题目： 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，且 $f(0)=0$，证明：存在 $\xi\in[0,1]$，$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}f'(\xi)$.

分析： 注意到要证的式子涉及到函数和其导数值的关系，就可以想到拉格朗日中值定理.

已知条件中有 $f(0)=0$，所以，可以用 $f(x)=f(0)+f'(\eta)x$ 来表示被积函数中的 $f(x)$.

证明： 对于 $x\in[0,1]$，由拉格朗日中值定理，存在 $\eta\in(0,x)$，使得 $f(x)=f(0)+f'(\eta)x$，

其中 $0<\eta<x$.

于是，$xf(x)=xf(0)+f'(\eta)x^2$. 因为 $f(0)=0$，所以 $xf(x)=f'(\eta)x^2$，于是

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2 f'(\eta)\mathrm{d}x.$$

因为 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上必取得最大值 M 和最小值 m，于是，

$$m\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\le\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2 f'(\eta)\mathrm{d}x\le M\int_0^1 x^2\mathrm{d}x,$$

即 $\frac{m}{3}\le\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\le\frac{M}{3}$，也即 $m\le 3\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\le M$.

因为 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由介值定理，存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $f'(\xi)=3\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}f'(\xi)$.