Chapitre II : Les séries numériques

I- But du chapitre :

1- Calcul de la somme d'une série numérique en utilisant la définition ;
2- Connaissance des opérations algébriques sur les séries numériques convergentes ;
3- Connaissance de la nature de la série de Riemann et de la série géométrique ;
4- Détermination de la nature d'une série numérique à termes positifs en appliquant les critères de convergence :
   - Critère de comparaison,
   - Critère de négligence,
   - Critère d'équivalence,
   - comparaison d'une série et d'une intégrale généralisée d'une fonction positive et décroissante,
   - règle $n^{\alpha}u_n$,
   - règle de D'Alembert
   - règle de Cauchy ;
5- Etude de la convergence absolue d'une série numérique;
6- Utilisation du critère spécial des séries alternées.

II- Définitions-notions essentielles :

1-Séries numériques :

1-1- Définition 1

Soit $(U_n)_{n\in N}$ une suite numérique. On appelle série numérique de terme général Un, la suite dont les termes successifs sont : $S_0=U_0$, $S_1=U_0+U_1$, $S_2=U_0+U_1+U_2$, …………..,
$S_n=U_0+U_1+\ldots+U_n=\sum_{k=0}^{n} U_k$.$(S_n)_{n\in N}$ est dite la **suite des sommes partielles**.

1-2- Définition 2

Si la suite $(S_n)_{n\in N}$ a une limite S, on dit que la série de terme général Un est convergente et a pour somme S, on écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} U_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = S$ .Sinon, on dit que la série est divergente.

1-3- Exemples :

- On considère la suite (Un) $_{n \in N}$ définie par : $U_n = 3(\frac{1}{2})^n$ pour $n \in N$. Etudier la série de terme générale Un.
- On considère la suite (Un) $_{n \in N}$ définie par : $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$ pour n≥1. Etudier la série de terme générale Un.
- On considère la suite (Un) $_{n \in N}$ définie par $U_n = \ln(1+\frac{1}{n})$ pour n≥1. Etudier la série de terme générale Un.
- On considère la suite (Un) $_{n \in N}$ définie par $U_n = (-1)^n$ pour n≥1. Etudier la série de terme générale Un.

2- Condition nécessaire de convergence :

2-1- Introduction

Considérons une série de terme général Un, supposons que cette série est convergente et soit S sa somme. On a donc : $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ et $\lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$ alors $\lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = 0$.

Or $S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} U_k - \sum_{k=0}^{n-1} U_k = U_n$ donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.

2-2- Théorème 1 :

Si la série de terme général Un converge alors son terme général tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la réciproque est fausse.

2-3- Exemple 1 :

Le terme générale $U_n = \ln(1+\frac{1}{n})$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ or la série de terme général Un est divergente.

2-4- Théorème 2 (la contraposé) :

Si le terme général d'une série numérique ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, alors cette série diverge.

2-5- Exemples 2 :

Etudier les séries de terme général $U_n = \frac{n+1}{n+2}$ et $V_n = \frac{n^2}{n^2+1}$

3- Opérations sur les séries :

3-1- Théorème

- ✓ Si les séries de terme général Un et Vn sont **convergentes**, alors la série de terme général Un+Vn est **convergente** et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty}(U_n+V_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}U_n+\sum_{n=0}^{+\infty}V_n$
- ✓ Si la série de terme général Un est **convergente**, alors la série de terme général λ Un est **convergente** (avec λ un nombre réel) et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda U_n=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}U_n$
- ✓ Plus généralement, si les séries de terme général Un et Vn sont **convergentes** et si λ et μ sont deux nombres réels, alors la série de terme général λ Un+ μ Vn est **convergente** et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda U_n+\mu V_n)=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}U_n+\mu\sum_{n=0}^{+\infty}V_n$
- ✓ Si la série de terme générale Un **converge** et la série de terme général Vn **diverge** alors la série de terme général λ Un+ μ Vn **diverge**
- ✓ Si les deux séries de termes généraux Un et Vn **divergent** alors **on ne peut rien conclure** à propos de la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda U_n+\mu V_n)$

3-2- Exemple

Soit $U_n=\frac{1}{n}-1$ et $V_n=1-\frac{1}{n+1}$

1-Etudier la convergence des séries de termes généraux Un et Vn.

2-Etudier la série de terme général Un+Vn

3-Conclure.

III- La série géométrique et la série de Riemann

1-La série géométrique :

1-1- Définition

Soit q un nombre réel quelconque, on appelle série géométrique, la série de terme général q^n avec n€N.

1-2- Théorème :

Une série géométrique de terme général q^n est convergente si et seulement si $|q| \prec 1$. Dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

1-3- Exemple :

Etudier la nature de la série numérique de terme générale Un dans les cas suivants :

a-Un= $(5/6)^n$

b-Un= $(-1/3)^n$

c-Un= 4^n

2- Les séries de Riemann :

2-1- Définition

On appel série de Riemann, toute série de terme général $U_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in R$.

2-2- Théorème :

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha \succ 1$

2-3- Exemple :

-La série de terme générale Un=$1/\sqrt{n}$ est divergente car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 1/2 \leq 1$

-La série de terme générale Un=$1/n^{3/2}$ est convergente car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 3/2 > 1$

IV- Les séries numériques à termes positifs

1- Théorème :

1-1- Enoncé

Une condition nécessaire et suffisante de la convergence d'une série à termes positifs est que la suite de sommes partielles Sn soit majorée. Autrement dit : $\sum_{n\geq 0} U_n convergente \Leftrightarrow \exists M \in R, \forall n \in N, \sum_{k=0}^{n} U_k \leq M$.

1-2- Exemple :

Reprenons le 2[éme] exemple du paragraphe II ,on a la somme partielle de la série de terme générale Un=1/n(n+1) est Sn=1-1/(n+1) qui est majorée par 1 donc la série de terme générale Un est convergente.

2- Critère de comparaison :

2-1- Enoncé

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ deux séries à termes positifs. Supposons qu'on a Un≤Vn

- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ converge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ converge.
- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ diverge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ diverge.

2-2-Exemple

Etudier la convergence des série de termes généraux Un= $(\sin^n(\pi/8)) / 3^{n+2}$ et Vn= $1/(n\cos^2 n)$

3- Critère de négligence :

3-1- Enoncé

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ deux séries à termes positifs. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 0$

- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ converge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ converge.
- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ diverge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ diverge.

3-2- Exemple :

Montrer que la série de terme générale Un=1/ (n^3ln(n)) est convergente.

4- Théorème d'équivalence :

4-1- Enoncé

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ deux séries à termes positifs. Supposons qu'on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ sont de même nature.

4-2- Exemple :

Montrer que les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{n^{3/2}})$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{\pi^2}{n^2})$ sont convergentes.

5- Comparaison d'une série et d'une intégrale généralisée d'une fonction positive et décroissante :

5-1- Enoncé

Soit f une fonction positive et décroissante sur [a,+∞[et Un=f(n).On a alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\sum_{n=a}^{+\infty} U_n$ sont de même nature.

5-2-Exemple

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ est convergente

6- Règle $n^{\alpha}U_n$:

6-1- Enoncé

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ une série à termes positifs et α un nombre réel.

- S'il existe $\alpha \succ 1$ et $\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha}U_n = 0$ alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leq 1$ et $\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha}U_n = \pm\infty$ alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ diverge.

6-2- Exemple

Quelle est la nature de la série de terme générale Un=ln(n)/n^4

7- Règle de d'Alembert :

7-1- Enoncé :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ une série à termes positifs, supposons que $\lim_{n \to +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$

- Si $l < 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est convergente
- Si $l > 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est divergente
- Si l=1 je ne peux rien conclure

7-2- Exemple

Etudier la convergence de la série de terme générale Un=1/n!

8- Règle de Cauchy

8-1- Enoncé :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ une série à termes positifs, supposons que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = l$

- Si $l < 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est convergente
- Si $l > 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est divergente
- Si l=1 je ne peux rien conclure

8-2-Exemple

Etudier la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}})^{-n}$

V- La convergence absolue :

1- Définition :

On dit que $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |U_n|$ est convergente.

2- Proposition

Toute série numérique absolument convergente est convergente, la réciproque est fausse.

3- Les séries alternées :

3-1- Définition :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ une série réelle .On dit que $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est alternée si et seulement si elle s'écrit sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n V_n$ où $Vn > 0$.

3-2-Critère spécial des séries alternées :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ une série alternée tel que $(|U_n|)_n$ est une suite décroissante vers 0, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est convergente et sa somme de signe U_0, de plus : $\forall M \in N, \left|\sum_{n=M+1}^{+\infty} U_n\right| \leq |U_{M+1}|$

3-3- Exemple :

Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Résumé du chapitre

$\sum_{n\geq 0} U_n$ une série numérique de terme générale Un, c'est la suite Sn tel que Sn= $\sum_{k=0}^{n} U_k$, $\sum_{n\geq 0} U_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} U_k =$

- Un réel alors la série est convergente
- $\pm\infty$ alors la série est divergente

Etude de la convergence d'une série numérique

Etape 1 : Je calcule $\lim_{n\to+\infty} U_n$

- $\lim_{n\to+\infty} U_n$ =l $\neq$0 alors la série de terme générale Un diverge
- $\lim_{n\to+\infty} U_n$ =0 alors je ne peux rien conclure, je passe à l'étape suivante

Etape 2 : Ici on a 2 cas

- Soit je calcul Sn (si c'est facile à calculer où si c'est demandé) et puis je fais tendre n vers + ∞
- Soit j'utilise les critères de convergence si la série est à **termes positifs**
  - Critère de comparaison
  - Critère de négligence
  - Théorème d'équivalence
  - Comparaison d'une série et une intégrale
  - Règle n^{α}Un
  - Règle de D'Alembert
  - Règle de Cauchy
  - Série de Riemann et série géométrique

Etape 3 : Si les termes de la séries changent de signe

- La convergence absolue
- Le critère spécial des séries alternées