभुजहरू

(Triangle, Quadrilateral and Polygons)

2.0. पुनरवलोकन (Review)

कम्तीमा कति ओटा सिधा सिन्काहरू प्रयोग गरेर बन्द आकृति बनाउन सकिएला ? दुईओटाबाट सम्भव छ वा तीनओटा नै चाहिन्छ, तीनओटा सिधा रेखाखण्डहरूले बनेको बन्द आकृतिलाई त्रिभुज भनिन्छ । तीनओटा भुजाहरूमध्ये सबै बराबर छन् भने उक्त त्रिभुजलाई समबाहु त्रिभुज (equilateral triangle) भनिन्छ । यदि कुनै दुईओटा भुजाहरू बराबर भए उक्त त्रिभुजलाई कस्तो त्रिभुज भनिन्छ ? भुजाहरू फरक फरक नापका भए त्रिभुजलाई कस्तो त्रिभुज भनिन्छ ? त्रिभुजलाई भुजाका आधारमा वर्गीकरण गरे जस्तै कोणका आधारमा कति प्रकारमा विभाजन गर्न सकिएला ?

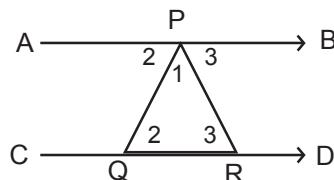
अब हामी त्रिभुजका विभिन्न गुणहरूको परीक्षणका बारेमा अध्ययन गर्दछौं ।



2.1 त्रिभुजका गुणहरूको परीक्षण (Verification of Properties of Triangles)

परीक्षण 1 : त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योगफल

चित्रमा दुईओटा समानान्तर रेखाहरूलाई छेदक PQ र छेदक PR ले काटी $\triangle PQR$ बनेको छ । त्रिभुजका तीन कोणलाई क्रमशः 1, 2 र 3 मानौँ । अब, $AB \parallel CD$ भएकाले



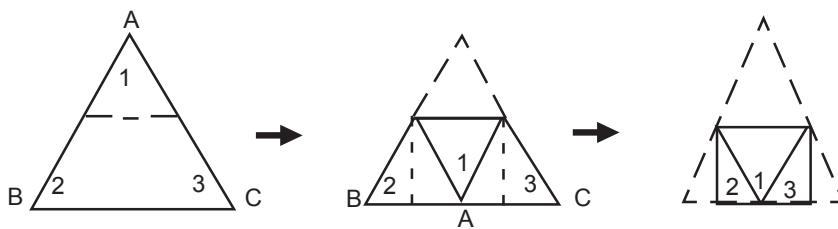
$\angle APQ = \angle PQR$ हुन्छ र $\angle BPR = \angle PRQ$ हुन्छ । (एकान्तर कोणहरू भएकाले)

तसर्थ, $\angle APQ = \angle 2$ र $\angle BPR = \angle 3$ हुन्छ ।

अब, बिन्दु P मा $\angle 1$, $\angle 2$ र $\angle 3$ मिलेर सिधा कोण $\angle APB$ बनाउँछ ।

सिधाकोण $\angle APB$ को मान कति हुन्छ ? यसको मान 180° हुन्छ । $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

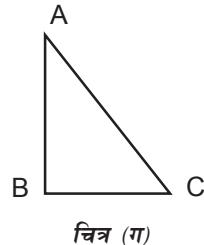
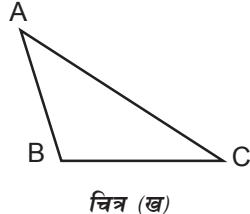
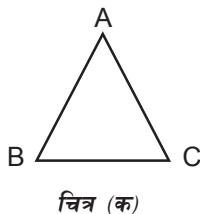
अर्को तरिका : एउटा बाक्लो कागजमा त्रिभुज खिच र कोणहरूलाई क्रमशः 1, 2 र 3 नाम देऊ । उक्त त्रिभुजलाई कैचीले काट । त्यसपछि शीर्षकोण A लाई BC मा पर्ने गरी पट्याउ । फेरि शीर्षबिन्दु B र C लाई पनि A मा नखप्टने गरी पट्याउ ।



अब, त्रिभुज ABC का तिन शीर्षविन्दुले एउटा सिधा कोण बनाए। चित्रमा देखाए जस्तै उक्त सिधाकोणको मान 180° हुन्छ।

प्रयोगात्मक परीक्षण

फरक फरक नापका भुजाहरू भएका तीनओटा त्रिभुजहरू खिच।



प्रोटेक्टरको प्रयोग गरी माथिका प्रत्येक त्रिभुजमा सबै कोणहरू नाप र तलको तालिका भर :

चित्र नं.	$\angle BAC$	$\angle ABC$	$\angle ACB$	$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$	परिणाम
(क)					
(ख)					
(ग)					

माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष पायौ ?

त्रिभुजका भित्री तीनओटा कोणको नापको योगफल कति पायौ ?

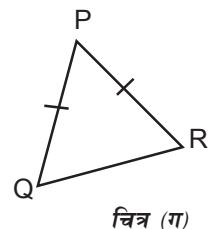
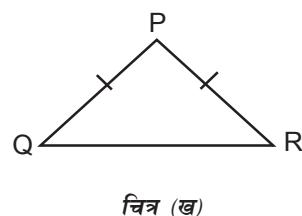
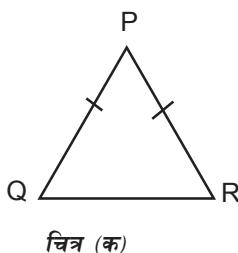
संगैको साथीसँग निष्कर्षबारे छलफल गर।

त्रिभुजका भित्री कोणहरूको नापको योगफल 180° वा दुई समकोण हुन्छ।

परीक्षण 2 : समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरूको सम्बन्ध

फरक फरक आधार भएका तीनओटा समद्विबाहु त्रिभुजहरू PQR खिच। जसमा आधार QR र $PQ = PR$ ।

प्रोटेक्टर प्रयोग गरेर प्रत्येक त्रिभुजका कोणहरू नाप र तलको तालिका भर :



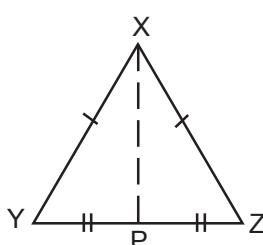
चित्र नं.	$\angle PQR$	$\angle PRQ$	$\angle QPR$	परिणाम
(क)				
(ख)				
(ग)				

माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष पायौ, साथीहरूसँग छलफल गर ।

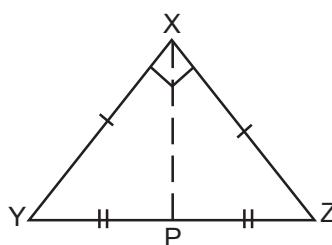
समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

परीक्षण 3 : समद्विबाहु त्रिभुजका शीर्षबिन्दुबाट आधारको मध्य बिन्दुमा खिचिएको रेखा र आधारको सम्बन्ध

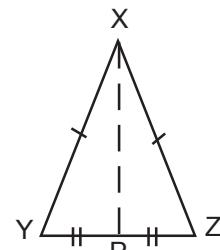
- फरक फरक आधार भएका तीनओटा समद्विबाहु त्रिभुजहरू ΔXYZ खिच ।
- आधार YZ को मध्यबिन्दु P पत्ता लगाई शीर्षबिन्दु X सँग जोड ।
- प्रोटेक्टरको प्रयोग गरी $\angle XPY$ र $\angle XPZ$ नाप र तलको तालिका भर :



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

चित्र नं.	$\angle XPY$	$\angle XPZ$	परिणाम
(क)			
(ख)			
(ग)			

माथिको तालिकाबाट के थाहा पायौ ?

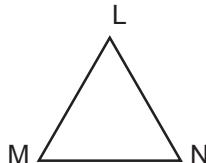
आसन्न कोणहरू बराबर भए वा मान 90° भए के हुन्छ, साथीहरूसँग छलफल गर ।

समद्विबाहु त्रिभुजमा शीर्षबिन्दुबाट आधारको मध्य बिन्दु जोड्ने रेखा आधारसँग लम्ब हुन्छ ।

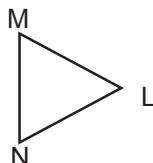
परीक्षण 4 : समबाहु त्रिभुजका कोणहरूको सम्बन्ध

सर्वप्रथम फरक नापका तीनओटा समबाहु त्रिभुजहरू खिच ।

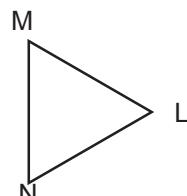
प्रोटेक्टरको सहायताले सबै कोणहरू नाप र तलको तालिका भर :



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

चित्र नं.	$\angle MLN$	$\angle MNL$	$\angle LMN$	परिणाम
(क)				
(ख)				
(ग)				

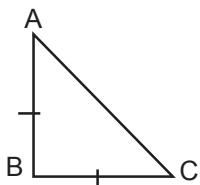
माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष निकालन सकिन्छ, आफ्नो कापीमा लेख र साथीहरूसँग छलफल गर ।

समवाहु त्रिभुजका सबै भित्री कोणहरू बराबर हुन्छन् र प्रत्येकको मान 60° हुन्छ ।

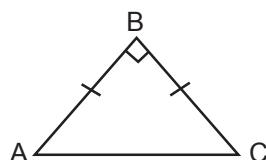
परीक्षण 5 : समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरूको सम्बन्ध

एउटा कोण समकोण (90°) भएका फरक नापका तीनओटा समद्विबाहु त्रिभुज ABC खिच ।

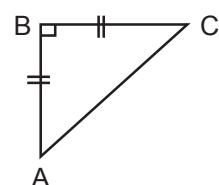
चित्रमा ABC समकोणी समद्विबाहु त्रिभुज हो जसमा $AB = BC$ छ र $\angle B = 90^\circ$ छ ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

अब, प्रोटेक्टर प्रयोग गरी सबै त्रिभुजका आधार कोणहरू नाप र तलको तालिकामा भर :

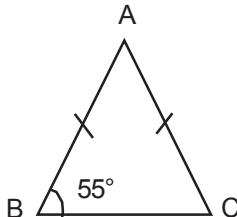
चित्र नं.	$\angle BAC$	$\angle ACB$	परिणाम
(क)			
(ख)			
(ग)			

माथिको तालिकाका आधारमा निष्कर्ष आफ्नो उत्तर पुस्तिकामा लेख ।

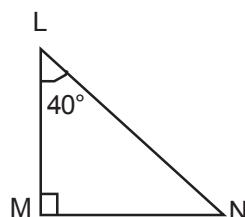
समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू 45° का हुन्छन् ।

उदाहरण 1

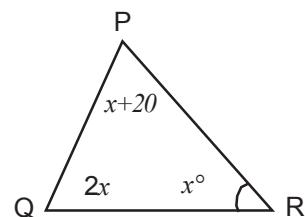
तलका त्रिभुजहरूमा बाँकी कोणहरू पत्ता लगाऊ :



(क)



(ख)



(ग)

समाधान

(क) यहाँ, $\triangle ABC$ समद्विबाहु त्रिभुज हो। यसमा $AB = AC$ र $\angle ABC = 55^\circ$ छ। $\triangle ABC$ समद्विबाहु भएकाले $\angle ABC = \angle ACB = 55^\circ$ हुन्छ।

$$\therefore \angle ACB = 55^\circ$$

फेरि, $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$ (त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योगफल $= 180^\circ$ हुन्छ।)

अथवा, $55^\circ + 55^\circ + \angle CAB = 180^\circ$

अथवा, $\angle CAB = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

$$\therefore \angle CAB = 70^\circ$$

(ख) $\triangle LMN$ समकोणी त्रिभुज हो। यसमा $\angle L = 40^\circ$; $\angle M = 90^\circ$ छ।

$$\angle L + \angle M + \angle N = 180^\circ$$

अथवा, $40^\circ + 90^\circ + \angle N = 180^\circ$

अथवा, $\angle N = 180^\circ - 130^\circ$

$$\therefore \angle N = 50^\circ$$

(ग) $\triangle PQR$ विषमभुज (विषमबाहु) त्रिभुज हो।

$\angle P + \angle Q + \angle R = 180^\circ$ (त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योगफल $= 180^\circ$ हुन्छ।)

अथवा, $x + 20^\circ + 2x + x = 180^\circ$

अथवा, $4x + 20^\circ = 180^\circ$

अथवा, $4x = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$

अथवा, $4x = 160^\circ$

$$\therefore x = 40^\circ$$

अब, $\angle P = x + 20^\circ = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$

$$\angle Q = 2x = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$$

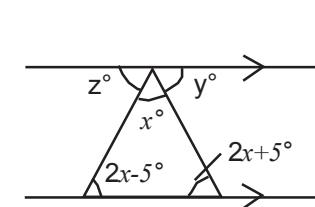
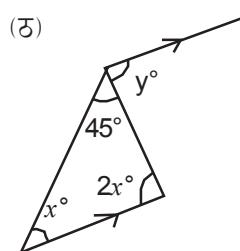
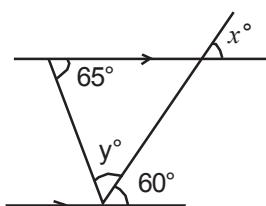
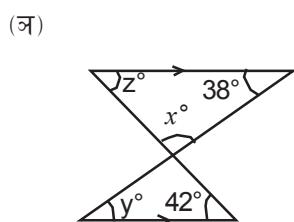
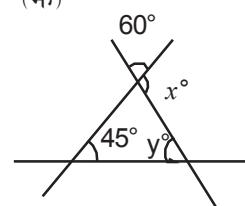
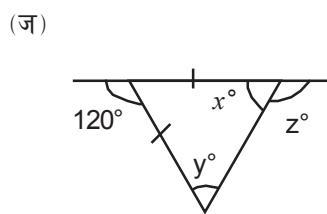
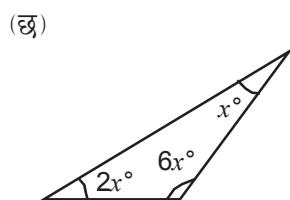
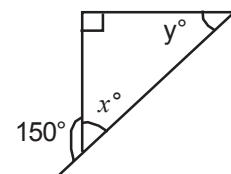
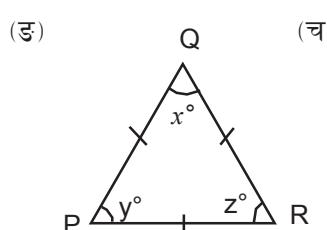
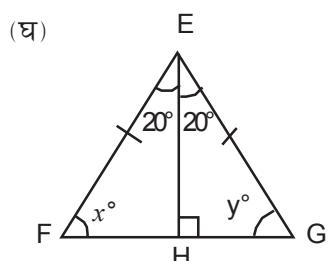
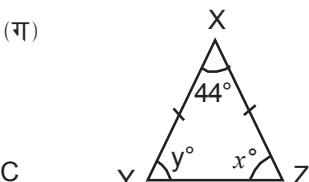
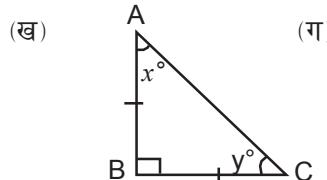
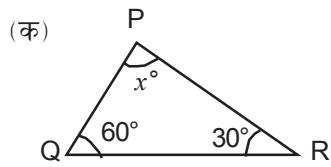
$$\angle R = x = 40^\circ$$

अभ्यास 2.1

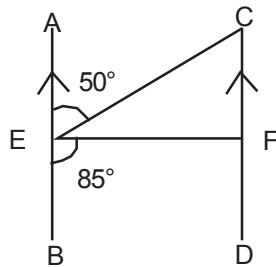
1. तीनओटा त्रिभुज खिची प्रयोगद्वारा प्रमाणित गर ।

- (क) त्रिभुजको कुनै दुई भुजाको लम्बाइको जोड तेस्रो भुजाभन्दा लामो हुन्छ ।
- (ख) त्रिभुजको एउटा भुजा लम्बाउँदा बन्ने बाहिरी कोण भित्री अनासन्न कोणहरूको योगफलसँग बराबर हुन्छ ।

2. तलका चित्रहरूमा x , y , z को मान पत्ता लगाई बाँकी कोणहरूको मान पत्ता लगाऊ :



3. सँगैको चित्रमा $AB \parallel CD$, $\angle FEB = 85^\circ$ र
 $\angle AEC = 50^\circ$ भए $\angle ECF$, $\angle DFE$ र $\angle CFE$
 को मान पत्ता लगाउ ।



4. फरक नापमा तीनओटा त्रिभुज ABC खिच जसमा $AC > AB$ छ । अब तलको जस्तै तालिका बनाई दिइएका भुजा र कोणको नाप भर र निष्कर्ष लेख :

चित्र	AC	AB	$\angle ACB$	$\angle ABC$	परिणाम
(क)					
(ख)					
(ग)					

नियमित बहुभुजको रचना (Construction of Regular Polygons)

तलका प्रश्नहरूबारे छलफल गराँ :

बहुभुज भनेको के हो, नियमित बहुभुज भन्नाले के बुझिन्छ, नियमित बहुभुजको भित्री कोणहरू कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

नियमित बहुभुज, बहुभुजको भित्री र बाहिरी कोणहरूका बारेमा हामीले कक्षा 7 मा अध्ययन गरी सकेका छौं । यहाँ हामी नियमित बहुभुजको रचनाका बारेमा अध्ययन गर्दछौं ।

यदि नियमित बहुभुजको भुजाको सङ्ख्या n भएमा उक्त बहुभुजको भित्री कोणको नाप $\frac{n-2}{n} \times 180^\circ$ हुन्छ ।

(I) नियमित पञ्चभुजको रचना (construction of regular pentagon)

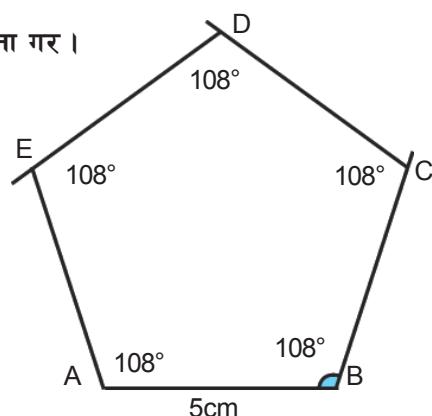
5cm भुजा लम्बाई भएको एउटा नियमित पञ्चभुजको रचना गर ।

पहिलो तरिका

1. नियमित पञ्चभुजको भित्री कोणको मान पत्ता लगाउने तरिका

यहाँ, $n = 5$

$$\text{भित्री कोण} = \frac{n-2}{n} \times 180^\circ = \frac{5-2}{5} \times 180^\circ = 108^\circ$$

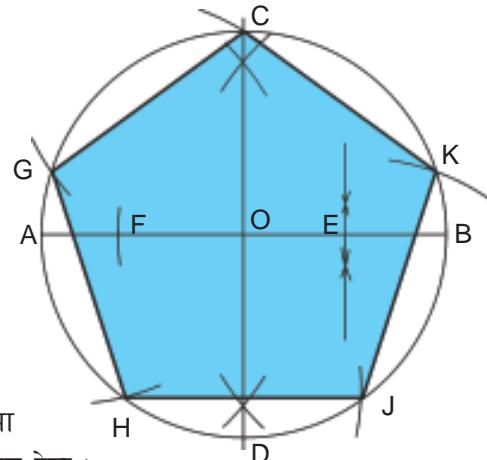


- AB = 5cm भएको सिधा रेखाखण्ड खिच र प्रोटेक्टरले बिन्दु B मा 108° को कोण खिच ।
 - उक्त रेखामा 5cm को चापले काट र C नाम देऊ । C मा 108° को कोण खिच । अब 5cm मा चिह्न लगाई D नाम देऊ ।
 - यस्तै गरी बिन्दु D मा 108° को कोण खिच र 5cm मा चिह्न लगाई E नाम देऊ । अनि बिन्दु E र A जोड ।
- अब आवश्यक पञ्चभुज ABCDE तयार भयो ।

दोस्रो तरिका

5cm व्यास भएको वृत्तमित्र पञ्चभुजको रचना गर ।

- कम्पासको सहायताले सर्वप्रथम व्यास AB = 5cm र केन्द्र O भएको एउटा वृत्त खिच ।
- AB को लम्बार्धक खिच र वृत्तको परिधिसम्म लम्बाइ क्रमशः C र D नाम देऊ ।
- फेरि अर्धव्यास OB को लम्बार्धक खिच र काटिएको बिन्दुलाई E नाम देऊ ।
- बिन्दु E बाट EC बराबरको चापले OA मा काट र F नाम देऊ ।
- F बाट C बराबरको चाप लेऊ र वृत्तको परिधिमा C बाट चापहरू खिच र क्रमशः G, H, J र K नाम देऊ ।
- रुलरले C, G, H, J र K बिन्दुहरू जोड ।
- अब आवश्यक नियमित पञ्चभुज CGHJK तयार भयो ।

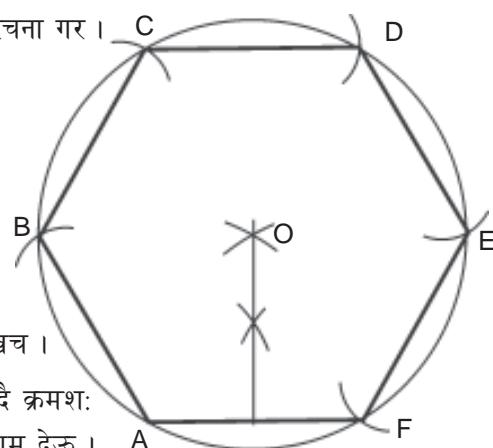


(II) नियमित षट्भुजको रचना (construction of regular hexagon) (नापेर हेर)

एउटा भुजाको नाप 4cm भएको नियमित षट्भुजको रचना गर ।

तरिका :

- AF = 4cm को एउटा सरल रेखा खिच ।
- बिन्दु A बाट र बिन्दु F बाट AF बराबर नापको चाप लिएर काट र चाप खिच र काटिएको बिन्दुलाई O नाम देऊ ।
- O लाई आधार मानेर OA अर्धव्यास भएको वृत्त खिच ।
- OA बराबरको चापले वृत्तको परिधिमा A बाट B हुँदै क्रमशः काट र काटिएको बिन्दुलाई क्रमशः B, C, D, E नाम देऊ ।



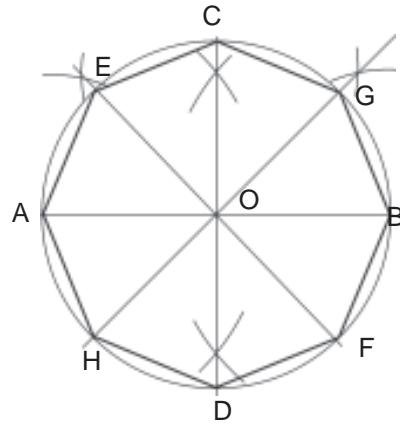
- अब A, B, C, D, E र F लाई रुलरले जोड ।
 - आवश्यक पटभुज ABCDEF तयार भयो ।

(III) नियमित अष्टभुजको रचना (construction of regular octagon)

5cm व्यास भएको वृत्तभित्र नियमित अष्टभुजको रचना गर ।

तरिका

1. कम्पासको प्रयोग गरेर केन्द्र O र व्यास AB = 5cm भएको एउटा वृत्त खिच ।
 2. व्यास AB को लम्बार्धक खिच ।
 3. अब, $\angle COA$ र $\angle BOC$ को अर्धक खिच ।
त्यसलाई परिधिसम्म लम्ब्याउ । अब काटिएका बिन्दुहरूलाई क्रमशः E र F तथा G र H नाम देउ ।
 4. रुलर प्रयोग गरी बिन्दुहरू क्रमशः A, E, C, G, B, F, D, H र A जोड ।
 5. अब आवश्यक नियमित अष्टभज तयार भयो ।



नोट : नियमित पठभुज र नियमित अष्टभुजको रचना पनि पञ्चभुजको जस्तै भिन्नी कोणहरू पता लगाएर पनि गर्न सकिन्छ ।

अभ्यास 2.2

2.3 समानान्तर चतुर्भुज, वर्ग र आयतका गुणहरूको परीक्षण

(i) समानान्तर चतुर्भुजका गुणहरूको खोजी

तलका प्रश्नहरूका आधारमा छलफल गरौँ :

समानान्तर चतुर्भुज भनेको के हो ?

यसका गुणहरू के के हुन् ?

यसका बारेमा हामीले अधिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरिसकेका छौं।

यहाँ, हामी समानान्तर चतुर्भुजमा निम्नलिखित गुणहरूको परीक्षण गर्दछौं :

(क) समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन्।

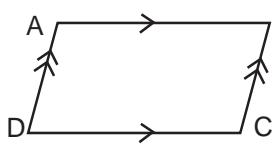
(ख) समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरूको नाप बराबर हुन्छ।

(ग) समानान्तर चतुर्भुजका क्रमागत कोणहरू परिपूरक हुन्छन्।

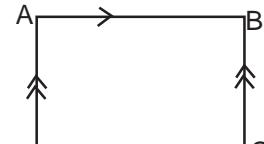
(घ) समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू आपसमा समद्विभाजन हुन्छन्।

(क) समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन्।

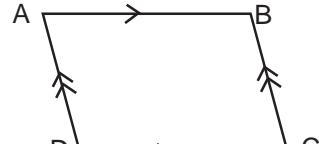
फरक फरक नाप र किसिमका तिन ओटा समानान्तर चतुर्भुजहरू खिच ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

अब प्रत्येक समानान्तर चतुर्भुजका कोणहरू नाप र तलको जस्तै तालिका बनाई प्रस्तुत गर :

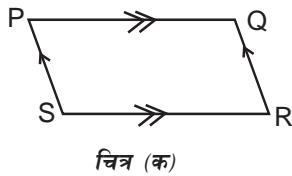
चित्र नं	$\angle DAB$	$\angle BCD$	$\angle ABC$	$\angle CDA$	परिणाम
(क)					
(ख)					
(ग)					

अब आफ्नो निष्कर्षलाई आफ्नो समूहमा छलफल गरी कक्षामा प्रस्तुत गर ।

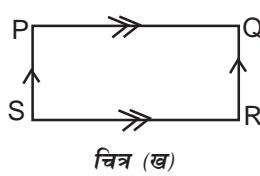
समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

(ख) समानान्तर चतुर्भुजमा सम्मुख भुजाहरूको नाप बराबर हुन्छ ।

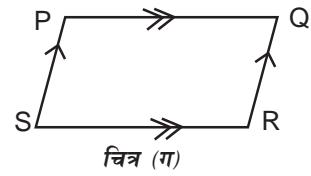
माथि नं. (क) मा जस्तै फरक फरक नाप र किसिमका तीन तीनओटा समानान्तर चतुर्भुज PQRS खिच । आफूले खिचेका समानान्तर चतुर्भुजका भुजाहरू रूलरको सहयोगमा नाप र तलको जस्तै तालिका बनाई भर :



चित्र (क)



चित्र (ख)



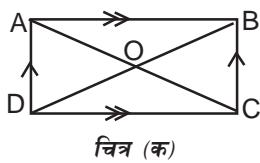
चित्र (ग)

चित्र नं.	PQ	RS	QR	PS	परिणाम
(क)					परिणाम
(ख)					
(ग)					

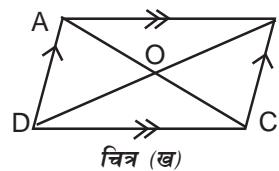
अब, आफ्नो निष्कर्षबारे आफ्नो समूहमा छलफल गरे र निष्कर्ष निकाल ।

समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरूको नाप बराबर हुन्छ ।

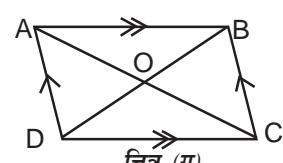
(ग) समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजन हुन्छन् ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

तीन तीन जनाको समूह निर्माण गरी प्रत्येकले फरक फरक नापका तीन तीन ओटा समानान्तर चतुर्भुजहरू ABCD खिची विकर्णहरू AC र BD जोडे र विकर्णहरूको प्रतिच्छेदन बिन्दुलाई O मान ।

अब, प्रत्येकले समानान्तर चतुर्भुजको विकर्णहरूको नाप लिने र तलको जस्तै तालिका बनाई प्रस्तुत गरे :

चित्र नं.	OA	OC	परिणाम	OB	OD	परिणाम
(क)			परिणाम			परिणाम
(ख)						
(ग)						

अब, आफ्नो निष्कर्षलाई समूहमा प्रस्तुत गर्ने र समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष पत्ता लगाऊ ।

समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजन हुन्छन् ।

(ii) आयतका गुणहरूको परीक्षण

आयत भनेको के हो र यसका गुणहरू के के हुन, यसका बारेमा हामीले अधिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरिसकेका छौँ । अब हामी यसका निम्नलिखित गुणहरूको परीक्षण गर्ने छौँ :

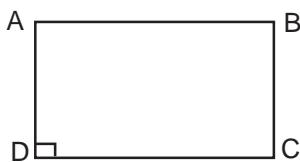
आयत भनेको एउटा कोण 90° भएको समानान्तर चतुर्भुज हो । तसर्थ, समानान्तर चतुर्भुजका सबै गुणहरू आयतका पनि गुणहरू हुन् । यसका साथै,

(क) आयतका विपरीत भुजाहरू बराबर र समानान्तर हुन्छन् ।

(ख) आयतका सबै कोणहरू बराबर र समकोणी हुन्छन् ।

(ग) आयतका विकर्णहरू समद्विभाजित हुन्छन् ।

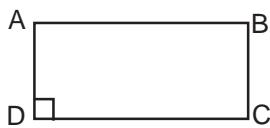
(घ) आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।



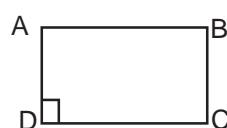
माथिका गुणहरूमध्ये (क) र (ग) हामीले समानान्तर चतुर्भुजमा नै परीक्षण गरिसकेका छौं, यसलाई समानान्तर चतुर्भुजको सट्टामा आयत राखी परीक्षण गरेर शिक्षकलाई देखाऊ ।

(ख) आयतका सबै कोणहरू बराबर र समकोणी हुन्छन् ।

फरक फरक नापका तीनओटा आयत खिच । आफूले खिचेको आयतका सबै कोणहरूलाई प्रोटेक्टरले नापेर तलको जस्तै तालिकामा प्रस्तुत गर :



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

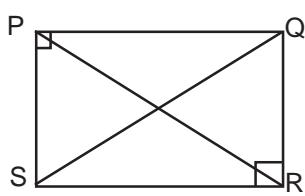
चित्र	$\angle DAB$	$\angle ABC$	$\angle BCD$	$\angle CDA$	निष्कर्ष
(क)					
(ख)					
(ग)					

आफ्नो निष्कर्षबाटे साथीहरूसँग छलफल गर ।

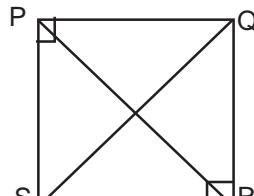
आयतका सबै कोणहरू बराबर र समकोणी हुन्छन् ।

(घ) आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।

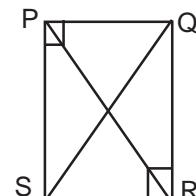
फरक फरक नापका तीनओटा आयतहरू खिच र विकर्णहरू PR र QS जोड ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

अब रूलर प्रयोग गरी सबै विकर्णहरू नापी तलको जस्तै तालिकामा प्रस्तुत गर र निष्कर्ष पनि पत्ता लगाऊ :

चित्र नं.	PR	QS	परिणाम
(क)			
(ख)			
(ग)			

आफ्नो निष्कर्षबाटे साथीहरूबिचमा छलफल गर ।

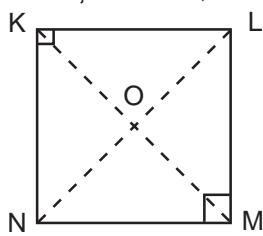
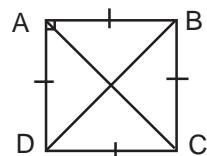
आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।

(iii) वर्गका गुणहरूको परीक्षण

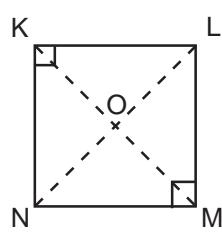
वर्ग भनेको के हो, यसका गुणहरू के के हन, यसका बारेमा हामीले अधिल्ला कक्षाहरूमा नै अध्ययन गरिसकेका छौं । सबै भुजाहरू बराबर भएको आयतलाई वर्ग भनिन्छ । त्यस कारण आयतमा सबै गुणहरू वर्गका पनि गुणहरू हुन् ।

वर्गका गुणहरू निम्नानुसार छन् :

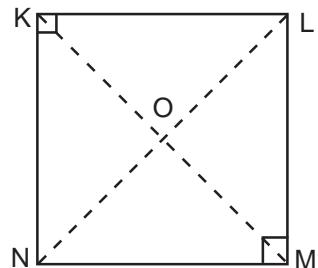
- (क) वर्गका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
 - (ख) वर्गका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।
 - (ग) वर्गका सबै कोणहरू बराबर र समकोणी हुन्छन् ।
 - (घ) वर्गका विकर्णहरू आपसमा समकोणी हुने गरी समद्विभाजित हुन्छन् ।
 - (ङ) वर्गका प्रत्येक विकर्णले शीर्ष कोणलाई आधा गर्दछन् ।
- माथिका (क), (ख) र (ग) का गुणहरू आयत र समानान्तर चतुर्भुजका गुणहरूसँग मिल्दाजुल्दा छन् । तसर्थ यी गुणहरू अगाडि गरे जस्तै परीक्षण गरी शिक्षकलाई देखाऊ ।
- (घ) वर्गका विकर्णहरू आपसमा समकोण हुने गरी समद्विभाजित हुन्छन् ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

हाम्रो गणित, कक्षा ८

अब रुलर र प्रोटेक्टर प्रयोग गरेर तल दिइएका कोणहरू र भुजाहरू नाप र तलको तालिकामा जस्तै बनाई प्रस्तुत गर :

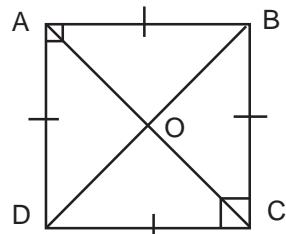
चित्र	कोणहरूको नाप				विकर्ण KM का खण्डहरू		विकर्ण LN का खण्डहरू		परिणाम
	$\angle KOL$	$\angle LOM$	$\angle MON$	$\angle NOK$	OK	OM	OL	ON	
(क)									
(ख)									
(ग)									

अब माथिको तालिकाबाट के निष्कर्ष निकालन सकिन्छ लेख र साथीहरूसँग छलफल गरी समूहमा निष्कर्ष निकाल ।

वर्गका विकर्णहरू आपसमा समकोण हुने गरी समद्विभाजन हुन्छन् ।

(ड) वर्गका प्रत्येक विकर्णले शीर्षकोणहरूलाई आधा गर्न्छ ।

तीन तीन जनाको समूह बनाऊ र सबैले एक एकओटा वर्ग ABCD मा विकर्णहरू AC र BD खिच ।



अब प्रत्येकले तलको जस्तै तालिका बनाई दिइएका कोणहरू नाप र तालिकामा भर :

शीर्षकोणको नाप	सहायक कोणको नाप	निष्कर्ष
$\angle ABC =$	$\angle ABO = \dots\dots$ र $\angle CBO = \dots\dots$	
$\angle BCD =$	$\angle BCO = \dots\dots$ र $\angle OCD = \dots\dots$	
$\angle CDA =$	$\angle CDO = \dots\dots$ र $\angle ODA = \dots\dots$	
$\angle DAB =$	$\angle DAO = \dots\dots$ र $\angle OAB = \dots\dots$	

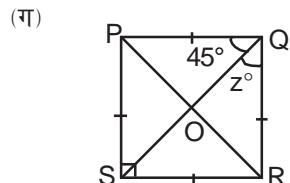
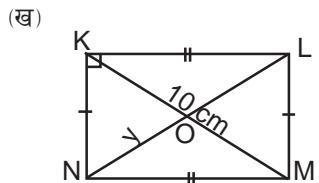
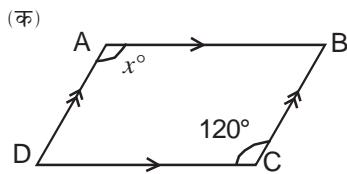
तालिकाका आधारमा निकालेको आफ्नो निष्कर्षलाई समूहमा प्रस्तुत गर र छलफल गरी सामूहिक निष्कर्ष निकाल ।

वर्ग ABCD मा विकर्ण AC ले शीर्षकोण $\angle DAB$ र $\angle BCD$ लाई आधा गरेको छ । त्यस्तै, विकर्ण BD ले शीर्षकोणहरू $\angle ABC$ र $\angle CDA$ लाई आधा पारेको छ ।

वर्गका प्रत्येक विकर्णले शीर्षकोणहरूलाई आधा गर्दछन् ।

उदाहरण 1

दिइएका चित्रहरूमा x , y र z को मान पत्ता लगाऊ :



समाधान

(क) ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

यहाँ, $\angle BCD = 120^\circ$ छ ।

$$\angle BAD = x = ?$$

हामीलाई थाहा छ, समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

$$\angle BAD = \angle BCD$$

$$\text{अथवा, } x = 120^\circ$$

(ख) KLMN एउटा आयत हो जसमा

विकर्ण $KM = 10\text{cm}$ छ भने विकर्ण $LN = y\text{cm}$ छ ।

हामीलाई थाहा छ, आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् । तसर्थ $KM = LN$ हुन्छ ।

$$\therefore y = KM = 10\text{cm} \text{ हुन्छ ।}$$

(ग) PQRS एउटा वर्ग हो जसमा PR र QS दुईओटा विकर्णहरू छन् ।

$$\angle OQP = 45^\circ \text{ छ र } \angle OQR = Z \text{ छ ।}$$

हामीलाई थाहा छ, वर्गका विकर्णले शीर्षकोणलाई आधा गर्दछ । तसर्थ

$$\angle OQR = \angle OQP \text{ हुन्छ, (किनकि } QS \text{ विकर्ण हो)}$$

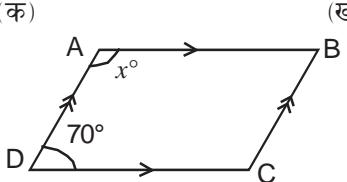
$$\therefore \angle OQR = Z = 45^\circ \text{ हुन्छ ।}$$

अभ्यास 2.3

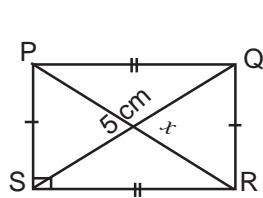
- समानान्तर चतुर्भुज, वर्ग र आयतका गुणहरूको सूची तयार पार ।
- आयत र वर्गका फरक गुणहरू के के छन्, पत्ता लगाऊ ।

3. तलका चित्रहरूमा x , y र z को मान पत्ता लगाऊ :

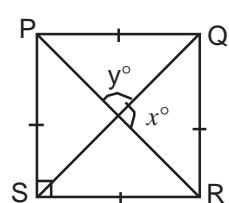
(क)



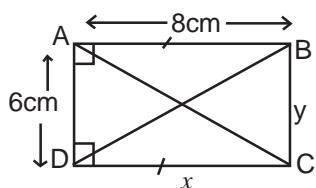
(ख)



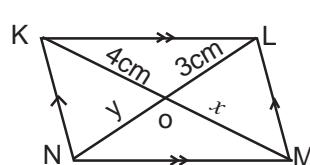
(ग)



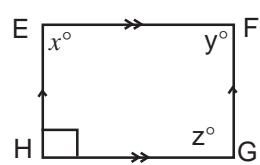
(घ)



(ङ)



(च)



4. लम्बाइ (ℓ) = 18cm र चौडाइ (b) = 9cm भएको एउटा आयत बनाई त्यसका गुणहरूको परीक्षण गर ।

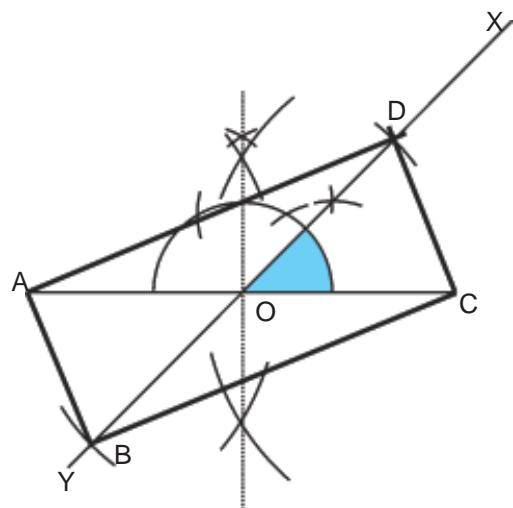
2.4. आयतको रचना (Construction of Rectangle)

(क) दुई विकर्णहरू र तिनीहरूविचको कोण दिइएमा,

विकर्णहरू $AC = BD = 7\text{cm}$ र $\angle COD = 45^\circ$ भएको आयतको रचना गर ।

चरणहरू

1. $AC = 7\text{cm}$ को एउटा सिधा रेखा खिच ।
2. AC को मध्य बिन्दु O पत्ता लगाऊ ।
3. कम्पासको प्रयोगले बिन्दु O मा 45° को कोण खिच र XY सम्म लम्बाऊ ।
4. OA बराबरको चापले X तिर र Y तिर काट र क्रमशः D र B नाम देउ ।
5. रुलरको प्रयोग गरी बिन्दुहरू A , B , C र D क्रमशः जोड ।
6. आवश्यक आयत $ABCD$ तयार भयो ।

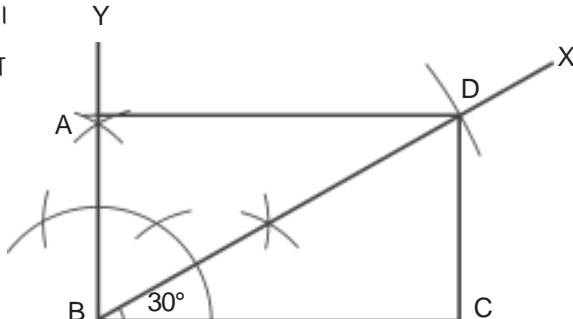


(ख) एउटा भुजा, एउटा विकर्ण र त्यसले त्यही भुजासँग बनाएको कोण दिइएमा

आधार रेखा $BC = 8 \text{ cm}$, $\angle DBC = 30^\circ$ र विकर्ण $BD = 9 \text{ cm}$ भएको आयतको रचना गर ।

चरणहरू

1. $BC = 8 \text{ cm}$ को एउटा आधार रेखा खिच ।
2. कम्पासको प्रयोग गरी B मा 30° को कोण खिच र X सम्म लम्बाउँ ।
3. कम्पासमा 9 cm लामो चाप लिएर BX मा काट र D नाम देऊ ।
4. C र D लाई सरल रेखाले जोड ।
5. B मा कम्पासको सहायताले 90° को कोण खिच र BY रेखा तान ।
6. BY मा CD बराबरको चापले काट र A नाम देऊ ।
7. बिन्दु A र D जोड ।
8. आवश्यक आयत $ABCD$ तयार भयो ।



अभ्यास 2.4

1. तलका प्रत्येक अवस्थामा आयतको रचना गर :

(क) विकर्ण (AC) = $BD = 8\text{cm}$, $\angle BOC = 30^\circ$ (ख) विकर्ण (PR) = 7cm , $\angle QOR = 45^\circ$

(ग) विकर्ण (BD) = 10cm , $\angle AOD = 60^\circ$

2. दुई विकर्णको बिचको कोण 75° भएको र विकर्णको लम्बाइ 7.4cm भएको एउटा आयतको रचना गर ।

3. तलका प्रत्येक अवस्थामा आयतको रचना गर :

(क) विकर्ण $PR = 6 \text{ cm}$ $PQ = 3 \text{ cm}$, $\angle QPR = 60^\circ$ भएको आयत $PQRS$.

(ख) $BC = 7.1 \text{ cm}$, $BD = 10 \text{ cm}$, $\angle DBC = 45^\circ$ भएको आयत $ABCD$.

(ग) एउटा भुजा 4.8 cm र विकर्ण 6.2 cm

(घ) $AC = 5 \text{ cm}$, $AB = 4 \text{ cm}$ र $\angle BAC = 60^\circ$ भएको आयत $ABCD$.

4. तलका प्रत्येक अवस्थामा आयतको रचना गर :

(क) विकर्ण $AC = 8\text{cm}$ र AC र BD बिचको कोण 45° भएको

(ख) एउटा विकर्णको लम्बाइ 7cm र दुईविकर्ण बिचको कोणको नाप 30° भएको

(ग) एउटा भुजा 5cm , विकर्ण 10cm र ती दुईबिचको कोण 60° भएको

(घ) $PR = 9.9\text{cm}$, $PQ = 7\text{cm}$ र $QPR = 45^\circ$ भएको ।

पाठ 3

त्रिभुजको अनुरूपता र समरूपता (Congruence and Similarity of Triangles)

3.0 पुनरवलोकन (Review)

तलका तीन जोडा आकृतिहरूमा के के समानता र के के फरक देखिन्छ, साथीहरूसँग छलफल गर :

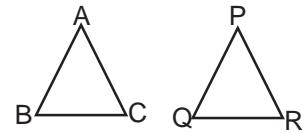


पहिलो जोडा त्रिभुजहरूमा दुवै उस्तै आकार र एउटै नापका छन् । तसर्थ यी दुई त्रिभुजहरू अनुरूप छन् । दोस्रो जोडा समानान्तर चतुर्भुजहरूमा दुवै उस्तै आकार तर फरक नापका छन् । तसर्थ यी दुई चतुर्भुजहरू समरूप छन् । त्यसै, तेस्रो जोडा चित्रहरू दुवै फरक फरक आकार र फरक नापका छन् । तसर्थ ती दुई आकृतिहरू अनुरूप पनि छैनन् र समरूप पनि छैनन् ।

कुनै दुई ज्यामितीय आकृतिहरू उस्तै आकार र एउटै नापका छन् भने

त्यस्ता ज्यामितीय आकृतिहरूलाई अनुरूप (congruent) भनिन्छ ।

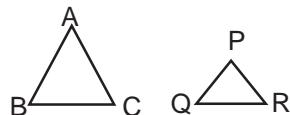
चित्रमा $\triangle ABC$ र $\triangle PQR$ अनुरूप छन् । सङ्केतमा $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ लेखिन्छ ।



कुनै दुई ज्यामितीय आकृतिहरू उस्तै आकारका छन् भने

त्यस्ता ज्यामितीय आकृतिहरूलाई समरूप (similar) भनिन्छ ।

चित्रमा $\triangle ABC$ र $\triangle PQR$ समरूप छन् । सङ्केतमा $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ लेखिन्छ ।

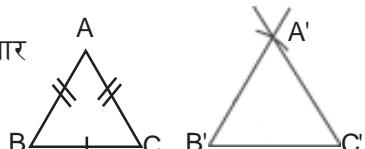


3.1. त्रिभुज अनुरूप हुने अवस्थाहरूको परीक्षण

क्रियाकलाप 1. कुनै $\triangle ABC$ दिइएको छ । उक्त त्रिभुजसँग अनुरूप हुने गरी कति तरिकाले रचना गर्न सकिन्छ, हेरौँ :

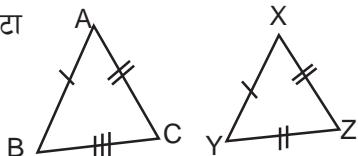
तरिका 1

यहाँ $\triangle ABC$ दिइएको छ । सर्वप्रथम BC बराबरको नाप भएको आधार रेखा $B'C'$ खिच । बिन्दु B बाट AB बराबरको कम्पासको चापले माथि चाप खिच । फेरि C बाट CA बराबरको चापले काट र काटिएको बिन्दुलाई A' ले जनाऊ ।



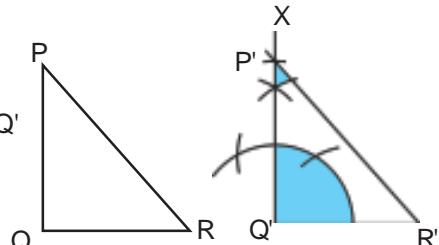
A' , B' र A', B', C' जोड । चित्रअनुसार $\triangle ABC$ का तीनओटा भुजा र $\triangle A'B'C'$ का तीनओटा भुजासँग क्रमशः बराबर छन् । $\triangle ABC$ र $\triangle A'B'C'$ अनुरूप छन् । (नापेर हेर)

यसरी एउटा त्रिभुजमा तीनओटा भुजाहरू अर्को त्रिभुजका तीनओटा भुजाहरूसँग अलग अलग आपसमा बराबर छन् भने उक्त दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् ।
यसलाई भुजा भुजा भुजा (side, side, side) वा छोटकरीमा भु. भु. भु. (SSS) तथ्य भनिन्छ । चित्रमा $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ छ ।



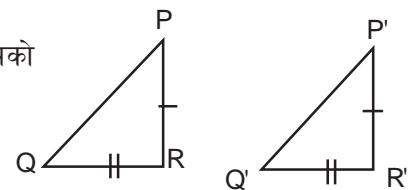
तरिका 2

QR को लम्बाइ बराबरको आधार रेखा $Q'R'$ खिच ।
कम्पासको प्रयोग गरी $\angle Q$ नाप र त्यही बराबरको कोण Q' मा खिच र रेखा $Q'X$ तान ।
अब QP बराबरको चापले Q' बाट $Q'X$ मा काट र P' नाम देऊ ।



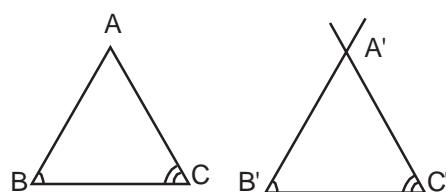
विन्दु P' र R' जोड । यसरी बनेको $\triangle P'Q'R'$ र $\triangle PQR$ अनुरूप हुन्छन् । तसर्थ $\triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$ हुन्छ ।

यदि एउटा त्रिभुजमा दुईओटा भुजाहरू र तिनीहरूबिचको कोणसँग अर्को त्रिभुजका दुईओटा भुजाहरू र तिनीहरूबिचको कोण अलग अलग आपसमा बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् ।
यसलाई भुजा कोण भुजा (side, angle, side) छोटकरीमा भु.को.भु. (SAS) तथ्य भनिन्छ । यहाँ $\triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$ छ ।



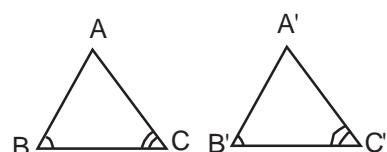
तरिका 3

BC बराबरको लम्बाइ भएको आधार $B'C'$ खिच ।
प्रोटेक्टरको प्रयोग गरी $\angle B$ नाप र B' मा त्यही नापको कोण खिच । फेरि C को मान प्रोटेक्टरको प्रयोग गरी नाप र सोही बराबरको कोण C' मा खिच । दुई रेखा काटिने विन्दुलाई A' नाम देऊ ।
अब $\triangle ABC$ र $\triangle A'B'C'$ अनुरूप हुन्छन् । (नापेर हेर)



एउटा त्रिभुजको दुईओटा कोण र ती कोणहरूबिचको भुजा, अर्को त्रिभुजको दुईओटा कोण र ती कोणहरूबिचको भुजासँग आपसमा अलग अलग बराबर भए ती त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् ।
यसलाई कोण, भुजा, कोण (Angle, side, angle) छोटकरीमा को.भु.को. (ASA) तथ्य भनिन्छ ।

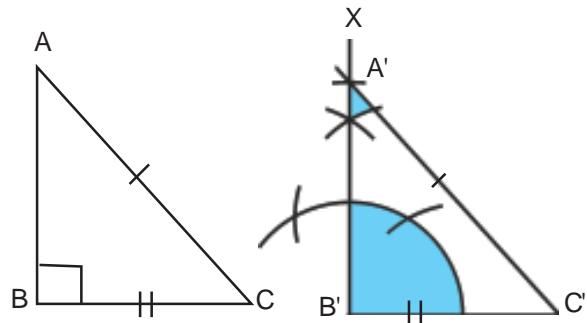
$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \text{ हुन्छ ।}$$



तरिका 4

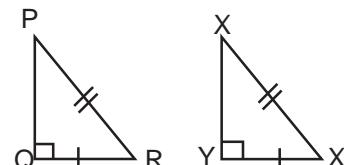
यदि, $\triangle ABC$ समकोणी त्रिभुज भएमा उक्त त्रिभुजसँग अनुरूप हुने त्रिभुज कसरी रचना गर्न सकिन्छ, हेराई :

1. यहाँ $\triangle ABC$ एउटा समकोणी त्रिभुज छ। यसमा $\angle B$ समकोण (90°) छ।
2. BC बराबर हुने गरी $B'C'$ आधार रेखा खिच।
3. कम्पास/प्रोटेक्टरको प्रयोग गरी B' मा 90° को कोण खिच।
4. $\triangle ABC$ को कर्ण AC बराबरको चाप C' बाट लिएर चित्रमा $B'X$ मा काट र काटिएको बिन्दुलाई A' नाम देऊ।
5. A' र C' जोड। अब $\triangle ABC$ र $\triangle A'B'C'$ अनुरूप छन्, नापेर हेर।



एउटा त्रिभुजका समकोण, कर्ण र एउटा भुजाका आधारमा पनि $\triangle ABC$ सँग अनुरूप त्रिभुज रचना गर्न सकियो।

एउटा त्रिभुजको समकोण, कर्ण र एउटा भुजा अर्को त्रिभुजको समकोण, कर्ण र एउटा भुजा आपसमा अलग अलग बराबर छन् भने त्रिभुज अनुरूप हुन्छन्। यसलाई समकोण, कर्ण र भुजा (right angle, hypotenues र side) छोटकरीमा स.क.भु. (R.H.S) तथ्य भनिन्छ। चित्रमा $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$



उदाहरण 1

दिइएका जोडा त्रिभुजहरू अनुरूप छन्। x को मान निकाली बाँकी कोण र भुजाहरूको नाप पत्ता लगाऊ :

समाधान

यहाँ ABC र XYZ अनुरूप छन्।

$$\angle A = \angle X = 35^\circ, \angle B = \angle Y = 123^\circ \text{ र } \angle C = \angle Z = 22^\circ$$

फेरि $AB = XY$

$$\text{अथवा, } (1.7x - 1.3)\text{cm} = (3x - 3.9)\text{cm}$$

$$\text{अथवा, } 1.7x - 1.3 = 3x - 3.9$$

$$\text{अथवा, } 3x - 1.7x = 3.9 - 1.3$$

$$\text{अथवा, } 1.3x = 2.6$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{2.6}{1.3} = 2$$

त्यस कारण, $AB = 1.7x - 1.3 = 1.7 \times 2 - 1.3 = 2.1\text{cm}$

$$XY = 3x - 3.9 = 3 \times 2 - 3.9 = 2.1\text{cm}$$

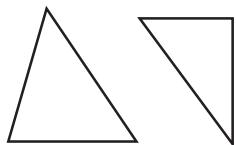
$$AC = XZ = 4.9\text{cm}$$

$$BC = YZ = 4.3\text{cm}$$

अभ्यास 3.1

1. तलका जोडी त्रिभुजहरूका भुजाहरू तथा कोणहरू नाप र अनुरूप छन् वा छैनन, लेख :

(क)

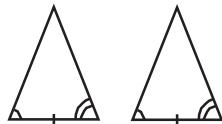


(ख)



2. तलका जोडी त्रिभुजहरू कुन तथ्यका आधारमा अनुरूप छन्, लेख :

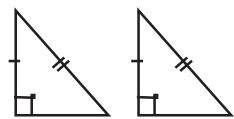
(क)



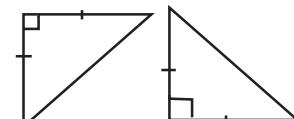
(ख)



(ग)

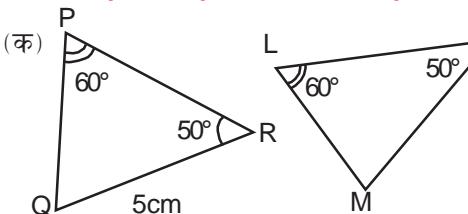


(घ)

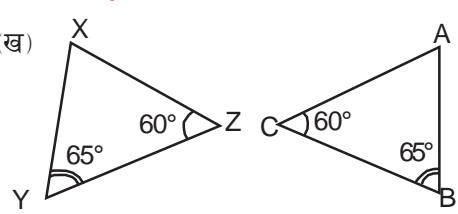


3. तलका अनुरूप त्रिभुजहरूमा सङ्गत भुजा र सङ्गत कोणहरू छुट्याएर लेख :

(क)

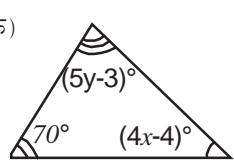


(ख)

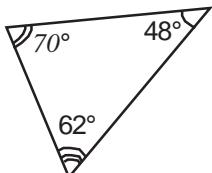


4. दिइएका अनुरूप त्रिभुजहरूमा x र y को मान पत्ता लगाई थाहा नभएका भुजा र कोणहरूको मान निकाल :

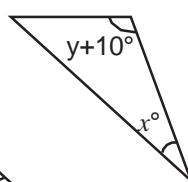
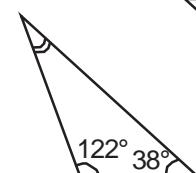
(क)

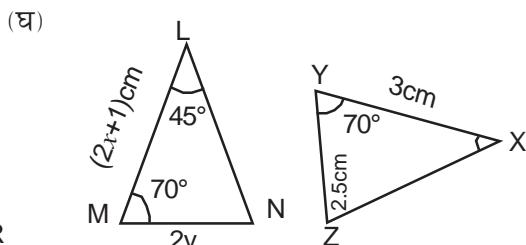
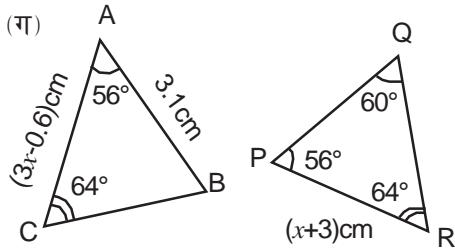


(ख)

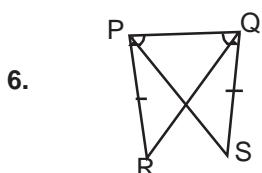
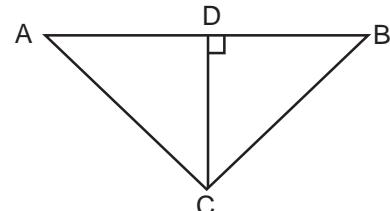


(ग)



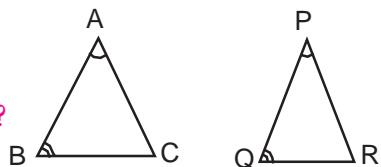


5. दिइएको चित्रमा बिन्दु D रेखा AB को मध्यबिन्दु हो र $CD \perp AB$ छ भने कुन तथ्यका आधारमा $\triangle ACD$ र $\triangle ABCD$ अनुरूप छन्, देखाऊ :



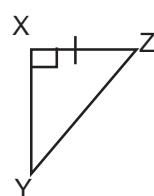
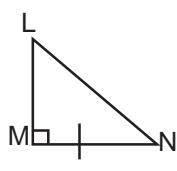
सँगैका चित्रमा $\triangle PQR$ र $\triangle PQS$ लाई अनुरूप देखाऊ, जहाँ $\angle RPQ = \angle PQS$ र $QS = PR$ छ ।

7. $\triangle ABC$ र $\triangle PQR$ मा $\angle A = \angle P$ र $\angle B = \angle Q$ छ ।
तलका मध्ये कुन अवस्था थपेपछि $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ हुन्छ ?
- (क) $\angle C = \angle R$ (ख) $AB = PQ$ (ग) $BC = QR$



8. चित्रमा कुन अवस्था थपेपछि $\triangle LMN$ र $\triangle XYZ$ अनुरूप हुन्छन् ?

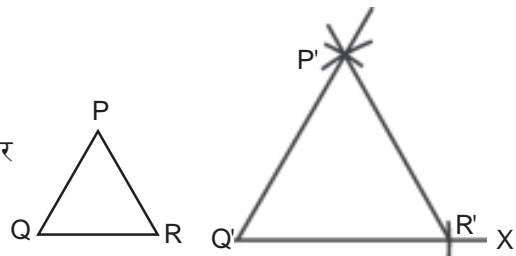
जहाँ $\angle M = \angle X = 90^\circ$ छ र $MN = XZ$ छ ।
कुन तथ्यका आधारमा अनुरूप हुन्छन् ?



3.2 समरूपता (Similarity)

क्रियाकलाप 1

- स्लर र सिसाकलमको प्रयोग गरी $\triangle PQR$ खिच ।
- कापीको अर्को ठाउँमा एउटा सिधारेखा $Q'X$ खिच र Q' बाट QR को दोब्बर चाप लाई $Q'X$ मा काट र R' नाम देऊ ।
- Q' बाट PQ को दोब्बर चाप लिई माथितर काट र त्यसैगरी R' बाट PR को दोब्बर चापले काट । काटिएको बिन्दुलाई P' नाम देऊ ।
- P', Q' र P', R' जोड ।



अब दुवै त्रिभुजका कोणहरू र भुजाहरू नाप र तलको जस्तै तालिका बनाई भर :

$\triangle PQR$			$\triangle P'Q'R'$		
कोणको नाप	$\angle P =$	$\angle Q =$	$\angle R =$	$\angle P' =$	$\angle Q' =$
भुजाको नाप	$PQ =$	$QR =$	$PR =$	$P'Q' =$	$Q'R' =$
					$P'R' =$

माथिको तालिकाबाट निम्नलिखित अनुपातहरू पत्ता लगाऊ :

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{QR}{Q'R'} = \frac{PR}{P'R'} =$$

$$\angle P = \angle P' = \dots \quad \angle Q = \angle Q' = \dots \quad \text{र } \angle R = \angle R' = \dots$$

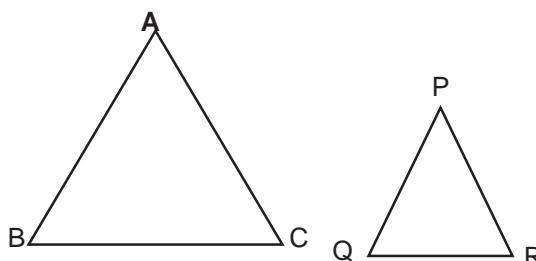
माथिको क्रियाकलापबाट के थाहा पायौ ?

सझगती भुजाको अनुपात कस्तो छ, सझगती कोणहरूविच के सम्बन्ध छ ?

आफ्नो निष्कर्ष लेख र कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर ।

यहाँ $\triangle PQR$ र $\triangle P'Q'R'$ का सझगती भुजा समानुपातिक छन् र कोणहरूको नाप बराबर छ । त्यसकारण $\triangle PQR$ र $\triangle P'Q'R'$ समरूप छन् । यसलाई $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$ लेखिन्छ ।

समरूप त्रिभुजमा सझगती भुजाहरू समानुपातिक (अनुपात बराबर) र सझगत कोणहरू बराबर हुन्छन् ।



यदि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ भए,

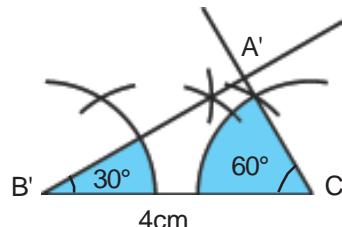
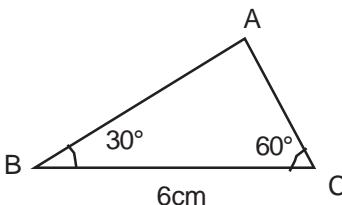
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

$$\angle A = \angle P \quad \angle B = \angle Q \quad \angle C = \angle R \text{ हुन्छ ।}$$

3.2.1. त्रिभुजहरू समरूप हुने अवस्थाहरू (Conditions for triangles to be similar)

(क) दुई जोडा सङ्गती कोणहरू बराबर भएमा,

$\triangle ABC$ छ, जसमा $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ र $BC = 6\text{cm}$ छ। अर्को $A'B'C'$ रचना गर जसमा $\angle B = 30^\circ$, $\angle C' = 60^\circ$ र $B'C' = 4\text{cm}$ छ।



अब $\triangle ABC$ र $\triangle A'B'C'$ का भुजाहरू नाप र तालिकामा भर :

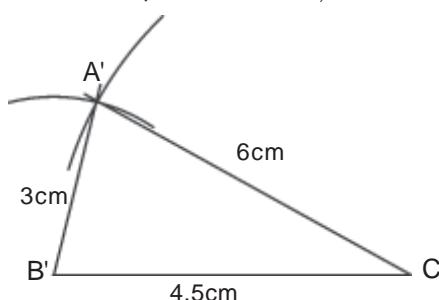
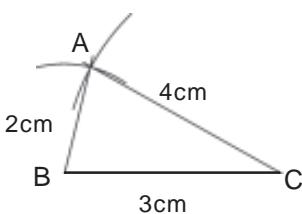
	AB/A'B'		BC/B'C'		AC/A'C'	निष्कर्ष
AB =		BC =		AC =		
A'B' =		B'C' =		A'C' =		

माथिको तालिकाका सबै भुजाहरूको अनुपात बराबर देखियो। सङ्गती भुजाहरू समानुपातिक छन्। त्यसकारण $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ हुन्छ।

यदि त्रिभुजहरूमा दुई जोडी सङ्गत कोणहरू बराबर छन् भने सङ्गत भुजाहरू पनि समानुपातिक हुन्छन् र त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन्। यसलाई को.को. (AA) को तथ्य भनिन्छ।

(ख) तिन ओटै भुजाहरू समानुपातिक भएमा,

$\triangle ABC$ छ, जसमा $AB = 2\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$ र $AC = 4\text{cm}$ छ। $\triangle A'B'C'$ खिच, जसमा $A'B' = 3\text{cm}$, $B'C' = 4.5\text{cm}$ र $A'C' = 6\text{cm}$ छ।



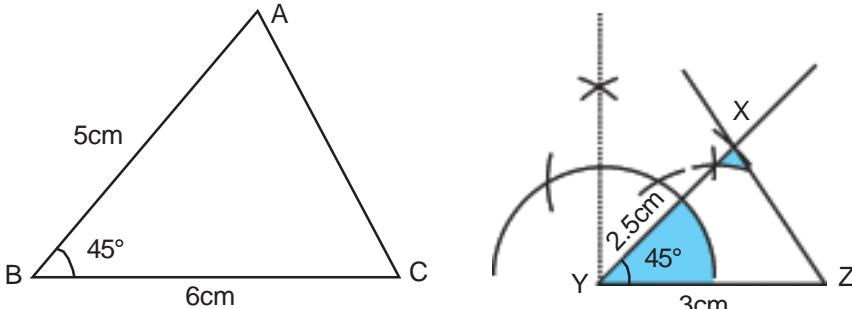
माथिका $\triangle ABC$ र $\triangle A'B'C'$ का कोणहरू नाप र तलको तालिकामा भर :

कोणहरू	निष्कर्ष		निष्कर्ष		निष्कर्ष
$\angle A =$		$\angle B =$		$\angle C =$	
$\angle A' =$		$\angle B' =$		$\angle C' =$	

तीनओटै भुजाहरू समानुपातिक भएमा सङ्गति कोणहरू पनि बराबर हुन्छन् । तसर्थ दिइएका चित्रमा $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ भयो । यसलाई भु.भु.भु. समरूपता (SSS similarity) भनिन्छ ।

(ग) दुईओटा भुजाहरूको अनुपात र तिनीहरूविचको कोण बराबर भएमा,

$\triangle ABC$ दिइएको छ जसमा $AB = 5\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$ र $\angle ABC = 45^\circ$ छ । अर्को $\triangle XYZ$ रचना गर जसमा $XY = 2.5\text{cm}$, $YZ = 3\text{cm}$ र $\angle XYZ = 45^\circ$ छ ।



माथिका त्रिभुजमा निम्नानुसारका कोण र भुजाहरू नाप र तालिकामा भर :

$\angle A =$	$\angle B =$	$\angle C =$	$AC =$	$\frac{AC}{XZ} =$	परिणाम
$\angle X =$	$\angle Y =$	$\angle Z =$	$XZ =$		

माथीको तालिकाबाट सबै सङ्गत कोणहरू बराबर भए र बाँकी भुजाको अनुपात पनि एउटै आयो । तसर्थ $\triangle ABC$ र $\triangle XYZ$ समरूप भए । यसलाई भुजा, कोण, भुजा (SAS) तथ्य भनिन्छ ।

यदि जोडा त्रिभुजमा दुई भुजाहरूको अनुपात र तिनीहरूविचको कोण बराबर भएमा ती दुई त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् ।

उदाहरण १

दिइएका त्रिभुजहरू समरूप छन् भने x , y र z को मान पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ $ABC \sim PQR$ छ । तसर्थ भुजाहरू समानुपातिक हुन्छन् ।

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \text{ हुन्छ ।}$$

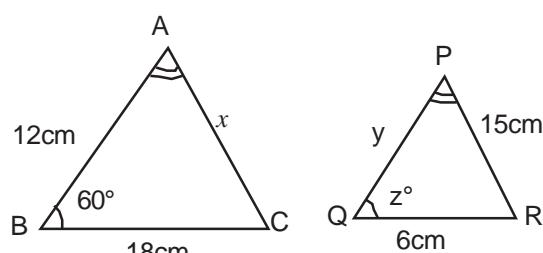
$$\text{चित्रानुसार : } \frac{12}{y} = \frac{18}{6} = \frac{x}{15} \dots\dots\dots (i)$$

पहिलो र दोस्रो अनुपात लिँदा

$$\frac{12}{y} = \frac{18}{6}$$

अथवा $18 \times y = 12 \times 6$

$$\text{अथवा } y = \frac{12 \times 6}{18} = 4\text{cm}$$



फेरि दोस्रो र तेस्रो अनुपात लिंदा

$$\frac{18}{6} = \frac{x}{15}$$

अथवा, $6x = 15 \times 8$

$$x = \frac{15 \times 8}{6} = 20\text{cm}$$

र $\angle B = \angle Q$ हुन्छ ।

$\angle B = 60^\circ = Q$

$$\therefore \angle Z = 60^\circ$$

उदाहरण 2

सँगैको चित्रमा $\triangle LMN$ र $\triangle LEF$ समरूप छन् भने EF र EM को मान पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, $\triangle LMN$ र $\triangle LEF$ समरूप छन् ।

$$\text{तसर्थ, } \frac{LM}{LE} = \frac{MN}{EF} = \frac{LN}{LF} \text{ हुन्छ ।}$$

$$\text{अथवा, } \frac{y+4}{4} = \frac{5}{x} = \frac{6+4}{4} \text{ हुन्छ ।}$$

पहिलो र तेस्रो अनुपात लिंदा,

$$\frac{y+4}{4} = \frac{10}{4}$$

अथवा, $y + 4 = 10$

अथवा, $y = 10 - 4 = 6\text{cm}$

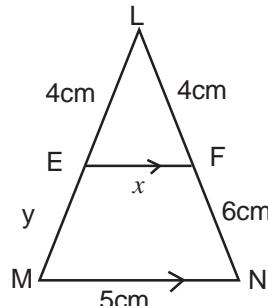
फेरि दोस्रो र तेस्रो अनुपात लिंदा,

$$\frac{5}{x} = \frac{10}{4}$$

अथवा, $10x = 20$

$$\text{अथवा, } x = \frac{20}{10}$$

$$\therefore x = 2\text{cm}$$



उदाहरण 3

चित्रमा $EF \parallel GH$ र $\angle EFO = \angle OGH$ छ भने प्रमाणित गर $\triangle EFO \sim \triangle GOH$

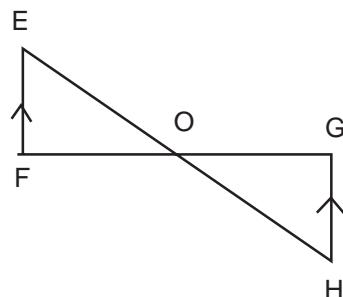
प्रमाण : यहाँ $EF \parallel GH$ छ तसर्थ EH छेदक हो ।

(1) $\angle FEO = \angle GHO$ हुन्छ । (एकान्तर कोण भएकाले)

(2) $\angle EFO = \angle OGH$
दिएको

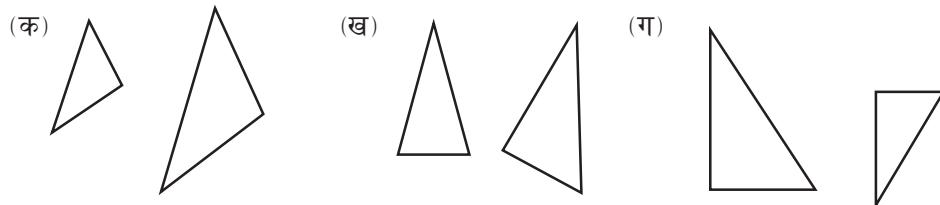
(3) $\angle EOF = \angle GOH$ (शीर्षभिमुख कोणहरू)

(4) $\triangle EFO$ र $\triangle GOH$ का सङ्गती कोणहरू बराबर भए,
तसर्थ, $\triangle EFO \sim \triangle GOH$ हुन्छ ।

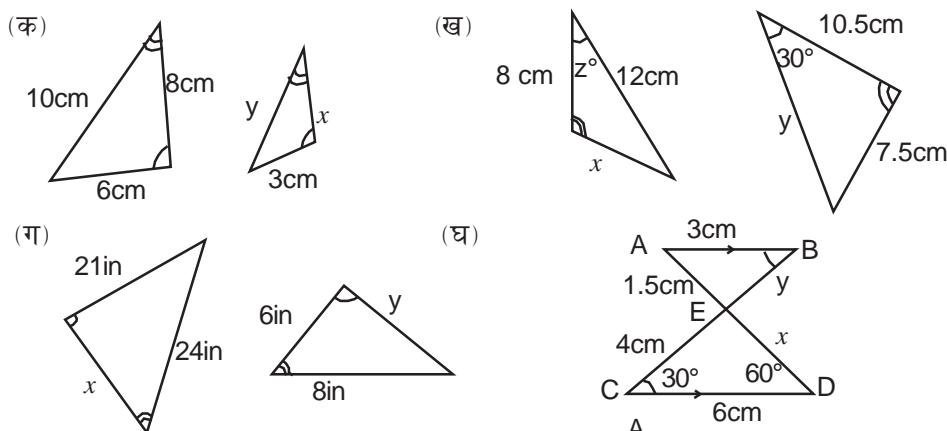


अभ्यास 3.2

1. तल दिइएका जोडा त्रिभुजहरूको कोण र भुजाहरू ताप र समरूप छन् वा छैनन् पत्ता लगाऊ :

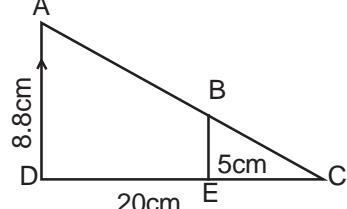


2. दिइएका जोडा समरूप त्रिभुजहरूमा x , y र z को मान पत्ता लगाऊ :

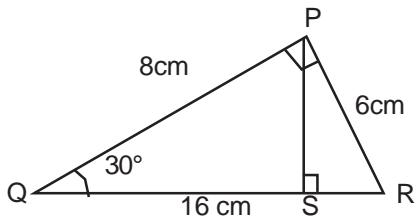
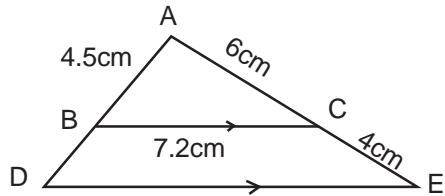


3. दिइएको चित्रमा $\triangle BEC \sim \triangle ADC$ छ $CD = 20\text{cm}$

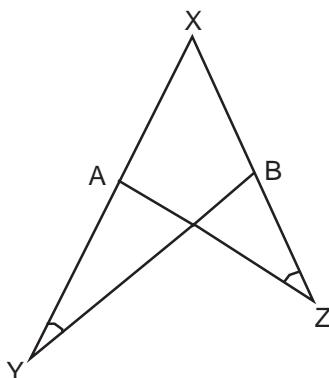
$AD = 8.8\text{cm}$ र $EC = 5\text{cm}$ छ भने BE को मान
पत्ता लगाऊ ।



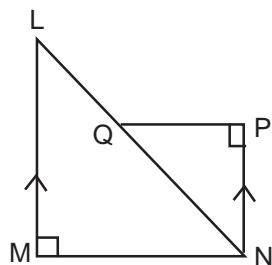
4. दिइएको चित्रमा यदि $BC \parallel DE$ र $\angle CED = 30^\circ$ छ
भने (क) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ देखाऊ । (ख) DE र $\angle ACB$
को नाप पत्ता लगाऊ ।



5. चित्रमा $PS \perp QR$ छ र $\triangle PQR \sim \triangle PSR$ छ भने PS
को नाप पत्ता लगाऊ । यदि $\angle PQR = 30^\circ$ भए,
 $\angle RPS$ कति होला ?



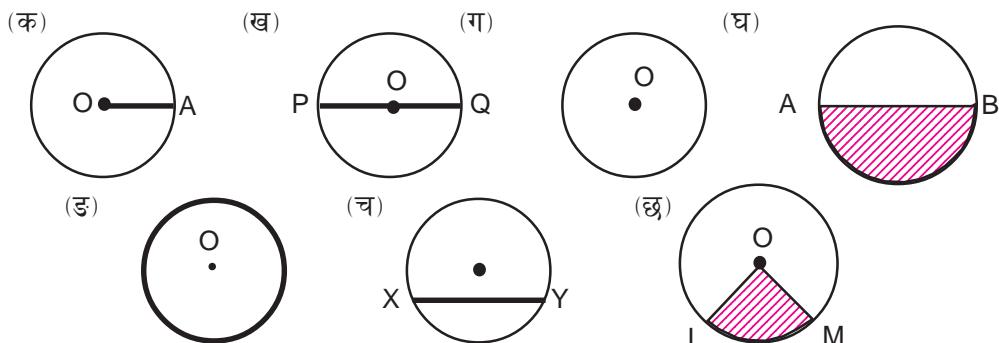
6. चित्रमा $\angle Y = \angle Z$, $XY = 20\text{cm}$,
 $AY = 15.5\text{cm}$ र $XZ = 15\text{cm}$ भए,
(i) $\triangle XAZ \sim \triangle XYB$ देखाऊ ।
(ii) XB को नाप पत्ता लगाऊ ।



7. सँगैको चित्रमा $ML \parallel NP$ छ
 $\angle LMN = \angle NPQ = 90^\circ$ छ भने,
 $\triangle LMN \sim \triangle NPQ$ देखाऊ ।

4.0. पुनरबलोकन (Review)

तलका वृत्तहरूमा अङ्कित भाग र छाया पारिएको भागको नाम लेख र समूहमा छलफल गर :



वृत्तका विभिन्न भागका बारेमा हामीले अधिल्लो कक्षामा नै अध्ययन गरिसकेका छौं । अब हामी वृत्तको परिधि र क्षेत्रफलका बारेमा अध्ययन गर्दछौं ।

4.1. वृत्तको परिधि र व्यासको सम्बन्धको खोजी

वृत्तको परिधि (Circumference of Circle)

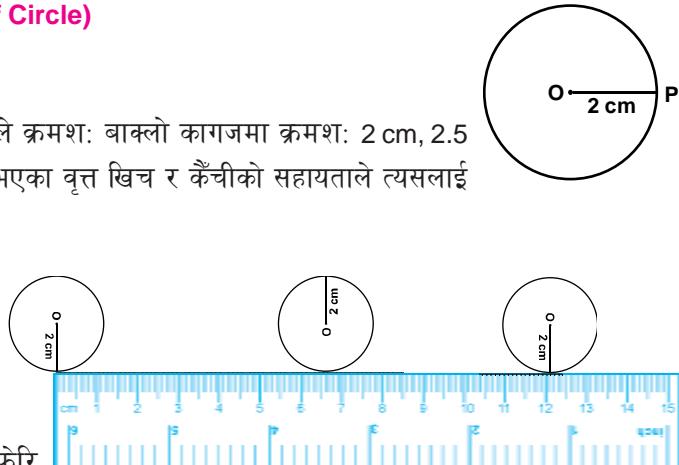
क्रियाकलाप 1

5/5 जनाको समूह निर्माण गरी प्रत्येकले क्रमशः बाक्लो कागजमा क्रमशः 2 cm, 2.5 cm, 3 cm, 3.6 cm, 4 cm अर्धव्यास भएका वृत्त खिच र कैचीको सहायताले त्यसलाई काट । त्यसपछि चित्रमा देखाए भैँ
एउटा अर्धव्यास खिच ।

चित्रमा देखाए भैँ बिन्दु P रुलरको प्रथम रेखामा पर्ने गरी राख र उक्त वृत्तलाई गुडाऊ । उक्त वृत्तलाई तबसम्म गुडाउ कि बिन्दु P ले फेरि स्केलको अर्को रेखालाई छोओस् । त्यसपछि

चित्रमा देखाए भैँ सुरुको बिन्दु र अन्तिम बिन्दु टिपोट गर । ती दुई बिन्दुबिचको लम्बाइ नै वृत्तको परिधि हुन्छ ।

वृत्तको परिधि (c) र व्यास (d) नाप, [जहाँ व्यास (d) = 2r हुन्छ] । अब क्रमशः तालिकामा प्रस्तुत गर :



समूह	वृत्तको व्यास (d)	वृत्तको परिधि (C)	$\frac{C}{d} =$
(क)	4 cm		
(ख)	5 cm	15.70	$\frac{15.70}{5} = 3.14$
(ग)	6 cm		
(घ)	7 cm		
(ङ)	8 cm		

यसरी माथिको तालिकाबाट के प्रस्त हुन्छ भने वृत्तको व्यास जतिसुकै भएता पनि उक्त वृत्तको परिधि र व्यासको अनुपात सधैं 3.14 को आसपासमा हुन्छ । तसर्थ परिधि र व्यासको अनुपातलाई 3.14 मानिन्छ । वा $C/d = 3.14$ (अचल राशि) हुन्छ । यसलाई ग्रिक अक्षर π (Pie वा पाई) ले जनाइन्छ । यसलाई

$\frac{22}{7}$ पनि लेखिन्छ ।

त्यसकारण, $\frac{C}{d} = \pi$ हुन्छ ।

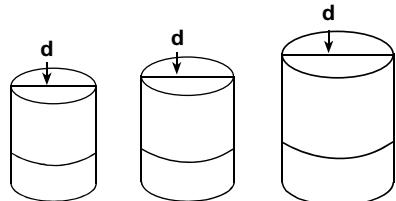
$$\therefore C = \pi d \quad \text{जहाँ } \pi = \frac{22}{7} \text{ हुन्छ ।}$$

हामीलाई थाहा छ, वृत्तको अर्धव्यास व्यासको आधा हुन्छ । तसर्थ, $d = 2r$, $\therefore C = 2\pi r$ हुन्छ ।

क्रियाकलाप 2

3/3 जनाको समूह बनाऊ । त्यसपछि प्रत्येक समूहले फरक आकारका बेलनाकार वस्तुहरू लेउ । प्रत्येक समूहले उक्त बेलनाकार वस्तुको आधारको व्यास नाप । त्यसपछि चित्रमा देखाए जस्तै गरी उक्त बेलनाकार वस्तुको आधारको नजिक वरिपरि एउटा धागो बाँध । त्यो धागोको लम्बाई उक्त आधार वृत्तको परिधि बराबर हुन्छ । प्रत्येक समूहले त्यसपछि आफ्नो समूहले लिएको परिधि (धागो) र व्यासको लम्बाईको अनुपात प्रस्तुत गर । उक्त अनुपात प्रायः सबैमा एउटै

3.14 को वरिपरि अर्थात् $\frac{22}{7}$ पाइन्छ । त्यसलाई नै π (पाई) भनिन्छ ।



तसर्थ $\pi = \frac{C \text{ (परिधि)}}{d \text{ (व्यास)}}$ लेखिन्छ ।

$$\therefore C = \pi d = 2\pi r \quad [d = 2r]$$

उदाहरण 1

यदि एउटा वृत्तको व्यास 9 cm छ, भने उक्त वृत्तको परिधि कति होला ? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

समाधान

यहाँ दिएको वृत्तको व्यास (d) = 9 cm

वृत्तको परिधि (C) = ?

$$\text{हामीलाई थाहा छ कि } C = \pi d \text{ र } \pi = \frac{22}{7}$$

$$C = \frac{22}{7} \times 9 = 28.30 \text{ अतः वृत्तको परिधि (C) = 28.30 cm हुन्छ।}$$

उदाहरण 2

एउटा बेलनाकार ट्याइकीको आधारको परिधि 471cm छ, भने उक्त ट्याइकीको आधारको अर्धव्यास कति होला ? ($\pi = 3.14$ प्रयोग गर्ने।)

समाधान

यहाँ बेलनाकार ट्याइकीको आधारको परिधि (C) = 471 cm

$$\text{“ “ “ अर्धव्यास (r) = ?}$$

$$\text{हामीलाई थाहा छ परिधि (c) = } 2\pi r$$

$$\text{अथवा, } 471 \text{ cm} = 2 \times 3.14 \times r$$

$$\text{अथवा, } 6.28 r = 471 \text{ cm}$$

$$\text{अथवा, } r = \frac{471}{6.28} \text{ cm} = 75 \text{ cm.}$$

$$\text{अतः उक्त ट्याइकीको अर्धव्यास (r) = 75 cm हुन्छ।}$$

अभ्यास 4.1

1. $\pi = 3.14$ प्रयोग गरी दिइएका प्रत्येक वृत्तका परिधि पत्ता लगाऊ :

- | | | |
|---------------------|---------------------|------------------------|
| (क) अर्धव्यास = 3cm | (ख) व्यास = 5cm | (ग) अर्धव्यास = 4.5 cm |
| (घ) व्यास = 10 inch | (ड) अर्धव्यास = 12m | (च) व्यास = 18ft. |

2. $\pi = 3.14$ प्रयोग गरी दिइएको परिधिका आधारमा वृत्तको अर्धव्यास पत्ता लगाऊ :

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------|----------------------------|
| (क) $C = 12.56 \text{ cm}$ | (ख) $C = 18.84 \text{ inch}$ | (ग) $C = 34.54 \text{ cm}$ |
| (घ) $C = 65.94 \text{ ft.}$ | (ड) $C = 113.04 \text{ cm}$ | (च) $C = 376.8 \text{ yd}$ |

3. एउटा वृत्ताकार खेल मैदानको अर्धव्यास 84 मिटर भए उक्त मैदानको परिधि कति होला ? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$
4. अर्धव्यास 100 मिटर भएको वृत्ताकार धावन मार्गमा धावकले एक चक्कर लगाउँदा कति मिटर दुरी पार गर्दछ होला ? [$\pi = 3.14$]
5. आधारको परिधि 157 ft. भएको वृत्ताकार भवनको व्यास कति होला ? [$\pi = 3.14$]
6. एउटा वृत्ताकार नर्सरीको व्यास 56 m. छ। त्यसलाई बाहिरबाट वरिपरि बार लगाउन कति मिटर तार चाहिएला, यदि 704 m. तार उपलब्ध छ भने कति पटक वरिपरि तार बार लगाउन सकिएला ?
 $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$
7. एउटा मोटरसाइकलको चक्का 150 चक्कर लगाउँदा 396 मि. दुरी पार गर्दछ भने उक्त मोटरसाइकलको चक्काको व्यास कति होला ? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$
8. एउटा बेलनाकार काठको ठेकीको वरिपरि 3 फन्कोमा तारले बाँध्दा 132 inch लामो तार चाहिन्छ भने उक्त ठेकीको व्यास कति होला ? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

4.2. वृत्तको क्षेत्रफल (Area of circle)

क्रियाकलाप 3

अर्धव्यास OP भएको वृत्तको व्यासलाई आधार मानेर वृत्तलाई बराबर 16 भागमा विभाजन गर र 1 देखि 16 नम्बर दिने चित्रमा देखाए जस्तै व्यासबाट माथिका भागहरूमा फरक रडले रडगाऊ। त्यसपछि कैचीको सहायताले 16 ओटा भागलाई काट। सबै काटिसकेपछि एउटा पछि अर्को गर्दै 15 टुक्राहरूलाई चित्रमा देखाए भै मिलाऊ। त्यसपछि अन्तिम टुक्रालाई बराबर दुई भागमा विभाजन गर र चित्र नं. 2 को जस्तै दुवै पट्टि मिलाएर राख। यसरी एउटा वृत्तलाई आयताकार रूपमा मिलाउन सकिन्छ।

जसमा, लम्बाइ (l) = परिधिको आधा

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$$

चौडाइ (b) = वृत्तको अर्धव्यास = r छ।

अब, हामीलाई थाहा छ,

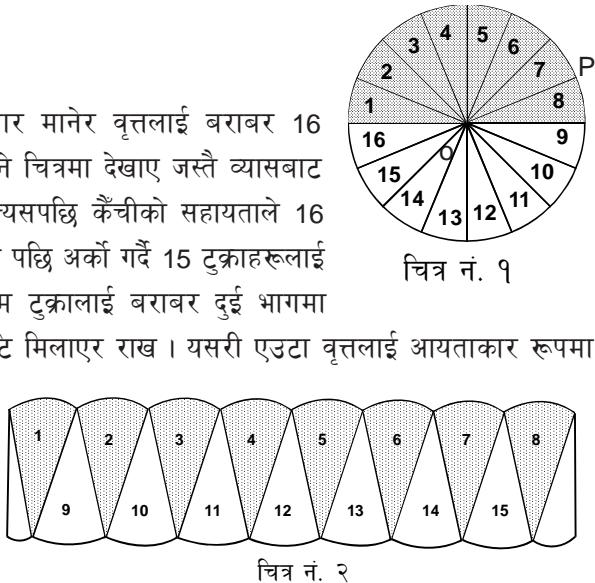
आयतको क्षेत्रफल (A) = लम्बाइ (l) x चौडाइ (b)

$$= \pi r \times r$$

$$= \pi r^2 \text{ वर्ग एकाइ}$$

त्यसैले वृत्तको क्षेत्रफल (A) = πr^2 वर्ग एकाइ

हाम्रो गणित, कक्षा ८



हामीलाई थाहा छ, वृत्तको अर्धव्यास व्यासको आधा हुन्छ । $r = \frac{d}{2}$

$$\text{तसर्थ, } A = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{वर्ग एकाइ}$$

उदाहरण 3

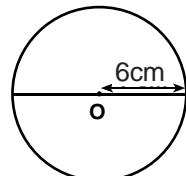
यदि एउटा वृत्तको व्यास 12cm छ, भने उक्त वृत्तको क्षेत्रफल कति होला ? ($\pi = 3.14$)

समाधान

यहाँ, वृत्तको व्यास (d) = 12 cm.

$$\text{अर्धव्यास } r = \frac{d}{2} = \frac{12}{2} = 6\text{cm}$$

$$\begin{aligned} \text{अब, हामीलाई थाहा छ, } & \text{ वृत्तको क्षेत्रफल } (A) = \pi r^2 \text{ वर्ग एकाइ} \\ & = 3.14 \times 6 \times 6 \text{ cm}^2 \\ & = 113.04 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



उदाहरण 4

दिइएको चित्रमा छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल पता लगाऊ । ($\pi = 3.14$)

समाधान

यहाँ, ABCD एउटा वर्ग हो । जसमा $AB = BC = 14\text{ cm}$ छ ।

$$\begin{aligned} \text{अब, वर्ग } ABCD \text{ को क्षेत्रफल } (A_1) &= l^2 = (14)^2 \text{ cm}^2 \\ &= 14 \times 14 \text{ cm}^2 \\ &= 196 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

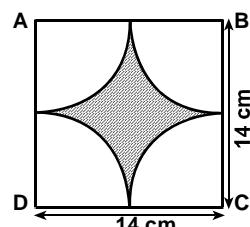
फेरि यहाँ चित्रमा 4 ओटा एक चौथाइ वृत्तहरू छन् ।

$$\text{जसमा अर्धव्यास } (r) = \frac{14}{2} = 7\text{cm} \text{ छ, } ।$$

तसर्थ एक चौथाइ वृत्तको क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}\pi r^2 \text{ वर्ग एकाइ}$

$$= \frac{1}{4}(3.14) \times 7 \times 7 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{1}{4}(153.86) \text{ cm}^2$$



$$\text{त्यसै, } 4 \text{ ओटा चौथाइ वृत्तहरूको जम्मा क्षेत्रफल } (A_2) = 4 \times \frac{1}{4} (153.86) \text{ cm}^2 \\ = 153.86 \text{ cm}^2$$

$$\text{अब, छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल } (A) = A_1 - A_2 \\ = (196 - 153.86) \text{ cm}^2 \\ = 42.14 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 5

यदि एउटा वृत्ताकार पौडी पोखरीको परिधि 125.6 m छ, भने उक्त पोखरीको पिँधको अर्धव्यास र क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ । ($\pi = 3.14$)

समाधान

यहाँ वृत्ताकार पोखरीको परिधि (C) = 125.6 m

अर्धव्यास (r) = ?

अब, परिधि (C) = 125.6 m

अथवा, $2\pi r = 125.6 \text{ m}$ [$\therefore c = 2\pi r$]

अथवा, $2 \times 3.14 \times r = 125.6$

$$\text{अथवा, } r = \frac{125.6}{2 \times 3.14} \text{ m} = 20 \text{ m}$$

तसर्थ, वृत्तको अर्धव्यास (r) = 20 m

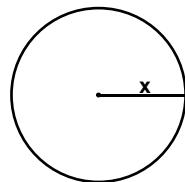
अर्थात्,

पोखरीको अर्धव्यास (r) = 20 m

फेरि वृत्ताकार पोखरीको पिँधको क्षेत्रफल = ?

हामीलाई थाहा छ, वृत्तको क्षेत्रफल (A) = πr^2 वर्ग एकाइ

$$= 3.14 \times 20 \times 20 \text{ m}^2 \\ = 1256 \text{ m}^2$$



अभ्यास 4.2

1. तलका वृत्तहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ : [$\pi = 3.14$]

- | | | |
|-----------------------|--------------------|-----------------------|
| (क) अर्धव्यास = 3 cm. | (ख) व्यास = 5 cm. | (ग) अर्धव्यास = 8 ft. |
| (घ) व्यास = 12 inch | (ड) व्यास = 18m. | (च) व्यास = 20km. |
| (छ) व्यास = 15 mm | (ज) व्यास = 22 cm. | (झ) अर्धव्यास = 16 yd |

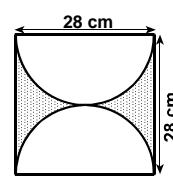
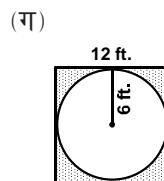
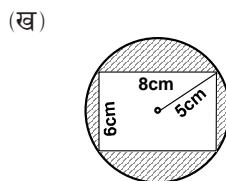
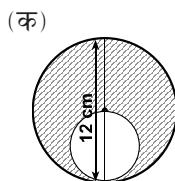
2. यदि एउटा वृत्ताकार कोठाको व्यास 14 मिटर छ, भने उक्त कोठाको क्षेत्रफल कति होला ? [$\pi = 3.14$]

3. निम्न लिखित परिधि भएमा वृत्तको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ : [$\pi = 3.14$]

- | | | |
|--------------|----------------|---------------|
| (क) 34.54 cm | (ख) 65.94m | (ग) 1884 inch |
| (घ) 113.04m | (ड) 376.80 ft. | |

4. एउटा बेलनाकार कचौराको आधारको व्यास 9cm भए उक्त कचौराको आधारको सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? ($\pi = 3.14$)

5. तलका चित्रहरूमा छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल निकाल :



6. एउटा बेलनाकार ट्याइकीको पिँधको क्षेत्रफल 154 वर्ग फिट छ, भने उक्त ट्याइकीको परिधि र अर्धव्यास पत्ता लगाऊ । $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

7. एउटा 153.86 m^2 क्षेत्रफल भएको वृत्ताकार खेल मैदानलाई ढलान गरियो भने उक्त मैदानको ढलान गरेको भागको व्यास कति होला र उक्त मैदानको ढलानको घेरा कति मिटर होला ?

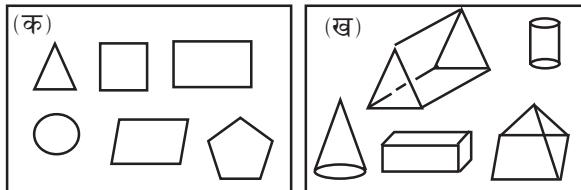
8. शर्मिलाले 5cm अर्धव्यास भएको एउटा वृत्त खिचिन् । त्यसैगरी प्रकाशले पनि 7cm अर्धव्यास भएको अर्को वृत्त खिचे । अब कसले खिचेको वृत्तको क्षेत्रफल धेरै छ र कतिले धेरै छ ?

9. आफ्नो कापीमा एउटा 7.5 cm अर्धव्यास भएको वृत्त खिचेर रड लगाऊ । त्यसपछि रडगाएको भागको क्षेत्रफल निकाल ।

5.0 पुनरवलोकन (Review)

सँगैको तालिकामा हेर र दिइएका प्रश्नहरूका बारेमा छलफल गर :

१. तालिका (क) मा कस्ता प्रकारका आकृतिहरू छन् ?
२. तालिका (ख) मा कस्ता प्रकारका आकृतिहरू छन् ?
३. तालिका (क) र (ख) मा भएका आकृतिहरूको नामको सूची बनाऊ ।
४. तालिका (क) र (ख) का आकृतिहरूबिच के फरक छ ?

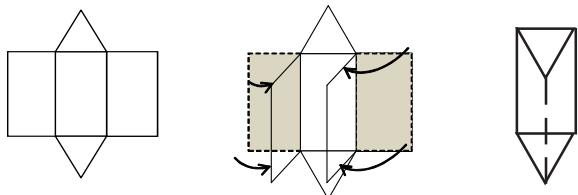


माथिको तालिकामा (क) मा सबै समतलीय आकृति (Plane Shapes) छन् भने तालिका (ख) मा ठोस आकृतिहरू रहेका छन् । जसअन्तर्गत घन (Cube), पदमुखा (cuboid), बेलना (Cylinder), गोला (Sphere), सोली (Cone) का बारे अधिल्लो कक्षामा तै अध्ययन गर्याँ । अब हामी त्रिभुजकार प्रिज्म र पिरामिडहरूका बारेमा अध्ययन गराँ ।

5.1 त्रिभुजाकार प्रिज्म र पिरामिड (Triangular Prism and Pyramid)

(क) त्रिभुजाकार प्रिज्म (Triangular Prism)

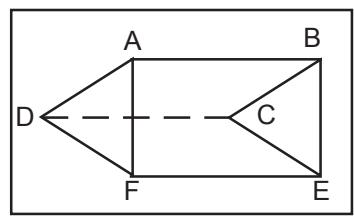
कार्ड बोर्डमा एउटा 12 cm लम्बाई र 8 cm चौडाई भएको आयत बनाऊ । चित्रमा देखाए जस्तै लम्बाइतर्फबाट बराबर तीन भागमा विभाजन गर । त्यसपछि चित्रमा देखाए जस्तै विचको भागको तल र माथि समबाहु त्रिभुज बनाऊ । कैंचीले उक्त आकृतिलाई काट र रेखाहरूबाट पट्याऊ ।



कस्तो आकृति बन्यो, हेरी तलका प्रश्नको उत्तर लेख :

- (क) यसमा कतिओटा त्रिभुजाकार सतह छन् ?
- (ख) यसमा कतिओटा आयताकार सतह छन् ?
- (ग) यसको नाम के होला ?

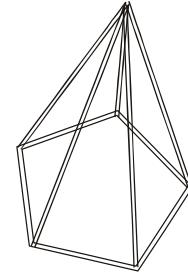
यसरी दुईओटा समानान्तर त्रिभुजाकार आकृतिहरू र तीनओटा आयताकार आकृतिहरू मिलेर बनेका ठोस आकृतिलाई त्रिभुजाकार प्रिज्म (Triangular Prism) भनिन्छ । सैगैको चित्रमा ADF र BCE त्रिभुजाकार सतह हुन् भने ABCD, CDFF र ABFE आयताकार सतह हुन् । त्यस कारण यो त्रिभुजाकार प्रिज्म हो ।



(ख) पिरामिड (Pyramid)

जुस पाइपहरू वा सिन्काहरू प्रयोग गरेर एउटा नियमित पञ्चभुज तयार पार ।

त्यसपछि बराबर नापका पाँचओटा पाइपका टुक्रा वा सिन्काहरू लेउ र एक छेउ पञ्चभुजको शीर्षविन्दुमा र अर्को छेउहरूलाई माथि चित्रमा देखाए छैं एकै ठाउँमा पर्ने गरी जोड यसरी कस्तो आकृति तयार हुन्छ हेर र दिइएका प्रश्नहरूको उत्तर पत्ता लगाऊ ।



(क) यसमा कति ओटा त्रिभुजाकार सतह छन् ?

(ख) यसको आधारमा आकृति कुन आकारको छ ?

(ग) आकृतिको नाम के होला ?

कुनै एउटा बहुभुज आधार भएको र अन्य सतहहरू त्रिभुजाकार भएको ज्यामितीय ठोस आकृतिलाई पिरामिड (pyramid) भनिन्छ । आधारको बहुभजको भुजाको सङ्ख्याअनुसार यसको नाम पनि फरक हुन्छ ।

- यदि आधार आयताकार भए यसलाई आयताकार आधार पिरामिड (rectangular based pyramid) भनिन्छ ।
- यदि आधार वर्गाकार भए यसलाई वर्गाधार पिरामिड (square based pyramid) भनिन्छ ।
- आधार पञ्चभुज भए पञ्चभुजाधार पिरामिड (pentagonal based pyramid) भनिन्छ ।
- आधार षट्भुज भए षट्भुजाधार पिरामिड (hexagonal based pyramid) भनिन्छ ।

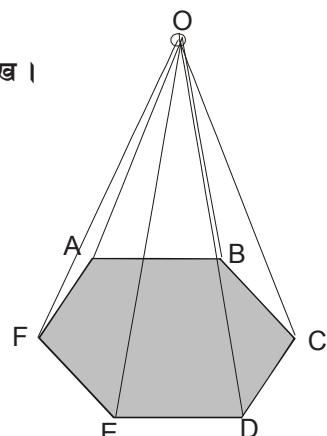
उदाहरण 1

दिइएको षट्भुजाधार पिरामिडका आधार र अन्य सतहहरूको नाम लेख ।

समाधान

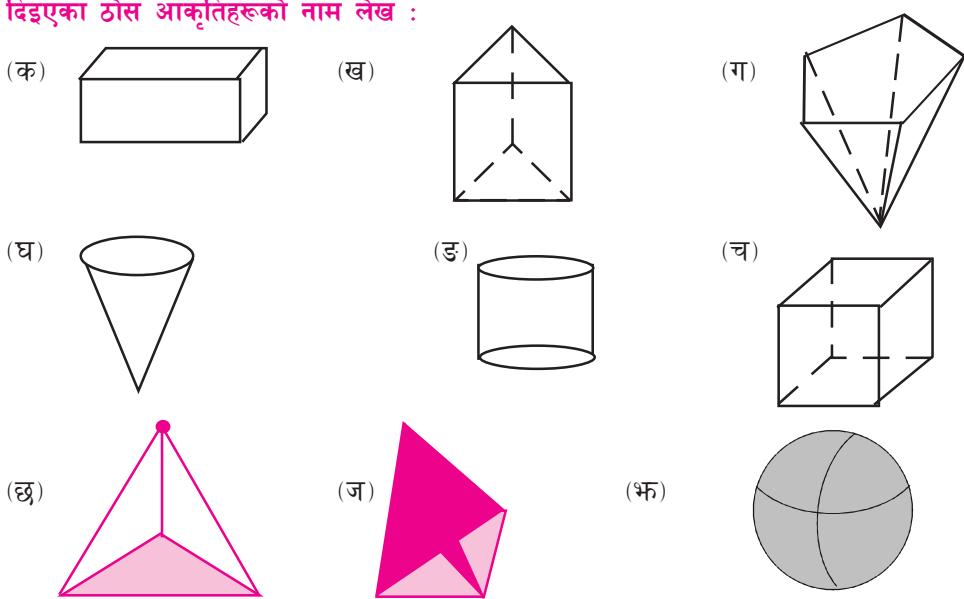
षट्भुजाधार पिरामिडको आधार षट्भुजा ABCDEF हो र यसका अन्य सतहहरू त्रिभुजहरू हुन्छन् र तिनीहरू यस प्रकार छन् :

$\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle COD, \triangle DOE, \triangle EOF$ र $\triangle FOA$

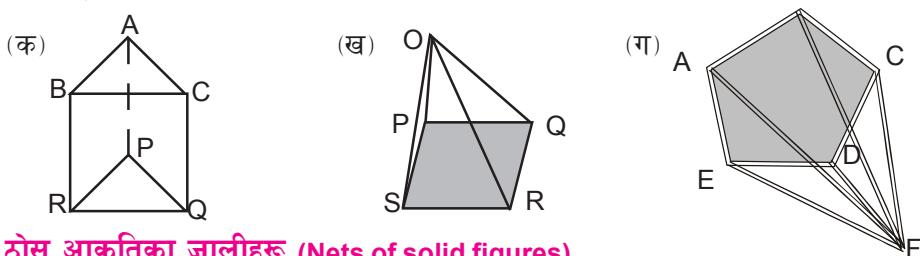


अभ्यास 5.1

1. दिइएका ठोस आकृतिहरूको नाम लेख :

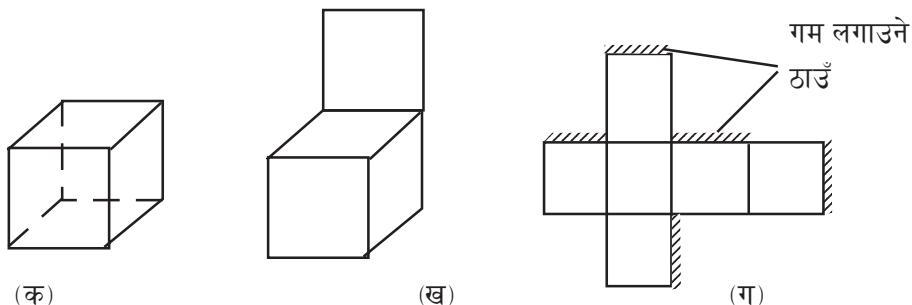


2. तल दिइएका प्रिज्म र पिरामिडको आधार र अन्य सतहहरूको नाम लेख :



5.2. ठोस आकृतिका जालीहरू (Nets of solid figures)

एउटा चकको बट्टा वा मसीको बट्टा लेऊ। चित्रमा देखाइए भैं यसलाई खोल।

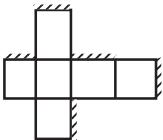
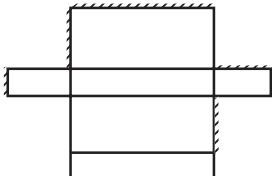
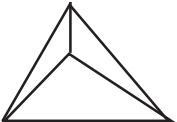
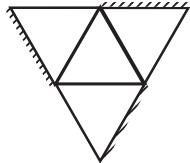
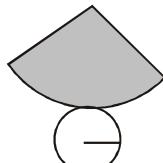
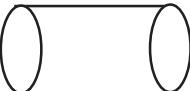


चित्र (क) र चित्र (ग) मा के फरक छ, लेख।

यहाँ, चित्र (क) ठोस आकृति (घन) हो भने चित्र (ग) चित्र (क) को समतलीय आकृति हो।

यसरी कुनै पनि ठोस आकृतिलाई समतलीय आकृतिमा रूपान्तरण गर्न सकिन्दै। उक्त समतलीय आकृतिलाई नै दिइएको ठोस आकृतिको जाली (Net) भनिन्दै।

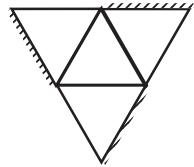
तलको तालिकामा केही ठोस आकृतिहरू र तिनीहरूका जालीहरू दिइएका छन् :

आकृतिको नाम	चित्र	जाली (nets)
घन (cube)		
षटमुखा (Cuboid)		
टेट्राहेड्रन (tetrahedron)		
सोली (Cone)		
बेलना (Cylinder)		

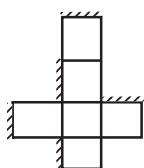
अभ्यास 5.2

1. तल दिइएका जालीहरू कुन ठोस आकृतिका हुन्, लेख :

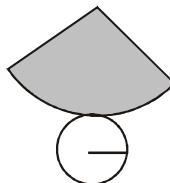
(क)

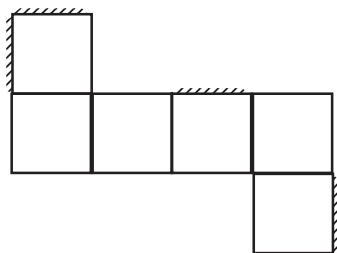
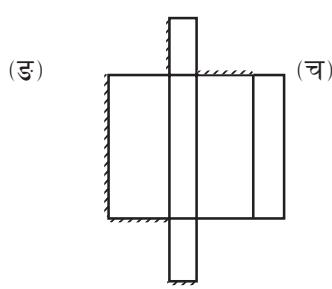
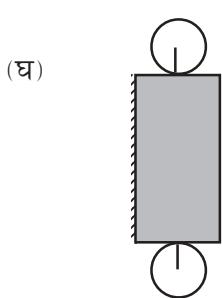


(ख)



(ग)





2. तलका ठोस आकृतिहरूको जाली ट्रेस गर :

- | | | |
|-----------------|--|----------------------|
| (क) घन (Cube) | (ख) बेलना (Cylinder) | (ग) षड्मुखा (Cuboid) |
| (घ) सोली (Cone) | (ङ) त्रिभुजाकार पिरामिड (Triangular pyramid) | |
3. बाक्लो कागजको प्रयोग गरी घन, षड्मुखा, टेट्राहेडन, सोली र बेलनाका जालीहरू ट्रेस गर । कैचीले काटी ठोस आकृति बनाउ र उक्त आकृतिको चित्र कापीमा उतार ।
 4. तिमीहरूले आआफ्नो घरमा वा समुदायमा भएका वा देखेका वा प्रयोग गर्दै आएका विभिन्न ठोस आकृति भएका वस्तुहरूको सूची तयार पार ।

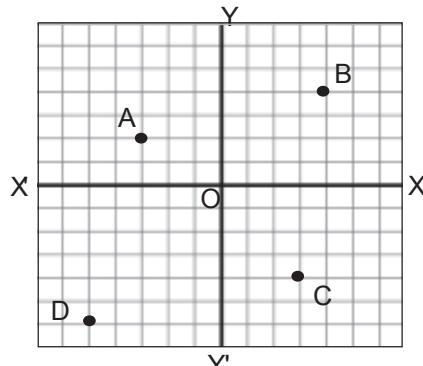
6.0. पुनरवलोकन (Review)

सँगैको चित्रको अध्ययन गरी दिएका प्रश्नको उत्तर देऊँ :

- XOX' लाई के भनिन्छ ?
- YOY' लाई के भनिन्छ ?
- बिन्दु O बाट बिन्दु B मा पुनर किए एकाइ दायाँ गएर किए एकाइ माथि जानुपर्दै ।
- बिन्दु O, A, B, C र D का निर्देशांकहरू के के हुन् ?
- बिन्दु (5,-5) लाई लेखाचित्रमा अड्कन गर ।

यसरी X-अक्ष, Y-अक्ष बिन्दुहरूको निर्देशांक पत्ता लगाउने र

बिन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा अड्कन गर्ने तरिकाबारे अधिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरिसकेका छौं । अब हामी पाइथागोरस साध्य र दुई बिन्दुबिचको दुरीका बारेमा अध्ययन गछौं ।



6.1 पाइथागोरस साध्य र सोको प्रयोग (Pythagoras Theorem and its Application)

पाइथागोरस साध्य (Pythagoras Theorem)

समकोण त्रिभुज ABC खिचौँ जसमा A समकोण छ । AB= 6cm, BC=8cm र AC= 10cm छ ।

चित्रमा देखाए जस्तै तीनओटै भुजाहरूमा वर्गहरू खिचौँ र प्रत्येक भुजामा रहेका वर्गहरूको क्षेत्रफल निकालौँ ।

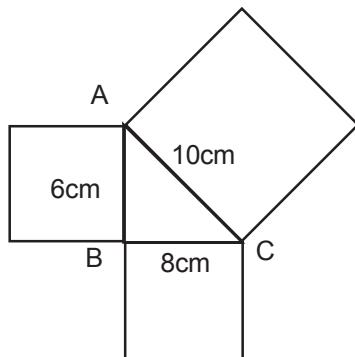
भुजा AB मा भएको वर्गको क्षेत्रफल
 $= (AB)^2 \text{ वर्ग एकाइ}$
 $= (6\text{cm})^2 = 36\text{cm}^2$

भुजा BC मा भएको वर्गको क्षेत्रफल
 $= (BC)^2 \text{ वर्ग एकाइ}$
 $= 64\text{cm}^2 \text{ (किन ?)}$

भुजा AC मा भएको वर्गको क्षेत्रफल
 $= (AC)^2 \text{ वर्ग एकाइ}$
 $= 100\text{cm}^2$

अब, $(AB)^2 + (BC)^2 = 36 + 64 = 100\text{cm}^2 = (AC)^2$

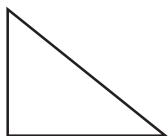
तसर्थ $AB^2 + BC^2 = AC^2$ हुन्छ ।



दोस्रो तरिका

फरक फरक भुजाहरूको नाप भएका तीनओटा समकोणी त्रिभुजहरू खिच :

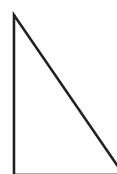
(क)



(ख)



(ग)



अब रुलर प्रयोग गरी तीनओटै त्रिभुजका भुजाहरू नाप र तलको तालिकामा भर :

चित्र नं.	AB	AB^2	BC	BC^2	AC	AC^2	$AB^2 + BC^2$	परिणाम
(क)								
(ख)								
(ग)								

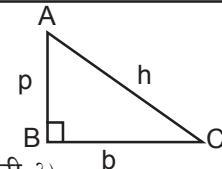
माथिका क्रियाकलापहरूबाट के निष्कर्ष निकालन सकिन्छ, साथीहरूसँग छलफल गर ।

कुनै पनि समकोणी त्रिभुजमा लम्ब र आधारमा बन्ने वर्गको क्षेत्रफलको योगफल

उक्त त्रिभुजको कर्णमा बन्ने वर्गको क्षेत्रफलसँग बराबर हुन्छ । चित्रमा

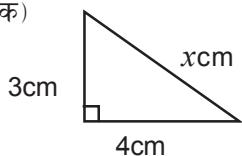
$$AB = p, BC = b \text{ र } AC = h \text{ भए } p^2 + b^2 = h^2 \text{ हुन्छ, र } p, b \text{ र } h \text{ लाई}$$

पाइथागोरियन ट्रिपल्स भनिन्छ । जस्तै : 3, 4, 5 पाइथागोरियन ट्रिपल्स हुन् । (कसरी ?)

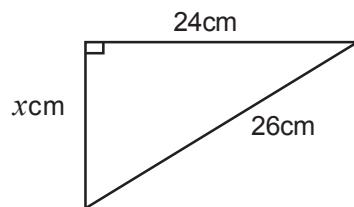


उदाहरण 1 दिइएका चित्रहरूमा x को मान पत्ता लगाऊ ।

(क)



(ख)



समाधान

$$\text{यहाँ, } p = 3\text{cm} \quad b = 4\text{cm}$$

$$h = x = ?$$

अब, हामीलाई थाहा छ,

$$\text{पाइथागोरस साध्यअनुसार, } h^2 = p^2 + b^2 \text{ हुन्छ ।}$$

$$\text{अथवा, } x^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\text{अथवा, } x^2 = 9 + 16$$

$$\text{अथवा, } x^2 = 25$$

$$\text{अथवा, } x = \sqrt{25} \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

$$\therefore x = 5\text{cm}$$

समाधान

$$\text{यहाँ, } p = 24\text{cm} \quad b = x = ?$$

$$h = 26 \text{ cm}$$

पाइथागोरस साध्यअनुसार,

$$h^2 = p^2 + b^2$$

$$\text{अथवा, } 26^2 = 24^2 + x^2$$

$$\text{अथवा, } x^2 = (26^2 - 24^2)$$

$$\text{अथवा, } x^2 = (676 - 576)$$

$$\text{अथवा, } x^2 = 100$$

$$\therefore x = 10\text{cm}$$

उदाहरण 2

एउटा 24 मिटर अगलो खम्बाको टुप्पाबाट उक्त खम्बालाई टेवा दिनका लागि 25 मिटर लामो तार जमिनमा गाडिएको छ, भने उक्त तार गाडिएको स्थान र खम्बाको फेदबिचको दुरी कति होला ?

समाधान

$$\text{यहाँ, खम्बाको लम्बाइ } (p) = 24 \text{ मिटर}$$

$$\text{तारको लम्बाइ } (h) = 25 \text{ मिटर}$$

$$\text{तार र खम्बाको बिचको दुरी } (b) = ?$$

$$\text{हामीलाई थाहा छ, } p^2 + b^2 = h^2$$

$$\text{अथवा, } b^2 = h^2 - p^2$$

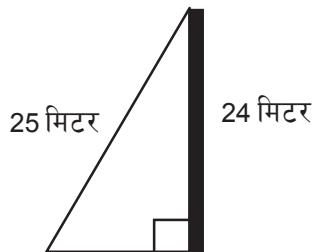
$$\text{अथवा, } b^2 = (25m)^2 - (24m)^2$$

$$= (625 - 576) m^2$$

$$b^2 = 49m^2$$

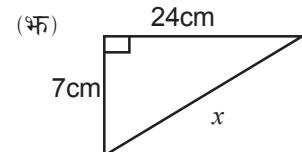
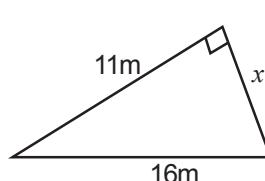
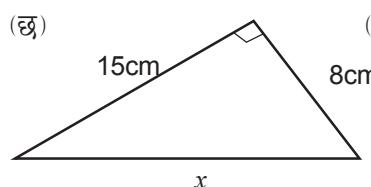
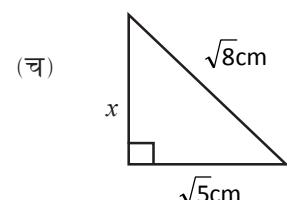
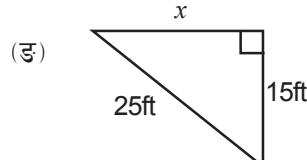
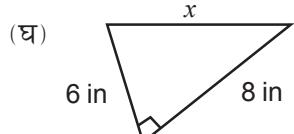
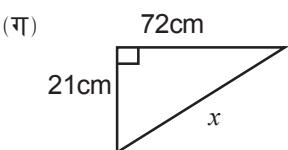
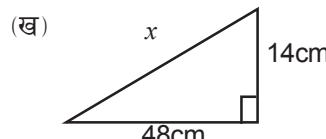
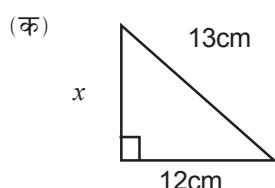
$$\therefore b = 7m$$

अतः खम्बाको फेद र तार गाडिएको स्थानबिचको दुरी = 7 मिटर

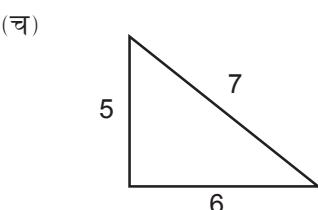
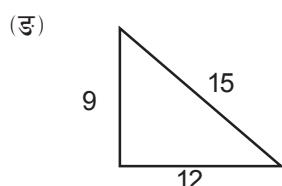
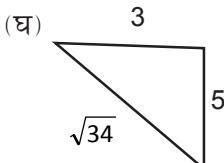
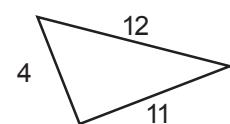
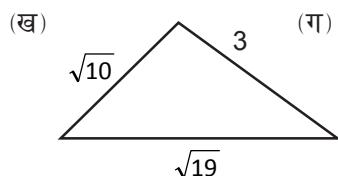
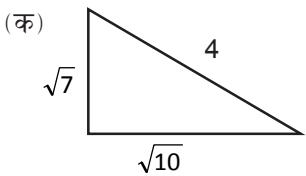


अभ्यास 6.1

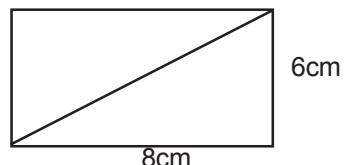
1. तलका समकोणी त्रिभुजहरूमा x को मान पत्ता लगाऊ :



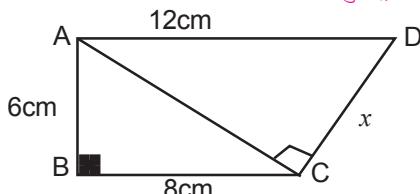
2. पाइथागोरस साध्य प्रयोग गरेर तलका त्रिभुजहरू समकोणी हुन् वा होइनत् जाँचेर हेर :



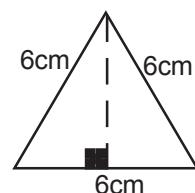
3. यदि एउटा आयतको लम्बाई 8cm र चौडाई 6cm छ, भने उक्त आयतको विकर्णको लम्बाई कति होला ?



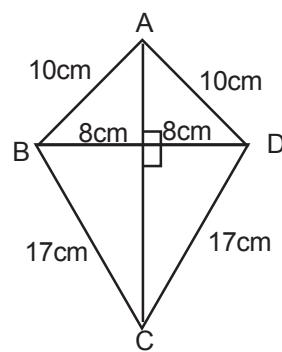
4. सँगैको चित्रमा x को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाऊ ।



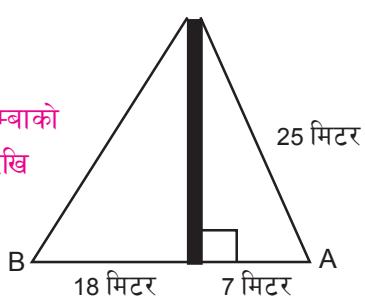
5. एउटा समबाहु त्रिभुजको प्रत्येक भुजाको लम्बाई 6cm छ, भने उक्त त्रिभुजको शीर्षकोणका आधारमा खिचिएको लम्बको लम्बाई कति होला ?



6. दिइएको चित्रमा ABCD एउटा चड्गा हो ।
जसमा AC को मान कति होला ?



7. एउटा बिजुलीको खम्बावाट तार भरेर एक छेउले जमिनमा खम्बाको फेदेखि 7 मिटर टाढा बिन्दु A मा छोयो । यदि खम्बाको टुप्पादेखि जमिनसम्मको तारको लम्बाई 25 मिटर भए खम्बाको उचाई कति होला, साथै अर्को छेउले खम्बादेखि 18m पर जमिनको बिन्दु B मा छोयो भने तारको जम्मा लम्बाई कति होला ।



8. तलका तीन सङ्ख्याहरू कुन पाइथागोरियन ट्रिपल्स हुन् र कुन होइनन् पत्ता लगाऊ :

- (क) 3, 4, 5 (ख) 6, 8, 10 (ग) 12, 13, 14
 (घ) 7, 24, 25 (ड) 10, 12, 14 (च) 10, 12, 15

6.2 दुई बिन्दुहरूबिचको दुरी (Distance Between two Points)

ग्राफपेपरमा दुईओटा बिन्दुहरू $A(x_1, y_1)$ र $B(x_2, y_2)$ लेउ ।

बिन्दु A बाट OX मा लम्ब खिच र M नाम देउ ।

त्यसैगरी बिन्दु B बाट OX मा लम्ब खिची N नाम देउ ।

फेरि, A बाट BN मा लम्ब खिच र P नाम देउ ।

चित्रअनुसार, $OM = x_1, AM = PN = y_1$

$$ON = x_2, NB = y_2$$

$$MN = ON - OM = x_2 - x_1 (= AP)$$

$$BP = BN - PN = y_2 - y_1$$

यहाँ, $\triangle ABP$ समकोणी त्रिभुज हो जसमा आधार

$AP (= x_2 - x_1)$, लम्ब $BP (= y_2 - y_1)$ र कर्ण (AB) छ ।

हामीलाई थाहा छ, पाइथागोरसको साध्यअनुसार,

$$AB^2 = (AP)^2 + (BP)^2$$

$$\text{अथवा, } AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\text{अथवा, } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ एकाइ}$$

त्यसकारण, कुनै दुई बिन्दुबिचको दुरी पत्ता लगाउने सूत्र

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

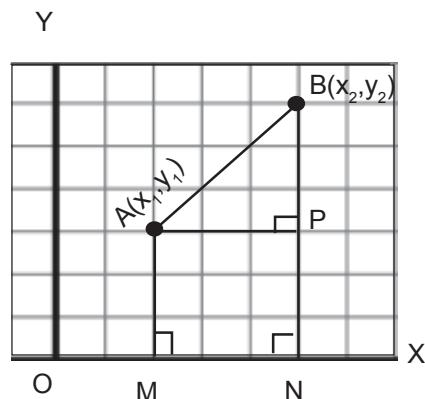
चित्रमा कोठा गनेर हेर्दा, $A(2,4)$ र $B(5,6)$ छ ।

$$\text{सूत्रअनुसार } AB = \sqrt{(5-2)^2 + (6-4)^2} \text{ एकाइ}$$

$$= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \text{ एकाइ}$$

उदाहरण 1

यदि एउटा वृत्तको केन्द्र $A(4,6)$ छ र उक्त वृत्तको परिधिको बिन्दु $P(10,8)$ छ, भने वृत्तको अर्धव्यास कति होला ?



समाधान

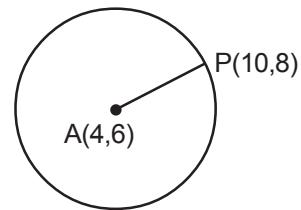
यहाँ, A केन्द्र भएको एउटा वृत्त छ जसमा केन्द्र

A(4,6) छ र परिधिको बिन्दु P(10,8) छ । अतः

$$x_1 = 4, x_2 = 10, y_1 = 6 \text{ र } y_2 = 8 \text{ छ । } AP = ?$$

अब, $AP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ एकाइ

$$= \sqrt{(10 - 4)^2 + (8 - 6)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ एकाइ}$$



उदाहरण 2

X- अक्षको 5 एकाइमा विन्दु P र Q विन्दु Y- अक्षको 6 एकाइमा भए P देखि Q सम्मको दुरी कति होला ?

समाधान

यहाँ P विन्दु X- अक्षमा 5 एकाइ छ । तसर्थ P(5, 0) हो । फेरि

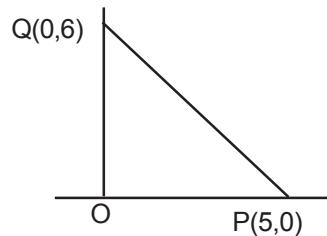
Q विन्दु Y- अक्षमा 6 एकाइ छ । तसर्थ Q (0, 6) हो ।

(किनकि X-अक्षमा $y = 0$ र Y-अक्षमा $x = 0$ हुन्छ ।)

अब $(x_1, y_1) = (5, 0)$ र $(x_2, y_2) = (0, 6)$

हामीलाई थाहा छ, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ एकाइ

$$= \sqrt{(0 - 5)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$$



P देखि Q सम्मको दुरी $\sqrt{61}$ एकाइ छ ।

उदाहरण 3

दिइएका निर्देशाङ्कहरू A(3,4), B(7,8) र C(11,4) समद्विबाहु त्रिभुजमा शीर्षविन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर ।

समाधान

यहाँ, $A(3,4) = (x_1, y_1)$; $B(7,8) = (x_2, y_2)$ र $C(11,4) = (x_3, y_3)$ मान्दा,

अब, $d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(7 - 3)^2 + (8 - 4)^2}$

$$= \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ एकाइ}$$

$$d(AC) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(11 - 3)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{7^2 + 0} = 7 \text{ एकाइ}$$

$$\text{फेरि, } d(BC) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(11 - 7)^2 + (4 - 8)^2} = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 16} \\ = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ एकाइ}$$

यहाँ, $d(AB) = d(BC) = 4\sqrt{2}$ एकाइ

त्यस कारण, $\triangle ABC$ समद्विबाहु त्रिभुज हो।

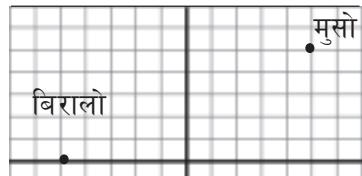
अभ्यास 6.2

1. तल दिइएका बिन्दुहरूबिचको दुरी पत्ता लगाऊ :

- | | | |
|------------------------|------------------------|---|
| (क) (4, -7) र (-1, 5) | (ख) (-3, 4) र (4, 3) | (ग) (1, -2) र (5, -6) |
| (घ) (1, 7) र (1, 1) | (ड) (2, 7) र (4, 9) | (च) (-8, 7) र (-3, 4) |
| (छ) (12, -6) र (6, -8) | (ज) (-7, -5) र (-9, 2) | (झ) $(4 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{3})$, $(3 + \sqrt{5}, 3 + \sqrt{3})$ |

2. यदि बिन्दु A ले X-अक्षमा -8 मा र बिन्दु B ले Y-अक्षमा 6 मा काटेको छ, भने AB को दुरी पत्ता लगाऊ।

3. दिइएको ग्राफ पेपरमा विरालो र मुसाको स्थिति दिइएको छ। विरालो र मुसो भएको बिन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाऊ र तिनीहरूबिचको दुरी निकाल।



4. बिन्दुहरू A(-4,0), B(-4,-4), C(2,-4) र D(2,0) आयातका शीर्ष बिन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर ।
5. नक्सामा प्रस्तुत गर्दा वालिड र काठमाडौँका निर्देशाङ्क बिन्दुहरू क्रमशः (4,7) र (7,3) भए त्यो बिन्दुबिचमा नक्सामा दुरी कति होला, यदि 1 एकाइ बराबर 55km भए वालिडदेखि काठमाडौँसम्मको वास्तविक दुरी पत्ता लगाऊ ।
6. बिन्दुहरू P(1,6), Q(4,1) र R(-4,3) विषमभुज त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर ।
7. यदि A(2,-1);B,(3,4); C(-2,3) र D(-3,-2) समबाहु चतुर्भुज ABCD का शीर्ष बिन्दुहरू हुन् भने यसमा विकर्णहरू AC र BD को दुरी पत्ता लगाऊ ।
8. यदि बिन्दु P(9,12), बिन्दु Q(1,6) केन्द्र भएको वृत्तको परिधिमा पर्छ भने उक्त वृत्तको अर्धव्यास कति होला ? के बिन्दु (-7,0) उक्त वृत्तको परिधिमा पर्छ ?
9. उद्गम बिन्दु O बाट बिन्दु A र बिन्दु B को दुरी पत्ता लगाऊ, जहाँ A=(-7,7) छ र B=(7,-7) छ ।
10. यदि P(0,6) र Q (a,0) बिचको दुरी 6 एकाइ भए a को मान कति होला ?
11. तल दिइएका बिन्दुहरू रेखीय बिन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर :

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| (क) (4, 3), (3, 2) र (2, 1) | (ख) (5, 1), (3, 2) र (1, 3) |
| (ग) (24, 3), (0, 2) र (-2, -1) | (घ) (3, -1), (1, 1) र (-2, 4) |

7.0 पुनरवलोकन (Review)

वर्ग र आयतको क्षेत्रफल (Area of Square and Rectangles)

एउटा ABCD आयत लेऊ ।

जसमा लम्बाई 7cm र चौडाई 5cm छ ।

अब यस आयतलाई 1cm लम्बाई र 1cm

चौडाई भएका साना वर्गहरूमा विभाजन गर ।

कति ओटा साना वर्ग बन्छन्, गन र लेख ।

दिइएको आयतमा ठाडोतिर 5 ओटा र

तेर्सोतिर 7 ओटा साना वर्गहरू बन्छन् ।

र 35 साना वर्ग बन्छन् । यसरी उक्त

आयतको क्षेत्रफल 35 वर्ग सेमि

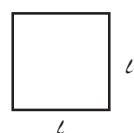
भयो र यहाँ लम्बाई 7 cm र चौडाई 5 cm छ । त्यस कारण $7 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = 35 \text{ cm}^2$ हुन्छ ।

\therefore आयतको क्षेत्रफल (A) = लम्बाई \times चौडाई वर्ग एकाई हुन्छ ।

$$A = l \times b \text{ वर्ग एकाई}$$

फेरि, हामीलाई थाहा छ, सबै भुजाहरू बराबर भएको आयत नै वर्ग हो । वर्गमा

लम्बाई = चौडाई हुन्छ । त्यस कारण, वर्गको क्षेत्रफल = (लम्बाई \times लम्बाई) वर्ग एकाई



$$(A) = l \times l = l^2 \text{ वर्ग एकाई भयो ।}$$

7.1 चतुर्भुज र त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of Quadrilaterals and Triangles)

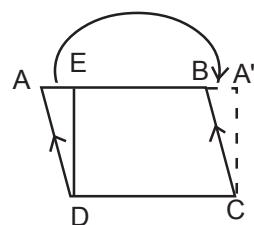
(I) समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of a Parallelogram)

बाक्तो कागजको पन्नामा एउटा समानान्तर चतुर्भुज ABCD

खिच र बिन्दु D बाट AB मा लम्ब खिच । त्यसपछि उक्त स.च.लाई

कैचीले काट । फेरि उक्त समानान्तर चतुर्भुजको DE बाट काटी

$\triangle ADE$ र चतुर्भुज BCDE लाई छुट्याउ ।



चित्रमा देखाएँ फैँ ΔADE लाई स.च.को अर्कोपट्टि जोड़ ।

आयत $EA'CD$ तयार भयो । जसको क्षेत्रफल समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ सँग बराबर हुन्छ ।

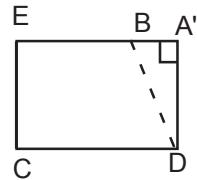
अब, समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ को क्षेत्रफल

$$= \text{आयत } CDAE \text{ को क्षेत्रफल}$$

$$= CD \times CE \text{ वर्ग एकाइ}$$

$$= \text{आधार} \times \text{उचाइ} \text{ वर्ग एकाइ}$$

यदि आधार (base) = b र उचाइ (height) = h भए, स.च. को क्षेत्रफल $A = b \times h$ हुन्छ ।



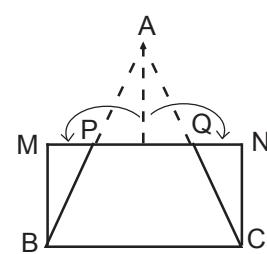
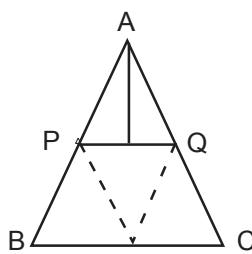
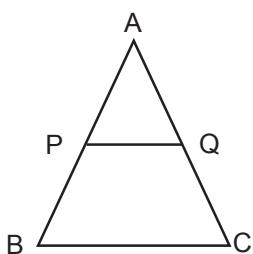
(II) त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of Triangle)

कार्डबोर्डको प्रयोग गरेर एउटा $\triangle ABC$ बनाऊ । यसमा आधार BC (b) र उचाइ (h) छ । चित्र

(क) मा देखाए जस्तै शीर्षविन्दु A लाई आधारमा पर्ने गरी पट्याऊ र पट्याइएको त्यस ठाउँबाट काट ।

$\triangle APQ$ बन्छ । अब, $\triangle APQ$ को आधार PQ मा शीर्षविन्दु A बाट लम्ब खिच र त्यस लम्बबाट काट । चित्र

(ग) मा देखाए जस्तै चतुर्भुज $PQCB$ का दुइतर्फ जोड । आयत $MNCB$ तयार भयो ।



अब, $\triangle ABC$ को क्षेत्रफल = आयत $MNCB$ को क्षेत्रफल = $MB \times BC$ वर्ग एकाइ

$$= \frac{1}{2} h \times b = \frac{1}{2} b \times h \text{ वर्ग एकाइ} \quad \left[\because MB = \frac{1}{2} \text{उचाइ} \right]$$

$$\therefore \text{त्रिभुजको क्षेत्रफल (A)} = \frac{1}{2} b \times h \text{ वर्ग एकाइ}$$

(III) समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of Equilateral Triangle)

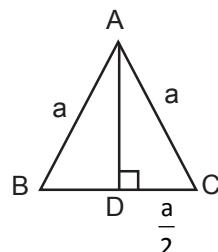
सँगैको चित्र समबाहु त्रिभुज हो । यसमा भुजाको

लम्बाइ 'a' छ । A बाट BC मा लम्ब AD

खिच्नौं जसले आधार BC लाई आधा गर्दै ।

पाइथागोरस साध्यअनुसार, $AD^2 = AC^2 - CD^2$

$$\text{अथवा, } AD = \sqrt{AC^2 - CD^2}$$



$$= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2 - a^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

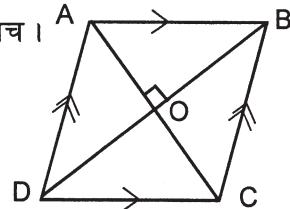
अब, $\triangle ABC$ को क्षेत्रफल $(A) = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{उचाइ} = \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

अतः समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल $(A) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ वर्ग एकाइ

(IV) समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of Rhombus)

समबाहु चतुर्भुज $ABCD$ लेजे र विकर्णहरू $AC (d_1)$ र $BD (d_2)$ खिच। हामीलाई थाहा छ, समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर लम्ब हुन्छन्। तसर्थे $OA \perp BD$ र $CO \perp BD$ हुन्छ।

अब, समबाहु चतुर्भुज $ABCD$ को क्षेत्रफल $(A) = \Delta ABD$ को क्षेत्रफल + ΔABC को क्षेत्रफल



$$= \frac{1}{2} \text{आधार} (BD) \times \text{उचाइ} (OA) + \frac{1}{2} BD \times OC$$

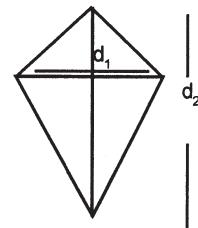
$$= \frac{1}{2} BD(OA + OC)$$

$$= \frac{1}{2} BD \times AC \quad [∵ OA + OC = AC]$$

$$= \frac{1}{2} d_1 \times d_2 \quad [∵ BD = d_1, AC = d_2]$$

अतः समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$ वर्ग एकाइ हुन्छ।

त्यसैगरी चड्गा (Kite) को क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$ वर्ग एकाइ हुन्छ।



(V) समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of Trapezium)

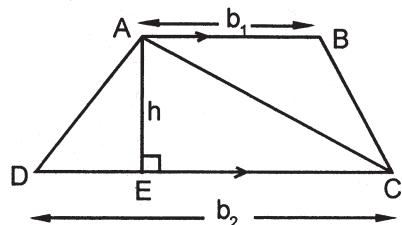
$ABCD$ एउटा समलम्ब चतुर्भुज हो, जसमा AB र CD

समानान्तर भुजाहरू हुन्। AE समलम्ब चतुर्भुजको उचाइ हो। AC विकर्ण हो।

अब, $\triangle ABC$ को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} AB \times AE$

$$= \frac{1}{2} b_1 \times h$$

$$[∵ AB = b_1]$$



फेरि ΔACD को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} CD \times AE$

$$= \frac{1}{2} b_2 \times h \quad [:: CD = b_2]$$

अब समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ को क्षेत्रफल (A) $= \Delta ABC$ को क्षेत्रफल + ΔACD को क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} b_1 \times h + \frac{1}{2} b_2 \times h = \frac{1}{2} h \times (b_1 + b_2)$$

त्यस कारण, समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \text{उचाइ} \times (\text{दुई समानान्तर भुजाको जोड})$

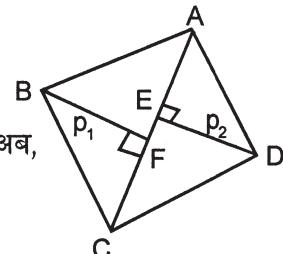
(VI) चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of Quadrilateral)

$ABCD$ एउटा चतुर्भुज हो। जसमा AC एउटा विकर्ण हो।

B बाट AC मा लम्ब $BF (p_1)$ र D बाट लम्ब $DE (p_2)$ लम्बहरू खिचौँ। अब,

$$\Delta ABC \text{ को क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} AC \times BF$$

$$= \frac{1}{2} AC \times p_1 \text{ वर्ग एकाइ} [:: BF = p_1]$$



$$\text{र } \Delta ACD \text{ को क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} AC \times DE = \frac{1}{2} AC \times p_2 \text{ वर्ग एकाइ} [:: DE = p_2]$$

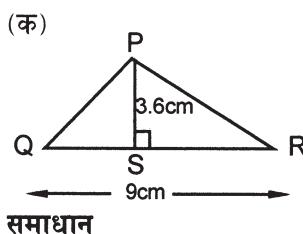
अब चतुर्भुजको क्षेत्रफल (A) $= \Delta ABC$ को क्षेत्रफल + ΔACD को क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} AC \times p_1 + \frac{1}{2} AC \times p_2 \text{ वर्ग एकाइ}$$

$$= \frac{1}{2} AC(p_1 + p_2) \text{ वर्ग एकाइ}$$

त्यसकारण, क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2} \text{ विकर्ण} \times (p_1 + p_2) \text{ वर्ग एकाइ}$

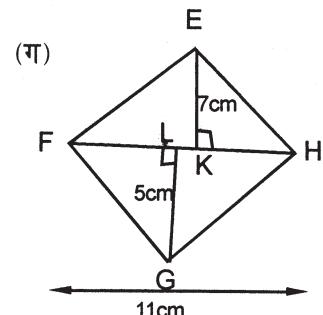
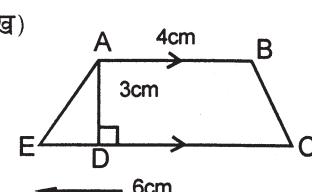
उदाहरण 1 दिइएका ज्यामितीय आकृतिहरूको क्षेत्रफल निकाल :



(क) ΔPQR मा आधार (PR) $= 9\text{cm}$

उचाइ (PS) $= 3.6\text{cm}$

क्षेत्रफल (A) $= ?$



हामीलाई थाहा छ, त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2} b \times h$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 9 \times 3.6 \right) \text{cm}^2$$

$$= (9 \times 1.8) \text{cm}^2 = 16.2 \text{ cm}^2$$

(ख) यहाँ समलम्ब चतुर्भुज ABCE मा, $b_1 = AB = 4\text{cm}$

$$b_2 = CE = 6\text{cm}$$

$$h = AD = 3\text{cm}$$

समलम्ब चतुर्भुज ABCE को क्षेत्रफल (A) = ?

हामीलाई थाहा छ, समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2} \times h \times [b_1 + b_2]$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times [4 + 6] \text{cm}^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 10 \text{ cm}^2 = 15 \text{ cm}^2$$

(ग) यहाँ विकर्ण (FH) = 11cm

$$EK = p_1 = 7\text{cm}$$

$$GL = p_2 = 5\text{cm}$$

क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2} \text{ विकर्ण} \times (p_1 + p_2)$

$$= \frac{1}{2} \times 11 \times (7 + 5) \text{cm}^2 = \frac{1}{2} \times 11 \times 12 \text{cm}^2 = 66 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 2

सँगैको चित्रमा छाया पारेको भागको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

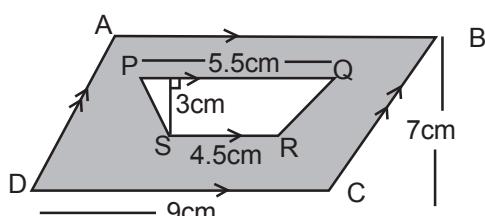
समाधान

यहाँ, समानान्तर चतुर्भुज ABCD छ

आधार (CD) = 9cm र

उचाई (h) = 7cm छ

$$\begin{aligned} \text{ABCD को क्षेत्रफल } (A_1) &= b \times h \\ &= 9 \times 7 \text{ cm}^2 \\ &= 63 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



फेरि, समलम्ब चतुर्भुज PQRS छ, जसमा

$$\text{उचाइ } (h) = 3\text{cm}$$

$$PQ = b_1 = 5.5 \text{ cm}$$

$$RS = b_2 = 4.5 \text{ cm}$$

$$\text{PQRS को क्षेत्रफल } (A_2) = (A_2) = \frac{1}{2} h(b_1 \times b_2) = \frac{1}{2} \times 3 \times (5.5 + 4.5) \text{cm}^2 = 15 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} \text{अब, छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल} &= A_1 - A_2 \\ &= 63 \text{ cm}^2 - 15 \text{ cm}^2 \\ &= 48 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

उदाहरण 3

एउटा 240 ft लम्बाई भएको र 180 ft चौडाइ भएको आयातकार खेतको विचमा एउटा 16 ft किनारा भएको एउटा वर्गाकार पोखरी छ भने पोखरीबाहेको खेतको क्षेत्रफल कति होला ?

समाधान

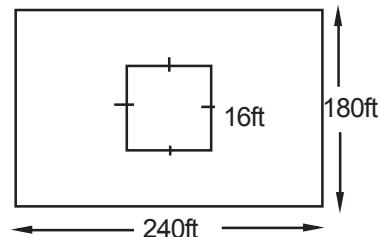
$$\text{आयातकार खेतको लम्बाइ } (l) = 240 \text{ ft}$$

$$\text{आयातकार खेतको चौडाइ } (b) = 180 \text{ ft}$$

$$\begin{aligned} \text{आयातकार खेतको क्षेत्रफल } l \times b &= 240 \times 180 \text{ वर्ग फिट} \\ &= 43200 \text{ वर्ग फिट} \end{aligned}$$

$$\text{फेरि, वर्गाकार पोखरीको क्षेत्रफल} = l^2 = 16^2 \text{ वर्ग फिट} = 256 \text{ वर्ग फिट}$$

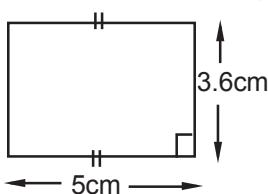
$$\begin{aligned} \text{अब, पोखरीबाहेको खेतको क्षेत्रफल } (A) &= \text{खेतको क्षेत्रफल} - \text{पोखरीको क्षेत्रफल} \\ &= (43200 - 256) \text{ वर्ग फिट} \\ &= 42944 \text{ वर्ग फिट} \end{aligned}$$



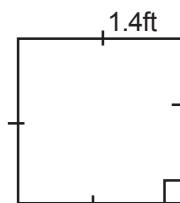
अभ्यास 7.1

1. तलका ज्यामितीय आकृतिहरूको क्षेत्रफल निकाल :

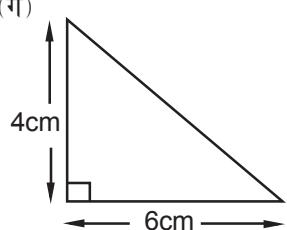
(क)

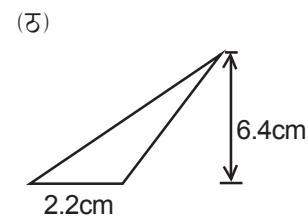
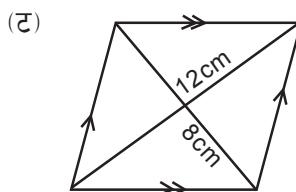
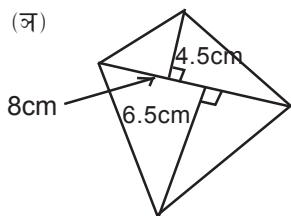
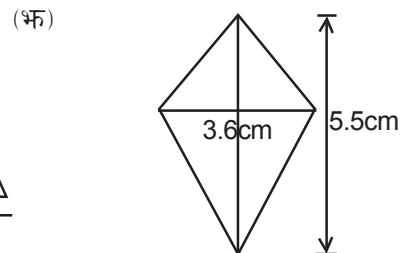
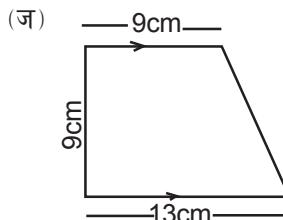
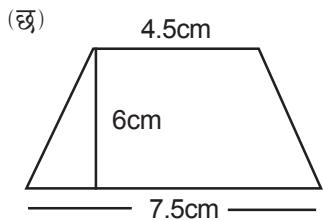
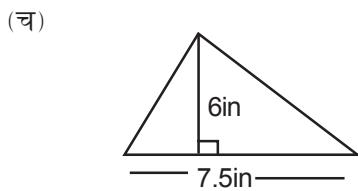
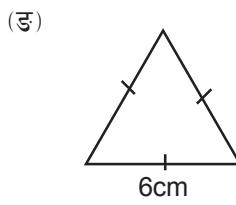
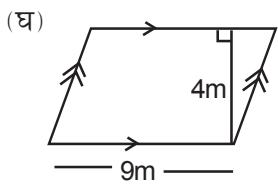


(ख)

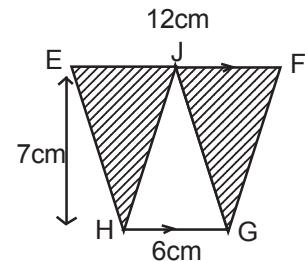
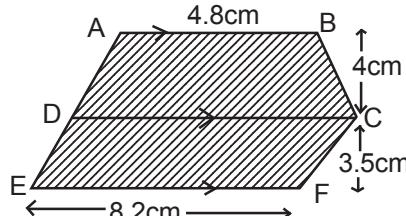
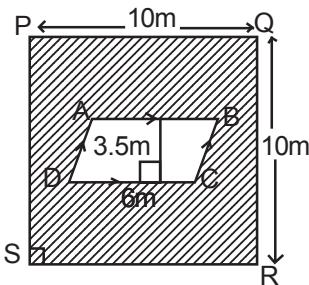


(ग)

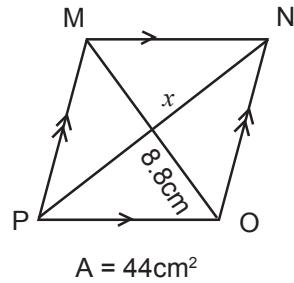
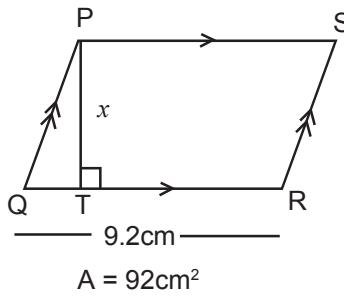
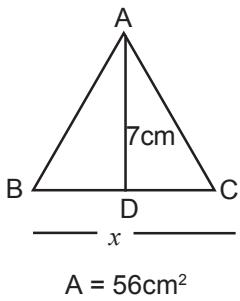




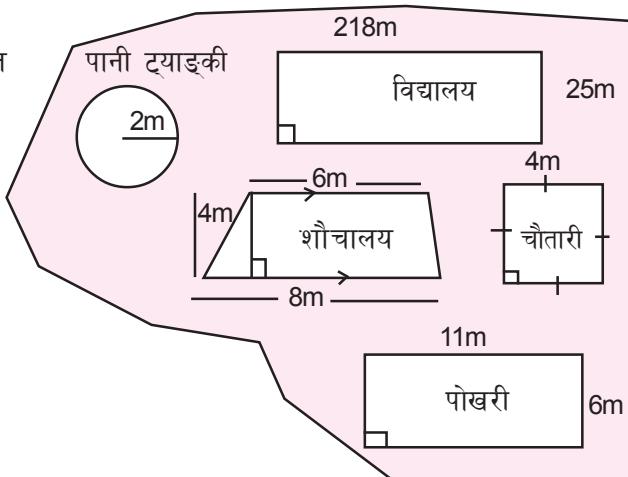
2. तल दिइएका चित्रहरूमा छाया परिएको भागको क्षेत्रफल निकाल :



3. तलका चित्रहरूमा x को मान पत्ता लगाऊ :



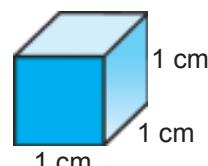
4. एउटा 120 मिटर लम्बाइ र 110 मिटर चौडाइ भएको आयातकार बगैँचाको विचमा 18 मिटर लामो र 9 मिटर चौडाइ भएको भलिबल कोर्ट बनाइएको छ । भलिबल कोर्टबाहेक बगैँचाको क्षेत्रफल कति होला ?
5. 9 फिट लामो र 7 फिट चौडा भएको पर्खालमा कति ओटा 1 वर्ग फिटका बोर्डहरू नखप्टाइकन बनाउन सकिएला ?
6. सँगैको चित्रमा एउटा गाउँका विभिन्न महत्वपूर्ण ठाउँहरू दिइएको छ । चित्र हेरी निम्नलिखित ठाउँहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ :
- (क) सार्वजनिक शौचालयको क्षेत्रफल
 - (ख) पोखरीको क्षेत्रफल
 - (ग) विद्यालयको क्षेत्रफल
 - (घ) चौतारीको क्षेत्रफल
 - (ङ) पानी ट्याइकीको क्षेत्रफल



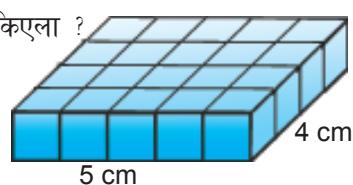
7.2. घन र षड्मुखाको आयतन (Volume of Cube and Cuboids)

क्रियाकलाप

1. 1 cm लम्बाइ, 1cm चौडाइ र 1 cm उचाइ भएको घनको आयतन कति हुन्छ ?



2. एउटा 5 cm लम्बाइ र 4 cm चौडाइ भएको आयातकार बाकसको आधारमा नखप्टाइकन कतिओटा 1 cm^3 का बट्टाहरू राख्न सकिएला ?

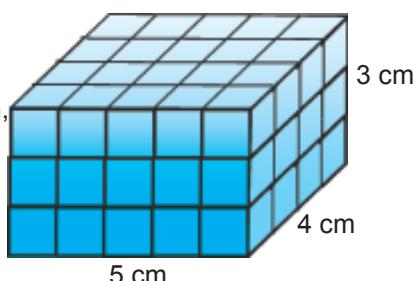


3. यस्तै तिन ओटा तहहरूसँगै एक माथि अर्को गर्दै राख्दा कति ओटा एकाइ घनहरू अटाउलान् र कस्तो ठोस आकृति बन्न्छ ?

यसमा जम्मा 60 ओटा एकाइ घनहरू हुन्छन् ।

तसर्थ $60 = 5 \times 4 \times 3$ हुन्छ जहाँ षड्मुखाको लम्बाइ 5cm, चौडाइ 4 cm र उचाइ 3cm छ ।

त्यस कारण, षड्मुखाको आयतन = $l \times b \times h$ घन एकाइ हुन्छ ।



यदि लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ बराबर भए उक्त षट्मुखा घन (cube) हो र घनको आयतन

$$(V) = l \times l \times l \text{ घन एकाइ}$$

$$= l^3 \text{ घन एकाइ हुन्छ।}$$

उदाहरण 1

10 cm लम्बाइ, 8 cm चौडाइ र 3 cm उचाइ भएको एउटा बाक्सको आयतन कर्ति होला ?

समाधान

$$\text{यहाँ बाक्सको लम्बाइ } (l) = 10 \text{ cm}$$

$$\text{चौडाइ } (b) = 8 \text{ cm}$$

$$\text{उचाइ } (h) = 3 \text{ cm}$$

$$\text{आयतन } (V) = ?$$

हामीलाई थाहा छ, आयतन $(V) = l \times b \times h$ घन एकाइ

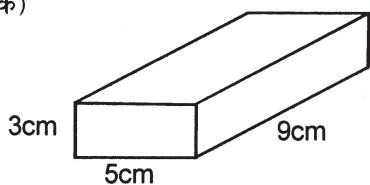
$$= 10 \times 8 \times 3 \text{ cm}^3$$

$$= 240 \text{ cm}^3$$

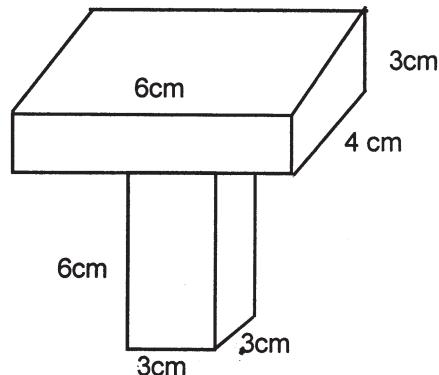
उदाहरण 2

तलका ठोस वस्तुको आयतन पत्ता लगाऊ :

(क)



(ख)



(क) समाधान

$$\text{यहाँ, लम्बाइ } (l) = 9 \text{ cm}$$

$$\text{चौडाइ } (b) = 5 \text{ cm}$$

$$\text{उचाइ } (h) = 3 \text{ cm}$$

$$\text{आयतन } (V) = ?$$

हामीलाई थाहा छ,

आयतन (V) = $l \times b \times h$ घन एकाइ

$$= (9 \times 5 \times 3) \text{ cm}^3 = 135 \text{ cm}^3$$

(ख) समाधान

यहाँ दिइएको ठोसको आयतन भनेको षड्मुखाकार भागहरूको आयतनको योगफल हो ।

$$\therefore V = (6 \times 4 \times 3 + 6 \times 3 \times 3) \text{ घन एकाइ}$$

$$= (72+54) \text{ cm}^3$$

$$= 126 \text{ cm}^3$$

उदाहरण 3

एउटा 10 m लम्बाइ, 9 m चौडाइ र 8 m उचाइ भएको ट्याइकीमा कति पेट्रोल अटाउला, पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, ट्याइकीको लम्बाइ (l) = 10 m

ट्याइकीको चौडाइ (b) = 9 m

ट्याइकीको उचाइ (h) = 8 m

आयतन (V) = $l \times b \times h$ घन एकाइ

$$= (10 \times 9 \times 8) \text{ m}^3$$

$$= 720 \text{ m}^3$$

त्यसकारण, उक्त ट्याइकीमा 720 m^3 पेट्रोल अटाउँछ ।

अभ्यास 7.2

1. तलका नाप भएका षड्मुखाहरूको आयतन पत्ता लगाऊ :

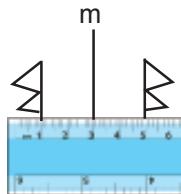
लम्बाइ	चौडाइ	उचाइ
(क) 10 cm	6 cm	5 cm
(ख) 4 cm	2 cm	3 cm
(ग) 50 cm	40 cm	30 cm
(घ) 6 cm	2 cm	$\frac{5}{2}$ cm
(ङ) 20 cm	10 cm	3.15 cm

($1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ liter}$)

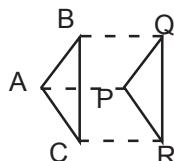
- एउटा 28cm लम्बाइ र 20cm चौडाइ भएको बाकसको आयतन 3360 cm^3 भए उक्त बाकसको उचाइ कति होला ?
 - तिम्रो घरमा भएका 5/5 ओटा घनाकार र षड्मुखाकार ठोस वस्तुहरूको नाम लेखी तिनीहरूको आयतन पत्ता लगाऊ ।
 - 12 m लम्बाइ, 0.5 m चौडाइ र 3 m उचाइ भएको पर्खालि बनाउन $0.3 \text{ m} \times 0.2 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}$ का कितिओटा ब्लकहरू आवश्यक पर्दछ. पत्ता लगाऊ ।

8.0 पुनरवलोकन (Review)

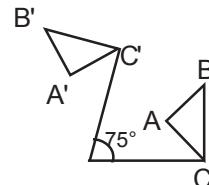
तल दिइएका चित्रहरू हेर र प्रत्येक चित्रका बारेमा साथीहरूसँग छलफल गरी निष्कर्षमा पुगी, लेख :



(क)



(ख)



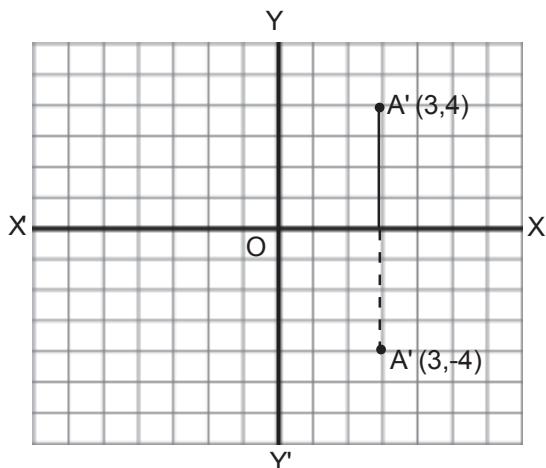
(ग)

8.1 परावर्तन (Reflection)

माथिको पहिलो चित्रमा के पायौ ? यसमा एउटा भन्डाको प्रतिबिम्ब रेखा m सँग देखाइएको छ । यसलाई m सँग भन्डाको परावर्तन भनिन्छ । यो हामीले कक्षा 7 मा पढिसकेका छौं । अब हामी निर्देशाङ्कबाट परावर्तनका बारेमा जानकारी लिन्छौं :

(क) X-अक्षबाट परावर्तन

चित्रमा बिन्दु A लेऊ । A लाई XOX' बाट परावर्तन गर र उक्त बिन्दुलाई A' नाम देऊ । यसमा X -अक्षबाट A सम्मको दुरी र X -अक्षबाट A' सम्मको दुरी बराबर हुन्छ । अब ग्राफमा बिन्दु A को निर्देशाङ्क गनेर लेख । त्यसैगरी A' को निर्देशाङ्क कति हुन्छ यहाँ A को निर्देशाङ्क $(3, 4)$ छ र A' को निर्देशाङ्क $(3, -4)$ छ ।



उदाहरण 1

बिन्दु (-4,5) लाई X- अक्षबाट परावर्तन गरी प्रतिबिम्ब बिन्दुको निर्देशाङ्क लेख ।

समाधान

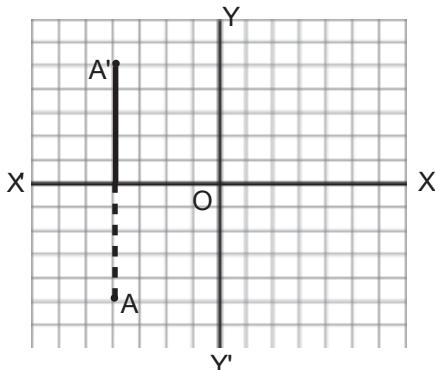
यहाँ, $A(x,y) = A(-4,5)$

$$x = -4, y = 5$$

अब, X- अक्षबाट परावर्तन गर्दा,

(-4,5) को प्रतिबिम्ब (-4,-5) भयो ।

$$(x', y') = (-4, -5)$$



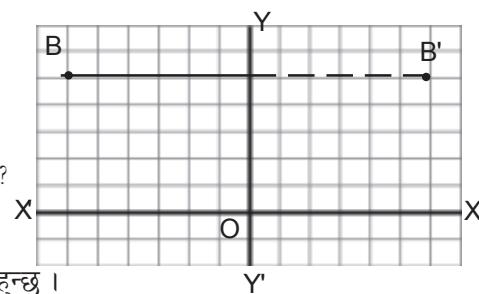
(ख) Y- अक्षबाट परावर्तन (Refelction by Y-axis)

सँगैको चित्रमा बिन्दु B लाई YOY' बाट परावर्तन गरेर हेर । यसको प्रतिबिम्ब YOY' रेखाबाट बिन्दु B को बराबर दुरीमा पर्छ । यसलाई B' नाम देउ ।

अब B र B' को निर्देशाङ्क गनेर कति कति छ हेर ?

तिनीहरू क्रमशः (-6,5) र (6,5) हुन्छन् ।

तसर्थ (-6,5) लाई Y- अक्षबाट परावर्तन गर्दा (6,5) हुन्छ ।



उदाहरण 2

बिन्दु (-5,-7) लाई ग्राफ पेपरमा अड्कन गरी Y- अक्षबाट परावर्तन गराई ग्राफ पेपरमा देखाऊ ।

समाधान

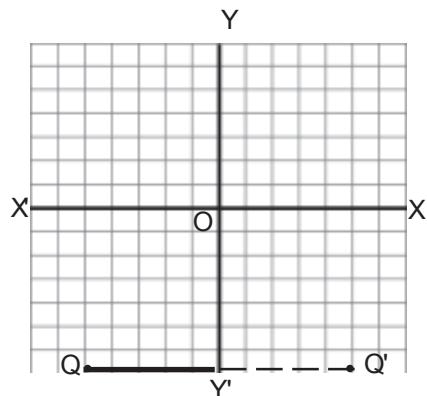
यहाँ Q(-5,-7) दिएको छ ।

$$\text{जहाँ } x = -5, \text{ र } y = -7 \text{ छ, } ।$$

अब, ग्राफ पेपरमा Q(-5,-7) लाई Y- अक्षबाट परावर्तन गर्दा,

(-5,-7) को प्रतिबिम्ब (5,-7) भयो ।

$$, \quad Q'(x', y') = (5, -7) \text{ हुन्छ ।}$$



उदाहरण 3

A(2,2), B(4,6) र C(6,3) एउटा त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् । $\triangle ABC$ लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी उक्त त्रिभुजलाई Y-अक्षसँग परावर्तन गरे र प्रतिबिम्ब त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्कहरू लेख ।

समाधान

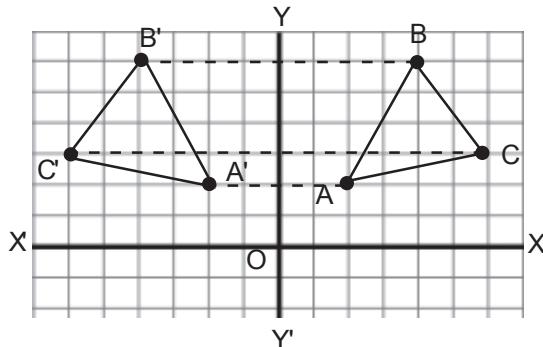
यहाँ, लेखाचित्रमा हेर्दा $\triangle ABC$ को प्रतिबिम्ब $\triangle A'B'C'$ हो ।

अब, बिन्दु A(2,2), B(4,6) र C(6,3) लाई Y-अक्षसँग परावर्तन गर्दा,

A' (-2,2)

B' (-4,6)

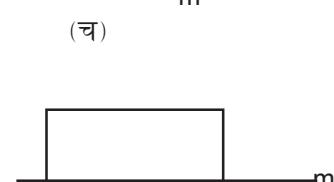
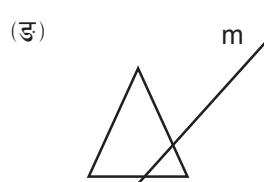
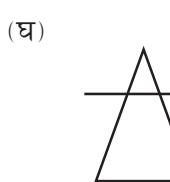
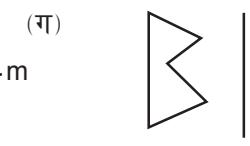
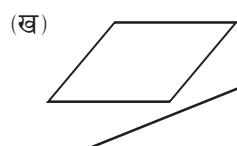
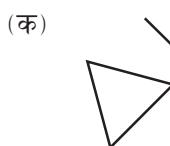
C' (-6,3)



आवश्यक प्रतिबिम्ब $\triangle A'B'C'$ हो, जसमा शीर्षबिन्दुहरूको निर्देशाङ्कहरू A'(-2,2), B'(-4,6) र C'(-6,3) छन् ।

अभ्यास 8.1

1. दिइएका ज्यामितीय आकृतिहरूलाई दिइएको अक्ष m सँग परावर्तन गरी प्रतिबिम्ब चित्र खिच :



2. लेखाचित्रको प्रयोग गरी दिइएका निर्देशाङ्कहरूलाई X- अक्षसँग परावर्तन गरी प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क लेख :

(क) (1,2)

(ख) (-2,3)

(ग) (4,-5)

(घ) (-6,6)

(ङ) (-5,-4)

(च) (-2,5)

(छ) (9,-8)

(ज) (-3,-9)

(झ) (-10,12)

(ञ) (7,8)

3. प्रश्न न. 2 का बिन्दुहरूलाई Y- अक्षबाट परावर्तन गरी ग्राफ पेपरमा लेख ।

4. बिन्दु P(5,-6) लाई Y-अक्ष बाट परावर्तन गरे र P' को निर्देशाङ्क पता लगाऊ । रेखा PP' को दुरी पता लगाऊ ।

- P(4,3), Q(7,3) र R(4,-3) एउटा समकोण त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन्। उक्त त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा अडकन गरी X- अक्षसँग परावर्तन गर ।
- A(2,-2), B(2,3) C(5,3) र D(5,-2) एउटा आयतका शीर्षबिन्दुहरू हुन्। अब उक्त आयतलाई लेखाचित्रमा अडकन गरी Y-अक्षबाट परावर्तन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।
- A(-2,3), B(-5,2) र C(-4,5) लाई लेखाचित्रमा अडकन गरी पहिले X-अक्षबाट परावर्तन गरी $\Delta A'B'C'$ पता लगाऊ । फेरि $\Delta A'B'C'$ लाई Y- अक्षबाट परावर्तन गरी अन्तिम प्रतिबिम्बलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

8.2 परिक्रमण (Rotation)

कुनै बिन्दु वा चित्रलाई कुनै बिन्दुबाट दिइएको दिशामा र दिइएको कोणमा स्थानान्तरण गराउनुलाई परिक्रमण (Rotation) भनिन्छ । परिक्रमणका लागि निम्नलिखित तिन अवश्यक छन् :

- परिक्रमणको केन्द्र (Center of Rotation)
- परिक्रमणको कोण (Angle of Rotation)
- परिक्रमणको दिशा (Direction of Rotation)

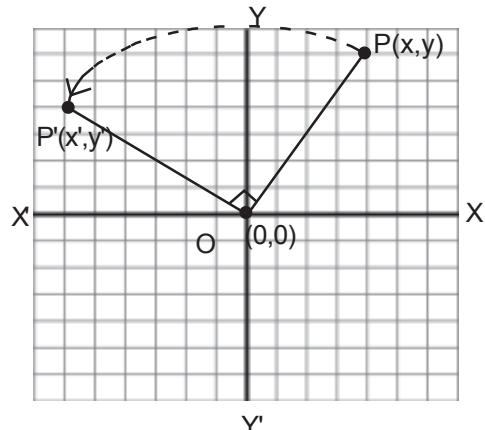
घडीको सुइको दिशालाई परिक्रमणको ऋणात्मक (Negative) दिशा र घडीको सुइको विपरीत दिशालाई परिक्रमणको धनात्मक (Positive) दिशा भनिन्छ ।

(क) उदाहरण बिन्दु O(0,0) बाट $+90^\circ$ मा परिक्रमण

O उदाहरण बिन्दु हो । XOX' र YOY' दुई अक्षहरू हुन्। P(x,y) एउटा बिन्दु हो । अब P बिन्दुलाई O बाट 90° मा घुमाऊ र $P'(x',y')$ मा पुऱ्याऊ, जहाँ $\angle POP' = 90^\circ$ हुन्छ र $OP=OP'$ हुन्छ ।

लेखाचित्रबाट बिन्दु P र P' को निर्देशाङ्क हेरौँ ।

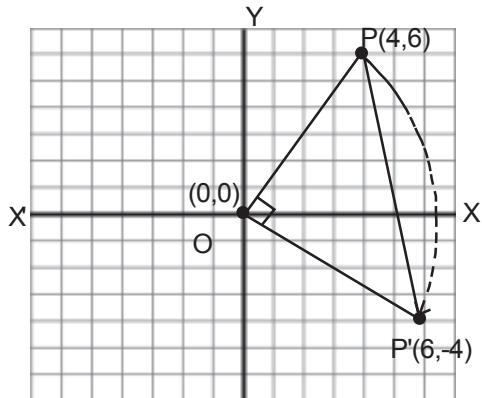
$$P(x,y)=(4,6) \text{ छ, } P'(x',y')=(-6,4) \text{ छ ।}$$



त्यसैगरी लेखाचित्रबाट हेर्दा उक्त बिन्दुलाई घडीको सुईको दिशामा वा ऋणात्मक दिशामा परिक्रमण गराउँदा $P(4,6)$ बाट $P'(6,-4)$ भयो । त्यसलाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ ।

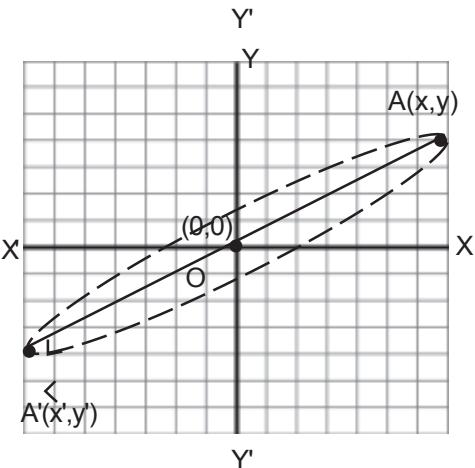
$$P(4,6) \xrightarrow{+90^\circ} P^1(-6,4)$$

$$P(4,6) \xrightarrow{-90^\circ} P^1(6,-4)$$



(ख) उद्गम बिन्दु $O(0,0)$ बाट 180° मा परिक्रमण

ग्राफ पेपरमा बिन्दु (x, y) लेऊ । बिन्दु A लाई उद्गम बिन्दु $O(0,0)$ बाट धनात्मक दिशामा 180° मा परिक्रमण गराउँ र बिन्दु $A'(x',y')$ नामले जनाउ । जहाँ $OA=OA'$ छ । ग्राफमा बिन्दु A र A' को निर्देशाङ्क गनी लेख । जहाँ $A(x,y)=(7,4)$ छ, र $A(x',y')=(-7,-4)$ छ ।



त्यस्तै $(7,4)$ लाई 180° बाट ऋणात्मक दिशामा परिक्रमण गराउँदा $(-7,-4)$ नै हुन्छ ।

उदाहरण 1

शीर्षबिन्दुहरू $A(6,6)$, $B(4,5)$ र $C(6,2)$ भएको एउटा त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।। उक्त त्रिभुजलाई उद्गम बिन्दु $(0,0)$ बाट (क) 90° धनात्मक दिशामा र (ख) 180° मा परिक्रमण गर ।

समाधान

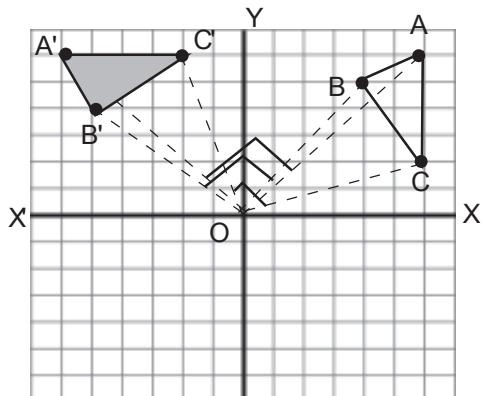
(क) यहाँ, $\triangle ABC$ का शीर्षबिन्दुहरू क्रमशः $(6,6)$, $(4,5)$ र $(6,2)$ छन् ।

अब बिन्दुहरू A , B र C लाई क्रमशः 90° मा परिक्रमण गराउँदा बन्ने प्रतिविम्ब त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा छाया पारी देखाइएको छ ।

जहाँ,

$$A(6,6) \rightarrow A'(-6,6), \quad B(4,5) \rightarrow B'(-5,4)$$

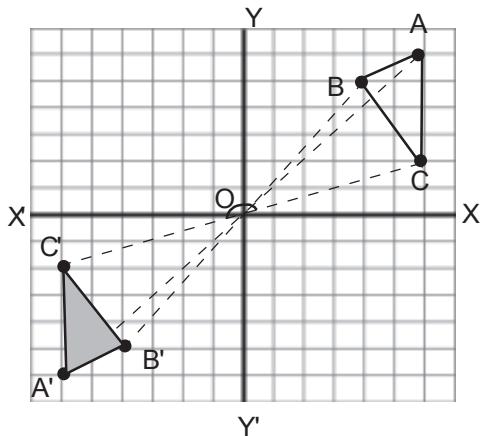
$$C(6,2) \rightarrow C'(-2,6) \text{ हुन्छ ।}$$



(ख) $\triangle ABC$ लाई लेखाचित्रबाट 180° मा परिक्रमण गराउँदा बन्ने $\triangle A'B'C'$ लाई लेखाचित्रमा छाया पारी देखाइएको छ, जसमा,

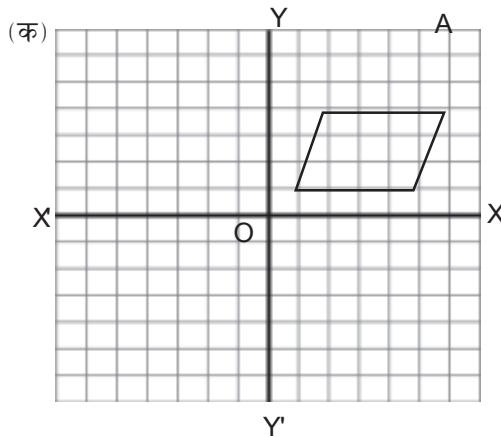
$$\begin{aligned}A(6,6) &\rightarrow A'(-6,-6) \\B(4,5) &\rightarrow B'(-4,-5) \\C(6,2) &\rightarrow C'(-6,-2)\end{aligned}$$

हुन्छ ।

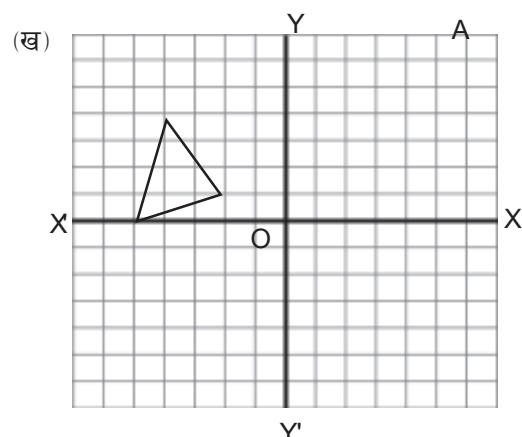
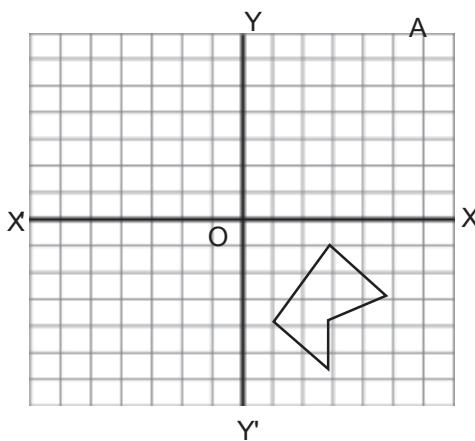


अभ्यास 8.2

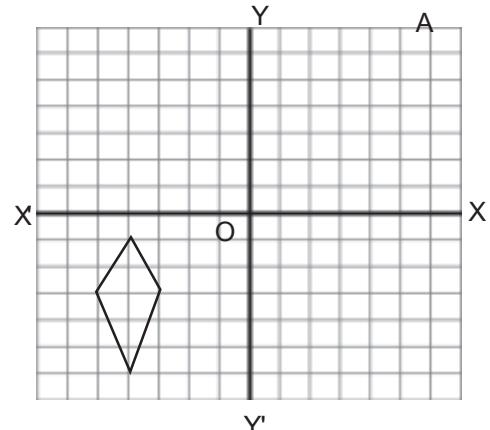
1. तलका चित्रहरूलाई लेखाचित्रमा सारेर छुटटाछुटटै बिन्दु $O(0,0)$ वाट घनात्मक दिशामा 90° र 180° मा परिक्रमण गरेर देखाऊ :



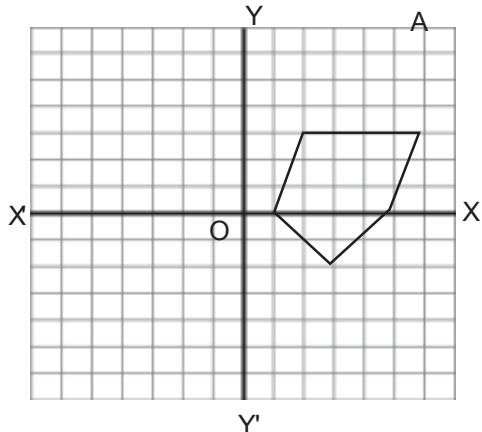
(ग)



(घ)

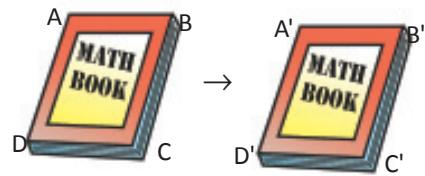


2. प्रश्न 1 का चित्रहरूलाई ऋणात्मक दिशामा 90° र 180° मा परिक्रमण गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।
3. तलका विन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा अड्कन गरी $+90^\circ$, -90° र 180° मा परिक्रमण गरी लेखाचित्रमा छुट्टा छुट्टै प्रस्तुत गर ।
- (क) (-4,7) (ख) (4,-7) (ग) (5,9) (घ) (3,0) (ङ) (-4,-8)
 (च) (2,-5) (छ) (10,-10) (ज) (0,6) (झ) (0,0) (ञ) (-9,-9)
4. A(0,0), B(3,0), C(3,3) र D(0,3) शीर्षबिन्दुहरू भएको एउटा वर्गलाई लेखाचित्रमा खिची त्यसलाई उद्गम बिन्दु O(0,0) बाट (क) $+90^\circ$ र (ख) -90° मा परिक्रमण गराई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।
5. तल दिइएका शीर्षबिन्दुहरूबाट बन्ने ज्यामितीय आकृतिलाई लेखाचित्रमा अड्कित गरी उद्गम बिन्दु O(0,0) बाट (i) 90° र (ii) -90° मा परिक्रमण गराई छुट्टाछुट्टै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।
- (क) (2,7), (3,3), र (6,7)
 (ख) (3,2), (-2,2), (6,5) र (1,5)
 (ग) (10,6), र (12,6)
6. सँगैको चित्रलाई उद्गम बिन्दु (0,0) बाट -90° , $+90^\circ$ र 180° मा परिक्रमण गराई छुट्टाछुट्टै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।



8.3 विस्थापन (Displacement)

टेबुलमा एउटा किताब राख । त्यसलाई घिसारेर केही बायाँ सार । पहिलेको किताबको स्थान ABCD थियो र अहिलेको स्थान A'B'C'D' भयो । किताबको स्थान निश्चित दिशामा परिवर्तन भयो । यसलाई उक्त किताबको विस्थापन भनिन्छ । अब AA', BB', CC' र DD' जोड र नाप तिनीहरूको सम्बन्ध कस्तो पायौ लेख । यहाँ, AA', BB', CC' र DD' बराबर र परस्पर समानान्तर छन् ।



कुनै पनि बिन्दु वा वस्तुलाई दिइएको दिशामा निश्चित दुरीमा सार्नु वा स्थानान्तरण गर्नुलाई विस्थापन (translation) भनिन्छ । विस्थापनका लागि विस्थापनको परिमाण र दिशा उल्लेख गर्नु आवश्यक छ ।

कुनै निर्देशाङ्ककलाई दायाँ विस्थापन गर्दा +, बायाँ विस्थापन गर्दा -, माथि विस्थापन गर्दा + र तल विस्थापन गर्दा - लेखिन्छ ।

उदाहरण 1

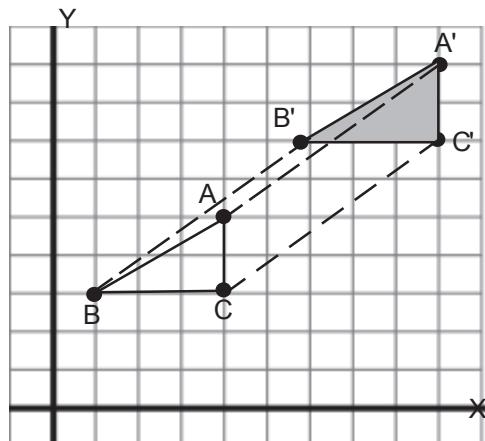
सँगैको चित्रमा $\triangle ABC$ दिइएको छ र उक्त त्रिभुजलाई 5 एकाइ दायाँ र 4 एकाइ माथि विस्थापन गरी आकृति $A'B'C'$ पुऱ्याइएको छ । अब $\triangle ABC$ र $\triangle A'B'C'$ का शीर्ष बिन्दुहरूका निर्देशाङ्कहरू हेरौँ ।

$$\Delta ABC \qquad \Delta A'B'C'$$

$$A(4,5) \xrightarrow{\text{विस्थापन}} A'(9,9)$$

$$B(1,3) \xrightarrow{\text{विस्थापन}} B'(6,7)$$

$$C(4,3) \xrightarrow{\text{विस्थापन}} C'(9,7)$$



यहाँ, विस्थापन अगाडि र विस्थापन पछाडिको x र y निर्देशाङ्क हेरौँ ।

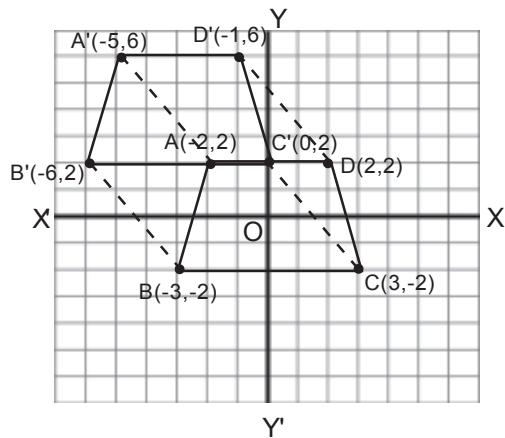
तीनओटै शीर्षबिन्दुहरूमा x- को मानमा विस्थापनपछि 5 थपिएको छ । त्यस्तै, y को मानमा पनि विस्थापनपछि 4 थपिएको छ । विस्थापनपछि प्रतिविम्ब त्रिभुजलाई छाया पारी देखाइएको छ ।

उदाहरण 2

$A(-2,2)$, $B(-3,-2)$, $C(3,-2)$ र $D(2,2)$ एउटा चतुर्भुजका शीर्षबिन्दुहरू हन् । उक्त चतुर्भुजलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी 3 एकाइ बायाँ र 4 एकाइ माथि विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

समाधान

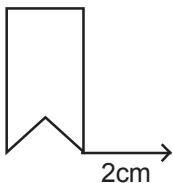
यहाँ, $A(-2,2)$, $B(-3,-2)$, $C(3,-2)$ र $D(2,2)$ छ । यसलाई सँगैको लेखाचित्रमा देखाइएको छ । यसमा प्रतिविम्ब चतुर्भुजका शीर्षबिन्दुका निर्देशाङ्कहरू $A(-5,6)$, $B(-6,2)$, $C(0,2)$ र $D(-1,6)$ छन् ।



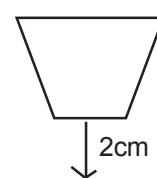
अभ्यास 8.3

1. तल दिइएका आकृतिहरूलाई दिएको दिशा र परिमाणमा विस्थापन गर :

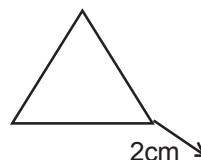
(क)



(ख)



(ग)



2. बिन्दु $(4,-5)$ लाई लेखाचित्रमा अड्कन गरी 3 एकाइ दायाँ र 4 एकाइ माथि विस्थापन गरी प्रस्तुत गर ।

- 3 तलका निर्देशाङ्कहरूलाई लेखाचित्रमा अड्कन गरी 3 एकाइ बायाँ र 3 एकाइ माथि विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर :

(क) $(4,9)$

(ख) $(-3,6)$

(ग) $(-2,2)$

(घ) $(-5,5)$

(ङ) $(2,-3)$

(च) $(4,-7)$

(छ) $(-4,8)$

(ज) $(-5,-6)$

4. $P(-1,-3)$ र $Q(4,5)$ लाई 2 एकाइ दायाँ र 3 एकाइ माथि विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

5. शीर्षबिन्दुहरू $A(1,0)$, $B(4,5)$ र $C(7,-2)$ भएको ΔABC लाई लेखाचित्रमा अड्कन गरी 3 एकाइ दायाँ र 5 एकाइ तल विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

6. बिन्दुहरू $(4,6)$, $(7,5)$, $(5,1)$ र $(2,2)$ लाई लेखाचित्रमा खिची बन्ने आकृतिलाई 4 एकाइ बायाँ र 5 एकाइ तल विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

7. $A(4,1)$ लाई लेखाचित्रमा अड्कन गरी 5 एकाइ दायाँ र 4 एकाइ माथि विस्थापन गर । फेरि उक्त प्रतिविम्ब बिन्दुलाई 2 एकाइ दायाँ र 5 एकाइ तल विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

8. बिन्दु $(-3,5)$ लाई कति एकाइमा विस्थापन गर्दा $(4,5)$ बन्ने, लेखाचित्रमा देखाऊ ।

9.0. पुनरबलोकन (Review)

तल दिइएको नक्सामा पोखरालाई केन्द्र मानी निम्नलिखित स्थानहरू जोड :

जुम्ला, सुखेत, काठमाडौं, इलाम, विराटनगर, वीरगञ्ज र महेन्द्रनगर



यासँगैको चित्र हेरेर दिइएका प्रश्नहरूका उत्तरहरूका बारेमा छलफल गरौँ :

N लाई आधार रेखा मानेर मापन गर्दा,

(क) **NE** को मापन कति हुन्छ ?

(ख) **E** को मापन कति छ ?

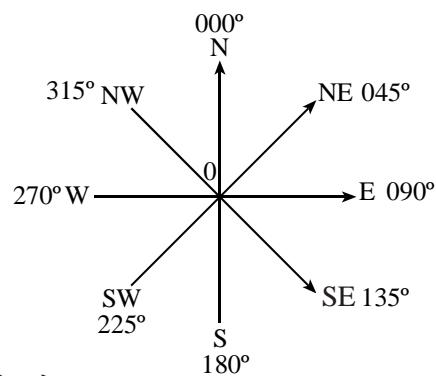
(ग) **SE** को मापन कति छ ।

(घ) **S** को मापन कति होला ?

(ङ) **SW** को मापन कति छ ?

(च) सबै कोणहरू कुन दिशामा लिइएको छ ?

(छ) सबैको मापनलाई कति अङ्कका रूपमा प्रस्तुत गरिएको छ ?



माथिको छुलफलबाट निम्नलिखित तीन कराहरू थाहा पाउन सकिन्दैः

तसर्थ, उत्तर दिशा जनाउने रेखालाई आधार रेखा मानेर घडीको सुईको दिशामा कुनै दुई स्थानबिचको दुरीलाई मापन गरी तीन अड्कको कोणका रूपमा प्रस्तुत गर्ने तरिकालाई दिशास्थिति (**Bearing**) भनिन्छ । अर्को शब्दमा यसलाई कम्पास दिशास्थिति (**Compass Bearing**) पनि भनिन्छ । उदाहरणका लागि माथि दिइएको चित्रमा **O** वाट **E** को दिशास्थिति **090°** छ ।

उदाहरण 1

स्थान P बाट स्थान Q को दिशास्थिति 075° छ भने स्थान Q बाट P को दिशास्थिति कति होला ?

संसाधन

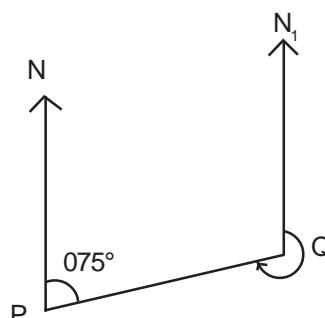
यहाँ Q को दिशास्थिति $\equiv \angle NPO = 075^\circ$

$$\angle NPQ + \angle PQN_1 = 180^\circ \quad [\because PN \parallel QN_1]$$

$$\text{or, } 075^\circ + \angle PQN_1 = 180^\circ$$

$$\text{or, } \angle PQN_1 = 180^\circ - 075^\circ = 105^\circ$$

$$\therefore Q \text{ बाट } P \text{ को दिशास्थिति} = 360^\circ - \angle PQN_1 \\ = 360^\circ - 105^\circ = 255^\circ$$



उदाहरण 2

यदि पोखराको महेन्द्रगुफाबाट के.आई.सिंह पुलको दिशास्थिति 155° छ भने के.आई.सिंह पुलबाट महेन्द्रगुफाको दिशास्थिति कति होला ?

समाधान

मानौं, महेन्द्रगफा = A

के.आर्ड. सिंह पूल = B

प्रश्नानुसार,

स्थान B को दिशास्थिति $= \angle NAB = 155^\circ$

$$\angle NAB + \angle ABN_1 = 180^\circ \quad [\because AN \parallel BN_1]$$

$$\text{अथवा, } 155^\circ + \angle ABN_1 = 180^\circ$$

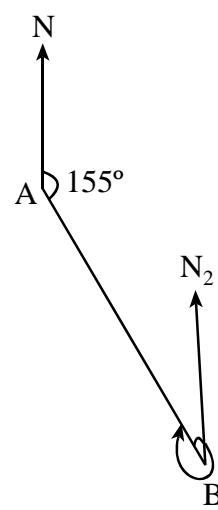
$$\text{अथवा, } \angle ABN_1 = 180^\circ - 155^\circ = 25^\circ$$

अब, के. आई. सिंह पुल (B) बाट महेन्द्रगुफा (A) को दिशास्थिति = ?

अब, B बाट A को दिशास्थिति

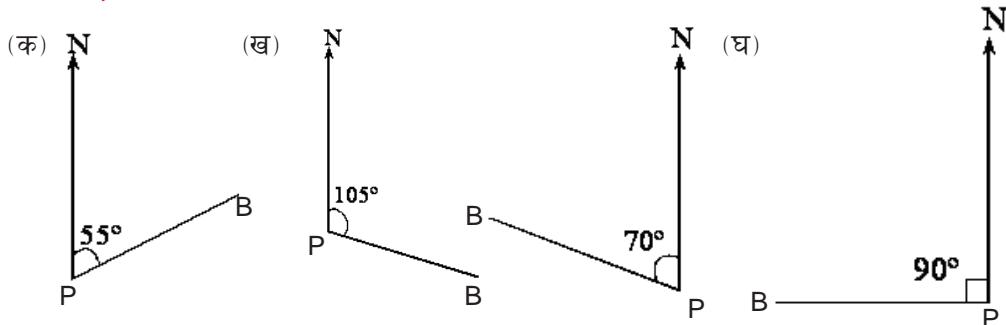
$$= 360^\circ - \angle ABN_1$$

$$= 360^\circ - 25^\circ = 325^\circ$$



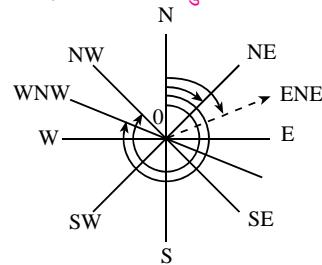
अभ्यास 9.1

1. तल दिइएका चित्रहरूमा स्थान P बाट स्थान B को दिशास्थिति उल्लेख गर :

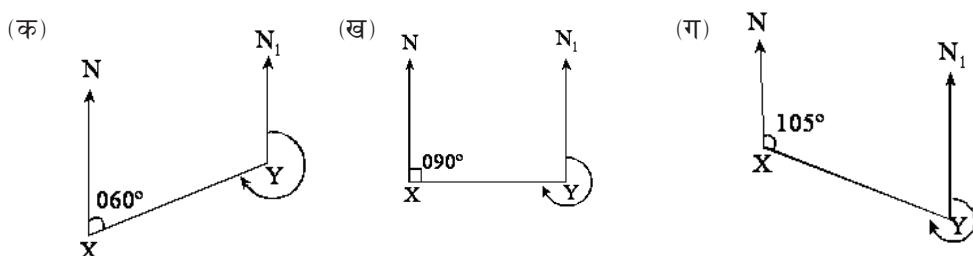


2. उत्तर जनाउने रेखालाई आधार मानेर दिइएका दिशास्थितिलाई कोणमा प्रस्तुत गर ।

- (क) उत्तर - पश्चिम (NW)
- (ख) दक्षिण पूर्व (SE)
- (ग) पश्चिम - उत्तर - पश्चिम (WNW)
- (घ) पूर्व - उत्तर - पूर्व (ENE)



3. दिइएका चित्रहरूमा स्थान X बाट स्थान Y को दिशास्थिति दिइएको छ भने स्थान Y बाट स्थान X को दिशास्थिति पत्ता लगाऊ ।



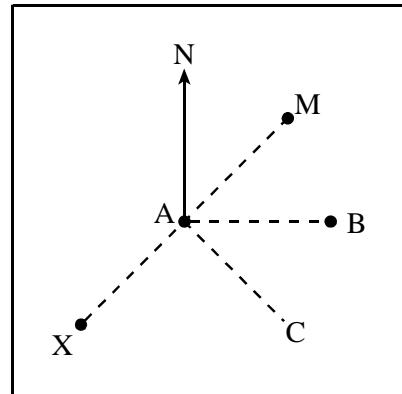
4. दिइएका दिशास्थितिलाई चित्र बनाएर देखाऊ :

- (क) बिन्दु A बाट एउटा जहाजको दिशास्थिति 120° छ ।
 - (ख) गाउँको पँधेरोबाट मन्दिरको दिशास्थिति 280° छ ।
 - (ग) एउटा डाँडाको टुप्पाबाट गोठको दिशास्थिति 075° छ ।
5. एउटा गाउँको मन्दिरबाट विद्यालयको दिशास्थिति 062° भए उक्त विद्यालयबाट मन्दिरको दिशास्थिति कति होला, चित्रद्वारा देखाऊ ।
6. एउटा खहरे खोला 120° को दिशास्थितिमा बगिरहेको थियो । फाँटमा पुगेपछि वर्षात्को भेलसँगै उक्त खोला 200° को दिशास्थितिमा बग्न थाल्यो भने उक्त खोलाले कति डिग्रीको कोणमा दिशा परिवर्तन गयो होला ?

7. सँगैको चित्रमा विभिन्न स्थानका बिन्दुहरू दिइएका छन् ।

निम्नलिखित बिन्दुहरूको दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् :

- (क) बिन्दु A बाट M
- (ख) बिन्दु A बाट B
- (ग) बिन्दु A बाट C
- (घ) बिन्दु A बाट X
- (ङ) बिन्दु A बाट A



9.2. स्केल ड्रइंड (Scale Drawing)

तिमो घरबाट विद्यालयसम्मको दुरीलाई कापीमा रेखा खिचेर देखाउन सक्छौं कि सकैनौ, त्यसलाई कापीमा देखाउन सकिदैन किनकि घरबाट विद्यालयसम्मको दुरी कापीको लम्बाइभन्दा धेरै छ ।

तसर्थ, कुनै दुई ठाउँहरूविचको दुरी जसलाई मिटर (m), किलोमिटर (km) वा माइल (mile) मा नापिन्छ, त्यसलाई नक्सामा देखाउन सम्भव हुँदैन । उक्त दुरीलाई उचित दुरीमा रूपान्तरण गरी वास्तविक दुरीलाई नक्सामा प्रस्तुत गर्न सम्भव पार्ने मापनको तरिकालाई नै स्केल ड्रइंड (scale drawing) भनिन्छ । उदाहरणका लागि काठमाडौंदेखि पोखरासम्मको वास्तविक दुरी 200km छ । यदि स्केल $1\text{cm} = 100\text{ km}$ भए काठमाडौंदेखि पोखराको दुरीलाई नक्सामा 2cm मा देखाउन सकिन्छ । $200\text{ km} = 2\text{cm}$ मा लेखिन्नछ ।

[स्केल : $1\text{ cm} = 100\text{ km}$ वा $1:100$]

उदाहरण 1

$1\text{ cm} = 600\text{ m}$ को स्केल प्रयोग गरी एउटा नक्सा तयार गर्दा दुई स्थानविचको नक्साको दुरी 6cm भए उक्त दुई स्थानहरूविचको वास्तविक दुरी कति होला ?

समाधान

यहाँ, स्केल $1\text{ cm} = 600\text{m}$ वास्तविक दुरी

$$\text{स्केल } 6\text{ cm} = (6 \times 600)\text{ m} = 3600\text{ m}$$

त्यसैले दुई ठाउँविचको वास्तविक दुरी = 3600 m

उदाहरण 2

एउटा जहाज सुरुको स्थानबाट 045° दिशास्थितिमा 600 माइल (miles) र 135° दिशास्थितिमा 800 माइल (miles) उडान गर्दछ भने उक्त जहाजको सुरुको स्थान र अन्तिम स्थानबिचको वास्तविक दुरी कति होला, साथै अन्तिम स्थानबाट सुरुको स्थानको दिशास्थिति पत्ता लगाऊ । स्केल $1\text{ cm} = 200\text{ mile}$

समाधान

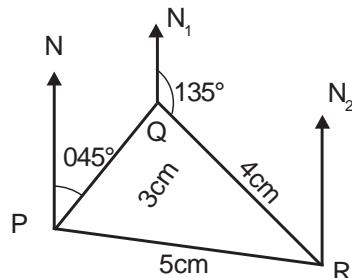
मानौं, जहाजको सुरुको स्थान = P

जहाजको अन्तिम स्थान = R

$$\angle NPQ = 045^\circ$$

$$\angle N_1 QR = 135^\circ$$

चित्रअनुसार, PR = 5cm



त्यसैले, सुरुको स्थानबाट अन्तिम स्थानबिचको वास्तविक दुरी = $5 \times 200 = 1000\text{ mile}$

फेरि, चित्रमा प्रोटेक्टर प्रयोग गरी नाप्दा $\angle PRN_2 = 079^\circ$

$$\text{अन्तिम स्थानबाट सुरुको स्थानको दिशास्थिति} = 360^\circ - \angle PRN_1$$

$$= 360^\circ - 079^\circ = 281^\circ$$

उदाहरण 3

रमेश प्रत्येक दिन 060° को दिशास्थितिमा 120 मिटर र 150° को दिशास्थितिमा 180 मिटर हँड्ने गर्दछ । $1\text{ cm} = 40\text{ m}$ को स्केल प्रयोग गरेर उसले सुरु गरेको ठाउँ र अन्तिम ठाउँसम्मको वास्तविक दुरी पत्ता लगाऊ । साथै अन्तिम स्थानबाट सुरु स्थानको दिशास्थिति कति होला ?

समाधान

चित्रमा रूलर प्रयोग गरेर नाप्दा,

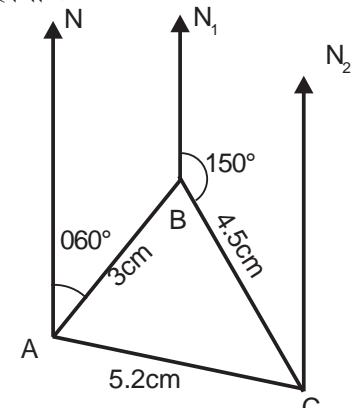
सुरुको स्थान = A, अन्तिम स्थान = C मान्दा

सुरु स्थानदेखि अन्तिम स्थानको नक्साको दुरी = 5.2 cm

$$1\text{ cm} = 40\text{ mिटर वास्तविक दुरी}$$

$$5.2\text{ cm} = (40 \times 5.2)\text{ मिटर वास्तविक दुरी}$$

$$= 208\text{ मिटर}$$



फेरि, चित्रमा प्रोटेक्टर प्रयोग गरी नाप्दा $\angle ACN_2 = 65^\circ$

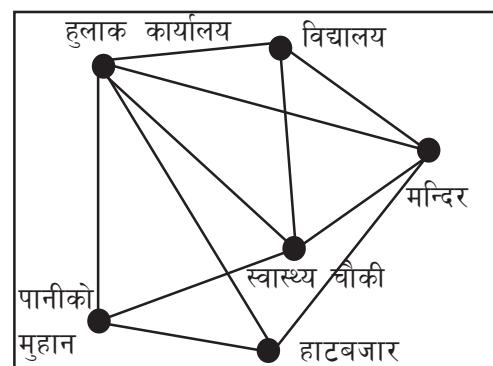
$$\text{अन्तिम स्थान (C) बाट सुरु स्थान (A) को दिशास्थिति} = 360^\circ - 065^\circ$$

$$= 295^\circ$$

अभ्यास 9.2

- तलका प्रश्नहरूमा दुई स्थानबिचको वास्तविक दुरी पत्ता लगाऊ :
 - दुई स्थानबिचको नक्साको दुरी = 7 cm, [स्केल 1 cm = 750 m]
 - दुई स्थानबिचको नक्साको दुरी = 6.5 cm [स्केल 1 cm = 1000 miles]
 - महेन्द्र गुफा र चमेरो गुफाबिचको नक्साको दुरी = 3 cm [स्केल 1 cm = 250 m]
- काठमाडौँको चक्रपथको लम्बाइ 27km छ। यदि स्केल 1cm = 12km भए उक्त चक्रपथको नक्साको लम्बाइ कति होला ?
- माधवले स्थान A बाट 030° दिशास्थितिमा 5km हिँडेपछि स्थान B मा पुग्छ। त्यसपछि B बाट 140° को दिशास्थितिमा 3 km हिँडेपछि स्थान C मा पुग्छ र अन्त्यमा सिधा C बाट A मा फर्कन्छ भने,
 - उचित स्केल छानी स्केल ढ्राइड गर ।
 - स्थान C बाट स्थान A सम्मको स्केल दुरी कति होला ?
 - स्थान C बाट स्थान A सम्म सिधा फर्किंदा उसले वास्तविक दुरी कति पार गर्दै ?
 - स्थान C बाट A स्थानको दिशास्थिति पत्ता लगाऊ ।
- एउटा सहरको बसपार्कबाट 500 मिटर दक्षिणमा एउटा मन्दिर पर्दछ र पौडीपोखरी मन्दिरबाट 065° दिशास्थितिमा पर्दछ। बसपार्कबाट पौडीपोखरी 145° दिशास्थितिमा पर्दै भने पौडीपोखरी र मन्दिरबिचको वास्तविक दुरी कति होला ? $1\text{ cm} = 100\text{ m}$ को स्केल प्रयोग गरी देखाऊ ।
- स्थान B बाट स्थान A 400 मिटर पश्चिममा पर्दै। स्थान A बाट स्थान C को दिशास्थिति 050° छ र स्थान B बाट C को दिशास्थिति 290° छ भने,
 - $1\text{ cm} = 40\text{ m}$ स्केल लिई स्केल ढ्राइड गर ।
 - स्थान B र स्थान C बिचको वास्तविक दुरी कति होला ?
 - स्थान C का आधारमा स्थान B को दिशास्थिति पत्ता लगाऊ ।
- चित्रमा एउटा गाउँको मुख्य ठाउँहरू देखाइएको छ। यदि स्केल 1 cm = 150 मिटर भए रुलर प्रयोग गरी हुलाक कार्यालयबाट निम्नलिखित ठाउँहरूको वास्तविक दुरी पत्ता लगाऊ :

(क) मन्दिर	(ख) पानीको मुहान
(ग) स्वास्थ्य चौकी	(घ) विद्यालय
(ड) हाटबजार	



10.0. पुनरवलोकन (Review)

तलका समूहहरूको अध्ययन गरी दिइएका प्रश्नहरूका उत्तरहरूको खोजी गर :

$$U = \{ 1 \text{ देखि } 20 \text{ सम्ममा सडख्याहरू } \}$$

$A = \{ 20 \text{ भन्दा साना } 3 \text{ का अपवर्त्यहरू } \}$, र $B = \{ 20 \text{ भन्दा साना } 4 \text{ का अपवर्त्यहरू } \}$ भए

(क) समूहहरू U, A , र B का सदस्यहरू सूचीकरण गर ।

(ख) समूहहरू U, A , र B लाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।

(ग) भेनचित्रको प्रयोग गरी तलका समूहहरू पत्ता लगाऊ :

$$(i) \quad A \cup B \quad (ii) \quad A \cap B$$

(घ) A र B समूह U का कस्ता समूहहरू हुन् ?

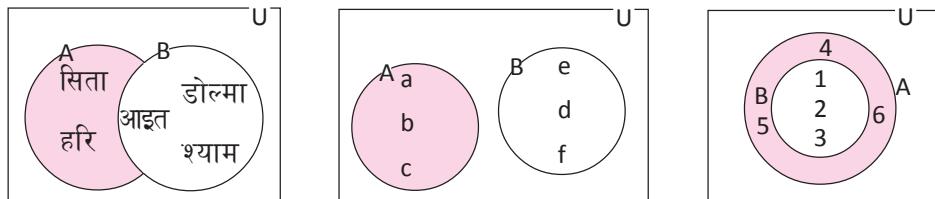
(ङ) समूह A मा पर्ने तर समूह B मा नपर्ने सदस्यहरूको समूह निर्माण गर ।

(च) समूह U मा पर्ने तर $A \cup B$ मा नपर्ने सदस्यहरूको समूह पत्ता लगाऊ ।

माथिका प्रश्नहरूका बारेमा हामीले कक्षा 7 मा नै पढिसकेका छौं । अब हामी समूहहरूको फरक र समूहका पूरकका बारेमा अध्ययन गर्दछौं ।

10.1. समूहहरूको फरक (Difference of Sets)

तलका भेनचित्रहरू अध्ययन गर र के के देखिन्छ, सबैले आआफ्ना कापीमा लेख :



सबै भेनचित्रमा समूह B बाहेक A को भाग मात्र छाया पारिएको छ । समूह A को मात्र भागमा छाया पारिएको छ । B को कुनै पनि भागमा छाया पारिएको छैन र छाया पारेको भागले समूह A मा पर्ने तर B मा नपर्ने सदस्यहरूको समूहलाई जनाउँछ । यो नै समूह A बाट समूह B को फरक हो ।

यदि समूह A र समूह B संवयापक समूह U का उपसमूह है तो समूह A मा पर्ने तर समूह B मा नपर्ने सदस्यहरूको समूहलाई वा समूह A मा मात्र पर्ने सदस्यहरूको समूहलाई A फरक B भनिन्छ र यसलाई A-B ले जनाइन्छ । $A-B = \{x : x \in A \text{ र } x \notin B\}$

माथिको पहिलो भेनचित्रमा $A = \{\text{सीता, हरि, आइत}\}$ छ र $B = \{\text{आइत, डोल्मा, श्याम}\}$ छ ।

$$\begin{aligned} A \text{ मा मात्र पर्ने सदस्यहरू } A-B &= \{\text{सीता, हरि, आइत}\} - \{\text{आइत, डोल्मा, श्याम}\} \\ &= \{\text{सीता, हरि}\} \text{ भयो ।} \end{aligned}$$

त्यस्तै दोस्रामा $A-B = \{a, b, c\}$ र तेस्रामा $A-B = \{4, 5, 6\}$ भयो (कसरी ?)

उदाहरण 1

यदि, $U = \{\text{आदर्श मा. वि.का सम्पूर्ण विद्यार्थीहरूको समूह}\}$

$A = \{\text{आदर्श मा.वि.का कक्षा 8 का विद्यार्थीहरूको समूह}\}$ र

$B = \{\text{आदर्श मा.वि.का सम्पूर्ण छात्राहरूको समूह}\}$ भए $A-B$ र $B-A$ पत्ता लगाऊ र भेनचित्रमा छाया पारेर देखाऊ ।

समाधान

यहाँ, $U = \{\text{आदर्श मा. वि.का सम्पूर्ण विद्यार्थीहरूको समूह}\}$

$A = \{\text{आदर्श मा.वि.का कक्षा 8 का विद्यार्थीहरूको समूह}\}$

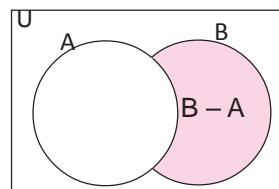
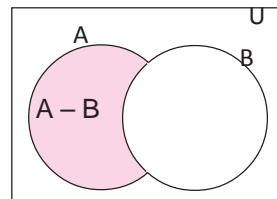
$B = \{\text{आदर्श मा.वि.का सम्पूर्ण छात्राहरूको समूह}\}$

अब, $A-B = \{x : \text{आदर्श मा.वि.का कक्षा 8 का विद्यार्थीहरू हुन् तर छात्रा होइनन् }\}$

$A-B = \{\text{आदर्श मा.वि.का कक्षा 8 का छात्रहरूको समूह}\}$

फेरी, $B-A = \{x : \text{आदर्श मा.वि.का छात्रा तर कक्षा 8 का होइन}\}$

$= \{\text{आदर्श मा.वि.का कक्षा 8 काबाहेकका छात्राहरूको समूह}\}$



नोट : 1. $A-B \neq B-A$

2. $A-B \cup B-A$ भएमा यसलाई समितीय फरक (Symmetrical Difference) भनिन्छ ।

उदाहरण 2

यदि $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, o, u\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, e, i, o, u\}$ र
 $C = \{d, e, f, i\}$ भए तलका समूहहरू पत्ता लगाऊ र भेनचित्रमा प्रस्तुत गर :

(क) $A-B$

(ख) $B-C$

(ग) $A \cup (B-C)$

(घ) $U-(A \cup B)$

(ङ) $(A \cup B) - (A \cap B)$

(च) $(A-B) \cup (B-A)$

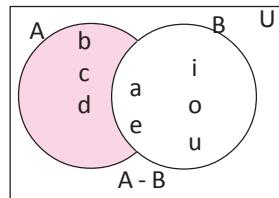
समाधान

यहाँ, $U = \{ a, b, c, d, e, f, g, h, i, o, u \}$, $A = \{ a, b, c, d, e \}$

$$B = \{ a, e, i, o, u \} \text{ तथा } C = \{ d, e, f, i \}$$

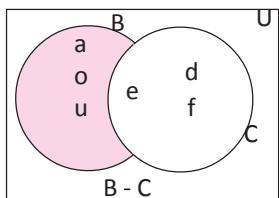
(क) $A - B = \{ x : x \in A \text{ तथा } x \notin B \}$

$$\begin{aligned} &= \{a, b, c, d, e\} - \{a, e, i, o, u\} \\ &= \{b, c, d\} \end{aligned}$$



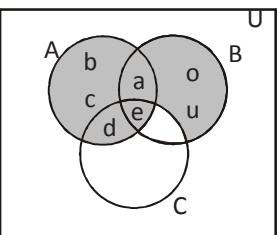
(ख) $B - C = \{ x : x \in B \text{ तथा } x \notin C \}$

$$\begin{aligned} &= \{a, e, i, o, u\} - \{d, e, f, i\} \\ &= \{a, o, u\} \end{aligned}$$



(ग) $A \cup (B - C) . \{x \in A \text{ अथवा } x \in B - C\}$

$$\begin{aligned} &= \{a, b, c, d, e\} \cup \{a, o, u\} \\ &= \{a, b, c, d, e, o, u\} \end{aligned}$$

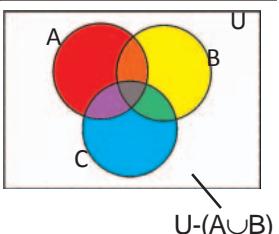


(घ) $U - (A \cup B) = \{ x \in U \text{ तथा } x \notin A \cup B \}$

यहाँ, $A \cup B = \{ a, b, c, d, e \} \cup \{ a, b, c, d, e, i, o, u \}$

$$= \{a, b, c, d, e, i, o, u\} \text{ हुन्छ।}$$

$$\begin{aligned} &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, o, u\} - \{a, b, c, d, e, i, o, u\} \\ &= \{f, g, h\} \end{aligned}$$



(ङ) $A \cap B = \{ a, b, c, d, e \} \cap \{a, e, i, o, u\} = \{a, e\}$

$$\begin{aligned} \text{तर्सर्थ, } (A \cup B) - (A \cap B) &= \{a, b, c, d, e, i, o, u\} - \{a, e\} \\ &= \{b, c, d, i, o, u\} \end{aligned}$$

(च) यहाँ, $B - A = \{ x \in B \text{ तथा } x \notin A \}$

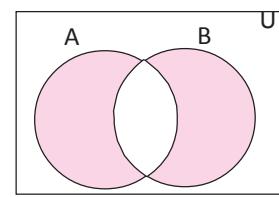
$$\begin{aligned} &= \{a, e, i, o, u\} - \{a, b, c, d, e\} \\ &= \{i, o, u\} \end{aligned}$$

र (क) बाट हामीलाई थाहा छ $A - B = \{ b, c, d \}$

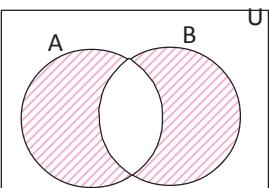
अब, $(A - B) \cup (B - A) = \{ b, c, d \} \cup \{i, o, u\}$

$$= \{b, c, d, i, o, u\}$$

(ङ) र (च) बाट के पायौ ? लेख।



छाया पारिएको भाग
 $(A \cup B) - (A \cap B)$



$$(A - B) \cup (B - A)$$

अभ्यास 10.1

1. यदि $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ र $B = \{4, 8, 10, 12, 14\}$ भए तलका समूहहरू पत्ता लगाऊ :

(क) $A \cup B$

(ख) $A \cap B$

(ग) $A - B$

(घ) $B - A$

(ङ) $(A - B) \cup (B - A)$

2. प्रश्न नं. 1 का समूहहरूलाई छुट्टाछुट्टै भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।

3. यदि $P = \{20 \text{ भन्दा साना जोर पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह}\}$ र $Q = \{20 \text{ भन्दा साना } 4 \text{ का अपवर्त्यहरूको समूह}\}$ भए $P - Q$ र $Q - P$ लाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।

4. दिइएको चित्रमा तलका समूहहरूलाई छुट्टाछुट्टै छाया पारेर देखाऊ ।

(क) $A - B$

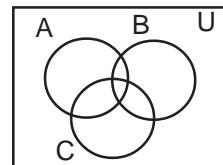
(ख) $B - C$

(ग) $C - A$

(घ) $(A \cup B) - C$

(ङ) $A - (B \cup C)$

(च) $(B \cap C) - (C \cap A)$



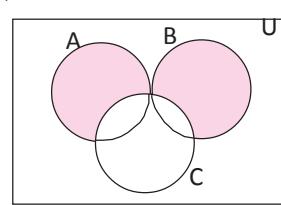
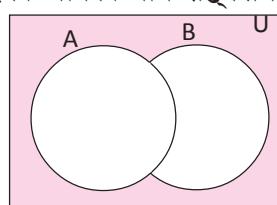
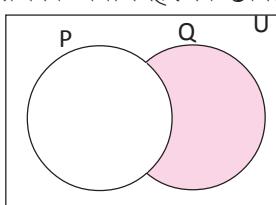
5. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$ र $C = \{3, 6, 9\}$ भए

(क) $(A \cup B) - C$

(ख) $(B \cup C) - A$

(ग) $(C \cup A) - B$ पत्ता लगाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।

6. तलका भेनचित्रहरूको छाया पारेको भागको नाम सङ्केतमा लेख :



7. यदि $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{i, o, u, w\}$ र $C = \{e, i, o\}$ भए $(A - B) - C$ र $A - (B - C)$ लाई छुट्टाछुट्टै भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।

8. $U = \{\text{तिमो विद्यालयमा कक्षा 8 का सम्पूर्ण विद्यार्थीहरूको समूह}\}$

$A = \{\text{कक्षा 8 का कपर्दी खेलन मन पराउनेको समूह}\}$

$B = \{\text{कक्षा 8 का डन्डीबियो खेलन मन पराउनेको समूह}\}$

$C = \{\text{कक्षा 8 का फुटबल खेलन मन पराउनेको समूह}\}$

यदि A , B र C सबै प्रतिच्छेदित समूहहरू भए A , B , C को सम्बन्धलाई भनेचित्रमा प्रस्तुत गर ।

9. प्रश्न 8 का आधारमा तलका समूहहरूलाई छाया पारेर देखाऊ :

(क) कपर्दी मन पराउने विद्यार्थीहरूको समूह

(ख) कपर्दी र डन्डीबियो मन पराउने विद्यार्थीको समूह

(ग) कपर्दी, डन्डीबियो वा फुटबल खेलन मन पराउनेको समूह

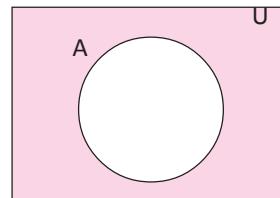
(घ) तीन ओटै खेल खेलन मन पराउनेको समूह

10.2 समूहको पूरक (Complement of sets)

मानौं, $U = \{ \text{कक्षा 8 का सम्पूर्ण विद्यार्थीहरूको समूह } \}$

$A = \{ \text{कक्षा 8 का छात्राहरूको समूह } \}$

कक्षा 8 का छात्राहरू बाहेको समूह कस्तो होला एकछिन सोचेर कापीमा लेख । त्यो समूह भनेको कक्षा 8 का छात्राहरूको समूह हुन्छ । छात्राहरूको समूह र छात्राहरूको समूह मिलेर मात्र कक्षा 8 का विद्यार्थी समूह बन्दछ । त्यसकारण छात्राहरूको समूह कक्षा 8 का छात्राहरूको समूहमा लागि पूरक समूह हो । यदि $A = \text{छात्राहरूको समूह भए } A \text{ को पूरक समूहलाई } A' \text{ वा } \bar{A} \text{ ले जनाइन्छ ।}$



यदि U सर्वव्यापक समूह हो र समूह A समूह U को उपसमूह हो भने U मा पर्ने तर समूह A मा नपर्ने सदस्यहरूको समूहलाई समूह A को पूरक समूह भनिन्छ । यसलाई A' वा \bar{A} ले जनाइन्छ र $\bar{A} = \{x : x \in U \text{ र } x \notin A\}$ हुन्छ । साथै, $\bar{A} = U - A$ पनि लेखिन्छ ।

दिइएको भेनचित्रमा छाया पारिएको भागले \bar{A} जनाउँछ र $A \cup \bar{A} = U$ हुन्छ (कसरी ?) र $A \cap \bar{A} = \emptyset$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

यदि $U = \{ 20 \text{ भन्दा साना प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह } \}$ र $A = \{ 20 \text{ भन्दा साना जोर सङ्ख्याहरूको समूह } \}$ भए,

(क) \bar{A} पत्ता लगाऊ र भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।

(ख) $\bar{\bar{A}}$ पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ $U = \{ 20 \text{ भन्दा साना प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह } \}$

$= \{ x : x \text{ प्राकृतिक सङ्ख्या हो } x < 20 \}$

$= \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 \}$

$A = \{ 20 \text{ भन्दा साना जोर सङ्ख्याहरूको समूह } \}$

$= \{ x : x < 20 \text{ र } x \text{ जोर सङ्ख्या हो } \}$

$= \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 \}$

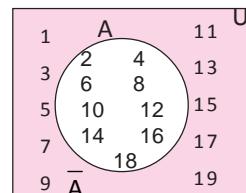
अब, (क) $\bar{A} = U - A$

$= \{ x : x \in U \text{ र } x \notin A \}$

$= \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 \} - \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 \}$

$= \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \text{ र } 19 \}$ हुन्छ ।

भेनचित्रमा छाया पारेको भागले \bar{A} जनाउँछ ।



$$\begin{aligned}
 \text{(ख) } \bar{\bar{A}} &= \{x : x \in U \text{ र } x \notin \bar{A}\} \\
 &= \{U - \bar{A}\} = [U - \{U - A\}] = U - U + A = A \\
 &= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\} \\
 &= A \text{ (कसरी ?)}
 \end{aligned}$$

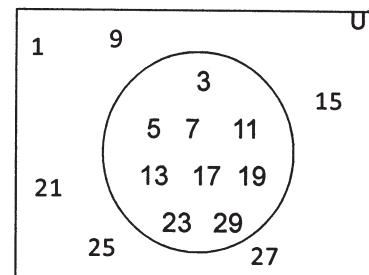
उदाहरण 2

यदि $U = \{30 \text{ भन्दा साना विजोर सङ्ख्याहरूको समूह}\}$ $P = \{30 \text{ भन्दा साना विजोर रुढ सङ्ख्याहरूको समूह}\}$ भए तलका समूहहरूका सदस्यहरू पत्ता लगाउँ :

$$\begin{array}{llll}
 \text{(क) } U & \text{(ख) } P & \text{(ग) } \bar{P} & \text{(घ) } P \cup \bar{P} \\
 \text{(ड) } P \cap \bar{P} & \text{(च) } \bar{\bar{P}} & &
 \end{array}$$

समाधान

$$\begin{aligned}
 \text{(क) } U &= \{30 \text{ भन्दा साना विजोर पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह}\} \\
 &= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\} \\
 \text{(ख) } P &= \{30 \text{ भन्दा साना रुढ सङ्ख्याहरूको समूह}\} \\
 &= \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\} \\
 \text{(ग) } \bar{P} &= \{x : x \in U \text{ र } x \notin P\} \\
 &= \{1, 9, 15, 21, 25, 27\}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{(घ) } P \cup \bar{P} &= \{0, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\} \cup \{1, 9, 15, 21, 25, 27\} \\
 &= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\} \\
 &= U \text{ (कसरी ?)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ड) } P \cap \bar{P} &= \{x : x \in P \text{ र } x \in \bar{P}\} \\
 &= \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\} \cap \{1, 9, 15, 21, 25, 27\} \\
 &= \emptyset
 \end{aligned}$$

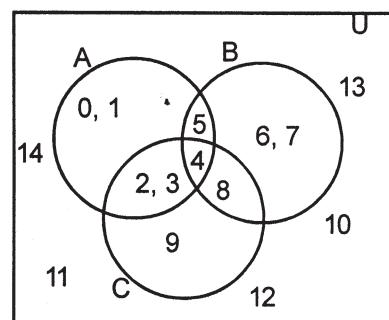
$$\begin{aligned}
 \text{भ (च) } \bar{\bar{P}} &= \{x : x \in P \text{ र } x \notin \bar{P}\} \\
 &= \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\} - \{1, 9, 15, 21, 25, 27\} \\
 &= \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\} \\
 &= P \text{ हुन्छ } \mid \text{ (कसरी ?)}
 \end{aligned}$$

अतः माथिको उदाहरणबाट हामीले के थाहा पायौँ भने

$$P \cup \bar{P} = U \text{ हुन्छ } \text{ र } P \cap \bar{P} = \emptyset \text{ र } \bar{\bar{P}} = P \text{ हुन्छ } \mid$$

अभ्यास 10.2

1. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ भए तल दिइएका समूहहरूका पूरक समूहहरू पत्ता लगाऊ :
- (क) $A = \{\text{जोर सङ्ख्या } \leq 8\}$ (ख) $B = \{\text{बिजोर सङ्ख्या } < 8\}$
 (ग) $C = \{8 \text{ भन्दा साना रुढ सङ्ख्याहरू}\}$ (घ) $D = \{\text{जोर सङ्ख्या रुढ सङ्ख्या}\}$
 (ड) $E = \{1, 3, 6, 8\}$ (च) $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
2. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $B = \{10 \text{ भन्दा साना } 3 \text{ का अपवर्त्यहरू}\}$ भए
 (क) B (ख) \bar{B} (ग) $B \cup \bar{B}$ (घ) $B \cap \bar{B}$ (ड) $\bar{\bar{B}}$
 (च) \bar{U} पत्ता लगाऊ र भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।
3. यदि $U = \{\text{अङ्ग्रेजी स्वर वर्णहरू}\}$ $A = \{a, e, i\}$ र $B = \{i, o, u\}$ भए
 (क) \bar{A} (ख) \bar{B} (ग) $\overline{A \cup B}$ (घ) $\overline{A \cap B}$ (ड) $A \cup \bar{B}$
 (च) $\overline{A \cup B}$ (छ) $\overline{A} \cup \bar{B}$ (ज) $\overline{A - B}$ (झ) $\overline{B - A}$ (ञ) $\overline{A} \cap \bar{B}$ पत्ता लगाऊ ।
4. बागमती प्रदेशका आधारमा तलका तथ्यहरूलाई प्रमाणित गर :
- (क) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \bar{B}$ (ख) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \bar{B}$
5. यदि $U = \{\text{प्रदेश न. } 3 \text{ का जिल्लाहरू}\}$ र $P = \{\text{काठमाडौं, भक्तपुर, ललितपुर}\}$ भए तलका समूहहरूका सदस्यहरूको सूची तयार पार र भेनचित्रमा प्रस्तुत गर ।
- (क) U (ख) \bar{P} (ग) $\bar{\bar{P}}$
 (घ) $P \cup \bar{P}$ (ड) $P \cap \bar{P}$ (च) \bar{U}
6. यदि $U = \{\text{पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह}\}$ $E = \{\text{जोर सङ्ख्याहरूको समूह}\}$ भए
 (क) U (ख) E (ग) \bar{E} (घ) $\bar{\bar{E}}$ (ड) $E \cup \bar{E}$
 (च) $E \cap \bar{E}$ को सदस्यहरूको सूची तयार पार ।
7. सँगैको चित्रबाट तलका समूहहरूका सदस्यहरू पत्ता लगाऊ :
- (क) A (ख) B (ग) C
 (घ) U (ड) \bar{A} (च) \bar{B}
 (छ) \bar{C} (ज) $A \cup B \cup C$ (झ) $A \cap B \cap C$
 (ञ) $\overline{A \cup B \cup C}$ (ट) $\overline{A \cap B \cap C}$ (ठ) $A \cap B$
 (ड) $\overline{A \cap B}$ (द) $\overline{B \cap C}$ (ण) $\overline{C \cap A}$
 (त) $A - B$ (थ) $B - C$ (द) $C - A$



10.3 भेनचित्रको प्रयोग (Use of Venn Diagrams)

गणितज्ञ John Venn ले विसौं शताब्दीमा समूहका क्रियाहरूलाई चित्रद्वारा प्रस्तुत गरेका थिए । उनै गणितज्ञको नामबाट भेनचित्र (Venn- Diagram) भनिएको हो । समूहका शाब्दिक समस्याहरूलाई भेनचित्रको प्रयोग गरी समाधान गर्न सकिन्छ ।

तलको उदाहरण अध्ययन गराँ :

गण्डकी अञ्चलका जिल्लाहरूको समूह = { कास्की, ख्याङ्जा, तनहुँ, लमजुँड, गोरखा, मनाड }

धौलागिरि अञ्चलका जिल्लाहरूको समूह = { वाग्लुँड, म्यारदी, पर्वत, मुस्ताङ }

गण्डकी अञ्चलका जिल्लाहरूको समूहलाई G मान्दा, G = { कास्की, ख्याङ्जा, तनहुँ, लमजुँड, गोरखा, मनाड } ।

गण्डकी अञ्चलका 6 ओटा जिल्लाहरू समूह G का सदस्यहरू छन् । यसलाई G समूहको गणनात्मकता भनिन्छ । त्यसै, धौलागिरि अञ्चलका जिल्लाहरूको समूह D को गणनात्मकता 4 भयो ।

कुनै पनि समूहमा भएको जम्मा सदस्यहरूको सङ्ख्यालाई उक्त समूहको गणनात्मकता (cardinality) भनिन्छ ।

यहाँ : माथिको समूह D को गणनात्मकता 4 छ । यसलाई $n(D) = 4$ लेखिन्छ ।

यदि, $U = \{ \text{सार्क राष्ट्रहरूको समूह} \}$

$A = \{ \text{नेपाल, भारत, पाकिस्तान} \}$

$B = \{ \text{भुटान, बङ्गालादेश, श्रीलङ्का, माल्दिभ्स, अफगानिस्थान} \}$ भए,

$A \cup B = \{ \text{नेपाल, भारत, पाकिस्तान, भुटान, बङ्गालादेश, श्रीलङ्का, अफगानिस्थान} \}$ हुन्छ । $n(A \cup B)$ कति हुन्छ ?

यहाँ, $A \cup B$ मा जम्मा 8 ओटा सदस्यहरू छन् । त्यसकारण $n(A \cup B) = 8$ भयो ।

फेरि, $n(A) = 3$ र $n(B) = 5$ छ । $n(A) + n(B) = 3 + 5 = 8$ भयो ।

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ भयो ।

दुईओटा समूहहरू अलगिगएका छन् भने $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ हुन्छ ।

त्यसै, दिइएको भेनचित्रमा हेर ।

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; B = \{4, 5, 6, 7\}$ $n(A) = 5, n(B) = 4$ छ ।

फेरि, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ र $A \cap B = \{4, 5\}$ छ ।

$n(A \cup B) = 7$ र $n(A \cap B) = 2$

त्यसकारण, भेनचित्रको प्रयोग गर्दा $n(A) + n(B) = 9$ भयो तर $n(A \cup B) = 7$ छ ।

जुन $n(A) + n(B)$ भन्दा 2 वा $n(A \cap B)$ ले कम छ ।

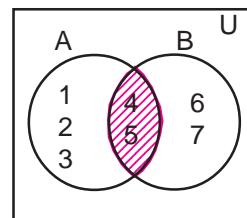
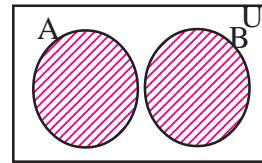
त्यसकारण, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ भयो ।

दुईओटा समूह A र B प्रतिच्छेदित समूहहरू भए $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ हुन्छ । साथै, समूह A मा मात्र पर्ने सदस्यहरूको सङ्ख्या 3 छ । तसर्थ, $n_0(A) = 3$ छ ।

$n_0(A) = n(A) - n(A \cap B)$

समूह B मा मात्र पर्ने सदस्यहरूको सङ्ख्या 2 छ । तसर्थ, $n_0(B) = 2$ छ ।

$n_0(B) = n(B) - n(A \cap B)$



नोट : यदि $A \cup B = U$ भए $n(A \cup B) = n(U)$ हुन्छ ।

यदि $A \cup B \subset U$ भए $n(U) = n(A \cup B) + n(\overline{A \cup B})$ हुन्छ र $n(\overline{A \cup B}) \neq 0$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

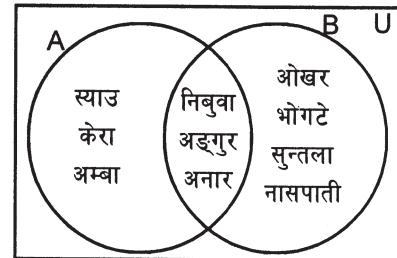
भेनचित्रको प्रयोग गरी तलका समूहहरूको गणनात्मकता पत्ता लगाऊ :

- | | | |
|-------------------|--------------|-------------------|
| (क) $n(A)$ | (ख) $n(B)$ | (ग) $n(A \cup B)$ |
| (घ) $n(A \cap B)$ | (ङ) $n_0(A)$ | (च) $n_0(B)$ |

समाधान

यहाँ, भेनचित्रबाट हेर्दा,

- (क) $A = \{ \text{स्याउ, केरा, अम्बा, निबुवा, अनार, अड्गुर } \}; n(A) = 6$
- (ख) $B = \{ \text{निबुवा, अनार, अड्गुर, ओखर, भोगटे, सुन्तला, नास्पाती } \}; n(B) = 7$
- (ग) $(A \cup B) = \{ \text{स्याउ, केरा, अम्बा, निबुवा, अनार, अड्गुर, ओखर, भोगटे, सुन्तला, नास्पाती } \}; n(A \cup B) = 10.$
- (घ) $(A \cap B) = \{ \text{निबुवा, अनार, अड्गुर } \}; n(A \cap B) = 3$
- (ङ) $n_0(A) = \{ \text{स्याउ, केरा, अम्बा} \}; n_0(A) = 3$
- (च) $n_0(B) = \{ \text{ओखर, भोगटे, सुन्तला, नास्पाती} \}; n_0(B) = 4$



उदाहरण 2

100 जना मानिसमा गरिएका सर्वेक्षणमा 60 मानिसको मत विद्यालयमा खेल मैदान बनाउने, 65 को मत पुस्तकालय भवन निर्माण गर्ने पाइयो भने भेनचित्रको माध्यमबाट खेल मैदान र पुस्तकालय भवन दुवै बनाउने मत भएका मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाऊ । साथै पुस्तकालय भवन मात्र बनाउने मत भएका मानिसहरू कति जना होलान् ?

समाधान

मानौं, खेल मैदान बनाउने मत भएकाको समूह = A

पुस्तकालय भवन निर्माण गर्ने मत भएकाको समूह = B

$$n(U) = 100$$

$$\therefore n(A) = 60 \quad n(B) = 65$$

अब, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 60 + 65 - 100 = 25$$

त्यस्तै पुस्तकालय भवन मात्र निर्माण गर्ने मत भएका मानिसको सङ्ख्या $n_0(B) = ?$

$$n_0(B) = n(B) - n(A \cap B) = 65 - 25 = 40$$

तसर्थ, पुस्तकालय भवन र खेल मैदान बनाउन मत भएका 25 जना र पुस्तकालय भवन मात्र बनाउने मत भएका 40 जना रहेछन् ।

अभ्यास 10.3

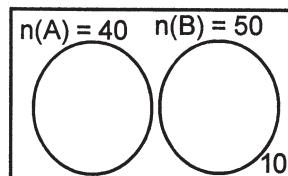
1. भेनचित्रको प्रयोग गरी निम्नलिखित समूहहरूको गणनात्मकता पत्ता लगाऊ :

(क) $n(A \cup B)$

(ख) $n(A \cap B)$

(ग) $n(\overline{A \cup B})$

(घ) $n(\overline{A \cap B})$



2. दिइएको भेनचित्रको प्रयोग गरी तलका समूहहरू पत्ता लगाऊ :

(क) $n(A)$

(ख) $n(B)$

(ग) $n(A \cap B)$

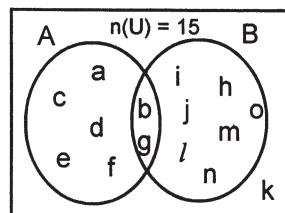
(घ) $n(A \cup B)$

(ड) $n_0(A)$

(च) $n_0(B)$

(छ) $n(\bar{A})$

(ज) $n(\bar{B})$



3. 75 विद्यार्थी सङ्ख्या भएको एउटा कक्षामा 50 जनाले भ्रमण गर्न मन पराउँछन्, 50 जनाले बनभोज मन पराउँछन् । यदि हरेक विद्यार्थीले कम्तीमा एउटा कार्य गर्न मन पराउँछन् भने भेनचित्र प्रयोग गरी दुवै मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

4. एउटा गाउँका 100 युवामा सर्वेक्षण गर्दा 40 जनाले वैदेशिक रोजगार मन पराए, 70 जनाले स्वरोजगार मन पराए भने भेनचित्र बनाई तलका प्रश्नहरूको उत्तर पत्ता लगाऊ :

(क) वैदेशिक रोजगार र स्वरोजगार दुवै मन पराउनेको सङ्ख्या कति होला ?

(ख) स्वरोजगार मात्र मन पराउनेको सङ्ख्या कति होला ?

(ग) वैदेशिक रोजगार मात्र मन पराउनेको सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

5. 100 जना विद्यार्थीमध्ये 60 जनाले खेलकुदमा र 50 जनाले सङ्गीतमा भाग लिए । कति जना विद्यार्थीले दुवै क्रियाकलापमा भाग लिए होलान् । साथै सङ्गीतमा मात्र भाग लिनेको सङ्ख्या कति होला ?

6. एउटा विद्यालयमा 55% ले स्याऊ र 70% ले केरा मन पराउँछन् । यदि दुवै फल मन पराउने 30% भए भने स्याउ मात्र मन पराउने कति प्रतिशत होलान् ? कुनै पनि फल मन नपराउने कति प्रतिशत होलान्, पत्ता लगाऊ ।

7. एउटा समुदायमा 150 जना मानिसमध्ये 60% मोटरसाइकल, 50% ले साइकल र 20% ले दुवै चढ्दा रहेछन् भने दुवै प्रयोग नगर्ने कति होलान् । भेनचित्र प्रयोग गरी पत्ता लगाऊ । साथै मोटरसाइकल मात्र चढ्ने मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

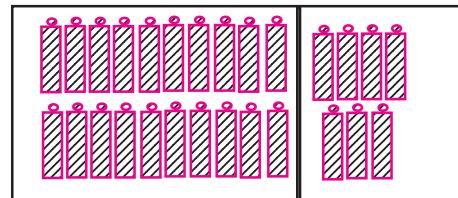
11.0 पुनरवलोकन (Review)

‘गणितज्ञ Kroncker का अनुसार भगवान्‌ले प्राकृतिक संख्याहरू मात्र सृष्टि गरेका हुन् र बाँकी सबै संख्याहरू मानिसले नै प्रतिपादन गरेका हुन्।’ गणितमा संख्याहरूको सुरुवात गन्तीका संख्याहरू 1, 2, 3, 4,बाट सुरुआत भएको हो । दुईओटा गन्तीका संख्याहरू जोड्दा गन्तीको संख्या नै बन्छ, जस्तै : $3+3=6$ हुन्छ । तर $3 \cdot 3$ कति हुन्छ ? यसलाई जनाउनका लागि थप संख्याको आवश्यकता महसुस गरियो र प्राकृतिक संख्याहरूमा शून्य (0) थप भयो । यसरी पूर्ण संख्याको समूहको विकास भयो । यसलाई (W) ले जनाइन्छ । $W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ हुन्छ । अब, तलको क्रियाकलाप गराँ ।

27 ओटा सिन्काहरू लेऊ ।

यसलाई 10 घातको समूहमा विभाजन गर ।

$$2 \times 10 + 7 = 2 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

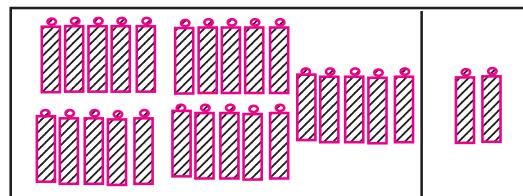


यसलाई दशमलव संख्याइकन पद्धति (decimal numeration system) भनिन्छ ।

फेरि, 27 लाई 5 घातको समूहमा विभाजन गर ।

$$5 \times 5 + 2 = 1 \times 5^2 + 2 \times 5^0$$

$$= 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 2 \times 5^0$$



यसलाई पञ्चआधार संख्याइकन पद्धति (quinary numeration system) भनिन्छ ।

अन्त्यमा, 27 लाई 2 घातको समूहमा विभाजन गर ।

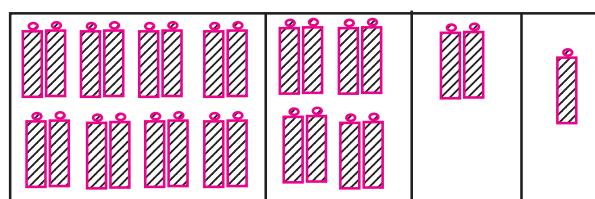
2 को घाताइको समूहमा

विभाजन गर्दा,

$$16 + 8 + 2 + 1$$

$$= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$



यसलाई द्विआधार संख्याइकन पद्धति (binary numeration system) भनिन्छ ।

11.1 दशमलव संख्याड्कन पद्धति (Decimal Numeration System)

सँगैको तालिकामा 1256 लाई स्थानमान तालिकामा देखाएको छ ।

हजार	सय	दस	एक
10^3	10^2	10^1	10^0
1	2	5	6

1256 लाई विस्तारित रूपमा लेख्ना

$$\begin{aligned} 1256 &= 1 \times 1000 + 2 \times 100 + 5 \times 10 + 6 \times 1 \\ &= 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0 \end{aligned}$$

कुनै पनि संख्यालाई 10 को घातका रूपमा लेखिन्छ र स्थानमान तालिकामा एक, दस, सय, हजार, वा $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, \dots$ हुन्छ भने त्यस्तो संख्याड्कन पद्धतिलाई दशमलव संख्याड्कन पद्धति (decimal numeration system) भनिन्छ । यसमा 0,1,2,3,4,5,6,7,8 र 9 गरी 10 ओटा अड्कहरू प्रयोग गरिन्छ ।

उदाहरण 1

35731_{10} लाई विस्तारित रूपमा लेख :

समाधान

$$\begin{aligned} \text{यहाँ, } 35731_{10} &= 3 \times 10000 + 5 \times 1000 + 7 \times 100 + 3 \times 10 + 1 \times 1 \\ &= 3 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1 \times 10^0 \end{aligned}$$

तलको उदाहरण हेराँ :

179 लाई 5 को घातका समूहमा विभाजन गर्दा,

$$\begin{aligned} 179 &= 125 + 50 + 4 \\ &= 125 + 2 \times 25 + 4 \\ &= 5 \times 5 \times 5 + 2 \times 5 \times 5 + 4 \times 1 \\ &= 5^3 + 2 \times 5^2 + 4 \times 5^0 \\ &= 1 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 4 \times 5^0 \end{aligned}$$

यहाँ, 179 लाई आधार 5 को घातका रूपमा 1204 व्यक्त गरिएको छ । यसलाई पञ्चआधार पद्धति भनिन्छ ।

दशमलव संख्याड्कन पद्धतिमा 0,1,2,3,4,5,6,7,8 र 9 गरी 10 ओटा अड्कहरू प्रयोग गरे जस्तै कुनै पनि संख्यालाई 0,1, 2, 3 र 4 को मात्र प्रयोग गरी 5 को घातका रूपमा लेखिन्छ । स्थानमान तालिकामा एक, पाँच, पच्चस, एक सय पच्चस, छ सय पच्चस, वा $5^0, 5^1, 5^2, 5^3, 5^4, \dots$ हुन्छ भने त्यस्तो संख्याड्कन पद्धतिलाई पञ्चआधार संख्याड्कन पद्धति (quinary numeration system) भनिन्छ ।

माथिको उदाहरणलाई 1204_5 लेखिन्छ ।

उदाहरण 2

33 लाई पञ्चआधार सङ्ख्यामा लेख ।

33 लाई 5 को घातको समूहमा विभाजन गर्दा,

समाधान

$$\begin{aligned} \text{यहाँ } 33 &= 25 + 5 + 3 \\ &= 1 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 3 \times 5^0 \text{ लेखिन्छ} \\ &= 113_5 \text{ हुन्छ} \end{aligned}$$

11.3 दशमलव पद्धतिलाई पञ्चआधारमा रूपान्तर

तरिका,

- दिइएको सङ्ख्यालाई 5 ले भाग गर्दै जाने
- शेषलाई दायाँतिर लेख्ने
- दायाँतिर लेखिएका शेषका अड्कहरूलाई तलबाट माथि क्रममा मिलाउने र लेख्ने

तलको उदाहरण हेराँ :

उदाहरण 3

तलका सङ्ख्यालाई पञ्चआधार पद्धतिमा रूपान्तर गर ।

(क) 512

समाधान

5	512	शेष (5 ले भाग गर्दा)
5	102	2
5	20	2
5	4	0
	0	4

अब शेषलाई तलबाट माथितिर मिलाएर

राख्दा 4022 हुन्छ । तसर्थ, $512_{10} = 4022_5$ हुन्छ ।

स्थानमान तालिकामा देखाउँदा,

5^3	5^2	5^1	5^0
4	0	2	2

(ख) 7521

समाधान

5	7521	शेष
5	1504	1
5	300	4
5	60	0
5	12	0
5	2	2
	0	2

तसर्थ, $7521_{10} = 220041_5$ हुन्छ ।

स्थानमान तालिकामा देखाउँदा,

5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0
2	2	0	0	4	1

11.4. पञ्चआधार पद्धतिलाई दशमलव पद्धतिमा रूपान्तर

तरिका,

- सर्वप्रथम स्थानमान तालिकाअनुसार विस्तारित रूपमा लेख्ने
- सबै घाताइकहरू गुणा गरी सरल गर्ने
- पूर्ण सङ्ख्यामा व्यक्त गर्ने

उदाहरण 4

तलका पञ्चआधार सङ्ख्यालाई दशमलव सङ्ख्यामा रूपान्तर गर :

(क) 4321_5

(ख) 13320_5

समाधान

4321_5 लाई स्थानमान तालिकामा राख्दा,

एक सय पच्चस	पच्चस	पाँच	एक
5^3	5^2	5^1	5^0
4	3	2	1

अब विस्तारित रूपमा लेख्दा,

$$\begin{aligned}
 4321_5 &= 4 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 \times 5^0 \\
 &= 4 \times 125 + 3 \times 25 + 2 \times 5 + 1 \times 1 \\
 &= 500 + 75 + 10 + 1 \\
 &= 586_{10}
 \end{aligned}$$

त्यसकारण $4321_5 = 586_{10}$ हुन्छ

(ख) 13420_5

स्थानमान तालिकामा राख्दा,

5^4	5^3	5^2	5^1	5^0
1	3	4	2	0

अब तालिकाअनुसार विस्तारित रूपमा लेख्दा,

$$\begin{aligned}
 13420_5 &= 1 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 0 \times 5^0 \\
 &= 1 \times 625 + 3 \times 125 + 4 \times 25 + 2 \times 5 + 0 \\
 &= 625 + 375 + 100 + 10 \\
 &= 1110_{10}
 \end{aligned}$$

तसर्थ, $13420_5 = 1110_{10}$ हुन्छ ।

अभ्यास 11.1

1. तलका सद्ब्याहरूलाई पञ्चआधार सद्ब्यामा रूपान्तरण गर :

- | | | | | |
|--------|---------|---------|---------|----------|
| (क) 9 | (ख) 13 | (ग) 21 | (घ) 26 | (ङ) 45 |
| (च) 86 | (छ) 194 | (ज) 404 | (झ) 497 | (ञ) 1234 |

2. तलका पञ्चआधार सद्ब्याहरूलाई दशमलव सद्ब्याहरूमा रूपान्तरण गर :

- | | | | |
|---------------|--------------|---------------|---------------|
| (क) 24_5 | (ख) 101_5 | (ग) 300_5 | (घ) 4321_5 |
| (ड) 441_5 | (च) 2023_5 | (छ) 4201_5 | (ज) 3313_5 |
| (झ) 12304_5 | (ञ) 2014_5 | (ट) 10123_5 | (ठ) 21432_5 |

11.5 द्विआधार सद्ब्या पद्धति (Binary Number System)

तल सँगैको उदाहरण हेरौँ ।

$$\begin{aligned}
 29 &= 28 + 1 &= 8 \times 3 + 1 \times 4 + 1 = 8 \times 2 + 8 \times 1 + 1 \times 4 + 1 \\
 &= 16 + 8 + 4 + 1 &= 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1 \\
 &= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 \therefore 29 &= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \text{ हुन्छ} ।
 \end{aligned}$$

त्यस्तै, कुनै सद्ब्यालाई 0, 1, 2, 3 र 4 मात्र प्रयोग गरे भैं कुनै पनि सद्ब्यालाई 0 र 1 मात्र प्रयोग गरी 2 को घातका रूपमा लेखिन्छ । स्थानमान तालिकामा एक, दुई, चार, आठ, सोर, बत्तिस, वा $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ हुन्छ भने त्यस सद्ब्याइकन पद्धतिलाई द्विआधार सद्ब्याइकन पद्धति (binary numeration system) भनिन्छ । माथिको उदाहरणलाई $29 = 11101_2$ लेखिन्छ ।

उदाहरण 1

43 लाई द्विआधार पद्धतिमा विस्तारित रूपमा लेख ।

समाधान

43 लाई 2 को घातको समूहमा विभाजन गर्दा,

$$\begin{aligned}
 43 &= 32 + 8 + 2 + 1 \\
 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 + 2 + 1 \\
 \therefore 43_2 &= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \text{ हुन्छ} ।
 \end{aligned}$$

11.6 दशमलव सद्ब्यालाई द्विआधार पद्धतिमा रूपान्तरण

आधार 10 भएको सद्ब्यालाई आधार 2 भएको सद्ब्यामा कसरी रूपान्तरण गर्न सकिन्छ हेर ।

उदाहरण 2

75_{10} लाई द्विआधार पद्धतिमा रूपान्तरण गर ।

समाधान

2	75	शेष
2	37	1
2	18	1
2	9	0
2	4	1
2	2	0
2	1	0
0	1	



- आधार 10 मा शेष 0 देखि 9 सम्म हुन्छ ।
- आधार 2 मा शेष 0 र 1 मात्र हुन्छ ।
- तसर्थ कुनै सद्ब्यालाई द्विआधारमा रूपान्तरण गर्न 2 ले भाग गर्ने र शेष लेख्दै जाने गर्नुपर्छ ।

अब शेषहरूलाई क्रमशः तलबाट माथिको क्रममा लेख्दा 1001011_2 हुन्छ ।

तसर्थ $75_{10} = 1001011_2$ हुन्छ ।

द्विआधार पद्धतिमा स्थानमान तालिकालाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :

2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
256...	128	64	32	16	8	4	2	1

प्रस्तुत तालिकाको प्रयोगले द्विआधार सद्ब्यालाई विस्तृत रूपमा लेख्न सकिन्छ र द्विआधार सद्ब्यालाई दशमलव वा अन्य प्रणालीमा रूपान्तरण गर्न सकिन्छ ।

11.7 द्विआधार पद्धतिलाई दशमलव पद्धतिमा रूपान्तरण

हामीलाई थाहा छ कि द्विआधार पद्धतिमा कुनै पनि सद्ब्यालाई आधार 2 मा र 2 को घाताङ्कका रूपमा व्यक्त गरिन्छ । अब यसलाई आधार 10 वा दशमलव पद्धतिमा कसरी रूपान्तरण गर्ने, तलको उदाहरण हेरौँ ।

उदाहरण 4

तलका द्विआधार सद्ब्यालाई दशमलव पद्धतिमा रूपान्तरण गर :

(क) 1001011_2

(ख) 1100101_2

तरिका :

- आधार 2 को घाताङ्कको रूपमा विस्तारित रूपमा लेख्ने
- सरल गर्ने
- उत्तर लेख्ने

समाधान

$$\begin{aligned}(\text{क}) \quad 1001011_2 &= 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\&= 2^6 + 0 + 0 + 2^3 + 0 + 2^1 + 1 \\&= 64 + 8 + 2 + 1 \\&= 75_{10}\end{aligned}$$

$$\therefore 1001011_2 = 75_{10}$$

$$\begin{aligned}\text{अतः } 1100101_2 &= 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\&= 2^6 + 2^5 + 0 + 0 + 2^2 + 0 + 2^1 \\&= 64 + 32 + 4 + 1 \\&= 101_{10}\end{aligned}$$

$$\therefore 1100101_2 = 101_{10}$$

अभ्यास 11.2

1. तलका सदृख्याहरू कुन सदृख्या पद्धतिमा छन्, लेख :

- | | | | |
|---------------|-----------|------------------|------------|
| (क) 10011_2 | (ख) 350 | (ग) 1001_2 | (घ) 42 |
| (ड) 555 | (च) 77532 | (छ) 10010011_2 | (ज) 257903 |

2. तलका दशमलव पद्धतिका सदृख्यालाई द्विआधार पद्धतिमा रूपान्तरण गर :

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| (क) 4 | (ख) 9 | (ग) 12 | (घ) 25 | (ड) 35 |
| (च) 65 | (छ) 94 | (ज) 135 | (झ) 190 | (ऋ) 275 |
| (ट) 220 | (ठ) 512 | (ड) 530 | | |

3. तलका द्विआधार सदृख्यालाई दशमलव पद्धतिमा रूपान्तरण गर :

- | | | | |
|--------------------|-------------------|-------------------|---------------------|
| (क) 1100_2 | (ख) 10010_2 | (ग) 11110_2 | (घ) 100001_2 |
| (ड) 111111_2 | (च) 1100011_2 | (छ) 1110011_2 | (ज) 1100110011_2 |
| (झ) 1010101110_2 | (ऋ) 100001000_2 | (ट) 101110111_2 | (ठ) 11011011001_2 |

4. यदि कुनै सदृख्याको दशमलव पद्धतिमा 723 ले जनाइन्छ भने उक्त सदृख्याको मान द्विआधार पद्धतिमा कति होला ?

5. 100000001_2 लाई दशमलव पद्धतिमा लेख ।

12.1 पुनरवलोकन (Review)

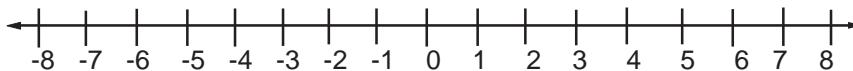
पूर्ण संख्याहरूको समूह $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ मा तलका उदाहरणहरूको अध्ययन गर ।

$$3 + 4 = ?,$$

$$3 - 3 = ?$$

$$3 - 4 = ?$$

माथिको तेस्रो उदाहरणमा एउटा सानो प्राकृतिक संख्याबाट ठुलो प्राकृतिक संख्या घटाउँदा नयाँ प्राकृतिक संख्या वा पूर्ण संख्या हुन सक्दैन (किन ?) । त्यसकारण पूर्ण संख्याको समूहले मात्र सबै संख्याहरूलाई जनाउन सकिएन । नयाँ संख्याहरूको आवश्यकता महसुस भयो र ऋणात्मक पूर्ण संख्याहरूको आविष्कार भयो । प्राकृतिक संख्याहरूको समूह, शून्य र ऋणात्मक पूर्ण संख्याहरूको समूह मिलेर बनेको संख्याहरूको समूहलाई पूर्णांकहरूको समूह भनिन्छ । यसलाई (Z) ले जनाइन्छ । $Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ हुन्छ । साथै, $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ लाई धनात्मक पूर्णसंख्याहरूको समूह र $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$ लाई ऋणात्मक पूर्ण संख्याहरूको समूह भनिन्छ । पूर्णसंख्याहरूको समूहलाई संख्या रेखाद्वारा निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :



पूर्ण संख्याहरूका क्रियाहरूका नियमहरू (Laws of Operation of Integers):

माथिको संख्यारेखाबाट कुनै तीन संख्या लेऊ, जस्तै : $-2, 3$ र 4

$$-2 + 4 = ?; \quad 4 + (-2) = ?; \quad 4 + 0 = ?; \quad 0 + 4 = ?; \quad -2 + (4 + 3) = ?; \quad (-2 + 4) + 3 = ?; \quad -2 + 2 = ?$$

माथिका प्रश्नहरूबाट के थाहा हुन्छ ?

माथिका प्रश्नहरूका उत्तरहरूबाट निम्नलिखित नियमहरूमा सामान्यीकरण गर्न सकिन्छ :

पूर्णांकहरूको जोडका नियमहरू (Laws of addition of Integers)

यदि a, b, c , तीनओटा पूर्णांकहरू भए

(क) बन्दी नियम (closure law) : $a+b$ र $a+b+c$ पनि पूर्णांक होन्नी चाहन्छ ।

- (ख) विनियम नियम (commutative law) : $a+b = b+a$, $a+c = c+a$, $b+c = c+b$ हुन्छ ।
- (ग) सङ्गीय नियम (associative law) : $(a+b)+c = a+(b+c)$ हुन्छ ।
- (घ) एकात्मक नियम (identity law) : $a+0 = 0+a = a$ हुन्छ ।
- (ङ) विपरीत परिणामको नियम (inverse law) : सबै a का लागि पूर्णाङ्कको समूहमा $-a$ हुन्छ ।

$$\text{साथै } a + (-a) = (-a) + a = 0 \text{ हुन्छ ।}$$

यदि,	$+ + + = +$	जस्तै : $2 + 3 = 5$
	$- + + = -$ (-ठुलो अडक भएमा)	$-3 + 2 = -1$
	$+ + - = +$ (+ठुलो अडक भएमा)	$3 + (-2) = 1$
	$- + - = -$ हुन्छ ।	$-3 + (-2) = -5$

त्यस्तै, तलका प्रश्नहरूको उत्तर पत्ता लगाऊ र कापीमा लेख :

$$-3 \times 2 = ? ; 2 \times (-3) = ? ; 2 \times 1 = ? ; 1 \times 2 = ? ; -3 \times (2 \times 4) = ? ; (-3 \times 2) \times 4 = ?$$

माथिका प्रश्नहरूबाट के थाहा हुन्छ, पत्ता लगाऊ ।

पूर्णाङ्कहरूको गुणनलाई निम्नलिखित तालिकाबाट स्पष्ट पार्न सकिन्छ :

\times		-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
		16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16	
-4		16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16	
-3		12	9	6	3	0	-3	-6	-9	12	
-2		8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	
-1		4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	
0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1		-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
2		-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	
3		12	9	6	3	0	3	6	9	12	
4		-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16	

माथिका प्रश्नहरू र तालिकाका आधारमा पूर्णाङ्कहरूको गुणनका निम्नलिखित नियमहरू बनाउन सकिन्छ :

पूर्णांडको गुणनका नियमहरू [Law of Multiplication of Integers]

यदि a, b, c तीनओटा पूर्णांडकहरू भए

(क) बन्दी नियम (closure law) :

$a \times b, b \times c, c \times a$ पूर्णांडक हुन्छ ।

(ख) विनियमको नियम (commutative law) :

$a \times b = b \times a$ हुन्छ ।

(ग) सङ्घीय नियम (associative law) :

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ हुन्छ ।

(घ) पदविच्छेदन/वितरणात्मक नियम (distributive law) :

$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ हुन्छ । अथवा $a(b+c) = ab+ac$

(ङ) एकाइ नियम (Identity law) :

$a \times 1 = 1 \times a = a$ हुन्छ ।

$$[+x+ = +, -x+ = -, +x- = -, -x- = +] \text{ हुन्छ ।}$$

त्यसैगरी कुनै पूर्णांडकले अर्को पूर्णांडकलाई भाग गर्दा,

$$[+ \div + = +, + \div - = -, - \div + = -] \text{ र } - \div - = + \text{ हुन्छ ।}$$

यसरी पूर्ण सङ्ख्याहरू र तिनीहरूका साधारण क्रियाहरू एवम् तिनीहरूको नियमहरूका बारेमा हामीहरूले अधिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरिसकेका छौं। अब हामी पूर्ण सङ्ख्याहरूका सरलीकरणका बारेमा अध्ययन गर्दछौं।

12.1 पूर्णांडकहरूको सरलीकरण (Simplification of Integers)

हामीले जोड (+), घटाउ (-), गुणन (\times) र भाग (\div) सम्मिलित सरल गर्दा सर्वप्रथम भागको, त्यसपछि क्रमशः गुणन, जोड र घटाउको क्रिया गर्नुपर्द्ध, जस्तै :

उदाहरण 1

सरल गर : $25 - 24 \div 8 + 3 \times 2$

समाधान

यहाँ, $25 - 24 \div 8 + 3 \times 2$

$$= 25 - 3 + 3 \times 2 (\div)$$

$$= 25 - 3 + 6 (\times)$$

$$= 25 + 6 - 3 (+)$$

$$= 31 - 3 (-)$$

$$= 28$$

सानो कोष्ठबाट क्रमशः मझौला कोष्ठ र ठुलो कष्ठका क्रियाहरू गर्नुपर्ने हुन्छ । त्यसपछि कोष्ठभित्र क्रमशः मेलबन्द (—) भाग (\div), गुणन (\times), जोड (+) र घटाउ (—) को काम गरिन्छ ।

उदाहरण 2

सरल गर : $-19 + [27 - \{14 + (5-2) \times 4 \div 2\}]$

समाधान

$$\begin{aligned}
 & -19 + [27 - \{14 + (5-2) \times 4 \div 2\}] \\
 & = -19 + [27 - \{14 + 3 \times 4 \div 2\}] \quad [() \text{ को क्रिया }] \\
 & = -19 + [27 - \{14 + 3 \times 2\}] \quad [\div \text{ को क्रिया }] \\
 & = -19 + [27 - \{14 + 6\}] \quad [\times \text{ को क्रिया }] \\
 & = -19 + [27 - 20] \quad [\{ \} \text{ को क्रिया }] \\
 & = -19 + 7 \quad [[] \text{ को क्रिया }] \\
 & = -12
 \end{aligned}$$

अभ्यास 12.1

1. सरल गर :

- | | |
|--|---|
| (क) $17 - \{19 - 2(1+3)\}$ | (ख) $20 - \{8 - (15+2)\}$ |
| (ग) $25 - \{16 \div (17-9)\}$ | (घ) $-16 + \{8 \times (2+4)\}$ |
| (ड) $50 \div \{18 - (4 \times 10 \div 2)\}$ | (च) $[-20 \div \{40 - 6(7-2)\}] + 16$ |
| (छ) $5[152 - \{7 - 8(9-2)\}]$ | (ज) $11 \times 11 \div [-11 \div \{12 - (13-12)\}]$ |
| (झ) $24 \div [18 - 3\{5 + (6-9)\}] + 8$ | (झ) $[-2 + \{11 \times (8+4) \div 3\}] + 21$ |
| (ट) $64 \div 8 - 2[3 + \{7 - 3(3+4-2)\}]$ | (ठ) $-64 \div 16 + [12 \times \{6 \div (16 \div 10-2)\}]$ |
| (ड) $80 \div 4[400 \div 4\{7 + (19+8-24)\}]$ | |

2. दिइएको तालिकामा 1 देखि 9 सम्मका अड्कहरू नदोहोरिने गरी भर जसमा प्रत्येक पद्मतिबाट र रेखीयबाट विकर्णहरूको योगफल 15 हुन्छ ।
3. 4 को तीन गुणावाट 7 घटाएर 5 जोडा कति हुन्छ ?
4. 15 को 4 गुणाको 6 भागको 1 भागवाट 3 घटाएर 5 ले गुणा गर्दा कति हुन्छ ?
5. 20 को एक चौथाइलाई 6 ले गुणा गरेर 5 जोडी 4 घटाउँदा कति हुन्छ ?
6. 8 को 5 गुणालाई 4 ले भाग गरी 10 जोडेर 20 घटाउँदा कति होला ?
7. 5 र 3 को योगफलबाट 6 घटाइ 9 ले गुणा गर्दा कति हुन्छ ?
8. 64 लाई 13 र 9 को फरकमा 4 जोडी भाग गरेर 8 घटाउँदा कति हुन्छ ?
9. 72 मा यसैको एक चौथाइ जोडी आएको योगफलमा 72 कै 8 भागको 1 भाग र 1 जोडा कति हुन्छ ?
10. 36 मा फेरि त्यही सझ्या, त्यसको आधा र फेरि आधाको आधा जोडी 1 जोडा कति हुन्छ ?
- हाम्रो गणित, कक्षा ८

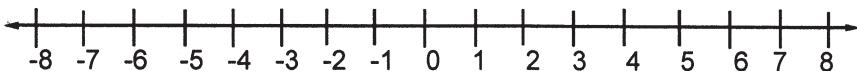
		6
	5	1
4		

पाठ

13

आनुपातिक सङ्ख्याहरू (Rational Numbers)

13.0. पुनरवलोकन (Review)



माथिको सङ्ख्यारेखाबाट कुनै दुई पूर्णाङ्कहरू लेउ, जस्तै : 2 र -3। तिनीहरूबिचका चार गणितीय क्रियाहरू गर । उत्तरलाई साथीको उत्तरसँग तुलना गरेर निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर ।

$$-3+2 = ?$$

$$-3-2 = ?$$

$$2 \times -3 = ?$$

$$-3 \div 2 = ?$$

यसरी पूर्णाङ्कका नियमानुसार कुनै छुट्टै पूर्णाङ्कहरू गुणा गर्दा, जोड्दा र घटाउँदा फेरि नयाँ पूर्णाङ्क नै हुन्छ तर एउटा पूर्णाङ्कलाई अर्को पूर्णाङ्कले भाग गर्दा सधैं पूर्णाङ्क नहुन पनि सक्छ । त्यस कारण अरू थप सङ्ख्याहरूको आवश्कता महसुस भयो र दशमलव सङ्ख्या वा भिन्न सङ्ख्याको आविष्कार गरियो । ती सङ्ख्याहरूलाई आनुपातिक सङ्ख्याहरू भनिन्छ । माथिको प्रश्नमा $\frac{-3}{2}$ आनुपातिक सङ्ख्या हो ।

यदि कुनै पनि सङ्ख्यालाई $\frac{p}{q}$ का रूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ भने त्यस्तो सङ्ख्यालाई आनुपातिक सङ्ख्या (rational number) भनिन्छ जहाँ p र q दुवै पूर्णाङ्कहरू हुन् र $q \neq 0$ छ । यसलाई Q ले जनाइन्छ । साथै, $N \subset Z \subset Q$ हुन्छ ।

आनुपातिक सङ्ख्याहरूका बारेमा हामीले अघिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरिसक्यौँ । यसअन्तर्गत हामी अब सङ्ख्याहरूको वैज्ञानिक सङ्केतका बारेमा जानकारी लिन्छौँ ।

13.1 सङ्ख्याको वैज्ञानिक सङ्केत (Scientific Notation of Numbers)

तलका उदाहरणहरू हेर :

$$6 = 6 \times 1 = 6 \times 10^0 \text{ हुन्छ ।}$$

$$16 = 1.6 \times 10 = 1.6 \times 10^1$$

$$160 = 16 \times 10 = 1.6 \times 100 = 1.6 \times 10^2$$

$$160000 = 1600 \times 100 = 160 \times 1000 = 16 \times 10000 = 1.6 \times 100000 = 1.6 \times 10^5$$

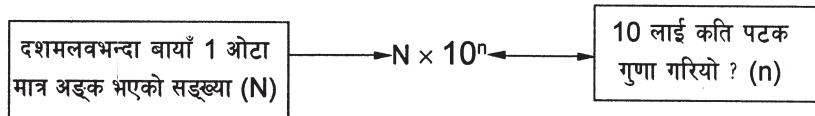
$$\text{त्यसै गरी, } 7=7 \times 1=7 \times 10^0$$

$$0.7 = \frac{7}{10} = \frac{7}{10^1} = 7 \times 10^{-1}$$

$$0.07 = \frac{7}{100} = \frac{7}{10^2} = 7 \times 10^{-2}$$

$$0.00071 = \frac{71}{100000} = 7.1 \times 10^{-4}$$

सङ्ख्याहरूको वैज्ञानिक संकेतलाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :



तलका उदाहरणमा पृथ्वीको तौल र हाइड्रोजन परमाणु प्रोटोनको तौललाई कसरी लेख्न सकिन्छ, हेरौँ :

$$\begin{aligned}\text{पृथ्वीको तौल} &= 5,972,000,000,000,000,000,000 \text{ kg} \\ &= 5.972 \times 1,000,000,000,000,000,000,000 \text{ kg} \\ &= 5.972 \times 10^{21} \text{ kg हुन्छ}.\end{aligned}$$

त्यसै गरी, हाइड्रोजन परमाणुको तौल = 0.000,000,000,000,000,000,000,001,673 kg

$$\begin{aligned}&= \frac{1673}{1,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000} \text{ kg} \\ &= \frac{1.673 \times 1000}{10^{30}} \text{ kg} \quad [\because 1.673 \times 1000 = 1673] \\ &= \frac{1.673 \times 10^3}{10^{30}} \text{ kg} \\ &= 1.673 \times 10^{3-30} \text{ kg} = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg हुन्छ}.\end{aligned}$$

यदि कुनै पनि सङ्ख्या ज्यादै ठुलो अथवा ज्यादै सानो दशमलव सङ्ख्या भएमा त्यसलाई एउटा दशमलव सङ्ख्या (जसमा दशमलव भन्दा अगाडि एउटा अडक मात्र हुन्छ) र 10 को घाताङ्कको गुणनका रूपमा व्यक्त गरिन्छ भने उक्त संकेतलाई सङ्ख्याहरूको वैज्ञानिक संकेत भनिन्छ ।

उदाहरण 1

वैज्ञानिक संकेतमा रूपान्तरण गर :

(क) 1234.56

(ख) 0.00657

समाधान

(क) $1234.56 = 1234.56 \times 1 = 1234.56 \times 10^0$

$$1234.56 \times 10^0 = 123.456 \times 10^1$$

$$123.456 \times 10^1 = 12.3456 \times 10^2$$

$$12.3456 \times 10^2 = 1.23456 \times 10^3$$

$$1234.56 = 1.23456 \times 10^3 \text{ हुन्छ} !$$

- प्रत्येक पटक दशमलवको स्थान 1 स्थान अगाडि सरेको छ ।

- प्रत्येक पटक 10 को घाताङ्क 1 ले बढ्दै गएको छ ।

(ख) $0.00657 = 0.00657 \times 1 = 0.00657 \times 10^0$

$$0.00657 \times 10^0 = 0.0657 \times 10^{-1}$$

$$0.0657 \times 10^{-1} = 0.657 \times 10^{-2}$$

$$0.657 \times 10^{-2} = 0.00657 \times 10^{-3} = 6.57 \times 10^{-3}$$

$$\therefore 0.00657 = 6.57 \times 10^{-3}$$

- प्रत्येक पटकमा दशमलवको स्थान एक स्थान पछाडि सरेको छ ।

- प्रत्येक पटक 10 को घाताङ्क 1 ले घटेको छ ।

उदाहरण 2

तलका सङ्ख्याहरूलाई वैज्ञानिक संकेतमा लेख :

(क) 759 (ख) 39000 (ग) 0.00037

समाधान

(क) $759 = 7.59 \times 100 = 7.59 \times 10^2$

(ख) $39000 = 3.9 \times 10000 = 3.9 \times 10^4$

पहिले बायाँबाट दायाँ 1 अडक गन्ने र दशमलव राख्ने । त्यसपछि 1 मा दशमलव भन्दा पछाडिको अडकको सङ्ख्या बराबर 0 (शून्य) थप्ने । जस्तै : $759 = 7.59 \times 100$ भयो र 10 को घाताङ्कका रूपमा लेख्ने ।

(ग) $0.00037 = \frac{37}{100000} = \frac{3.7 \times 10}{100000} (\because 3.7 \times 10 = 37)$

(∴ भिन्नमा लैजादा)

$$= \frac{3.7 \times 10^1}{10^5} = 3.7 \times 10^{1-5} = 3.7 \times 10^{-4}$$

$$\left[\because \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \right]$$

$$\therefore 0.00037 = 3.7 \times 10^{-4} \text{ हुन्छ} !$$

उदाहरण 3

तलका वैज्ञानिक संकेतहरूलाई दशमलव पद्धतिमा लेख :

(क) 6.3×10^3

(ख) 4.579×10^6

(ग) 7.4×10^{-5}

(घ) 3.579×10^{-4}

तरिका

पहिले 10 को घाताङ्कलाई विस्तारित रूपमा लेख्ने, जस्तै : $10^3 = 1000$

त्यसपछि गुणा गरी लेख्ने

समाधान

(क) $6.3 \times 10^3 = 6.3 \times 1000 = 6300.0 = 6300$

(ख) $4.579 \times 10^6 = 4.579 \times 1000000$

$$= 4579000.000 = 4579000$$

(ग) $7.4 \times 10^{-5} = \frac{7.4}{10^5} = \frac{7.4}{100000} = 0.000074$

तरिका :

(घ) $3.579 \times 10^{-4} = \frac{3.579}{10^4}$

ऋणात्मक चिह्न भएको घाताङ्कलाई हरमा लैजाने

$$= \frac{0.3579}{1000} = \frac{0.03579}{100}$$

10 को घाताङ्कलाई विस्तारित रूपमा लेख्ने

$$= \frac{0.003579}{10} = 0.0003579$$

त्यसपछि सङ्ख्याको अगाडि हरमा भएको शून्य बराबरको शून्य थपी दशमलव चिह्नलाई अगाडि बढाउने

अभ्यास 13.1

1. तलका दशमलव सङ्ख्याहरूलाई वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख :

(क) 45

(ख) 3400

(ग) 0.000023

(घ) 101000

(ङ) 0.010

(च) 45.01

(छ) 7000000

(ज) 0.00671

(झ) 625.6

(ञ) 0.07882

(ट) 118000

(ठ) 87200

(ड) 0.00000272

(ढ) 0.000037

(ण) 74171.7

(त) 3456.78

2. तलका वैज्ञानिक सङ्केतहरूलाई दशमलव सङ्ख्यामा रूपान्तरण गर :

(क) 2.30×10^4

(ख) 5.40×10^1

(ग) 1.76×10^0

(घ) 1.76×10^{-3}

(ङ) 7.4×10^{-5}

(च) 1.901×10^{-7}

(छ) 1.525×10^6

(ज) 6.58157×10^7

(झ) 5.256×10^8

(ञ) 5.23×10^{-7}

(ट) 8.71×10^{-8}

(ठ) 7.75763×10^{-9}

3. एउटा सामानसहितको ट्रकको तौल 12,000 kg छ भने उक्त तौललाई वैज्ञानिक सङ्केत लेख ।

4. आर्गनको परमाणुको अर्धव्यास 0.000,000,000,098 मिटर भए यसको वैज्ञानिक सङ्केत लेख ।

5. $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ले प्रकाशको हावामा गति जनाउँछ भने त्यसको दशमलव मान कति हुन्छ ?

6. 30 दिन भएको महिनामा 6480000 सेकेन्ड हुन्छ भने यसको वैज्ञानिक सङ्केत कति हुन्छ ?

हाम्रो गणित, कक्षा ८

13.2 वैज्ञानिक संख्याको सरलीकरण (Simplification of Numbers with Scientific Notations)

(I) वैज्ञानिक संख्याको जोड र घटाउ (Addition and Subtraction)

तलका उदाहरण हेरे :

उदाहरण 4

सरल गरे :

(क) $3.4 \times 10^2 + 4.57 \times 10^3$ (ख) $4.54 \times 10^{-3} - 2.4 \times 10^{-3}$

समाधान

(क) $3.4 \times 10^2 + 4.57 \times 10^3$

यहाँ दुवै पदमा 10 को घाताङ्क बराबर छैन । तसर्थि यिनीहरूलाई जोड्न मिल्दैन र दुवै पदमा 10 को घाताङ्क बराबर बनाउनुपर्ने हुन्छ ।

यदि दुवै पदको घाताङ्क बराबर छैन भने संख्याका वैज्ञानिक संख्याको जोड्न र घटाउन मिल्दैन ।

यहाँ, $3.4 \times 10^2 = 0.34 \times 10^3$ हुन्छ ।

अब, $3.4 \times 10^2 = 4.57 \times 10^3$
 $= 0.34 \times 10^3 + 4.57 \times 10^3$
 $= (0.34 + 4.57) \times 10^3$
 $= 4.91 \times 10^3$

वैज्ञानिक संख्याहरू जोड्दा/घटाउँदा गुणाङ्क
जोडिन्छ/घटाइन्छ र 10 को घाताङ्क जस्ताको
तस्तै राखिन्छ ।

(ख) $4.54 \times 10^{-3} - 2.4 \times 10^{-3}$

$$= (4.54 - 2.4) \times 10^{-3} \quad [\text{दुवैमा समान घाताङ्क } -3 \text{ भएकाले}] \\ = 2.14 \times 10^{-3}$$

(II) वैज्ञानिक संख्याको गुणन र भाग (Multiplication and Division of Numbers with Scientific Notations)

तलका उदाहरण हेराँ :

उदाहरण 5

सरल गरे :

(क) $(2.00 \times 10^3) \times (4.12 \times 10^4)$

(ख) $\frac{9.60 \times 10^7}{1.60 \times 10^4}$

समाधान

$$\begin{aligned}(\text{क}) (2.00 \times 10^3) \times (4.12 \times 10^4) \\= 2.00 \times 4.12 \times 10^{3+4} \\= 8.24 \times 10^7\end{aligned}$$

(दुई वैज्ञानिक संख्येतमा लेखिएका संख्यालाई गुणन गर्दा गुणाङ्कहरूको गुणन गरिन्छ र घाताङ्क जोडिन्छ ।)

$$\begin{aligned}(\text{ख}) \frac{9.60 \times 10^7}{1.60 \times 10^4} \\= \frac{9.60}{1.60} \times 10^{7-4} \\= 6.0 \times 10^3\end{aligned}$$

(कुनै वैज्ञानिक संख्येतमा लेखिएको संख्यालाई अर्को वैज्ञानिक संख्येतमा लेखिएको संख्याले भाग गर्दा गुणाङ्कले भाग गरिन्छ र घाताङ्क घटाइन्छ ।)

अभ्यास 13.2

1. सरल गर र वैज्ञानिक संख्येतमा लेख :

(क) $(1.2 \times 10^5) + (5.35 \times 10^6)$	(ख) $6.91 \times 10^{-2} + 2.4 \times 10^{-3}$
(ग) $9.70 \times 10^6 + 8.3 \times 10^5$	(घ) $3.67 \times 10^2 - 1.6 \times 10^1$
(ङ) $8.41 \times 10^{-5} - 7.00 \times 10^{-6}$	(च) $1.33 \times 10^5 - 4.9 \times 10^4$

2. सरल गर र वैज्ञानिक संख्येतमा लेख :

(क) $(4.3 \times 10^8) \times (2.0 \times 10^6)$	(ख) $(6.0 \times 10^3) \times (1.5 \times 10^{-2})$
(ग) $(1.5 \times 10^{-2}) \times (8.0 \times 10^{-1})$	(घ) $(5.23 \times 10^{11}) \times (3.0 \times 10^{-10})$
(ङ) $\frac{1.20 \times 10^{-8}}{3.0 \times 10^{-3}}$	(च) $\frac{7.8 \times 10^{-12}}{1.3 \times 10^{-13}}$
(ज) $\frac{5.6 \times 10^{-18}}{1.4 \times 10^{-8}}$	(झ) $\frac{8.1 \times 10^9}{9.0 \times 10^8}$
	(ञ) $\frac{3.25 \times 10^{-10}}{1.625 \times 10^{-15}}$

3. सरल गर :

$$(\text{क}) \frac{(1.1 \times 10^3) + 2.3 \times 10^3}{1.7 \times 10^{-6}}$$

$$(\text{ख}) \frac{9.8 \times 10^8 - 4.9 \times 10^8}{7.0 \times 10^7}$$

$$(\text{ग}) \frac{(2.1 \times 10^6) \times (4.0 \times 10^{-3})}{4.2 \times 10^{-4}}$$

$$(\text{घ}) \frac{6.48 \times 10^5}{(2.4 \times 10^4) \times (1.8 \times 10^{-2})}$$

4. एउटा ट्याङ्कीमा 3.2×10^4 लिटर पानी छ र दोस्रो ट्याङ्कीमा 1.3×10^3 लिटर पानी छ भने दुवै ट्याङ्कीमा गरी जम्मा कति पानी होला ?

5. 2.7×10^9 km पार गर्नुपर्ने एउटा रकेटले 1.35×10^9 दुरी पार गरिसक्यो भने अब कति दुरी पार गर्न बाँकी रह्यो ?

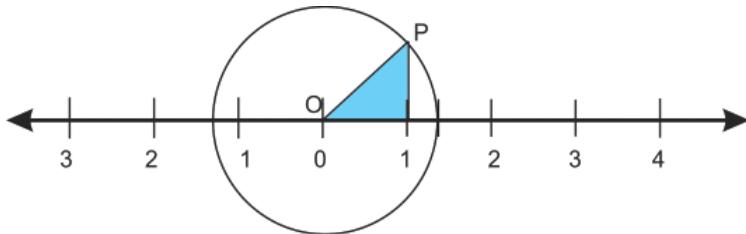
6. 9.6×10^6 लिटर पेट्रोललाई 1.6×10^3 लिटरका कति ओटा बराबर ट्याङ्कीमा राख्न सकिएला ? हाम्रो गणित, कक्षा ८

वास्तविक संख्याहरू

(Real Numbers)

14.0. पुनरबलोकन (Review)

संख्याहरूको विकास क्रमको लामो समयसम्म कुनै दुई संख्याहरूविचका चार क्रियाहरू गर्दा आनुपातिक संख्याहरू नै पर्याप्त थिए । जस्तै : कुनै दुई संख्याहरू जोडा, घटाउँदा, गुणन गर्दा वा भाग गर्दा आनुपातिक संख्या नै हुन्छ । त्यसै क्रममा 2 को वर्गमूल पत्ता लगाउन, $x^2 - 2 = 0$ मा x को मान पत्ता लगाउन आनुपातिक संख्याहरूबाट मात्र सम्भव भएन र अन्य नहुने वा पुनरावृति नहुने दशमलव संख्याहरूको आवश्यकता देखियो । साथै एक एकाइ भुजा भएको वर्गको विकर्णको लम्बाइ पत्ता लगाउनका लागि नयाँ संख्याहरूको आगमन आवश्यक देखियो र तिनको खोजी भयो । जसलाई अनानुपातिक संख्या (irrational number) भनिन्छ । जस्तै : वृत्तको परिधि र व्यासको अनुपात, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ आदि । $\sqrt{2}$ लाई संख्या रेखामा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :



O लाई उद्गम बिन्दु मानी P(1,1) बिन्दु लिऊ र OP जोड । त्यसपछि OP को दुरी निर्देशाङ्क ज्यामितीद्वारा पत्ता लगाऊ ।

$$\text{यहाँ, } OP = \sqrt{(0-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ हुन्छ ।}$$

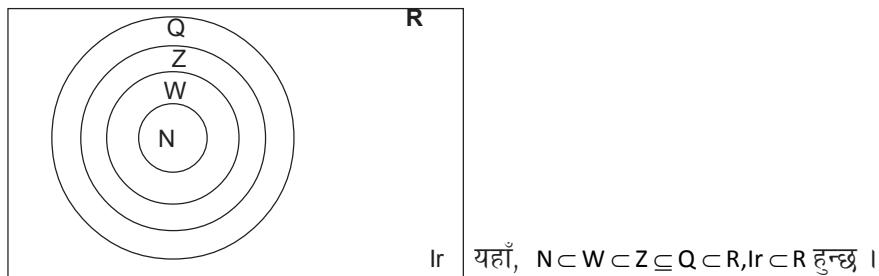
OP बाबारको अर्धव्यास लिई O लाई केन्द्र मानेर एउटा अर्धवृत्त खिच । त्यस अर्धवृत्तको परिधिले संख्या रेखालाई काटेको ठाउँमा $\sqrt{2}$ पर्दछ (कसरी ?) । यसरी एउटा अनानुपातिक संख्यालाई पनि संख्या रेखामा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

14.1. वास्तविक संख्याहरूको परिचय (Introduction to Real Numbers)

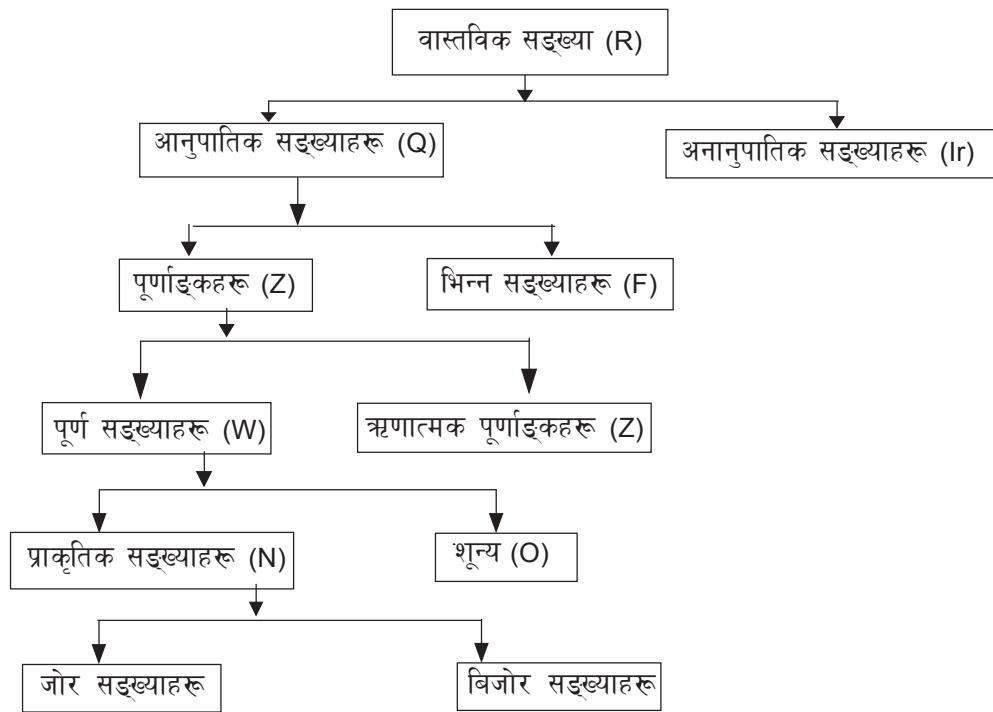
आनुपातिक संख्याहरूको समूह (Q) र अनानुपातिक संख्याहरूको समूह (Ir) को संयोजन समूहलाई वास्तविक संख्याको समूह भनिन्छ । यसलाई R ले जनाइन्छ र $R = Q \cup Ir$ हुन्छ ।

अर्थात, कुनै पनि संख्यालाई संख्या रेखामा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ भने सो संख्यालाई वास्तविक संख्या भनिन्छ ।

वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूहलाई भेनचित्रमा निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :



वास्तविक सङ्ख्याहरूलाई निम्नानुसार प्रवाह तालिका (flow chart) बाट देखाउन सकिन्छ :



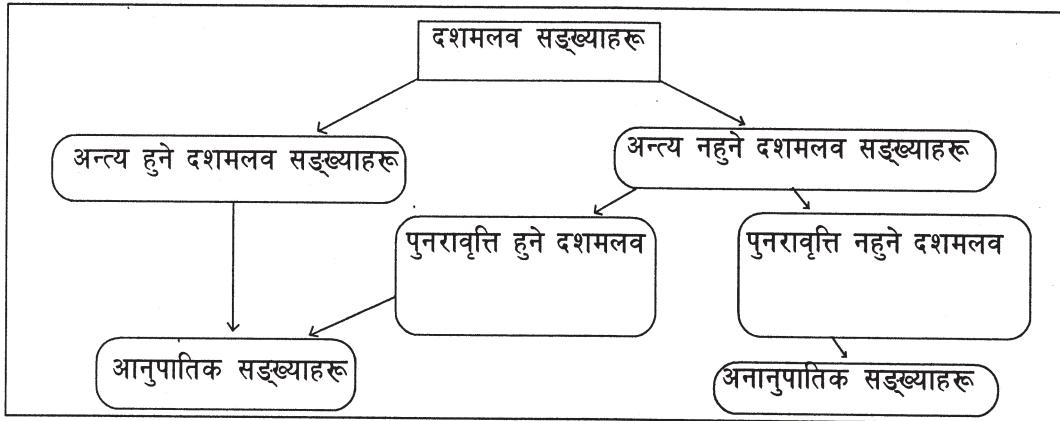
14.1.2. दशमलव र अनानुपातिक सङ्ख्याहरू (Decimal and Irrational Numbers)

तलका सङ्ख्याहरूलाई हेर :

$$\frac{23}{4} = 4.75; \quad \frac{20}{6} = 3.3333....; \quad \sqrt{2} = 3.14285....$$

दिइएका दशमलव सङ्ख्याहरूमा कुन कुन अन्त्य हुने, कुन दोहोरिने वा पुनरावृत्ति हुने र कुन अन्त्य नहुने र पुनरावृत्ति नहुने दशमलव सङ्ख्या हुन, छुट्याऊ ।

यहाँ, पहिलो (4.75) र दोस्रो (3.33333.....) आनुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् भने तेस्रो (3.14285.....) अनानुपातिक सङ्ख्या हो । तलको तालिकामा हेर :



उदाहरण 1

तल दिइएका सङ्ख्याहरू कुन आनुपातिक हुन् र कुन अनानुपातिक हुन्, लेख :

- (क) 0.35 (ख) $\sqrt{6}$ (ग) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (घ) $\frac{9}{4}$ (ड) 1.732 ... (च) 0.414141

समाधान

- (क) आनुपातिक सङ्ख्या (अन्त्य भएको दशमलव)
- (ख) अनानुपातिक सङ्ख्या (निश्चित मान नभएको वर्गमूल)
- (ग) आनुपातिक सङ्ख्या (निश्चित मान नभएको वर्गमूल)
- (घ) आनुपातिक सङ्ख्या (अन्त्य भएको दशमलव)
- (ड) अनानुपातिक सङ्ख्या (नदोहोरिएको र अन्त्य नभएको दशमलव)
- (च) आनुपातिक सङ्ख्या (दोहोरिएको दशमलव)

14.1.3. दशमलवलाई भिन्नमा रूपान्तर (Conversion of Decimal into Fraction)

तलका उदाहरणहरू अध्ययन गर :

$$(क) \frac{2}{3} = 0.666\dots\dots\dots = 0.\bar{6}$$

$$(ख) \frac{17}{12} = 1.416666\dots\dots\dots = 1.\bar{4}1\bar{6}$$

$$(ग) \frac{4}{7} = 0.571428571428 = 0.\overline{571428}$$

उदाहरणहरूमा अडक्को वा अडकहरूको माथिको मेलबन्द (Bar) ले उकत सङ्ख्या दोहोरिरहन्छ भन्ने जनाउँछ ।

उदाहरण 2

तलका दशमलवहरूलाई भिन्नमा रूपान्तरण गर :

- (क) $0.\bar{3}$ (ख) $0.\overline{41}$

समाधान

- (क) $0.\bar{3}$

$$\text{मानौ } x = 0.\bar{3}$$

$$\therefore x = 0.33\dots \quad (i)$$

(i) लाई 10 ले गुणा गर्दा,

$$10x = 3.33\dots \quad (ii)$$

अब, (ii) बाट (i) घटाउँदा,

$$10x - x = 3.33 - 0.33$$

अथवा $9x = 3.0$

$$\text{अब, } x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore 0.\bar{3} = \frac{1}{3}$$

- (ख) $0.\overline{41}$

$$\text{मानौ, } x = 0.\overline{41}$$

$$x = 0.4141\dots \quad (1)$$

(1) लाई 100 ले गुणा गर्दा,

$$100x = 41.4141\dots \quad (2)$$

अब, (2) बाट (1) घटाउँदा,

$$100x - x = 41.4141 - 0.4141$$

अथवा, $99x = 41$

$$\text{अथवा, } x = \frac{41}{99}$$

$$\therefore 0.\overline{41} = \frac{41}{99}$$

अभ्यास 14.1

1. तलका तथ्यहरू ठिक भए कोष्ठमा (\checkmark) र बेठिक भए कोष्ठमा (x) चिह्न लेख :

(क) वास्तविक सङ्ख्याको समूह भनेको आनुपातिक सङ्ख्या र आनुपातिक सङ्ख्याको संयोजन हो । []

(ख) आनुपातिक सङ्ख्याहरूको समूहको पुरक समूह अनानुपातिक सङ्ख्याको समूह हो । []

(ग) पूर्ण सङ्ख्याको समूह र पूर्णाङ्कको समूह एउटै हो । []

(घ) $Z \subset Q \subset R$ [] (ङ) $R \cap Q \cap Z = W$ []

(च) $N \cup W = N$ [] (छ) $Z \supset N \supset W$ []

(ज) $Q \cup Irr = Q$

[]

(झ) $Irr \cap Q = Q$

[]

(ज) $N \subset Z \subset Q \subset R$

[]

2. तलका सद्ब्याहरू कुन अनानुपातिक हुन् र कुन आनुपातिक हुन्, किन ?

(क) $\sqrt{2}$

(ख) 3.57

(ग) 3.141312

(घ) $\frac{22}{3}$

(ङ) $3\sqrt{3}$

(च) 4.95

(छ) $-\sqrt{169}$

(ज) $\frac{\sqrt{11}}{3}$

(झ) $\sqrt{9}$

(ञ) $\sqrt{26}$

(ट) $\frac{2}{3}$

(ठ) $\frac{27}{4}$

3. तलका दशमलव सद्ब्याहरूलाई भिन्नमा रूपान्तरण गर :

(क) 0. $\bar{5}$

(ख) 0. $\bar{7}$

(ग) 0. $\overline{24}$

(घ) 0. $\overline{132}$

(ङ) 0. $\overline{27}$

(च) 1. $\overline{57}$

(छ) 0. $\overline{365}$

(ज) 4. $\overline{78}$

(झ) 0. $\overline{445}$

(ञ) 1. $\overline{525}$

4. भेन्चित्रद्वारा R, Z र Ir को सम्बन्ध प्रस्तुत गर ।

5. Q, R, Ir को सम्बन्धलाई भेन्चित्रमा प्रस्तुत गर ।

14.2. सर्डको परिचय (Introduction to Surd)

कक्षामा विद्यार्थीहरू बेन्चअनुसारको समूह बनाएर प्रत्येक समूहले $\sqrt{2}, \frac{5}{13}, \sqrt{4}, \sqrt{6}, \sqrt{16}, \sqrt{25}, \sqrt{50}$ को

मान पत्ता लगाउ ।

कुन सद्ब्याका वर्गमूल पत्ता लगाउन सकियो, कुन सद्ब्याका पत्ता लगाउन सकिएन, वा कुन सद्ब्याका वर्गमूल पूर्ण सद्ब्या हुन् र कुन सद्ब्याका वर्गमूल पूर्ण सद्ब्या होइनन्, छुट्याऊ र समूहका प्रत्येक सदस्यहरूसँग छलफल गरी प्रस्तुत गर ।

कुनै पनि सद्ब्याको पूर्ण वर्गमूल पत्ता लगाउन सकिदैन र सो सद्ब्याको वर्गमूलको निश्चित मान हुँदैन र मूल चिह्नसहित लेखिन्छ भने त्यस्ता सद्ब्याहरूलाई सर्ड (surd) भनिन्छ, जस्तै : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{5}$ आदि ।

उदाहरण 1

तलका कुन कुन सद्ब्याहरू सर्ड (surd) हुन्, लेख :

(क) $\sqrt{4}$ (ख) $\sqrt{18}$

(ग) $\sqrt{196}$

(घ) $\sqrt{56}$

(ङ) $\frac{3}{\sqrt{45}}$

समाधान

यहाँ,

- (क) $\sqrt{4} = \sqrt{2 \times 2} = 2$, यो सर्ड होइन ।
- (ख) $\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3 \times 3} = \sqrt{2 \times 3^2} = 3\sqrt{2}$, यो सर्ड हो ।
- (ग) $\sqrt{196} = \sqrt{2 \times 2 \times 7 \times 7} = \sqrt{2^2 \times 7^2} = 2 \times 7 = 14$, यो सर्ड होइन ।
- (घ) $\sqrt{56} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 7} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 7} = 2\sqrt{14}$, यो सर्ड हो ।
- (ङ) $\frac{3}{\sqrt{45}} = \frac{3}{\sqrt{3 \times 3 \times 5}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 \times 5}} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, यो सर्ड हो ।

नोट : सबै सर्डहरू अनानुपातिक सद्ब्याहरू हुन् ।

14.2.1. अनुपातीकरण (Rationalization)

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ कस्तो सद्ब्या हो, यसको मानमा कुनै फरक नपर्ने गरी हरको मूल चिह्न कसरी हटाउन सकिएला, विचार गर र लेख ।

त्यसै गरी $\sqrt{2} \times \sqrt{2}; \sqrt{5} \times \sqrt{5}; \sqrt{12} \times \sqrt{3}$ लाई सरल गरेर हेर, के हुन्छ ?

कुनै पनि मूल चिह्न समावेश भएको सद्ब्यालाई त्यसैमा पुनः गुणन गर्दा मूल चिह्न हट्छ, जस्तै :

$$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{5 \times 5} = \sqrt{5^2} = 5 \text{ हुन्छ ।}$$

फेरि $\frac{3}{\sqrt{2}}$ लाई हेरौं ।

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2 \times 2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ हुन्छ ।}$$

यसरी सर्डको हरमा भएको मूल चिह्नलाई हटाउने प्रक्रिया नै आनुपातीकरण हो ।

कुनै पनि सर्डको हरमा भएको मूल चिह्नलाई सो सर्डको मानमा घटबढ नहुने गरी हटाउने प्रक्रियालाई आनुपातीकरण (rationalization) भनिन्छ । हरमा रहेको सर्डले अंश र हर दुवैलाई गुणा गरेर हरबाट मूल चिह्न हटाइन्छ ।

उदाहरण 2

तलका सद्ब्याहरूको अनुपातीकरण गर :

- (क) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
- (ख) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}}$
- (ग) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$
- (घ) $\frac{3}{\sqrt{3}}$
- (ङ) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+1}}$

समाधान

यहाँ, (क) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ (यहाँ हरमा छ र $\sqrt{2}$ लाई हटाउन हर र अंश दुवैमा $\sqrt{2}$ ले गुणा गर्ने)

$$= \frac{\sqrt{3} \times 2}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(ख) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}}$

$$= \frac{\sqrt{2 \times 2 \times 3}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$
 (हर अंश दुवैमा $\sqrt{5}$ ले गुणन गर्दा)

$$= \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$$

(ग) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} \times 2}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ (हर अंश दुवैमा $\sqrt{2}$ ले गुणन गरेको)

(घ) $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

(ङ) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2 - (1)^2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3} - 1 \times \sqrt{2}}{3-1} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

14.2.2 मूल चिह्न ($\sqrt{ }$) समावेश भएका सरल

एउटै सझौत्यामा मूल चिह्न भएका अभिव्यञ्जकहरूलाई बीजीय अभिव्यञ्जकहरू जस्तै जोड र घटाउ गर्न सकिन्छ, जस्तै :

उदाहरण 3

सरल गर :

(क) $3\sqrt{5} + \sqrt{5}$ (ख) $7\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$ (ग) $9\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 6\sqrt{3} + 5\sqrt{8}$

समाधान

यहाँ, (क) $3\sqrt{5} + \sqrt{5}$

$$= (3+1)\sqrt{5}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

(ख) $7\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

$$= (7-5)\sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 & (\text{ग}) \quad 9\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 6\sqrt{3} + 5\sqrt{8} \\
 & = 9\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 6\sqrt{3} + 5\sqrt{2 \times 2 \times 2} \\
 & = 9\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 6\sqrt{3} + 5 \times 2\sqrt{2} \\
 & = 9\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 6\sqrt{3} + 10\sqrt{2} \\
 & = (9 - 6)\sqrt{3} + (3 + 10)\sqrt{2} \\
 & = 3\sqrt{3} + 13\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

उदाहरण 6

गुणन गर :

$$(\text{क}) \quad 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}$$

समाधान

$$\begin{aligned}
 & \text{यहाँ, } 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \\
 & = 2 \times 3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} = 6 \times \sqrt{3 \times 2} \\
 & = 6\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

$$(\text{ख}) \quad 3\sqrt{5} \times (2\sqrt{2} + 5\sqrt{5})$$

समाधान

$$\begin{aligned}
 & \text{यहाँ, } 3\sqrt{5} \times (2\sqrt{2} + 5\sqrt{5}) \\
 & = 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{2} + 3\sqrt{5} \times 5\sqrt{5} \\
 & = 6\sqrt{10} + 15\sqrt{5^2} \\
 & = 6\sqrt{10} + 15 \times 5 \\
 & = 75 + 6\sqrt{10}
 \end{aligned}$$

मूल चिह्न सम्मिलित गुणन गर्दा मूल चिह्नबाहिरको अङ्कसँग मूल चिह्नबाहिरको सङ्ख्या र मूल चिह्नभित्रको सङ्ख्यासँग मूल चिह्नभित्रको सङ्ख्या गुणा गरिन्छ।

उदाहरण 5

$$\text{सरल गर: } (\text{क}) \quad \sqrt{125} + \sqrt{80}$$

$$(\text{ख}) \quad 2\sqrt{28} - 3\sqrt{49} + 10\sqrt{7}$$

समाधान

$$(\text{क}) \quad \sqrt{125} + \sqrt{80}$$

$$(\text{ख}) \quad 2\sqrt{28} - 3\sqrt{49} + 10\sqrt{7}$$

$$\begin{aligned}
 & = \sqrt{5 \times 5 \times 5} + \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5} \\
 & = \sqrt{5^2 \times 5} + \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 5} \\
 & = 5\sqrt{5} + 4\sqrt{5} \\
 & = 9\sqrt{5}
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 & = 2\sqrt{2 \times 2 \times 7} - 3\sqrt{7 \times 7} + 10\sqrt{7} \\
 & = 2 \times 2\sqrt{7} - 3 \times 7 + 10\sqrt{7} \\
 & = 4\sqrt{7} - 21 + 10\sqrt{7} \\
 & = 14\sqrt{7} - 21 \\
 & = 7(2\sqrt{7} - 3)
 \end{aligned}$$

अभ्यास 14.2

1. तलका सङ्ख्याहरूको हरको आनुपातीकरण गर :

$$(क) \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (ख) \frac{4}{\sqrt{5}} \quad (ग) \frac{7}{\sqrt{8}} \quad (घ) \frac{9}{\sqrt{3}} \quad (ड) \frac{22}{\sqrt{11}}$$

$$(च) \frac{10}{\sqrt{48}} \quad (छ) \frac{11}{\sqrt{44}} \quad (ज) \frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \quad (झ) \frac{3}{1+\sqrt{2}} \quad (ञ) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$$

$$(ट) \frac{3}{4-\sqrt{7}} \quad (ठ) \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{24}}$$

2. सरल गर :

$$(क) 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} \quad (ख) 3\sqrt{10} - 3\sqrt{10} \quad (ग) 7\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$$

$$(घ) 10\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \quad (ङ) 3\sqrt{20} + 2\sqrt{45} \quad (च) 21\sqrt{7} - 3\sqrt{28} + \sqrt{63}$$

$$(छ) \sqrt{125} + \sqrt{5} - 3\sqrt{5} \quad (ज) -\sqrt{11} + \sqrt{121} + \sqrt{44}$$

$$(झ) \sqrt{128} - \sqrt{50} \quad (ञ) \sqrt{63} - 2\sqrt{28} + 5\sqrt{7}$$

$$(ट) \sqrt{288} - \sqrt{72} + \sqrt{8} \quad (ठ) 3\sqrt{17} - \sqrt{68} + \sqrt{153}$$

$$(ड) 12\sqrt{24} - 3\sqrt{216} - 5\sqrt{54} + \sqrt{600}$$

3. सरल गर :

$$(क) (2\sqrt{3} \times 3\sqrt{5}) + 5\sqrt{15} \quad (ख) (3\sqrt{7} + 2\sqrt{28}) \times 4\sqrt{7}$$

$$(ग) (9\sqrt{125} - 6\sqrt{180}) \times 3\sqrt{6} \quad (घ) (8\sqrt{6} \times 3\sqrt{2}) - 8\sqrt{48}$$

$$(ड) (5\sqrt{7} \times 3\sqrt{5}) \times 4\sqrt{3} \quad (च) 9\sqrt{13} \times (4\sqrt{52} - 3\sqrt{117})$$

4. आनुपातीकरण गरी सरल गर :

$$(क) \frac{3}{\sqrt{2}} + 5 \quad (ख) \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + 2\sqrt{2} \quad (ग) \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}$$

$$(घ) \sqrt{45} + \sqrt{125} - \frac{3}{\sqrt{5}} \quad (ঠ) \frac{7}{\sqrt{75}} + \sqrt{300} - 3\sqrt{48}$$

15.0 पुनरब्लोकन (Review)

तलका वाक्यहरू पढ र मिले वाक्यलाई एक ठाउँमा लेख :

- | | |
|--|---|
| (क) रामसँग रु. 450 छ। | (ख) पोखरा - काठमाडौंको बस भाडा रु. 500 छ। |
| (ग) पेम्बाको तौल 50 kg छ। | (घ) विपनासँग रु. 500 छ। |
| (ड) काठमाडौं - धरानको बस भाडा रु. 950 छ। | (च) रविलालको तौल 55 kg छ। |

माथिका वाक्यहरूमा (ख) र (ड) दुवै भाडा दर हुन्। जसमा काठमाडौंवाट पोखरा र धरानको भाडा दर दिइएको छ। पोखरा र धरानको भाडा दर क्रमशः रु. 500 र रु. 950 छ। काठमाडौंवाट पोखरा र

धरानको भाडा अनुपात $= \frac{500}{950} = \frac{10}{19}$ छ। यसलाई 10:19 लेखिन्छ।

त्यस्तै, अन्य एउटै गुण भएका परिमाणहरू के के हुन, पत्ता लगाई अनुपात निकाल।

15.1. अनुपात (Ratio)

दुई ओटा समान एकाइ भएका परिमाणलाई तुलना गर्न प्रयोग गरिने भिन्नलाई अनुपात भनिन्छ। यदि a र b को एउटै एकाइ छ भने तिनीहरूको अनुपातलाई $\frac{a}{b}$ वा a:b लेखिन्छ। जहाँ a लाई पहिलो पद (antecedent) र b लाई दोस्रो पद (consequent) भनिन्छ।

जस्तै : प्रमिलाको उचाइ 5 फिट छ र रमिलाको उचाइ 4 फिट छ भने उनीहरूको उचाइको अनुपात 5:4 भयो। अनुपातलाई न्यूनतम (लघुतम) भिन्नमा लेखिन्छ।

पेम्बा र सोनामको उचाइको अनुपात 4:5 छ। अब पेम्बाको उचाइ 40 इन्च भए सोनामको उचाइ कर्ति होला ?

पेम्बाको उचाइ : सोनामको उचाइ = 4:5

$$\text{अथवा, } \frac{\text{पेम्बाको उचाइ}}{\text{सोनामको उचाइ}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{अथवा, } \frac{40 \text{ इन्च}}{\text{सोनामको उचाइ}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{सोनामको उचाइ} = \frac{40 \times 5}{4} = 50 \text{ इन्च।}$$

यसरी कुनै अनुपात र एउटा परिमाण थाहा छ भने अर्को परिमाण पनि पत्ता लगाउन सकिन्छ।

उदाहरण 1

तलका परिमाणहरूलाई अनुपातमा रूपान्तरण गर :

(क) 200 पैसा र 200 रुपियाँ

(ख) 4 kg र 5000 gm

समाधान

(क) यहाँ, 200 पैसा र 200 रुपियाँ दुवैमा एउटै एकाइ छैन । तसर्थ, 200 पैसा = रु. 2 हुन्छ ।

$$\text{अतः अनुपात} = \frac{2 \text{ रुपियाँ}}{200 \text{ रुपियाँ}} = \frac{1}{100} = 1:100$$

(ख) 4 kg र 5000 gm

यसमा पहिलो परिमाण = 4 kg

दोस्रो परिमाण = 5000 gm = 5kg

$$\text{अतः अनुपात} = \frac{4\text{kg}}{5\text{kg}} = 4:5$$

उदाहरण 2

ऋतु र रश्मीले एउटा वस्तुमा 10:13 को अनुपातमा लगानी गरे । यदि ऋतुले रु. 5000 लगानी गरिन् भने रश्मीले कति गरिन् होला ?

समाधान

यहाँ, ऋतु र रश्मीको लगानीको अनुपात 10:13

ऋतुको लगानी = रु. 5000

रश्मीको लगानी = ?

$$\text{अब, } \frac{\text{ऋतुको लगानी}}{\text{रश्मीको लगानी}} = \frac{10}{13}$$

$$\text{अथवा, } \frac{\text{रु. } 5000}{\text{रश्मीको लगानी}} = \frac{10}{13}$$

$$\text{रश्मीको लगानी रु. } = \frac{13 \times 5000}{10} = 6500$$

उदाहरण 3

रोहन, विन्दु र रामविलासले एउटा व्यवसायमा 3:4:5 को अनुपातमा लगानी गरे । यदि उनीहरूले रु. 36,000,000 जम्मा गरेक्छन् भने प्रत्येकले कति कति रुपियाँ लगानी गरेका रहेक्छन् ?

समाधान

यहाँ, जम्मा रकम = ₹. 36,000,000

र अनुपातलाई x मान्दा प्रत्येकको लगानी $3x$, $4x$ र $5x$ हुन्छ ।

अब, प्र०न अनुसार $3x + 4x + 5x = \text{रु. } 36,000,000$

अथवा, $12x = 36,000,000$

$$\text{अथवा, } x = \frac{36000000}{12} = \text{रु. } 3,000,000$$

$$\text{त्यसकारण, रोहनको लगानी} = 3x = 3 \times ₹. 3,000,000 = ₹. 9,000,000$$

$$\text{विन्दको लगानी} = 4x = 4 \times ₹. 3,000,000 = ₹. 12,000,000$$

$$\text{रामविलासको लगानी} = 5x = 5 \times ₹. 3,000,000 = ₹. 15,000,000$$

अभ्यास 15.1

- 8, 9 र 10 वर्षका बालिकाहरूलाई रु. 216 उनीहरूको उमेरको अनुपातमा बाँड़दा प्रत्येकले कति कति रुपियाँ पाउलान् ?
- विपिन, अमृत र आषिशले 2:5:6 को अनुपातमा लगानी गरी एउटा व्यवसाय सञ्चालन गरे । एक वर्षपछि उनीहरूले रु. 65,000,000 आम्दानी गरे भने प्रत्येकले कति कति रकम आम्दानी गरे होलान् ?
- A ले भन्दा B ले दोब्बर र B ले भन्दा C ले तेब्बर रकम जम्मा गर्दा रु. 98460 जम्मा भयो भने प्रत्येकले कति कति रकम जम्मा गरे होलान् ?

15.2. समानुपात (Proportion)

कक्षा 8 मा 24 जना छात्रा र 27 जना छात्र छन् । त्यस्तै कक्षा 9 मा 32 जना छात्र र 36 जना छात्रा छन् भने दुईओटा कक्षामा कति कति अनुपातमा छात्र र छात्रा रहेछन्, पत्ता लगाऊ ।

दुवै कक्षामा छात्र र छात्राविचको अनुपात कस्तो छ, बराबर छ कि छैन हेर ।

कुनै दुई अनुपातलाई न्यूनतम भिन्नमा लेख्दा अनुपात बराबर हुन्छ भने त्यस्ता अनुपातहरूलाई समानुपात भनिन्छ । यदि $a:b = c:d$ भने $a:b$ र $c:d$ समानुपात हुन्छन् र a, b, c र d समानुपातिक हुन्छन् । यसलाई $a:b::c:d$ पनि लेखिन्छ ।

माथिको उदाहरणमा $\frac{24}{27}$ र $\frac{32}{36}$ समानुपातिक छन् ।

यसलाई $\frac{\downarrow}{\uparrow} \frac{\downarrow}{\uparrow} 24:27 = 32:36$ लेखिन्छ ।

Extremes

Means

यसलाई $24:27::32:36$ पनि लेखिन्छ । जसमा बाहिरका दुई पदलाई extremes भनिन्छ, जस्तै : 24 र 36 भित्रका दुई पदलाई means भनिन्छ, जस्तै : 27 र 32

extremes र means को छुट्टा छुट्टै गुणनफल बराबर हुन्छ ।

अर्थात, $\frac{a}{b}$ र $\frac{c}{d}$ समानुपातमा छन् यो $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ हुन्छ ।

अथवा, $a \times d = b \times c$ हुन्छ ।

यसलाई प्रयोग गरेर समानुपातमा रहेका तीनओटा पद दिएमा बाँकी पद पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

उदाहरण 1

समानुपातमा रहेका पदहरूमध्ये दोस्रो, तेस्रो र चौथो पद क्रमशः 4, 6 र 8 भए पहिलो पद पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ पहिलो पद x मानौँ ।

$x, 4, 6$ र 8 समानुपातिक छन् । तसर्थ, $\frac{x}{4} = \frac{6}{8}$ हुन्छ ।

अथवा, $8x = 24$

$$x = \frac{24}{8} = 3$$

उदाहरण 2

4 घण्टामा 170 km दुरी पार गर्ने बसलाई सोही गतिमा 680 km दुरी पार गर्ने कति समय लाग्ला ?
समाधान

680 km दुरी पार गर्ने लाग्ले समय x घण्टा मानौँ ।

अब, $\frac{4}{170} = \frac{x}{680}$ हुन्छ ।

अथवा, $x = \frac{4 \times 680}{170} = 16\text{hrs}$

\therefore 680 km दुरी पार गर्ने 16 घण्टा लाग्छ ।

अभ्यास 15.2

1. तलका सङ्ख्याहरू समानुपातमा छन् वा छैनन् जाँच र लेख :

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| (क) 3, 5, 12, 20 | (ख) 7, 8, 14, 20 |
| (ग) 5m, 3m, 25m, 25m | (घ) 3ft, 8ft, 12ft, 32ft |

2. तलका समानुपात सङ्ख्याहरूमा थाहा नभएका पद पत्ता लगाऊ :

- | | |
|-------------------|-----------------|
| (क) x , 2, 6, 4 | (ख) 3, a, 9, 21 |
| (ग) 16, 4, 4, y | (घ) 7, 9, z, 18 |

3. x को मान पत्ता लगाऊ :

- | | |
|-------------------|-------------------|
| (क) $x:5 = 10:25$ | (ख) $3:7 = 21:x$ |
| (ग) $10:x = 2:11$ | (घ) $25:15 = x:3$ |

4. राष्ट्रिय प्रा. वि. मा सिसाकलम र कलम प्रयोग गर्ने विद्यार्थीको अनुपात 10:11 छ । यदि सिसाकलम प्रयोग गर्ने 110 जना विद्यार्थी भए कलम प्रयोग गर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

5. 3:5 को अनुपातलाई 5:6 बनाउन पर्दा दुवैमा कति जोड्नुपर्ला ?

6. रु. 880 लाई $\frac{1}{5}:\frac{1}{6}$ को अनुपातमा बाँड्दा कति कति हुन्छ ?

7. 7 मिनेटमा 21 kg मकै पिस्ने घट्टलाई 15kg मकै पिस्न करि समय लाग्छ होला ?
8. अनिताको गणित र विज्ञानको प्राप्ताइकको अनुपात 10:12 छ। यदि उसको विज्ञानको प्राप्ताइक 80 भए गणितको प्राप्ताइक करि होला ?
9. कोपीलाले नैतिक शिक्षा र व्यावसायिक शिक्षा तथा अड्डेजी र विज्ञानमा समानुपातिक अङ्क प्राप्त गरिन्। यदि ती विषयहरूमा क्रमशः 25, 30, 75 र x प्राप्त गरिन् भने x को मान करि होला ?
10. रु.180 मा 12 ओटा कापी पाइन्छ भने रु. 225 मा कतिओटा कापी पाइन्छ ?
11. चन्द्रमा र पृथ्वीको गुरुत्वाकर्षणको अनुपात 1:6 छ। पृथ्वीमा 90 N तौल भएका वस्तुको तौल चन्द्रमामा करि होला, पत्ता लगाऊ।
13. एउटा मिठाईमा दुध र चिनीको अनुपात 5:3 छ। यदि दुध 750 gm छ भने चिनीको भाग करि होला ?

15.3 प्रतिशत (Percentage)

तलका भिन्नलाई हरौँ :

कक्षाका सबै विद्यार्थीलाई दुई समूहमा विभाजन गरी तालिकामा दिएका उदाहरणहरूबारे छलफल गर :

तालिका क

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{50}{50} = \frac{50}{100}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{20}{20} = \frac{60}{100}$$

तालिका ख

$$0.33 = 0.33 \times \frac{100}{100} = \frac{33}{100}$$

$$0.80 = 0.80 \times \frac{100}{100} = \frac{80}{100}$$

यहाँ, $\frac{1}{2}$ भनेको 100 भागमा 50 भाग रहेछ, यसलाई 50 प्रतिशत भनिन्छ।

त्यस्तै $\frac{3}{5}$ भनेको 100 भागमा 60 भाग रहेछ, यसलाई कति प्रतिशत भनिन्छ ?

0.33 भनेको 33 प्रतिशत भयो भने 0.80 बराबर प्रतिशत करि होला ?

$$33\% = \frac{33}{100} = 0.33 \text{ हुन्छ।}$$

नोट : भिन्न वा दशमलवलाई प्रतिशतमा रूपान्तरण गर्न 100 ले गुणा गरी % चिह्न राख्ने।

प्रत्येक विद्यार्थीले तलका दुईओटा तालिकामा भएका प्रश्नहरूको उत्तर पत्ता लगाई समूहमा छलफल गर ।

तालिका (क)	तालिका (ख)
50 को 16 = कति	50 को 20 = ?
100 को 16 = ?	125 को 8 = ?
320 को 16 = ?	250 को 4 = ?
500 को 16 = ?	500 को 2 = ?
1020 को 16 = ?	1000 को 1 = ?

प्रतिशतलाई भिन्न वा दशमलवमा रूपान्तरण गर्न 100 ले भाग गरी % चिह्न हटाउने ।

माथिको तालिकाबाट के थाहा हुन्छ निष्कर्ष पत्ता लगाऊ ।

त्यसकारण प्रतिशत एउटा मापन हो, जसमा कुनै परिमाणलाई 100 को भागका रूपमा व्यक्त गरिन्छ ।

15.3.1 दिइएको प्रतिशत बराबर सङ्ख्या पत्ता लगाउने (To find the number of given percentage)

उदाहरण 1

560 जना सम्मिलित कक्षा D को अन्तिम परीक्षामा 40% A+, 30% A, 20% B ग्रेड हासिल गरे र बाँकीले C ग्रेड हासिल गरे भने कति जनाले C ग्रेड हासिल गरे पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ जम्मा विद्यार्थी = 560

$$\begin{aligned} \text{A+ हासिल गर्ने विद्यार्थी} &= 560 \text{ को } 40\% \\ &= \frac{560 \times 40}{100} = 224 \text{ जना} \\ \text{A ग्रेड हासिल गर्ने विद्यार्थी} &= 560 \text{ को } 30\% \\ &= \frac{560 \times 30}{100} = 168 \text{ जना} \end{aligned}$$

B ग्रेड हासिल गर्ने विद्यार्थी = 560 को 20%

$$= \frac{560 \times 20}{100} = 112 \text{ जना}$$

A+, A र B ग्रेड हासिल गर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या = $224 + 168 + 112 = 504$ जना

अब C ग्रेड हासिल गर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या = $560 - 504 = 56$ जना

अर्को तरिका, जम्मा A+, A र B हासिल गर्ने प्रतिशत = $40\% + 30\% + 20\% = 90\%$

C ग्रेड हासिल गर्ने विद्यार्थी प्रतिशत = $100\% - 90\% = 10\%$

अब, C ग्रेड हासिल गर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या = $560 \text{ को } 10\% = \frac{560 \times 10}{100} = 56$ जना

उदाहरण 2

दिइएको तालिकामा एउटा पसलमा विभिन्न सामग्रीको मूल्यसूची दिइएको छ । एउटा सर्ट, पाइन्ट र ज्याकेट किन्तका लागि जम्मा कति रुपियाँ आवश्यक पर्दछ होला ?

समाधान

यहाँ जम्मा किन्तुपर्ने सामानको मूल्य

सर्ट	रु. 250
पाइन्ट	रु. 475
ज्याकेट	रु. 1200
जम्मा	रु. 1925

मूल्यसूची	
वस्तु	मूल्य
सर्ट	रु. 250
पाइन्ट	रु. 475
ज्याकेट	रु. 1200
हरेक सामानमा 20% छुट ।	

$$\text{छुट प्रतिशत} = 20\%$$

$$\text{अब, छुट रकम} = 1975 \text{ को } 20\%$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1975 \times 20}{100} = 395 \\ &= \text{रु. } 395 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{जम्मा आवश्यक रुपियाँ} &= \text{रु. } 1975 - \text{छुट} \\ &= \text{रु. } 1975 - \text{रु. } 395 \\ &= \text{रु. } 1580 \end{aligned}$$

नोट : यसलाई छुटटाछुटटै सामानको छुट घटाएर पनि गर्न सकिन्छ ।

15.3.2. दिइएको सङ्ख्याको प्रतिशत निकाल्ने (To find the Percentage of Given Number)

उदाहरण 3

गत वर्षको प्रति बोरा जिरा मसिनो चामलको मूल्य रु. 1200 थियो । अहिले उक्त चामल बढेर रु. 1500 भयो भने उक्त चामलको मूल्य कति प्रतिशत बढ्यो ?

समाधान

$$\text{यहाँ, गत वर्षको चामलको मूल्य} = \text{रु. } 1200$$

$$\text{अहिले चामलको मूल्य} = \text{रु. } 1500$$

$$\text{बढेको मूल्य} = \text{रु. } 1500 - \text{रु. } 1200 = \text{रु. } 300$$

$$\text{बढेको प्रतिशत} = ?$$

अब, बढेको प्रतिशत = x मान्दा

रु.1200 को x = रु.300

$$\text{अथवा, } \frac{1200 \times x}{100} = 300$$

$$\therefore x = \frac{300}{12} = 25\%$$

तसर्थ उक्त चामलको मूल्य 25% ले वृद्धि भयो ।

(नोट : प्रतिशत निकाल्दा पुरानो परिमाणको सापेक्षमा निकालिन्छ । जस्तै : चामलको मूल्य रु. 1200 को निकालियो तर रु. 1500 को आधारमा होइन ।)

अभ्यास 15.3

1. तलका भिन्न वा दशमलवलाई प्रतिशतमा रूपान्तरण गर :

(क) $\frac{3}{4}$

(ख) 0.34

(ग) $\frac{5}{8}$

(घ) 0.59

(ङ) $\frac{2}{3}$

2. दिइएका प्रतिशतलाई भिन्नमा रूपान्तरण गर :

(क) 45%

(ख) 70%

(ग) $\frac{25}{4}\%$

(घ) 91%

(ङ) 53%

3. मान पत्ता लगाऊ :

(क) 250 को 10% (ख) 150 को 90%

(ग) 180 को 12.5%

(घ) 220 को 20%

4. कति परिमाणको

(क) 15% ले रु 225 हुन्छ ?

(ख) 21% ले 42 मिटर हुन्छ ?

(ग) 25% ले 12.5 दिन हुन्छ ?

(घ) 12% ले 72 जना विद्यार्थी हुन्छ ?

5. दसै बजारमा एउटा च्याङ्गाको मूल्य रु. 12,000 थियो, जसमा 12% छुट थियो भने कति रूपैयाँ छुट रहेछ, छुटपछि उक्त च्याङ्गो किन्न कति तिर्नु पर्ला ?

6. कक्षा 7 का 75 विद्यार्थीहरूमा 8% अनुत्तीर्ण भए भने कति जना उत्तीर्ण भए ?

7. रु. 18,500 तलब भएको एक जना कर्मचारीले 13% रकम कर तिर्नुपर्दै भने कति रकम कर तिर्नुपर्ला ?

8. कक्षा 8 का 80 विद्यार्थीहरूमध्ये 5 जना अनुपस्थित भए भने कति प्रतिशत विद्यार्थी उपस्थित भए ?

9. एउटा सहरको जनसङ्ख्या 2,666,200 छ र वृद्धि दर 1.50% छ भने एक वर्षपछि उक्त जनसङ्ख्या कतिले बढला, पत्ता लगाऊ ।
10. रु. 17,000 आम्दानी भएको एउटा शिक्षकले 15% आयकर तिर्नुपर्छ भने कर तिरेपछि कति रकम प्राप्त गर्नुहोला, पत्ता लगाऊ ।
11. एउटा सहरको जनसङ्ख्या जम्मा 3,40,000 छ । तिनीहरूमध्ये 25,500 जनाले कम्प्युटर प्रयोग गर्नुभने कति प्रतिशतले कम्प्युटरको प्रयोग गर्दा रहेछन् ?
12. तलको तालिकामा विभिन्न वस्तुहरूको मूल्य र छुटपछिको मूल्य दिइएको छ :

वस्तु	मूल्य (रु.)	छुटपछिको मूल्य (रु.)
टोपी	350	315
सर्ट	500	420
जुत्ता	950	900
पाइन्ट	800	720
ज्याकेट	1250	1100
झोला	600	500

माथिको तालिका प्रयोग गरी तलका वस्तुहरूको छुट प्रतिशत पत्ता लगाऊ ।

(क) टोपी

(ख) सर्ट

(ग) जुत्ता

(घ) पाइन्ट

(ङ) ज्याकेट

(च) झोला

13. आइतबार चिडियाघर घुम्नेको सङ्ख्या 840 थियो । सोमबार उक्त सङ्ख्या घटेर 420 भयो भने कति प्रतिशतले घट्यो होला, पत्ता लगाऊ ।
14. रु. 4500 मूल्य भएको मोबाइल सेटलाई रु. 4200 मा किन्न सस्तो पर्छ कि 7% छुटमा किन्दा सस्तो पर्ला, पत्ता लगाऊ ।
15. विकासले एउटा रडारीन TV सेट लाई 13% छुटमा किन्दा रु. 30,00 छुट पायो भने उक्त TV सेटको अड्कित मूल्य कति रहेछ, पत्ता लगाऊ ।
16. रविनले 900 पूर्णाङ्कमा 780 अड्क प्राप्त गरे र विपनाले 800 पूर्णाङ्कमा 700 प्राप्त गरिन् भने कसले धेरै प्रतिशत अड्क प्राप्त गन्यो होला, पत्ता लगाऊ ।

पाठ

16

नाफा र नोक्सान (Profit and Loss)

16.0. पुनरवलोकन (Review)

तलका प्रश्नहरूमा छलफल गराँ :

(क) एउटा घडीलाई रु. 450 मा किनेर रु. 500 मा बेच्दा कति नाफा वा घाटा हुन्छ ?

(ख) एउटा कलमलाई रु. 50 मा किनेर रु. 40 मा बेच्दा कति नाफा वा घाटा हुन्छ ?

प्रश्न नं. (क) मा नाफा भयो किनकि यसमा विक्रय मूल्य धेरै छ। यस्तो अवस्थामा नाफा भनेको विक्रय मूल्य र क्रय मूल्यको फरक हो।

अर्थात नाफा (profit) = विक्रय मूल्य (selling price) - क्रय मूल्य (cost price) हुन्छ।

त्यस्तै दोस्रोमा क्रय मूल्यभन्दा विक्रय मूल्य कम छ।

तसर्थ नोक्सान भयो र नोक्सान = क्रय मूल्य - विक्रय मूल्य हुन्छ।

पहिलोमा,	दोस्रोमा
नाफा = रु. 50	नोक्सान = रु. 10
क्रय मूल्य = रु. 450 छ	क्रय मूल्य = रु. 50
अब, $\frac{50}{450} \times 100\%$ नाफा प्रतिशत हो।	अब, नोक्सान प्रतिशत = $\frac{10}{50} \times 100\% = 20\%$ भयो
\therefore नाफा प्रतिशत = $\frac{\text{वास्तविक नाफा}}{\text{क्र.मु}} \times 100\%$	\therefore नोक्सान प्रतिशत = $\frac{\text{वास्तविक नोक्सान}}{\text{क्र.मु}} \times 100\%$

उदाहरण 1

रु. 3450 मा किनेको एउटा बाखालाई 2 महिनापछि बेच्दा रु. 1450 नोक्सान भयो भने उक्त बाखाको विक्रय मूल्य पत्ता लगाउँ।

समाधान

यहाँ क्रय मूल्य (C.P.) = रु. 3450

नोक्सान (L) = रु. 1450

विक्रय मूल्य (S.P.) = ?

हामीलाई थाहा छ, नोक्सान (L) = C.P. - S.P.

$$\text{रु. } 1450 = \text{रु. } 3450 - \text{S.P.}$$

$$\text{अथवा, S.P.} = \text{रु. } (3450 - 1450) = \text{रु. } 2,000$$

$$\therefore \text{विक्रय मूल्य (S.P.)} = \text{रु } 2,000$$

उदाहरण 2

स्मीताले रु. 1500 मा 50 ओटा बल्ब ल्याइन्। जसमा 4 ओटा फ्युज गइसकेका रहेछन्। बाँकी बल्बहरूलाई उनले प्रति बल्ब रु. 35 का दरले बेच्दा उनलाई कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो होला ?

समाधान

यहाँ 50 ओटा बल्बको क्रय मूल्य (C.P.) = रु. 1500

फ्युज गएका बल्ब सङख्या = 4

ठिक अवस्थामा भएका बल्ब = $50 - 4 = 46$

एउटा बल्बको विक्रय मूल्य = रु. 35

46 ओटा बल्बको विक्रय मूल्य (S.P.) = $35 \times 46 = \text{रु. } 1610$

यहाँ, क्रय मूल्यभन्दा विक्रय मूल्य धेरै भयो। यस कारण उनलाई नाफा भयो।

अतः नाफा = S.P. - C.P.

$$= \text{रु. } 1610 - \text{रु. } 1500 = \text{रु. } 110$$

$$\text{अब, नाफा प्रतिशत} = \frac{\text{वास्तविक नाफा}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100\%$$

$$= \frac{110}{1500} \times 100\%$$

$$= \frac{22}{3}\%$$

$$= 7\frac{1}{3}\%$$

$$= 7.33\%$$

अतः उनलाई 7.33% नाफा भयो।

अभ्यास 16.1

1. तलका आँकडाहरू प्रयोग गरेर नाफा वा नोक्सान पत्ता लगाऊ :

क्रय मूल्य (रु.)	विक्रय मूल्य (रु.)
(क) 300	330
(ख) 5000	4500
(ग) 7000	7700
(घ) 10,000	9,990

2. प्रश्न न. 1 का आँकडाहरूबाट नाफा वा नोक्सान प्रतिशत पत्ता लगाऊ ।
3. अमृताले एउटा साडी रु 1350 मा बेच्दा रु 150 नाफा भयो भने उक्त साडीको क्रय मूल्य कति होला ?
4. रु. 760 मा किनेको एउटा क्याल्कुलेटर बेच्दा रु. 50 नोक्सान भयो भने उक्त क्याल्कुलेटरको विक्रय मूल्य कति रहेछ, पत्ता लगाऊ ।
5. रु. 1450 मा किनेको एउटा बाखालाई रु. 1740 मा बेच्दा कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो ?
6. रु. 15000 को साइक्लबाट 10% नाफा लिन कतिमा बेच्नु पर्ला ?
7. रु. 13000 मा किनेको गोरुलाई रु. 14300 मा बेच्दा कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान हुन्छ ?
8. रु. 58,500 मा किनेको एउटा मोटरसाइकल बेच्दा 8% घाटा भयो भने उक्त मोटरसाइकलको विक्रय मूल्य पत्ता लगाऊ ।
9. रोजीले 100 ओटा अन्डा रु 900 मा किनिन् जसमा 8 ओटा अन्डा फुटेका रहेछन् । बाँकी अन्डालाई उनले प्रति गोटा रु 10.50 मा बेच्दा कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो होला ?
10. प्रभुले 500 ओटा कुखुरा किनेकामा 75 ओटा चिसोले मरे । बाँकी कुखुरा प्रति एकको रु. 120 मा बेच्दा उसले 2% नाफा भयो भने कुखुराको जम्मा क्रय मूल्य कति रहेछ ?
11. एक जना खाद्यान्न पसलेले रु. 40 प्रति केजीको 50 केजी र रु. 50 प्रति केजीको 50 केजी चामल मिलाएर प्रति केजी रु. 48 मा बेच्यो भने उसलाई कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो ?
12. एउटा कम्प्युटर सेट रु. 40,000 मा विक्री गर्दा 25% नाफा भयो भने यसको क्रय मूल्य कति होला ?
13. एन्जलले दुईओटा किताब प्रत्येकको रु. 500 का दरमा किन्यो । उक्त किताब विक्री गर्दा उसलाई क्रमशः एउटा किताबमा 25 % नाफा र अर्को किताबमा 25 % नोक्सान भयो भने उसलाई कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो होला ?

16.1 छुट (Discount) र मूल्य अभिवृद्धि कर (Value Added Tax)

16.1.1 छुट (Discount)

दिइएको बिलको अध्ययन गरी तलका प्रश्नको
उत्तर खोजी गर :

- (क) किताबको अड्कित मूल्य कति छ ?
- (ख) छुट कति प्रतिशत रहेछ ?
- (ग) कति रकम छुट पाइयो ?
- (घ) विपनाले उक्त शब्दकोशलाई कति रकम तिरिन् ?

माथिका प्रश्नहरूका उत्तरहरूबारेमा
समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष पत्ता लगाऊ ।

आचार्य पुस्तक पसल बगर, पोखरा				
नाम : विपना भण्डारी				
क्र.सं.	किताबको नाम	मूल्य (रु)	परिमाण	रकम(रु.)
1.	शब्दकोश	350	1	350
छुट : 12% आउने रकम				42
जम्मा रकम (रु)				308
अक्षरपी रु. तीन सय आठ मात्र ।				
				विक्रेता

व्यापारीले सामानको मूल्य निर्धारण गरी ग्राहकलाई बताउने मूल्यलाई अड्कित मूल्य (marked price) भनिन्छ । कुनै वस्तुको अड्कित मूल्य मा केही रकम कम गरी बिक्री गरिएको छ भने उक्त कम गरिएको रकमलाई छुट (discount) भनिन्छ । छुट अड्कित मूल्यको सापेक्षमा हुन्छ ।

अर्थात, छुट रकम = अड्कित मूल्य (M.P.) को छुट प्रतिशत

$$= M.P. \times \text{छुट प्रतिशत हुन्छ} ।$$

अड्कित मूल्यमा केही छुट गरेर सामान किनिन्छ भने छुटपछिको मूल्यलाई वास्तविक मूल्य भनिन्छ ।

वास्तविक मूल्य = M.P. - छुट रकम हुन्छ ।

उदाहरण 1

एउटा भोलाको अड्कित मूल्य रु. 750 छ । यदि उक्त भोला किन्दा 8% छुट पाइन्छ भने भोलाको वास्तविक मूल्य कति होला, पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ अड्कित मूल्य (M.P.) = रु. 750

$$\text{छुट प्रतिशत} = 8\%$$

$$\text{अब, छुट रकम} = M.P. \text{ को } 8\%$$

$$= \text{रु. } 750 \text{ को } 8$$

$$= \frac{750 \times 8}{100} = \text{रु. } 60$$

त्यस कारण, विक्रय मूल्य = अडकित मूल्य — छुट

$$= \text{रु. } 750 - 60$$

$$= \text{रु. } 690$$

16.1.2 मूल्य अभिवृद्धि कर (Value Added Tax)

दिइएको बिलको अध्ययन गरी र के के पाउँछौ,

साथीहरूविच छलफल गर।

यहाँ,

हिटरको अडकित मूल्य रु. 1700 छ।

मू.अ.क. = 13%

तिरुपर्ने रकम = रु. 1921

मू.अ.क. = रु. 1921 - रु. 1700

$$= \text{रु. } 221$$

$$\text{बढेको रकम प्रतिशत} = \frac{221}{1700} \times 100\% = 13\%$$

तुलसी बिजुली पसल				
जनकपुरधाम				
नाम : कल्पना राय यादव				
क्र.सं.	सामानको नाम	मूल्य (रु.)	परिमाण	रकम (रु.)
1.	हिटर	1700	1	1700
मु.अ.क. 13% ले आउने रकम				221
जम्मा रकम (रु.)				रु. 1921
अक्षरपी एक हजार नौ सय एकाइस मात्र ।				
विक्रेता				

वस्तु तथा सेवा विक्री गर्दा प्रत्येक चरणमा वृद्धि हुने मूल्यमा लाग्ने करलाई मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) भनिन्छ। आफूले किनेको वस्तुमा दुवानी, विमा, कमिसन आदि जोडेर सेवा शुल्क र छुट घटाएर मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) लाग्ने मूल्य कायम गरिन्छ। साथै छुट दिएको वस्तुमा छुट घटाएर आएको मूल्यमा मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) लाग्ने गर्दछ। मूल्य अभिवृद्धि कर वस्तुको विक्रय मूल्यमा जोडिन्छ। मूल्य अभिवृद्धि कर जोडेपछिको मूल्यलाई वास्तविक मूल्य भनिन्छ।

$VAT\% = \frac{\text{VAT रकम}}{\text{विक्रय मूल्य}} \times 100$	$\text{VAT रकम} = \text{वास्तविक मूल्य} - \text{विक्रय मूल्य}$
---	--

उदाहरण 2

रु. 1500 बजार मूल्य भएको एउटा रेडियो सेट किन्दा 10% छुट पाइन्छ र 13% मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) तिरुपर्ने भने उक्त रेडियो सेटलाई कति रुपियाँ तिरुपर्लाँ ?

समाधान

यहाँ, अद्वित मूल्य (M.P) = रु. 1500

$$\text{छुट} = 10\%$$

$$\text{छुट रकम} = \text{रु. } 1500 \text{ को } 10\% = \frac{1500 \times 10}{100} = \text{रु. } 150$$

$$\text{त्यस कारण, छुटपछि को रकम} = \text{रु. } 1500 - \text{रु. } 150 = \text{रु. } 1350$$

$$\text{VAT} = 13\%$$

$$\text{अब, VAT रकम} = \text{रु. } 1350 \text{ को } 13\%$$

$$= \frac{1350 \times 13}{100} = \text{रु. } 175.50$$

$$\text{अब रेडियोको विक्रय मूल्य} = \text{रु. } 1350 + \text{रु. } 175.50 = \text{रु. } 1525.50$$

त्यसकारण उक्त रेडियो सेट किन्न रु. 1525.50 तिर्नुपर्दै ।

नोट : छुटलाई अद्वित मूल्य (M.P) बाट घटाइन्छ भने, VAT लाई विक्रय मूल्य (S.P.) मा जोडिन्छ ।

अभ्यास 16.2

- रु. 210 अद्वित मूल्य भएको किताबमा 12% छुट छ भने सो किताबलाई कति तिर्नुपर्ला ?
- एउटा ज्याकेटको अद्वित मूल्य रु. 2250 छ । यदि पसलेले उक्त ज्याकेटमा 8% छुटमा विक्री गर्दै भने उक्त ज्याकेट किन्नका लागि कति रुपियाँ तिर्नुपर्ला ?
- तलका वस्तुहरूको वास्तविक मूल्य पत्ता लगाऊ :

वस्तु	अद्वित मूल्य (MP)	छुट
दराज	रु. 9950	12%
कम्प्युटर	रु. 25,500	8%
घडी	रु. 1250	5%
क्याल्कुलेटर	रु. 1500	7%

- यदि 10% छुटमा किन्दा एउटा रड्गिन टिभी सेटलाई रु. 13950 पच्यो भने सो TV सेटको अद्वित मूल्य कति होला, पत्ता लगाऊ ।
- एउटा आइरनको अद्वित मूल्य रु. 500 छ । पसलेले उक्त आइरनलाई रु. 460 मा विक्री गर्दा उसले कति प्रतिशत छुट दियो, पत्ता लगाऊ ।

6. तलका वस्तुहरूको अङ्गकित मूल्य पत्ता लगाऊ :

वस्तु	छुट	छुटपछिको मूल्य वा वास्तविक मूल्य
(क) स्याउ	3%	रु. 116.40 प्रति कि.ग्रा.
(ख) आलू	4%	रु. 144 प्रति धार्नी
(ग) दाल	7%	रु. 186 प्रति 2kg
(घ) च्याउ	9%	रु. 409.50 प्रति kg

7. तलका वस्तुहरूको छुट प्रतिशत पत्ता लगाऊ :

वस्तु	अङ्गकित मूल्य	छुटपछिको मूल्य
(क) मोबाइल	रु. 7,000	रु. 6440
(ख) रेडियो	रु. 1160	रु. 1044
(ग) टि.भी.	रु. 6400	रु. 6080
(घ) हिटर	रु. 5950	रु. 5355

8. 14% छुटमा किन्दा एउटा स्विटरलाई रु. 1075 पच्यो भने सो स्विटरको अङ्गकित मूल्य कति होला ?
9. एउटा टर्चलाइटको क्रय मूल्य रु. 1400 छ। त्यस टर्चको अङ्गकित मूल्य क्रय मूल्यको 40% ले बढी छ। यदि पसलेले उक्त टर्चलाई 20% छुटमा बेच्यो भने,
 - (क) उक्त टर्चको अङ्गकित मूल्य कति होला ?
 - (ख) क्रेताले कति रुपियाँ छुट पायो ?
 - (ग) क्रेताले कति रुपियाँमा उक्त टर्च किन्यो ?
 - (घ) पसलेले उक्त टर्चबाट कति रुपियाँ नाफा गच्यो ? पत्ता लगाऊ।

10. तलका वस्तुहरू किन्दा तिर्नुपर्ने बिल रकम पत्ता लगाऊ :

वस्तु	अङ्गकित मूल्य	छुट	मू.अ.क.
(क) विद्युतीय जग	रु. 980	5%	13%
(ख) टि.भी. सेट	रु. 22,500	11%	13%
(ग) मोबाइल फोन	रु. 6,800	14%	13%
(घ) कम्प्युटर	रु. 10,500	13%	13%

11. रु. 1600 को विद्युतको बिलमा 3% छुट लिई 13% मू.अ.क. जोड्दा जम्मा कति तिर्नुपर्ला ?
12. प्रति व्यक्ति 200 को 6 जनाको जम्मा बिलमा 8% छुटपछि 13% VAT जोड्दा कति रकम तिर्नुपर्छ ?
13. रु. 4500 अङ्गकित मूल्य भएको साइकललाई 13% छुटपछि 13% मू.अ.क. तिर्दा कति रुपियाँ पर्ला ?

पाठ
17

ऐकिक नियम (Unitary Method)

17.0. पुनरब्लोकन (Review)

तलको तालिका हेराँ र दिइएका प्रश्नहरूका बारेमा छलफल गराँ :

तालिका 1

टिकट सङ्ख्या	12	8	4	6	1
जम्मा मूल्य (रु.)	60	40	20	30	?

प्रश्नहरू

- (क) 12 ओटा टिकटको मूल्य कति रुपियाँ छ ?
- (ख) 6 ओटा टिकटको मूल्य कति छ ?
- (ग) 1 ओटा टिकटको मूल्य कति होला ?
- (घ) टिकट सङ्ख्या र मूल्यविच कस्तो सम्बन्ध रहेको छ ?

तालिका 2

काम पुरा गर्न लाग्ने दिन	2	4	6	8	1
जम्मा कामदार सङ्ख्या	12	6	4	3	?

प्रश्नहरू

- (क) 2 जनालाई काम पूरा गर्न कति दिन लाग्ला ?
- (ख) 6 जनालाई काम पूरा गर्न कति दिन लाग्ला ?
- (ग) 1 जनालाई कति दिन लाग्ला ?
- (घ) कामदार सङ्ख्या र काम पूरा गर्न लाग्ने दिनविच कस्तो सम्बन्ध रहेको छ ?

17.1 प्रत्यक्ष र अप्रत्यक्ष विचरण (Direct and Indirect Variation)

माथिको तालिका 1 बाट टिकटको सङ्ख्या घट्दै जाँदा जम्मा मूल्य पनि घट्दै गएको र टिकट सङ्ख्या बढ्दा जम्मा मूल्य पनि बढेको थाहा पाउन सकिन्छ । त्यसलाई प्रत्यक्ष विचरण भएको मानिन्छ ।

दुइओटा चरहरूमध्ये एउटा चरमा भएको कमी वा वृद्धिले अर्को चरमा पनि त्यही अनुपातमा कमी वा वृद्धि देखिन्छ भने ती चरहरूविचको सम्बन्धलाई प्रत्यक्ष विचरण (direct variation) भनिन्छ ।

त्यस्तै, तालिका न. 2 मा काम गर्ने दिन बढाउदै जाँदा जम्मा कामदार सङ्ख्या घट्दै गएको पाइन्छ । तसर्थ काम गर्ने दिन र कामदारविचको सम्बन्ध विपरीत हुन्छ । त्यसैले काम गर्ने दिन र कामदारविचको सम्बन्ध अप्रत्यक्ष विचरण भएको मानिन्छ ।

दुईओटा चरहरूमध्ये एउटा चरमा कमी वा वृद्धि हुँदा अर्को चरमा त्यही अनुपातमा वृद्धि वा कमी आउँछ भने ती चरहरूविचको सम्बन्धलाई अप्रत्यक्ष विचरण (Indirect Variation) भनिन्छ ।

कुनै एक एकाइ वस्तुको मान पत्ता लगाएर धेरै वा थोरै वस्तुको मान पत्ता लगाउने गणितीय विधिलाई ऐकिक नियम भनिन्छ ।

उदाहरण 1

10 kg स्याउको मूल्य रु. 750 पर्द्ध भने 6kg स्याउको मूल्य कति पर्ला ?

समाधान

स्याउको परिमाण र स्याउको मूल्यमा हेर्दा,

बढ़ी स्याउ भए बढ़ी मूल्य, कम स्याउ भए कम मूल्य

10 kg स्याउको मूल्य रु. 750 पर्छ ।

1 kg स्याउको मूल्य रु. $\frac{750}{10}$ पर्छ । (∴ प्रत्यक्ष विचरण भएकाले परिमाण घटदा मूल्य पनि घट्छ ।
त्यस कारण 750 लाई 10 ले भाग गर्ने ।)

= 5.75

6 kg स्याउको मल्य रु. 75×6

= ₹. 450 पर्द्धा

(प्रत्यक्ष विचरणमा परिमाण बढदा मल्य पनि बढछ ।

त्यस कारण 75 लाई 6 ले गृणा गर्ने ।)

त्यसैले, 6 kg स्याउको मूल्य रु. 450 पर्छ ।

उदाहरण 2

18 दिनमा कुनै काम पूरा गर्न 10 जना कामदार चाहिन्छ । त्यही काम 15 दिनमा पूरा गर्न कति जना थप कामदारको आवश्यकता पर्ला ?

समाधान

यहाँ, काम गर्ने दिन र कामदार सङ्ख्या हेर्दा,

कम दिन भए बढ़ी कामदार चाहिन्छ ।

बढ़ी दिन भए कम कामदार चाहिन्छ ।

अब, 18 दिनमा कुनै काम 10 जनाले पूरा गर्न सक्छन् ।

1 दिनमा कुनै काम 10×18 जनाले पूरा गर्न सक्छन् ।

$$= 180 \quad (\because \text{अप्रत्यक्ष विचरण भएकाले दिन घट्दा कामदार सङ्ख्या बढ्दछ । त्यस कारण } 18 \text{ लाई } 10 \text{ ले गुणा गर्ने ।})$$

$$15 \text{ दिनमा कुनै काम } \frac{180}{15} = 12 \quad (\because \text{अप्रत्यक्ष विचरण भएकाले दिन बढ्दा कामदार सङ्ख्या घट्दछ । त्यस कारण } 180 \text{ लाई } 15 \text{ ले भाग गर्ने ।)$$

$\therefore 12$ जनाले पूरा गर्न सक्छन् ।

अब, थप कामदार सङ्ख्या $= 12$ जना - 10 जना

$$= 2 \text{ जना}$$

वैकल्पिक तरिका

यस्ता समस्याहरूलाई वैकल्पिक तरिकाबाट अनुपात प्रयोग गरेर पनि समाधान गर्न सकिन्छ ।

उदाहरण 3

7 लिटर पेट्रोलले 112 km यात्रा गर्न पुग्छ भने 12 लिटर पेट्रोलले कति km यात्रा गर्न पुग्ला ?

समाधान

यहाँ,

परिमाण (l)	यात्रा दुरी (km)
7	112
12	x

यहाँ, यात्रा दुरी र परिमाणबिच प्रत्यक्ष विचरण भएकाले यसलाई अनुपातमा निम्नानुसार लेख्न सकिन्छ :

$$\frac{7}{12} = \frac{112}{x} \quad (\text{प्रत्यक्ष विचरणमा परिमाण र यात्रा दुरी समान अनुपातमा घट्ने वा बढ्ने भएकाले अनुपातलाई } \frac{12}{7} = \frac{x}{112} \text{ पनि लेख्न सकिन्छ ।})$$

$$\text{अथवा, } 7x = 112 \times 12$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{112 \times 12}{7}$$

$$= 192 \text{ km}$$

त्यस कारण 12 लिटर पेट्रोलले 192 km यात्रा गर्न पुग्छ ।

उदाहरण 4

20 जना कामदारलाई कुनै काम गर्ने 24 दिन लाग्छ भने 15 जना कामदारलाई कति दिन लाग्ला ?

समाधान

यहाँ,

काम गर्ने दिन	जम्मा कामदार
24	20 जना
x	15 जना

यहाँ, काम गर्ने दिन र कामदार सङ्ख्याबिच अप्रत्यक्ष विचरण छ।

त्यसैले, थोरै दिन भए धेरै कामदार र धेरै दिन भए थोरै कामदार चाहिन्छ।

$$\frac{24}{x} = \frac{15}{20} \quad [\text{अप्रत्यक्ष विचरण भएकाले } \frac{x}{24} = \frac{20}{15} \text{ पनि लेखन सकिन्छ।}]$$

$$\text{अथवा, } 15x = 480$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{480}{15} = 32$$

अतः 15 जनाले काम गर्दा लाग्ने दिन = 32 दिन

उदाहरण 5

4 ओटा कापी र 5 ओटा किताबको जम्मा मूल्य रु. 880 पर्छ। यदि एउटा कापीको मूल्य रु. 60 भए एउटा किताबको मूल्य कति होला ?

समाधान

यहाँ, 4 ओटा कापी र 5 ओटा किताबको जम्मा मूल्य = रु. 880

एउटा कापीको मूल्य = रु. 60

4 ओटा कापीको मूल्य = रु. $4 \times 60 =$ रु. 240

अब, 5 ओटा किताबको मूल्य = जम्मा मूल्य - 4 ओटा कापीको मूल्य

$$= \text{रु. } 880 - \text{रु. } 240 = \text{रु. } 640$$

5 ओटा किताबको मूल्य = रु. 640

$$1 \text{ ओटा किताबको मूल्य} = \text{रु. } \frac{640}{5} = \text{रु. } 128 = \text{रु. } 128$$

अतः एउटा किताबको मूल्य रु. 128 पर्छ।

अभ्यास 17.1

1. 12 ओटा कक्षाकोठा भएको विद्यालयमा जम्मा 300 जना विद्यार्थी क्षमता थियो । यदि 375 जना विद्यार्थी भर्ना भए भने थप कतिओटा कक्षाकोठा चाहिएला ?
2. यदि 4 दर्जन कलमको मूल्य रु. 576 पर्छ भने रु. 228 मा कति ओटा कलम पाइएला ?
3. एक जना धावकले 45 मिनेटमा 18 km दौड पुरा गर्न सक्छ भने 30 km दुरी पार गर्न कति समय लाग्न्ना ? पत्ता लगाऊ ।
4. एउटा मालबाहक ट्रक 48 km प्रति घण्टाले गुड्डा कुनै दुरी 6 घण्टामा पूरा गर्दछ । यदि उक्त ट्रकको गति घटेर 36 km प्रति घण्टा भयो भने उक्त दुरी कति घण्टामा पार गर्ला ?
5. कुनै एउटा काम पूरा गर्न 20 जना कामदारलाई 15 दिन लाग्छ । उक्त काम 12 दिनमा सिध्याउन कति जना कामदार थप्नुपर्ला ?
6. एक किलो पिठोको मूल्य रु. 28 हुँदा एउटा रोटीको तौल 496 ग्राम थियो । यदि पिठोको मूल्य रु. 32 प्रति के.जी. हुँदा रोटीको तौल कति होला ? (मानौँ, रोटीको मूल्य यथावत् रहन्छ ।)
7. कुनै काम पूरा गर्न 12 जनालाई 14 दिन लाग्छ । यदि कामदार थपेर 21 जना बनाइयो भने उक्त काम कति दिनमा सकिएला ?
8. कुनै एउटा व्यारेकमा 200 जना सिपाहीलाई 30 दिन पुग्ने रासन छ । उक्त रासन 40 दिनलाई पुऱ्याउन कति जना सिपाहीलाई अन्यत्र सार्नुपर्ला ?
9. एउटा मोटरसाइकल 50 km प्रति घण्टाका दरले गुड्डा कुनै दुरी पार गर्न 7 घण्टा लाग्छ । यदि उसलाई 5 घण्टामा उक्त दुरी पार गर्नुपर्यो भने उक्त मोटरसाइकलको गति कतिले बढाउनु पर्ला ?
10. 3 ओटा कुर्सी र 4 ओटा टेबलको जम्मा मूल्य रु. 7,540 पर्छ । यदि एउटा कुर्सीको मूल्य रु. 220 पर्छ भने एउटा टेबलको मूल्य पत्ता लगाऊ ।
11. 5 ओटा गाई र 2 ओटा गोरुको जम्मा मूल्य रु. 1,35,000 छ । यदि एउटा गोरुको मूल्य रु. 17,500 भए एउटा गाईको मूल्य कति होला ?

पाठ

18

साधारण ब्याज

(Simple Interest)

18.0 पुनरवलोकन (Review)

तलका वाक्यको अध्ययन गरी दिइएका प्रश्नहरूको उत्तर खोज :

रामले रु. 2500 बैड्कमा राख्दा वार्षिक 10% ब्याजका दरले 2 वर्षपछि रु. 500 थपी जम्मा रु. 3000 प्राप्त गच्छो ।

रामले कति रकम बैड्कमा जम्मा गच्छो, बैड्कको वार्षिक ब्याजका दर कति रहेछ ?

कति वर्षपछि रामले रु. 3000 प्राप्त गच्छो ?

2 वर्षपछि थिएको रकमले के जनाउँछ ?

माथिको वाक्यअनुसार साँवा [Principal (P)] रु. 2500, समय [Time (T)] 2 वर्षसम्म, वार्षिक 10% ब्याजदर [Rate (R)] ले जम्मा गर्दा ब्याज [Interest (I)] रु. 500 प्राप्त भयो र जम्मा मिश्रधन [Amount (A)] रु. 3000 हुन्छ ।

18.1 साधारण ब्याज (Simple Interest)

रु. 100 को 1 वर्षमा 1% का दरले ब्याज रु. 1 हुन्छ ।

रु. 1 को 1 वर्षमा 1% का दरले ब्याज रु. $\frac{1}{100}$ हुन्छ ।

रु. P को T वर्षमा 1% का दरले ब्याज रु. $\frac{P \times T}{100}$ हुन्छ ।

रु. P को T वर्षमा R% का दरले ब्याज रु. $\frac{P \times T \times R}{100}$ हुन्छ ।
 \therefore ब्याज (I) = $\frac{PTR}{100}$ हुन्छ ।

$$\text{त्यस्तै } P = \frac{I \times 100}{T \times R}, R = \frac{I \times 100}{P \times T} \text{ र } T = \frac{I \times 100}{P \times R} \text{ हुन्छ ।}$$

उदाहरण 1

2% वार्षिक ब्याजदरले 3 वर्षमा ब्याज रु. 120 पाउन कति रुपियाँ जम्मा गर्नुपर्ला ?

समाधान

यहाँ, ब्याज दर (R) = 2%

समय (T) = 3 वर्ष

ब्याज (I) = रु. 120

साँवा (P) = ?

$$\text{हामीलाई थाहा छ, } P = \frac{I \times 100}{T \times R} = \text{रु. } \frac{120 \times 100}{3 \times 2} = \text{रु. } 2000$$

= रु. 2000 जम्मा गर्नुपर्छ ।

उदाहरण 2

रु. 1500 लाई 4 वर्षसम्म ब्याजमा लगाउँदा रु. 200 ब्याज पाइन्छ भने ब्याज दर कति होला ?

समाधान

यहाँ, साँवा (P) = रु. 1500

समय (T) = 4 वर्ष

ब्याज (I) = रु. 200

ब्याज दर (R) = ?

$$\begin{aligned}\text{हामीलाई थाहा छ, ब्याज दर (R)} &= \frac{I \times 100}{P \times T} \\ &= \frac{200 \times 100}{1500 \times 4} \\ &= \frac{50}{15} = \frac{10}{3}\% = 3\frac{1}{3}\%\end{aligned}$$

त्यसकारण, ब्याज दर (R) = $3\frac{1}{3}\%$

अन्यात्म 18.1

1. साधारण ब्याज (I) पत्ता लगाऊ :

(क) साँवा = रु. 500 ब्याज दर (R)= 3% समय = 3 वर्ष

(ख) साँवा = रु. 9500 ब्याज दर (R) = $\frac{11}{2}\%$ समय = 2 वर्ष

(ग) साँवा = रु. 12600 ब्याज दर (R) = $\frac{15}{2}\%$ समय = 4 महिना

(घ) साँवा = रु. 9990 ब्याज दर (R) = $\frac{24}{5}\%$ समय = 1 महिना

2. समय (T) पत्ता लगाऊ :

(क) साँवा = रु. 1260 ब्याज दर (R) = 5% ब्याज = रु. 378

(ख) साँवा = रु. 1250 ब्याज दर (R) = 13% ब्याज = रु. 650

(ग) साँवा = रु. 4500 ब्याज दर (R) = 4% ब्याज = रु. 900

(घ) साँवा = रु. 2400 ब्याज दर (R) = $\frac{25}{3}\%$ ब्याज = रु. 350

3. ब्याज दर (R) पत्ता लगाऊ :

(क) साँवा = रु. 1460 समय (T)= 30 महिना ब्याज = रु. 292

(ख) साँवा = रु. 7,200 समय (T)= 5 वर्ष ब्याज = रु. 1080

(ग) साँवा = रु. 6,000 समय (T)= 3 वर्ष 6 महिना ब्याज = रु. 1155

(घ) साँवा = रु. 2,160 समय (T)= 4 वर्ष ब्याज = रु. 648

4. साँवा पत्ता लगाऊ :

(क) ब्याज दर (R) $\frac{24}{5}\%$ समय (T)= 1 महिना ब्याज = रु. 39.96

(ख) ब्याज दर (R) $6\frac{2}{3}\%$ समय (T)= 5 वर्ष ब्याज = रु. 400

(ग) ब्याज दर (R) $4\frac{1}{6}\%$ समय (T)= 15 वर्ष ब्याज = रु. 2062.50

(घ) व्याज दर (R) = 9%

समय (T)= 9 वर्ष

$$\text{ब्याज} = \text{रु. } 810$$

- मन्जुले वार्षिक 7% का दरले व्याज पाउने गरी रु. 3500 नेपाल बैंक लिमिटेडमा जम्मा गरिन् भने 4 वर्षपछि उनले कति व्याज पाउँछिन्, पत्ता लगाऊ ।
 - माइला दाइले वार्षिक 6.6% व्याज दरमा बैंकबाट रु. 18000 ऋण लिए भने 30 महिनापछि उनले बैंकमा कति व्याज बुझाउनुपर्णा, पत्ता लगाऊ ।
 - काजीले राष्ट्रिय वाणिज्य बैंकबाट 4 वर्षपछि रु. 550 व्याज प्राप्त गर्न चाहन्छ । उसले अहिले 5.5% व्याज दरमा कति रकम जम्मा गर्नुपर्णा, पत्ता लगाऊ ।
 - विनालाई रु. 7600 बैंकमा राखे बापत बैंकले 3 वर्षपछि रु. 1254 व्याज दियो भने व्याज दर कति रहेछ, पत्ता लगाऊ ।
 - रु. 12, 000 लाई बैंकमा $\frac{25}{2}\%$ व्याजदरले राख्दा कति वर्षमा साँचा बराबर व्याज हुन्छ ?
 - 7 वर्षपछि व्याज रु. 4200 पाउनका लागि 6% व्याज दरमा अहिले कति रकम जम्मा गर्नुपर्णा ?
 - 10% व्याज दरले रु. 1080 को 4 वर्षमा कति व्याज आउला र कति वर्षमा रु. 900 को 12% का दरले उत्तिनै व्याज आउँछ ?

18.2. मिश्रधन (Amount)

रोजिनाले बैडकमा रु. 10000 जस्ता गर्दा 3 वर्षपछि जस्ता रु. 12100 प्राप्त गरिन्। यसमा जस्ता रकम भन्नाले के बफिन्छ, साथीहरूबिच छलफल गरी लेख ।

निश्चित समयपश्चात् कुनै पनि साँवा रकममा व्याज थप गरी एकमुष्ट प्रदान गरिने रकमलाई मिश्रधन भनिन्छ । यसलाई A ले जनाइन्छ ।

मिश्रधन [Amount (A)] = साँवा [Principal (P)] + ब्याज [Interest (I)] हुन्छ ।

अर्थात्, मिश्रधन = साँवा + व्याज

$$\text{हामीलाई थाहा छ} \quad I = \frac{PTR}{100} \dots\dots\dots(ii)$$

(i) र (ii) लाई मिलाउँदा,

$$A = P + \frac{PTR}{100}$$

$$A = P \left(1 + \frac{TR}{100} \right) \text{ हुन्छ } ।$$

$$\text{अथवा, } A = P \left(1 + \frac{TR}{100} \right)$$

$$\text{अथवा, } A = P \left(\frac{100+TR}{100} \right)$$

$$\text{अथवा, } Ax100 = P(100+TR)$$

$$\text{अथवा, } P = \left(\frac{A \times 100}{100 + TR} \right) \text{ हुन्छ } ।$$

$$\text{अतः सावा (P)} = \frac{A \times 100}{100 + TR}$$

उदाहरण 1

वार्षिक 5.5% ब्याज दरले रु. 7500 जम्मा गर्दा 42 महिनापछि जम्मा कति रकम प्राप्त होला, पत्ता लगाऊ ।

समाधान

$$\text{यहाँ, ब्याजदर (R) = 5.5\%}$$

$$\text{सावा (P) = रु 7500}$$

$$\text{समय (T) = 42 महिना} = \frac{42}{12} \text{ वर्ष} = \frac{7}{2} \text{ वर्ष}$$

$$\text{मिश्रधन (A) = ?}$$

$$\text{हामीलाई थाहा छ, मिश्रधन (A) = } P \left(\frac{100+TR}{100} \right)$$

$$= 7500 \left(\frac{100 + 5.5 \times \frac{7}{2}}{100} \right)$$

$$= 7500 \left(\frac{200 + 38.5}{200} \right) = 8943.75$$

$$\text{अतः मिश्रधन (A) = रु. 8943.75}$$

उदाहरण 2

कुनै साँवा रकम $\frac{9}{2}\%$ व्याज दरले जम्मा गर्दा 40 महिनापछि जम्मा रकम ₹ 69000 हुन्छ भने कति

रकम जम्मा गरेको होला, पत्ता लगाऊ ।

समाधान

$$\text{यहाँ, } \text{मिश्रधन (A)} = ₹ 69000$$

$$\text{समय (T)} = 40 \text{ महिना} = \frac{40}{12} \text{ वर्ष} = \frac{10}{3} \text{ वर्ष}$$

$$\text{व्याजदर (R)} = \frac{9}{2}\%$$

$$\text{साँवा (P)} = ?$$

हामीलाई थाहा छ, साँवा

$$\begin{aligned} (P) &= \frac{A \times 100}{100 + TR} \\ &= \frac{6900 \times 100}{100 + \frac{9}{2} \times \frac{10}{3}} \\ &= \frac{69100}{\frac{600+90}{6}} \\ &= 60,000 \end{aligned}$$

अतः जम्मा गरेको रकम (P) = ₹. 60000

उदाहरण 3

₹. 5,000 लाई 8% व्याजदरमा 2 वर्ष बैडकमा राख्दा आउने व्याजको 5% बैडकलाई आयकर तिर्नुपर्छ भने 2 वर्षपछि जम्मा कति रकम प्राप्त होला ?

समाधान

$$\text{यहाँ, } \text{साँवा (P)} = ₹ 5,000$$

$$\text{समय (T)} = 2 \text{ वर्ष}$$

$$\text{व्याजदर (R)} = 8\%$$

$$\text{मिश्रधन (A)} = ?$$

$$\text{हामीलाई थाहा छ, व्याज I} = \frac{\text{PTR}}{100}$$

$$= \frac{5,000 \times 2 \times 8}{100}$$

$$= ₹. 800$$

$$\text{फेरि, आयकर} = ₹ 800 \text{ को } 5\%$$

$$= \frac{800 \times 5}{100} = ₹ 40$$

$$\text{तसर्थ, शुद्ध व्याज} = ₹. 800 - ₹ 40 = ₹. 760$$

$$\text{अब, मिश्रधन (A)} = P + I$$

$$= ₹. 5,000 + ₹. 760$$

$$= ₹. 5,760$$

अभ्यास 18.2

1. मिश्रधन पत्ता लगाऊ :

(क) साँवा = ₹. 50000 समय = 7 वर्ष ब्याज दर = 3%

(ख) साँवा = ₹. 2160 समय = 4 वर्ष ब्याज दर = $3\frac{1}{2}\%$

(ग) साँवा = ₹. 25,000 समय = 7 महिना ब्याज दर = 126gv%

(घ) साँवा = ₹. 55,500 समय = 2 वर्ष ब्याज दर = 7.5%

(ङ) साँवा = ₹. 524,000 समय = 3 महिना ब्याज दर = 11%

2. ₹. 35000 को 3% ब्याज दरले 54 महिनामा जम्मा किंतु रकम होला, पत्ता लगाऊ ।
3. 4 महिनामा जम्मा रकम ₹ 56610 प्राप्त गर्न 6% ब्याज दरले किंतु रकम जम्मा गर्नुपर्ला ?
4. किंतु रुपियाँ जम्मा गर्दा 5% का दरले $\frac{9}{2}$ वर्षमा जम्मा ₹. 1225 हुन्छ, पत्ता लगाऊ ।
5. 40 महिनामा एकमुष्ट ₹. 2375 प्राप्त गर्न $\frac{15}{2}\%$ ब्याज दरले किंतु रकम जम्मा गर्नुपर्ला ?
6. वार्षिक 10% ब्याज दरले ₹. 5500 को 1 वर्षमा मिश्रधन किंतु हुन्छ, पुनः उक्त मिश्रधनलाई उही ब्याज दरमा जम्मा गर्दा अर्को वर्ष जम्मा रकम किंतु होला ?
7. छिरिडिले वार्षिक 5% ब्याज दरले ₹. 40,000 बैड्कमा वचत गर्दा आउने ब्याजको 5% आयकर तिर्नुपर्छ भने 4 वर्षपछि उसले जम्मा किंतु रकम प्राप्त गर्दा होला ? पत्ता लगाऊ ।
8. ₹. 75,000 को वार्षिक 5.6% ब्याज दरले 6 महिनामा प्राप्त हुने ब्याजमा बैड्कले 5% कर लिन्छ भने 6 महिनापछि एकमुष्ट जम्मा किंतु रकम प्राप्त होला ?
9. ₹. 10,800 को वार्षिक 10% ब्याज दरमा 4 वर्षमा आउने ब्याजको 5% कर तिर्नुपर्छ भने 4 वर्षपछि एकमुष्ट किंतु रकम प्राप्त होला ?
10. करुणाले भैंसीपालनका लागि बैड्कबाट 12% ब्याज दरमा ₹. 200,000 लिइन् । यदि उनले 30 महिनापछि साँवा र ब्याज गरी एकमुष्ट रकम तिरिन् भने जम्मा किंतु रुपियाँ तिरिन् होला ?

पाठ

19

तथ्याङ्क शास्त्र (Statistics)

19.0 पुनरवलोकन (Review)

कक्षा 8 का 40 जना विद्यार्थीहरूले कक्षा 7 को वार्षिक परीक्षामा गणित विषयमा निम्नानुसारको अंडक प्राप्त गरे :

40,	45,	49,	53,	56,	45,	40,	53,	65,	73,
49,	75,	83,	89,	92,	48,	73,	45,	63,	75,
73,	94,	92,	90,	89,	45,	82,	75,	73,	65,
40,	49,	56,	60,	65,	60,	63,	73,	82,	48

माथिको प्राप्ताङ्कलाई तलको जस्तै तालिका बनाएर भर र तालिका पूरा गर :

प्राप्ताङ्क	मिलान चिह्न	बारम्बारता	सञ्चित बारम्बारता
40		3	3
45		4	3+4=7
49		3	7+3=10
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

अब माथिको तालिकालाई कस्तो तालिका भनिन्छ, साथीहरूबिच छलफल गरी उत्तर लेख ।

माथिको तालिकालाई बारम्बारता तालिका भनिन्छ । यसका बारेमा हामीले कक्षा 7 मा नै अध्ययन गरिसकेका छौँ । यसरी निश्चित नियमअनुसार तथ्याङ्कहरूको बारम्बारतासहित प्रस्तुत गरिन्छ भने त्यसलाई खण्डित श्रेणी (discrete series) भनिन्छ । अब हामी यस्ता तथ्याङ्कहरूको मध्यक, मध्यिका, रित र विस्तारका बारेमा अध्ययन गर्दौँ ।

19.1 मध्यक (Mean)

क्रियाकलाप 1. सर्वप्रथम तिमीहरू प्रत्येकले आफूले कक्षा 7 मा प्राप्त गरेका सबै विषयको प्राप्ताङ्क तलको तालिकामा भर :

विषय	गणित	विज्ञान	सामाजिक	अंडग्रेजी	नेपाली	कम्प्युटर	नैतिक
प्राप्ताङ्क							

अब सबै प्राप्ताङ्कको योगफल निकाल र त्यसलाई जम्मा विषय सङ्ख्याले भाग गर ।

त्यसरी प्राप्त हुने भागफल नै मध्यक प्राप्ताङ्क हुन्छ । यसलाई औसत (average) वा अंक गणितीय मध्यक (arithmetic mean) पनि भनिन्छ । यसलाई (\bar{x}) (*x bar*) ले जनाइन्छ र सूत्रमा लेख्दा,

$$\text{मध्यक } \bar{x} = \frac{\text{जम्मा तथ्याङ्कको जोड}}{\text{तथ्याङ्कहरूको संख्या}} = \frac{\sum x}{N} \text{ लेखिन्छ ।}$$

जहाँ, N ले जम्मा तथ्याङ्कहरूको सङ्ख्या जनाउँछ र \sum ले योगफल जनाउँछ ।

उदाहरण 1

तलका तथ्याङ्कहरूबाट अंक गणितीय मध्यक पत्ता लगाऊ :

4, 12, 13, 21, 12, 12, 10

समाधान

यहाँ, $\sum x = 4 + 12 + 13 + 21 + 12 + 12 + 10 = 84$ र $N = 7$

$$\therefore \text{मध्यक } \bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{84}{7} = 12$$

उदाहरण 2

कक्षा 8 का 25 जना विद्यार्थीले दिएको 20 पूर्णाङ्कको त्रैमासिक परीक्षामा प्राप्त गरेका प्राप्ताङ्कहरू निम्नानुसार छन् :

7, 8, 9, 6, 10, 5, 8, 9, 12, 7, 8, 11, 14, 11, 12, 12, 13, 14, 12, 13, 12, 11, 7, 8, र 11. यी आँकडाहरूलाई बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गरी मध्यक पत्ता लगाऊ :

प्राप्ताङ्क (x)	मिलान चिह्न	बारम्बारता (f)	$f \times x$
5		1	$5 \times 1 = 5$
6		1	$6 \times 1 = 6$
7		3	$7 \times 3 = 21$
8		4	$8 \times 4 = 32$
9		2	$9 \times 2 = 18$
10		1	$10 \times 1 = 10$
11		4	$11 \times 4 = 44$
12		5	$12 \times 5 = 60$
13		2	$13 \times 2 = 26$
14		2	$14 \times 2 = 28$
		$N = \text{जम्मा विद्यार्थी} = 25$	$\sum fx = 250$

यहाँ सबै प्राप्ताङ्कको जोड $= \sum f \times x$ हुन्छ । विद्यार्थी सङ्ख्या $N = \sum f$ हुन्छ ।

$$\text{तसर्थ, मध्यक } \bar{X} = \frac{\text{प्राप्ताङ्कहरूको जोड}}{\text{विद्यार्थी सङ्ख्या}} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{250}{10} = 10 \quad \therefore \bar{x} = 10$$

तसर्थ, खण्डित श्रेणीका लागि मध्यक $\bar{x} = \frac{\sum f \times X}{N}$ हुन्छ ।

अभ्यास 19.1

1. तलका तथ्याङ्कहरूको अङ्क गणितीय मध्यक (\bar{x}) पत्ता लगाउ :

- (क) 15, 13, 18, 16, 14, 17, 12
- (ख) 84, 91, 88, 94, 91, 105, 98, 85
- (ग) 45, 35, 37, 32, 47, 38, 39, 36, 34, 37
- (घ) 105, 108, 112, 106, 120, 108, 112, 110, 100

2. तल दिइएको बारम्बारता तालिकाबाट अङ्क गणितीय मध्यक (\bar{x}) पत्ता लगाउ :

(क)	प्राप्ताङ्क	9	10	12	14	16	18
	विद्यार्थी सङ्ख्या	2	2	7	9	8	4

(ख)	उमेर (वर्षमा)	9	10	11	12	13	14	15	16
	विद्यार्थी सङ्ख्या	2	10	4	6	2	5	6	5

(ग)	ज्याला (रु. सयमा)	50	55	60	85	70	75
	कामदार	4	8	7	6	9	6

(घ)	x	5	10	15	20	25	30
	f	6	3	6	7	4	4

(ङ)	x	2	4	6	8	10	12
	f	12	8	9	10	6	5

3. तिमो छिमेकमा भएका 20 परिवारमा कति कति सदस्य छन् सूची तयार पार र परिवारका सदस्य सङ्ख्याको मध्यक पत्ता लगाउ ।

19.2 मध्यिका (Median)

चित्रमा फरक फरक उचाइ भएका पाँच जना विद्यार्थीहरूलाई तिनीहरूको उचाइका आधारमा होचोबाट अग्लोसम्म मिलाएर राखिएको छ । चित्रमा तेस्रो विद्यार्थीलाई आधार मान्दा, त्यो विद्यार्थीभन्दा अगाडि र पछाडि बराबर अथवा $2 \text{ र } 2$ जना विद्यार्थी छन् । तसर्थ, विचमा पर्ने विद्यार्थीको उचाइ वा तेस्रो विद्यार्थीको उचाइ नै ती विद्यार्थीहरूको उचाइको मध्यिका मान हुन्छ । यसरी पाँच जना विद्यार्थीमा तेस्रो विद्यार्थी मध्यिका भयो । तसर्थ $\frac{5+1}{2}$ औं विद्यार्थी वा 3 औं विद्यार्थी मध्यिका मान भयो ।



मध्यीकाले तथ्याङ्कहरूको उचाइ बराबर दुई भागमा विभाजन गर्दछ । तसर्थ, मध्यिका मानबाट तल र माथि दुवैतिर बराबर तथ्याङ्क पर्दछन् । मध्यिकालाई M_d ले जनाइन्छ ।

त्यस कारण मध्यिका (Median) = $\frac{N+1}{2}$ औं पद हुन्छ । अर्थात् $M_d = \frac{N+1}{2}$ औं पद लेखिन्छ ।

फेरि माथिको क्रियाकलापमा हेरौँ । मध्यिका मानबाट तल र माथि बराबर अथवा $2/2$ जना छन् ।

यदि तथ्याङ्कहरूको जम्मा सङ्ख्या जोर छ भने मध्यिका $\frac{N}{2}$ औं र $\frac{N+2}{2}$ औं पदको मध्यक हुन्छ ।

उदाहरण 1

तलको आँकडाहरूबाट मध्यिका पत्ता लगाऊ :

12, 10, 13, 9, 12, 14, 16, 8

समाधान

यहाँ, तथ्याङ्कहरूको बद्दो क्रममा मिलाएर राख्दा,

8, 9, 10, 12, 12, 13, 14, 16

$N=8$

मध्यिका (M_d) = $\frac{N+1}{2}$ औं पद = $\frac{8+1}{2}$ औं पद = 4.5 औं पद

यहाँ तथ्याङ्कहरूको सङ्ख्या 8 अथवा जोर छ । त्यस कारण चौथो र पाँचौ पदको ओसत मान मध्यिका हुन्छ ।

$$\text{मध्यिका} = \frac{\text{चौथो पद} + \text{पाँचौं पद}}{2} \text{ हुन्छ ।}$$

$$M_d = \frac{12+12}{2} = 12 \text{ हुन्छ ।}$$

यदि तथ्याङ्कहरू धेरै दोहोरिएका छन् भने त्यसलाई खण्डित श्रेणीमा वा बारम्बारता तालिकाबाट मध्यिका पत्ता लगाइन्छ । यसलाई तलको उदाहरणबाट हेरौँ :

उदाहरण 2

तलको अँकडाहरूबाट मध्यिका (median) पत्ता लगाऊ :

प्राप्ताइक	18	20	22	25	29	30	32
विद्यार्थी सङ्ख्या	7	9	8	11	5	6	7

समाधान

माथिको तालिकालाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

प्राप्ताइक (x)	बारम्बारता (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f)
18	7	7
20	9	7 + 9 = 16
22	8	16 + 8 = 24
25 ←	11 ←	24 + 11 = 35
29	5	35 + 5 = 40
30	6	40 + 6 = 46
32	7	46 + 7 = 53

$$\text{अब, मध्यिका} = \frac{N+1}{2} = \frac{53+1}{2} = 27 \text{ औं पद हुन्छ।}$$

सञ्चित बारम्बारता तालिकामा 27 औं स्थानको पद सञ्चित बारम्बारता 35 हुने प्राप्ताइकमा पर्छ। 35 भन्दा अधिल्लो सञ्चित बारम्बारता 24 छ, र 27 औं पद 24 भन्दा माथिल्लो सञ्चित बारम्बारतामा पर्छ। तसर्थ, मध्यिका 35 सञ्चित बारम्बारता भएको प्राप्ताइक हो। अतः मध्यिका (M_d) = 25 भयो।

अभ्यास 19.2

1. तल दिइएका तथ्याइकहरूबाट मध्यिका पत्ता लगाऊ :

- (क) 27, 29, 18, 25, 32, 21, 26
- (ख) 34, 46, 49, 38, 56, 86, 68, 35
- (ग) 5.9ft, 5.2ft, 6.1ft, 7.2ft, 6.5ft, 5.4ft
- (घ) 112 kg, 104 kg, 108 kg, 109 kg, 111 kg, 109 kg, 114 kg, 112 kg, 110 kg, 113 kg
- (ङ) 250, 282, 211, 190, 235, 284, 237, 217, 245, 257, 281

2. तलका बारम्बारता तालिकाहरूबाट मध्यिका (M_d) पत्ता लगाऊ :

(क)	प्राप्ताइक	25	30	35	40	45	50	55	60
	विद्यार्थी सङ्ख्या	2	3	6	10	12	13	3	4

(ख)	उमेर	8 वर्ष	10 वर्ष	12 वर्ष	14 वर्ष	16 वर्ष	18 वर्ष
	विद्यार्थी सङ्ख्या	3	5	9	8	3	1

(ग)	x	50	100	150	200	250	300	350
	f	50	22	39	41	38	30	20

(घ)	x	100	200	300	400	500	600	700
	f	8	9	7	15	22	12	10

3. कक्षा 7 को अन्तिम परीक्षामा सम्मिलित जम्मा 25 जना विद्यार्थीमध्ये मध्यिका प्राप्ताङ्क 27 थियो भने मध्यिकाभन्दा धेरै प्राप्ताङ्क भएका विद्यार्थी सङ्ख्या र मध्यिकाभन्दा थोरै अडक प्राप्त गर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।

19.3 रित (Mode)

कक्षा 8 का 10 जना विद्यार्थीहरूको उचाइ यसप्रकार छ ।

4.9 ft, 5 ft, 4.6 ft, 5.2 ft, 4.8 ft, 4.6 ft, 4.6 ft, 4.9 ft, 4.7 ft, 4.5 ft

अब माथिको आँकडामा हेराउँ । 4.6 ft उचाइ सबैभन्दा धेरै विद्यार्थी अर्थात् 3 जना विद्यार्थीहरूको छ । यो नै दिइएका उचाइहरूको रित मान हुन्छ ।

अतः रित (mode) = 4.6 ft

दिइएका तथ्याङ्कहरूमा सबैभन्दा बढी पटक दोहोरिएको तथ्याङ्कलाई रित (mode) भनिन्छ । यसलाई M_o ले जनाइन्छ ।

अर्थात्, खण्डित श्रेणीमा बारम्बारता तालिकामा सबैभन्दा धेरै बारम्बारता भएको तथ्याङ्क नै उक्त तथ्याङ्कको रित (mode) हुन्छ ।

अभ्यास 19.3

1. तलका तथ्याङ्कहरूको रित (Mode) पत्ता लगाऊ :

(क) 2, 3, 3, 2, 4, 5, 6, 3, 3, 5, 5, 4, 3, 2

(ख) 3, 7, 9, 8, 8, 9, 8, 6, 5, 8

(ग) 29 cm, 34 cm, 29 cm, 26 cm, 55 cm, 34 cm, 35 cm, 40 cm, 34 cm, 56 cm

(घ) 120, 125, 130, 125, 120, 135, 120, 140

(ङ) 99 kg, 135 kg, 182 kg, 49 kg, 189 kg, 196 kg, 78 kg, 192 kg, 182 kg

2. दिइएका बारम्बारता तालिकाहरूबाट रित पत्ता लगाऊ :

(क)	प्राप्ताङ्क	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	विद्यार्थी सङ्ख्या	2	6	7	9	11	5	15	2	3
(ख)	ज्याला (रु.)	50	75	100	125	150	175	200	225	
	कामदार सङ्ख्या	8	12	17	29	11	27	20	30	
(ग)	प्राप्ताङ्क	0	5	10	15	20	25	30	35	
	विद्यार्थी सङ्ख्या	2	9	15	9	19	21	30	20	
(घ)	x	10	12	14	16	18	20	22	24	26
	f	7	3	9	8	12	5	9	11	8

19.4 विस्तार (Range)

तलको तालिकामा हेर । त्यहाँ विद्यार्थीहरूको तौल दिइएको छ । तालिकाबाट सबैभन्दा धेरै तौल कति छ पत्ता लगाऊ । साथै सबैभन्दा कम तौल पनि पत्ता लगाऊ ।

विद्यार्थीहरूको तौल
26 kg, 24 kg, 10 kg, 35 kg, 32.5 kg, 29 kg, 30 kg, 42 kg, 42.5 kg, 29 kg, 24.5 kg, 22.5 kg, 42 kg, 50 kg, 50.5 kg, 22 kg, 50 kg

सबैभन्दा बढी तौल =.....kg

सबैभन्दा कम तौल =.....kg

ती तौलबिचको फरक कति छ, पत्ता लगाऊ ।

त्यो सबैभन्दा ठुलो र सबैभन्दा सानो तथ्याङ्कबिचको फरक नै तथ्याङ्कको विस्तार (range) हो ।

अतः विस्तार (Range) = H - L हुन्छ ।

जहाँ H = सबैभन्दा ठुलो तथ्याङ्क र

L = सबैभन्दा सानो तथ्याङ्क

विस्तारका लागि बारम्बारताले केही असर गर्दैन र बारम्बारता हेरिदैन ।

अभ्यास 9.4

1. तल दिइएका तथ्याङ्कहरूको विस्तार (range) पत्ता लगाऊ :

(क) 3, 9, 7, 5, 20, 21, 20, 23, 11, 12

(ख) 120, 130, 135, 140, 150, 115, 116, 117

(ग) 12 cm, 15 cm, 19 cm, 14 cm, 10 cm, 8 cm, 20 cm, 11 cm

- (घ) 4.9 ft, 5.1 ft, 6.2 ft, 5.5 ft, 4.8 ft, 6.1 ft, 4.7 ft
2. यदि कक्षा 7 का विद्यार्थीहरूले अन्तिम परीक्षामा गणित विषयमा 40 र 80 को बिचमा मात्र अड्क प्राप्त गरे भने उक्त प्राप्ताङ्कहरूको विस्तार कति होला, पत्ता लगाऊ।
 3. तलको आँकडाबाट विस्तार पत्ता लगाऊ :

ज्याला (रु.)	500	525	540	560	575	590
कामदार (सङ्ख्या)	20	25	8	15	27	29

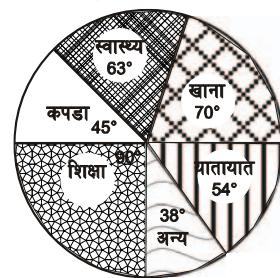
4. तलका आँकडाहरूले शान्ति मा. वि. जुम्लेटीका कक्षा 8 का विद्यार्थीहरूको कक्षा 7 को अन्तिम परीक्षाको प्राप्ताङ्क प्रतिशत जनाउँछ। यी आँकडाहरूलाई बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गरी रित (mode) र विस्तार (range) पत्ता लगाऊ :

कक्षा 8 का विद्यार्थीहरूको प्राप्ताङ्क प्रतिशत	
45,	40,
42,	45,
52,	55,
60,	55,
60,	72,
85,	78,
85,	75,
70,	
72,	75,
75,	82,
82,	75,
55,	60,
72,	75,
80,	85,
72,	82,
60,	

रामको परिवारको मासिक खर्च विवरण

19.5 वृत्तचित्र (Circle Graph/ Pie Chart)

सँगैको चित्रमा रामको परिवारको मासिक खर्च विवरणलाई देखाइएको छ। जसमा खर्चका विभिन्न शीर्षकहरूलाई वृत्तको विभिन्न क्षेत्रक वा सेक्टर (sector) मा देखाइएको छ। कुन शीर्षकमा कति खर्च भएको छ, छलफल गर।



यसरी कुनै पनि तथ्याङ्कलाई एउटा वृत्तको क्षेत्रक वा सेक्टर (sector) मा प्रस्तुत गरिन्छ भने उक्त चित्रलाई वृत्तचित्र (pie chart) भनिन्छ।

वृत्तचित्र बनाउने तरिका

चरण 1

वृत्तको केन्द्रमा दिइएका शीर्षकहरूको सम्बन्धित केन्द्रको कोण पत्ता लगाउने। उदाहरणका लागि माथिको चित्रमा जम्मा रु. 20,000 खर्च छ। शिक्षामा रु. 5,000 खर्च भयो भने,

ऐकिक नियमबाट हेर्दा,

रु. 20000 को 360°

$$\text{रु. } 1 \text{ को } \left(\frac{360}{20000} \right)^{\circ} \text{ रु.}$$

$$\text{रु. } 5000 \text{ को } \left(\frac{360}{20000} \times 5000 \right)^\circ = 90^\circ \text{ हुन्छ।}$$

त्यसै गरी सबै कोणको मान पत्ता लगाउने।

चरण 2. आवश्यकताअनुसारको सुहाउँदो अर्थव्यास भएको वृत्त खिच्ने।

चरण 3. वृत्तमा एउटा अर्धव्यास खिची त्यसलाई आधार मानेर वृत्तको केन्द्रमा चरण 1 मा पत्ता लगाएका कोणहरू खिच्ने।

चरण 4. फरक फरक भागलाई फरक फरक रड लगाउ । अब वृत्तचित्र तयार हुन्छ।

उदाहरण 4

ज्ञानज्योति मा. वि. छहरे पानीका कक्षा 5 देखि कक्षा 10 सम्मका विद्यार्थी सङ्ख्या तलको तालिकामा दिइएको छ । यसलाई वृत्तचित्रमा देखाउ ।

कक्षा	5	6	7	8	9	10	जम्मा
विद्यार्थी सङ्ख्या	42	54	51	48	45	30	270

समाधान

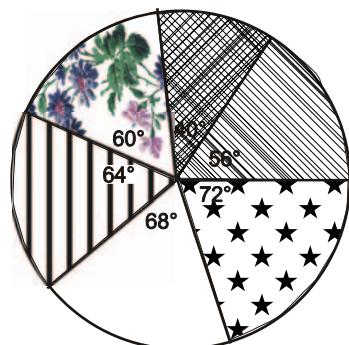
यहाँ जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या = 270 जना

270 जना विद्यार्थी = 360° कोण

$$1 \text{ जना विद्यार्थी} = \left(\frac{360}{270} \right)^\circ \text{ कोण} = \left(\frac{4}{3} \right)^\circ \text{ कोण}$$

कक्षा	विद्यार्थी सङ्ख्या	केन्द्र कोण
5	42	$42 \times \frac{4}{3} = 56^\circ$
6	54	$54 \times \frac{4}{3} = 72^\circ$
7	51	$51 \times \frac{4}{3} = 68^\circ$
8	48	$48 \times \frac{4}{3} = 64^\circ$
9	45	$45 \times \frac{4}{3} = 60^\circ$
10	30	$30 \times \frac{4}{3} = 40^\circ$

ज्ञानज्योति मा.वि.को विद्यार्थी सङ्ख्या



सङ्केत	
कक्षा ५	पट्टी
कक्षा ६	सिर्प
कक्षा ७	पट्टी
कक्षा ८	पट्टी
कक्षा ९	फूल
कक्षा १०	पट्टी

अम्यास्त 19.5

1. कक्षा 8 का विद्यार्थीहरूलाई मन पर्ने क्रियाकलापहरू तलको तालिकामा दिइएको छ । यसलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत तर :

नाटक	कमेडी	नृत्य	खेल	गीत / गजल
7	8	9	10	11

2. तलको तथ्याङ्कलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर :

A+	A	B+	B
40	56	32	16

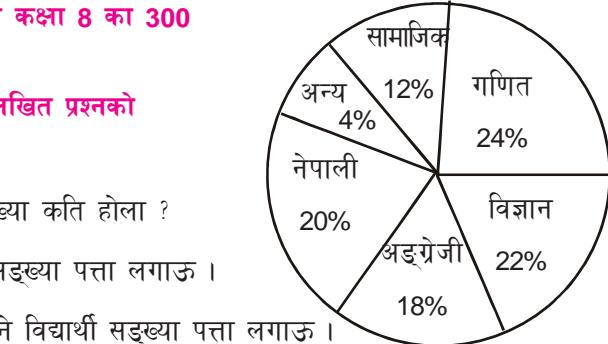
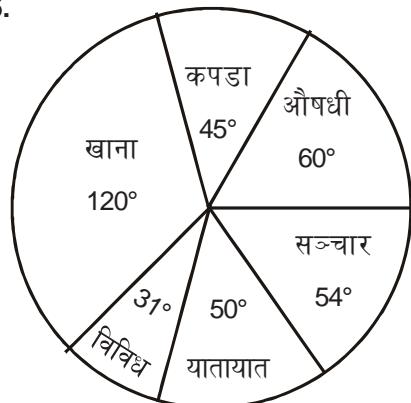
3. तलको तालिकामा पेम्बाको मासिक खर्च विवरण दिइएको छ । यसलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर :

शीर्षक	खाना	स्वास्थ्य	यातायात	सञ्चार	मनोरञ्जन	अन्य
प्रतिशत	40%	15%	12%	10%	13%	10%

4. दिइएको चित्रमा भारतीभवन मा.वि का कक्षा 8 का 300 विद्यार्थीहरूको मन पर्ने विषय दिइएको छ । उक्त वृत्तचित्र प्रयोग गरी निम्नलिखित प्रश्नको उत्तर देउ :

- (क) गणित विषय मनपर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या कति होला ?
- (ख) अङ्ग्रेजी विषय मन पर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।
- (ग) गणित र विज्ञान विषय मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।
- (घ) गणित, विज्ञान र नेपालीबाहेकका विषय मन पराउने विद्यार्थीहरू सङ्ख्या पत्ता लगाऊ ।
- (ड) वृत्तचित्रको उपयुक्त शीर्षक के होला ?

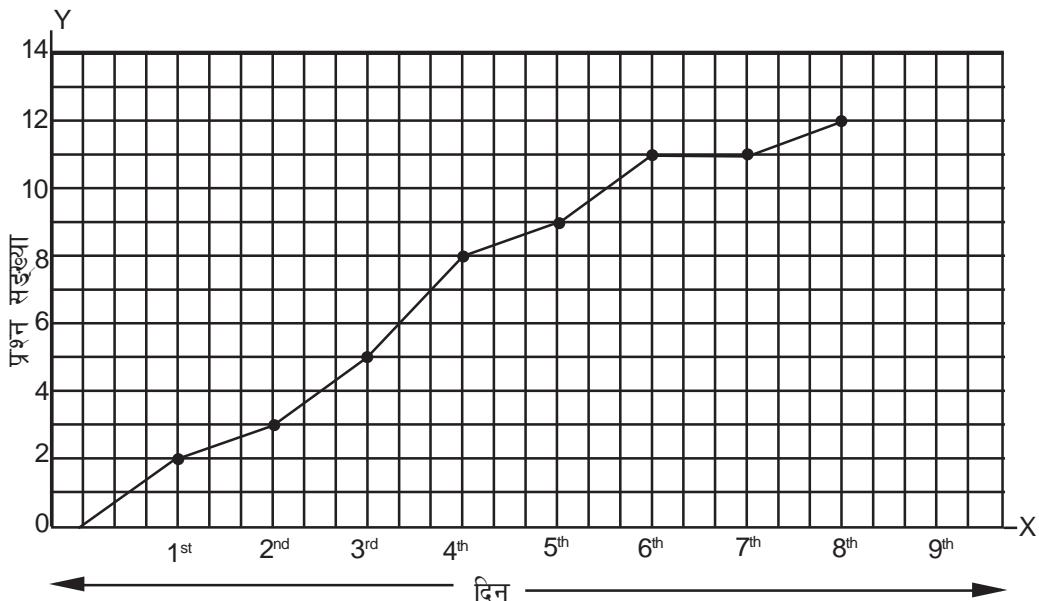
5.



सँगैको चित्रमा रमेशको मासिक खर्च विवरणलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ । चित्रमा हेर । यदि रमेशको परिवारमा खानामा मासिक रु. 3500 खर्च लाग्छ भने तलका प्रश्नहरूको उत्तर लेख :

- (क) औषधीमा कति खर्च लाग्ला ?
- (ख) सञ्चारमा कति खर्च लाग्छ ?
- (ग) रमेशको परिवार मासिक जम्मा खर्च पत्ता लगाऊ ।

19.5 रेखाचित्र (Line Graph)



माथिको चित्रमा हेरौँ। विनुले आइनो उपलब्धि (I,Q) परीक्षणमा 8 दिनसम्म ठिक उत्तर दिएका प्रश्नहरूको विवरण देखाइएको छ। तलका प्रश्नबारे छलफल गरौँ :

- (क) पहिलो दिनमा कतिओटा प्रश्नको ठिक उत्तर दिइन् ?
- (ख) चौथो दिनमा दिएको ठिक उत्तरको सङ्ख्या कति थियो ?
- (ग) कुन दुई दिनमा बराबर सङ्ख्यामा प्रश्नहरूको ठिक उत्तर दिएको पाइयो ?
- (घ) उक्त रेखाको प्रकृति कस्तो देखिन्छ ?

कुनै एउटा समय अन्तरालमा दुई चलहरूको सम्बन्ध देखाउन रेखाचित्रलाई प्रयोग गर्न सकिन्छ र यसलाई स्तम्भ रेखाचित्रको विकल्पका रूपमा लिन सकिन्छ ।

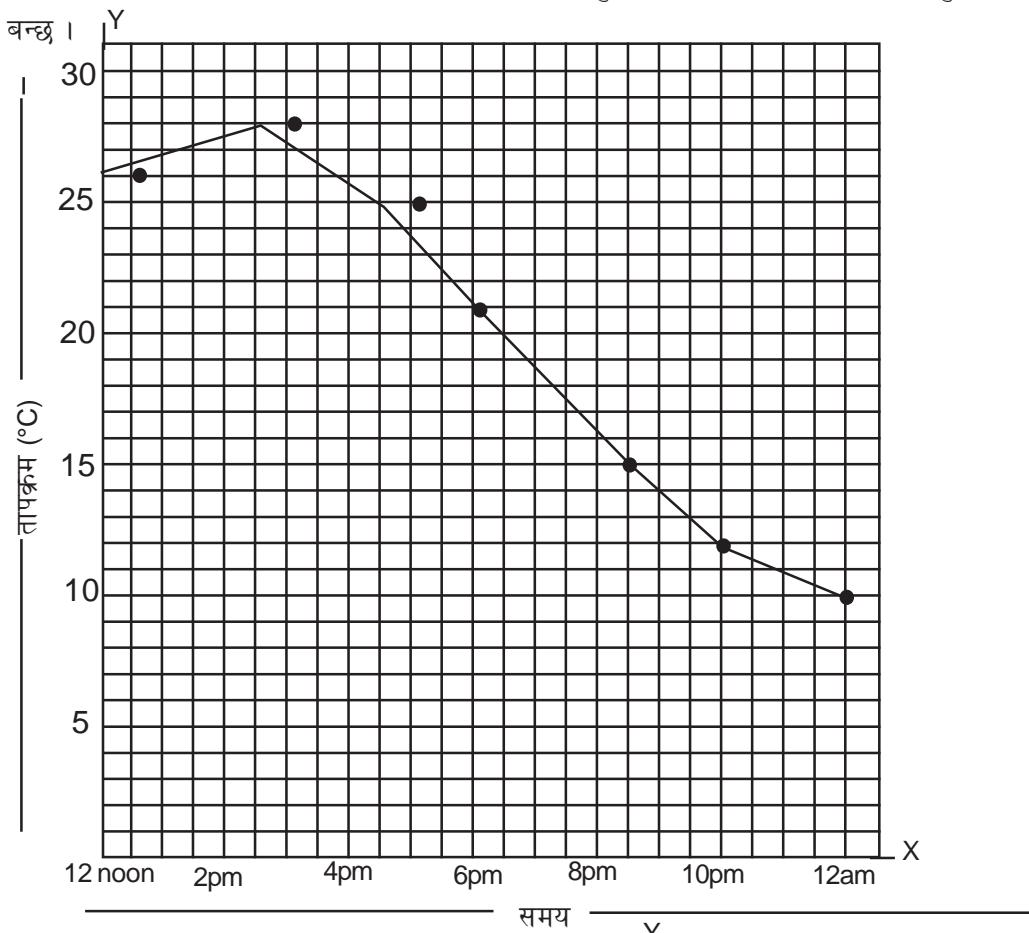
उदाहरण 1

तल दिइएको आँकडालाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

समय	12pm	2pm	4pm	6pm	8pm	10pm	12pm
तापक्रम	26°C	28°C	25°C	21°C	15°C	12°C	10°C

समाधान

यहाँ समयलाई X- अक्षमा र तापक्रमलाई Y- अक्षमा राखी विन्दुहरू पत्ता लगाई रेखा खिच्दा निम्नानुसारको चित्र

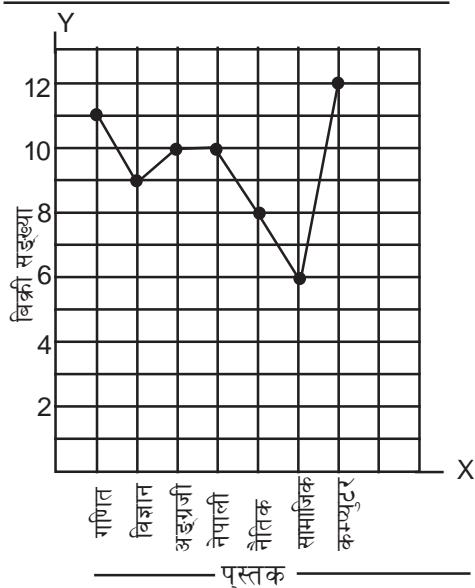


उदाहरण 2

एउटा पुस्तक बिक्रेताले एक दिनमा विक्री गरेका पुस्तकको विवरण सँगैको रेखाचित्रमा दिइएको छ । रेखाचित्रको प्रयोग गरी तलका प्रश्नहरूको उत्तर देउ ।

- सबैभन्दा बढी कुन पुस्तक विक्री भएको छ ?
- कुन दुई पुस्तकहरू बराबर सझ्यामा विक्री भएका छन् ?
- प्रस्तुत रेखाचित्रलाई बारम्बारता तालिकामा देखाऊ ।

हाम्रो गणित, कक्षा ८



समाधान

- (क) सबभन्दा बढी 12 ओटा कम्प्युटर विषयमा किताब विक्री भयो ।
 (ख) अड्डेजी र नेपालीमा पुस्तक बराबर सझ्यामा (10/10) विक्री भए ।

(ग)	पुस्तक	गणित	विज्ञान	अड्डेजी	नेपाली	नैतिक	सामाजिक	कम्प्युटर
	सझ्या	11	9	10	10	8	6	12

अभ्यास 9.6

1. तलका बारम्बारता तालिकाहरूलाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर :

(क)	कक्षा	5	6	7	8	9	10
	विद्यार्थी सझ्या	30	40	35	44	50	45

(ख)	समय	6am	8am	10am	12pm	2pm	6pm
	तापक्रम	10°C	12°C	18°C	25°C	25°C	17°C

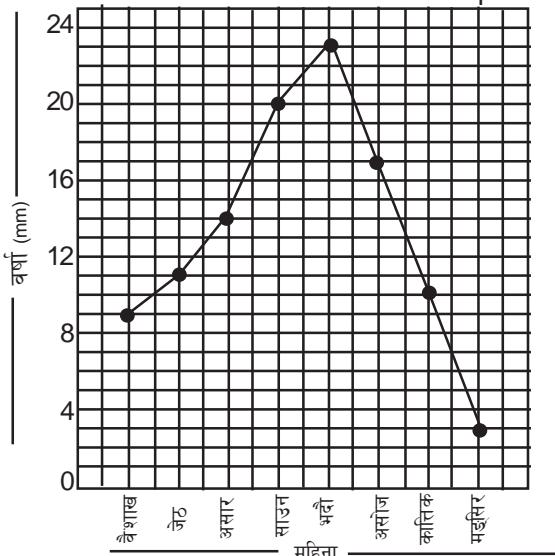
2. हरिसिद्धि प्रा.वि को कक्षा 1 को विगत 6 वर्षको भर्ना दर यस प्रकार छ

वर्ष	2064	2065	2066	2067	2068	2069
भर्ना दर	22	24	21	18	15	12

दिइएको आँकडालाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी रेखाको प्रकृति लेख ।

3. दिइएको रेखाचित्रमा एउटा सहरको वर्षा विवरण देखाइएको छ । यसको अध्ययन गरी तलका प्रश्नहरूको उत्तर लेख :

- (क) सबैभन्दा कम वर्षा कुन महिनामा कति भएको थियो ?
 (ख) सबैभन्दा बढी वर्षा कुन महिनामा कति भएको थियो ?
 (ग) वर्षाको विस्तार पता लगाऊ ।
 (घ) रेखाचित्रलाई बारम्बार तालिकामा प्रस्तुत गर ।



पाठ 20

बीजीय अभिव्यञ्जकहरू (Algebraic Expressions)

20.0 पुनरवलोकन (Review)

एकभन्दा बढी मान हुने अक्षर वा सङ्केतलाई चल (Variable) भनिन्छ भने निश्चित वा एकमात्र मान हुने सङ्केतलाई अचल (constant) भनिन्छ। जस्तै : x चल हो भने 6 अचल हो। चल r अचलबिच गणितीय चार क्रियाहरू ($+, -, \times, \div$) गरी बन्ने अभिव्यञ्जकहरूलाई बीजीय अभिव्यञ्जक (Algebraic Expression) भनिन्छ। अभिव्यञ्जकमा भएको चलको सबभन्दा ठुलो घाताङ्कलाई उक्त अभिव्यञ्जकको डिग्री भनिन्छ। जस्तै : $x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ को डिग्री 3 हुन्छ। बीजीय अभिव्यञ्जकमा भएका पदहरूका सङ्ख्याका आधारमा उक्त बीजीय अभिव्यञ्जकको नामकरण गरिन्छ। यदि बीजीय अभिव्यञ्जकमा एउटा मात्र पद भए उक्त बीजीय अभिव्यञ्जकलाई एक पदीय अभिव्यञ्जक (monomial), दुईओटा पदहरू भए द्विपदीय अभिव्यञ्जक (binomial), तीनओटा पदहरू भए त्यो त्रिपदीय अभिव्यञ्जक (trinomial) हुन्छ। त्यस्तै, दुई वा सोभन्दा बढी पदहरू भएमा बहु पदीय अभिव्यञ्जक (polynomial) भनिन्छ। जस्तै : $x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ बहुपदीय अभिव्यञ्जक हो।

यसरी विभिन्न बीजीय अभिव्यञ्जकहरू तथा तिनीहरूको जोड, घटाउ, गुणन तथा भागका बारेमा हामीले कक्षा 7 मा अध्ययन गरिसकेका छौं। अब हामी बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरणका बारेमा अध्ययन गर्दछौं।

20.1 खण्डीकरण (Factorization)

तलका उदाहरणहरू अध्ययन गर :

$$(क) 7 \times 3 = 21 \quad (ख) x(x+3) = x^2 + 3x \quad (ग) (x-3)(x+3) = x(x+3) - 3(x+3) = x^2 - 9$$

माथिको उदाहरण (क) मा 21 को गुणन खण्ड 7 र 3 हुन् अर्थात 7 र 3 गुणन गर्दा 21 हुन्छ।

त्यस्तै, उदाहरण (ख) र (ग) मा गुणन खण्डहरू के के होलान्, छलफल गर।

कुनै बीजीय अभिव्यञ्जकलाई अन्य रूढ गुणनखण्डहरूको गुणनका रूपमा रूपान्तरण गर्ने प्रक्रियालाई खण्डीकरण (factorization) भनिन्छ।

जस्तै : $7x + x^2 = x(7+x)$ किनकि दुवैमा x साझा छ।

$4x^2 + 8x = 4x(x+2)$ किनकि दुवैमा $4x$ साझा छ।

20.1.1 साभा लिते र पद एकत्रित गरी खण्डीकरण गर्ने ।

कुनै बहुपदीय अभिव्यञ्जकमा साभा गुणनखण्ड भएमा त्यसलाई साभा लिएर खण्डीकरण गरिन्छ ।
जस्तै : $4xy^2 + 2xy = 2x(2x+y)$ हुन्छ ।

त्यस्तै, बहुपदीय अभिव्यञ्जकमा सबै पदहरूमा साभा गुणनखण्ड नभएमा साभा गुणनखण्ड भएका पदहरूलाई एकत्रित गरी साभा लिएर खण्डीकरण गरिन्छ । जस्तै : $2xy + 3 + 6x + y$ लाई पद एकत्रित गर्दा
 $= 2xy + 6x + y + 3 = 2x(y+3) + 1(y+3) = (2x+1)(y+3)$

उदाहरण 1

तलका अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरण गर ।

(क) $4x^2 + 12xy$

समाधान

यहाँ, $4x^2 + 12xy$

$$= 4x \cdot x + 4 \cdot 3 \cdot x \cdot y \quad [\text{दुवैमा } 4x \text{ साभा छ}]$$

$$= 4x(x+3y)$$

(ख) $a^2 - 15b - 5a + 3ab$

समाधान

यहाँ, $a^2 - 15b - 5a + 3ab$

साभा आउने पदहरू मिलाउँदा,

$$a^2 - 5a + 3ab - 15b \quad [\text{पहिलो दुई पदबाट } a \text{ र}]$$

$$= a(a-5) + 3b(a-5) \quad \text{दोस्रो दुई पदबाट } 3b$$

$$= (a+3b)(a-5) \quad \text{साभा लिँदा }]$$

अभ्यास 20.1.1

1. तलका अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरण गर :

(क) $6x+3$

(ख) x^2+4x

(ग) $12a+3b$

(घ) $12p^2+6q^2$

(ड) $14xy+7y$

(च) $x+x^3$

(छ) $12x^2+xy+xz$

(ज) x^3+x^2+x

(झ) $2x^2-2x^3+8x^4$

2. पद एकत्रित गरी खण्डीकरण गर :

(क) $ax+bx+ay+by$

(ख) $2ab+a^2b-2b-ab$

(ग) $x^2y-xy+2x^2y-2xy$

(घ) $x^2 + 3x + xy + 3y$

(ड) $2ab+3a+2b^2+3b$

(च) $a-b+a^2-ab$

(छ) $2a^2 + 5a - 6a - 15$

(ज) $2xa-x^2a+2a-ax$

(झ) $x^2y+4xy - xy^2 - 4y^2$

(ज) $3x(x+y) + 3y(x+y)$

(ट) $2x^2+3ax+2ax+3a^2$

अन्यात्स 20.1.2

1. a^2-b^2 को सूत्र प्रयोग गरी खण्डीकरण गर :

(क) x^2-4

(ख) a^2-4b^2

(ग) $9x^2-y^2$

(घ) $5x^2-20y^2$

(ङ) $13a^2-117b^2$

(च) $25-\frac{1}{9y^2}$

(छ) $121x^2-\frac{1}{y^2}$

(ज) $2p^2-\frac{50}{q^2}$

(झ) $72-2b^2$

(ञ) $121-25y^2$

(ट) $\frac{15}{a^2}-60a^2$

(ठ) $81-64y^2$

(ड) $4x^3y-81xy^3$

(ढ) $169-196z^2$

(ण) ab^3-9a^3b

(त) $\frac{49}{121}x^2-\frac{64}{9}y^2$

(थ) zx^2-zy^2

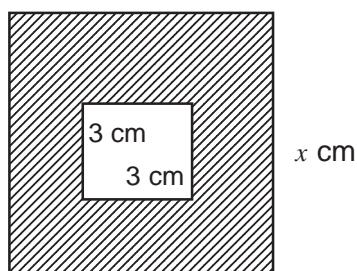
(द) $(x+2)^2-4$

(ध) $256-\frac{x^2}{4}$

(न) $1-\frac{81p^2}{121q^2}$

2. दिइएको चित्रमा छाया परेको भागको क्षेत्रफल कति होला ?

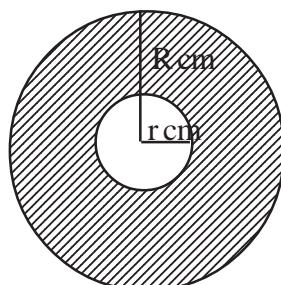
$x \text{ cm}$



3. x मिटर लम्बाई भएको वर्गाकार बगैँचाको विचमा 6 मिटर किनारा भएको वर्गाकार पोखरी छ भने पोखरीबाहेको बगैँचाको क्षेत्रफल कति होला ?

4. सँगैको चित्रमा छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल कति होला ?

(जहाँ वृत्तको क्षेत्रफल = πr^2 छ)



5. प्रश्न न. 4 मा यदि $R = 10 \text{ cm}$ र $r = 3 \text{ cm}$ भए छाया

पारिएको भागको क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

20.1.3 पूर्ण वर्ग हुने त्रिपदीयको खण्डीकरण

$(a+b)^2$ को विस्तारित रूप के हो, $(a-b)^2$ को विस्तारित रूप के हो ?

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{र} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{हुन्छ}।$$

यसका बोरेमा हामीले कक्षा 7 मा अध्ययन गरिसकेका छौं। अब हामी पूर्ण वर्गको खण्डीकरणको अध्ययन गर्दछौं।

उदाहरण 1

पूर्ण वर्ग बनाउन तलका खाली ठाउँमा कति राख्नुपर्ला ?

(क) $x^2 + \dots + 36$

(ख) $49a^2 - \dots + 36b^2$

समाधान

(क) यहाँ,

$$x^2 + \dots + 36$$

$$= x^2 + \dots + (6)^2$$

अब $a^2 + 2ab + b^2$ सँग तुलना गर्दा,

$$a = x, b = 6$$

$$\text{तसर्थ, } 2ab = 2 \cdot x \cdot 6 = 12x$$

$$\text{त्यसकारण, } x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2 \text{ भयो।}$$

निष्कर्ष : $x^2 + \dots + 36$ लाई पूर्ण वर्ग बनाउन

खाली ठाउँमा $12x$ थप्नुपर्छ।

(ख) यहाँ,

$$49a^2 - \dots + 36b^2$$

$$= (7a)^2 - \dots + (6b)^2$$

अब, $a^2 - 2ab + b^2$ सँग तुलना गर्दा

$$a = 7a, b = 6b ; 2ab = 2 \cdot 7a \cdot 6b = 84ab \text{ हुन्छ।}$$

$$\text{अतः } 49a^2 - 84ab + 36b^2 = (7a - 6b)^2$$

निश्कर्ष : $49a^2 - \dots + 36b^2$ लाई पूर्ण वर्ग

बनाउन खाली ठाउँमा $84ab$ थप्नुपर्छ।

उदाहरण 2

खण्डीकरण गर :

(क) $4x^2 + 20xy + 25y^2$

(ख) $36a^2 - 48ab + 16b^2$

समाधान

यहाँ, $4x^2 + 20xy + 25y^2$

$a^2 + 2ab + b^2$ को ढाँचामा लैजाँदा,

$$= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5y + (5y)^2$$

$$= (2x + 5y)^2$$

हाम्रो गणित, कक्षा ८

समाधान

यहाँ, $36a^2 - 48ab + 16b^2$

$a^2 - 2ab + b^2$ को ढाँचामा लैजाँदा

$$= (6a)^2 - 2 \cdot 6a \cdot 4b + (4b)^2$$

$$= (6a - 4b)^2$$

अभ्यास 20.1.3

1. खाली ठाउँमा उपयुक्त पद भरी पूर्ण वर्ग बनाऊ :

(क) $x^2 + \dots + 16$

(ख) $4a^2 + \dots + y^2$

(ग) $p^2 - \dots + 36$

(घ) $9a^2 - \dots + 16b^2$

(ङ) $25p^2 - \dots + 49q^2$

(च) $p^2 + \dots + \frac{4}{p^2}$

(छ) $225x^2 - \dots + 64y^2$

(ज) $1 + \dots + 36y^2$

(झ) $p^2 - \dots + \frac{1}{p^2}$

2. खण्डीकरण गर :

(क) $a^2 + 12a + 36$

(ख) $y^2 + 14y + 49$

(ग) $p^2 + 22p + 121$

(घ) $4a^2 + 20a + 25$

(ङ) $9r^2 + 60r + 100$

(च) $36x^2 + 84x + 49$

(छ) $x^2 - 8x + 16$

(ज) $a^2 - 18a + 81$

(झ) $p^2 - 26p + 169$

(ञ) $9a^2 - 30a + 25$

(ट) $25y^2 - 60y + 36$

(ठ) $49r^2 - 70r + 25$

(ड) $4p^2 + 24pq + 36q^2$

(ढ) $9a^2 + 42ab + 49b^2$

(पर) $\frac{x^2}{16} + xy + 4y^2$

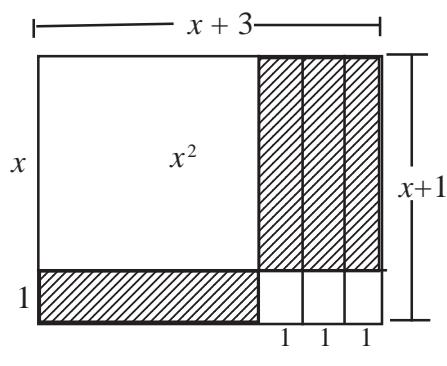
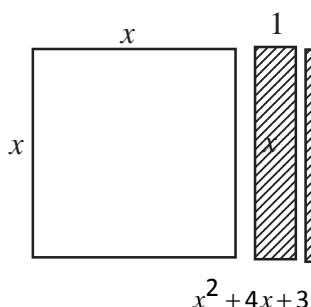
(त) $25a^2 - 40ab + 16b^2$

(थ) $49q^2 - 70qr + 25r^2$

(द) $25x^2 - 2xy + \frac{y^2}{25}$

20.1.4 $x^2 \pm bx + c$ स्वरूपको खण्डीकरण

तलको चित्र हेरौँ :



माथिको चित्रबाट के पायौ छलफल गर ।

$x^2 + xa + xb + ab$ लाई खण्डीकरण गर्दा,

$x(x+a)+b(x+a)$ हुन्छ ।

अतः $x^2 \pm bx \pm c$ को खण्डीकरण गर्दा c का दुईओटा गुणनखण्ड पत्ता लगाउने। जस्तै : r र s
जसमा $r \pm s = b$ र $r \times s = c$ हुनुपर्छ ।

उदाहरण 1

खण्डीकरण गर :

(क) $x^2 + 12x + 32$

(ख) $x^2 - 5x - 24$

समाधान

(क) यहाँ, $x^2 + 12x + 32$

$$= x^2 + (8+4)x + 32$$

$$= x^2 + 8x + 4x + 32$$

$$= x(x+8) + 4(x+8)$$

$$= (x+4)(x+8)$$

$r \times s = 32$	$r + s = 12$
32×1	$32 + 1 \neq 12$
16×2	$16 + 2 \neq 12$
8×4	$8 + 4 = 12$

(ख) यहाँ, $x^2 - 5x - 24$

$$= x^2 - 8x + 3x - 24$$

$$= x(x-8) + 3(x-8)$$

$$= (x-8)(x+3)$$

$r \times s = -24$	$r - s = -5$
24×-1	$24 + (-1) \neq -5$
-24×1	$-24 + 1 \neq -5$
12×-2	$12 + (-2) \neq -5$
-12×2	$12 + 2 \neq -5$
8×-3	$8 + (-3) \neq -5$
-3×8	$-8 + 3 = 5$
6×-4	$6 + (-4) \neq -5$

अभ्यास 20.1.4

1. खण्डीकरण गर :

(क) $x^2 + 4x + 3$

(ख) $a^2 + 7a + 6$

(ग) $m^2 - 4m - 5$

(घ) $x^2 - 11x - 26$

(ङ) $x^2 + 7x - 30$

(च) $y^2 - y - 30$

(छ) $p^2 - 8p - 33$

(ज) $a^2 + 14a + 48$

(झ) $x^2 + 10x + 24$

(ञ) $x^2 + 11x - 26$

(ट) $x^2 - 14x + 24$

(ठ) $x^2 - 2x - 15$

(ड) $x^2 + 2x - 15$

(ढ) $x^2 - 6x + 8$

(ण) $a^2 - 13a - 48$

(त) $a^4 + 12a^3 + 32a^2$

(थ) $x^3 + 12x^2 + 11x$

(द) $4x^3 - 8x^2 - 12x$

20.1.5 $ax^2 \pm bx \pm c$ स्वरूपको खण्डीकरण

ax^2+bx+c मा सर्वप्रथम a र c को गुणा गर्ने र गुणनफलको दुई ओटा गुणनखण्ड पत्ता लगाउने जसको जोड वा घटाउ b हुन्छ । त्यसलाई तलको तालिकाबाट देखाउन सकिन्छ :

अभिव्यञ्जक			r र s को चिह्न
ax^2+bx+c	+	$r+s = b$	दुवै + ve
ax^2+bx-c	-	$r-s = b$	ठूलो + ve
ax^2-bx+c	+	$-r-s = -b$	दुवै - ve
ax^2-bx-c	-	$-r+s = -b$	ठूलो - ve

उदाहरण 1

खण्डीकरण गर :

(क) $6x^2+17x+12$

(ख) $3x^2-11x-20$

समाधान

यहाँ, $a = 6$, $c = 12$, $b = +17$

$$a.c = 6 \times 12 = 72$$

$$= 6x^2+9x+8x+12$$

$$= 3x(2x+3) + 4(2x+3)$$

$$= (2x+3)(3x+4)$$

समाधान

यहाँ $a = 3$, $b = -11$ र $c = -20$

$$a.c = -60$$

$$= 3x^2-15x+4x-20$$

$$= 3x(x-5)+4(x-5)$$

$$= (3x+4)(x-5)$$

$$-15 \times 4 = -60$$

$$-15 + 4 = -11$$

अभ्यास 20.1.5

खण्डीकरण गर :

(क) $3x^2+5x+2$

(ख) $3x^2-4x+1$

(ग) $7x^2-30x+8$

(घ) $4a^2-8a+3$

(ङ) $15p^2-13p+2$

(च) $12a^2-32a+5$

(छ) $5x^2-14x-3$

(ज) $10x^2-3x-1$

(फ) $15p^2-13p+2$

(ञ) $6b^2-4b-10$

(ट) $21x^2+25x+4$

(ঠ) $12a^2+28ab-5b^2$

(ঢ) $16a^2+24ab+9b^2$

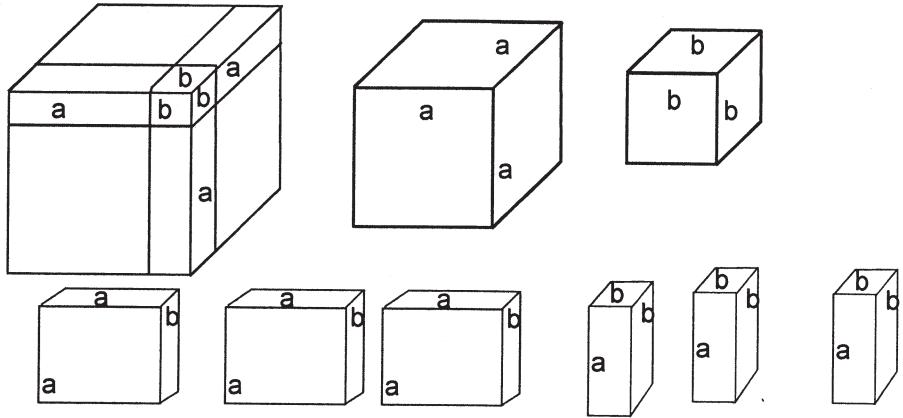
(ঢ) $6x^2+xy-7y^2$

(ণ) $3a^2-ab-10b^2$

(ত) $(x+1)^2-6(x+1)+8$

(থ) $28+27x-x^2$

(দ) $6p^2q+30pq+36q$



1. एउटा साबुन या काठको घनाकार वस्तु लिने जसमा प्रत्येक भुजा $(a+b)$ छ ।
2. चित्रमा देखाए जस्तै उक्त घनाकार वस्तुलाई 8 ओटा टुक्रामा काट्ने ।
3. सबै टुक्राहरूको छुट्टाछुट्टै आयतन पता लगाउने ।

अब घनको आयतन = सबै टुक्राहरूको आयतनको योगफल हुन्छ ।

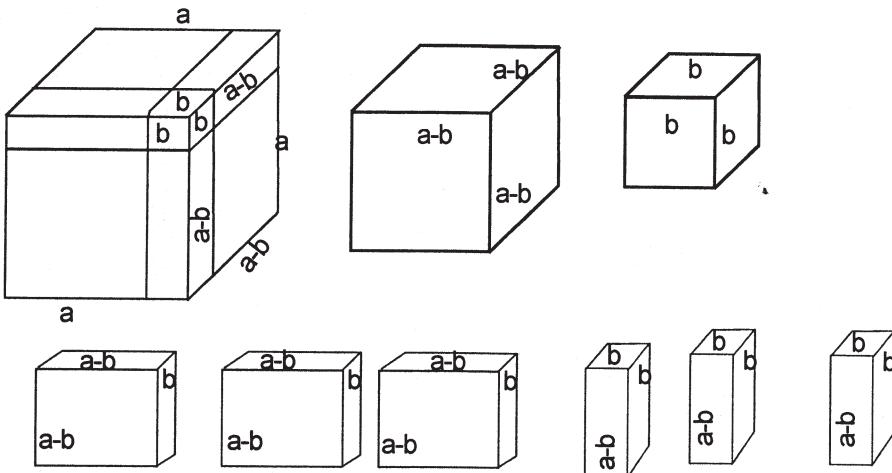
$$\begin{aligned}
 (a+b)^3 &= a^3 + b^3 + a^2b + a^2b + ab^2 + ab^2 + ab^2 \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
 \end{aligned}$$

∴ षड्मुखाको आयतन
 $(V) = l \times b \times h$ हुन्छ ।

$$= a^3 + 3ab(a + b) + b^3 \quad (\text{दुवै पदमा } 3ab \text{ साभा भएकाले})$$

$$\begin{aligned}
 \therefore (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 &= a^3 + 3ab(a + b) + b^3
 \end{aligned}$$

II. $(a-b)^3$ को अवधारणा



- चित्रमा देखाए जस्तै सबै भुजा a भएको एउटा घनाकार वस्तु लेऊ ।
- त्यसलाई प्रत्येक भुजामा b घटाएर रेखा तान र चित्रमा देखाए जस्तै 8 ओटा टुक्रामा काट ।
- सबै टुक्राहरूको छुट्टाछुट्टै आयतन निकाल ।

अब, पूरा घनको आयतन = सबै टुक्राहरूको आयतनको योगफल

$$\begin{aligned}
 a^3 &= (a-b)^3 + (a-b)^2b + (a-b)^2b + (a-b)b^2 + (a-b)b^2 + (a-b)b^2 + b^3 \\
 &= (a-b)^3 + 3(a-b)^2 \cdot b + 3(a-b) \cdot b^2 + b^3 \\
 &= (a-b)^3 + (a^2 - 2ab + b^2) \cdot b + 3(a-b)b^2 + b^3 \\
 &= (a-b)^3 + 3a^2b - 6ab^2 + 3b^3 + 3ab^2 - 3b^3 + b^3 \\
 a^3 &= (a-b)^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3
 \end{aligned}$$

अथवा, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$= a^3 - 3ab(a-b) - b^3 \quad (3ab \text{ दुवैमा साझा भएकाले})$$

$$\begin{aligned}
 (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
 &= a^3 - 3ab(a-b) - b^3
 \end{aligned}$$

फेरि, $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$

अथवा $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ र

$$(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) \text{ हुन्छ } |$$

नोट : 1. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$

$$\begin{aligned}
 &= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 \\
 &= a^3 + b^3
 \end{aligned}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \text{ हुन्छ } |$$

2. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2)$

$$\begin{aligned}
 &= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 \\
 &= a^3 - b^3
 \end{aligned}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \text{ हुन्छ } |$$

उदाहरण 1

घन पत्ता लगाऊ (सूत्र प्रयोग गरेर) :

(क) $(x+2)$

समाधान

यहाँ, $(x+2)$ को घन

$$= (x+2)^3$$

$$= x^3 + 3.x^2.2 + 3.x.2^2 + 2^3$$

$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

(ख) $(x-3)$

समाधान

यहाँ, $(x-3)$ को घन

$$= (x-3)^3$$

$$= x^3 - 3.x^2.3 + 3.x.3^2 - 3^3$$

$$= x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

उदाहरण 2

यदि $(a+b)= 5$ र $a.b = 6$ भए a^3+b^3 को मान कर्ति होला ?

समाधान

यहाँ, $(a+b) = 5$, $ab=6$

$$a^3+b^3 = ?$$

हामीलाई थाहा छ, $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$$= 5^3 - 3.6(5)$$

$$= 125 - 90$$

$$= 35$$

उदाहरण 3

सरल गर :

$$(x+y)^3 - (x-y)^3$$

समाधान

यहाँ, $(x+y)^3 - (x-y)^3$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3)$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3$$

$$= 6x^2y + 2y^3$$

$$= 2y(3x^2 + y^2)$$

अन्वयात्म 20.2

1. सूत्र प्रयोग गरी तलका अभिव्यञ्जकहरूको घन पत्ता लगाऊ :

- | | | | |
|--------------|---------------|--------------|--------------|
| (क) $(x+1)$ | (ख) $(x-3)$ | (ग) $(x+4)$ | (घ) $(2x-5)$ |
| (ड) $(4-3b)$ | (च) $(3a+2b)$ | (छ) $(2a+b)$ | (ज) $(1+3y)$ |

2. तलका घनहरूको विस्तारित रूप लेख :

- | | | | |
|-----------------|-----------------|-------------------|----------------|
| (क) $(3x-2y)^3$ | (ख) $(x^2+y)^3$ | (ग) $(a^2+b^2)^3$ | (घ) $(4a-b)^3$ |
|-----------------|-----------------|-------------------|----------------|

3. तलका अभिव्यञ्जकहरूलाई $(a+b)^3$ को स्वरूपमा लेख :

- | | |
|--------------------------------|------------------------------------|
| (क) $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$ | (ख) $64x^3+240x^2y+300xy^2+125y^3$ |
|--------------------------------|------------------------------------|

4. यदि $(x-a)=6$ र $x \cdot a=10$ भए x^3-a^3 को मान पत्ता लगाऊ :

5. खण्डीकरण गर :

- | | | | |
|-------------|-------------------|------------------|------------------|
| (क) a^3-8 | (ख) $27x^3+64y^3$ | (ग) $125p^3-216$ | (घ) $512+343b^3$ |
|-------------|-------------------|------------------|------------------|

6. यदि $p+\frac{1}{p}=7$ भए $p^3+\frac{1}{p^3}$ को मान पत्ता लगाऊ ।

7. यदि $y+z=4$ र $yz=3$ भए $y^3+z^3=?$

8. यदि $y-\frac{1}{y}=9$ भए $y^3-\frac{1}{y^3}$ को मान करि होला ?

9. यदि $x+\frac{1}{x}=12$ भए $x^3+\frac{1}{x^3}$ को मान पत्ता लगाऊ ।

10. सरल गर :

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| (क) $y^3+z^3-(y+z)^3$ | (ख) $(x+a)^3+(x-a)^3$ |
| (ग) $(p^3-q^3)-(p-q)^3$ | (घ) $(x+y)^3-3xy(x+y)$ |
| (ड) $(x-y)^3+3xy(x-y)$ | (च) $(a+b)^3-a^3-b^3$ |

20.3. वीजीय अभिव्यञ्जकहरूको महत्तम समापवर्तक र लघुत्तम समापवर्त्य (HCF and LCM of Algebraic Expressions)

20.3.1. महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor)

दुई सङ्ख्याहरू 12 र 18 लेऊ । 12 र 18 का गुणनखण्डहरू निकाल ।

12 का गुणनखण्डहरू 1, 2, 3, 4, 6, 12 र

18 का गुणनखण्डहरू 1, 2, 3, 6, 9, 18 हुन्छन् ।

12 र 18 का गुणनखण्डहरूमध्ये सबभन्दा ठुलो साभा गुणनखण्ड कुन हो, त्यो नै 12 र 18 को महत्तम समापवर्तक हो । यहाँ, 12 र 18 को सबैभन्दा ठुलो साभा गुणनखण्ड 6 हो ।

तसर्थ, 12 र 18 को म.स. 6 भयो ।

त्यस्तै, $3x^2y$ र $6xy^2$ मा हेरौँ

$$3x^2y = 3 \cdot x \cdot x \cdot y \text{ र}$$

$$6xy^2 = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot y \text{ हुन्छ ।}$$

यी दुई अभिव्यञ्जकबिचमा साभा गुणनखण्डहरू 3, x र y छन् ।

त्यसकारण, $3x^2y$ र $6xy^2$ को म.स. $3xy$ हुन्छ ।

दिइएका वीजीय अभिव्यञ्जकहरूको सबैभन्दा ठुलो साभा अभिव्यञ्जक (गुणनखण्ड) लाई ती अभिव्यञ्जकहरूको महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor) भनिन्छ । यसलाई छोटकरीमा म.स. (HCF) लेखिन्छ ।

उदाहरण 1

x^2-6x+8 , x^2-4 र x^2+4x+4 को म.स. पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^2+6x+8$

$$= x^2+4x+2x+8$$

$$= x(x+4)+2(x+4)$$

$$= (x+2)(x+4)$$

$$\begin{aligned}
 \text{दोस्रो अभिव्यञ्जक} &= x^2 - 4 \\
 &= x^2 - 2^2 \\
 &= (x-2)(x+2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{तेस्रो अभिव्यञ्जक} &= x^2 + 4x + 4 \\
 &= x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 \\
 &= (x+2)^2 \\
 &= (x+2)(x+2)
 \end{aligned}$$

\therefore म.स. = तीनओटै अभिव्यञ्जकहरूको साफा गुणनखण्ड $= (x+2)$

त्यसकारण, $x^2 - 6x + 8$, $x^2 - 4$ र $x^2 + 4x + 4$ को म.स. $(x+2)$ हुन्छ ।

अभ्यास 20.3.1

1. महत्तम समापवर्तक (म.स) पत्ता लगाऊ :

- | | |
|--|-------------------------------------|
| (क) $4x^2y$ र xy^2 | (ख) $9x^2y^3$ र $15xy^2$ |
| (ग) a^2bc , b^2ac र c^2ab | (घ) $x^2 - 4$ र $3x + 6$ |
| (ङ) $x^2 - y^2$ र $xy - y^2$ | (च) $p^2q - q^2p$, $2p^2 - 2pq$ |
| (छ) $3a + b$ र $15a + 5b$ | (ज) $x^2 + 2xy + y^2$ र $x^2 - y^2$ |
| (झ) $x^2 - 11x + 30$ र $x^2 - 36$ | (झ) $x^3 - 9$ र $x^2 - 6x + 9$ |
| (ट) $x^2 + 16x + 60$ र $x^2 + 20x + 100$ | (ठ) $a^2 + 5a + 6$ र $a^2 + a - 6$ |
| (ड) $x^2 - 11x + 10$ र $x^3 - x$ | (ढ) $a^2 - 2ab + b^2$ र $a^4 - b^4$ |
| (ण) $x^2 - x^2y^2$ र $y^2 - y^4$ | |

2. म.स. निकाल :

- | | |
|---|---|
| (क) $(x-a)$, $x^2 - a^2$ र $x^2 - 2ax + a^2$ | (ख) $x^2 - y^2$, $x^2 - xy$ र $x^2y - y^2x$ |
| (ग) $a^3 - ab^2$, $a^2 + ab$ र $a^2b + ab^2$ | (घ) $x^2 + 5x + 6$, $x^2 + x - 6$ र $x^2 - 9$ |
| (ङ) $a^2 + 2a - 3$, $a^2 - 3a + 2$ र $a^2 - 1$ | (च) $x^2 + 4x + 4$, $x^2 + 7x + 10$ र $x^2 - x - 6$ |
| (छ) $x^3 + 2x^2 - 15x$, $x^2 - 7x + 12$ र $3x^2 - 27$ | (ज) $a^2 - 3a + 2$, $3a^2 - 2a - 8$ र $2a^2 - 9a + 10$ |
| (झ) $a^3 + 6a^2 - 4a - 24$, $a^2 + 5a + 6$ र $a^2 - 4$ | |

20.3.2. लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple)

8 र 10 का अपवर्त्यहरू लेख ।

8 का अपवर्त्यहरू (M_8) = {8, 16, 24, 32, 40, 48,}

10 का अपवर्त्यहरू (M_{10}) = {10, 20, 30, 40, 50, 60,}

अब 8 र 10 का साभा अपवर्त्यहरू कुन कनु हुन्, र सबैभन्दा सानो साभा अपवर्त्य पत्ता लगाऊ ।

त्यो नै 8 र 10 को लघुत्तम समापवर्त्य हो । यहाँ, 8 र 10 को सबैभन्दा सानो साभा अपवर्त्य 40 हो ।

त्यसकारण, 8 र 10 लघुत्तम समापवर्त्य 40 हो ।

फेरि, $8x^2$ र $10x^3$ मा हेराँ ।

8 र 10 को साभा अपवर्त्यहरू {40, 80,}

सबैभन्दा सानो साभा अपवर्त्य 40 हो ।

त्यस्तै, x^2 र x^3 का साभा अपवर्त्यहरू $x^3, x^4, x^5, x^6, \dots$ हुन् र सबैभन्दा सानो साभा अपवर्त्यहरू x^3 हो ।

$8x^2$ र $10x^3$ ले भाग जाने सबैभन्दा सानो अपवर्त्य $40x^3$ हुन्छ ।

त्यस कारण, $8x^2$ र $10x^3$ को ल.स. पनि $40x^3$ हुन्छ ।

अर्को तरिका

$$8x^2 = 2.2.2.x.x$$

$$10x^3 = 2.5.x.x.x$$

साभा गुणनखण्डहरू = $2.x.x. = 2x^2$

बाँकी गुणनखण्डहरू = $2.2.5.x = 20x$

ल.स. = साभा गुणनखण्डहरू x बाँकी गुणनखण्डहरू

$$= 2x^2 \times 20x = 40x^3$$

दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको साभा गुणनखण्डहरू र बाँकी गुणनखण्डहरूको गुणन फल उक्त अभिव्यञ्जकहरूको लघुत्तम समापवर्त्य (lowest common multiple) हो ।

दुई वा दुईभन्दा बढी वीजीय अभिव्यञ्जकहरूको लघुत्तम समापवर्त्य भनेको ती अभिव्यजकहरूले निःशेष भाग जाने सबैभन्दा सानो वीजीय अभिव्यञ्जक हो । यसलाई छोटकरिमा ल.स. (LCM) लेखिन्छ ।

उदाहरण 1

ल.स.निकाल :

$$x^2 - 10x + 25, x^2 - x - 20 \text{ र } x^2 - 25$$

समाधान

$$\begin{array}{ll} \text{पहिलो अभिव्यञ्जक} = x^2 - 10x + 25 & \text{दोस्रो अभिव्यञ्जक} = x^2 - x - 20 = x^2 - 5x + 4x - 20 \\ = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 & = x(x-5) + 4(x-5) \\ = (x-5)(x-5) & = (x+4)(x-5) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{तेस्रो अभिव्यञ्जक} = x^2 - 25 = x^2 - 5^2 \\ = (x-5)(x+5) \end{array}$$

सबै अभिव्यञ्जकमा साभा गुणनखण्ड $= (x-5)$

$$\begin{array}{ll} \text{अब, ल.स.} & = \text{साभा गुणनखण्डहरू} \times \text{बाँकी गुणनखण्डहरू} \\ & = (x-5)(x-5)(x+5)(x+4) \\ & = (x-5)^2(x+5)(x+4) \\ \therefore \text{ ल.स.} & = (x-5)^2(x+5)(x+4) \end{array}$$

अभ्यास 20.3.2

1. ल.स. पत्ता लगाऊ :

- | | |
|---------------------------------|--|
| (क) $2x$ र 4 | (ख) $3xy$ र $6xy^2$ |
| (ग) $5xy$ र $10y^2$ | (घ) $6a^2b$ र $6ab^2$ |
| (ङ) $2a$ र $2a+4$ | (च) $3x^2-3$ र x^2-1 |
| (छ) $x+y$ र x^2+xy | (ज) x^2+4x+4 र x^2+2x |
| (झ) $5x-20$ र x^2-16 | (ञ) p^2-pq र $pq-q^2$ |
| (ट) $3x^3+15x^2$ र $2x^3-50x$ | (ठ) x^3-4x र $x^2+7x+10$ |
| (ड) $3x^2+7x+2$ र $2x^2+3x-2$ | (ठ) $y^2+2y-48$ र $y^2-9y+18$ |
| (ण) $a^2+4ab+4b^2$ र a^2-4b^2 | (त) $9x^2-24xy+16y^2$ र $3x^2-xy-4y^2$ |

2. ल.स. निकाल :

- | | |
|---|--|
| (क) $4x^2y, 6xy$ र $8xy^2$ | (ख) $x^2-2x, x-2$ र $x+2$ |
| (ग) x^2-xy, x^2-y^2 र $xy-y^2$ | (घ) $p^2-q^2, p^2-2pq+q^2$ र p^2q-pq^2 |
| (ङ) a^2-1, a^2+a-2 र a^2-2a+1 | (च) x^2-4, x^2+4x+4 र x^2+3x+2 |
| (छ) $x^2-3x+2, x^2+x - 6$ र $x^2+2x - 3$ | (ज) $4x^2+12xy+9y^2, 4x^2-9y^2$ र $4x^2-12xy+9y^2$ |
| (फ) $6x^3+5x^2-6x, 2x^4+x^3-3x^2$ र $3x^3-5x^2+2x$ | |
| (अ) $x^3 - x^2 - 42x, x^4+4x^3-12x^2$ र $x^2-5x - 14$ | |

20.4. आनुपातिक बीजीय अभिव्यञ्जकहरू (Rational Algebraic Expressions)

20.4.1. आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरू (Rational Expressions)

तलका सदृश्याहरूका बारेमा छलफल गर :

$$4, \frac{4}{3}, \frac{4x}{3y}, \frac{a}{b}$$

पहिलो र दोस्रो सदृश्या आनुपातिक सदृश्या हुन् । त्यस्तै, तेस्रो आनुपातिक हो, जसमा हर र अंश दुवैमा बीजीय अभिव्यञ्जक छ । यसलाई आनुपातिक अभिव्यञ्जक भनिन्छ ।

यदि $\frac{a}{b}$ मा a र b दुवै बीजीय अभिव्यञ्जकहरू हुन् भने $\frac{a}{b}$ लाई आनुपातिक अभिव्यञ्जक (rational expression) भनिन्छ ।

जस्तै : $\frac{3x}{x+1}, \frac{x^2+3x+2}{x+2}, \frac{5}{x+4}$ आदि ।

नोट : यदि आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको हरमा शून्य (0) छ भने अर्थात $\frac{a}{b}$ मा $b=0$ भए उक्त आनुपातिक अभिव्यञ्जक अपरिभाषित हुन्छ ।

जस्तै : $\frac{5}{x-3}$ मा $x=3$ भए, $\frac{y^2}{x-a}$ मा $x=a$ भए, $\frac{5q^2}{p-q}$ मा $p=q$ भए अपरिभाषित हुन्छ ।

आनुपातिक अभिव्यञ्जकको सरल गर्ने तरिका

- हर र अंश दुवैलाई छुट्टाछुट्टै खण्डीकरण गर्ने
- हर र अंशका साफ्ना अभिव्यञ्जक हटाउने र सरल गर्ने

उदाहरण 1

सरल गर :

$$(क) \frac{x^3 + 3x^2}{x^3 + x^2}$$

समाधान

$$\frac{x^3 + 3x^2}{x^3 + x^2}$$

$$= \frac{x^2(x+3)}{x^2(x+1)} \quad (x^2 \text{ साभा गुणन खण्ड})$$

$$= \frac{x+3}{x+1} \quad (x^2 \text{ लाई हटाउँदा})$$

$$(ख) \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$$

$$\text{समाधान} \quad \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{x^2 - 3x - 2x + 6}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{x(x-3) - 2(x-3)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{(x-3)}{x+2}$$

अभ्यास 20.4.1

1. x को मान किए हुँदा तलका अभिव्यञ्जकहरू परिभाषित हुँदैनन् ?

$$(क) \frac{3}{x-11}$$

$$(ख) \frac{x^2 - y}{x - y}$$

$$(ग) \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$$(घ) \frac{5x^3}{4-x}$$

$$(ङ) \frac{3x^2 - 2xy}{x^2 - 16}$$

$$(च) \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 49}$$

2. सरल गर :

$$(क) \frac{3x^2}{4x^3}$$

$$(ख) \frac{5x^2y}{10xy^2}$$

$$(ग) \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$$

$$(घ) \frac{5a^3 - 45a}{4a^2 - 12a}$$

$$(ङ) \frac{(x-3)^3}{2x-6}$$

$$(च) \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$$

$$(छ) \frac{a^2 + 6x + 8}{a^2 - 16}$$

$$(ज) \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - x - 6}$$

$$(झ) \frac{(2x+3)^2}{(4x^2 - 9)}$$

$$(ज) \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 9x + 20}$$

$$(ट) \frac{x^2 + 5x + 6}{(x+3)^2}$$

$$(ठ) \frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 7x + 6}$$

$$(झ) \frac{x^2 - 1}{x^2 - 6x + 5}$$

$$(झ) \frac{3xyz}{3x^2 - 12x}$$

20.4.2 समान हर भएका आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको जोड र घटाउ

(Addition and Subtraction of Rational Expressions having Same Denominator)

[यदि आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको हर उही छ, भने अंशहरूको मात्र जोड वा घटाउ गरिन्छ । हर लाई जस्ताको तस्तै राख्ने र सरल गरी न्यूनतम पदमा लैजाने ।]

उदाहरण 1

सरल गर :

$$(क) \frac{2x}{x+1} + \frac{3x}{x+1}$$

समाधान

$$(\text{यहाँ, } \frac{2x}{x+1} + \frac{3x}{x+1})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2x+3x}{x+1} \\ &= \frac{5x}{x+1} \end{aligned}$$

$$(ख) \frac{3x}{x-3} - \frac{9}{x-3}$$

समाधान

$$\begin{aligned} \text{यहाँ, } &\frac{3x}{x-3} - \frac{9}{x-3} \\ &= \frac{3x-9}{x-3} \\ &= \frac{3(x-3)}{x-3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

उदाहरण 2

सरल गर :

$$(क) \frac{x^2}{x+1} + \frac{2x+1}{x+1}$$

समाधान

$$\text{यहाँ, } \frac{x^2}{x+1} + \frac{2x+1}{x+1}$$

$$(ख) \frac{4a^2}{a+5b} - \frac{(12ab-9b^2)}{a+5b}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^2+2x+1}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)^2}{(x+1)} \\ &= (x+1) \end{aligned}$$

$$\text{यहाँ, } \frac{4a^2}{a+5b} - \frac{(12ab-9b^2)}{a+5b}$$

$$= \frac{4a^2 - (12ab-9b^2)}{(a+5b)}$$

$$= \frac{4a^2 - 12ab + 9b^2}{(a+5b)}$$

$$= \frac{(2a)^2 - 2.2a3b + (3b)^2}{(a+5b)}$$

$$= \frac{(2a-3b)^2}{(a+5b)}$$

अभ्यास 20.4.2

1. सरल गर :

$$(क) \frac{2x}{7} + \frac{x}{7}$$

$$(ख) \frac{3x}{9} - \frac{x}{9}$$

$$(ग) \frac{11}{3x} + \frac{2}{3x}$$

$$(घ) \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+2}$$

$$(ङ) \frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{2}$$

$$(च) \frac{x+y}{a+1} - \frac{y}{a+1}$$

$$(छ) \frac{6}{y-3} - \frac{3y}{y-3}$$

$$(ज) \frac{3x}{x+1} + \frac{3}{x+1}$$

$$(झ) \frac{mn}{m+n} - \frac{mn}{m+n}$$

2. सरल गर :

$$(क) \frac{(x+2)}{(x+3)} + \frac{(x-2)}{(x+3)}$$

$$(ख) \frac{3x+1}{x^2+2} - \frac{x+1}{x^2+2}$$

$$(ग) \frac{y-15}{y^2-9} + \frac{18}{y^2-9}$$

$$(घ) \frac{ax^2+bx}{x+a} + \frac{c}{x+a}$$

$$(ङ) \frac{x^2-4x}{x^2-4} + \frac{4}{x^2-4}$$

$$(च) \frac{y^2+3y}{y+3} + \frac{5y+15}{y+3}$$

$$(छ) \frac{5p^2}{4-p} - \frac{35p-60}{4-p}$$

$$(ज) \frac{p^4}{(p+3)^2} + \frac{81-18p^2}{(p+3)^2}$$

$$(झ) \frac{3x^2}{x+y} + \frac{6xy+3y^2}{x+y}$$

$$(अ) \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} - \frac{2ab}{(a-b)^2}$$

$$(ट) \frac{m^2}{m^2+5m+6} + \frac{2m}{m^2+5m+6}$$

$$(5) \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} - \frac{3x}{x^2 - 4x + 3}$$

$$(6) \frac{x^2}{x-2y} - \frac{4xy}{x-2y} + \frac{4y^2}{x-2y}$$

$$(7) \frac{9a^2}{3a+4b} + \frac{24ab}{3a+4b} + \frac{16b^2}{3a+4b}$$

20.4.3. फरक फरक हर भएका आनुपातिक अभिव्यजकहरूको जोड र घटाउ

(Addition and Subtraction of Rational Expressions of Different Denominators)

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{6} = \text{कति हुन्छ? यसमा } 5 \text{ र } 6 \text{ को ल.स. लिने र सरल गर्ने।}$$

हरमा फरक फरक सङ्ख्या भएका आनुपातिक सङ्ख्याहरूको जोड र घटाउ जस्तै गरी फरक हर भएका आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको जोड र घटाउ गरिन्छ।

हर वा अंशमा नै बीजीय अभिव्यञ्जक भएको आनुपातिक सङ्ख्या आनुपातिक अभिव्यञ्जक हो। यसको जोड र घटाउ पनि आनुपातिक सङ्ख्याको जोड र घटाउ भैं गरिन्छ।

- तरिका :**
- फरक फरक हरको खण्डीकरण गर्ने र ल.स. निकाल्ने
 - प्रत्येक आनुपातिक अभिव्यञ्जकको हरले उक्त ल.स. लाई भाग गर्ने र
 - भागफलले सोही अभिव्यञ्जकको अंशलाई गुणा गरी सरल गर्ने

उदाहरण 1

सरल गर :

$$(क) \frac{x}{2} + \frac{x}{5}$$

$$(ख) \frac{x+3}{x-2} - \frac{x+2}{x-3}$$

समाधान

$$2 \text{ र } 5 \text{ को ल.स. } 2 \times 5 = 10 \text{ हुन्छ।}$$

समाधान

$$(x-2) \text{ र } (x-3) \text{ को ल.स. } (x-2)(x-3) \text{ हुन्छ}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5 \times x + 2 \times x}{10} \\ &= \frac{5x + 2x}{10} \\ &= \frac{7x}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(x-3)(x+3) - (x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{x^2 - 9 - (x^2 - 4)}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{x^2 - 9 - x^2 + 4}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{-5}{(x-2)(x-3)} \quad \left[\begin{array}{l} (x-2)(x-3) / (x-2) = (x-3) \\ (x-2)(x-3) / (x-3) = (x-2) \end{array} \right] \end{aligned}$$

उदाहरण 2

सरल गर : $\frac{2}{x^3 + 3x + 2} + \frac{5x}{x^2 - x - 6}$

समाधान

$$\begin{aligned}
 & \text{यहाँ } \frac{2}{x^3 + 3x + 2} + \frac{5x}{x^2 - x - 6} \\
 & = \frac{2}{(x+2)(x+1)} + \frac{5x}{(x+2)(x-3)} \\
 & = \frac{2(x-3) + 5x(x+1)}{(x+1)(x+2)(x-3)} \\
 & = \frac{2x-6 + 5x^2 + 5x}{(x+1)(x+2)(x-3)} \\
 & = \frac{5x^2 + 7x - 6}{(x+1)(x+2)(x-3)} \\
 & = \frac{5x^2 + 10x - 3x - 6}{(x+1)(x+2)(x-3)} \\
 & = \frac{5x(x+2) - 3(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)} \\
 & = \frac{(5x-3)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{(5x-3)}{(x+1)(x-3)}
 \end{aligned}$$

अभ्यास 20.4.3

1. सरल गर :

(क) $\frac{3}{5} - \frac{x}{3}$

(ख) $\frac{3x}{5} + \frac{2x}{7}$

(ग) $\frac{x^2}{6} + \frac{2x^2}{8}$

(घ) $\frac{7x}{11} - \frac{2}{5}$

(ङ) $x + \frac{x}{7}$

(च) $\frac{a}{6} + \frac{b}{9}$

(छ) $4x + \frac{3x}{7}$

(ज) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}$

(झ) $\frac{2}{a} - \frac{3}{ab}$

(अ) $\frac{3}{7} - \frac{5}{3y}$

(ट) $\frac{x^2}{y} - 4y$

(ठ) $\frac{x}{2-x} - \frac{2-x}{x}$

2. सरल गर :

(क) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$

(ख) $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}$

(ग) $\frac{2}{p-2q} + \frac{1}{p+2q}$

(घ) $\frac{x}{2(x-2)} - \frac{1}{x-2}$

(ङ) $\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b}$

(च) $\frac{3}{x-a} + \frac{4}{x+a}$

(छ) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x-1}$

(ज) $\frac{x+3}{x-5} - \frac{x+5}{x-3}$

(झ) $\frac{x+7}{x-7} - \frac{x}{7-x}$

(अ) $\frac{2x+1}{6} + 2x$

(ट) $\frac{x}{2(x+y)} - \frac{2}{3(x+y)}$

(ठ) $\frac{1}{x+6} - \frac{x}{x+9}$

(झ) $\frac{x+2}{x^2+x} - \frac{3}{x^2-x-2}$

(झ) $\frac{1}{x-3} + \frac{3x-5}{x^2-5x+6}$

(प) $\frac{2x-1}{x^2+4x} - \frac{x-2}{x^2+2x-8}$

(त) $\frac{2a}{a-1} - \frac{a^2+3}{a^2-1}$

(थ) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a-b}{a+b}$

(द) $\frac{x}{x^2+3x+2} - \frac{2}{x^2-1}$

(झ) $\frac{1}{a+2} - \frac{1}{a-2} + \frac{2}{a^2-4}$

(न) $\frac{x^2}{a-b} - \frac{y^2}{a-b} + \frac{z^2}{a^2-b^2}$

(प) $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^2-1}$

(फ) $\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1} + \frac{4a}{a^2+1}$

20.4.4. आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको गुणन र भाग (Multiplication and Division of Rational Expressions)

उदाहरण 1

सरल गर :

(क) $\frac{2x}{2x+y} \times \frac{2xy+y^2}{8y^2}$

(ख) $\frac{x^2-y^2}{xy} \div \frac{x-y}{y}$

समाधान

(क) $\frac{2x}{2x+y} \times \frac{2xy+y^2}{8y^2}$

$$= \frac{2x}{2x+y} \times \frac{y(2x+y)}{8y^2}$$

$$= \frac{2x \times y \times (2x+y)}{8y^2(2x+y)} = \frac{x}{4y}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{ख}) \quad & \frac{x^2 - y^2}{xy} \div \frac{x-y}{y} \\
 &= \frac{x^2 - y^2}{xy} \times \frac{y}{x-y} \\
 &= \frac{(x+y)(x-y)}{xy} \times \frac{y}{x-y} \\
 &= \frac{(x+y)(x-y) \times y}{xy \times (x-y)} \\
 &= \frac{x+y}{x}
 \end{aligned}$$

आनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको गुणन गर्ने तरिका :

- अंश र हरको छुट्टाछुट्टै खण्डीकरण गर्ने
- अंशलाई अंशसँगै र हरलाई हरसँगै गुणन गर्ने
- अंश र हरका साभा अभिव्यञ्जक हटाउने
- उत्तर लघुतम रूपमा लेख्ने

उदाहरण 2

सरल गर :

$$(\text{क}) \quad \frac{x^2 + x - 6}{x+1} \times \frac{2x^2 + x - 1}{x+3}$$

समाधान

$$\begin{aligned}
 \text{यहाँ, } & \frac{x^2 + x - 6}{x+1} \times \frac{2x^2 + x - 1}{x+3} \\
 &= \frac{x^2 + 3x - 2x - 6}{x+1} \times \frac{2x^2 + 2x - x - 1}{x+3} \\
 &= \frac{x(x+3) - 2(x+3)}{x+1} \times \frac{2x(x+1) - 1(x+1)}{x+3} \\
 &= \frac{(x-2)(x+3)}{x+1} \times \frac{(2x-1)(x+1)}{x+3} \\
 &= \frac{(x-2)(x+3) \times (2x-1)(x+1)}{(x+1)(x+3)} \\
 &= (x-2)(2x-1)
 \end{aligned}$$

उदाहरण ३

सरल गर :

$$(क) \frac{a^2 - 25}{a^2 - 16} \div \frac{a+5}{a-4}$$

समाधान :

$$\text{यहाँ, } \frac{a^2 - 25}{a^2 - 16} \div \frac{a+5}{a-4}$$

$$= \frac{a^2 - 25}{a^2 - 16} \times \frac{a-4}{a+5}$$

$$= \frac{a^2 - 5^2}{a^2 - 4^2} \times \frac{a-4}{a+5}$$

$$= \frac{(a+5)(a-5)}{(a+4)(a-4)} \times \frac{a-4}{a+5}$$

$$= \frac{(a+5)(a-5)(a-4)}{(a+4)(a-4)(a+5)} = \frac{a-5}{a+4}$$

$$(ख) \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x - 3} \div \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$$

समाधान :

$$\text{यहाँ, } \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x - 3} \div \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$$

$$= \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x - 3} \times \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

$$= \frac{x^2 - 3x - 3x + 9}{x^2 - 3x + x - 3} \times \frac{x^2 - 2x - x + 2}{x^2 - 3x - 2x + 6}$$

$$= \frac{x(x-3) - 3(x-3)}{x(x-3) + 1(x-3)} \times \frac{x(x-2) - 1(x-2)}{x(x-3) - 2(x-3)}$$

$$= \frac{(x-3)(x-3)}{(x+1)(x-3)} \times \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

भाग गर्ने तरिका :

÷ चिह्नलाई × मा बदल्ने र ÷ पछाडिको भिन्नको हरलाई अंशमा र अंशलाई हरमा लेख्ने ।

जस्तै : $\frac{2}{3} \div \frac{4}{3}$ भए $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ बनाउने

त्यसपछि गुणनका विधिहरू प्रयोग गर्ने

$$= \frac{(x-3)(x-3) \times (x-1)(x-2)}{(x+1)(x-3) \times (x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{x-1}{x+1}$$

अभ्यास 20.4.4

1. सरल गर :

(क) $\frac{x^2}{y} \times \frac{2}{y}$	(ख) $\frac{3x^2}{4y^2} \times \frac{4y}{3x}$	(ग) $\frac{7a^2b}{8c} \times \frac{4c^2}{14ab^2}$
(घ) $\frac{x-y}{x+y} \times \frac{x}{y}$	(ङ) $\frac{a-3}{3} \times \frac{6}{a-3}$	(च) $\frac{x-3}{x+2} \times \frac{(x+2)^2}{(x-3)^2}$

2. सरल गर :

(क) $\frac{x^2}{y^2} \div \frac{x}{y}$	(ख) $\frac{3xy}{4ab} \div \frac{6y}{5b}$	(ग) $\frac{x}{7} \div \frac{x^2}{14}$
(घ) $\frac{6a^2b}{7x^2y} \div \frac{6ab^2}{7y^2}$	(ङ) $\frac{a^2-b^2}{a} \div \frac{a-b}{b}$	(च) $\frac{x^2-1}{y^2} \div \frac{x-1}{y}$

3. सरल गर :

(क) $\frac{x^2-y^2}{x+y} \times \frac{x+y}{(x-y)^2}$	(ख) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} \times \frac{x-y}{x+y}$
(ग) $\frac{x^2-4x+4}{3y-xy} \times \frac{4x-12}{x-2}$	(घ) $\frac{a^2-b^2}{a^2+2a+ab+2b} \times \frac{a+2}{a+3}$
(ङ) $\frac{y^2+10y+24}{y^2+2y-8} \times \frac{y-3}{y+6}$	(च) $\frac{x^2-3x-10}{x^2-5x+6} \times \frac{bx-3b}{cx-5c}$
(क्र) $\frac{x^2-11x+30}{x^2-7x+10} \times \frac{5x-10}{x^2-8x+12}$	(ज) $\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3} \times \frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$
(झ) $\frac{x^2-9}{x^2+4x} \times \frac{x^2+2x-8}{x^2+x-6}$	(ञ) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9} \times \frac{x^2-2x-3}{x^2-3x+2}$

4. सरल गर :

$$(क) \frac{x^2 - y^2}{x+y} \div \frac{x-y}{x+y}$$

$$(ग) \frac{x^2 + 12x + 36}{x^2 - 16} \div \frac{3x + 18}{2x^2 + 8x}$$

$$(घ) \frac{x^2 + 2x - 15}{x-2} \div \frac{3(x^2 + 4x - 5)}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(छ) \frac{xy - x + 2y - 2}{3y + 2x + xy + 6} \div \frac{xy - x + 5y - 5}{x^2 + 8x + 15}$$

$$(झ) \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 14x + 45} \div \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 8x - 9}$$

$$(ख) \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} \div \frac{x-3}{x+3}$$

$$(घ) \frac{3x^2 - 4x - 7}{3x^2 - 7x} \div \frac{x^2 - 1}{x-4}$$

$$(च) \frac{x^2 + 12x + 27}{x^2 + x - 6} \div \frac{x^2 + 4x - 45}{9(x^2 - 4x - 5)}$$

$$(ज) \frac{y^2 + 4y - 12}{y^2 - 5y + 6} \div \frac{y^2 + 3y - 18}{y^2 - 9}$$

$$(झ) \frac{a^2 + 3a + 2}{a^2 - 4a - 12} \div \frac{a^2 - a - 6}{a^2 - 9a + 18}$$

5. सरल गर :

$$(क) \frac{2x}{5y} \times \left(\frac{2y}{5} + \frac{y}{3} \right)$$

$$(ग) \left(\frac{3x}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right) + \frac{3}{x^2 - 1}$$

$$(घ) \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) \times \frac{a^2 - b^2}{4ab}$$

$$(ख) \left(\frac{x}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)} \right) \div \frac{x-1}{x^2 - 1}$$

$$(घ) \frac{x-4}{x+4} \times \frac{x-3}{x+3} \div \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + 7x + 12}$$

पाठ 21

घातांक (Indices)

21.0. पुनरबलोकन (Review)

तलको उदाहरण हेराँ र सिकाँ :

$a \times a \times a \times a$ बराबर कति हुन्छ ?

यहाँ, a लाई a ले 4 पटक गुणन गरिएको छ। तसर्थ, $a \times a \times a \times a = a^4$ मा व्यक्त गर्न सकिन्छ।

यहाँ, a^4 मा a लाई आधार (base) भनिन्छ, भने 4 लाई a को घातांक (index) भनिन्छ।

यसरी, एउटै सङ्ख्या वा चललाई सोही सङ्ख्या वा चलले दुई वा सोभन्दा बढी पटक गुणन गर्दा उक्त गुणनलाई छोटकरीमा लेख्ने सङ्केतलाई घातांक भनिन्छ।

त्यसै गरी a लाई n पटकसम्म गुणन गरेमा, $a \times a \times a \dots \times \dots n \text{ times} = a^n$ हुन्छ।

21.1. घातांकका नियमहरू (Laws of Indices)

(क) एउटै आधार भएका घातांकहरूको गुणन (Multiplication Law of Indices with same base)

$$\text{यहाँ, } x^2 \cdot x^3 = (x \times x) \times (x \times x \times x) = x \times x \times x \times x \times x = x^5 = x^{2+3}$$

तसर्थ, यदि आधार एउटै भए घातांकहरूको गुणन गर्दा आधार उही रहन्छ र घातांक जोडिन्छन्।

त्यस कारण, यदि $x \neq 0$ र m र n धनात्मक पूर्ण सङ्ख्या भएमा $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ हुन्छ।

(ख) एउटै आधार भएमा घातांकहरूको भाग (Division law of Indices with same base)

$$\text{यहाँ, } \frac{x^3}{x^2} = \frac{x \times x \times x}{x \times x} = x \times x \times x = x^3 = x^{5-2}$$

त्यस कारण, यदि आधार एउटै भएमा घातांकहरूको भाग गर्दा आधार उही रहन्छ र भाजकको घातांकलाई भाज्यको घातांकबाट घटाइन्छ। त्यसकारण $x \neq 0$ र $m > n$, m, n दुवै धनात्मक सङ्ख्या भएमा $x^m \div x^n = x^{m-n}$ हुन्छ।

(ग) शून्य घातांक (Law of Zero Index)

तलको उदाहरण हेराँ :

$$\text{यहाँ, } x^2 \div x^2 = \frac{x \times x}{x \times x} = 1 \dots \dots \dots \text{ (a)}$$

त्यस्तै, घाताङ्कको भाग विधिबाट हेर्दा,

$$\frac{x^2}{x^2} = x^{2-2} = x^0 \dots \dots \dots \text{(b)}$$

अब, (a) र (b) बाट हेर्दा $x^0 = 1$

यदि $x \neq 0$ र x को घाताङ्क शून्य (0) छ भने त्यसको मान 1 हुन्छ। त्यस कारण $x^0 = 1$

(घ) ऋणात्मक घाताङ्कको नियम (Law of Negative Indices)

तलको उदाहरण हेर्ने :

$$\text{यहाँ, } x^2 \div x^4 = \frac{x^2}{x^4} = x^{2-4} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{त्यसैगरी, } x^{-3} = \frac{1}{x^3} = x^n \text{ र } x^{-n} = \frac{1}{x^n} \text{ हुन्छ। साथै, } \frac{1}{x^{-n}} = x^n \text{ हुन्छ।}$$

यदि $x \neq 0$ र x^{-m} भए, $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ हुन्छ। त्यसै गरी $x^m = \frac{1}{x^{-m}}$ पनि हुन्छ।

(ङ) घाताङ्कको पनि घाताङ्कहरूको नियम (Law of Index of Indices)

तलको उदाहरण हेर्ने :

$$(x^2)^3 = x^2 \times x^2 \times x^2 \quad (\therefore \text{आधार एउटै छ तसर्थ घाताङ्क जोडिन्छ।})$$

$$= x^{2+2+2} = x^6 = x^{2 \times 3}$$

यदि m र n दुवै पूर्णाङ्क भए र $x \neq 0$ भए

$$\text{त्यस्तै } (x^3)^4 = x^{3 \times 4} = x^{12} \text{ हुन्छ।}$$

$$(x^m)^n = x^{m \times n} = x^{m \cdot n} \text{ हुन्छ।}$$

(च) गुणनको र भागको घाताङ्कको नियम (Law of Indices of Multiplication and Division)

हामीलाई थाहा छ,

$$\begin{aligned} (2a^2)^3 &= 2a^2 \times 2a^2 \times 2a^2 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times a^2 \times a^2 \times a^2 \\ &= 2^3 \times a^{2 \times 3} \\ &= 8 \times a^6 \end{aligned}$$

$$(2a^2)^3 = 2^3 \times a^{2 \times 3} = 8a^6$$

यदि दुईओटा आधारहरूको (गुणन/भाग) को घाताङ्क एउटै छ भने त्यो घाताङ्क दुवैमा छुट्याएर लेख्न सकिन्छ।

$$(xy)^m = x^m \times y^m \quad x, y \neq 0$$

$$(\frac{x}{y})^n = \frac{x^n}{y^n}, \quad y \neq 0$$

उदाहरण 1

घातांकका नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर :

(क) $x^2 \times x^4$

समाधान

यहाँ, $x^2 \times x^4$

$$= x^{2+4}$$

$$= x^6$$

(ख) $3^3 \times 3^2$

समाधान

यहाँ, $3^3 \times 3^2$

$$= 3^{3+2}$$

$$= 3^5$$

$$= 243$$

(ग) $p^3 \times p^4 \times p^{-2}$

समाधान

यहाँ, $p^3 \times p^4 \times p^{-2}$

$$= p^{3+4} \times p^{-2}$$

$$= p^7 \times \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{p^7}{p^2} = p^{7-2} = p^5$$

उदाहरण 2

घातांकका नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर :

(क) $x^5 \div x^3$

समाधान

यहाँ, $x^5 \div x^3$

$$= x^{5-3}$$

$$= x^2$$

समाधान

यहाँ, $8x^3 \div 2x^4$

$$= 2^2 \times x^3 - (-4)$$

$$= 2^2 \times x^{3+4}$$

$$= 4 \times x^7$$

$$= 4x^7$$

समाधान

यहाँ, $x^{n-1} \div x^{2n-3}$

$$= \frac{x^{n-1}}{x^{2n-3}}$$

$$= x^{(n-1)-(2n-3)}$$

$$= x^{n-1-2n+3}$$

$$= x^{-n+2}$$

$$= x^{2-n}$$

उदाहरण 3

घातांकका नियम प्रयोग गरेर सरल गर :

(क) $(x^2 y)^3$

समाधान

यहाँ, $(x^2 y)^3$

$$= x^2y \times x^2y \times x^2y$$

$$= x^2 \times x^2 \times x^2 \times y \times y \times y$$

$$= x^{2 \times 3} y^3$$

$$= x^{2 \times 3} \cdot y^3$$

$$= x^6 y^3$$

(ख) $(3a)^2 \times (2a)^3$

यहाँ, $(3a)^2 \times (2a)^3$

$$= 3a \times 3a \times 2a \times 2a \times 2a$$

$$= 3^2 \times a^2 \times 2^3 \times a^3$$

$$= 9 \times 8 \times a^{2+3}$$

$$= 72a^5$$

(ग) $[3x^2y]^3$

यहाँ, $[3x^2y]^3$

$$= 3^3 x^{2 \times 3} y^3$$

$$= 3^3 \cdot x^6 y^3$$

$$= 27x^6 y^3$$

उदारण 4

सरल गर :

$$(क) \left(\frac{x^2 y}{x y^2} \right)^3$$

समाधान

$$\begin{aligned} \text{यहाँ, } & \left(\frac{x^2 y}{x^2 y^2} \right)^3 \quad \left[\because \left(\frac{x}{y} \right)^m = \frac{x^m}{y^m} \right] \\ & = \frac{(x^2 y)^3}{(x y^2)^3} \quad [\because (x^m)^n = x^{mn}] \\ & = \frac{x^{2 \times 3} y^3}{x^3 y^{2 \times 3}} \\ & = \frac{x^6 y^3}{x^3 y^6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = x^{6-3} \cdot y^{3-6} \quad \left[\because \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \right] \\ & = x^3 y^{-3} \\ & = \frac{x^3}{y^3} \end{aligned}$$

$$(ख) (-2x^3y^3)^2 (x^3y^2)^{-2}$$

समाधान

$$\begin{aligned} \text{यहाँ, } & (-2x^3y^3)^2 (x^3y^2)^{-2} \quad [\because (x^m)^n = x^{mn}] \\ & = (4x^6y^6) \times x^{3 \times -2} \cdot y^{2(-2)} \\ & = 4x^6 \cdot y^6 \cdot x^{-6} \cdot y^{-4} \\ & = 4 \times x^{6-6} \cdot y^{6-4} \\ & = 4x^0 y^2 \\ & = 4 \times 1 \cdot y^2 \quad [\because x^0 = 1] \\ & = 4y^2 \end{aligned}$$

उदाहरण 5

घातांकका नियम प्रयोग गरेर सरल गर :

$$(क) 2x^{2a} \times (x^2 y^2)^{-2}$$

समाधान

$$\begin{aligned} \text{यहाँ, } & 2x^{2a} \times (x^2 y^2)^{-2} \\ & = 2x^{2a} \times x^{2 \times -2} \cdot y^{2 \times -2} \\ & = 2x^{2a} \times x^{-4} \times y^{-4} \\ & = \frac{2x^{2a-4}}{y^4} \end{aligned}$$

$$(ख) 3p^{n-1} q^m \times (2p^{2n+1} q^{-2})$$

समाधान

$$\begin{aligned} \text{यहाँ, } & 3p^{n-1} q^m \times (2p^{2n+1} q^{-2}) \\ & = 3p^{n-1} q^m \times 2 \times p^{2n+1} \times q^{-2} \\ & = 3 \times 2 p^{n-1 + 2n+1} \cdot q^{m-2} \\ & = 6p^{3n} q^{m-2} \end{aligned}$$

उदाहरण 6

$$\text{यदि } x = 2, y = 3, m = 1 \text{ र } n = 4 \text{ भए } = \frac{x^{m+n} Y^{m-n}}{x^{m-n} y^{m+n}} \text{ को मान कर्ति हुन्छ ?}$$

समाधान

यहाँ $x = 2, y = 3, m = 1 \text{ र } n = 4$

$$\text{प्रश्नानुसार, } \frac{x^{m+n}y^{m-n}}{x^{m-n}y^{m+n}} = \frac{2^{1+4} \times 3^{1-4}}{2^{1-4} \times 3^{1+4}}$$

$$\frac{2^5 \times 3^{-3}}{2^{-3} \times 3^5} = \frac{2^{5+3}}{3^{5+3}} = \frac{2^8}{3^8} = \left(\frac{2}{3}\right)^8$$

अभ्यास 21.1.

1. घातांकका नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर :

- | | | |
|----------------------------|--|--------------------------------|
| (क) $8^4 \times 8^3$ | (ख) $x^6 \times x^7$ | (ग) $(p^2q) \times (pq)$ |
| (घ) $(3x^3) \times (2x^2)$ | (ङ) $(a^3b) \times (ab) \times (a^2b)$ | (च) $(4y^{-2}) \times (-3y^4)$ |

2. घातांकका नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर :

- | | | |
|------------------------|-----------------------------|-----------------------|
| (क) $3^6 \div 3^3$ | (ख) $16^5 \div 4^5$ | (ग) $12x^7 \div 3x^5$ |
| (घ) $-36a^8 \div 9a^5$ | (ङ) $-125p^7 \div (-25p^6)$ | |

3. घातांकका नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर :

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------|
| (क) $(2^3)^4$ | (ख) $(-5^3)^2$ | (ग) $(5x^3)^4$ |
| (घ) $(-7p^3)^4$ | (ङ) $(xy^2)^3 \times xy$ | (च) $(4x^4)^3 \times (3x^3)^4$ |
| (छ) $(a^2b)^c \times (ab^2)^c$ | (ज) $\left(\frac{xy^2}{y^3}\right)^2$ | (झ) $\frac{(3p^2q)^2}{9p^2q^2}$ |

4. घातांकका नियमहरू प्रयोग गरेर मान पत्ता लगाऊ :

$$(क) \frac{2^3 \times 4^2}{8^2} \quad (ख) \frac{5^3 \times 125^3}{25^3} \quad (ग) \frac{4^4 \times 5^5}{25^2 \times 16^2}$$

5. घातांकका नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर :

$$(क) \frac{a^{m+n+2} \times a^{m+n+2}}{a^{m+n}} \quad (ख) \frac{x^{p-q+1}x^{q-r+1} \times x^{r-p+1}}{x^2}$$

6. यदि $a = 5, b = 4, c = 2, m = 2 \text{ र } n = 3$ भए

$$\frac{a^{m,n} \times b^{m+n} \times c^{m-n}}{a^{m+n} \times b^{m-n} \times c^{m,n}}$$

को मान करि हुन्छ ?

समीकरण, असमानता र लेखाचित्र

(Equation, Inequalities and Graph)

22.0 पुनरवलोकन (Review)

सबै मिली तलको खेल खेलौं ।

सबैले आआफ्नो कापीमा सँगै दिए जस्तै 4×4 को बिड्गो टेबल बनाऊ ।

र A देखि P सम्म क्रम नमिलाइकन लेख ।

जस्तै, A, P, D, F, G, I, B, H, J, L, C, E, O, M, N, K

A	P	D	F
G	I	B	M
J	L	C	E
O	H	N	K

अब शिक्षकले एउटा तरिकाले तल दिइएका प्रश्नहरू बोर्डमा एक एक गरी लेख्नुहोस् :

A. $x + 31 = -5$	E. $\frac{x}{6} = -20$	I. $x - 2 < 14$	M. $\frac{x}{3} \leq 8$
B. $y + (-11) = 40$	F. $13x = 39$	J. $x + 5 > 7$	N. $36 < 12x$
C. $12 = k - 7$	G. $\frac{y}{-3} = -14$	K. $-7 + x < -5$	O. $-45 \geq -15x$
D. $16 = h - (-4)$	H. $15y = 105$	L. $x + 16 > 26$	P. $\frac{x}{6} \leq -4$

विद्यार्थीले उक्त प्रश्नको समाधान गर्ने र आफ्नो बिड्गो तालिकामा त्यस अक्षरलाई क्रस गर्दै जाने ।

यसरी जुन विद्यार्थीको पहिला बिड्गो टेबलका पद्धतिका क्रमशः 8 ओटा कोठाहरू पूरा क्रस हुन्छ, त्यो विद्यार्थी विजेता हुन्छ । अब विजेतालाई पुरस्कृत गर्ने ।

समीकरण र एक चलयुक्त रेखीय समीकरणका बारेमा सामान्य जानकारी अधिल्ला कक्षाहरूमा लिइसकेका छौं । अब हामी अभ विस्तृत रूपमा अध्ययन गर्दछौं ।

22.1 एक चलयुक्त रेखीय समीकरण (Linear Equation of one Variable)

तलका प्रश्नहरूको उत्तर प्रत्येकले आआफ्नो कपीमा लेख्ने र सँगैको साथीसँग छलफल गरी उत्तरको निचोडमा पुगाँ ।

रेखीय समीकरण भनेको के हो ?

चल भनेको के हो ?

$x+5 = 9$ मा x को डिग्री कति छ ?

के यसमा x को मान दुईओटा वा सोभन्दा बढी हुन सक्छ, यसबारे हामीले अधिल्ला कक्षामा अध्ययन गरिसकेका छाँ ।

एक चलयुक्त समीकरणहरू हल गर्ने तरिका :

$x+4 = -3$ भए x को मान कति होला ?

समाधान

$x+4 = -3$ (पहिले चलसँग भएको अचललाई हटाउने)

अथवा, $x + 4 - 4 = -3 - 4$

अथवा, $x = -7$

जाँच :

$$x + 4 = -3$$

$$-7 + 4 = -3$$

$$-3 = -3 \text{ मान्य भयो ।}$$

उदाहरण 1

हल गर र उत्तर जाँचेर हेर :

$$9x-19 = 8$$

समाधान

$$\text{यहाँ, } 9x-19 = 8$$

$$\text{अथवा, } 9x-19+19 = 8+19 \text{ (दुवैतिर } +19 \text{ गर्दा)}$$

$$\text{अथवा, } 9x-0 = 27$$

$$\text{अथवा, } \frac{9x}{9} = \frac{27}{9}$$

$$\text{अथवा, } x = 3$$

जाँच :

$$9x-19 = 8$$

$$9 \times 3-19 = 8$$

$$27-19 = 8$$

$$8 = 8 \text{ मान्य भयो ।}$$

उदाहरण 2

हल गर

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

समाधान : यहाँ $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$

अथवा, $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{x}{4} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ (दुवैतर्फ $\frac{x}{4}$ घटाउने)

अथवा, $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$

अथवा, $\frac{6x - 4x - 3x}{12} = \frac{1}{2}$ (2, 3, 4 को ल.स. 12 हुँदै)

अथवा, $-\frac{x}{12} = \frac{1}{2}$

अथवा, $-x = \frac{12}{2}$

$\therefore x = -6$

उदाहरण 3

हल गर र जाँचेर हेर :

$$5x-6 = 3x+10$$

समाधान

यहाँ, $5x-6 = 3x+10$

अथवा, $5x-6+6 = 3x+10+6$ (दुवैतर्फ 6 जोड्दा)

अथवा, $5x = 3x+16$

अथवा, $5x-3x = 3x-3x+16$ (दुवैतर्फ $-3x$ गर्दा)

अथवा, $2x = 16$

अथवा, $\frac{2x}{2} = \frac{16}{2} = 8$
 $\therefore x = 8$

जाँच

$$\frac{-6}{2} - \frac{-6}{3} = \frac{-6}{4} + \frac{1}{2}$$

$$-3+2 = \frac{-6}{4} + \frac{1}{2}$$

$$-1 = \frac{-6+2}{4}$$

$$-1 = \frac{-4}{4}$$

- 1 = -1 मान्य भयो ।

उदाहरण 4

$$\text{हल गर : } \frac{7x-9}{2x+1} = \frac{3}{2}$$

समाधान

$$\text{यहाँ } \frac{7x-9}{2x+1} = \frac{3}{2}$$

$$\text{अथवा, } 2(7x-9) = 3(2x+1) (\because \text{क्रस गुणा गर्दा})$$

$$\text{अथवा, } 14x - 18 = 6x + 3$$

$$\text{अथवा, } 14x - 18 + 18 = 6x + 3 + 18 \text{ (द्वैतफ 18 जोड़दा)}$$

$$\text{अथवा, } 14x = 6x + 21$$

$$\text{अथवा, } 14x - 6x = 6x - 6x + 21 \text{ (द्वैतफ } -6x \text{ गर्दा)}$$

$$\text{अथवा, } 8x = 21$$

$$\text{अथवा, } \frac{8x}{8} = \frac{21}{8} \quad (8 \text{ ले भाग गर्दा})$$

$$\therefore x = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$$

उदाहरण 5

एउटा आयतकार खेतको लम्बाइ र चौडाइ 5:3 को अनुपातमा छ । यदि उक्त खेतको परिमिति 400 मिटर भए उक्त खेतको

(क) परिमिति जनाउने समीकरण लेख ।

(ख) लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाऊ ।

(ग) क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

समाधान

यहाँ लम्बाइ र चौडाइको अनुपातको साफ्का गुणनखण्डलाई x मान्दा,

$$\text{लम्बाइ} = 5x \text{ भए चौडाइ} = 3x \text{ हुन्छ ।}$$

(क) प्रश्नानुसार, परिमिति = 400m

$$\text{हामीलाई थाहा छ, आयतकार वस्तुको परिमिति} = 2(\text{लम्बाइ} + \text{चौडाइ})$$

$$\text{अथवा, } 2(5x + 3x) = 400$$

$$\text{अथवा, } \frac{2 \times (5x + 3x)}{2} = \frac{400}{2}$$

$$\text{अथवा, } 5x + 3x = 200$$

$$\text{अथवा, } 8x = 200$$

$$\text{अथवा, } \frac{8x}{8} = \frac{200}{8} = 25$$

$$\therefore x = 25$$

(ख) खेतको लम्बाई (ℓ) = $5x = 5 \times 25 = 125$ m

खेतको चौडाई (b) = $3x = 3 \times 25 = 75$ m

(ग) खेतको क्षेत्रफल (A) = $\ell \times b$ वर्ग एकाइ
 $= (125 \times 25) \text{ m}^2$
 $= 3125 \text{ m}^2$

अभ्यास 22.1

1. हल गर :

(क) $7x = 21$

(ख) $x - 8 = 9$

(ग) $3x+4 = 13$

(घ) $5x-14 = 8$

(ङ) $\frac{2x+3}{5} = 7$

(च) $\frac{x+1}{6} = 7$

(छ) $8x+9 = 10$

(ज) $13x-14 = 12$

(झ) $\frac{10x+8}{6} = 17$

2. हल गर र जाँचेर हेर :

(क) $5x+3 = 2x+6$

(ख) $4x+7 = 3x+10$

(ग) $9+14x = 27-11x$

(घ) $4(x+4) = 3(x-1)$

(ङ) $17-8y = 5-20y$

(च) $\frac{3x+8}{7} = \frac{x+4}{2}$

3. हल गर :

(क) $\frac{x-2}{x+2} = \frac{4}{3}$

(ख) $\frac{3-4x}{5-4x} = \frac{7}{2}$

(ग) $\frac{3x+2}{5x+7} = \frac{2}{3}$

$$(घ) \frac{3x+4}{4x+5} = \frac{1}{2}$$

$$(ङ) \frac{x}{2} - \frac{3x}{4} = 2 + \frac{4}{3} + \frac{1}{6}x$$

$$(च) \frac{x-3}{x-2} = \frac{3}{4}$$

$$(छ) \frac{3x+3}{4x-4} = \frac{5}{4}$$

$$(ज) \frac{x-10}{x-12} = \frac{5}{6}$$

$$(झ) \frac{3-x}{x+4} = \frac{7}{9}$$

4. हल गर :

$$(क) x \text{ को } 10\% = 35$$

$$(ख) 500 \text{ को } 2\frac{1}{2}\% = x$$

$$(ग) x \text{ को } 13\% = 6.5$$

$$(घ) x + x \text{ को } 33\% = 266$$

$$(ङ) x + x \text{ को } 50\% = 381$$

5. कक्षा 8 का 35 विद्यार्थीहरूमध्ये केटीहरूको सदृख्या केटाको सदृख्याभन्दा 7 ले बढी छ भने उक्त विद्यालयको कक्षा 8 का विद्यार्थी जनाउने समीकरण लेख । साथै कक्षा 8 का केटाको सदृख्या पत्ता लगाऊ ।
6. दुईओटा सदृख्याको योगफल 20 छ । यदि एउटा सदृख्या अर्को सदृख्याभन्दा 4 ले बढी छ भने ती सदृख्याहरू पत्ता लगाऊ ।
7. एउटा सदृख्याको $\frac{3}{4}$ र त्यसको $\frac{1}{6}$ को फरक 7 छ भने त्यो सदृख्या कति होला, पत्ता लगाऊ ।
8. एउटा आयतको लम्बाइ चौडाइभन्दा 8 cm बढी छ । उक्त आयतको परिमिति 56 cm छ भने चौडाइ पत्ता लगाऊ ।
9. दुईओटा सदृख्याहरू 4:5 को अनुपातमा छन् । यदि उक्त दुई सदृख्याहरूको योगफल 981 भए ती सदृख्याहरू पत्ता लगाऊ ।
10. एउटा लट्ठीको $\frac{4}{5}$ भाग पानी भित्र छ । यदि उक्त लट्ठीको लम्बाइ 5.5 मिटर भए लट्ठीको पानीभित्रको लम्बाइ कति रहेछ ?
11. 5 वर्ष अगाडि बाबुको उमेर छोरीको उमेरको दोब्बर थियो । यदि उनीहरूको उमेरको योगफल 45 वर्ष थियो भने उनीहरूको हालको उमेर कति होला ?
12. 10 वर्ष अगाडि बाबुको उमेर छोराको उमेरको तीन गुणा थियो । उनीहरूको उमेरको फरक 20 वर्ष थियो भने छोराको अहिलेको उमेर पत्ता लगाऊ ।

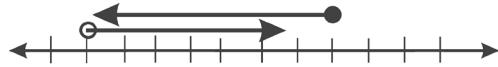
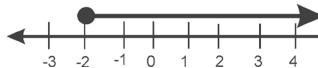
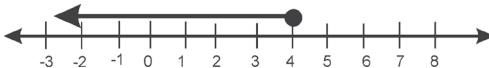
22.2 एक चलयुक्त रेखीय असमानता (Linear Inequalities with single variables)

कक्षा 6 मा पढेका आधारमा तलका सङ्ख्या रेखाहरूको अध्ययन गरे र ट्रिकोटोमी (trichotomy) हरू प्रयोग गरी लेख :

(क)



(ख)



एक चलयुक्त असमानताको हल (Solution of Single Variable Inequalities)

a, b र c तीनओटा वास्तविक सङ्ख्याहरू भए,

(क) $a < b$ छ भने $a+c < b+c$ हुन्छ । जस्तै : $2 < 4$ भए $2+3 < 4+3$ हुन्छ ।

(ख) $a < b$ छ भने $a-c < b-c$ हुन्छ । जस्तै : $2 < 5$ भए $2-3 < 5-3$ हुन्छ ।

(ग) $a < b$ र $c > 0$ भए $a.c < b.c$ र $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ हुन्छ ।

(घ) $a < b$ र $c < 0$ भए $a.c > b.c$ र $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ हुन्छ ।

अर्थात, क्रृणात्मक सङ्ख्याले गुणा गर्दा ' $>$ ' भए ' $<$ ' मा र ' $<$ ' भए ' $>$ ' मा परिवर्तन हुन्छ ।

उदाहरण 1

हल गरे र सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गरे :

(क) $3x < 27$

(ख) $4x + 3 \geq 23$

(ग) $5x + 2(3x - 10) \leq x$ (घ) $\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} > \frac{2}{3}x$

समाधान

(क) $3x < 27$

सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर्दा,

अथवा, $\frac{3x}{3} < \frac{27}{3}$

अथवा, $x < 9$



समूहमा व्यक्त गर्दा {8, 7, 6, 5,} हुन्छ ।

(ख) $4x+3 \geq 23$

अथवा, $4x+3-3 \geq 23-3$

सद्भ्या रेखामा प्रस्तुत गर्दा,

अथवा, $4x \geq 20$



अथवा, $\frac{4x}{4} \geq \frac{20}{4}$

$x \geq 5$

समूहमा व्यक्त गर्दा {5, 6, 7, 8,}

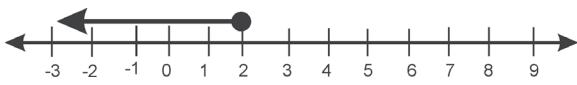
(ग) $5x+2(3x-10) \leq x$

अथवा, $5x+6x-20 \leq x$

अथवा, $11x \leq x+20$

सद्भ्या रेखामा प्रस्तुत गर्दा,

अथवा, $11x-x \leq 20$



अथवा, $10x \leq 20$

अथवा, $x \leq 2$

समूहमा व्यक्त गर्दा {2, 1, 0, -1,} हुन्छ।

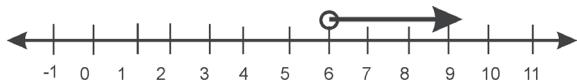
(घ) $\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} > \frac{2}{3}x$

अथवा, $\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}x > \frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}x \times 12 - \frac{2}{3}x \times 12 > \frac{1}{2} \times 12$

सद्भ्या रेखामा प्रस्तुत गर्दा,

$9x - 5x > 6$



समूहमा व्यक्त गर्दा {7, 8, 9,} हुन्छ।

उदाहरण 2

$-5 \leq x < 2$ लाई समूहमा र सङ्ख्या रेखामा देखाऊ ।

समाधान

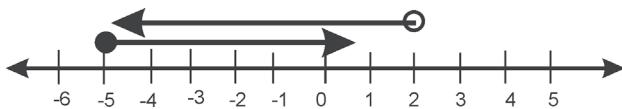
यहाँ $-5 \leq x < 2$

यसलाई दुई भागमा बाँडदा $-5 \leq x$ र $x < 2$ हुन्छ ।

अब, $5 \leq x$ लाई समूहमा व्यक्त गर्दा $\{-5, -4, -3, -2, \dots\}$ हुन्छ र

$x < 2$ लाई समूहमा व्यक्त गर्दा $\{1, 0, -1, -2, \dots\}$ हुन्छ ।

सङ्ख्यारेखामा व्यक्त गर्दा



उदाहरण 3

रोशनीलाई रु. 50 पर्ने एउटा रुमाल र प्रति गोटा रु. 12 पर्ने केही कापीहरू किन्नु छ । यदि उनीसँग जम्मा रु. 150 भए बढीमा कतिओटासम्म कापी किन्न सकिलन् ?

समाधान

यहाँ, जम्मा किन्न सकिने कापी सङ्ख्या x मान्दा,

कापीको जम्मा मूल्य = $12x$ हुन्छ ।

$$\text{जम्मा खर्च} = 50 + 12x \text{ हुन्छ}$$

उनीसँग भएको जम्मा रकम = रु. 150

$$\text{प्रश्नानुसार, } 50 + 12x \leq 150 \text{ हुन्छ}$$

$$\text{अथवा, } 50 + 12x - 50 \leq 150 - 50$$

$$\text{अथवा, } 12x \leq 100$$

$$\text{अथवा, } x \leq \frac{100}{12} = \frac{25}{3} \text{ ओटा}$$

$$= 8\frac{1}{3} \text{ ओटा}$$

यहाँ x को मान भनेको कापीको सङ्ख्या हो जुन पूर्णाङ्कमा हुन्छ । तसर्थ रोशनीले बढीमा 8 ओटा कापी किन्न सकिन्नन् ।

उदाहरण 4

$y = 4x+5$ मा यदि x को मान 2 वा सोभन्दा बढी भएमा y को मान कति होला ?

समाधान

यहाँ $y = 4x+5$ र $x \geq 2$

अथवा, $y \geq 4 \cdot 2 + 5$

अथवा, $y \geq 8 + 5 = 13$

$\therefore y \geq 13$ हुन्छ ।

अभ्यास 22.2

1. हल गर र सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर :

$$(क) x+5 \geq 7$$

$$(ख) 3x+5 < 2$$

$$(ग) 7x-2(x-3) < 16$$

$$(घ) 2(x-2)-x < 4$$

$$(ङ) 3(x+6) < 3+6x$$

$$(च) 5+4(x-3) > 9$$

$$(छ) \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{2}$$

$$(ज) \frac{x}{2} - 2 \geq 3 - \frac{x}{2}$$

$$(झ) \frac{x-2}{3} < \frac{3x-1}{4}$$

$$(ञ) \frac{x+4}{6} - \frac{x}{2} \geq x - 4$$

$$(ट) \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3}x) \geq x - 3$$

$$(ठ) 0.9x \geq 0.8 + 0.1x$$

$$(ड) -5 \leq x < -2$$

$$(ढ) -2 < x \leq 4$$

$$(ण) 4 \leq x < 9$$

$$(त) -7 < 2x+5 \leq 1$$

$$(थ) -11 \leq 3x-2 \leq -5$$

2. $y = 7x-9$ भएको समीकरणमा $x \geq 2$ भएमा y को मान कति होला ?

3. $y = 4x + 5$ मा x को मान <-3 भए y को मान कति होला ?

4. $3x + 4y + 5 = 0$ समीकरण दिइएको छ । यदि

(क) $x \leq 5$ भए y को मान कति होला ?

(ख) $x > -5$ भए y को मान कति होला ?

(ग) $y \leq 1$ भए x को मान कति होला ?

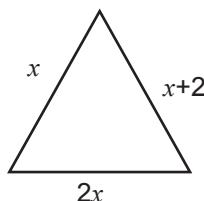
5. दोर्जेलाई रु. 25 पर्ने एउटा कापी र रु. 8 पर्ने केही कलम किन्नु छ । यदि उनीसँग जम्मा रु. 150 छ भने उसले बढीमा कतिओटा कलम किन्न सक्ला ?

6. एउटा सझ्याको तीन गुणामा 7 जोड्दा 13 भन्दा सानो हुन्छ भने उक्त सझ्या कति होला ? सझ्या रेखामा प्रस्तुत गर ।
7. एउटा सझ्याको दुई गुणालाई 9 बाट घटाउँदा उक्त सझ्याको एक तिहाइ र 3 को जोडभन्दा सानो वा बराबर हुन्छ भने त्यो सझ्या पत्ता लगाउ र सझ्या रेखामा प्रस्तुत गर ।
8. विदुलाले रु. 10 प्रति गिलासका केही गिलास चिया रु.45 प्रति प्याकेटका 3 प्याकेट विस्कुट किन्दा उनीसँग भएको रु. 332 ले बढीमा कति गिलास चिया आउला ?
9. कुनै सझ्या र 2 को योगफलको तीन गुणा, 3 र उक्त सझ्याको फरकको दुई गुणाभन्दा सानो अथवा बराबर छ भने उक्त गणितीय वाक्यलाई असमानतामा लेखी हल गर र सझ्या रेखामा प्रस्तुत गर ।
10. यदि दिइएको आयतको परिमिति 44cm भन्दा बढी भए यसलाई असमानता बनाएर हल गर ।

$$x + 8$$



11. दिइएको त्रिभुजको परिमिति 22cm भन्दा ठुलो र 30cm भन्दा सानो वा बराबर छ भने यसलाई असमानतामा व्यक्त गरी हल गर ।



22.3 दुई चलयुक्त युगपतरेखीय समीकरणको रेखाचित्रद्वारा हल

(Graphic solution of two variable linear equations)

अमृत र आषिशलाई 4 ओटा बल आपसमा बाँड्नु छ। उनीहरूले कति कति पाउलान्, हेरौँ :

यहाँ, अमृतले पाउने बलको सङ्ख्या = x मानौँ

आषिशले पाउने बलको सङ्ख्या = y मानौँ

अब तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

अमृत (x)	4	3	2	1	0
आषिश (y)	0	1	2	3	4

माथिको तालिकामा अमृत र आषिशले पाउने जम्मा बल सबै अवस्थामा 4 छ। तसर्थ

$$x + y = 4 \dots \dots \dots \text{(i)}$$

त्यस्तै, यदी अमृतसँग आषिशको भन्दा 2 ओटा बल बढी भए भने दुवैले कति कति बल प्राप्त गरे होलान्, यसलाई तालिकामा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

अमृत (x)	2	3	4	5	6
आषिश (y)	0	1	2	3	4

तालिकामा हेर्दा अमृतको र आषिशको भागमा जम्मा बलको फरक 2 छ

$$\text{तसर्थ } x - y = 2 \dots \dots \dots \text{(ii) हुन्छ।}$$

अब माथिका दुई समीकरणलाई ग्राफ

पेपरमा भरेर हेर्दा,

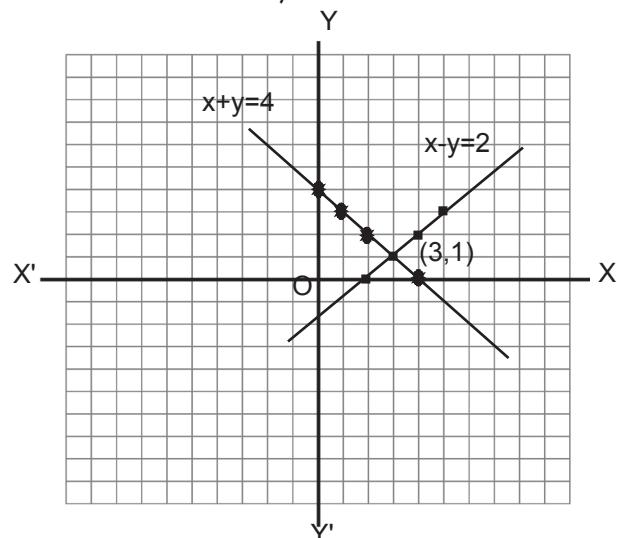
चित्रमा $x + y = 4$ र $x - y = 2$ समीकरणहरू

विन्दु $(3,1)$ अर्थात् $x = 3$ र $y = 1$ मा

प्रतिच्छेदन भएका छन्। उक्त विन्दु $(3,1)$

नै समीकरण (i) र (ii) को हल हो। किनकि

$(3,1)$ दुवै समीकरणमा मान्य हुन्छ (?)



कुनै दुई रेखीय समीकरणहरू लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा प्रतिच्छेदित हुन्छन् अथवा काटिन्छन् भने उक्त समीकरणहरूलाई युगपतरेखीय समीकरण (simultaneous equation) भनिन्छ।

उदाहरण 2

दुई ओटा सडख्याहरूको फरक 3 छ। ठुलो सडख्याको दुई गुणा र सानो सडख्याको तीन गुणा बराबर छ भने ती दुई सडख्याहरू पत्ता लगाऊ र रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

समाधान

यहाँ, सानो सद्ख्या = x र ठुलो सद्ख्या = y मानौँ

प्रश्नानुसार, $y - x = 2$ (i) र

$$3x = 2y \dots \dots \dots \text{(ii)}$$

(i) लाई लिंदा

$$y - x = 3$$

$$y = x + 3$$

x	0	1	2	3
y	3	4	5	6

माथिको तालिकाबाट बिन्दूहरू $(0,3)$; $(1,4)$; $(2,5)$ र $(3,6)$ प्राप्त भयो ।

समीकरण (ii) लाई लिंदा,

$$3x = 2y$$

$$\text{अथवा } y = \frac{3}{2}x$$

x	0	2	4	6
y	0	3	6	9

(x जोर सडख्या लिंदा 2 ले निःशेष भाग लागै ।)

माथिको तालिकाबाट बिन्दहरू (0,0):

(2.3) : (4.6) (6.9) प्राप्त भयो ।

अब दर्दओंते समीकरणबाट पाप्त

ਬਿਨਦੁ ਰੂਲਾਈ ਲੇਖਾਚਿਤ੍ਰਸਾ ਅੱਡਕਨ ਗਰ੍ਦਾ

लेखाचित्रमा दर्दओटा समीकरणाहस्यका

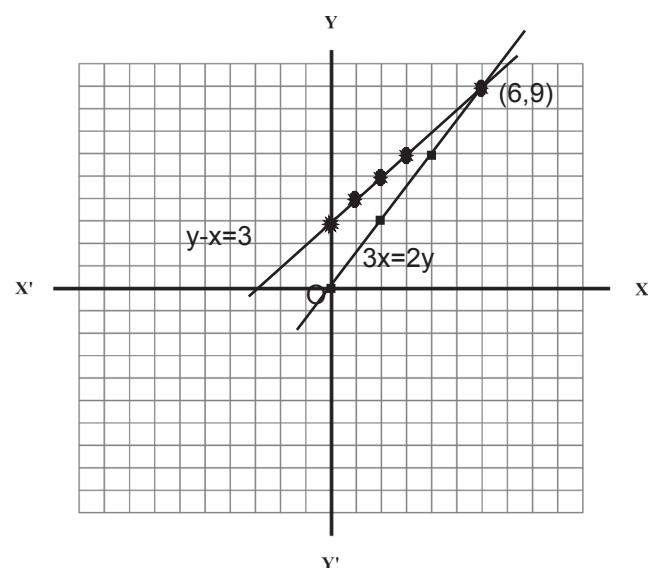
ऐवाहक लिङ्ग (6-9) सा काटिएका छन्।

तसर्थ $r = 6$ र $v = 9$ उक्त दर्ढ

समीकरण को हल हो।

त्यसकारण ठलो सङ्ख्या ३१ र सानो

सहस्र्या = ६ भयो ।



अभ्यास 22.3

1. तलका जोडी समीकरणहरूलाई लेखाचित्रद्वारा हल गर र जाँचेर हेर :

- | | | | |
|-------------------|---------------|------------------|---------------|
| (क) $x + y = 2$ | $3x - y = 10$ | (ख) $3x + y = 7$ | $x = 2y$ |
| (ग) $x + y = 13$ | $2x = y + 8$ | (घ) $x + y = 6$ | $x - y = 2$ |
| (ङ) $x + y = 8$ | $x - y = 4$ | (च) $4x + y = 2$ | $3x - 2y = 7$ |
| (छ) $2x + y = 4$ | $x + 2y = 2$ | (ज) $3x + y = 8$ | $2x + y = 7$ |
| (झ) $4x + 2y = 2$ | $x - 3y = 11$ | (झ) $2x - y = 4$ | $x + 2y = 7$ |
| (ट) $2x + y = 5$ | $4x + 3y = 6$ | (ठ) $x + y = 6$ | $x - y = 0$ |

2. तल दिइएका समस्याहरूलाई समीकरणमा व्यक्त गरी लेखाचित्रद्वारा हल गर :

- (क) दुईओटा सझ्याको योगफल 15 छ र फरक 5 छ ।
- (ख) दुईओटा सझ्याको योगफल 12 छ र ठुलो सझ्या सानो सझ्याको तीन गुणा ठुलो छ ।
- (ग) दुई सझ्याको फरक 5 छ र सानो सझ्याको 5 गुणा र ठुलो सझ्याको 4 गुणा बराबर छ ।
- (घ) तीनओटा कापी र चारओटा कलमको मूल्य रु. 200 पर्छ र 5 ओटा कापी र 2 ओटा कलमको मूल्य रु. 240 पर्छ भने एउटा कापी र एउटा कलमको मूल्य पत्ता लगाऊ ।
- (ङ) बाबुको उमेर छोरीको उमेरको तेब्वरमा 3 कम छ । यदि बाबु र छोरीको उमेरबिचका फरक 37 वर्ष भए उनीहरूको उमेर पत्ता लगाऊ ।
- (च) मञ्जुको अहिलेको उमेर चक्रेको भन्दा 5 वर्ष बढी छ । मञ्जुको 5 वर्षपछिको उमेर चक्रका अहिलेको भन्दा दोब्वर हुन्छ भने उनीहरूको अहिलेको उमेर कति होला ?
- (छ) विपनाभन्दा विपीन 4 वर्ष जेठा छन् । 2 वर्ष अगाडि विपीनको उमेर विपनाको भन्दा दुई गुणा बढी थियो भने उनीहरूको उमेर पत्ता लगाऊ ।
- (ज) कुसुम र उनका बुवाको उमेरको फरक 20 वर्ष छ । यदि बुवाको उमेर कुसुमको भन्दा दुई गुणा र 4 ले बढी छ भने उनीहरूको उमेर पत्ता लगाऊ ।

22.4 वर्ग समीकरण (Quadratic Equations)

तलका समीकरणहरू हेरे र दिइएका प्रश्नहरूका बारेमा छुलफल गर :

$$3x^2+4x=0 \dots \dots \dots \text{(iv)}$$

- माथिका समीकरणहरूमा x को डिग्री कति छ ?
 - समीकरणहरूमा के फरक पाउँछौ ?
 - माथिका समीकरणहरूमा कति कतिओटा चल छन् ?

दिइएका समीकरणहरूमा पहिलो, तेस्रो र चौथो पदमा x को डिग्री 1 र 2 दुवै छ भने दोस्रो समीकरणमा x को डिग्री 2 मात्र छ ।

ਡਿਗੀ 2 ਭਾਏਮਾ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਵਾਂਗ ਸਮੀਕਰਣ (quadratic equation) ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ।

यदि वर्ग समीकरणमा एकचल 'x' को डिग्री 2 मात्र छ भने उक्त वर्ग समीकरणलाई शुद्ध वर्ग समीकरण (pure quadratic equation) भनिन्छ । जस्तै : $x^2-16=0$ शुद्ध वर्ग समीकरण हो ।

त्यस्तै डिग्री 2 र डिग्री 1 समेत भएमा पदहरू समावेश भएको वर्ग समीकरणलाई मिश्रित वर्ग समीकरण (mixed quadratic equation) भनिन्छ । जस्तै : $x^2+7x-8=0$ मिश्रित वर्ग समीकरण हो ।

खण्डीकरण विधिद्वारा वर्ग समीकरणको हल (Solving quadratic equations by factorization)

वर्ग समीकरणमा चल ' x ' को मान पत्ता लगाउनुलाई वर्ग समीकरणको हल गर्नु भनिन्छ । वर्ग समीकरणको डिग्री 2 हुने हुँदा यसका मान पनि दुईओटा हुन्छन् । वर्ग समीकरणमा x को मानलाई समीकरणका मल वा मलहरू (roots) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

हल गर :

$$(\text{iv}) \quad x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$(x) \quad 16x^2 - 49 = 0$$

समाधान

$$(\text{B}) \quad x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$[8x - 1 = -8]$$

$$\text{अथवा, } x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$[8-1=7]$$

$$\text{अथवा, } x(x + 8) - 1(x + 8) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 1)(x + 8) = 0$$

कि, $(x - 1) = 0$ भए $x = 1$ र

$ab = 0$ मा a र b दई ओटा गणनखण्ड

$$\text{वा. } x + 8 = 0, x = -8 \text{ हन्त्या।}$$

भए $a = 0$ वा $b = 0$ वा द्वै हन्त्ये ।

तसर्थ x को मान 1 र -8 छून।

हाम्रो गणित, कक्षा ८

$$(ख) \quad 16x^2 - 49 = 0$$

$$\text{अथवा, } (4x)^2 - (7)^2 = 0$$

$$\text{अथवा, } (4x-7)(4x+7) = 0 (?)$$

$$\text{यदि, } 4x-7=0 \text{ भए } 4x = 7 \text{ हुन्छ } ।$$

$$\text{र } x = -\frac{7}{4} \text{ हुन्छ } \quad x = 1\frac{3}{4}$$

फेरि यदि $4x + 7 = 0$ भए $4x = -7$ हुन्छ ।

$$\text{र } x = -\frac{7}{4} = -1\frac{3}{4} \text{ हुन्छ } ।$$

$$\therefore x = \pm 1\frac{3}{4}$$

अभ्यास 22.4

1. हल गर :

$$(क) x^2 - 4x = 0$$

$$(ख) 2x^2 - x = 0$$

$$(ग) 3x + 9x^2 = 0$$

$$(घ) 9x^2 - 4 = 0$$

$$(ङ) 5x + 9x^2 = 0$$

$$(च) 4x^2 - 7x = 0$$

$$(छ) x^2 - 49 = 0$$

$$(ज) 169x^2 - 96 = 0$$

$$(झ) \frac{x^2}{4} - 36 = 0 \quad (ञ) (x^3 - 4x) = 0$$

2. हल गर :

$$(क) x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(ख) x^2 - x - 2 = 0$$

$$(ग) x^2 + x - 2 = 0$$

$$(घ) x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(ङ) x^2 - 10x - 24 = 0$$

$$(च) x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$(छ) x^2 - 11x + 30 = 0$$

$$(ज) x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(झ) x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$(ञ) x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(ट) x^2 + 10x + 25 = 0$$

$$(ठ) x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(ड) x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(ढ) 2x^2 - x - 6 = 0$$

$$(ण) x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$(त) 7x^2 + 13x - 2 = 0$$

$$(थ) x^2 + 9x - 22 = 0$$

$$(द) x^2 - 18x + 77 = 0$$

$$(ঘ) 2x^2 + 11x + 12 = 0$$

$$(ঞ) 3x^2 - 11x - 20 = 0$$

$$(ঘ) 10x^2 + 19x + 6 = 0$$

$$(ফ) 12x^2 - 11x + 2 = 0$$

$$(ব) \frac{x+1}{7x-3} = \frac{2}{3x}$$

$$(ঘ) (x+1)^2 - 4 = 0$$

$$(ম) (x+3)^2 - 16 = 0$$

$$(য) (x+6)^2 - 36 = 0$$

$$(র) (x-7)^2 - 64 = 0$$

$$(ল) 100 - (x-5)^2 = 0$$

उत्तरमाला

अभ्यास 1.1

1. (क) आसन्न (ख) शीर्षभिमुख (ग) शीर्षभिमुख (घ) आसन्न (ड) आसन्न
2. आसन्न कोणहरू : $\angle X O Y$ र $\angle Y O X$; $\angle Y O X'$ र $\angle X' O Y'$; $\angle X' O Y$ र $\angle Y' O X$; $\angle Y' O X$ र $\angle X O Y$
शीर्षभिमुख कोणहरू :- $\angle X O Y$ र $\angle X' O Y'$, $\angle X' O Y$ र $\angle Y' O X$
3. (क) 75° (ख) 80° (ग) 45°
4. (क) $x^\circ = 45^\circ, y = 135^\circ$ (ख) $x^\circ = y^\circ = 80^\circ$ (ग) $x^\circ = 60^\circ, y^\circ = 70^\circ$
5. (क) $x^\circ = 135^\circ, y^\circ = 45^\circ, z = 135^\circ$ (ख) $x^\circ = 50^\circ, y^\circ = 80^\circ, z^\circ = 80^\circ$ (ग) $y^\circ = z^\circ = 45^\circ$

अभ्यास 1.2

1. (क) $\angle 1, \angle 2, \angle 7$ र $\angle 8$ (ख) $\angle 3, \angle 4, \angle 5$ र $\angle 6$
2. (क) $x = 60^\circ, y = 120^\circ$ र $z = 120^\circ$ (ख) $x = 100^\circ, y = 100^\circ$ र $z = 80^\circ$
(ग) 36° (घ) $x = 50^\circ, y = 130^\circ, z = 50^\circ$ (ड) $x = 47^\circ, y = 133^\circ$
(च) $x = 75^\circ, y = 75^\circ, z = 75^\circ$ (छ) $x = 20^\circ$ (ज) $x = 120^\circ, y = 60^\circ, z = 60^\circ$
3. (क) छैनन् (ख) छन् (ग) छैनन्
4. (क) $x = y = 49^\circ$ (ख) $x = y = 80^\circ, a = 80^\circ, b = 100^\circ$
(ग) $x = 90^\circ, y = 90^\circ, z = 40^\circ, a = 50^\circ$ (घ) $x = 38^\circ, z = 38^\circ, y = 142^\circ$
(ड) $x = 95^\circ, y = 45^\circ, z = 135^\circ, a = 130^\circ$ (च) $x = 90^\circ, y = 50^\circ, z = 40^\circ$
(छ) $x = 75^\circ, y = 105^\circ, z = 105^\circ, a = 75^\circ$ (ज) $x = 115^\circ, y = 115^\circ, z = 58^\circ, a = 58^\circ$

अभ्यास 2.1

1. शिक्षकलाई देखाउने
2. (क) 90° (ख) $45^\circ, 45^\circ$ (ग) $68^\circ, 68^\circ$ (घ) $70^\circ, 70^\circ$ (ड) $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$
(च) $x = 30^\circ, y = 60^\circ$ (छ) $20^\circ, 40^\circ, 120^\circ$ (ज) $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ (झ) $120^\circ, 75^\circ$
(ं) $x = 100^\circ, y = 38^\circ, z = 42^\circ$ (ट) $x = 60^\circ, y = 55^\circ$ (ठ) $x = 45^\circ, y = 45^\circ$
(ड) $x = 36^\circ; 36^\circ, 67^\circ, 77^\circ, y = 77^\circ, z = 67^\circ$
3. $50^\circ, 95^\circ, 85^\circ$
4. शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 2.2

शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 2.3

1. शिक्षकलाई देखाउने 2. शिक्षकलाई देखाउने

3. (क) 110° (ख) 5cm (ग) $x = 90^\circ, y = 90^\circ$ (घ) $x = 8\text{cm}, y = 6\text{cm}$
 (ड) $x = 4\text{cm}, y = 3\text{cm}$ (च) $x = y = z = 90^\circ$

4. शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 2.4

शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 3.1

1. (क) छन् (ख) छैनन्

2. (क) को.भु.को(ख) भु.भु.भु (ग) स.क.भु (घ) भु.को.भु.

3. (क) $PQ \parallel LM, QR \parallel MN, PR \parallel LN, \angle P \parallel \angle L, \angle Q \parallel \angle M, \angle R \parallel \angle N$
 (ख) $XY = AB ; YZ \parallel BC, XZ \parallel AC^\circ, \angle X \parallel \angle A; \angle Y \parallel \angle B ; \angle Z = \angle C$

4. (क) $x = 13^\circ, y = 13^\circ$ (ख) $x = 20^\circ, y = 112^\circ$
 (ग) $x = 1.8\text{cm}$ (घ) $x = 1, y = 1.25\text{cm}$

5.-6. शिक्षकलाई देखाउने 7. $AC = PR$

8. $LN = YZ$ भए सक्त र $MN = XY$ भए भु.को.भु.

अभ्यास 3.2

1. (क) शिक्षकलाई देखाउने

2. (क) $x = 4, y = 5$ (ख) $x = 6\text{cm}, y = 15\text{cm}$ (ग) $x = 18, y = 7$ (घ) $x = 3, y = 2$
 (3) 2.2 cm (4) (क) शिक्षकलाई देखाउने (ख) $DE = 12\text{cm} ; 30^\circ$
 (5) 3cm, 30° (6) (i) शिक्षकलाई देखाउने (ii) 6cm

अभ्यास 4.1

1. (क) 18.84 cm (ख) 15.7cm (ग) 28.26m (घ) 31.4in (ड) 75.36m
 (च) 56.52 ft (छ) 9.42k (ज) 47.1yd

2. (क) 2 cm (ख) 3 in (ग) 5.5 m (घ) 10.5ft (ङ) 18cm (च) 60yd
 (3) 528m (4) 628m (5) 50ft (6) 176m, 4 (7) 0.84 m (8) 14 in

अभ्यास 4.2

1. (क) $28..26 \text{ cm}^2$ (ख) 78.5 sq in (ग) 200.96 sq ft. (घ) 113.04 sq in (ङ) 254.34 m^2
 (च) 314 km^2 (छ) 176.625 sq mm (ज) 379.94 cm^2 (झ) 803.84 cm^2
 (2) 153.86 cm^2 (3) (क) 94.985 cm^2 (ख) $.346.185 \text{ m}^2$ (ग) 28.26 sq in.
 (घ) 1017.36 m^2 (ङ) 11304 sq ft. (4) 63.585 cm^2
 (5). (क) 84.78 cm^2 (ख) $.30.5 \text{ cm}^2$ (ग) 30.96 sq ft. (घ) 168.56 cm^2
 (6) $43.96 \text{ ft; } 7 \text{ ft}$ (7). $7 \text{ m; } 43.96 \text{ m}$ (8) श्याम. 75.36 cm^2 (9) 176.625 cm^2

अभ्यास 5.1

1. (क) षट्मुखा (ख) त्रिभुजाकार प्रिज्म (ग) पञ्चभुजाधार पिरामिड (घ) सोली
 (ङ) बेलना (च) घन (छ) टेट्राहेड्रन (ज) आयताधार पिरामिड
 (झ) गोला
2. (क) $\Delta ABC, \Delta PQR$; आयत $APQC$; आयत $BCQR$; आयत $APRB$;
 (ख) वर्ग $PQRS$; $\Delta \Delta OPQ, \Delta OQR, \Delta ORS, \Delta OSP$
 (ग) पञ्चभुज $ABCDE$; $\Delta ABF, \Delta BCF, \Delta CDF, \Delta DEF, \Delta EAF$

अभ्यास 5.2

1. (क) टेट्राहेड्रन (ख) घन (ग) सोली (घ) बेलना (ङ) षट्मुखा
 (च) घन 2.-3. शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 6.1

1. (क) 5cm (ख) 50cm (ग) 75cm (घ) 10cm (ङ) 20 ft
 (च) $\sqrt{3} \text{ cm}$ (छ) 17cm (ज) $\sqrt{135} \text{ m}$ (झ) 25cm
 2. (क) होइन (ख) हो (ग) होइन (घ) हो (ङ) हो (च) होइन
 (3) 10cm (4) $\sqrt{44} \text{ cm}$ (5) $\sqrt{27} \text{ cm}$ (6) 21 cm (7) 24cm

8. (क) हो (ख) हो (ग) होइन (घ) हो (ङ) होइन (च) होइन

अभ्यास 6.2

1. (क) 13 एकाइ (ख) $\sqrt{50}$ एकाइ (ग) $\sqrt{32}$ एकाइ (घ) 6 एकाइ (ङ) $\sqrt{8}$ एकाइ (च) $\sqrt{34}$ एकाइ (छ) $\sqrt{40}$ एकाइ (ज) $\sqrt{53}$ एकाइ (फ) 2 एकाइ
2. 10 एकाइ (3) $\sqrt{109}$ एकाइ (4) शिक्षकलाई देखाउने (5) 5, 250km
6. शिक्षकलाई देखाउने (7) $\sqrt{32}, \sqrt{72}$ (8) 10 एकाइ, पर्चा
(9) $\sqrt{98}, \sqrt{98}$ (10) $a = 0$ (11) शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 7.1

1. (क) 18cm^2 (ख) 1.96 वर्ग फिट (ग) 12cm^2 (घ) 36cm^2
(ङ) $9\sqrt{3}$ वर्ग एकाइ (च) 22.5cm^2 (छ) 36cm^2 (ज) 99cm^2
(फ) 9.9 cm^2 (ञ) 44 cm^2 (ट) 44 cm^2 (ठ) 7.04cm^2
2. (क) 79cm^2 (ख) 50.7 cm^2 (ग) 42cm^2
3. (क) 16cm (ख) 10cm (ग) 10cm
(4) 13038 वर्ग मिटर (5) 63 ओटा
6. (क) 28 वर्ग मिटर (ख) 66 वर्ग मिटर (ग) 5450 वर्ग मिटर
(घ) 16 वर्ग मिटर (ङ) $12 \frac{4}{7}$ वर्ग मिटर

अभ्यास 7.2

1. (क) 300cm^3 (ख) 24cm^3 (ग) $60,000\text{cm}^3$ (घ) 30cm^2 (ङ) 630cm^3
2. (क) 27cm^3 (ख) 64cm^3 (ग) 125cm^3 (घ) 512cm^3
(ड) 216 घन फिट (च) 15.625 घन इन्च
3. 27 ओटा (4) 1620 m^3 (5) 10 ओटा
6. (क) 90cm^3 (ख) 93 cm^3 (ग) 117cm^3 (7) 10cm (8) 9cm
9. (क) 28 (ख) 280 (10) $64,000\text{ cm}^3$ (11) 2400cm^3
(12) 6cm (13) शिक्षकलाई देखाउने (14) 150 ओटा

अभ्यास 8.1

1. शिक्षकलाई देखाउने

2. (क) (1,-2) (ख) (-2,-3) (ग) (4, 5) (घ) (-6,-6) (ङ) (-5, 4)
 (च) (-2, -5) (छ) (9, 8) (ज) (-3, 9) (झ) (-10,-12) (ञ) (7,-8)
3. (क) (-1,2) (ख) (2, 3) (ग) (-4,-5) (घ) (6, 6) (ङ) (5, -4)
 (च) (2, 5) (छ) (-9, -8) (ज) (3,-9) (झ) (10, 12) (ञ) (-7, 8)
4. (-5,-6), 5 एकाइ 5- 7. शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 8.2

1-2. शिक्षकलाई देखाउने

3. (क) (-7,-4),(7,4), (4,-7) (ख) (7,4), (-7,-4), (4,7)
 (ग) (-9, 5), (9,-5), (-5,-9) (घ) (0,3), (0, -3), (-3,0)
 (ङ) (8,-4), (-8,4), (4, 8) (च) (5, -2), (-5,-2), (-2, 5)
 (छ) (10,10), (-10,-10),(-10,10) (ज) (-6,0), (6,0), (0, -6)
 (झ) (0,0), (0,0), (0,0) (ञ) (9,-9), (9,9) , (9,9)

4 - 6. शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 8.3

1. शिक्षकलाई देखाउने (2) (7,-1)
 3. (क) (1,12) (ख) (-6,9) (ग) (-5,5) (घ) (-8,8) (ङ) (-1,0) (च) (1,-4)
 (छ) (-7,11) (ज) (-8, -3)
- 4 - 7. शिक्षकलाई देखाउने (8). 7, एकाइ दायाँ

अभ्यास 9.1

1. (क) 055° (ख) 105° (ग) 290° (घ) 270° 2. (क) 315° (ख) 155°
 (ग) 292.5° (घ) 067.5° 3. (क) 240° (ख) 270° (ग) 285°
4. शिक्षकलाई देखाउने (5) 242° (6) 080° (7) रुलरको प्रयोग गरी नापेर हेर्ने

अभ्यास 9.2

1. (क) 5250 m (ख) 6500 mile (ग) 750 m (2) 2.25 cm
 3. (ख) 6 cm (4) 300m 5.(क) शिक्षकलाई देखाउने (ख) 300 m

(ग) 110°

6. रूलरको प्रयोग गरी नापेर होन्ने

अभ्यास 10.1

1. (क) {2,4,6,8,10,12,14} (ख) {4,8,10} (ग) {2,6} (घ) {12,14}
(ड) {2,6,12,14}
2. शिक्षकलाई देखाउने 3. {2,6,10,14,.....}; ϕ
4. शिक्षकलाई देखाउने
5. (क) {2,4,5,7,8} (ख) {3, 5, 7, 9} (ग) {2,4,6,8}
6. (क) Q-P (ख) $\overline{A \cup B}$ (ग) $(A \cup B) - C$

7 - 9. शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 10.2

1. (क) {1,3,5,7} (ख) {2,4,6,8} (ग) {4,6,8} (घ) {3,4,5,6,7,8}
(ड) {2,4,5,7} (च) ϕ
2. (क) {3,6,9} (ख) {1,2,4,5,7,8,10} (ग) {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} (घ) ϕ
(ड) {3,6,9} (च) ϕ
3. (क) {o,u} (ख) {a,e} (ग) ϕ (घ) {a,e,o,u} (ड) {a,e,i} (च) {i,o,u}
(छ) {a,e,o,u} (ज) {i,o,u} (झ) {a,e,i} (ऋ) ϕ
4. शिक्षकलाई देखाउने
5. (क) {काठमाडौं, भक्तपुर, ललितपुर, नुवाकोट, धादिङ, रसुवा, सिन्धुपाल्चोक र काभ्रेपलान्चोक}
(ख) {नुवाकोट, धादिङ, रसुवा सिन्धुपाल्चोक र काभ्रेपलान्चोक}
(ग) {काठमाडौं, भक्तपुर, ललितपुर}
- (घ) U (ड) ϕ (च) ϕ
6. (क) {1,2,3,4,....} (ख) {2,4,6,8,10,.....} (ग) {1,3,5,7,.....}
(घ) {2,4,6,8,....} (ड) {1,2,3,4,5,.....} (च) ϕ
7. (क) {0,1,2,3,4,5} (ख) {4,5,6,7,8} (ग) {1,3,4,8,9}
(घ) {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14} (ड) {6,7,8,9,10,11,12,13,14}
(च) {0,1,2,3,9,10,11,12,13,14} (छ) {0,1,5,6,7,10,11,12,13,14}

- (ज) {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} (क) {4} (ञ) {10,11,12,13,14}
 (ट) {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14} (ख) {4,5}
 (ड) {0,1,2,3,6,7,8,9,10,11,12,13,14} (द) {0,1,2,3,6,7,9,10,11,12,13,14}
 (ण) {0,1,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14} (त) {0,1,2,3,} (थ) {5,6,7} (द) {8,9}

अभ्यास 10.3

1. (क) 90 (ख) 0 (ग) 10 (घ) 100 2.(क) 7 (ख) 9 (ग) 2
 (घ) 14 (ङ) 5 (च) 7 (छ) 8 (ज) 6

3. 25 जना 4.(क) 10 (ख) 60 (ग) 30 (5) 10,40
 (6) 25%; 5% (7) 10%,40%

अभ्यास 11.1

अभ्यास 11.2

अभ्यास 12.1

- | | | | | | | |
|------------------------|--------|--------|--------|---------|--------|----------|
| 1.(ક) 6 | (ખ) 29 | (ગ) 23 | (ઘ) 32 | (ડ) -25 | (ચ) 14 | (છ) 1005 |
| (જ) -121 | (ફ) 10 | (ઝ) 63 | (ટ) 18 | (ઠ) 32 | (ડ) 2 | |
| 2. શિક્ષકલાર્ડ દેખાઉને | (3) 10 | | (4) 35 | | (5) 31 | (6) 0 |
| (7) 18 | | (8) 0 | | (9) 100 | | (10) 100 |

अभ्यास 13.1

1. (क) 4.5×10^1 (ख) 3.4×10^3 (ग) 2.3×10^{-5} (घ) 1.01×10^5 (ङ) 1.0×10^{-2}
(च) 4.501×10^1 (छ) 7.0×10^6 (ज) 6.71×10^{-3} (फ) 6.256×10^2 (त्र) 7.882×10^{-2}
(ट) 1.18×10^5 (ठ) 8.72×10^4 (ड) 2.72×10^{-6} (द) 3.7×10^{-5} (ण) 7.41717×10^4
(त) 3.45678×10^3
2. (क) 23,000 (ख) 54 (ग) 1.76 (घ) 0.00176
(ड) 0.000074 (च) 0.0000001901 (छ) 1525000 (ज) 65,815,700
(फ) 525,600,000 (त्र) 0.00000523 (ट) 0.0000000871
(ठ) 0.0000000775763
- (3) 1.2×10^4 (4) 9.8×10^{-11} (5) 300,000,000 m/s (6) 6.48×10^6

अभ्यास 13.2

1. (क) 5.47×10^6 (ख) 7.15×10^{-2} (ग) 10.53×10^6 (घ) 3.51×10^2
(ड) 7.71×10^{-5} (च) 8.4×10^4
2. (क) 8.6×10^{14} (ख) 9.0×10^1 (ग) 1.20×10^{-2} (घ) 1.569×10^2
(ड) 0.4×10^{-5} (च) 6.0×10^1 (छ) 7.0×10^7 (ज) 4.0×10^{-10}
(फ) 0.9×10^1 (त्र) 2.0×10^5
3. (क) 2.0×10^9 (ख) 7.0×10^0 (ग) 2.0×10^7 (घ) 1.5×10^3
(4) 3.33×10^4 (5) 1.35×10^9 km (6) 6000 ओटा

अभ्यास 14.1

1. शिक्षकलाई देखाउने
2. (क) अनानुपातिक (ख) आनुपातिक (ग) अनानुपातिक (घ) आनुपातिक
(ड) अनानुपातिक (च) आनुपातिक (छ) आनुपातिक (ज) अनानुपातिक
(फ) आनुपातिक (त्र) अनानुपातिक (ट) आनुपातिक (ठ) आनुपातिक
3. (क) $\frac{5}{9}$ (ख) $\frac{7}{9}$ (ग) $\frac{8}{33}$ (घ) $\frac{44}{333}$ (ड) $\frac{3}{11}$ (च) $\frac{157}{99}$
(छ) $\frac{365}{999}$ (ज) $\frac{158}{33}$ (फ) $\frac{445}{999}$ (त्र) $\frac{508}{333}$

4-5. शिक्षकलाई देखाउने

अभ्यास 14.2

1. (क) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (ख) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (ग) $\frac{14\sqrt{2}}{8}$ (घ) $3\sqrt{3}$ (ङ) $2\sqrt{11}$
 (च) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ (छ) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ (ज) $\frac{5\sqrt{5} + \sqrt{15}}{5}$ (झ) $-3(1 - \sqrt{2})$ (ञ) $2\sqrt{3} - 3$
 (ट) $\frac{4 + \sqrt{7}}{3}$ (ठ) $\sqrt{3}$
2. (क) $9\sqrt{5}$ (ख) 0 (ग) $9\sqrt{7}$ (घ) $13\sqrt{3}$ (ङ) $12\sqrt{5}$
 (च) $18\sqrt{7}$ (छ) $3\sqrt{5}$ (ज) $11 + \sqrt{11}$ (झ) $3\sqrt{2}$ (ञ) $4\sqrt{7}$
 (ट) $4\sqrt{8}$ (ठ) $4\sqrt{17}$ (ड) $13\sqrt{6}$
3. (क) $11\sqrt{15}$ (ख) 196 (ग) $27\sqrt{30}$ (घ) $27\sqrt{30}$ (ङ) $60\sqrt{105}$ (च) -117
4. (क) $\frac{3\sqrt{2} + 10}{2}$ (ख) $\frac{5\sqrt{21} + 14\sqrt{2}}{7}$ (ग) $\frac{3\sqrt{5} + 1}{5}$
 (घ) $\frac{37\sqrt{5}}{5}$ (ঠ) $\frac{-23\sqrt{3}}{15}$

अभ्यास 15.1

1. (क) 5:1 (ख) 1:3 (ग) 1:2 (घ) 4:5 (ঠ) 3:8 (চ) 10:1
2. 800 जना (3) 16,000cm (4) -9,-12 (5) ₹. 250 र ₹. 350 (6) ₹. 5400
7. ₹. 64, ₹. 72 र ₹. 80(8) ₹. 10,000,000, ₹. 25,000,000 र ₹. 30,000,000
9. A = ₹. 10,940 B = ₹. 21,880 र C = ₹. 65,640

अभ्यास 15.2

1. (क) छन् (ख) छैनन् (ग) छैनन् (घ) छन्
2. (क) 3 (ख) 7 (ग) 1 (घ) 14
3. (क) 2 (ख) 49 (ग) 55 (घ) 5
 (4) 121 (5) 7 (6) ₹. 480 र ₹. 400 (7) 5 min (8) 96
 (9) 90 (10) 15 (11) 15N (12) 24,48 र 60 (13) 450gm

अभ्यास 15.3

1. (क) 75% (ख) 34% (ग) 62.5% (घ) 59% (ङ) 66.6%
2. (क) $\frac{9}{20}$ (ख) $\frac{7}{10}$ (ग) $\frac{1}{16}$ (घ) $\frac{91}{100}$ (ङ) $\frac{53}{100}$
3. (क) 25 (ख) 135 (ग) 22.5 (घ) 44
4. (क) 1500m (ख) 200 मिटर (ग) 50 दिन (घ) 600 विद्यार्थी
5. रु. 1440, रु. 10560 (6) 69 (7) रु. 2775 (8) 93.75% (9) 39993
 (10) रु. 14450 (11) 7.5%
12. (क) 10% (ख) 16% (ग) $5\frac{11}{19}\%$ (घ) 10% (ङ) 12% (च) 16.66%
13. 50% (14) 7% (15) रु. 23076.90 (16) विपनाले

अभ्यास 16.1

1. (क) नाफा = रु 30 (ख) नोक्सान = रु 500 (ग) नाफा = रु 700 (घ) नोक्सान = रु.10
2. (क) 10% नाफा (ख) 10% नोक्सानन (ग) 10% नाफा (घ) 0.1% नोक्सान
3. रु. 1200 (4) रु. 710 (5) 20% (6) रु. 16,500
7. 10% नाफा (8) रु. 53,820 (9) $7\frac{1}{3}\%$ नाफा (10) रु. 50,000
11. $6\frac{2}{3}\%$ (12) रु. 32,000 (13) नाफा नोक्सान केही पनि हुैन।

अभ्यास 16.2

1. रु. 184.80 (2) रु. 2070 (3) रु. 8756, रु 23460, रु. 1187.5, रु. 1395
4. रु. 15500 (5) 8%
6. (क) रु. 120 (ख) रु. 150 (ग) रु. 200 (घ) रु. 450
7. (क) 8% (ख) 10% (ग) 5% (घ) 10%
8. रु. 1250
- 9 (क) रु. 1960 (ख) रु. 392 (ग) रु. 1568 (घ) रु. 168
10. (क) रु. 1052.03 (ख) रु. 22628.25 (ग) रु 6608.24 (घ) रु 10322.55
11. रु. 1753.76 12. रु. 1247.52 13. रु. 4423.95

अभ्यास 17

- (1) 3 (2) 19 (3) 75 मिनेट (4) 8 घन्टा (5) 5 जना (6) 434gm
(7) 8 days (8). 50 जना (9). 20 km/hr (10) Rs.1720 (11) Rs. 20,000

अभ्यास 18.1

1. (क) रु. 45 (ख) रु. 1045 (ग) रु. 315 (घ) रु. 39.96
2. (क) 6 वर्ष (ख) 4 वर्ष (ग) 5 वर्ष (घ) 1 वर्ष 9 महिना
3. (क) 8% (ख) 3% (ग) $\frac{11}{2}\%$ (घ) $\frac{15}{2}\%$
4. (क) रु. 9990 (ख) रु. 1200 (ग) रु. 3300 (घ) रु. 1000
5. रु. 980 (6) रु. 2970 (7) रु. 2500 (8) $\frac{11}{2}\%$ (9) 8 वर्ष
10. रु. 10000 (11) रु. 432, 4 वर्ष

अभ्यास 18.2

1. (क) रु. 60,500 (ख) रु. 2462.40 (ग) रु. 26,750 (घ) रु. 63,825 (ड) रु. 538,410
2. रु. 39725 3. रु. 55,500 4. रु. 1000 5. रु. 1900
6. रु. 6,050 ; रु. 6,655 7. रु. 47,600 8. रु. 76,995 9. रु. 14,904 10. रु. 260,000

अभ्यास 19.1

1. (क) 15 (ख) 92 (ग) 38 (घ) 109
2. (क) 14 (ख) 12.5 वर्ष (ग) रु 66.25 (घ) 17 (ड) 6.2

अभ्यास 19.2

1. (क) 26 (ख) 47.5 (ग) 6.0 (घ) 110.5 kg (ड) 245
2. (क) 45 (ख) 12 वर्ष (ग) 200 (घ) 500
3. 12, 12 जना

अभ्यास 19.3

1. (क) 3 (ख) 8 (ग) 34 (घ) 120 (ड) 182
2. (क) 35 (ख) रु 225 (ग) 30 (घ) 18

अभ्यास 19.4

1. (क) 20 (ख) 35 (ग) 12cm (घ) 1.5 ft
(2). 40 (3) 90 (4) 75, 45

अभ्यास 19.5

1,2,3 शिक्षकलाई देखाउने ।

4. (क) 72 (ख) 54 (ग) 138 (घ) 102
 5. (क) ₹ 1,750 (ख) ₹1,575 (ग) 10,500

अभ्यास 19.6

1,2 शिक्षकलाई देखाउने । 3.(क) मद्दसिर 4 मि.मि. (ख) भदौ 23 मि.मि. (ग) 19 मि.मि.

अभ्यास 20.1.1

1. (क) $3(2x+1)$ (ख) $x(x+4)$ (ग) $3(4a+b)$ (घ) $6(2p^2+q^2)$ (ङ) $7y(2x+1)$
 (च) $x(1+x^2)$ (छ) $x(12x+y+z)$ (ज) $x(x^2+x+1)$ (झ) $2x^2(1-x+4x^2)$

2. (क) $(a+b)(x+y)$ (ख) $b(2+a)(2a-1)$ (ग) $3xy(x-1)$ (घ) $(x+3)(x+y)$
 (ङ) $(a+b)(2b+3)$ (च) $(a-b)(a+1)$ (छ) $(a-3)(2a+5)$ (ज) $a(x-1)(2-x)$
 (झ) $y(x+4)(x-y)$ (झ) $3(x+y)(x+y)$ (र) $(x+a)(2x+3a)$

अभ्यास 20.1.2

1. (क) $(x-2)(x+2)$ (ख) $(a-2b)(a+2b)$ (ग) $(3x-y)(3x+y)$ (घ) $5(x-2y)(x+2y)$

(ङ) $13(a-3b)(a+3b)$ (च) $(5-\frac{1}{3y})(5+\frac{1}{3y})$ (छ) $\left(11x-\frac{1}{y}\right)\left(11x+\frac{1}{y}\right)$ (ज) $2(p-\frac{5}{q})(p+\frac{5}{q})$

(फ) $2(6-b)(6+b)$ (अ) $(11-5y)(11+5y)$ (ट) $15(\frac{1}{a}-2a)(\frac{1}{a}+2a)$ (ठ) $(9-8y)(9+8y)$

(ड) $xy(2x-9y)(2x+9y)$ (ट) $(13-14z)(13+14z)$ (प) $ab(b-3a)(b+3a)$

(त) $\left(\frac{7x}{11}-\frac{8y}{3}\right)\left(\frac{7x}{11}+\frac{8y}{3}\right)$ (थ) $z(x-y)(x+y)$ (द) $(x+4)x$ (ध) $\left(16-\frac{x}{2}\right)\left(16+\frac{x}{2}\right)$

(न) $\left(1-\frac{9p}{111q}\right)\left(1+\frac{9p}{111q}\right)$ 2. $(x-3)(x+3)$ 3. $(x-6)(x+6)$ 4. $\pi(R-r)(R+r)$ 5. 286cm^2

अभ्यास 20.1.3

- | | | | | | |
|------------------|-----------------|---------------------------------------|-----------------|--|---------|
| 1. (क) $8x$ | (ख) $4ay$ | (ग) $12p$ | (घ) $24ab$ | (ङ) $70pq$ | (च) 4 |
| (छ) $240xy$ | (ज) $12y$ | (झ) 2 | | | |
| 2. (क) $(a+6)^2$ | (ख) $(y+7)^2$ | (ग) $(p+11)^2$ | (घ) $(2a+5)^2$ | (ङ) $(3r+10)^2$ | |
| (च) $(6x+7)^2$ | (छ) $(x-4)^2$ | (ज) $(a-9)^2$ | (झ) $(p-13)^2$ | (त्र) $(3a-5)^2$ | |
| (ट) $(5y-6)^2$ | (ठ) $(7r-5)^2$ | (ड) $(2p+6q)^2$ | (ढ) $(3a+7b)^2$ | (पर) $\left(\frac{x}{4} + 2y\right)^2$ | |
| (त) $(5a-4b)^2$ | (थ) $(7a-5r)^2$ | (द) $\left(5x - \frac{y}{5}\right)^2$ | | | |

अभ्यास 20.1.4

- | | | | |
|----------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| 1. (क) $(3x+2)(x+1)$ | (ख) $(a+6)(a+1)$ | (ग) $(m-5)(m+1)$ | (घ) $(x-13)(x-2)$ |
| (ङ) $(x+10)(x-3)$ | (च) $(y-6)(x+5)$ | (छ) $(p-11)(p+3)$ | (ज) $(a+6)(a+8)$ |
| (झ) $(x+6)(x+4)$ | (ज) $(x+13)(x-2)$ | (ट) $(x-12)(x-2)$ | (ठ) $(x-5)(x+3)$ |
| (ड) $(x+5)(x-3)$ | (द) $(x-4)(x-2)$ | (पर) $(a-16)(a+3)$ | (त) $a^2(a+8)(a+4)$ |
| (थ) $x(x+11)(x+1)$ | (द) $4x(x-3)(x+1)$ | | |

अभ्यास 20.1.5

- | | | | |
|----------------------|--------------------|----------------------|---------------------|
| 1. (क) $(3x+1)(x+2)$ | (ख) $(3x-1)(x-1)$ | (ग) $(x-4)(7x-2)$ | (घ) $(2a-3)(2a-1)$ |
| (ङ) $(5p-1)(3p-2)$ | (च) $(2a-5)(6a-1)$ | (छ) $(5x+1)(x-3)$ | (ज) $(5x+1)(2x-1)$ |
| (झ) $(3p-2)(5p-1)$ | (ज) $(3b-5)(2b+2)$ | (ट) $(21x+4)(x+1)$ | (ठ) $(2a+5b)(6a-b)$ |
| (ड) $(4a+3b)^2$ | (द) $(6x+7y)(x-y)$ | (पर) $(3a+5b)(a-2b)$ | (त) $(x-3)(x-1)$ |
| (थ) $(1+x)(28-x)$ | (द) $6q(p+2)(p+3)$ | | |

अभ्यास 20.2

- | | | |
|---|-------------------------------------|------------------------|
| 1. (क) x^3+3x^2+3x+1 | (ख) $x^3-9x^2+27x-27$ | (ग) $x^3+12x^2+48x+64$ |
| (घ) $8x^3-60x+150x-125$ | (ङ) $64-144b+108b^2-27b^3$ | |
| (च) $27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3$ | (छ) $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$ | (ज) $1+9y+27y^2+27y^3$ |
| 2. (क) $27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$ | (ख) $x^6 + 3x^4y + 3x^2y^2 + y^3$ | |
| (ग) $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6$ | (घ) $64a^3 - 48a^2b + 12ab^2 - b^3$ | |
| 3. (क) $(2a+3b)^3$ | (ख) $(4x+5y)^3$ | (4) 396 |

5. (क) $(a-2)(a^2+2a+4)$ (ख) $(3x+4y)(9x^2-12xy+16y^2)$ (ग) $(5p-6)(25p^2+30p+36)$

(घ) $(8+7b)(64-56b+49b^2)$

(6) 322 (7) 28 (8) 756 (9) 1692

10. (क) $-3yz(y+z)$ (ख) $2x(x^2+3a^2)$ (ग) $3pq(p-q)$

(घ) $x^3 + y^3$

(ङ) x^3-y^3

(च) $3ab(a+b)$

अभ्यास 20.3.1

1. (क) xy (ख) $3xy^2$ (ग) abc (घ) $x+2$ (ङ) $x-y$

(च) $p(p-q)$ (छ) $3a+b$

(ज) $x+y$

(झ) $x-6$

(ञ) $x-3$

(ट) $x+10$ (ठ) $a+3$

(ड) $x-1$

(द) $a-b$

(पर) $1-y^2$

2. (क) $x-a$ (ख) $x-y$ (ग) $a(a+b)$ (घ) $x+3$ (ङ) $a-1$

(च) $x+2$

(छ) $x-3$

(ज) $a-2$

(झ) $a+2$

अभ्यास 20.3.2

1. (क) $4x$ (ख) $6xy^2$ (ग) $10xy^2$ (घ) $6a^2b^2$ (ङ) $2a(a+2)$

(च) $3(x^2-1)$ (छ) $x(x+y)$

(ज) $x(x+2)^2$

(झ) $5(x^2-16)$

(ञ) $pq(p-q)$

(ट) $6x^2(x^2-25)$

(ठ) $x(x^2-4)(x+5)$

(ड) $(x+2)(3x+1)(2x-1)$

(द) $(y-6)(y-3)(y-8)$ (पर) $(a-2b)(a+2b)^2$ (त) $(3x-4y)^2(x+y)$

2. (क) $24x^2y^2$ (ख) $x(x^2-4)$ (ग) $xy(x^2-y^2)$ (घ) $pq(p-q)^2(p+q)$ (ङ) $(a-1)^2(a+1)(a+2)$

(च) $(x+1)(x+2)^2(x-2)$

(छ) $(x-1)(x-2)(x+3)$

(ज) $(2x-3y)^2(2x+3y)^2$

(झ) $x^2(2x+3)(3x-2)(x-1)$

(ञ) $x^2(x^2-4)(x+6)(x-7)$

अभ्यास 20.4.1

1. (क) 11 (ख) y (ग) ± 2 (घ) 4 (ङ) ± 4 (च) ± 7

2. (क) $\frac{3}{4x}$ (ख) $\frac{x}{2y}$ (ग) $\frac{a+b}{a-b}$ (घ) $\frac{5(a+3)}{4}$ (ङ) $\frac{(x-3)^2}{2}$

(च) $\frac{x+3}{x-3}$ (छ) $\frac{a+2}{a-4}$

(ज) $\frac{x+4}{x+2}$

(झ) $\frac{2x+3}{2x-3}$

(ञ) $\frac{x-3}{x+4}$

(ट) $\frac{x+2}{x+3}$ (ठ) $\frac{x-3}{x-1}$

(ड) $\frac{x+1}{x-5}$

(द) $\frac{yz}{x-4}$

अभ्यास 20.4.2

1. (क) $\frac{3x}{7}$ (ख) $\frac{2x}{9}$ (ग) $\frac{13}{3x}$ (घ) $\frac{1}{x+2}$ (ङ) $\frac{2x+3}{2}$

(च) $\frac{x}{a+1}$ (छ) $\frac{6-3y}{y-3}$ (ज) 3 (झ) 0

2. (क) $\frac{2x}{x+3}$ (ख) $\frac{2x}{x^2+2}$ (ग) $\frac{1}{y-3}$ (घ) $\frac{ax^2+bx+c}{x+a}$ (ङ) $\frac{x-2}{x+2}$

(च) $y+2$ (छ) $15-5p$ (ज) $(p-3)^2$ (झ) $3(x+y)$ (ङ) 1

(ट) $\frac{m}{m+3}$ (ठ) $\frac{x}{x-1}$ (ड) $x-2y$ (ढ) $3a+4b$

अभ्यास 20.4.3

1. (क) $\frac{9-5x}{15}$ (ख) $\frac{31x}{35}$ (ग) $\frac{5x^2}{12}$ (घ) $\frac{35x-22}{55}$ (ङ) $\frac{8x}{7}$

(च) $\frac{3a+2b}{18}$ (छ) $\frac{31x}{7}$ (ज) $\frac{3x^2+4y^2}{12}$ (झ) $\frac{2b-3}{ab}$

(ट) $\frac{9y-35}{21y}$ (ठ) $\frac{x^2-4y^2}{y}$ (ड) $\frac{4x-4}{2x-x^2}$

2. (क) $\frac{4}{x^2-4}$ (ख) $\frac{2b}{a^2-b^2}$ (ग) $\frac{3p+2q}{p^2-4q^2}$ (घ) $\frac{1}{2}$

(ङ) $\frac{a^2-2ab-b^2}{a+b}$ (च) $\frac{7x-a}{x^2-a^2}$ (छ) $\frac{2x+1}{x^2-1}$ (ज) $\frac{16}{(x-5)(x-3)}$

(झ) $\frac{2x+7}{x-7}$ (ट) $\frac{14x+1}{6}$ (ठ) $\frac{3x-4}{6(x+y)}$ (ड) $\frac{9-5x-x^2}{(x-9)(x-6)}$

(इ) $\frac{x+4}{x^2-2x}$ (द) $\frac{4x-3}{(x-3)(x-2)}$ (प) $\frac{x-1}{x(x+4)}$ (त) $\frac{a+3}{a-1}$

(थ) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$ (द) $\frac{x-4}{(x+2)(x-1)}$ (प) $\frac{-2}{a^2-4}$

(न) $\frac{(x^2-y^2)(a+b)+z^2}{a^2-b^2}$ (प) $\frac{x}{x^2-1}$ (झ) $\frac{8a}{a^2-1}$

अभ्यास 20.4.4

1. (क) $\frac{2x^2}{y^2}$ (ख) $\frac{x}{y}$ (ग) $\frac{ac}{4b}$ (घ) $\frac{x(x-y)}{y(x+y)}$ (ङ) 2 (च) $\frac{x+2}{x-3}$

2. (क) $\frac{x}{y}$ (ख) $\frac{5x}{8a}$ (ग) $\frac{2}{x}$ (घ) $\frac{ay}{bx^2}$ (ङ) $\frac{b(a+b)}{a}$ (च) $\frac{x+1}{y}$

3. (क) $\frac{x+y}{x-y}$ (ख) 1 (ग) $\frac{-4(x-2)}{y}$ (घ) $\frac{a-b}{a+3}$ (ङ) $\frac{y-3}{y-2}$

(च) $\frac{b(x+2)}{c(x-2)}$ (ख) $\frac{5}{x-2}$ (ज) $\frac{x-y}{x+y}$ (झ) $\frac{x-3}{x}$ (ञ) $\frac{x+1}{x-1}$

4. (क) $x+y$ (ख) $\frac{x-2}{x-3}$ (ग) $\frac{2x(x+6)}{3(x-4)}$ (घ) $\frac{x-4}{x(x-1)}$ (ङ) $\frac{x-3}{3}$ (च) $\frac{9(x+1)}{x-2}$

(छ) $\frac{x+2}{y+2}$ (ज) $\frac{y+3}{y-3}$ (झ) $\frac{(x-3)(x+1)}{(x-5)(x+3)}$ (ञ) $\frac{a+1}{a+2}$

5. (क) $\frac{22x}{75}$ (ख) $\frac{x^2+1}{x-1}$ (ग) $\frac{3}{x-1}$ (घ) 1 (ङ) 1

अभ्यास 21

1. (क) 8^7 (ख) x^{13} (ग) p^3q^2 (घ) $6x^5$ (ङ) a^6b^3 (च) $-12y^2$

2. (क) 9 (ख) 4^5 (ग) $4x^2$ (घ) $-4a^3$ (ङ) 5p

3. (क) 2^{12} (ख) 5^6 (ग) 5^4x^{12} (घ) 7^4p^{12} (ङ) x^4y^7 (च) $4^33^4x^{24}$

(छ) $(ab)^{3c}$ (ज) x^2y^{-2} (झ) p^2

4. (क) 2 (ख) 5^6 (ग) 5 5. (क) a^{m+n+4} (ख) x (6) 160

अभ्यास 22.1

1. (क) 3 (ख) 17 (ग) 3 (घ) $4\frac{2}{5}$ (ङ) 16 (च) 41

(छ) $\frac{1}{8}$ (ज) 2 (झ) $9\frac{2}{5}$

2. (क) 1 (ख) 3 (ग) $\frac{18}{25}$ (घ) -19 (ङ) -1 (च) -12

3. (क) -14 (ख) $1\frac{9}{20}$ (ग) -8 (घ) $-\frac{3}{2}$ (ङ) -8 (च) 6

(छ) 4 (ज) 0 (झ) $-\frac{1}{16}$

4. (क) 350 (ख) 12.5 (ग) 50 (घ) 200 (ङ) 254

5. $2x+7 = 35$, 14 (6) 8, 12 (7) 12 (8) 10 cm (9) 436, 445

(10) 4.4 मीटर (11) 20 वर्ष, 35 वर्ष (12) 20 वर्ष

अभ्यास 22.2

1. (क) $x \geq 2$ (ख) $x < -1$ (ग) $x < 2$ (घ) $x < 8$ (ङ) $x > 5$

(च) $x > 4$ (छ) $x \leq -1$ (ज) $x \geq 5$ (झ) $x > -1$ (त्र) $x \leq \frac{7}{2}$

(ट) $x \leq 3$ (ठ) $x \geq 1$ (ड) देखि (ण) सम्म शिक्षकलाई देखाउने

(त) $-6 \leq x \leq -2$ (थ) $-3 \leq x < -1$ (2) $y \geq 5$ (3) $y < -7$

4. (क) $y \leq -5$ (ख) $y \geq 2\frac{1}{2}$ (ग) $x < -3$

5. 15 वटा (6) < 2 (7) $x > 2\frac{4}{7}$ (8) 19 गिलास

9. ≤ 0 (10) $x > 7$ (11) $5 < x < 7$

अभ्यास 22.3

1. (क) (3,-1) (ख) (2,1) (ग) (7,6) (घ) (4,2) (ङ) (6,2) (च) (1,-2)

(छ) (2,0) (ज) (1,5) (झ) (2,-3) (त्र) (3,2) (ट) (4.5,-4) (ठ) (3,3)

2. (क) (10,5) (ख) (3,9) (ग) (20,25) (घ) (रु.40, रु.20) (ङ) (20,57)

(च) (15 वर्ष, 10 वर्ष) (छ) (10 वर्ष, 6 वर्ष) (ज) (16 वर्ष, 36 वर्ष)

अभ्यास 22.4

1. (क) 0,4 (ख) $0, \frac{1}{2}$ (ग) $\frac{1}{3}, 0$ (घ) $\pm \frac{2}{3}$ (ङ) $0, -\frac{5}{9}$ (च) $0, \frac{7}{4}$
 (छ) ± 7 (ज) $\pm \frac{14}{13}$ (झ) ± 12 (ञ) $0, \pm 2$
2. (क) -1 (ख) -1,2 (ग) 1,-2 (घ) -2 (ङ) 12,-2
 (च) 3,6 (छ) 5, 6 (ज) -3,1 (झ) -4 (ञ) 4
 (ट) -5 (ठ) 5,3 (ड) 2,4 (ढ) $2, \frac{-3}{2}$ (ण) -4,-3
 (त) $\frac{1}{7}, -2$ (थ) 2, -11 (द) 7,11 (ध) $-4, \frac{-3}{2}$ (न) $5, \frac{-4}{3}$
 (प) $-\frac{3}{2}, \frac{-2}{5}$ (फ) $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ (ब) $3, \frac{2}{3}$ (भ) 1,-3 (म) 1,-7
 (य) 0,-12 (र) -1,15 (ल) 15,-5