厦门大学《线性代数》课程试卷

信息 学院________系 2018 年级________专业

学年学期：18191 主考教师：线性代数教学组 A 卷（√）B 卷

注：A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，|A|表示方阵 A 的行列式，r(A)表示矩阵 A 的秩

一、单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. $x=-2$是$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x & x^2\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=0$ 的(　　)。

(A) 充分必要条件　　(B) 充分而非必要条件

(C) 必要而非充分条件　　(D) 既不充分也非必要条件

2. 设 A 是 n 阶矩阵，A 适合下列条件(　　)时，$E-A$必是可逆矩阵。

(A) $A^n=A$　　(B) A是可逆矩阵

(C) $A^n=0$　　(D) A主对角线上的元素全为零

3. 设 $F=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$，E[3(2)]是 3 阶初等方阵，则 E[3(2)]F 等于(　　)。

(A) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 4 & 6 & 0\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ 0 & 1 & 8\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$

4. 设 A 是 n 阶(n>2)可逆矩阵，A^*是 A 的伴随矩阵，则(　　)

(A) $(A^*)^*=|A|^{n-1}A$　　(B) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

(C) $(A^*)^*=|A|^{n+1}A$　　(D) $(A^*)^*=|A|^{n+2}A$

5. 若$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=m$，则$\begin{vmatrix}a_1 & 2c_1-5b_1 & 3b_1\\ a_2 & 2c_2-5b_2 & 3b_2\\ a_3 & 2c_3-5b_3 & 3b_3\end{vmatrix}=$ (　　)。

(A) 30m　　(B) -15m　　(C)6m　　(D)-6m

6. 设 A 为$m\times n$矩阵，C 是 n 阶可逆矩阵，矩阵 A 的秩为 r，矩阵 B=AC 的秩为 r1，则(　　)。

(A) r> r1　　　　(B) r < r1

(C) r = r1　　　　(D) r 与 r1 的关系依 C 而定

7. 设 A, B 均为 n 阶方阵，下面结论正确的是(　　)。

(A) 若 A, B 均可逆，则 $A+B$ 可逆

(B) 若 A, B 均可逆，则 AB 可逆

(C) 若 $A+B$ 可逆，则 $A-B$ 可逆

(D) 若 $A+B$ 可逆，则 A, B 均可逆

8. 设$A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ -2 & 5 & 7\\ x & y & z\end{pmatrix}$，第三行元素的代数余子式分别为$A_{31}, A_{32}, A_{33}$，则$A_{31}+2A_{32}+3A_{33}$的值(　　)。

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 不确定

9. 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，若$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则$Q^{-1}AQ=$(　　)。

(A) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

10. 设 A 为 n 阶方阵， $r(A)<n-1$，则(　　)。

(A) $r(A^*)=n$　　(B) $r(A^*)=n-1$

(C) $r(A^*)=1$　　(D) $r(A^*)=0$

二、填空题（每空格 3 分，共 30 分）

1. 计算行列式$\begin{vmatrix}\alpha & & & & & & & b\\ & \alpha & & & & & b & \\ & & \cdots & & & \cdots & & \\ & & & \alpha & b & & & \\ & & & b & \alpha & & & \\ & & \cdots & & & \cdots & & \\ & b & & & & & \alpha & \\ b & & & & & & & \alpha\end{vmatrix}_{2n\times 2n}$的值_____。

2. 排列 $n(n-1)\cdots\cdots 321$ 的逆序数为 ___________。

3. 线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$ 有唯一解，λ 应满足___________。

4. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，则 $(A^{-1})^*=$ ___________。

5. A 为 3 阶矩阵，且满足 $|A|=3$，则 $|3A^*|=$ ___________。

6. 设 A、EB 均为 2 阶矩阵，A^*，B^*分别为 A、B 的伴随矩阵，若$|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 _______。

7. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$ ___________。

8. 已知 $AB-B=A$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $A=$ ________。

9. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{pmatrix}$，其中 $a_i\neq0$，$b_i\neq0$ $(i=1,2,3)$，则 $r(A)=$ ___________。

10. 设 A 是 4×3 矩阵，且 $r(A)=2$，而 $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$，则 $r(AB)=$ ___________。

三、计算题（共 32 分）

1. 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha\beta&0&\cdots&0&0\\1&\alpha+\beta&\alpha\beta&\cdots&0&0\\0&1&\alpha+\beta&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\alpha+\beta&\alpha\beta\\0&0&0&\cdots&1&\alpha+\beta\end{vmatrix}$$

2. 已知 a 是常数，且矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -a\end{pmatrix}$ 可经初等变换化为矩阵 $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，求 a。

3. 设 $\mathrm{AP}=\mathrm{PB}$，其中$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求 A 及 A^{101}。

四、证明题（每小题 6 分，共 18 分）

1. 证明恒等式 $\begin{vmatrix}1 & a^2 & a^3\\ 1 & b^2 & b^3\\ 1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}=(ab+bc+ca)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$

2. 若 A 为 n 阶矩阵，且 $\mathrm{A}^2=\mathrm{E}$，证明： $\mathrm{r}(\mathrm{A}+\mathrm{E})+\mathrm{r}(\mathrm{A}-\mathrm{E})=\mathrm{n}$

3. 设A是 n 阶方阵，E 是 n 阶单位矩阵，$\mathrm{A}+\mathrm{E}$ 可逆，且$\mathrm{f}(\mathrm{A})=(\mathrm{E}-\mathrm{A})(\mathrm{E}+\mathrm{A})^{-1}$。
证明：

(1) $\big(\mathrm{E}+\mathrm{f}(\mathrm{A})\big)(\mathrm{E}+\mathrm{A})=2\mathrm{E}$

(2) $\mathrm{f}\big(\mathrm{f}(\mathrm{A})\big)=\mathrm{A}$