

अनुक्रमांक

नाम

131

324(AX)

2023

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट]

[पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

निर्देश : i) इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।

ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

i) There are in all *nine* questions in this question paper.

ii) *All* questions are compulsory.

iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.

iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

vi) Do not waste your time over a question which you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

क) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(y + \frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{5}}$ का घात होगा

i) 2

ii) 5

iii) 1

iv) $\frac{1}{5}$

1

ख) निम्नलिखित में से $\int \cos^2 x dx$ का मान होगा

i) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c$

ii) $\frac{x}{4} - \frac{1}{2} \sin 2x + c$

iii) $\cos^2 x - \sin^2 x + c$

iv) $2 \cos x \sin x + \frac{x}{2} + c$

1

ग) सदिशों $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण होगा

i) 90°

ii) 60°

iii) 30°

iv) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{14}\right)$

1

घ) यदि दो परिमित समुच्चयों A तथा B में अवयव क्रमशः m तथा n हों, तो A से B में कुल सम्बन्धों की संख्या होगी

i) 2^{m+n}

ii) 2^{mn}

iii) $m \times n$

iv) $m + n$

1

ङ) यदि $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$, तो निम्न में से A से B में फलन होगा

i) $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$

ii) $\{(1, 3), (2, 4)\}$

iii) $\{(1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$

iv) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 4)\}$

1

1. Attempt all the parts of the following :

Write the correct alternative of each part in your answer-book :

a) The degree of differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(y + \frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{5}}$ will be

i) 2

ii) 5

iii) 1

iv) $\frac{1}{5}$

1

b) The value of $\int \cos^2 x dx$ will be

i) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c$

ii) $\frac{x}{4} - \frac{1}{2} \sin 2x + c$

iii) $\cos^2 x - \sin^2 x + c$

iv) $2 \cos x \sin x + \frac{x}{2} + c$

c) The angle between the vectors $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ and $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ will be

i) 90°

ii) 60°

iii) 30°

iv) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{14}\right)$

d) If the numbers of elements of two finite sets A and B are m and n respectively, then total number of relations from A to B will be

i) 2^{m+n}

ii) 2^{mn}

iii) $m \times n$

iv) $m + n$

e) If $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ then the function from A to B will be

i) $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$

ii) $\{(1, 3), (2, 4)\}$

iii) $\{(1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$

iv) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 4)\}$

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & \text{यदि } x \leq 2 \\ x^2 + 1 & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$ $x = 2$ पर संतत फलन है।

ख) वक्रों के परिवार $y = a \sin(x + b)$ जिसमें a और b स्वेच्छ अचर हैं, का अवकल समीकरण को ज्ञात कीजिए।

ग) सिद्ध कीजिए कि $f(1) = f(2) = 1$ तथा $x > 2$ के लिए $f(x) = x - 1$ द्वारा परिभाषित फलन $f: N \rightarrow N$ आच्छादक तो है परन्तु एकैकी नहीं है।

घ) यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ और $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{2}{5}$, तो $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए।

ङ) असमिका $8x + 4 < 7x + 8$ को हल कीजिए।

324(AX)

2. Do all the parts of the following :

a) Prove that the function $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & \text{if } x \leq 2 \\ x^2 + 1 & \text{if } x > 2 \end{cases}$ is continuous.function at $x = 2$.b) Find the differential equation of the family of curves $y = a \sin(x+b)$, where a and b are arbitrary constants.c) Prove that the function $f: N \rightarrow N$ defined by $f(x) = x-1$, when $x > 2$ and $f(1) = f(2) = 1$ is onto but it is not one-one.d) If $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ and $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{2}{5}$, then find $P(A \cup B)$.e) Solve the inequality $8x+4 < 7x+8$.

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) बिन्दुओं $(2, -5, 1)$ तथा $(1, 4, -6)$ को मिलाने वाली रेखा पर उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो उस रेखा को $2:3$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।ख) यदि $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी दो भुजाओं को \vec{a} और \vec{b} से प्रदर्शित किया गया है।ग) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $A^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$.

घ) पूर्णाकों 1 से 11 तक में से दो पूर्णांक यादृच्छया चुने जाते हैं। यदि उनका योग सम है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि दोनों पूर्णांक विषम हैं।

3. Do all the parts of the following :

a) Find the coordinates of the point which divides the line joining the points $(2, -5, 1)$ and $(1, 4, -6)$ internally in the ratio $2:3$.b) Find the area of the triangle whose two sides are represented by \vec{a} and \vec{b} if $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$.c) If $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, prove that $A^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$.

d) Two integers among 1 to 11 are selected at random. If their sum is even, then find the probability that both integers are odd.

निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $f:R \rightarrow R$, जहाँ $f(x)=\sin x$ और $g:R \rightarrow R$ जहाँ $g(x)=x^2$, तो $f(x)$ तथा $g(x)$ का परिसर ज्ञात कीजिए। 2

ख) यदि $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ तथा $P(A \cup B)=\frac{2}{3}$ हों, तो सिद्ध कीजिए कि घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र हैं। 2

ग) यदि $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ और $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$ इस प्रकार है कि $\vec{a}+\lambda\vec{b}$, \vec{c} पर लम्ब है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए। 2

घ) अवकल समीकरण $(x-y)dy-(x+y)dx=0$ को हल कीजिए। 2

4. Do all the parts of the following :

a) If $f:R \rightarrow R$, where $f(x)=\sin x$ and $g:R \rightarrow R$, where $g(x)=x^2$, then find the range of $f(x)$ and $g(x)$. 2

b) If $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ and $P(A \cup B)=\frac{2}{3}$, prove that the events A and B are independent. 2

c) If $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ and $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$ are such that $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ is perpendicular to \vec{c} , then find the value of λ . 2

d) Solve the differential equation $(x-y)dy-(x+y)dx=0$. 2

5. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए : $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \right)$. 5

ख) यदि $f(x)=x+\frac{1}{x}$, तो सिद्ध कीजिए कि $[f(x)]^3=f(x^3)+3f\left(\frac{1}{x}\right)$. 5

ग) $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ का $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 5

घ) बिन्दुओं $-2\hat{i}+6\hat{j}-6\hat{k}$, $-3\hat{i}+10\hat{j}-9\hat{k}$ और $-5\hat{i}-6\hat{j}-6\hat{k}$ से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। 5

ङ) वक्र $x^{2/3}+y^{2/3}=2$ के बिन्दु $(1, 1)$ पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए। 5

5. Do all parts of the following :

a) Prove : $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \right)$ 5

b) If $f(x) = x + \frac{1}{x}$, prove that $[f(x)]^3 = f(x^3) + 3f\left(\frac{1}{x}\right)$. 5

c) Find the differential coefficient of $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ with respect to $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$. 5

d) Find the equation to the plane passing through the points $-2\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}$, $-3\hat{i} + 10\hat{j} - 9\hat{k}$ and $-5\hat{i} - 6\hat{j} - 6\hat{k}$. 5

e) Find the equation of normal at the point (1, 1) of the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$. 5

6. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि दो पास एक साथ फेंके जा रहे हैं, तो कम से कम एक 6 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

ख) $\int \frac{\sec^2 2x dx}{(\cot x - \tan x)^2}$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

ग) अगर एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के निर्देशांक (1, 5, -1), (0, 4, -2) और (2, 3, 4) हैं, तो इसके शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। 5

घ) $\int_a^b x^2 dx$ का योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकलन की सहायता से मान ज्ञात कीजिए। 5

ङ) रेखाओं $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ तथा $\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

6. Do all the parts of the following :

a) If two dice are thrown together, then find the probability of getting at least one 6. 5

b) Evaluate : $\int \frac{\sec^2 2x dx}{(\cot x - \tan x)^2}$. 5

c) If the coordinates of mid-points of the sides of a triangle are $(1, 5, -1)$, $(0, 4, -2)$ and $(2, 3, 4)$ then find the coordinates of its vertices. 5

d) Find the value of $\int_a^b x^2 dx$ with the help of definite integral as the limit of a sum. <https://www.upboardonline.com> 5

e) Find the shortest distance between the lines

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \text{ and } \vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}). \quad 5$$

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) समीकरण निकाय $3x - 2y + 3z = 8$, $2x + y - z = 1$ तथा $4x - 3y + 2z = 4$ को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 8

ख) अवकल समीकरण $(\tan^{-1} y - x) dy = (1 + y^2) dx$ को हल कीजिए। 8

7. Do any one part of the following :

a) Solve the following system of equations by matrix method : $3x - 2y + 3z = 8$, $2x + y - z = 1$ and $4x - 3y + 2z = 4$. 8

b) Solve the differential equation $(\tan^{-1} y - x) dy = (1 + y^2) dx$. 8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

ख) i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

ii) यदि वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ का अभिलम्ब x -अक्ष से θ कोण बनाए तो सिद्ध कीजिए कि अभिलम्ब का समीकरण $y \cos \theta - x \sin \theta = a \cos 2\theta$ है। 4

8. Do any one part of the following :

a) Evaluate : $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$. 8

b) i) Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$. 4

ii) If the normal of the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ makes an angle θ with x-axis, prove that the equation of the normal is $y \cos \theta - x \sin \theta = a \cos 2\theta$. 4

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) आलेखीय विधि द्वारा निम्न रेखिक प्रोग्रामन समस्या को निम्नलिखित व्युत्क्रमों के अन्तर्गत हल कीजिए :

$$x + 3y \leq 60, x + y \geq 10.$$

$$x \leq y, x \geq 0 \text{ और } y \geq 0$$

$Z = 3x + 9y$ का न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। 8

ख) प्रारंभिक रूपान्तरणों के द्वारा आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 8

9. Do any one part of the following :

a) Solve the following linear programming problem by graphical method, under the following constraints :

$$x + 3y \leq 60, x + y \geq 10.$$

$$x \leq y, x \geq 0 \text{ and } y \geq 0$$

Find the minimum and maximum values of $Z = 3x + 9y$. 8

b) Find the inverse of the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ by elementary transformations. 8

324(Ax) - 1,15,000

<https://www.upboardonline.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से

अनुक्रमांक

नाम

131

324(A.Y)

2023

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट]

[पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Note . First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

निर्देश : i) इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।

ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

i) There are nine questions in this question paper.

ii) All questions are compulsory.

iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.

iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. सभी खण्डों को हल कीजिए :

सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

क) यदि $y = 4t$ और $x = \frac{4}{t}$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा

i) $-t^2$

ii) $-\frac{1}{t^2}$

iii) $-\frac{1}{t}$

iv) t^3

1

ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, तब BA होगा

i) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

iii) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

iv) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

1

ग) वक्र $y = 2x^2 + 3 \sin x$ के $x = 0$ पर अभिलम्ब का ढाल होगा

i) $\frac{1}{3}$

ii) 3

iii) $-\frac{1}{3}$

iv) -3

1

घ) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ का मान होगा

i) $\frac{\pi}{6}$

ii) $\frac{\pi}{12}$

iii) $\frac{\pi}{3}$

iv) $\frac{2\pi}{3}$

1

ङ) मापांक फलन $f: R \rightarrow R^+$, $f(x) = |x|$ फलन के द्वारा प्रदत्त है, वह होगा

i) एकैकी तथा आच्छादक

ii) बहुकेकी तथा आच्छादक

iii) एकैकी तथा आच्छादक नहीं

iv) बहुकेकी तथा आच्छादक नहीं।

1

1. Do all the parts of the following :

Write the correct alternative of each part in your answer-book :

a) If $y = 4t$ and $x = \frac{4}{t}$, then the value of $\frac{dy}{dx}$ will be

i) $-t^2$

ii) $-\frac{1}{t^2}$

iii) $-\frac{1}{t}$

iv) t^3

1

b) If $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, then BA will be

i) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

iii) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

iv) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

1

c) The slope of the normal to the curve $y = 2x^2 + 3\sin x$ at $x = 0$ will be

i) $\frac{1}{3}$

ii) 3

iii) $-\frac{1}{3}$

iv) -3

1

d) The value of $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ will be

i) $\frac{\pi}{6}$

ii) $\frac{\pi}{12}$

iii) $\frac{\pi}{3}$

iv) $\frac{2\pi}{3}$

1

e) The modulus function $f: R \rightarrow R^+$ given by $f(x) = |x|$ will be

i) one-one and onto

ii) many-one and onto

iii) one-one and into

iv) many-one and into.

1

2. सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) मान ज्ञात कीजिए : $\int x^2 \sin(x^3) dx$.

1

ख) यदि सदिश $2\hat{i} + \hat{j} - a\hat{k}$ तथा $\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ परस्पर लम्बवत् हैं, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

1

ग) हल कीजिए : $\frac{dy}{dx} = \frac{x + e^x}{y}$.

1

घ) यदि $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \tan^{-1} x$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

1

ङ) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ है, तो $(A+B)$ तथा $(A-B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

1

2. Do all the parts of the following :

- a) Evaluate : $\int x^2 \sin(x^3) dx$. 1
- b) If the vectors $2\hat{i} + \hat{j} - a\hat{k}$ and $\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ are perpendicular, then find the value of a . 1
- c) Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{x + e^x}{y}$. 1
- d) If $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \tan^{-1} x$, find the value of x . 1
- e) If $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, then find the value of $(A + B)$ and $(A - B)$. 1

3. सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) यदि $y = A \cos \theta + B \sin \theta$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2 y}{d\theta^2} = -y$. 2
- ख) असमिका $3x + 4y \leq 12$, $4x + 3y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ को ग्राफीय विधि से हल कीजिए। 2
- ग) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$. 2
- घ) यदि A तथा B दो व्युत्क्रमणीय आव्यूह कोटि n के हैं तो सिद्ध कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. 2

3. Do all the parts of the following :

- a) If $y = A \cos \theta + B \sin \theta$, then prove that $\frac{d^2 y}{d\theta^2} = -y$. 2
- b) Solve the inequality $3x + 4y \leq 12$, $4x + 3y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ by graphical method. 2
- c) Prove that $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$. 2
- d) If A and B are two non-singular square matrices of order n , then prove that $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. 2

4. सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) वक्र $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$ का $t = \frac{\pi}{2}$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। 2

ख) एक पासे को दो बार उछाला जाता है। यदि उनके सतहों पर आये अंकों का योगफल 6 है, तो आये हुए अंकों में से कम से कम एक 4 होने की शर्त प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

घ) रेखा $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{2}$ का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। 2

घ) अवकल समीकरण $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$ को हल कीजिए। 2

4. Do all the parts of the following :

a) Find the equation of tangent at $t = \frac{\pi}{2}$ on the curve $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$. 2

b) One die is thrown two times. If the sum of the appeared numbers on their faces is 6, find the conditional probability of appearing number 4 at least one time in that. 2

c) Find the vector equation of the line $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{2}$. 2

d) Solve the differential equation $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$. 2

5. सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि सम्बन्ध $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (a - b), 2 \text{ से विभाजित हो} \}$ एक तुल्यता सम्बन्ध है। 5

ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 5

ग) $y = (\cos x)^{\tan x} + x^x$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 5

घ) यदि फलन $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{यदि } x \leq 3 \\ bx+3 & \text{यदि } x > 3 \end{cases}$ $x = 3$ पर संतत है तो a तथा b का मान ज्ञात कीजिए। 5

ङ) फलन $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ के लिए अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन (i) वर्धमान तथा (ii) हासमान हो। 5

5. Do all the parts of the following :

- a) Prove that the relation $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (a - b) \text{ is divisible by } 2\}$ is an equivalence relation. 5
- b) If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, then prove that $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 5
- c) Differentiate $y = (\cos x)^{\tan x} + x^x$. 5
- d) If the function $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{if } x \leq 3 \\ bx+3 & \text{if } x > 3 \end{cases}$ is continuous at $x = 3$, then find the values of a and b . 5
- e) Find the interval in which the function $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ is (i) increasing and (ii) decreasing. 5

6. सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) अवकल समीकरण $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2)dx$ को हल कीजिए। 5
- ख) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ तथा $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5
- ग) एक पासे को तीन बार फेंका जाता है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब प्राप्त अंकों में से एक अंक विषम संख्या हो। 5
- घ) वृत्त $x^2 + y^2 = 8x$, परवलय $y^2 = 4x$ तथा x -अक्ष के ऊपरी भाग के मध्य घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5
- ङ) मान ज्ञात कीजिए : $\int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2} \right] dx$. 5

6. Do all the parts of the following :

- a) Solve the differential equation $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2)dx$. 5
- b) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ and $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$. 5
- c) If a die is thrown three times, then find the probability of getting at least one appearing number in them will be odd. 5

- d) Find the area including between the circle $x^2 + y^2 = 8x$, parabola $y^2 = 4x$ and upper part of x -axis. 5

- e) Evaluate $\int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2} \right] dx$. 5

7. किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ समीकरण $A^2 - 4A + I_2 = 0$ को संतुष्ट करता है जहाँ I_2 एक 2×2 तत्समक आव्यूह तथा 0 एक 2×2 शून्य आव्यूह है। इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए। 8

- ख) समीकरणों के निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए : 8

$$3x - 2y + 3z = 8, 2x + y - z = 1 \text{ और } 4x - 3y + 2z = 4.$$

Do any one part of the following :

- a) Prove that the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ satisfies the equation $A^2 - 4A + I_2 = 0$, where I_2 is 2×2 identity matrix and 0 is 2×2 zero matrix. Find A^{-1} with the help of this. 8

- b) Solve the system of equations by matrix method : 8

$$3x - 2y + 3z = 8, 2x + y - z = 1 \text{ and } 4x - 3y + 2z = 4.$$

निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) i) $Z = 8000x + 12000y$ का निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत अधिकतम मान ज्ञात कीजिए : 4

$$9x + 12y \leq 180, 3x + 4y \leq 60, x + 3y \leq 30, x \geq 0, y \geq 0.$$

- ii) मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$. 4

- ख) मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi/2} \log_e \sin x dx$. 8

8. Do any one part of the following :

a) i) Maximize $Z = 8000x + 12000y$ under the following constraints :

$$9x + 12y \leq 180, 3x + 4y \leq 60, x + 3y \leq 30, x \geq 0, y \geq 0.$$

ii) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$

b) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \log_e \sin x dx.$

9. किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) i) यदि $y = \sin^{-1} x$, तो सिद्ध कीजिए $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0.$

ii) वक्र $y = \cos(x + y)$, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ का रेखा $x + 2y = 0$ के समान्तर स्पर्श रेखा का समीकरण लिखिए।

ख) i) एक समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ तथा $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = -5$ के प्रतिच्छेद तथा बिन्दु $(1, 1, 1)$ से गुजरता है।

ii) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ को हल कीजिए।

9. Do any one part of the following : <https://www.upboardonline.com>

a) i) If $y = \sin^{-1} x$, then prove that $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0.$

ii) Find the equation of tangent of the curve $y = \cos(x + y)$, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ which is parallel to the line $x + 2y = 0.$

b) i) Find the vector equation of a plane which passes through the point of intersection of the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ and $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = -5$ and the point $(1, 1, 1).$

ii) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} - y = \cos x.$

131

324(AZ)

2023

भाषित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट ।

[पूर्णक : 100]

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

निर्देश : i) इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं ।

ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।

iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं ।

iv) प्रश्नों के अंक उनके साममुख अंकित हैं ।

v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए ।

vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए ।

Instructions :

i) There are in all nine questions in this question paper.

ii) All questions are compulsory.

iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted is clearly mentioned.

iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

क) समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध होगा

- i) स्वतुल्य और सममित नहीं, किन्तु संक्रामक
- ii) स्वतुल्य और संक्रामक नहीं, किन्तु सममित
- iii) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न ही संक्रामक
- iv) सममित और संक्रामक नहीं, किन्तु स्वतुल्य।

1

ख) $f(x) = x^2 + 5$ द्वारा परिभाषित फलन $f: R \rightarrow R$ होगा

- i) एकैक और आच्छादक
- ii) बहु-एक और आच्छादक
- iii) एकैक, किन्तु आच्छादक नहीं
- iv) न तो एकैक और न ही आच्छादक।

1

ग) यदि A वर्ग आव्यूह इस प्रकार है कि $A^2 = A$, तो $(I + A)^3 - 7A$ बराबर होगा

- i) A
- ii) $I - A$
- iii) I
- iv) $3A$

1

घ) सदिश $\hat{i} + \hat{j}$ पर सदिश $\hat{i} - \hat{j}$ का प्रक्षेप होगा

- i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- ii) $\sqrt{2}$
- iii) 1
- iv) 0

1

ङ) अवकल समीकरण $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 7y = \sin x$ की कोटि होगी

- i) 2
- ii) 3
- iii) 5
- iv) 6

1

1. Do all the parts of the following :

Write the correct alternative of each part in your answer book :

a) In the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, the relation R defined by $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ will be

- i) not reflexive and symmetric, but transitive
- ii) not reflexive and transitive, but symmetric
- iii) not reflexive, not symmetric and not transitive
- iv) not symmetric and transitive, but reflexive.

1

- b) The function $f: R \rightarrow R$ defined by $f(x) = x^2 + 5$ will be
- i) one-one and onto ii) many-one and onto
 iii) one-one, but not onto iv) neither one-one nor onto. 1
- c) If A is a square matrix such that $A^2 = A$, then $(I + A)^3 - 7A$ will be
- i) A ii) $I - A$
 iii) I iv) $3A$ 1
- d) On the vector $\hat{i} + \hat{j}$ the projection of vector $\hat{i} - \hat{j}$ will be
- i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ii) $\sqrt{2}$
 iii) 1 iv) 0 1
- e) The order of the differential equation
- $$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 7y = \sin x$$
- will be
- i) 2 ii) 3
 iii) 5 iv) 6 1

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) $\cos(\sec^{-1} x)$ का मान ज्ञात कीजिए। 1
- ख) आव्यूह AB ज्ञात कीजिए, यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. 1
- ग) जाँच कीजिए कि क्या $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $f: R \rightarrow R$; $x = 0$ पर सतत है। 1
- घ) $\int \sec x (\sec x + \tan x) dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1
- ङ) यदि A और B ऐसी दो घटनायें हैं कि $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ और $P(A \cap B) = 0.15$, तो $P(A|B)$ ज्ञात कीजिए। 1

324(AZ)

2. Do all the parts of the following :

a) Find the value of $\cos(\sec^{-1} x)$. 1

b) If $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, find the matrix AB . 1

c) Test whether the function $f: R \rightarrow R$ defined by

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & \text{if } x \neq 0 \\ 1, & \text{if } x = 0 \end{cases} \text{ is continuous at } x = 0. \quad 1$$

d) Evaluate : $\int \sec x (\sec x + \tan x) dx$. 1

e) If A and B are two events such that $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ and $P(A \cap B) = 0.15$, find $P(A|B)$. 1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 \leq x \leq 1$, तो सिद्ध कीजिए

$$(1-x)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0. \quad 2$$

ख) $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

ग) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

घ) बिन्दु $(2, 5, -3)$ की समतल $\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$ से दूरी ज्ञात कीजिए। 2

3. Do all the parts of the following :

a) If $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 \leq x \leq 1$, then prove that

$$(1-x)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0. \quad 2$$

b) Evaluate : $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} dx$. 2

c) Find the value of $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$. 2

d) Find the distance of the point $(2, 5, -3)$ from the plane $\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$. 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) उस समतल का सदिश एवं कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(1, 0, -2)$ से गुजरता है और जिस पर सदिश $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ लम्बवत हो। 2
- ख) स्वेच्छ अचरों a और b को विलुप्त करके वक्रों के कुल $y^2 = a(b^2 - x^2)$ को निरूपित करने वाला अवतल समीकरण ज्ञात कीजिए। 2
- ग) यदि $x = a\left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right)$ और $y = a \sin t$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2
- घ) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $A'A = I$. 2

4. Do all the parts of the following :

- a) Find the vector and Cartesian equation of the plane which passes through the point $(1, 0, -2)$ and on which the vector $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ is perpendicular. 2
- b) Eliminating arbitrary constants a and b , find the differential equation represented by the family of curves $y^2 = a(b^2 - x^2)$. 2
- c) If $x = a\left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right)$ and $y = a \sin t$, find the value of $\frac{dy}{dx}$. 2
- d) If $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$, verify that $A'A = I$. 2

5. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy + yz + zx)$. 5
- ख) सिद्ध कीजिए कि पूर्णाकों के समुच्चय Z में $R = \{(a, b) : \text{संख्या } 5, (a-b) \text{ को विभाजित करती है}\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध है। 5
- ग) वक्र $y = x^3 - 11x + 5$ पर उस बिन्दु को ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्श रेखा $y = x - 11$ है। 5
- घ) $\int \sqrt{x^2 - 8x + 7} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 5
- ङ) 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंटी गई ताशों की गड्डी में से एक के बाद एक तीन पत्ते बिना प्रतिस्थापित किये निकाले गये। पहले दो पत्तों के बादशाह और तीसरे के इक्का होने की क्या प्रायिकता है ? 5

5. Do all the parts of the following :

- a) Prove that $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx).$ 5
- b) Prove that in the set Z of integers the relation R given by $R = \{ (a, b) : \text{the number 5 divides } (a - b) \}$ is an equivalence relation. 5
- c) Find the point on the curve $y = x^3 - 11x + 5$ at which the tangent is $y = x - 11.$ 5
- d) Evaluate : $\int \sqrt{(x^2 - 8x + 7)} dx.$ 5
- e) From a well shuffled pack of 52 cards three cards were drawn one after another without any replacement. What is the probability that the first two cards be king and the third be ace ? 5

6. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) सममित और विषम-सममित आव्यूहों को परिभाषित कीजिए। यदि A तथा B सममित आव्यूह हों, तो सिद्ध कीजिए कि $(AB - BA)$ एक विषम-सममित आव्यूह है। 5
- ख) अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ द्वारा प्रदत्त फलन f वर्धमान या हासमान है। 5
- ग) सिद्ध कीजिए कि $\int \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx = 2x \tan^{-1} x - \log(1+x^2) + c.$ 5
- घ) बिन्दु $(-2, 3)$ से गुजरने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{2x}{y^2}$ है। 5
- ङ) एक विशेष समस्या को A और B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकतायें क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ हैं। यदि दोनों, स्वतंत्र रूप से, समस्या हल करने का प्रयास करते हैं, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि (i) समस्या हल हो जाती है, (ii) उनमें से कोई एक ही समस्या हल कर पाता है। 5

6. Do all the parts of the following :

- a) Define symmetric and skew-symmetric matrices. If A and B are symmetric matrices, prove that $(AB - BA)$ is a skew-symmetric matrix. 5
- b) Find the intervals in which the function f given by $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ is increasing or decreasing. 5
- c) Prove that $\int \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx = 2x \tan^{-1} x - \log(1+x^2) + c$. 5
- d) Find the equation of the curve passing through the point $(-2, 3)$ on which the gradient of the tangent at any point (x, y) is $\frac{2x}{y^2}$. 5
- e) The probabilities of solving a particular problem by A and B independently are respectively $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$. If both try to solve the problem independently, find the probability that (i) the problem is solved, (ii) only one of them solves the problem. 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ और $\vec{r} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 8
- ख) सिद्ध कीजिए कि R त्रिज्या के गोले के अन्तर्गत शंकु का महत्तम आयतन, गोले के आयतन का $\frac{8}{27}$ होता है। 8

7. Do any one part of the following : <https://www.upboardonline.com>

- a) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ and $\vec{r} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$. 8
- b) Prove that cone of the maximum volume inscribed in a sphere of radius R , is $\frac{8}{27}$ of the volume of the sphere. 8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) समीकरण निकाय

$$2x - 3y + 5z = 11$$

$$3x + 2y - 4z = -5$$

$$x + y - 2z = -3$$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

8

ख) सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$.

8

8. Do any one part of the following :

a) Solve by matrix method the system of equations :

$$2x - 3y + 5z = 11$$

$$3x + 2y - 4z = -5$$

$$x + y - 2z = -3$$

8

b) Prove that $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$.

8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) व्यवरोधों $4x + y \geq 80$, $x + 5y \geq 115$, $3x + 2y \leq 150$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ के अन्तर्गत $Z = 6x + 3y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए।

8

ख) यदि वक्र $x = y^2$ एवं रेखा $x = 4$ से घिरा हुआ क्षेत्रफल रेखा $x = a$ द्वारा दो बराबर भागों में विभाजित होता है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

8

9. Do any one part of the following :

a) Minimize $Z = 6x + 3y$ under the constraints :

$$4x + y \geq 80, x + 5y \geq 115, 3x + 2y \leq 150, x \geq 0, y \geq 0.$$

8

b) If the area bounded by the curve $x = y^2$ and the line $x = 4$ is divided into two equal parts by the line $x = a$, find the value of a .

8

नाम ..

131

324 (BB)

2023

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट]

[पूर्णांक : 100

निर्देश :

- (i) प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।
- (ii) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
- (iii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (iv) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
- (v) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
- (vi) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए।
- (vii) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1. सभी खण्ड कीजिए। प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए :

(क) यदि $f: X \rightarrow Y$ एक आच्छादक फलन है, यदि और केवल यदि f का परिसर होगा : 1

- (i) X (ii) $X \cap Y$ (iii) Y (iv) $X \cup Y$

(ख) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \sec^{-1}(-2)$ का मान होगा : 1

- (i) π (ii) $-\frac{\pi}{3}$ (iii) $\frac{\pi}{3}$ (iv) $\frac{2\pi}{3}$

(ग) यदि $\begin{bmatrix} 2x-y & x+2y \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, तो x और y का मान होगा : 1

- (i) $x = 1, y = 1$ (ii) $x = 2, y = 1$
 (iii) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ (iv) $x = 1, y = \frac{1}{2}$

(घ) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ का मान होगा :

1

(i) $\frac{1}{2a^2} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

(ii) $\frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

(iii) $\frac{1}{4a} \log \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$

(iv) $\frac{1}{4a^2} \log \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$

(ङ) अवकल समीकरण $(x-y) \frac{dy}{dx} = x + 2y$ की प्रकृति होगी :

1

(i) बहुघातीय

(ii) घात एक और रेखीय

(iii) समघातीय और घात शून्य

(iv) समघातीय और घात एक

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि एक एकैकी फलन $f: \{2, 3, 4\} \rightarrow \{2, 3, 4\}$ आच्छादक है ।

1

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ तथा $A + A' = I$, तो α का मान ज्ञात कीजिए ।

1

(ग) यदि $\Delta = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, तो $|\Delta|$ का मान ज्ञात कीजिए ।

1

(घ) व्यंजक $i \cdot i + j \cdot j + 2k \cdot k$ का मान ज्ञात कीजिए ।

1

(ङ) अवकल समीकरण

$$xy \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + x \frac{dy}{dx} - y = 2$$

की घात ज्ञात कीजिए ।

1

3. सभी खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \tan x \forall x \in \mathbb{R}$ एक संतत फलन है ।

2

(ख) यदि $y = A \sin x + B \cos x$ है, तो इसका अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए ।

2

(ग) वक्र $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर अभिलम्ब x -अक्ष के समान्तर हो ।

2

(घ) यदि किसी आयत की लम्बाई 3 cm/min की दर से घट रही है और चौड़ाई 2 cm/min की दर से बढ़ रही है, तो $x = 10$ cm तथा $y = 6$ cm पर आयत के परिमाण में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए, जहाँ $x =$ लम्बाई तथा $y =$ चौड़ाई ।

2

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = |x - 2|$, $x = 2$ पर अवकलनीय नहीं है। 2

(ख) मान ज्ञात कीजिए : 2

$$\int \tan^4 x \sec^2 x \, dx$$

(ग) यदि बिन्दुओं A, B, C और D के स्थिति सदिश क्रमशः $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 5\hat{j}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ और $\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि बिन्दु संरेख हैं। 2

(घ) आलेखीय विधि द्वारा निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत रेखिक प्रोग्रामन समस्या का हल कीजिए :

$$x + 2y \geq 10,$$

$$3x + 4y \leq 24,$$

$$x \geq 0, y \geq 0,$$

तो $z = 200x + 500y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। 2

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) रेखाओं $\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$ तथा $\vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

(ख) एक पाठशाला में 500 विद्यार्थी हैं, जिनमें से 230 लड़कियाँ हैं। यह ज्ञात है कि 230 में से 10% लड़कियाँ कक्षा XII में पढ़ती हैं। एक यादृच्छया चुना गया विद्यार्थी कक्षा XII में पढ़ता है तथा वह लड़की है, उसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

(ग) बिन्दु $(1, 1)$ से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अवकल समीकरण $x \, dy = (2x^2 + 1) \, dx$ ($x \neq 0$) है। 5

(घ) सिद्ध कीजिए कि दो सदिशों \vec{a} और \vec{b} के लिए सदैव $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ । 5

(ङ) मान ज्ञात कीजिए : 5

$$\int (\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}) \, dx$$

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि किसी कॉलेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों के समुच्चय A में $R = \{(x, y) : x \text{ तथा } y \text{ में पृष्ठों की संख्या समान है}\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध है। 5

(ख) $y = x^{x^x}$ का अवकलन कीजिए ।

5

(ग) मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ है ।

तो एक ऐसा आव्यूह D ज्ञात कीजिए कि $CD - AB = 0$ हो ।

5

(घ) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A \cdot \text{adj } A = |A| I$.

5

(ङ) किसी धनात्मक अचर a के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $y = a^{t+\frac{1}{t}}$ तथा $x = (t + \frac{1}{t})^a$.

5

7. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) आव्यूह विधि से रैखिक समीकरण-निकाय को हल कीजिए :

8

$$3x + 2y + 3z = 5$$

$$-2x + y + z = -4$$

$$-x + 3y - 2z = 3$$

(ख) समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ और $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = -5$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु; तथा बिन्दु $(1, 1, 1)$ से गुज़रने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

8

8. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) शत्रु का एक अपाचे हेलीकॉप्टर वक्र $y = x^2 + 7$ के अनुदिश प्रदत्त पथ पर उड़ रहा है । बिन्दु $(3, 7)$ पर स्थित एक सैनिक अपनी स्थिति से निकटतम दूरी पर से उस हेलीकॉप्टर को गोली मारना चाहता है । निकटतम दूरी ज्ञात कीजिए ।

8

(ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x$ ($x \neq 0$) का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए । दिया गया है कि $y = 0$, जब $x = \frac{\pi}{2}$.

8

9. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) तीन डिब्बों में रंगीन गेंदें निम्न सारणी में दर्शाए अनुसार आबंटित की गई हैं :

| डिब्बा | रंग | | |
|--------|------|------|-----|
| | काला | सफेद | लाल |
| I | 3 | 4 | 5 |
| II | 2 | 2 | 2 |
| III | 1 | 2 | 3 |

एक डिब्बे को यादृच्छया चुना गया और उसमें से एक गेंद निकाली गई। यदि गेंद का रंग काला है, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि गेंद को डिब्बा-III से निकाला गया है।

8

(ख) निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $z = x + y$ का अधिकतमीकरण कीजिए :

8

$$x - y \leq -1, -x + y \leq 0 \text{ और } x \geq 0, y \geq 0$$

(English Version)

Instructions :

- First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.
- There are in all **nine** questions in this question paper. <https://www.upboardonline.com>
- All questions are compulsory.**
- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.
- Marks allotted to the questions are indicated against them.
- Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Do **all** parts. Select the correct alternative of each part and write it in your answer book :

(a) If $f: X \rightarrow Y$ is an onto function, if and only if the range of f will be : 1

- (i) X (ii) $X \cap Y$ (iii) Y (iv) $X \cup Y$

(b) The value of $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \sec^{-1}(-2)$ will be : 1

- (i) π (ii) $-\frac{\pi}{3}$ (iii) $\frac{\pi}{3}$ (iv) $\frac{2\pi}{3}$

(c) If $\begin{bmatrix} 2x - y & x + 2y \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, then the value of x and y will be : 1

- (i) $x = 1, y = 1$ (ii) $x = 2, y = 1$

- (iii) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ (iv) $x = 1, y = \frac{1}{2}$

(d) The value of $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ will be : 1

(i) $\frac{1}{2a^2} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

(ii) $\frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

(iii) $\frac{1}{4a} \log \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$

(iv) $\frac{1}{4a^2} \log \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$

(e) The nature of the differential equation $(x-y) \frac{dy}{dx} = x + 2y$ will be : 1

(i) Multipower

(ii) Power one and linear

(iii) Homogeneous and power zero

(iv) Homogeneous and power one

2. Do **all** the parts :

(a) Prove that a one-one function $f: \{2, 3, 4\} \rightarrow \{2, 3, 4\}$ is onto. 1

(b) If $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ and $A + A' = I$, then find the value of α . 1

(c) If $\Delta = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, then find the value of $|\Delta|$. 1

(d) Find the value of the expression $i \cdot i + j \cdot j + 2k \cdot k$. 1

(e) Find the degree of the differential equation

$$xy \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 + x \frac{dy}{dx} - y = 2. \quad 1$$

3. Do **all** the parts :

(a) Prove that $f(x) = \tan x \forall x \in \mathbb{R}$ is a continuous function. 2

(b) If $y = A \sin x + B \cos x$, then find the differential equation of it. 2

(c) Find those points on the curve $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$, on which the normal is parallel to the x-axis. 2

(d) If the length of a rectangle is decreasing at the rate of 3 cm/min and width is increasing at the rate of 2 cm/min, then find the rate of change in perimeter of the rectangle when $x = 10$ cm and $y = 6$ cm, where $x =$ length and $y =$ width. 2

4. Do **all** the parts :

- (a) Prove that $f(x) = |x - 2|$ is not differentiable at $x = 2$. 2
- (b) Evaluate : 2

$$\int \tan^4 x \sec^2 x \, dx$$

- (c) If the position vectors of the points A, B, C and D are $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, 2\hat{i} + 5\hat{j}, 3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ and $\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$, respectively. Prove that the points are collinear. 2

- (d) By graphical method solve the LPP under the following constraints :

$$x + 2y \geq 10,$$

$$3x + 4y \leq 24,$$

$$x \geq 0, y \geq 0,$$

then find the minimum value of $z = 200x + 500y$. 2

5. Do **all** the parts :

- (a) Find the shortest distance between the lines
 $\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$ and $\vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$. 5
- (b) There are 500 students in a school, of which 230 are girls. Also, 10% of 230 girls are studying in class XII. Find the probability that a randomly chosen student is of XII class and is a girl. 5
- (c) Find the equation of the curve which is passing through the point $(1, 1)$ and whose differential equation is $x \, dy = (2x^2 + 1) \, dx$ ($x \neq 0$). 5
- (d) For any two vectors \vec{a} and \vec{b} , prove that always $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$. 5
- (e) Evaluate :

$$\int (\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}) \, dx \quad 5$$

6. Do **all** the parts :

- (a) A relation $R = \{(x, y) : \text{Number of pages in } x \text{ and } y \text{ are equal}\}$ is defined on the set A of all books in a college library. Prove that R is an equivalence relation. 5
- (b) Differentiate : $y = x^{x^x}$. 5
- (c) Let $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$.

Then find a matrix D such that $CD - AB = 0$. 5

(d) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then prove that $A \cdot \text{adj } A = |A| I$. 5

(e) For any positive constant a , evaluate $\frac{dy}{dx}$, where $y = a^{t+\frac{1}{t}}$ and $x = (t + \frac{1}{t})^a$. 5

7. Do any **one** part :

(a) Solve the system of linear equations by matrix method : 8

$$3x + 2y + 3z = 5$$

$$-2x + y + z = -4$$

$$-x + 3y - 2z = 3$$

(b) Find the equation of the plane which passes through the intersecting point of the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ and $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = -5$; and the point $(1, 1, 1)$. 8

8. Do any **one** part :

(a) An Apache helicopter of the enemy is flying along the curve $y = x^2 + 7$. A soldier placed at the point $(3, 7)$, wants to shoot down the helicopter when it is nearest to him. Find the nearest distance. 8

(b) Find the particular solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x \quad (x \neq 0). \text{ Given that } y = 0, \text{ when } x = \frac{\pi}{2}. \quad 8$$

9. Do any **one** part :

(a) Coloured balls are distributed in three containers according to the following table :

| Container | Colour | | |
|-----------|--------|-------|-----|
| | Black | White | Red |
| I | 3 | 4 | 5 |
| II | 2 | 2 | 2 |
| III | 1 | 2 | 3 |

A ball is drawn out from a container randomly chosen. If the ball is black, then find the probability that the ball is drawn from Container-III. 8

(b) Find the maximization of $z = x + y$, under the following constraints :

$$x - y \leq -1, -x + y \leq 0 \text{ and } x \geq 0, y \geq 0. \quad 8$$

2023
गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note : First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.

सामान्य निर्देश :

- (i) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
- (ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारंभ में स्पष्ट उल्लेख है कि उसके कितने खण्ड करने हैं।
- (iv) प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सम्मुख अंकित हैं।
- (v) प्रथम प्रश्न से आरंभ कीजिए और अंत तक करते जाइए। जो प्रश्न न आता हो, उसमें व्यर्थ समय नष्ट न कीजिए।

General Instructions :

- (i) There are **nine** questions in this question paper.
- (ii) **All** questions are compulsory.
- (iii) At the beginning of each question, it has been mentioned that how many parts of it are to be attempted.
- (iv) Marks allotted to each question are mentioned against it.
- (v) Start from the first question and proceed to the last. Do not waste time over a question which you cannot solve.



1. सभी खण्ड कीजिए। प्रत्येक खण्ड के सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए।

(क) एक सम्बन्ध $R = \{(a, b) : a = b - 1, b > 4\}$, समुच्चय N पर परिभाषित है तो सही उत्तर होगा :

- (A) (2, 4) (B) (4, 5)
(C) (4, 6) (D) (3, 5)

(ख) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मान होगा :

- (A) π (B) $-\pi/2$
(C) 0 (D) $2\sqrt{3}\pi$

(ग) $\cos^{-1}(e^x)$ का अवकल गुणांक होगा :

- (A) $\sin^{-1}(e^x)$ (B) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
(C) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ (D) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(घ) $\int x e^x dx$ का मान होगा :

- (A) e^x (B) $(1+x)e^x$
(C) $(x-1)e^x$ (D) $(1-x)e^x$

(ङ) अवकल समीकरण $2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि होगी :

- (A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं

1. Do all parts. Select correct option of each part and write it on your answer-book.

(a) A relation $R = \{(a, b) : a = b - 1, b > 4\}$ is defined on set N then correct answer will be :

- (A) (2, 4) (B) (4, 5)
(C) (4, 6) (D) (3, 5)

(b) The value of $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$ will be :

- (A) π (B) $-\pi/2$
(C) 0 (D) $2\sqrt{3}\pi$

(c) Differential coefficient of $\cos^{-1}(e^x)$ will be :

1

(A) $\sin^{-1}(e^x)$

(B) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(C) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(D) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(d) The value of $\int x e^x dx$ will be :

1

(A) e^x

(B) $(1+x)e^x$

(C) $(x-1)e^x$

(D) $(1-x)e^x$

(e) The order of the differential equation $2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + y = 0$ will be :

1

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) None of these

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि $A = \{a, b, c\}$ तथा $B = \{1, 2\}$ है, तो A से B में सम्बन्धों की संख्या ज्ञात कीजिए ।

1

(ख) अवरोधों $x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$ के अन्तर्गत $Z = 3x + 4y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए ।

1

(ग) यदि सदिश $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ परस्पर लम्ब हैं, तो λ का मान ज्ञात कीजिए ।

1

(घ) दिखाइए कि $f(x) = |x|, x = 0$ पर संतत है ।

1

(ङ) यदि $P(A) = \frac{3}{13}, P(B) = \frac{5}{13}$ और $P(A \cap B) = \frac{2}{13}$ है, तो $P(B/A)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

1

2. Do all parts :

- (a) If $A = \{a, b, c\}$ and $B = \{1, 2\}$, then find number of relations from A to B. 1
- (b) Find the maximum value of $Z = 3x + 4y$ under the constraints $x + y \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. 1
- (c) If vectors $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ are perpendicular to each other, then find value of λ . 1
- (d) Show that $f(x) = |x|$ is continuous at $x = 0$. 1
- (e) If $P(A) = \frac{3}{13}$, $P(B) = \frac{5}{13}$ and $P(A \cap B) = \frac{2}{13}$, then find the value of $P(B/A)$. 1

3. सभी खण्ड कीजिए :

- (क) यदि $\begin{bmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ है, तो x, y तथा z का मान ज्ञात कीजिए। 2
- (ख) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{2+y}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 2
- (ग) सिद्ध कीजिए कि फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ में $f(x) = e^x$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी है। 2
- (घ) यदि $x = a \cos^2 t$, $y = b \sin^2 t$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 2

3. Do all parts :

- (a) If $\begin{bmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$, then find the value of x, y and z . 2
- (b) Find the general solution of $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{2+y}$. 2
- (c) Prove that the function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ defined by $f(x) = e^x$ is one-one. 2
- (d) If $x = a \cos^2 t$, $y = b \sin^2 t$, then find $\frac{dy}{dx}$. 2

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) वक्र $ay^2 = x^3$ के बिन्दु (am^2, am^3) पर स्पर्श-रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए । 2

(ख) यदि $P(A) = 0.4$ और $P(B) = 0.5$ है तथा A और B स्वतंत्र घटनायें हैं, तो

(i) $P(A \cup B)$ तथा (ii) $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए । 2

(ग) दर्शाइए कि बिन्दु $A(2, 3, 4)$, $B(-1, -2, 1)$ तथा $C(5, 8, 7)$ संरेख हैं । 2

(घ) $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx$ का मान ज्ञात कीजिए । 2

4. Do all parts :

(a) Find the equation of tangent at the point (am^2, am^3) on the curve $ay^2 = x^3$. 2

(b) If $P(A) = 0.4$ and $P(B) = 0.5$, also, A and B are independent events, then find

(i) $P(A \cup B)$ and (ii) $P(A \cap B)$. <https://www.upboardonline.com> 2

(c) Show that the points $A(2, 3, 4)$, $B(-1, -2, 1)$ and $C(5, 8, 7)$ are collinear. 2

(d) Evaluate : $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx$. 2

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) माना कि सम्बन्ध $R = \{(a, b) : (a - b), 5 \text{ का गुणज है}\}$, एक समुच्चय $Z =$ पूर्णाकों का समुच्चय पर परिभाषित है, तो सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है । 5

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $2A + 3X = 5B$ हो, तो आव्यूह X ज्ञात कीजिए । 5

(ग) सिद्ध कीजिए : $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. 5

(घ) यदि $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 \leq x \leq 1$ तो सिद्ध कीजिए कि $(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2y = 0$. 5

(ङ) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$, $x > 0$ से प्रदत्त फलन $(0, \pi/4)$ में निरंतर वर्धमान फलन है । 5

5. Do all parts :

(a) Let a relation $R = \{(a, b) : (a - b) \text{ is multiple of } 5\}$ be defined on the set $Z = \text{set of integers}$, then prove that R is an equivalence relation. 5

(b) If $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ and $2A + 3X = 5B$, then find the matrix X . 5

(c) Prove that : $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$. 5

(d) If $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 \leq x \leq 1$ then prove that $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0$. 5

(e) Prove that the function $f(x) = \tan^{-1} (\sin x + \cos x)$, $x > 0$ is always increasing function on $(0, \pi/4)$. 5

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

(ख) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

(ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x$, $(x \neq 0)$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, जबकि $y = 0$ यदि $x = \pi/2$. 5

(घ) दो रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ और $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

(ङ) $Z = 50x + 70y$ का न्यूनतम मान आलेख विधि से निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत ज्ञात कीजिए :

$$2x + y \geq 8$$

$$x + 2y \geq 10, x \geq 0, y \geq 0.$$

6. Do all parts :

(a) Evaluate : $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx.$ 5

(b) Find the area of the region bounded by the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$ 5

(c) Find the particular solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x,$
($x \neq 0$) given that $y = 0$ if $x = \pi/2.$ 5

(d) Find the shortest distance between two lines :

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) \text{ and}$$

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}).$$
 5

(e) Find the minimum value of $Z = 50x + 70y$ under the following constraints by graphical method :

$$2x + y \geq 8$$

$$x + 2y \geq 10, x \geq 0, y \geq 0.$$
 5

7. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) एक परिवार में तीन बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात है कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़की है, तो तीनों बच्चों के लड़की होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 8

(ख) $\int_{-1}^{3/2} |x \sin(\pi x)| dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

7. Do any one part :

(a) There are three children in a family. If it is known that at least one child is girl among them, find the probability that all three children are girl. 8

(b) Evaluate : $\int_{-1}^{3/2} |x \sin(\pi x)| dx.$ 8

8. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) $y = x^{x^x} + (\cos x)^{\tan x}$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए । 8

(ख) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अवकलनीय फलन संतत होता है । फलन $f(x) = |x + 2|$ का $x = -2$ पर सांतत्य और अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए । 8

8. Do any one part :

(a) Find differential coefficient of $y = x^{x^x} + (\cos x)^{\tan x}$. 8

(b) Prove that every differentiable function is continuous. Examine continuity and differentiability of the function $f(x) = |x + 2|$ at $x = -2$. 8

9. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए $A \cdot \text{adj}(A) = |A| \cdot I$ तथा A^{-1} भी ज्ञात कीजिए । 8

(ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय आव्यूह विधि से हल कीजिए : 8

$$2x + y - z = 1$$

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$4x - 3y + 2z = 4$$

9. Do any one part :

(a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then prove that $A \cdot \text{adj}(A) = |A| \cdot I$ also find A^{-1} . 8

(b) Solve the following system of equation by matrix method : 8

$$2x + y - z = 1$$

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$4x - 3y + 2z = 4$$

$$11x - 4y - 4z = 12$$

