



厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：(理工类 A 卷) 考试日期 2019.01.16

一、求下列的定积分（每小题 6 分，共 18 分）：

1. $\int_{-3}^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}} dx;$

解法一： $\int_{-3}^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}} dx = \int_{-3}^1 1 - \sqrt{1-x} dx$

$$= 4 + \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-3}^1$$

$$= 4 + \frac{2}{3}(0-8) = -\frac{4}{3}$$

解法二：令 $t = \sqrt{1-x}$ ，则 $x = 1-t^2$ ，

$$\int_{-3}^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}} dx = \int_2^0 \frac{1-t^2}{1+t} d(1-t^2)$$

$$= \int_2^0 2t^2 - 2t dt$$

$$= \left(\frac{2}{3}t^3 - t^2\right) \Big|_2^0$$

$$= 0 - \left(\frac{2}{3} \cdot 2^3 - 2^2\right) = -\frac{4}{3}$$

2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx;$

解法一： $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}$$

了解方法

$$= \tan \frac{x}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \ln(1+\cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 - (-1) + 0 = 2$$

解法二：利用奇偶性。 **了解方法**

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x} dx + 0$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 \frac{x}{2} dx$$

$$= 2 \tan \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2$$

$$3. \int_0^1 x \cdot \arccos x dx .$$

记住方法

解法一： 令 $t = \arccos x$ ，则 $x = \cos t$ ，

$$\int_0^1 x \cdot \arccos x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 t \cdot \cos t d(\cos t)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \sin 2t dt$$

$$= \frac{1}{8} (-2t \cdot \cos 2t + \sin 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

$$\text{解法二：} \int_0^1 x \cdot \arccos x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \arccos x dx^2$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \arccos x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 d(\arccos x)$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin x \Big|_0^1$$

$$= -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

二、求下列的不定积分（每小题 6 分，共 12 分）：

1. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$;

解： $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int \frac{d(\ln x)}{1+\ln x}$

$$= \int \frac{d(1+\ln x)}{(1+\ln x)}$$

$$= \ln |1+\ln x| + C$$

2. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$ 。

解：当 $x > 1$ 时，令 $x = \sec t, t \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，则 $\sqrt{x^2-1} = \tan t$ ，代入

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} = \int \frac{d(\sec t)}{\sec^2 t \cdot \tan t} = \int \cos t \, dt$$

$$= \sin t + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$$

当 $x < -1$ 时，令 $u = -x$ ，则 $u > 1$ 且 **记住方法**

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2-1}} = -\frac{\sqrt{u^2-1}}{u} + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$$

（或者因为 $\frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$ 是偶函数，所以当 $x < -1$ 时， $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} = -\frac{\sqrt{(-x)^2-1}}{-x} + C$
 $= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$ ）。综上所述， $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$ 。

三、（8分）求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\sqrt{x})(1+x)}$ 。

解法一：令 $t = \sqrt{x}$ ，则 $x = t^2$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\sqrt{x})(1+x)} &= \int_0^{+\infty} \frac{dt^2}{(t^2+t)(1+t^2)} \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+1} - \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(t+1)^2}{t^2+1} \right|_0^{+\infty} + \arctan t \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} (0-0) + \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

设未知量的时候基本计算出错

解法二：令 $t = \sqrt{x}$ ，则 $x = t^2$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\sqrt{x})(1+x)} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}$$

注意到 $2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)} \stackrel{u=\frac{1}{t}}{=} 2 \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t)(1+t^2)} dt$

$$\begin{aligned} \text{因此 } 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)(1+t^2)} + \frac{t}{(1+t)(1+t^2)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \arctan t \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}。 \end{aligned}$$

四、（8分）设 $f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt$ ，求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)e^x \cdot f(x) dx$ 。

解： $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ ， $f'(x) = -\frac{\sin x}{x}$

要积分的项和要求导的项搞反了

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)e^x \cdot f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) d(xe^x)$$

$$= xe^x f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

少写了x

$$\because \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)e^x \cdot f(x) dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} (e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$$

五、（10 分）求函数 $f(x) = 5\sqrt{4+x^2} - 3x$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的极值和最值，并判定其图形的凹凸性。

$$\text{解： } f'(x) = \frac{5x}{\sqrt{4+x^2}} - 3, \quad f''(x) = \frac{20}{(\sqrt{4+x^2})^3} > 0$$

令 $f'(x) = 0$ ，解得唯一的可疑极值点： $x = \frac{3}{2}$ 。

因为 $f''(\frac{3}{2}) > 0$ ，所以 $x = \frac{3}{2}$ 是极小值点，进而是最小值点（此结论也可以通过单调性给出：

因为 $f''(x) > 0$ ，所以 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的，因此当 $x < \frac{3}{2}$ 时， $f'(x) < f'(\frac{3}{2}) = 0$ ，

此时 $f(x)$ 是单调减少的；当 $x > \frac{3}{2}$ 时， $f'(x) > f'(\frac{3}{2}) = 0$ ，此时 $f(x)$ 是单调增加的。故 $x = \frac{3}{2}$ 是极小值点，也是最小值点）。

又因为 $f(x) = 5\sqrt{4+x^2} - 3x > 2x$ ，所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ，所以 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上没有最大值。

综上所述， $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上在 $x = \frac{3}{2}$ 取得极小值和最小值 $f(\frac{3}{2}) = 8$ ，无极大值和最大值。

又因为 $f''(x) = \frac{20}{(\sqrt{4+x^2})^3} > 0$ ，所以其函数图形是凹的。

六、（8 分）试求常数 a, b ，使得当 $x \rightarrow 0$ 时，函数 $f(x) = x - a \sin x - b \sin 2x$ 是关于 x 的 5 阶无穷小。

解：当 $x \rightarrow 0$ 时，

$$\begin{aligned} f(x) &= x - a \left[x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + o(x^5) \right] - b \left[2x - \frac{1}{3!} (2x)^3 + \frac{1}{5!} (2x)^5 + o(x^5) \right] \\ &= (1-a-2b)x + \frac{a+8b}{6} x^3 - \frac{a+32b}{5!} x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

根据题意, 有 $a+2b=1$, $a+8b=0$, $a+32b \neq 0$, 解得 $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{6}$ 。

七、(8分) 求心形线 $\rho=1+\cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 的长度 s 。 **有问题**

$$\text{解: } ds = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta = \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2} d\theta = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta$$

$$\text{由图形对称性, } s = 2 \int_0^\pi 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta$$

$$= 4 \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi = 8$$

八、(14分) 过坐标原点作曲线 $y=e^x$ 的切线, 该切线与曲线 $y=e^x$ 及 y 轴围成平面图形 D, 试求:

(1) 平面图形 D 的面积 A;

(2) 平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V。

解: 设切点为 (x_0, e^{x_0}) , 因为此切线过坐标原点, 因此其切线斜率满足 $y'|_{x=x_0} = e^{x_0} = \frac{e^{x_0} - 0}{x_0 - 0}$,

解得 $x_0 = 1$, 从而此切线方程为 $y = e \cdot x$, 切点为 $(1, e)$ 。

$$(1) A = \int_0^1 e^x - e \cdot x dx$$

$$= (e^x - \frac{e}{2} x^2) \Big|_0^1$$

$$= (e - \frac{e}{2}) - (1 - 0) = \frac{e}{2} - 1$$

$$(2) \text{方法一: } V = \frac{\pi}{3} \cdot 1^2 \cdot e - \pi \int_1^e (\ln y)^2 dy$$

$$= \frac{\pi}{3} e - \pi \int_0^1 t^2 e^t dt = \frac{\pi}{3} e - \pi e^t (t^2 - 2t + 2) \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{3} e - \pi(e - 2) = 2\pi(1 - \frac{1}{3}e)$$

$$\text{方法二(柱壳法): } V = 2\pi \int_0^1 x \cdot (e^x - e \cdot x) dx$$

有问题

$$= 2\pi[(x-1) \cdot e^x - \frac{e}{3} x^3] \Big|_0^1$$

$$= 2\pi(1 - \frac{1}{3}e)$$

九、（8分）设非负函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x) dx = 0$ 。证明：在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 0$ 。

证法一：令 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ， $x \in [a, b]$ ，

则 $F(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可导，且 $F'(x) = f(x) \geq 0$ ，从而 $F(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上不减，即有 $F(a) \leq F(x) \leq F(b)$ 。

又 $F(a) = F(b) = 0$ ，因此 $F(x) \equiv 0$ ，故有 $f(x) = F'(x) \equiv 0$ 。

证法二：用反证法。假设 $f(x) \not\equiv 0$ ，则存在 $x_0 \in [a, b]$ ，使得 $f(x_0) > 0$ 。因为 $f(x)$ 在 x_0 连续，所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) > 0$ ，由极限局部保号性，存在区间 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ ，使得 $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0)$ ，

$\forall x \in [\alpha, \beta]$ 。

$$\begin{aligned} \text{从而 } \int_a^b f(x) dx &= \int_a^\alpha f(x) dx + \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^b f(x) dx \\ &\geq \int_\alpha^\beta f(x) dx \geq \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f(x_0) dx = \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > 0 \end{aligned}$$

这与已知条件 $\int_a^b f(x) dx = 0$ 矛盾，因此 $f(x) \equiv 0$ 。

十、（本题共 10 分，第一小题 6 分，第二小题 4 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，其值域为 I 。函数 $\varphi(u)$ 在 I 上二阶可导，且对于 I 上任意的一点 u 都有 $\varphi''(u) \geq 0$ 。

证明 Jensen 不等式： $\varphi(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(x)) dx$ 。

学会用积分中值定理代替复杂的积分值（或者直接代）

证明：因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，所以由积分中值定理，存在 $x_0 \in (a, b)$ ，使得

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx。$$

由泰勒公式，存在 ξ 在 $f(x_0)$ 与 $f(x)$ 之间，使得

$$\varphi(f(x)) = \varphi(f(x_0)) + \varphi'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + \frac{\varphi''(\xi)}{2}(f(x) - f(x_0))^2$$

因为 $\varphi''(\xi) \geq 0$ ，所以有

$$\varphi(f(x_0)) + \varphi'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) \leq \varphi(f(x))$$

两边从 a 到 b 积分，得

$$\int_a^b \varphi(f(x_0)) \, dx + \varphi'(f(x_0)) \int_a^b f(x) - f(x_0) \, dx \leq \int_a^b \varphi(f(x)) \, dx$$

整理得

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx\right) = \varphi(f(x_0)) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(x)) \, dx$$