5. 设 A 为$m\times n$矩阵，B 为$n\times l$矩阵，$B\neq O$，如果有 $AB=O$，则矩阵 A 的秩为(　　)。

(A) $R(A)=n$　　(B) $R(A)<n$　　(C) 无法判断　　(D) $R(A)<m$

P71例9：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$，且 $R(A)=n$，则$R(B)=R(C)$.

附注：

- **当一个矩阵的秩等于它的列数时，这样的矩阵称为列满秩矩阵.**
- **特别地，当一个矩阵为方阵时，列满秩矩阵就成为满秩矩阵，也就是可逆矩阵.**
- **本题中，当 $C=O$，这时结论为：**

设 $AB=O$，若 A 为列满秩矩阵，则 $B=O$.

2. 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2 x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵记为 A，若存在三阶矩阵 $B\neq O$ 使得 $AB=O$，则（　　）。

(A) $\lambda=-2$ 且 $|B|=0$　　(B) $\lambda=-2$ 且 $|B|\neq 0$

√(C) $\lambda=1$ 且 $|B|=0$　　(D) $\lambda=1$ 且 $|B|\neq 0$

设 $AB=O$，若 A 为列满秩矩阵，则 $B=O$.

由反证可知，$\boldsymbol{A}$为降秩矩阵，即 $|\boldsymbol{A}|=0$

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix} \underline{\underline{\begin{matrix}r_1\leftrightarrow r_3\\ r_2-r_1\\ r_3-\lambda r_1\end{matrix}}} \begin{vmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\\ 0 & 1-\lambda & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

即 $\lambda=1$

又因为 $(AB)^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=O$

同理可知，$\boldsymbol{B}$为降秩矩阵，

即 $|\boldsymbol{B}|=0$

3. 已知 A 是三阶矩阵，且$(A-E)^{-1}=A^2+A+E$，则$|\mathrm{A}|=$（　　）。

(A) 0　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 8

由$(A-E)^{-1}=A^2+A+E$，
有$(\mathrm{A}-\mathrm{E})(A^2+A+E)=E$，即$A^3=2E$，

$|A|^3=|A^3|=|2E|=2^3|E|=2^3$，
故$|\mathrm{A}|=2$

7. 已知 A 是 n 阶方阵，E 是 n 阶单位矩阵，且$A^3=E$，则$\begin{pmatrix} O & -E \\ A & O \end{pmatrix}^{98}=$(   )。

(A) $\begin{pmatrix} A & E \\ O & A \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} A & O \\ E & A \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -A & O \\ O & -A \end{pmatrix}$ √

记$P=\begin{bmatrix} O & -E \\ A & O \end{bmatrix}$,

则$P^2=\begin{bmatrix} O & -E \\ A & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & -E \\ A & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -A & O \\ O & -A \end{bmatrix}$,

故$P^{98}=\begin{bmatrix} -A & O \\ O & -A \end{bmatrix}^{49}=\begin{bmatrix} -A^{49} & O \\ O & -A^{49} \end{bmatrix}$,

又因为$A^{49}=(A^3)^{16}A=EA=A$，

所以$\begin{bmatrix} O & -E \\ A & O \end{bmatrix}^{98}=\begin{bmatrix} -A & O \\ O & -A \end{bmatrix}$

1. 已知 $R(\mathbf{A}_{3\times3})=2$，$R(\mathbf{AB})=1$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -a \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$，则 a=____0.5____。

2. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}$，$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$，$\mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，求 $(\mathbf{P}_1)^{2021}\mathbf{A}(\mathbf{P}_2)^{2021}=$____________。 $\begin{bmatrix}4 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 8 & -8083 & 4044\end{bmatrix}$

3. 设$\mathbf{C} = \mathrm{B}_{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}\mathrm{A}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$，且$n > m$，则$|\mathrm{C}| =$____0____。

4. 设 $\mathbf{A}$ 为 4 阶方阵，$|A| = 3, A^*$为A的伴随矩阵，若将矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 3 行与第 4 行交换得到 $\mathbf{B}$，则$|BA^*| =$ ____-81____。

5. 设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$， $|A|=2$， A_{ij} 表示 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式（$i,j=1,2,3$），则

$(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23})^2+(a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23})^2+(a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23})^2=$

___4___。

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D\text{，当 } i=j, \\ 0\text{，当 } i\neq j; \end{cases}$$

其中 $$\delta_{ij} = \begin{cases} 1\text{，当 } i=j, \\ 0\text{，当 } i\neq j. \end{cases}$$

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，且满足 $AX+E=A^2+X$，其中 E 为 3 阶单位矩阵，求 X。

$AX+E=A^2+X$

$AX-X=A^2-E$

$(A-E)X=(A-E)(A+E)$

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

显然，A-E不可逆

$$(A-E)(A+E)=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&2\\-3&3&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

即，求解矩阵方程 $\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0&0&2\\-3&3&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

将X和(A-E)(A+E)按列分块：

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(b_1,b_2,b_3)$$

即，分别求解三个方程组：$(A-E)\alpha_i=b_i$，$i=1,2,3.$

即：

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{12}\\x_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{21}\\x_{22}\\x_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{31}\\x_{32}\\x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

解得

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}r\\r-3\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\alpha_1=\begin{pmatrix}s\\s+3\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}t+1\\t\\2\end{pmatrix},$$

故 $X=\begin{pmatrix}r&s&t+1\\r-3&s+3&t\\0&0&2\end{pmatrix}$，**其中r、s、t为任意常数.**

2. 设 A, B 都是 3 阶矩阵, 其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&a\\1&2&2\end{pmatrix}$, $AB-A+B=E$, 且 $B\neq E$,

$R(A+B)=3$, 求常数 a 的值。

$AB-A+B=E$

$(A+E)(B-E)=O$

【性质8】若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$, 则 $R(A)+R(B)\le n$.

$\mathrm{R}(A+E)+\mathrm{R}(B-E)\le 3$

【性质6】 $R(A+B)\le R(A)+R(B)$.

由$\mathrm{R}(A+B)=3$

可知$R(A+B)=R[(A+E)+(B-E)]\le R(A+E)+R(B-E)\le 3$

即 $R(A+E)+R(B-E)=3$

又$B\neq E$, 故 $R(B-E)\ge 1$, 即$R(A+E)\le 2$

$$A+E=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&5&a\\1&2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&5&a+6\\0&2&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&2&5\\0&0&2a-13\end{pmatrix}$$

故 $2a-13=0$,

即 $a=\frac{13}{2}$

3. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+\quad x_4=3 \\ 3x_1-x_2+ax_3+15x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=b \end{cases}$$

a，b 取何值时，方程组无解？有惟一解？有无穷多解时，求出通解。

对增广矩阵施以初等行变换

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & a & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & b \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & a-6 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 9 & b-1 \end{pmatrix}$$

$$\sim\cdots\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -b-4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3}(b+8) \\ 0 & 0 & 2+a & 0 & \frac{2}{3}(1-b) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}(b+5) \end{pmatrix},$$

可见，当 $a=-2$，且 $b\neq 1$时，$R(A)=3$，$R(B)=4$，方程组无解

当 $a\neq -2$时，$R(A)=R(B)=4$，方程组有惟一解；

当 $a=-2$，$b=-1$时，$R(A)=R(B)=3$，方程组有无穷多解。

当 $a=-2$，$b=-1$时，

$$\mathbf{B}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=-8 \\ x_2+2x_3=3 \\ x_4=2 \end{cases}$$

通解为

$$x=\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}(k\in\mathbf{R})$$

1. 设 A=$\begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & 0 \\ \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & & 0 & a^2 & 2a \end{pmatrix}$ 是 n 阶矩阵，试证明$|A| = (n+1)a^n$。

证法二：化为上三角

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & a^2 & 2a & 1 & \\ & & & a^2 & 2a & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & \frac{(n+1)a}{n} \end{vmatrix}$$

$$= 2a \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{4}{3}a \cdots \frac{n+1}{n}a = (n+1)a^n$$

证法一：用归纳法设 n 阶行列式$|\boldsymbol{A}|$的值为 D_n

当 $n=1$ 时，$D_1 = 2a$，命题 $D_n = (n+1)a^n$ 正确；

当 $n=2$ 时，$D_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2$，命题 $D_n = (n+1)a^n$ 正确；

当 $n<k$ 时，命题正确。

当 $n=k$ 时，按第一列展开，得

$$D_k = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21}$$

$$= 2a \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1} + a^2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1}$$

$$= 2aD_{k-1} - a^2 D_{k-2}$$

$$= 2aka^{k-1} - a^2(k-1)a^{k-2} = (k+1)a^k$$

故命题正确。

3. 证明：当$a_1, a_2, \cdots, a_n$互不相等时，方程组无解。

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2 + \cdots + a_1^{n-2}x_{n-1} = a_1^{n-1} \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2 + \cdots + a_2^{n-2}x_{n-1} = a_2^{n-1} \\ \cdots \\ x_1 + a_nx_2 + a_n^2 + \cdots + a_n^{n-2}x_{n-1} = a_n^{n-1} \end{cases}$$

增广矩阵（$\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}$）的行列式正好是范德蒙德行列式，

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

当$a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$互不相同时，

$$\det(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} \left(a_i - a_j\right) \neq 0$$

故（$\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}$）的秩$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$，而$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant n-1$，于是

而$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}) \neq \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，可证得原方程组无解.