厦门大学《概率论与数理统计A》课程期中试卷

信息学院 通信工程系 2016级

主考教师：______试卷类型：（A卷）

一 填空题（每题3分，共18分。第4题第一空1分，第二空2分；第5题每空1.5分）

1 设某公路上经过的货车与客车的数量之比为2:1，货车中途停车修理的概率为0.02，客车为0.01，今有一辆汽车中途停车修理，则该汽车是货车的概率为：____。

2 设 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(A \cup B)=0.4$，则 $P(A\bar{B})=$ ____。

3 假设新购进了4部移动电话，已知至少有一部是合格品的概率为0.9375，求每部电话是合格品的概率 $p=$____。

4 设（X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} A(x+y) & 0<x<1,0<y<2 \\ 0 & 其 \end{cases}$$

则 $A=$______，关于 X 的边缘概率密度为______。

5 已知 X，Y 是两互独立的随机变量，且 X 服从参数为2的指数分布，Y 服从参数为1的泊松分布，则 $E(XY)=$ ____________。$D(3X-2Y)=$ ______________。

6 设随机变量X的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$ 求随机变量 $Y=e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)=$_________。

二 选择题（每题3分，共18分）

1 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $EX=3$，$DX=1$，$\Phi_0(x)$为标准正态分布的分布函数，则 $P\{-1\le X\le 1\}=$（　）

(A) $2\Phi_0(1)-1$　　(B) $\Phi_0(4)-\Phi_0(2)$

(C) $\Phi_0(-4)-\Phi_0(-2)$　　(D) $\Phi_0(2)-\Phi_0(4)$

2 如果随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 2-x, & 1\le x<2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$；则 $P\{X\le 1.5\}=$（　）

(A) $\int_0^1 xdx+\int_1^{1.5}(2-x)dx$ (B) $\int_1^{1.5}(2-x)dx$

(C) $\int_1^{1.5}(1-x)dx$ (D) $\int_{-\infty}^{1.5}(2-x)dx$

3 已知随机变量 $X\sim\pi(2)$，则 $Y=2X-10$ 的数学期望 $EY=$（ ），方差 $DY=$（ ）。

(A) 4 4 (B) 4 8

(C) −6 4 (D) −6 8

4 设二维随机变量 (X,Y) 满足 $E(XY)=E(X)E(Y)$,则（ ）

(A) $D(XY)=D(X)D(Y)$ (B) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

(C) X 和 Y 相互独立 (D) X 和 Y 不相互独立

5 某射手命中率为0.2，假设每次射击都是独立的，那么他射击10枪，中3枪的概率为（ ）

(A) $0.2^3 0.8^7$ (B) $0.2^7 0.8^3$ (C) $C_{10}^3 0.2^3 0.8^7$ (D) $C_{10}^3 0.2^7 0.8^3$

6 设离散性随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

Y \ X	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	α	β

且 X 和 Y 相互独立，则 α 和 β 的值分别为（ ）

(A) $\alpha=2/9,\beta=1/9$ (B) $\alpha=1/9,\beta=2/9$

(C) $\alpha=1/6,\beta=1/6$ (D) $\alpha=8/15,\beta=1/18$

三 计算题

1 已知随机变量X和Y的联合分布律为：（6分）

(X,Y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(2,0)	(2,1)
p	0.1	0.15	0.15	0.3	0.15	0.15

（1）求X的概率分布；（2分）

（2）求X*Y的概率分布；（2分）

（3）求 $Z=\cos\dfrac{\pi(X*Y)}{2}$ 的数学期望。（2分）

2 甲、乙、丙三人同时抢双十一火炬红包，三人抢到的概率分别为0.6，0.5，0.7且互相独立。红包被一人抢到而出现稀有红包的概率为0.2，被两人抢到而出现稀有红包的概率0.5，若三人抢到则必出现稀有红包。求抢到稀有红包的概率。（8分）

3（1）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，求 $Y=X^3$ 的概率密度。（6分）

（2）设随机变量 X 服从参数为1 的指数分布，求 $Y=X^2$ 的概率密度（6分）

4.设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} be^{-(x+y)} & 0<x<1\ ,\ 0<y<+\infty \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 试确定常数b （4分）

(2) 求边缘概率密度$f_X(x)$， $f_Y(y)$ （4分）

(3) 求函数$U=\max\{X,Y\}$的分布函数（4分）

5 设随机变量X,Y相互独立,并且它们都服从（0,1）上的均匀分布

(1) 求E(XY),E(X/Y),E[ln(XY)],E[|Y-X|];（8分）

(2) 以X,Y为边长作一长方形，以A，C分别表示长方形的体积和周长，求A和C之间的相关系数ρ_{AC} （5分）

四 证明题

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则X,Y是否独立？是否相关？试证明你的判断。（两个证明各6分，判断1分）

一 填空题

1 0.8

2 0.1

3 0.5

4 由于$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)d_x d_y=\int_0^1 d_x\int_0^2 A(x+y)d_y=1$得A=1/3。

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)d_y=\frac{1}{3}\int_0^2 (x+y)d_y=\frac{2}{3}X+2,0<x<1,$$ 其它为0。

5 2 40

6 $$f_Y(y)=\begin{cases} e^{-(\ln y)}\left|(\ln y)'\right|=\dfrac{1}{y^2}, & y\ge 1\\ 0, & 其它 \end{cases}$$

二 选择题

1 B　2 A　3 D　4 B　5 C　6 A

大题:

一:

(1)

X	0	1	2
p	0.25	0.45	0.3

(2)

X*Y	0	1	2
p	0.55	0.3	0.15

(3)

E[$Z=\cos\dfrac{\pi(X*Y)}{2}$] = cos(0)*0.55+cos(pi/2)*0.3+cos(pi)*0.15=0.55-0.15 = 0.4

二:

解：高 Hi 表示红包被 i 人抢到，i=1，2，3。$B1$，$B2$，$B3$ 分别表示甲、乙、丙抢到红包。

$\because$ $H_1=B_1\overline{B}_2\overline{B}_3+\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3+\overline{B}_1\overline{B}_2B_3$，三种情况互斥。

$H_2=B_1B_2\overline{B}_3+B_1\overline{B}_2B_3+\overline{B}_1B_2B_3$　三种情况互斥

$H_3=B_2B_2B_3$

又 B_1，B_2，B_2 独立。

$\therefore P(H1)=P(B_1)P(\overline{B}_2)P(\overline{B}_3)+P(\overline{B}_1)P(B_2)P(\overline{B}_3)+P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2)P(B_3)$

= 0.6*0.5*0.3 + 0.4*0.5*0.3 + 0.4*0.5*0.7 = 0.29

$\therefore P(H2)=P(B_1)P(B_2)P(\overline{B}_3)+P(\overline{B}_1)P(B_2)P(B_3)+P(B_1)P(\overline{B}_2)P(B_3)$

= 0.6*0.5*0.3 + 0.4*0.5*0.7 + 0.6*0.5*0.7 = 0.44

$\therefore P(H3)=P(B_1)P(B_2)P(B_3)$

= 0.6*0.5*0.7= 0.21

又因：$A=H1A+H2A+H3A$ 三种情况互斥, 故由全概率公式，有

$P(A)=P(H1)P(A|H1)+P(H2)P(A|H2)+P(H3)P(AH3)$

= 0.29×0.2+0.44×0.5+0.21×1=0.488

三:

(1)

$\because$ $Y=g(X)=X3$ 是X单调增函数，且反函数存在。

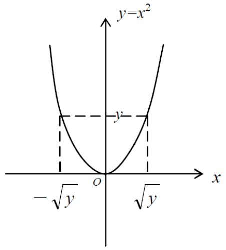
$\therefore$ 由公式法可知Y的分布密度为:

$$\psi(y)=f[h(h)]\cdot|h'(y)|=f(y^{\frac{1}{3}})\cdot\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}},-\infty<y<+\infty,\text{但}y\neq 0$$

$$\psi(0)=0$$

(2)

法一：$\because$ X的分布密度为：$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$



$Y=x^2$ 是非单调函数

当 $x<0$ 时 $y=x^2\swarrow$ 反函数是 $x=-\sqrt{y}$

当 $x<0$ 时 $y=x^2\nearrow$ $x=\sqrt{y}$

$\therefore$ $Y\sim f_Y(y)=f(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})'+f(\sqrt{y})(\sqrt{y})'$

$$=\begin{cases}0+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

法二：$Y\sim F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-\sqrt{y}<X\le\sqrt{y})=P(X\le\sqrt{y})-P(X\le-\sqrt{y})$

$$\begin{cases}\int_0^{\sqrt{y}}e^{-x}dx+0=1-e^{-\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

$$\therefore\quad Y\sim f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0.\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

大题4答案:

解:（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\,dx=\int_0^1\int_0^{+\infty}be^{-(x+y)}dy\,dx=b[1-e^{-1}]$

$\therefore$ $b=\dfrac{1}{1-e^{-1}}$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$$=\begin{cases} 0 & x \le 0或x \ge 1 \\ \int_0^{+\infty} be^{-(x+y)}dy = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$$

$$=\begin{cases} 0 & , \quad y \le 0 \\ \int_0^1 be^{-(x+y)}dx = e^{-y} & \quad y > 0 \end{cases}$$

（3）$F_u(\omega)=P\{U \le u\}=P\{\max(X,Y) \le u)=P\{X \le u, Y \le u\}$

$$=F(u, u)= \int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{u} f(x, y)dx\,dy$$

$u<0, F_U(u) = 0$

$$0 \le u < 1,\ F_U(u) = \int_0^u\int_0^u be^{-(x+y)}dx\,dy = \frac{(1-e^{-u})^2}{1-e^{-1}}$$

$$u \ge 1,\ F_U(u) = \int_0^u\int_0^1 be^{-(x+y)}dx\,dy = 1-e^{-u}$$

大题5答案

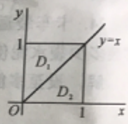
解 (1) X, Y 的概率密度都是

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

$E\left[\frac{X}{Y}\right]$不存在(因$\int_0^1\int_0^1\frac{x}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 发散).

$$\begin{aligned}E[\ln(XY)]&=\int_0^1\int_0^1(\ln x+\ln y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_0^1\int_0^1(\ln x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-2.\end{aligned}$$



题 4.25 图

$$\begin{aligned}&E(|Y-X|)\\&=\iint_D|y-x|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (\text{如题 4.25 图 } D=D_1\cup D_2)\\&=2\iint_{D_1}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\int_x^1(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(2) $A=XY, C=2(X+Y)$,

$\mathrm{Cov}(A,C)=E(AC)-E(A)E(C)$.

$AC=2X^2Y+2XY^2$,

$$E(X^2)=E(Y^2)=D(X)+(E(X))^2=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned}E(AC)&=2E(X^2Y)+2E(XY^2)\\&=2E(X^2)E(Y)+2E(X)E(Y^2)\\&=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(A,C)&=E(AC)-E(A)E(C)\\&=\frac{2}{3}-[E(X)E(Y)\times2(E(X)+E(Y))]\\&=\frac{2}{3}-\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(A)&=E(X^2Y^2)-[E(X)E(Y)]^2=E(X^2)E(Y^2)-\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)^2\\&=\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{144}.\end{aligned}$$

$$D(C)=D(2X+2Y)=D(2X)+D(2Y)=4\times\frac{1}{12}+4\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}.$$

故 $$\rho_{AC}=\frac{\mathrm{Cov}(A,C)}{\sqrt{D(A)D(C)}}=\frac{1}{6}\Big/\sqrt{\frac{7}{144}\times\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{6}{7}}.$$

大题6答案

证 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{x}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}x\mathrm{d}x=0.$$

同样 $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{y}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$

而 $E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{xy}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}y\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}x\mathrm{d}x=0,$$

从而
$$E(XY)=E(X)E(Y),$$
这表明 X,Y 是不相关的. 又

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同样
$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然 $f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$，故 X,Y 不是相互独立的.