选择题补充 chap5-二次型答案详解

1. 已知二次型 $f=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2,则 c 的值为 (C).

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【解答】

二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}$

对 A 施以初等变换得

$$A\to\begin{pmatrix}1&-5&3\\0&2&-1\\0&0&c-3\end{pmatrix}$$

因为 $r(A)=3$, 所以 $c=3$。

2. 设 A,B 都是 n 阶矩阵, 且 $A\simeq B$ (A 合同于 B),则 (D).

(A) A 与 B 有相同的特征值 (B)det (A)=det(B)

(C)A 与 B 相似 (D) $r(A)=r(B)$

【解答】

合同不一定相似，A 与 B 相似可以推出特征值相同，行列式相同。两实对称矩阵合同充要条件具有相同的秩和正惯性指数。故 D 正确

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, 则 A 合同于(C).

(A) $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (B) $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ (D) $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

【解答】

与 A 合同的矩阵首先须是实对称矩阵, 其次两实对称矩阵合同 $\Leftrightarrow$ 具有相同的秩和正惯性

指数。A 的秩为 3，正惯性指数为 2，只有 C 选项符合。

4. 已知二次型

$\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2ax_1x_3-2x_2x_3}$ **的正,负惯性指数都是 1,则**

***a*= (　　A　　).**

(A) -2　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 2

【解答】

二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$

因为二次型正负惯性指数都是 1，所以 $R\left(A\right)=2$

对 A 施以初等变换得 $A\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 2-a^2-a \end{pmatrix}$，即 $\begin{cases} a-1\neq 0 \\ a^2+a-2=0 \end{cases}\Rightarrow a\neq -2$

5. 二次型 $\boldsymbol{f=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}$ 的规范形是(　　B　　).

(A) $\boldsymbol{z_1^2+z_2^2+z_3^2}$　　(B) $\boldsymbol{z_1^2-z_2^2-z_3^2}$

(C) $\boldsymbol{z_1^2+z_2^2-z_3^2}$　　(D) $\boldsymbol{z_1^2-z_2^2}$

【解答】

利用配方法化为规范形，二次型中不含平方项,故应先作一次坐标变换构造出平方项

令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$，则

$$\begin{aligned} f&=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3 \\ &=\left(y_1+y_3\right)^2-y_2^2-y_3^2 \\ &=z_1^2-z_2^2-z_3^2 \end{aligned}$$

其中 $z_1=y_1+y_2,z_2=y_2,z_3=y_3$，即

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

6. 二次型 $\boldsymbol{f=x_1^2+2x_1x_2+2x_2x_3}$ 的秩 *r* 及正惯性指数 *p* 分别为 (　　A　　).

(A) *r*=3, *p*=2　　(B) *r*=3, *p*=1

(C) *r*=2, *p*=2　　(D) *r*=2, *p*=1

【解答】

二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

对 A 施以初等变换得

$$A\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

从而 $r(A)=3$，即二次型的秩为 3 .

[解法 1] 对 A 施以初等变换得 $A\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，因此正惯性指数 $p=2$

[解法 2]
$$\begin{aligned}f&=\left(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\right)-x_2^2+2x_2x_3\\&=\left(x_1+x_2\right)^2-\left(x_2-x_3\right)^2+x_3^2\\&=y_1^2-y_2^2+y_3^2\end{aligned}$$
，因此正惯性指数 $p=2$

7. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$

是正定的,则 t 的取值范围是(B).

(A) $-\infty<t<-\sqrt{2}$ (B) $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{2}<t<2\sqrt{2}$ (D) $-\sqrt{3}<t<\sqrt{3}$

【解答】

二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&\frac{t}{2}\\0&\frac{t}{2}&1\end{pmatrix}$, f 为正定的充要条件是 A 的顺序主子式大于零，即

$$D_1=2>0,D_2=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1>0,D_3=|A|=1-\frac{t^2}{2}>0.\text{即}-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}.$$

8.设 A 为 n 阶实对称矩阵,则 A 是半正定矩阵的充分必要条件是(C).

(A)A 的顺序主子式全大于或等于零

(B)A 的正惯性指数小于 n

(C)A 的特征值均大于等于零,且其中至少一个为零

(D)$r(A)<n$

【解答】

半正定定义：设 $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ 是一实二次型, 对于任意一组不全为零的实数

$c_1,c_2,\ldots,c_n$,如果都有 $f\left(c_1,c_2,\ldots,c_n\right)\geq 0$, 那么 $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ 称为半正定的。

对于实二次型 $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=X^{\top}AX$, 其中 A 是实对称的，下列条件等价:

(1) $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ 是半正定的,

(2) 它的正惯性指数与秩相等,

(3) 有可逆实矩阵 C, 使 $C^{\mathrm{T}}AC=\operatorname{diag}\left(d_1,d_2,\ldots,d_n\right)$, 其中 $d_i\geq 0, i=1,2,\ldots,n$,

(4) 有实矩阵 C 使 $A=C^{\mathrm{T}}C$,

(5) A 的所有主子式皆大于或等于零.(所谓主子式是指行指标与列指标相同的子式)

(6) A 的特征值全大于等于零，但至少有一个特征值等于零。

注意，在 (5) 中，仅有顺序主子式大于或等于零是不能保证半正定性的. 比如

$$f\left(x_1,x_2\right)=-x_2^2=\left(x_1,x_2\right)\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

就是一个反例.

选 C

C 说明：存在可逆线性变化 ***x=Cy*** 使 $f\left(x\right)=f\left(cy\right)=\sum_{i=1}^{n}k_iy_i^2\geq 0$，如果 k_i 都大于 0，则

$f\left(cy\right)$ 大于 0 而不可能大于等于 0

9. 设 n 元二次型 $f(x)=x^TAx$, 其中 $A^T=A$. 如果该二次型通过可逆线性变换 $x=Cy$ 可化为 $f=y^TBy$, 则下述结论中不正确的是（　　　）.

(A)A 与 B 合同　(B) A 与 B 等价

(C) A 与 B 相似　(D) $r(A)=r(B)$

【解答】

$$f=x^TAx=(Cy)^TA(Cy)=y^T\left(C^TAC\right)y$$

记 $B=C^TAC$，则 $B^T=B$，从而 $f=y^TBy$ 。

由 $B=C^TAC$ 知，两个 n 阶对称矩阵 A 与 B 合同且 $\mathrm{r(A)}=\mathrm{r(B)}$，所以选项 A,C 正确。合同一定等价，B 正确。对于 C 选项，C 要正交矩阵才能说明相似。此题可作为结论记住。

10. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+ax_2-2x_3)^2+(2x_2+3x_3)^2+(x_1+3x_2+ax_3)^2$ 正定的充要条件是(　　C　　).

(A) $a<-1$　　(B) $a\neq-1$　　(C) $a\neq1$　　(D) $a>1$

【解答】依二次型正定的概念，$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 正定的充分必要条件是：

$\forall x=\left(x_1,x_2,x_3\right)^r\neq0$，

$\left(x_1+ax_2-2x_3\right),\left(2x_2+3x_3\right),\left(x_1+3x_2+ax_3\right)$ 不全为零，从而 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 正定的充分必要条件是：

齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+ax_2-2x_3=0\\2x_2+3x_3=0\\x_1+3x_2+ax_3=0\end{cases}$ 只有零解，即

$\begin{vmatrix}1&a&-2\\0&2&3\\1&3&a\end{vmatrix}=5a-5\neq0$，故 $a\neq1$.

11. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+10x_1x_2+12x_1x_3+12x_2x_3$ 的秩为(　B　).

(A) 3　　(B) 2　　(C)1　　(D) 0

【解答】

二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}3&5&6\\5&3&6\\6&6&9\end{pmatrix}$

对 A 施以初等变换得

$$A\rightarrow\begin{pmatrix}1&7&6\\0&4&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

从而 $r(A)=2$，即二次型的秩为 2 。

12.二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 的秩为 2,则 a,b 应满足条件(　　C　　).

(A) $a\neq b$　　(B) $a=b=1$　　(C) $a=b$, $a\neq\pm1$　　(D) $a=b=-1$

【解答】

二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix}$

对 A 施以初等变换得

$$A\to\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1-a^2 & b-1\\ 0 & b-a & 0\end{pmatrix}$$

因为二次型的秩为 2 ，所以$\begin{cases}b-a=0\\ 1-a^2\neq 0\end{cases}\Rightarrow a=b,a\neq\pm1$

13.设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$**,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ (　A　).**

(A)合同且相似　　　　(B)合同但不相似
(C)不合同但相似　　　(D)不合同且不相似

【解答】

两个同阶实对称矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的特征值及重数;

两个同阶实对称矩阵合同的充分必要条件是它们有相同的秩及相同的正惯性指数.

A 为实对称矩阵, 求其特征值

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\left(4-\lambda\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\left(4-\lambda\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\left(4-\lambda\right)\left(-\lambda\right)^3$$

其特征值为$\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$, B 也有特征值 $\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$, 可见 $A\sim B$,

且 A 与 B 的秩都是 1 ，正惯性指数也都是 1，故 A 与 B 合同.

定理 3.3.2：如果 A 与 B 都是 n 阶实对称矩阵，且有相同的特征根．则 A 与 B 既相似又合同．

证明：设 A 与 B 的特征根均为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$，由于 A 与 n 阶实对称矩阵，一定存在一个 n 阶正交矩阵

Q 使得 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 同时，一定能找到一个正交矩阵 P 使得

$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，从而有 $Q^{-1}AQ=P^{-1}BP$

将上式两边左乘 P 和右乘 P^{-1},得 $B=PQ^{-1}AQP^{-1}=\left(QP^{-1}\right)^{-1}=\left(QP^{-1}\right)^{-1}A\left(QP^{-1}\right)$

由于 $Q^TQ=E$， $P^TP=E$， $P^{-1}P=E$

有 $\left(QP^{-1}\right)^T\left(QP^{-1}\right)=\left(P^{-1}\right)^TQ^TQP^{-1}=\left(P^{-1}\right)^TEP^{-1}=PP^{-1}=E$，所以，$Q\ \ P^{-1}$ 是正交矩阵，由定理知 A 与 B 相似．

14.设 A,B 为 n 阶矩阵,下列命题中正确的是(　C　).

(A)若 A 合同于 B,则 A 相似于 B

(B)若 A 相似于 B,则 A 合同于 B

(C)若 A 合同于 B,则 A 与 B 等价

(D)若 A 与 B 等价,则 A 合同于 B

【解答】

简言之：　　合同矩阵未必是相似

相似矩阵未必合同

合同矩阵必为等价矩阵，等价矩阵未必为合同矩阵.

相似矩阵必为等价矩阵，但等价矩阵未必为相似矩阵（有条件）

3.1 矩阵的相似与等价之间的关系与区别

定理 3.1.1 相似矩阵必为等价矩阵，但等价矩阵未必为相似矩阵.

证明： 设n阶方阵A, B相似，由定义 3 知存在n阶可逆矩阵P_1，使得$P_1^{-1}AP_1 = B$，此时若记

$P = P_1^{-1}, Q = P_1$，则有$PAQ = B$，因此由定义 1 得到n阶方阵A, B等价

但对于矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$等价，$A$与$B$并不相似，即等价矩阵未必相似.

但是当等价的矩阵满足一定条件时，可以是相似的，如下面定理

定理 3.1.2：对于n阶方阵A, B，若存在n阶可逆矩阵P, Q 使$PAQ = B$，(A与B等价)，且$PQ = E$ (E为n阶单位矩阵)，则A与B相似.

证明：设对于n阶方阵A与B，若存在n阶可逆矩阵P, Q，使$PAQ = B$，即A与B等价. 又知$PQ = E$，

若记$P = P_1^{-1}$，那么$Q = P_1$，也即$P_1^{-1}AP_1 = B$，则矩阵A, B也相似.

3.2 矩阵的合同与等价之间的关系与区别

定理 3.2.1：合同矩阵必为等价矩阵，等价矩阵未必为合同矩阵.

证明： 设n阶方阵A, B合同，由定义 2 得，存在n阶可逆矩阵P_1，使得$P_1^T AP_1 = B$， 若记

$P = P_1^T, Q = P_1$，则有$PAQ = B$因此由定义 1 得到n阶方阵A, B等价

但对于矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$等价，$A$与$B$并不合同，即等价矩阵未必合同.

什么时候等价矩阵是合同的？
只有当等价矩阵的正惯性指数相同时等价矩阵是合同矩阵

3.3 矩阵的合同与相似之间的关系与区别

合同矩阵未必是相似矩阵

例 单位矩阵 E 与 2E.

两个矩阵的正负惯性指数相同故合同

但作为实对称矩阵的特征值不同，故不相似

相似矩阵未必合同

例如 A 与 B 相似，则存在可逆矩阵 P 使 B=P\BP,如果 P 的逆矩阵与 P 的转置矩阵不相等，则相似矩阵不是合同矩阵

定理 3.3.1： 正交相似矩阵必为合同矩阵，正交合同矩阵必为相似矩阵.

证明：若存在一个正交矩阵P，即$P^T P = E$使得$P^{-1}AP = B$即$A \sim B$，同时有$B = P^{-1}AP = P^T AP$，所以A与B合同.

同理可知，若存在一个正交矩阵P，使得$P^T AP = B$即A与B合同，则有

$B = P^T AP = P^{-1}AP \Rightarrow A \sim B$

15.设 A,B 为同阶可逆矩阵,则(　D　).

(A) $AB=BA$

(B)存在可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$

(C)存在可逆矩阵 C, 使 $C^{T}AC=B$

(D)存在可逆矩阵 P 和 Q, 使 $PAQ=B$

【解答】

（1）选项 A.因为矩阵乘法不满足交换律，故 A 错误；

（2）选项 B.同阶可逆矩阵不一定相似，故 B 错误;

（3）选项 C.同阶可逆矩阵也不一定是合同的，故 C 错误;

（4）选项 D.因为 A、B 可逆，所以 $B \bullet A \bullet A^{-1}=B$，即取 $P=B,Q=A^{-1}$，就有 $PAQ=B$，故 D 正确

16.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2$ 的正惯性指数为(　C　).

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D)3

【解答】

[解法 1] 利用二次型的正惯性指数是其矩阵的正特征值个数.

由于二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, A 的特征方程是

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0\\-2&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+1)=0,$$

故 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=-1$. 从而 A 有两个正特征值. 因此.二次型 f 的正惯性指数为 2 .

[解法 2] 利用配方法化为标准形后得出正惯性指数.

$$f=(x_1+2x_2)^2-3x_2^2+x_3^2=y_1^2-3y_2^2+y_3^2$$

其中 $y_1=x_1+2x_2,y_2=x_2,y_3=x_3$, 即

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

由于这个线性变换是可逆的, 故由惯性定理知,二次型 f 的正惯性指数为 2 。

17.下列矩阵中与 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 合同的是(　　C　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$　　**(B)** $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　**(D)** $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

【解答】

与 A 合同的矩阵首先须是实对称矩阵, 其次两实对称矩阵合同 $\Leftrightarrow$ 具有相同的秩和正惯性指数。

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-3)=0$$

故 A 具有 3 个特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$。

具体到本题, 与 A 合同 $\Leftrightarrow$ 秩为 $3,p=3$。选 C

18.设二次型 $f(x)=x^TAx$,其中 A 为 n 阶实对称矩阵.若二次型 $f(x)$ 的秩为 r,符号差为 s,则(　　A　　).

(A) r,s 同为奇数或同为偶数,且 $|s|\le r$

(B) r,s 同为奇数或同为偶数,且 $|s|>r$

(C) r,s 的奇偶性不同,且 $|s|\le r$

(D) r,s 的奇偶性不同,且 $|s|>r$

【解答】

设正惯性指数为 p（$p\le r$）,则负惯性指数为 $r-p$

符号差（正-负）为 $s=p-(r-p)=2p-r$

若 r 为奇数，则 $s=2p-r$ 也为奇数；若 r 为偶数，则 $s=2p-r$ 也为偶数；

$$|s|\le|2p-r|\le|2r-r|=r$$

19.设 A,B 均为 n 阶实对称矩阵,则 A 与 B 合同的充分必要条件是(　D　).

(A) $r(A)=r(B)$

(B)A,B 具有相同的特征值
(C)A,B 都合同于对角矩阵
(D) A,B 具有相同的正负惯性指数
【答案】

(1) 选项 A. 由 A 与 B 合同，知存在可逆矩阵 C，使得 $C^T AC = B$ ，因此

$R(A) = R\left(C^T AC\right) = R(B)$ ，但反之，不成立，故 A 错误;

(2) 选项 B. 由于 A 与 B 相同特征值可以说明相似，故 B 错误;
(4) 选项 D. 由于对称矩阵合同的充分必要条件就是正负惯性指数相同，也就是正负特征值的个数相同，因此 D 正确;
故选: D

20.设二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Ax$,其中，其中 $A^T = A$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$,则 f 为正定二次型的充分必要条件是(D　　).
(A)f 的负惯性指数是 0

(B)存在正交矩阵 Q,使得 $Q^T AQ = E$

(C)f 的秩为 n

(D)存在可逆矩阵 C,使得 $A = C^T C$

【答案】

n 元二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 正定

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p = n$
$\Leftrightarrow A$ 的特征值全大于零
$\Leftrightarrow A$ 的顺序主子式全大于零

$\Leftrightarrow A$ 与 E 合同, 即存在可逆矩阵 D, 使 $A = D^{\mathrm{T}}D$.

(1) 选项 A.负惯性指数为零，正惯性指数不一定是 n，是必要非充分条件;
(2) 选项 B. 存在的正交矩阵 Q 必须是可逆的，是充分而非必要条件;
(3) 选项 C. 需要加上 A 选项条件
(4) 选项 D. 定理
故选择：D.

21.二次型 $f = x^T Ax$,其中 $A^T = A$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$,则 f 为正定二次型的充分必要条件是(　B　).

(A) 存在 n 阶矩阵 C,使得 $A = C^T C$

(B)存在正交矩阵 Q,使得 $Q^T AQ = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$,

其中 $\lambda_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$

(C)A 的行列式$\det(A)>0$

(D)对任意$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $x_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$,

使得$x^TAx>0$

【答案】

(1) 选项 A. n 阶矩阵 C 要可逆；

(2) 选项 B.

$$\begin{aligned}Q^TAQ=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)&\Rightarrow Q^{-1}AQ=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\left(Q\text{为正交矩阵}\right)\\&\Rightarrow A\text{与}diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\text{相似}\left(\text{相似定义}\right)\\&\Rightarrow \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\text{是}A\text{的}n\text{个特征根}\left(\text{定理3，}P124\right)\\&\Rightarrow A\text{正定}\left(P137\text{推论}\right)\end{aligned}$$

(3) 选项 C. 要各阶主子式都大于 0，必要非充分条件；

(4) 选项 D. 定义,充分条件

故选择：B

22.二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型,则 λ 的取值范围是(A).

(A) $-2<\lambda<1$ **(B) $-2<\lambda<2$**

(C) $\lambda<-2$ **(D) $\lambda>2$**

【分析】因二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1\\\lambda&2&2\\-1&2&4\end{pmatrix}$，而二次型 f 正定的一个充要条件是矩阵 A 的各阶顺序主子式均大于零，又

$\Delta_1>0,\Delta_2=\begin{vmatrix}1&\lambda\\\lambda&4\end{vmatrix}=4-\lambda^2,\Delta_3=\begin{vmatrix}1&\lambda&-1\\\lambda&4&2\\-1&2&4\end{vmatrix}=-4(\lambda-1)(\lambda+2)$，于是二次型 f 正定充要条件是：$\Delta_2>0,\Delta_3>0$.

由$\Delta_2>0$，得-2<λ<2；由$\Delta_3>0$，得-2<λ<1，因此当-2<λ<1 时，有$\Delta_2>0$，且 $\Delta_3>0$，二次型 f 是正定的，故应选（A）