2010期中考试试卷参考答案

1. 已知下列数值表，求符合表值的插值多项式，并给出插值余项的表达式。

x_i:	0	1	2
y_i:	2	1	2
y_i':	−2	−1	
y_i'':	−10		

解一：利用Newton法：

$$P_2(x) = 2 + f[0,1](x-0) + f[0,1,2](x-0)(x-1)$$
$$= x^2 - 2x + 2$$

在此基础上构造五次插值多项式

$$P_5(x) = P_2(x) + x(x-1)(x-2)(ax^2 + bx + c)$$

$$P_5'(0) = P_2'(0) + 2c = -2 + 2c = -2$$

得到c=0

$$P_5'(1)=2-2-(ax^2+bx+c)=-1$$

得到a+b=1

$$P_5''(0)=P_2''(0)+(6x-6)(ax^2+bx+c)+(3x^2-6x+2)(2ax+b)$$
$$+(3x^2-6x+2)(2ax+b)+(x^3-3x^2+2x)(2a)=-10$$

得到，b=-3，a=4;

$$P_5(x)=4x^5-15x^4+17x^3-5x^2-2x+2$$

$$R(f)=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}x^3(x-1)^2(x-2)$$

2. 若 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0 & 0\le k<n-1\\ a_0^{-1} & k=n-1\end{cases}$$

有互不相同的n个实根x_1，x_2，…，x_n．试证明:

解：由题意得，$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

对 $g(x)=x^k$

进行插值，其n−1阶差商为，

$$g[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\sum_j\frac{g(x_j)}{\prod\limits_{j\neq i}(x_j-x_i)}=\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\frac{(x^k)^{(n-1)}}{a_0(n-1)!}=\begin{cases}0 & 0\le k\le n-1\\ \dfrac{1}{a_0} & k=n-1\end{cases}$$

3.用

x_i	1	2	3	4
y_i	4	10	18	26

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

拟合上述数据，采用正交多项式方法求解。

例：用 $y=c_0+c_1x+c_2x^2$ 来拟合

x	1	2	3	4
y	4	10	18	26

，$w\equiv 1$

$$a_k=\frac{(\varphi_k,y)}{(\varphi_k,\varphi_k)}$$

解：通过正交多项式 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 求解

设 $y=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)$

$$\varphi_0(x)=1 \qquad a_0=\frac{(\varphi_0,y)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{29}{2}$$

$$\alpha_1=\frac{(x\varphi_0,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{5}{2} \qquad \varphi_1(x)=(x-\alpha_1)\varphi_0(x)=x-\frac{5}{2} \qquad a_1=\frac{(\varphi_1,y)}{(\varphi_1,\varphi_1)}=\frac{37}{5}$$

$$\alpha_2=\frac{(x\varphi_1,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}=\frac{5}{2} \qquad \beta_1=\frac{(\varphi_1,\varphi_1)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{5}{4}$$

$$\varphi_2(x)=(x-\frac{5}{2})\varphi_1(x)-\frac{5}{4}\varphi_0(x)=x^2-5x+5 \qquad a_2=\frac{(\varphi_2,y)}{(\varphi_2,\varphi_2)}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{29}{2}\times 1+\frac{37}{5}(x-\frac{5}{2})+\frac{1}{2}(x^2-5x+5)$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{49}{10}x-\frac{3}{2}$$

与前例结果一致。

注：手算时也可用待定系数法确定函数族。

4. 求 $f(x)=x^4+3x^3-1$

在区间 [0, 1] 上的三次最佳一致逼近多项式。

解：　令 $x=\frac{t+1}{2}$

则 $$f(t)=(\frac{1+t}{2})^4+3(\frac{t+1}{2})^3-1$$

设 $P_3(x)$ 为 f (x) 在 [0, 1] 上的三次最佳一致逼近多项式，由于

$f(\frac{t+1}{2})$ 的首项系数为 $\frac{1}{2^4}$ ，则 $f(\frac{t+1}{2})-P_3(\frac{t+1}{2})=\frac{1}{16}\times 2^{1-4}T_4(t)$

所以， $$P_3(\frac{t+1}{2})=f(t)-\frac{1}{16}\times 2^{1-4}T_4(t)$$

$$P_3(x)=5x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{129}{128},x\in[0,1]$$

5. 确定求积公式 $\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)f(x)dx=h^2[Af(x_0)+Bf(x_1)]+h^3[Cf'(x_0)+Df'(x_1)]+R(f)$

中的系数A，B，C，D，使其代数精度尽量高，并给出$R(f)$的表达式。

解：

$$R(1)=0 \qquad A+B=0.5$$

$$R((x-x_0))=0 \qquad B+C+D=1/3$$

$$R((x-x_0)^2)=0 \qquad B+2D=1/4$$

$$R((x-x_0)^3)=0 \qquad B+3D=1/5$$

解得，A=3/20，B=7/20，C=1/30，D=−1/30

因为，

$$\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_0)^4dx \neq h^2(0+Bh^4)+h^3(0+4h^3D)$$

所以，该数值积分有三次代数精度构造在三次Hermit插值多项式,即

$$f(x)=H_3(x)+\frac{1}{4!}f^{(4)}(\zeta)(x-x_0)^2(x-x_1)^2, x\in[x_0,x_1], \zeta\in(x_0,x_1)$$

所以,

$$\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)f(x)dx=\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)H_3(x)dx+\int_{x_0}^{x_1}\frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!}(x-x_0)^3(x-x_1)^2dx$$

$$R[f]=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)^3(x-x_1)^2dx=\frac{h^4}{1440}f^{(4)}(\eta), \eta\in(x_0,x_1)$$

$\{\varphi_n(x)\}$ 是[a, b]上带权ρ(x)的正交多项式序列, x_i (i=0, 1, …, n)是 $\varphi_{n+1}(x)$ 的零点, $l_i(x)$ $(i=0,1,\dots,n)$ 是以 $\{x_i\}$ 为节点的拉格朗日插值基函数。

$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 为高斯求积公式。证明:

$$\sum_{k=0}^{n} \int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx = \int_a^b \rho(x) dx.$$

证明: 考虑被插值函数为 $l_i^2(x)$ $\in H_{2n}$ 因为 $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$

$$\int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx = \sum_{i=0}^{n} A_i l_k^2(x_i) = A_k$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx = \int_a^b \rho(x) dx$$

7. 用龙贝格方法计算 $\int_{0.3}^{0.8} \frac{x^3+\sin x}{x} dx$,

使其误差不超过 $0.1\text{x}10^{-4}$.

解:

0. 65294	0	0
0. 63968	0. 63526	0
0. 63636	0. 63526	0. 63526

I= 0. 6353