厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷参考答案

________学院________系________年级________专业

试卷类型:(理工类A卷)　　　　考试时间:2019.11.16

一、计算下列极限:(每小题 6 分,共 24 分)

1. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{3}{1+x^3}\right)$;

解: $$\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{3}{1+x^3}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{1+x^3}=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{1-x+x^2}$$

$$=\frac{-1-2}{1-(-1)+(-1)^2}=-1$$

或者

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{3}{1+x^3}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{1+x^3}\quad=\lim_{x\to -1}\frac{2x-1}{3x^2}=\frac{2\cdot(-1)-1}{3\cdot(-1)^2}=-1$$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{\frac{\pi}{\sin(\pi x)}}$;

解: $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2-x}{x}\right)^{\frac{\pi}{\sin(\pi x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\pi\ln\frac{2-x}{x}}{\sin \pi x}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\pi\ln[1+\frac{2(1-x)}{x}]}{\sin\pi(1-x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\pi\cdot\frac{2(1-x)}{x}}{\pi(1-x)}}\quad=e^2$$

或者

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2-x}{x}\right)^{\frac{\pi}{\sin(\pi x)}}=\lim_{x\to 1}\left[1+\frac{2(1-x)}{x}\right]^{\frac{x}{2(1-x)}\cdot\frac{2\pi(1-x)}{x\sin\pi(1-x)}}\quad=e^2$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{\sqrt{1+x^2\sin x}-\sqrt{1+x^4}}$;

解: $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{\sqrt{1+x^2\sin x}-\sqrt{1+x^4}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(e^{\tan x-x}-1)(\sqrt{1+x^2\sin x}+\sqrt{1+x^4})}{x^2\sin x-x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^x\cdot\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x^2\sin x}+\sqrt{1+x^4})\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

4. 求数列的极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{2^n+3^n})$。

解：注意到$3\le\sqrt[n]{2^n+3^n}\le 3\cdot\sqrt[n]{2}$，又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，由夹逼准则，可得$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{2^n+3^n})=3$。

二、求下列函数的导数：（本题 16 分, 第一小题 9 分，第二小题 7 分）

1. 求函数$y=x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$的一阶导数；

解：

$$y'=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})+\frac{1}{1+(\frac{1-x}{1+x})^2}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$=2\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{1+x^2}\quad=2\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}$$

2. 求函数$y=\sqrt[6]{\dfrac{x^2-1}{(x+2)(x+4)}}$在$x=2$处的微分$\mathrm{d}y|_{x=2}$。

解：两边取对数，得

$$\ln|y|=\frac{1}{6}(\ln|x-1|+\ln|x+1|-\ln|x+2|-\ln|x+4|)$$

两边取 x 求导，得

$$y'=\frac{1}{6}\sqrt[6]{\frac{x^2-1}{(x+2)(x+4)}}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4})$$

代入得$y'(2)=\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6})=\dfrac{11}{144}\sqrt{2}$

从而$\mathrm{d}y|_{x=2}=\dfrac{11}{144}\sqrt{2}\mathrm{d}x$。

三、（本题 10 分）设方程$e^{x-y}=y-1$确定了隐函数$y=y(x)$，求此隐函数在点$(2,2)$处的一阶导数和二阶导数。

解：方程两边对 x 求导，得

$e^{x-y}(1-y')=y'$ ，解得 $y'=\dfrac{e^{x-y}}{e^{x-y}+1}=\dfrac{y-1}{y}$。

对此式子两边再对 x 求导，得

$y''=\dfrac{y'}{y^2}=\dfrac{y-1}{y^3}$，代入得$y'|_{(2,2)}=\dfrac{1}{2}$， $y'|_{(2,2)}=\dfrac{1}{8}$。

四、（本题 8 分）设函数 $f(x)=x\ln(1-x^2)$，求 $f^{(11)}(0)$。

解：

$$f'(x)=\ln(1-x^2)+2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$$

$$f''(x)=\frac{2x}{x^2-1}+(\frac{1}{x-1})'-(\frac{1}{x+1})'$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+(\frac{1}{x-1})'-(\frac{1}{x+1})'$$

$$f^{(11)}(x)=(\frac{1}{x-1})^{(9)}+(\frac{1}{x+1})^{(9)}+(\frac{1}{x-1})^{(10)}-(\frac{1}{x+1})^{(10)}$$

$$=\frac{-9!}{(x-1)^{10}}+\frac{-9!}{(x+1)^{10}}+\frac{10\,!}{(x-1)^{11}}-\frac{10\,!}{(x+1)^{11}}$$

代入得 $f^{(11)}(0)=-\frac{11!}{5}$。

五、（本题 8 分）求星形线 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}\quad (0<t<2\pi)$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4})$ 处的切线方程。

解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{3\sin^2 t\cdot\cos t}{-3\cos^2 t\cdot\sin t}=-\tan t$$

代入得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{t=\frac{\pi}{4}}==-\cot\frac{\pi}{4}=-1$

所求的切线方程为 $y-\frac{\sqrt{2}}{4}=-(x-\frac{\sqrt{2}}{4})$，即 $y=-x+\frac{\sqrt{2}}{2}$。

六、（本题 12 分）设数列 $\{x_n\}$ 由递推公式 $x_1=1$， $x_{n+1}=\sin x_n$ 给出，

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其极限值；

(2) 试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$。

(1) 证明：先证 $0<x_n\le 1$。用归纳法。

当 n=1 时， $x_1=1$ 显然满足。

假设 n=k 时，结论成立，即有 $0\le x_k\le 1$，则当 n=k+1 时， $0=\sin 0<x_{k+1}=\sin x_k\le\sin 1\le 1$，

因此有 $0<x_n\le 1$。

令 $f(x)=\sin x$，$x\in[0,1]$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调增加，又由 $x_1=1>\sin1=x_2$，故可知数列 $\{x_n\}$ 为单调减少数列，由单调有界准则，此数列 $\{x_n\}$ 极限存在。令 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，则 $0\le a\le1$。由 $x_{n+1}=\sin x_n$，，令 $n\to\infty$，得 $a=\sin a$，故 $a=0$，即有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+\frac{\sin x-x}{x})}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos x-1}{3x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$

七、（本题 12 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x<0\\ 0 & x=0\\ \frac{1}{1+e^{1/x}} & x>0\end{cases}$。

(1) 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

(2) 求导函数 $f'(x)$ 的连续区间和间断点，并判别其间断点类型。

(1) 证明：$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}x\sin\frac{1}{x}$，因为 $\lim\limits_{x\to0}x=0$，$|\sin\frac{1}{x}|\le1$，因此 $\lim\limits_{x\to0^-}x\sin\frac{1}{x}=0$，从而 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$，即有 $f'_-(0)=0$。$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+e^{1/x}}}{x}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{1+e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t}=0$，即有 $f'_+(0)=0$。从而 $f'_-(0)=f'_+(0)=0$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

(2) 求得导函数 $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x<0\\ 0 & x=0\\ \frac{e^{1/x}}{x^2(1+e^{1/x})^2} & x>0\end{cases}$。由初等函数的连续性结论，$f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 连续。

取点列 $\{x_n\}$，其中 $x_n=-\frac{1}{2n\pi}$，$n\in Z^+$，则 $f(x_n)=-1$；再取点列 $\{x_n'\}$，其中 $x_n'=-1/(2n\pi+\frac{\pi}{2})$，$n\in Z^+$，则 $f(x_n')=2/(2n\pi+\frac{\pi}{2})\to0$ （当 $n\to\infty$）。
故 $x=0$ 是第二类间断点中的振荡间断点。

八、（本题 10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=1$，$f(1)=0$。试证：

(1) 存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 $f(x_0) = x_0$；

(2) 存在不同的 $\xi,\eta \in (0,1)$，使得 $f'(\xi)\cdot f'(\eta) = 1$。

证明：(1) 作辅助函数 $F(x) = f(x) - x$，$x \in [0,1]$。则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 内可导，注意到 $F(0) = f(0) - 0 = 1, F(1) = f(1) - 1 = -1$，故由零点存在定理知，存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 $F(x_0) = 0$，即有 $f(x_0) = x_0$。

(2) 在区间 $[0, x_0]$ 和 $[x_0, 1]$ 分别用朗格朗日中值定理，可得，存在 $\xi \in (0, x_0), \eta \in (x_0, 1)$，

使得

$$x_0 - 1 = f(x_0) - f(0) = f'(\xi)x_0,$$

$$-x_0 = f(1) - f(x_0) = f'(\eta)(1 - x_0),$$

因此 $f'(\xi)\cdot f'(\eta) = 1$，得证。