

一、计算下列各题（每小题 5 分，共 30 分）：

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}}$.

解一： $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1 + 2 \tan^2 x)^{\frac{1}{2 \tan^2 x}}]^{\frac{2 \tan^2 x}{x \sin x}}$,

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \tan^2 x)^{\frac{1}{2 \tan^2 x}} = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}} = e^2$.

解二： $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1 + 2 \tan^2 x)}{x \sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2 \tan^2 x)}{x \sin x}}$,

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2 \tan^2 x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}} = e^2$.

2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\sqrt[3]{2n^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2n^3 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{2n^3 + n}})$.

解：因为 $\frac{n}{\sqrt[3]{2n^3 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2n^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2n^3 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{2n^3 + n}} \leq \frac{n}{\sqrt[3]{2n^3 + 1}}$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{2n^3 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{2n^3 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2 + \frac{1}{n^3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

由夹逼极限准则, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\sqrt[3]{2n^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2n^3 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{2n^3 + n}}) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

3. 写出函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + xe^{tx}}$ 的表达式.

解：当 $x < 0$ 时, $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + xe^{tx}} = \frac{x + 0}{1 + 0} = x$, 当 $x = 0$ 时, $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 0} = 1$;

当 $x > 0$ 时, $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-tx} + 1}{e^{-tx} + x} = \frac{1}{0 + x} = \frac{1}{x}$.

故 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$.

4. 求函数 $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} (e^x + \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$

5. 求函数 $y = \sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{(1+x^2)(2+x^2)}}$ 在 $x=0$ 处的导数 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}$.

解一: $\ln y = \frac{1}{3} [\ln(x+1) + \ln(x+2) - \ln(1+x^2) - \ln(2+x^2)],$

两边求导, 得 $\frac{1}{y} y' = \frac{1}{3} [\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{2+x^2}],$ 故

$$y' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{(1+x^2)(2+x^2)}} [\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{2+x^2}].$$

故 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{3} \times 1 \times [1 + \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}.$

解二: $y^3 = \frac{(x+1)(x+2)}{(1+x^2)(2+x^2)}, (2+3x^2+x^4)y^3 = x^2+3x+2.$

两边求导, 得

$$(2+3x^2+x^4) \cdot 3y^2 y' + (6x+4x^3)y^3 = 2x+3.$$

令 $x=0$, 得 $y=1$, 于是 $6y'(0)=3.$

故 $y'(0) = \frac{1}{2}.$

6. 求函数 $y = \arctan \frac{1-x^2}{1+x^2}$ 的微分 dy 和 $dy\big|_{x=1}$.

解: $dy = \frac{1}{1+(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2} \cdot \frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{-4x}{(1+x^2)^2 + (1-x^2)^2} dx = -\frac{2x}{1+x^4} dx$

故 $dy\big|_{x=1} = -dx.$

二、计算下列各题 (每小题 8 分, 共 48 分):

1. 试求函数 $f(x) = \frac{x-x^2}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点, 并说明间断点的类型. 如果是第一类间断点, 说明是可去间断

点还是跳跃间断点.

解: 间断点分别为 $x=0$, $x=1$, $x=-1$.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-x^2}{|x|(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x}{x^2-1} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-x^2}{|x|(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2-1} = 1$,

即 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点, 且为跳跃间断点.

由于 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{2}$, 故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点, 且为可去间断点.

又 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x(x^2-1)}{x-x^2} = 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$, 故 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

2. 求曲线 $\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^2} \\ y = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$ 在 $t=2$ 所对应点处的切线方程和法线方程.

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{t^2}{1+t^2})'}{(\frac{t}{1+t^2})'} = \frac{\frac{2t(1+t^2)-t^2 \cdot 2t}{(1+t^2)^2}}{\frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2}} = \frac{2t}{1-t^2}. \quad t=2 \text{ 时, } x = \frac{2}{5}, \quad y = \frac{4}{5}.$$

切线斜率为 $k = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=2} = -\frac{4}{3}$. 故所求切线方程为 $y - \frac{4}{5} = -\frac{4}{3}(x - \frac{2}{5})$, 即 $y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$.

法线方程为 $y - \frac{4}{5} = \frac{3}{4}(x - \frac{2}{5})$, 即 $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{3}x^2 - \sqrt[3]{1+x^2}}{e^{-x^2} - 1 + x \sin x}$.

解: $\sqrt[3]{1+x^2} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-\frac{2}{3})x^4 + o(x^4)$, 即 $1 + \frac{1}{3}x^2 - \sqrt[3]{1+x^2} = \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)$.

$$e^{-x^2} - 1 + x \sin x = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - 1 + x(x - \frac{x^3}{6}) + o(x^4) = \frac{1}{3}x^4 + o(x^4),$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{3}x^2 - \sqrt[3]{1+x^2}}{e^{-x^2} - 1 + x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{9}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{9} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4}} = \frac{1}{3}.$$

4. 求由方程 $y = \tan(x+y)$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $y'(x)$ 和 $y''(x)$.

解: 方程 $y = \tan(x+y)$ 两边对 x 求导, 得 $y' = \sec^2(x+y)(1+y')$

$$\text{解得 } y' = -\frac{1}{\sin^2(x+y)}.$$

$$y'' = \frac{2\cos(x+y)}{\sin^3(x+y)}(1+y') = \frac{2\cos(x+y)}{\sin^3(x+y)}\left[1 - \frac{1}{\sin^2(x+y)}\right] = -\frac{2\cos^3(x+y)}{\sin^5(x+y)}.$$

5. 设 $f(x) = \begin{cases} \varphi(x)\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 其中 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, 求 $f'(0)$.

解: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)\cos\frac{1}{x}}{x}.$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(0) = 0$, 而 $\cos\frac{1}{x}$ 为有界函数, 则 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)\cos\frac{1}{x}}{x} = 0.$

6. 已知 $y = x^2 \cos^2 x + \frac{1}{1+x}$, 求 $y^{(n)}(0)$ ($n \geq 3$).

解: $y = x^2 \cos^2 x + \frac{1}{1+x} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} \cos 2x + \frac{1}{1+x}$, 故

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{x^2}{2} (\cos 2x)^{(n)} + nx(\cos 2x)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} (\cos 2x)^{(n-2)} + \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \\ &= 2^{n-1} x^2 \cos(2x + \frac{n\pi}{2}) + 2^{n-1} nx \cos(2x + \frac{n-1}{2}\pi) + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \cos(2x + \frac{n-2}{2}\pi) + \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}. \end{aligned}$$

于是, $y^{(n)}(0) = -n(n-1) \cdot 2^{n-3} \cos \frac{n}{2}\pi + (-1)^n n!.$

三、设 $-1 < x_1 < 0$, $x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n$, $n = 1, 2, \dots$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

得 分	
评阅人	

(本题 10 分)

证明一: 先证明: $-1 < x_n < 0$, $n = 1, 2, \dots$.

事实上, $n = 1$ 时, 由已知条件, 结论成立.

假设 $-1 < x_n < 0$, 则 $x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n = x_n(x_n + 2) < 0$,

$$x_{n+1} + 1 = x_n^2 + 2x_n + 1 = (x_n + 1)^2 > 0,$$

即 $-1 < x_{n+1} < 0$, 故 $-1 < x_n < 0$, $n = 1, 2, \dots$.

于是, $x_{n+1} - x_n = x_n^2 + x_n = x_n(x_n + 1) \leq 0$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调减少且有界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 由 $x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n$ 两边求极限, 有 $a = a^2 + 2a$, 得 $a = 0$ 或 $a = -1$.

因为 $\{x_n\}$ 单调减少, 且 $-1 < x_1 < 0$, 故 a 是不可能的.

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$.

证明二：令 $y_n = x_n + 1$ ，于是， $x_{n+1} + 1 = x_n^2 + 2x_n + 1 = (x_n + 1)^2$ ，即 $y_{n+1} = y_n^2$ 。

因此， $y_n = (y_{n-1})^2 = (y_{n-2})^4 = \cdots = (y_1)^{2^{n-1}}$ 。

因为 $0 < y_1 = x_1 + 1 < 1$ ，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_1)^{2^{n-1}} = 0$ 。

所以， $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - 1 = -1$ 。

四、证明下列各题（每小题 6 分，共 12 分）：

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续，在 $(1, 2)$ 内可导，且 $f(2) = 2f(1)$ 。证明：存在 $\xi \in (1, 2)$ ，使得

$$\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0.$$

证明：作辅助函数 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，则由 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续，在 $(1, 2)$ 内可导，可得 $F(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续，

在 $(1, 2)$ 内可导，且 $F(2) = \frac{f(2)}{2} = f(1) = F(1)$ ，由罗尔定理，存在 $\xi \in (1, 2)$ ，使得

$$F'(\xi) = \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0,$$

即 $\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$ 。

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内具有连续的二阶导数。证明：存在 $\xi \in (a, b)$ ，使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi).$$

证明：由泰勒公式，可得

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} f''(\xi_1)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} f''(\xi_2)\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

两式相加，得

$$f(a) + f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} f''(\xi_1)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} f''(\xi_2)\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

其中 $a < \xi_2 < \frac{a+b}{2} < \xi_1 < b$ 。

于是， $f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^2}{8} [f''(\xi_1) + f''(\xi_2)]$ 。

因为 $f''(x)$ 在 (a, b) 内连续，由介值定理，存在 $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset (a, b)$ ，使得 $f''(\xi) = \frac{1}{2} [f''(\xi_1) + f''(\xi_2)]$ 。

故 $f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi)$ 。

证明二：作辅助函数 $F(x) = f(x + \frac{b-a}{2}) - f(x)$,

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) - 2f(\frac{a+b}{2}) &= f(b) - f(\frac{a+b}{2}) - [f(\frac{a+b}{2}) - f(a)] \\ &= F(\frac{a+b}{2}) - F(a) \end{aligned}$$

由拉格朗日中值定理, 存在 $\eta \in (a, \frac{a+b}{2})$, 使得

$$F(\frac{a+b}{2}) - F(a) = \frac{b-a}{2} F'(\eta) = \frac{b-a}{2} [f'(\eta + \frac{b-a}{2}) - f'(\eta)]$$

因为 $f(x)$ 的二阶导数存在, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (\eta, \eta + \frac{b-a}{2}) \subset (a, b)$, 使得

$$f'(\eta + \frac{b-a}{2}) - f'(\eta) = \frac{b-a}{2} f''(\xi)$$

于是, $f(a) + f(b) - 2f(\frac{a+b}{2}) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi)$.

注: 第一种证明也可以利用导数的介值定理, 就不需要二阶导数连续的条件; 第二种证明方法可以不要求二阶导数连续, 只要存在即可.