



厦门大学《微积分 I-2》课程期中试卷

_____学院_____系_____年级_____专业

试卷类型：(理工类 A 卷) 考试时间：2023 年 4 月 16 日

一、选择题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 欧拉方程 $x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2$ 的阶数为 (C)。
(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4。
2. 以点 $A(1,1,1)$ 、 $B(3,2,0)$ 、 $C(2,0,3)$ 、 $D(2,3,2)$ 为顶点的四面体 $ABCD$ 的体积为 (A)。
(A) 2; (B) 4; (C) 6; (D) 12。
3. $f(x,y) = \begin{cases} 1 & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处 (B)。
(A) 连续; (B) $f_x(0,0)$ 存在; (C) $f_y(0,0)$ 存在; (D) 可微。
4. $z = f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 存在且连续是 $f(x,y)$ 在该点可微的 (B)。
(A) 必要非充分条件; (B) 充分非必要条件; (C) 充要条件; (D) 两者无关。
5. 下列平面中, 与椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 在点 $(-1, -2, 3)$ 的切平面平行是 (D)。
(A) $x - 3y + z = 1$; (B) $x + z = 1$; (C) $3x - 2y + 3z = 1$; (D) $3x + 2y - 3z = 1$ 。

二、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 点 $(1,2,1)$ 到平面 $x + 2y + 2z = 10$ 的距离为 1。
2. 设二元函数 $z = x^y$, 则 $dz|_{(e,1)} = \underline{dx + e dy}$ 。
3. 已知 $y = x^k(x+1)e^{3x}$ 是微分方程 $y'' - 6y' + 9y = (6x+2)e^{3x}$ 的一个特解, 其中 k 为常数, 则 $k = \underline{2}$ 。
4. 曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z^2 = 2x \end{cases}$ 在点 $(1,1,\sqrt{2})$ 的切线的对称式方程为 $\underline{\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$ 。
5. 由旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $x + y + z = 1$ 所围成的空间有界区域在 xoy 坐标面上的投影为 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{x^2 + y^2 + x + y \leq 1}, z = 0\}$ 。

三、求解下列微分方程：（每小题 8 分，共 24 分）

1. 求微分方程 $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$ 的通解；

解：原微分方程变形为 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ，令 $u = \frac{y}{x}$ ，则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ ，代入得

$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} + u$ ，整理得 $u du = \frac{1}{x} dx$ ，从而 $\int u du = \int \frac{1}{x} dx$ ，进一步有

$u^2 = 2 \ln |x| + C$ ，因此原微分方程的通解为 $y^2 = 2x^2 \ln |x| + Cx^2$ 。

2. 求满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 1$ 的微分方程 $yy'' + y'^2 - 2yy' = 0$ 的特解；

解：这是二阶可降阶微分方程。令 $P(y) = y'(x)$ ，则原微分方程转化为

$yP \frac{dP}{dy} + P^2 = 2yP$ ，整理得 $P = 0$ （舍去）或者 $\frac{dP}{dy} + \frac{1}{y}P = 2$ ，后者是一阶线性微分方程，其通

解为 $P = e^{-\int \frac{1}{y} dy} (C_1 + \int 2e^{\int \frac{1}{y} dy} dy) = \frac{1}{y} [C_1 + y^2] = \frac{C_1}{y} + y$ 。因为

$P(1) = P(y(0)) = y'(0) = 1$ ，得 $C_1 = 0$ 且 $\frac{dy}{dx} = P = y$ ，解得 $y = C_2 e^x$ ，又 $y(0) = 1$ ，得 $C_2 = 1$ ，因此满足初始条件的特解为 $y = e^x$ 。

3. 求微分方程 $y'' + 4y = 3 \cos x$ 的通解。

解：这是二阶非齐次常系数线性微分方程。其特征方程为 $r^2 + 4 = 0$ ，解得特征根为 $r_{1,2} = \pm 2i$ 。

又因为 $\lambda + i\omega = i$ 不是特征根，因此可设特解为 $y^* = a \cos x + b \sin x$ ，代入微分方程求得

$a = 1, b = 0$ ，从而微分方程的通解为 $y = \cos x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ 。

四、（本题 9 分）求过点 $(-1, 0, 6)$ ，且平行于平面 $3x - 2y + z = 8$ ，又与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交的直线的方程。

解：设所求直线与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 的交点为 $(-1+t, 3+t, 2t)$ ，则该直线的一个切向量为 $(t, 3+t, 2t-6)$ 。又因为该直线平行于平面 $3x - 2y + z = 8$ ，所以

$(t, 3+t, 2t-6) \cdot (3, -2, 1) = 0$ ，即 $3t - 2(3+t) + (2t-6) = 0$ ，解得 $t = 4$ ，因此该直线的一个切向量为 $(4, 7, 2)$ ，故所求直线的方程为 $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z-6}{2}$ 。

五、(本题 9 分) 验证 $u(x,t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at)$ 为一维波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 的解, 其中 a 为常数, φ 和 ψ 具有连续的二阶导数。

解: $\frac{\partial u}{\partial t} = a\varphi'(x+at) - a\psi'(x-at)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\varphi''(x+at) + a^2\psi''(x-at)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x+at) + \psi'(x-at), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x+at) + \psi''(x-at)。$$

因此 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2\varphi''(x+at) + a^2\psi''(x-at) - a^2(\varphi''(x+at) + \psi''(x-at)) = 0。$

六、(本题 9 分) 设方程 $e^z - xyz = 0$ 确定了二元函数 $z = z(x, y)$, 试求二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 在点 $(-1, \frac{1}{e})$ 处的值。

解法一: 令 $F(x, y, z) = e^z - xyz$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-yz}{e^z - xy} = \frac{yz}{e^z - xy}$, 进一步有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y(e^z - xy)\frac{\partial z}{\partial x} - yz(e^z \frac{\partial z}{\partial x} - y)}{(e^z - xy)^2} = \frac{2y^2ze^z - y^2z^2e^z - 2xy^3z}{(e^z - xy)^3}。$$

注意到当 $x = -1$, $y = \frac{1}{e}$ 时, $z = -1$, 因此 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(-1, \frac{1}{e})} = \frac{\frac{-2}{e^3} - \frac{1}{e^3} - \frac{2}{e^3}}{(\frac{1}{e} + \frac{1}{e})^3} = -\frac{5}{8}。$

解法二: 方程两边对 x 求导, 则 $e^z \frac{\partial z}{\partial x} - yz - xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0$, 解得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^z - xy} = \frac{yz}{xyz - xy} = \frac{1}{x} \frac{z}{z-1}$,

进一步地有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{z}{z-1} - \frac{1}{x} \frac{1}{(z-1)^2} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \frac{z}{z-1} - \frac{1}{x^2} \frac{z}{(z-1)^3} = -\frac{z}{x^2(z-1)} \left[1 + \frac{1}{(z-1)^2}\right]。$$

注意到当 $x = -1$, $y = \frac{1}{e}$ 时, $z = -1$, 因此 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(-1, \frac{1}{e})} = -\frac{-1}{(-1)^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{(-2)^2}\right) = -\frac{5}{8}。$

七、(本题 9 分) 设定义域为 $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\}$ 的二元函数 $f(u, v)$ 有连续的偏导数且

$f_u(1, 0) = f_v(1, 0) = 1$, 又 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 由方程组 $\begin{cases} x = uv \\ y = u^2 - v^2 \end{cases}$ 所确定, 求

$z = f(u(x, y), v(x, y))$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,1)}$ 。

解: 令 $F(x, y, u, v) = x - uv$, $G(x, y, u, v) = y - u^2 + v^2$, 则

$$F_x = 1, \quad F_y = 0, \quad F_u = -v, \quad F_v = -u;$$

$$G_x = 0, \quad G_y = 1, \quad G_u = 2u, \quad G_v = -2v。$$

$$\text{故 } \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -u \\ 0 & -2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -v & -u \\ 2u & -2v \end{vmatrix}} = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} -v & 1 \\ 2u & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -v & -u \\ 2u & -2v \end{vmatrix}} = \frac{u}{u^2 + v^2}。$$

从而 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{vf_u + uf_v}{u^2 + v^2}$ 。注意到当 $x=0$, $y=1$ 时, $u=1$, $v=0$, 因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,1)} = \frac{0 \cdot f_u(1,0) + 1 \cdot f_v(1,0)}{1^2 + 0^2} = 1。$$