

नाम

131

324 (FF)

2022

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट]

[पूर्णांक : 100

निर्देश :

- प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।
- इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
- सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
- प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
- प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए।
- जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि L किसी समतल में स्थित समस्त सरल रेखाओं का एक समुच्चय है तथा संबंध

$$R = \{(L_1, L_2) : L_1, L_2 \text{ पर लम्ब है}\}$$

समुच्चय L में परिभाषित है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए :

1

- R स्वतुल्य है
- R सममित है
- R संक्रामक है
- इनमें से कोई नहीं

(ख) यदि आव्यूह A और B के क्रम (कोटि) क्रमशः $m \times n$ और $n \times p$ हैं, तो AB का क्रम है :

1

- $p \times m$
- $n \times m$
- $m \times p$
- इनमें से कोई नहीं

(ग) अवकल समीकरण

$$xy \frac{d^2y}{dx^2} + x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y \frac{dy}{dx} = 2$$

की घात है :

1

- 0
- 1
- 2
- 3

(घ) व्यंजक $\hat{i} \cdot \hat{i} - \hat{j} \cdot \hat{j} + \hat{k} \cdot \hat{k}$ का मान है :

1

- 0
- 1
- 2
- 3

(ड) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}$ का मान होगा :

1

- (i) 0 (ii) $\frac{\pi}{2}$
(iii) $\frac{\pi}{4}$ (iv) $\frac{\pi}{8}$

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) फलन $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^2 \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित है, तो फलन f है :

1

- (i) एकैकी आच्छादक
(ii) बहु-एक आच्छादक
(iii) एकैकी, किन्तु आच्छादक नहीं
(iv) न तो एकैकी और न ही आच्छादक

(ख) यदि $f: R \rightarrow R$ जहाँ $f(x) = \cos x$ और $g: R \rightarrow R$ जहाँ $g(x) = x^2$, तो सिद्ध कीजिए कि $f \circ g \neq g \circ f$.

1

(ग) $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान होगा :

1

- (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{6}$
(iii) $\frac{2\pi}{3}$ (iv) इनमें से कोई नहीं

(घ) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x|$, $x = 0$ पर संतत है ।

1

(ड) यदि ΔABC के शीर्ष $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$ और $C(2, 3, 1)$ हों, तो ΔABC का क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है :

1

- (i) $\frac{\sqrt{21}}{2}$ (ii) $\frac{\sqrt{22}}{3}$
(iii) $\frac{\sqrt{23}}{3}$ (iv) इनमें से कोई नहीं

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) $y - x \frac{dy}{dx} = a \left(y^2 + \frac{dy}{dx} \right)$ को हल कीजिए ।

2

(ख) यदि $f: A \rightarrow B$ तथा $g: B \rightarrow C$ एकैकी हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $g \circ f: A \rightarrow C$ भी एकैकी होगा ।

2

(ग) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, तो

AB तथा BA का मान ज्ञात कीजिए ।

2

(घ) सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि ΔABC के शीर्ष $A(2, -6)$, $B(5, 4)$, $C(k, 4)$ और उसका क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो, तो सिद्ध कीजिए कि k का मान 12, -2 होगा । 2

(ख) यदि $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए । 2

(ग) सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए । 2

(घ) सिद्ध कीजिए कि दिए हुए सम्पूर्ण पृष्ठ और महत्तम आयतन वाले लम्ब-वृत्तीय शंकु का अर्ध-शीर्ष कोण $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ होता है । 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

(क) दो वृत्तों $x^2 + y^2 = 4$ एवं $(x-2)^2 + y^2 = 4$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 5

(ख) समाकल $\int \frac{x^4 dx}{(x-1)(x^2+1)}$ ज्ञात कीजिए । 5

(ग) हल कीजिए : 5

$$(1+y^2) dx = (\tan^{-1} y - x) dy$$

(घ) दर्शाइ कि :

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

(ङ) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ को एक सममित

आव्यूह तथा एक विषम-सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए । 5

(च) सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} x$$

जहाँ $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$. 5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

(ख) यदि एक समतल द्वारा निर्देशांक अक्षों पर अन्तःखण्ड

क्रमशः a , b , c हैं और इसकी मूल-बिन्दु से दूरी p है,

तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$. 5

(ग) यदि $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$, तो सिद्ध कीजिए कि $x + y + z = xyz$. 5

(घ) अवकल समीकरण

$$\left[x \sin^2\left(\frac{y}{x}\right) - y \right] dx + x dy = 0,$$

$y = \frac{\pi}{4}$ यदि $x = 1$ को हल कीजिए। 5

(ङ) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$$

(च) $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ और $P(A|B) = \frac{2}{5}$ है। 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$. 4

(ii) वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ के उन अभिलंबों के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $x + 14y + 4 = 0$ के समांतर हैं। 4

(ख) (i) फलन $f(x) = \begin{cases} x & \text{यदि } x \leq 1 \\ 5 & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$

द्वारा परिभाषित है तो क्या $f, x = 0, x = 1$ तथा $x = 2$ पर संतत है ? 4

(ii) यदि $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 \leq x \leq 1$, तो

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0. \quad 4$$

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए : 8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

(ख) रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$$

के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) दिए गए आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए

सत्यापित कीजिए कि $A \cdot (\text{adj } A) = |A| I$ और इसका व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 8

- (ख) सिद्ध कीजिए कि R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत विशालतम लम्ब-वृत्तीय शंकु का आयतन गोले के आयतन का $\frac{8}{27}$ होता है।

8

(English Version)

Instructions :

- First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.
- There are in all **nine** questions in this question paper.
- All questions are compulsory.
- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.
- Marks allotted to the questions are indicated against them.
- Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Attempt **all** parts of the following :

- (a) If L is a set of all straight lines in any plane and relation $R = \{(L_1, L_2) : L_1 \text{ is perpendicular to } L_2\}$ is defined in L . Select the correct answer from the following :
- R is reflexive
 - R is symmetric
 - R is transitive
 - None of these

- (b) If the order of matrices A and B are respectively $m \times n$ and $n \times p$, then the order of AB is :

1

- $p \times m$
- $n \times m$
- $m \times p$
- None of these

- (c) The degree of the differential equation

$$xy \frac{d^2 y}{dx^2} + x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y \frac{dy}{dx} = 2 \text{ is :}$$

1

- 0
- 1
- 2
- 3

- (d) The value of the expression

$$\hat{i} \cdot \hat{i} - \hat{j} \cdot \hat{j} + \hat{k} \cdot \hat{k} \text{ is :}$$

1

- 0
- 1
- 2
- 3

- (e) The value of $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}$ will be :

1

- 0
- $\frac{\pi}{2}$
- $\frac{\pi}{4}$
- $\frac{\pi}{8}$

2. Attempt **all** parts of the following :

(a) The function $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^2 \forall x \in R$ is defined, then f is : 1

- (i) one-one onto
- (ii) many-one onto
- (iii) one-one, but not onto
- (iv) neither one-one nor onto

(b) If $f: R \rightarrow R$ where $f(x) = \cos x$ and $g: R \rightarrow R$ where $g(x) = x^2$, then prove that $fog \neq gof$. 1

(c) The principal value of $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ will be : 1

- (i) $\frac{\pi}{3}$
- (ii) $\frac{\pi}{6}$
- (iii) $\frac{2\pi}{3}$
- (iv) None of these

(d) Prove that the function $f(x) = |x|$ is continuous at $x = 0$. 1

(e) The area of ΔABC , whose vertices are $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$ and $C(2, 3, 1)$ in square units is : 1

- (i) $\frac{\sqrt{21}}{2}$
- (ii) $\frac{\sqrt{22}}{3}$
- (iii) $\frac{\sqrt{23}}{3}$
- (iv) None of these

3. Attempt **all** parts of the following :

(a) Solve $y - x \frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$. 2

(b) If $f: A \rightarrow B$ and $g: B \rightarrow C$ are one-one, then prove that $gof: A \rightarrow C$ is also one-one. 2

(c) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, then

find AB and BA . 2

(d) Prove that $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$. 2

4. Attempt **all** parts of the following :

(a) If vertices of ΔABC are $A(2, -6)$, $B(5, 4)$ and $C(k, 4)$ and if the area of ΔABC be 35 square units, then prove that the value of k will be 12, -2. 2

(b) If $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$, then find the value of x . 2

(c) Find the value of the determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$$

- (d) Show that the semi-vertical angle of right circular cone of given total surface and maximum volume is $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$. 2

5. Attempt any **five** parts of the following :

- (a) Find the area between region of two circles $x^2 + y^2 = 4$ and $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. 5

- (b) Find the integral $\int \frac{x^4 dx}{(x - 1)(x^2 + 1)}$. 5

- (c) Solve : <https://www.upboardonline.com>
 $(1 + y^2) dx = (\tan^{-1} y - x) dy$ 5

- (d) Show that : 5

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

- (e) Express the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$
 as the sum of a symmetric and a skew symmetric matrix. 5

- (f) Prove that :

$$\tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} x,$$

 where $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$. 5

6. Attempt any **five** parts of the following :

- (a) Prove that : 5

$$\begin{vmatrix} a^2 + 1 & ab & ac \\ ab & b^2 + 1 & bc \\ ca & cb & c^2 + 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

- (b) If a, b, c are the intercepts on coordinate axes respectively by a plane and its distance from the origin is p , then prove that $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$. 5

- (c) If $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$, then prove that $x + y + z = xyz$. 5

- (d) Solve the differential equation

$$\left[x \sin^2 \left(\frac{y}{x} \right) - y \right] dx + x dy = 0,$$

$$y = \frac{\pi}{4} \text{ if } x = 1. \quad 5$$

- (e) Prove that $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$. 5

- (f) Find $P(A \cup B)$, if $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ and
 $P(A|B) = \frac{2}{5}$. 5

7. Attempt any **one** part of the following :

- (a) (i) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, then prove that
 $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$. 4
- (ii) Find the equations of the normals, to the curve $y = x^3 + 2x + 6$, which are parallel to the line $x + 14y + 4 = 0$. 4
- (b) (i) Is the function f defined by
 $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \leq 1 \\ 5 & \text{if } x > 1 \end{cases}$ continuous at
 $x = 0, x = 1$ and $x = 2$? 4
- (ii) If $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 < x < 1$, then
 $(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0$. 4

8. Attempt any **one** part of the following :

- (a) By using elementary transformation, find the inverse of the following matrix : 8
- $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$
- (b) Find the shortest distance between the lines $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ and $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$. 8

9. Attempt any **one** part of the following :

- (a) Verify : $A \cdot (\text{adj } A) = |A| I$ for the given matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ and find its inverse. 8
- (b) Prove that the volume of the largest right circular cone that can be inscribed in a sphere of radius R is $\frac{8}{27}$ of the volume of the sphere. 8

<https://www.upboardonline.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से

अनुक्रमांक

नाम

131 324(FH)

2022

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- निर्देश :
- इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
 - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
 - प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
 - प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
 - जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

- There are in all nine questions in this question paper.

- All questions are compulsory.
- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- Marks allotted to the questions are indicated against them.
- Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 7\}$ तो $A \cap (B \cup C)$ का मान ज्ञात कीजिए।

ख) हल कीजिए :
 $\tan \theta + \tan 2\theta + \sqrt{3} \tan \theta \tan 2\theta = \sqrt{3}$

ग) सिद्ध कीजिए कि $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sin^{-1} x$.

घ) समतल $2x - y + z = 5$ के अधिलम्ब का, दिक् अनुपात ज्ञात कीजिए।

ङ) यदि $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

1. Attempt all parts of the following :

a) If $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 7\}$

then find $A \cup (B \cap C)$.

b) Solve :

$$\tan \theta + \tan 2\theta + \sqrt{3} \tan \theta \tan 2\theta = \sqrt{3}.$$

c) Prove that $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sin^{-1} x$.

d) Find the direction ratio of the normal to the plane $2x - y + z = 5$.

e) Find the angle between the vectors

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \text{ and } \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}.$$

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix}.$$

ख) सिद्ध कीजिए $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$.

ग) यदि $x = a \cos^2 2t$ तथा $y = a \sin^2 2t$ है

तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

घ) यदि $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

तो सिद्ध कीजिए $(A - B)' = A' - B'$.

ङ) यदि $P(A) = 0.12$, $P(B) = 0.15$ और

$P(B/A) = 0.18$ तो ज्ञात कीजिए

$P(A \cap B)$.

2. Attempt all parts of the following :

a) Evaluate $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix}.$

b) Prove that $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$.

c) If $x = a \cos^2 2t$ and

$y = a \sin^2 2t$ then find $\frac{dy}{dx}$.

d) If $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

then show that $(A - B)' = A' - B'$.

e) If $P(A) = 0.12$, $P(B) = 0.15$ and $P(B/A) = 0.18$ then find the value of $P(A \cap B)$.

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि यदि $f: A \rightarrow B$ तथा $g: B \rightarrow C$ एकैकी है तो $gof: A \rightarrow C$ भी एकैकी है। 2

ख) यदि $x = \sin y$ तो सिद्ध कीजिए

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} = x \frac{dy}{dx} . \quad 2$$

ग) क्या $f(x) = |x|$; $x = 0$ पर अवकलनीय है ? 2

घ) किसी दौड़ में A के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है तथा B के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। उस दौड़ में A और B में से कोई न जीत पाए इसकी प्रायिकता क्या है ? 2

3. Attempt all parts of the following :

a) Prove that if $f: A \rightarrow B$ and $g: B \rightarrow C$ are one-to-one then $gof: A \rightarrow C$ is also one-to-one. 2

b) If $x = \sin y$, then prove that

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} = x \frac{dy}{dx} . \quad 2$$

c) Is $f(x) = |x|$ differentiable at $x = 0$? 2

d) The probability of A to win the race is $\frac{1}{3}$ and that of B to win the race is $\frac{1}{4}$. Find the probability that in this race neither A nor B wins the race. 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि फलन $f: Q \rightarrow Q$ सम्बन्ध

$$f(x) = 3x - 4, \quad x \in Q \text{ से परिभाषित है तो}$$

सिद्ध कीजिए कि f एकैकी आच्छादक फलन है जहाँ Q परिमेय संख्याओं का समुच्चय है। 2

ख) सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ का सदिश

$$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} \text{ पर प्रक्षेप ज्ञात करें।} \quad 2$$

- ग) एक थैले में 4 सफेद और 2 काली गेंद हैं तथा दूसरे थैले में 3 सफेद और 5 काली गेंद हैं। यदि प्रत्येक थैले से एक गेंद निकाली जाय तो दोनों गेंद काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

- घ) दर्शाइए $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)} dx$, निम्न में किसके बराबर है : 2

- i) $-\cot(xe^x) + c$
- ii) $\tan(xe^x) + c$
- iii) $\tan(e^x) + c$
- iv) $\cot(e^x) + c$

4. Attempt all parts of the following :

- a) The function $f:Q \rightarrow Q$ is defined by the relation $f(x)=3x-4$, $x \in Q$. Prove that f is one-to-one and onto mapping where Q is the set of rational numbers. 2

- b) Find the projection of vector $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ on the vector $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$. 2

- c) There are 4 white and 2 black balls in a bag and in another bag 3 white and 5 black balls. Find the probability of getting both black balls if a ball is drawn from each bag. 2

- d) Show $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)} dx$ is equal

to which of the following : 2

- i) $-\cot(xe^x) + c$
- ii) $\tan(xe^x) + c$
- iii) $\tan(e^x) + c$
- iv) $\cot(e^x) + c$

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों का हल कीजिए :

क) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

ख) दर्शाइए कि

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = (abc) \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

5

ग) समतल $\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 1 = 0$ पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब इकाई सदिश की दिक् कोसाइन ज्ञात कीजिए। 5

घ) $\int_0^{\pi} \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx$ का मान ज्ञात करें। 5

ङ) सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ में से प्रत्येक के लम्बवत् मापक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ है। 5

इ) $Z = 4x + y$ का अधिकतम मान निम्न दिये गये अवरोधों के अन्तर्गत ज्ञात कीजिए :

$$x + y \leq 50, 3x + y \leq 90, x \geq 0, y \geq 0.$$

5

च) दिए गये वक्र $x = a \sin^3 t, y = b \cos^3 t$ के एक बिन्दु जहाँ $t = \frac{\pi}{2}$ है, पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। 5

6. Attempt any five parts of the following :

a) Discuss the continuity of the function $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{if } x \leq 1 \\ x-2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$ 5

b) Differentiate $y = e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x + x^x$ with respect to x . 5

c) Find the equation of the curve passing through the point $(1, -1)$ whose differential equation is

$$xy \frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2).$$

5

- d) The probability of solving a question by three students A, B, C are respectively $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}$ and $\frac{1}{10}$.

Find the probability of solving the question. 5

- e) Find the maximum value of $Z=4x+y$ under the constraints given by $x+y \leq 50$, $3x+y \leq 90$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. 5

- f) Find the equation of the tangent to the curve $x=a \sin^3 t$, $y=b \cos^3 t$ at the point where $t = \frac{\pi}{2}$. 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) आव्यूह विधि से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल करें :

$$x + y + z = 8$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1.$$

8

Turn over

ख) यदि $|x-5-1| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ है,

तो x का मान ज्ञात कीजिए। 8

7. Attempt any one part of the following :

- a) Solve the following system of equations by matrix method :

$$x + y + z = 8$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1.$$

8

b) If $|x-5-1| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

then determine x .

8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) एक घन का आयतन $9 \text{ cm}^3/\text{s}$ की दर से बढ़ रहा है। यदि इसके कोर को लम्बाई 10 cm है तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है ? 8

- ख) ऐसे परवलयों के कुल को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिनका शीर्ष मूल बिन्दु पर है तथा जिनका अक्ष धनात्मक x -अक्ष की दिशा में है। 8

8. Attempt any one part of the following :

a) The volume of a cube is increasing at the rate of $9 \text{ cm}^3/\text{s}$. Find the rate by which its surface area is increasing if the length of the edge of the cube is 10 cm. 8

b) Find the differential equation of a family of parabolas whose vertices are at the origin and whose positive axes are in the positive side of the x-axis. 8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

ख) $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{a-x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

च) सिद्ध कीजिए कि दो गयी तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्ध शीर्ष कोण $\tan^{-1}(\sqrt{2})$ होता है। 5

5. Attempt any five parts of the following :

a) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$. 5

b) Show that

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = (abc) \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

<https://www.upboardonline.com> 5

c) Find the direction cosine of orthogonal unit vector drawn from the origin on the plane

$$\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 1 = 0. \quad 5$$

d) Evaluate $\int_0^{\pi} \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx$. 5

e) Find the normal unit vector for each of vectors $(\vec{a} + \vec{b})$ and $(\vec{a} - \vec{b})$

where $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and

$$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}. \quad 5$$

- 1) Prove that the semi-vertical angle of a cone with given slant height and maximum volume is $\tan^{-1}(\sqrt{2})$. 5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) निम्नलिखित फलन के सांतत्य पर विचार कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{यदि } x \leq 1 \\ x-2, & \text{यदि } x > 1 \end{cases} \quad 5$$

ख) x के सापेक्ष में $y = e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x + x^x$ का अवकलन कीजिए। 5

ग) अवकल समीकरण $xy \frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$ के बिन्दु $(1, -1)$ से गुजरने वाले वक्र को ज्ञात कीजिए। 5

घ) किसी प्रश्न को तीन छात्रों A, B, C के हल करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}$ तथा $\frac{1}{10}$ है तो प्रश्न के हल हो जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

9. Attempt any one part of the following :

a) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$. 8

b) Evaluate $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{a-x}} dx$. 8

324(FH)- 95,000

<https://www.upboardonline.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से

131

324(FI)

2022

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- निर्देश :
- इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
 - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
 - प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
 - प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
 - जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

- There are in all nine questions in this question paper.

4877

★★Y

[Turn over

324(FI)

2

- All questions are compulsory.
- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- Marks allotted to the questions are indicated against them.
- Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) मान लीजिए कि $f:R \rightarrow R$, $f(x)=3x$ द्वारा परिभाषित है। सही उत्तर का चयन कीजिए :~~f~~ f एकैकी आच्छादक है

(ii) f बहुपद आच्छादक है

(iii) f एकैकी है परंतु आच्छादक नहीं है

(iv) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है

1

ख) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मुख्य मान बराबर है(i) $\frac{7\pi}{6}$ (ii) $\frac{5\pi}{6}$ ~~(iii)~~ (iii) $\frac{\pi}{3}$ (iv) $\frac{\pi}{6}$

1

4877

★★Y

ग) वक्र $y=2x^2+3\sin x$ के $x=0$ पर अभिलम्ब की प्रवणता है

- (i) 3 (ii) $\frac{1}{3}$
(iii) -3 (iv) $-\frac{1}{3}$ 1

घ) अवकल समीकरण $2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + y = 0$

की कोटि है

- (i) 2 (ii) 1
(iii) 0 (iv) परिभाषित नहीं है 1

ङ) निश्चित समाकलन $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ के सही उत्तर

का चयन कीजिए :

- (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{2\pi}{3}$
(iii) $\frac{\pi}{6}$ (iv) $\frac{\pi}{12}$ 1

1. Attempt all parts of the following :

a) Suppose that a function $f:R \rightarrow R$ is defined by $f(x)=3x$. Select correct option :

- (i) f is one-one onto
(ii) f is many one onto
(iii) f is one-one but not onto
(iv) f is neither one-one nor onto 1

b) The principal value of $\cos^{-1}\left(\cos \frac{7\pi}{6}\right)$ is

- (i) $\frac{7\pi}{6}$ (ii) $\frac{5\pi}{6}$
(iii) $\frac{\pi}{3}$ (iv) $\frac{\pi}{6}$

c) The gradient of the normal to the curve $y=2x^2+3\sin x$ at $x=0$ is

- (i) 3 (ii) $\frac{1}{3}$
(iii) -3 (iv) $-\frac{1}{3}$ 1

d) Order of the differential equation

$$2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + y = 0 \text{ is}$$

- (i) 2
(ii) 1
(iii) 0
(iv) not defined. 1

e) Choose the correct answer of the

definite integral $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$:

- (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{2\pi}{3}$
(iii) $\frac{\pi}{6}$ (iv) $\frac{\pi}{12}$ 1

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) जाँच कीजिए कि फलन $f(x)=5x-3$, $x=0$ पर संतत है। 1

ख) $\int \operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x + \cot x) dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

ग) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ है तो AB का मान ज्ञात कीजिए। 1

घ) यदि E और F इस प्रकार की घटनाएँ हैं कि $P(E)=0.6$, $P(F)=0.3$ और $P(E \cap F)=0.2$ तो $P(E/F)$ ज्ञात कीजिए। 1

ङ) $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

2. Attempt all the parts of the following :

a) Check that the function $f(x)=5x-3$ is continuous at $x=0$. 1

b) Find the value of $\int \operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x + \cot x) dx$. 1

c) If $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ then find the value of AB . 1

d) If E and F are such type of events that $P(E)=0.6$, $P(F)=0.3$ and $P(E \cap F)=0.2$ then find $P(E/F)$. 1

e) Find the value of $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$. 1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

ख) दर्शाइए कि बिन्दु $A(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$, $B(\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$, $C(3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं। 2

ग) स्वेच्छ अचरों a तथा b को विलुप्त करते हुए वक्र $y=e^x(a \cos x + b \sin x)$ के कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। 2

घ) फलन $(\log x)^{\cos x}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए। 2

3. Attempt *all* parts of the following :

- a) Find the value of $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$. 2
- b) Show that the points $A(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$, $B(\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$, $C(3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$ are vertices of a right angle triangle. 2
- c) Removing the arbitrary constants a and b find the differential equation representing the family of curve $y = e^x (a \cos x + b \sin x)$. 2
- d) Differentiate the function $(\log x)^{\cos x}$ with respect to x . 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) ग्राफीय विधि से निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

$Z = 3x + 4y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए जबकि व्यवरोध निम्न हैं :

$$x + y \leq 4$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

ख) सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों के समुच्चय Z में $R = \{(a, b) : 2, (a - b) \text{ को विभाजित करती है } \}$ द्वारा प्रदत्त संबंध एक तुल्यता संबंध है। 2

ग) यदि शीर्ष $(2, -6)$, $(5, 4)$ और $(k, 4)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो तो k का मान ज्ञात कीजिए। 2

घ) सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ में से प्रत्येक के लंबवत् मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$. 2

4. Attempt *all* parts of the following :

a) By graphical method solve the following linear programming problem. Find the maximum value of $Z = 3x + 4y$, under the following constraints :

$$x + y \leq 4$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

b) Prove that in the set of integers Z , the given relation $R = \{(a, b) : 2 \text{ divides } (a - b)\}$ is an equivalence relation. 2

- c) If area of a triangle with vertex (2, -6), (5, 4) and (k, 4) is 35 square units then find the value of k. 2
- d) Find the unit vector perpendicular to each of the vectors $(\vec{a} + \vec{b})$ and $(\vec{a} - \vec{b})$ where $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$. 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) दर्शाइए कि $\sin^{-1} \frac{3}{5} - \sin^{-1} \frac{8}{11} = \cos^{-1} \frac{84}{85}$. 5

ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

ग) फलन x^x का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए। 5

घ) एक थैले में 4 लाल और 4 काली गेंदें हैं। दूसरे थैले में 2 लाल और 6 काली गेंदें हैं। इनमें से एक थैले को यादृच्छया चुना जाता है और उसमें से एक गेंद निकाली जाती है जो लाल है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह पहले थैले से निकाली गयी है। 5

ङ) उस समतल का सदिश और कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (5, 2, -4) से जाता है और 2, 3, -1 दिक्-अनुपात वाली रेखा पर लम्ब है। 5

च) यदि $y = 3 \cos(\log x) + 4 \sin(\log x)$ है तो दिखाइये कि $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$. 5

5. Attempt any five parts of the following :

a) Show that

$$\sin^{-1} \frac{3}{5} - \sin^{-1} \frac{8}{11} = \cos^{-1} \frac{84}{85}. \quad 5$$

b) Prove that

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

c) Find the minimum value of the function x^x . 5

d) In a bag there are 4 red and 4 black balls. In another bag there are 2 red and 6 black balls. One bag is selected at random and one ball drawn which is red. Find the probability, that it is drawn from the first bag. 5

- e) Find the vector and Cartesian equation of that plane which passes through the point $(5, 2, -4)$ and perpendicular to the line whose direction ratios are $2, 3, -1$. 5
- f) If $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$ then show that $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$. 5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

- क) परवलय $y^2 = 4ax$ और सरल रेखा $y = 2ax$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निश्चित समाकलन की सहायता से ज्ञात कीजिए। 5
- ख) अवकल समीकरण $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2) dx$ का हल ज्ञात कीजिए। 5
- ग) एक व्यक्ति A, 70% घटनाओं में सत्य बोलता है। दूसरा व्यक्ति B, 60% घटनाओं में सत्य बोलता है। एक घटना में दोनों के एक दूसरे से सहमत होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

- घ) निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए।
निम्न व्यवरों
 $x - y \geq 0$
 $-x + 2y \geq 2$
 $x \geq 3, y \leq 4, y \geq 0$ के अन्तर्गत
 $Z = 2x + 3y - 1$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। 5

- ङ) समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ और $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) - 5 = 0$ के प्रतिच्छेदन और बिन्दु $(2, 2, 1)$ से जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। 5
- च) वक्र $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ (i) x -अक्ष के समान्तर हों (ii) y -अक्ष के समान्तर हों। 5

6. Attempt any five parts of the following :
- a) Find the area enclosed between the parabola $y^2 = 4ax$ and straight line $y = 2ax$, with the help of definite integral. 5
- b) Find the solution of the differential equation $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2) dx$. 5

- c) A man A speaks truth in 70% events. Another man B speaks truth in 60% events. Find the probability that in an event both agree with one other. 5

- d) Solve the following linear programming problem under the following constraints :

$$x - y \geq 0$$

$$-x + 2y \geq 2$$

$$x \geq 3, y \leq 4, y \geq 0.$$

Find the minimum value of $Z = 2x + 3y - 1$. 5

- e) Find the vector equation of a plane passing through the intersection of the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ and $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) - 5 = 0$ and point $(2, 2, 1)$. 5

- f) Find the points on the curve $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ where the tangents are (i) parallel to x -axis, (ii) parallel to y -axis. 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$2x + y + z = 1$$

$$x - 2y - 3z = 1$$

तथा $3x + 2y + 4z = 5$ को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 8

- ख) रेखाएँ, जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) \text{ और}$$

$$\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) . 8$$

7. Attempt any one part of the following :

- a) Solve the following system of equations <https://www.upboardonline.com>

$$2x + y + z = 1$$

$$x - 2y - 3z = 1$$

and $3x + 2y + 4z = 5$ by matrix method. 8

- b) Find the shortest distance between the lines, whose vector equations are given by

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) \text{ and}$$

$$\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) . 8$$

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} \log(\cos x) dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

8

ख) अवकल समीकरण

$$(1+e^{x/y}) dx + e^{x/y} (1-\frac{x}{y}) dy = 0 \text{ को}$$

हल कीजिए।

8

8. Attempt any one part of the following :

a) Prove that

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} \log(\cos x) dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

8

b) Solve the differential equation

$$(1+e^{x/y}) dx + e^{x/y} (1-\frac{x}{y}) dy = 0.$$

8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) $\int_a^b x^2 dx$ का योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकल की सहायता से मान ज्ञात कीजिए।

8

ख) i) $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} dx$ का मान ज्ञात

कीजिए। 5

ii) वक्र $x=at^2$, $y=2at$ के बिन्दु 't' पर अभिलम्ब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। 3

9. Attempt any one part of the following :

a) Find the value of $\int_a^b x^2 dx$ with the

help of definite integral as the limit of a sum. 8

b) i) Find the value of

$$\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} dx. 5$$

ii) Find the equation of the normal at point 't' of the curve $x=at^2$, $y=2at$. 3

324(FI)-95,000

<https://www.upboardonline.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से

अनुक्रमांक

नाम

131

324(FJ)

2022

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- निर्देश :
- इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
 - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
 - प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
 - प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
 - जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

- There are in all nine questions in this question paper.

324(FJ)

2

- All questions are compulsory.
- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- Marks allotted to the questions are indicated against them.
- Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) $\tan^{-1} \sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान बराबर है
- π
 - $-\pi/3$
 - $\pi/3$
 - $2\pi/3$

ख) मान लीजिए कि समुच्चय N में

$$R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\} \text{ द्वारा}$$

परिभाषित सम्बन्ध है तो

- $(2, 4) \in R$
- $(3, 8) \in R$
- $(8, 6) \in R$
- $(6, 8) \in R$

ग) 3×3 कॉर्ट के ऐसे आव्यूहों की कुल संख्या कितनी होगी जबकि प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है ?

- (i) 512 (ii) 81
(iii) 18 (iv) 27 ✓ 1

घ) कौन-सा फलन $x = 1$ पर अवकलनीय नहीं है ?

- (i) $f(x) = |x - 2|$
(ii) $f(x) = |x - 1|$
(iii) $f(x) = \frac{x}{|x|}$
(iv) $f(x) = |x + 1|$ ✓ 1

ङ) भुजा में 3% वृद्धि के कारण भुजा x cm के घन के आयतन में सन्निकट परिवर्तन है

- (i) $0.06 x^3 \text{ cm}^3$
(ii) $0.6 x^3 \text{ cm}^3$
(iii) $0.09 x^3 \text{ cm}^3$
(iv) $0.9 x^3 \text{ cm}^3$ ✓ 1

1. Attempt all parts of the following :

a) Value of $\tan^{-1} \sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ is

- (i) π (ii) $-\pi/3$
(iii) $\pi/3$ (iv) $2\pi/3$ ✓ 1

b) A relation $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$ is defined on the set N . Then

- (i) $(2, 4) \in R$
(ii) $(3, 8) \in R$
(iii) $(8, 6) \in R$
(iv) $(6, 8) \in R$ 1

c) How many total number of matrices of order 3×3 are there whose entries are 0 or 1 ?

- (i) 512 (ii) 81
(iii) 18 (iv) 27 1

d) Which function is not differential on $x = 1$?

- (i) $f(x) = |x - 2|$
(ii) $f(x) = |x - 1|$
(iii) $f(x) = \frac{x}{|x|}$
(iv) $f(x) = |x + 1|$ 1

e) What is the approximate change in the volume of a cube whose side is x cm, caused by increase of 3% in the side ?

- (i) $0.06 x^3 \text{ cm}^3$
(ii) $0.6 x^3 \text{ cm}^3$
(iii) $0.09 x^3 \text{ cm}^3$
(iv) $0.9 x^3 \text{ cm}^3$ ✓ 1

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) $\int \frac{dx}{1+\tan x}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

ख) वक्र $y^2 = 4x$, y -अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 1

ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y-2}$ ($y \neq 2$) का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 1

घ) सदिशों $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 1

ङ) यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं जहाँ $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ हों तो $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए। 1

2. Attempt all parts of the following :

a) Evaluate $\int \frac{dx}{1+\tan x}$. 1

b) Find the area of the region bounded by the curve $y^2 = 4x$, y -axis and line $y = 3$. 1

c) Find the general solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y-2}$ ($y \neq 2$). 1

d) Find the angle between the vectors $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$. 1

e) If A and B are two independent events where $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ then find $P(A \cap B)$. 1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि पूर्णाकों के समुच्चय Z में $R = \{(a, b) : 2, (a - b) \text{ को विभाजित करती है ; द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध है।} 2$

ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ तो दिखाइए $|2A| = 4|A|$. 2

ग) x के सापेक्ष $x^{\sin x}$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए ($x > 0$). 2

घ) किस अन्तराल में फलन $f(x) = x^2 - 4x + 6$ वर्धमान है ? 2

3. Attempt all parts of the following :

a) Prove that a relation $R = \{(a, b) : 2 \text{ divides } (a - b)\}$ on the set of integers Z , is an equivalence relation.

b). If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ then show that $|2A| = 4|A|$. 2

c) Find differential coefficient of $x^{\sin x}$ with respect to x ($x > 0$). 2

d) In which interval is the function $f(x) = x^2 - 4x + 6$ increasing? 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

ख) बिन्दुओं $(-2, 4, -5)$ और $(1, 2, 3)$ को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए। 2

ग) निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 9y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए :
 $x + 3y \leq 60, x + y \geq 10, x \leq y, x \geq 0, y \geq 0$. 2

घ) एक परिवार में दो बच्चे हैं, इनमें कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का होने की क्या प्रायिकता है? 2

4. Attempt all the parts of the following :

a) Evaluate $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$. 2

b) Find direction cosines of the line joining the points $(-2, 4, -5)$ and $(1, 2, 3)$. 2

c) Find the minimum value of $Z = 3x + 9y$ under the following restrictions : $x + 3y \leq 60, x + y \geq 10, x \leq y, x \geq 0, y \geq 0$. 2

d) There are two children in a family, in which at least one child is boy. What is the probability that both children are boy? 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $P(x) = X$ के समस्त उपसमुच्चयों का समुच्चय है जहाँ $X \neq \phi$, एक सम्बन्ध $R, P(x)$ पर इस प्रकार परिभाषित है कि ARB यदि और केवल यदि $A \subset B$ है। सिद्ध कीजिए कि R तुल्यता सम्बन्ध नहीं है। 5

ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि

$$A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0. \quad 5$$

ग) यदि $(\cos x)^y = (\cos y)^x$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 5

घ) $f(x) = x + \sin 2x$ का $[0, 2\pi]$ पर उच्चतम तथा निम्नतम मान ज्ञात कीजिए। 5

ङ) $(255)^{1/4}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। 5

च) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} (y+z)^2 & xy & zx \\ xy & (x+z)^2 & yz \\ xz & yz & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2xyz(x+y+z)^3$$

5

5. Attempt any five parts of the following :

a) If $P(X)$ = set of all subsets of X , where $X \neq \phi$, a relation R is defined on $P(X)$ as ARB if and only if $A \subset B$. Prove that R is not an equivalence relation. 5

b) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ then prove that

$$A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0. \quad 5$$

c) If $(\cos x)^y = (\cos y)^x$ then find $\frac{dy}{dx}$. 5

d) Find the maximum and minimum values of $f(x) = x + \sin 2x$ on $[0, 2\pi]$. 5

e) Find approximate value of $(255)^{1/4}$. 5

f) Prove that

$$\begin{vmatrix} (y+z)^2 & xy & zx \\ xy & (x+z)^2 & yz \\ xz & yz & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2xyz(x+y+z)^3$$

5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) $\int (\cot \sqrt{x} + \tan \sqrt{x}) dx$ ज्ञात कीजिए। 5

ख) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

और $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

ग) अवकल समीकरण

$$x \cos\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$$

का हल ज्ञात कीजिए।

5

- घ) आलेखीय विधि द्वारा निम्न रेखिक प्रोग्रामन समस्या को निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत हल कीजिए :

$$x + y \leq 8, \quad x \leq 5, \quad y \leq 5, \quad x + y \geq 4, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0$$

$Z = 10(x - 7y + 190)$ का न्यूनतमीकरण कीजिए।

5

- ङ) एक बक्से में दस कार्ड 1 से 10 तक पूर्णांक लिखकर रखे गये हैं। उन्हें अच्छी तरह मिलाया गया तथा बक्से से एक कार्ड यादृच्छया निकाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाले गये कार्ड पर संख्या 3 से अधिक है, तथा इस संख्या सम हो।

5

- च) यदि तीन सदिश \vec{a} , \vec{b} तथा \vec{c} इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ तथा $|\vec{c}| = 5$ और इनमें से प्रत्येक, अन्य दो सदिशों के योगफल पर लम्बवत् हैं तो $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ को ज्ञात कीजिए।

5

6. Attempt any *five* parts of the following :

- a) Evaluate :

$$\int (\cot \sqrt{x} + \tan \sqrt{x}) dx \quad 5$$

- b) Find the shortest distance between the lines

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) \text{ and}$$

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}).$$

5

- c) Find the solution of the differential equation

$$x \cos\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x. \quad 5$$

- d) Solve the following linear programming problem by graphical method, under the following constraints :

$$x + y \leq 8, \quad x \leq 5, \quad y \leq 5, \quad x + y \geq 4,$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \text{ Minimize}$$

$$Z = 10(x - 7y + 190).$$

5

- e) Ten cards numbered 1 to 10 are put in a box. The cards are mixed in well manner and one card is drawn at random from the box. Find the probability that the number appeared on the card is greater than 3 and the number is an even number. 5

- f) If there are three vectors \vec{a} , \vec{b} and \vec{c} such as $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ and $|\vec{c}|=5$ and each vector is perpendicular to the sum of other two vectors, find $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$. 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) $\int_0^\pi \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

- ख) $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ के मध्य वक्र $y = \cos x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 8

7. Attempt any one part of the following :

- a) Evaluate :

$$\int_0^\pi \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \quad 8$$

- b) Find the area of the region bounded by $y = \cos x$, $x = 0$ and $x = 2\pi$. 8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$4x - 3y + 2z = 4$ को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 8

- ख) i) यदि $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 \leq x \leq 1$ है तो सिद्ध कीजिए कि

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0. \quad 4$$

- ii) यदि $x = a(\cos t + t \sin t)$ और

$$y = a(\sin t - t \cos t) \text{ तो } \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ ज्ञात कीजिए।} \quad 4$$

8. Attempt any *one* part of the following :

a) Find the solution by matrix method of the following system of equations :

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4.$$

8

b) i) If $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 \leq x \leq 1$

then prove that

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0.$$

4

ii) If $x = a(\cos t + t \sin t)$ and $y = a(\sin t - t \cos t)$ then find

$$\frac{d^2 y}{dx^2}$$

4

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित

कीजिए कि $A \cdot \text{adj}(A) = |A| \cdot I$ तथा A^{-1}

ज्ञात कीजिए।

8

ख) दिखाइए कि

$$y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx \text{ जहाँ}$$

c_1, c_2 अचर हैं, अवकल समीकरण

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)y = 0 \text{ का}$$

हल है।

8

9. Attempt any *one* part of the following :

a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ then prove that

$$A \cdot \text{adj}(A) = |A| \cdot I \text{ and find } A^{-1}.$$

8

b) Show that

$$y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx,$$

where c_1, c_2 are constants, is a

solution of the differential equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)y = 0.$$

8

324(FJ)- 95,000