一类多边形最大面积的数值计算

李 明
(中国医科大学 数学教研室, 沈阳 110001)

摘 要: 针对 n 条边长给定的 $n+1$ 边形的最大面积 $S_{n+1,\max}$ 进行了定量讨论($n\geqslant 2$). 当 $n=2$ 、 $n=3$ 及给定的 n 条边全都相等且 $n\geqslant 4$ 时, 给出了相应的最大面积 $S_{3,\max}$ 、 $S_{4,\max}$ 及 $S_{n+1,\max}$ 的准确计算公式; 当给定的 n 条边长不全相等且 $n\geqslant 4$ 时, 给出了 $S_{n+1,\max}$ 的一种数值计算方法.

关键词: $n+1$ 边形; 最大面积; 数值方法; 相对误差
中图分类号: O178 **文献标识码**: A **文章编号**: 1672-5298(2009)04-0010-03

The Mathematical Calculation to the Maximal Area of A Kind of Polygon

LI Ming
(Department of Mathematics, China Medical University, Shenyang 110001, China)

Abstract: A quantitative discussion to the maximal area $S_{n+1,\max}$ of an $n+1$ -gon with n given sides($n\geqslant 2$) is presented in this paper.When $n=2$ 、 $n=3$ and the n given sides are all equal with $n\geqslant 4$,this paper presents the corresponding accurate formulas of the maximal area $S_{3,\max}$ 、 $S_{4,\max}$ and $S_{n+1,\max}$; When the n given sides are not all equal with $n\geqslant 4$, this paper presents a kind of mathematical algorithm to $S_{n+1,\max}$.

Key words: $n+1$ -gon; maximal area; numerical method; relative error

在涉及几何图形面积的极大极小问题中, 许多定理往往只是定性地描述出这些几何图形在取到面积最值时的条件和形状, 却很少定量的给出这些面积最值的计算公式. 事实上, 这些计算公式往往简单明了, 稍加推导便可得知; 但也有另一些定理, 它们所涉及的面积最值计算公式决非显而易见, 因此需要我们详加推导, 得出公式以方便应用. 本文就将针对一个面积最大值定理进行这方面的工作.

1 定理引发的面积最大值计算问题

有这样一个涉及多边形最大面积的定理 [1]: n 条边长给定的 $n+1$ 边形($n\geqslant 2$), 当且仅当第 $n+1$ 条边是此 $n+1$ 边形的外接圆直径时, 此 $n+1$ 边形的面积最大.

此定理仅定性地给出了 n 条边长给定的 $n+1$ 边形在取到最大面积时的形状($n\geqslant 2$), 为计算此 $n+1$ 边形的最大面积, 显然只需先算出面积最大时第 $n+1$ 条边的长度, 亦即外接圆直径. 为此, 我们先对该定理中的一些量进行设定:

(1) 设给定的 n 条边长依次为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ($n\geqslant 2$);

(2) 设此 $n+1$ 边形面积最大时, 第 $n+1$ 条边的长度为 d (即外接圆直径的长度), 面积最大值为 $S_{n+1,\max}$.

依据定理和上述设定, 我们画出此 $n+1$ 边形在取到最大面积时的几何图形(图 1), 由图 1, 因为各边所对应的圆周角之和为 $\frac{\pi}{2}$, 所以 d 是如下方程的唯一解:

$$\sum_{i=1}^{n} \arcsin\frac{a_i}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

收稿日期: 2009-08-19
作者简介: 李 明(1981−), 男, 辽宁沈阳人, 硕士, 中国医科大学数学教研室讲师. 主要研究方向: 不等式

又因为面积最大值等于以圆心 O 为顶点而给定的 n 条边分别为底边的 n 个三角形的面积之和, 所以 d 还是如下方程的唯一解:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{4}\sqrt{x^2-a_i^{\ 2}}=S_{n+1,\max} \tag{2}$$

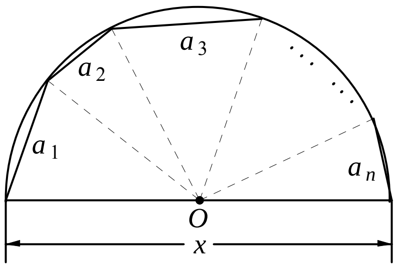

图 1

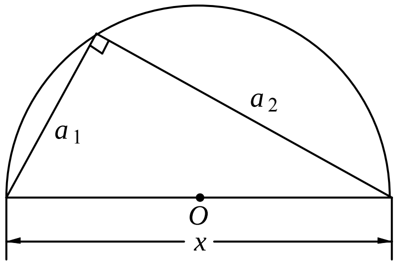

图 2

有了(1)、(2)两个方程, 我们便可以对 $S_{n+1,\max}$ 的计算公式分情况进行讨论了.

2 $S_{n+1,\max}$ 可用公式准确计算的三种情形

2.1 $n=2$ 的情形

此时, 图 1 简化为图 2, 易知 $x=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$, $S_{3,\max}=\frac{1}{2}a_1a_2$.

2.2 $n=3$ 的情形

此时, 图 1 简化为图 3, 由方程(1)得 $\arcsin\frac{a_1}{x}+\arcsin\frac{a_2}{x}+\arcsin\frac{a_3}{x}=\frac{\pi}{2}$, 即

$$\arcsin\frac{a_1}{x}+\arcsin\frac{a_2}{x}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{a_3}{x}$$

两边用余弦函数作用, 不难知道 $\sqrt{1-(\frac{a_1}{x})^2}\cdot\sqrt{1-(\frac{a_2}{x})^2}-\frac{a_1a_2}{x^2}=\frac{a_3}{x}$, 化简, 得

$$x^3-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)x-2a_1a_2a_3=0 \tag{3}$$

记 $p=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}}$, $q=\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$, $\varphi=\arccos(\frac{q}{p})^3$, 由一元三次方程的求根公式[2], 方程(3)的解为 $x=2p\cos\frac{\varphi}{3}$, 代入(2)式, 得

$$S_{4,\max}=\sum_{i=1}^{3}\frac{a_i}{4}\sqrt{(2p\cos\frac{\varphi}{3})^2-a_i^2}\ .$$

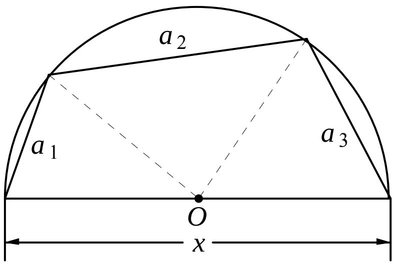

图 3

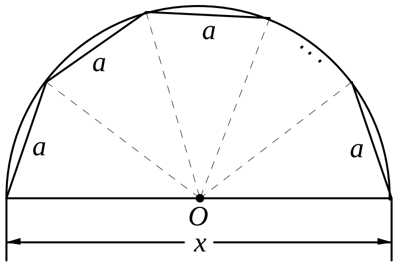

图 4

2.3 给定的 n 条边全都相等且 $n\geqslant 4$ 的情形

此时, 图 1 简化为图 4, 不妨设 $a_1=a_2=\cdots=a_n=a$, 代入方程(1), 解得 $x=a\csc\frac{\pi}{2n}$.于是, 由方程(2)得

$$S_{n+1,\max}=\frac{na^2}{4}\cot\frac{\pi}{2n}\ .$$

3 $S_{n+1,\max}$宜用数值方法近似计算的情形

除了上述三种可用公式来准确计算$S_{n+1,\max}$的情形外，只有给定的n条边长不全相等且$n \geqslant 4$的情形尚未予以讨论(见图 1). 这种情形通常难以求得$S_{n+1,\max}$的准确计算公式，那么能否用数值计算的方法来求出$S_{n+1,\max}$的近似值$S^*_{n+1,\max}$，且要求相对误差$\delta = \dfrac{\left|S^*_{n+1,\max} - S_{n+1,\max}\right|}{S_{n+1,\max}}$可以小于事先给定的任意小的正数$\varepsilon$呢?下面将说明这是可以办到的.

记$m = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$、$M = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则$d \in (m, M)$.设$x^* \in (m, M)$是$d$的近似值，即方程(1)的近似解.记方程(1)的右端$\sum\limits_{i=1}^{n} \arcsin\dfrac{a_i}{x} = f(x)$，而方程(2)的右端$\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{4}\sqrt{x^2 - a_i{}^2} = S(x)$.

显然，函数$f(x)$和$S(x)$在闭区间$[d, x^*]$或$[x^*, d]$上可导，且$f'(x) \neq 0$，由柯西中值定理[3]，存在$\xi \in (d, x^*)$(或(x^*, d))$\subset (m, M)$，使得

$$\left|\frac{S(x^*) - S(d)}{f(x^*) - f(d)}\right| = \left|\frac{S'(\xi)}{f'(\xi)}\right| = \frac{1}{4}\xi^2,$$

即

$$\left|\frac{S^*_{n+1,\max} - S_{n+1,\max}}{f(x^*) - \frac{\pi}{2}}\right| = \frac{1}{4}\xi^2.$$

因此，欲使

$$\delta = \frac{\left|S^*_{n+1,\max} - S_{n+1,\max}\right|}{S_{n+1,\max}} = \frac{\xi^2\left|f(x^*) - \frac{\pi}{2}\right|}{4S(d)} < \frac{M^2\left|f(x^*) - \frac{\pi}{2}\right|}{4S(m)} < \varepsilon$$

(ε (>0)是事先给定的且可以任意小的相对误差限)，只须

$$\left|f(x^*) - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{4\varepsilon}{M^2} S(m)$$

即

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \arcsin\frac{a_i}{x^*} - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{M^2}\sum_{i=1}^{n} a_i\sqrt{m^2 - a_i^2} \tag{4}$$

即可.

综上所述，我们找到了解决前面问题的一个方案，即：事先给定一个我们需要的较小的相对误差限ε，通过二分法求得方程(1)的近似解x^*，使其满足(4)式，.再将x^*代入方程(2)的右端，即可求得最大面积$S_{n+1,\max}$的近似值$S^*_{n+1,\max} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{4}\sqrt{(x^*)^2 - a_i^2}$，且满足相对误差

$$\delta = \frac{\left|S^*_{n+1,\max} - S_{n+1,\max}\right|}{S_{n+1,\max}} < \varepsilon.$$

参考文献

[1] 笥部贞市朗. 几何学辞典[M]. 高清仁, 舒玉兴, 胡广春, 等译. 上海: 上海教育出版社, 1984: 1003
[2] H.奈茨. 数学公式[M]. 石胜文译. 北京: 海洋出版社, 1983: 45
[3] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2002: 131