反常积分的计算

例 1. 求反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)}\mathrm{d}x$．　　　　　　(2016—2017)

解：令 $\sqrt[3]{x}=t$， $x=t^3$， $\mathrm{d}x=(t^3)'\mathrm{d}t=3t^2\mathrm{d}t$．

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x\to+\infty$ 时，$t\to+\infty$，于是，

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t(t^3+1)}\cdot 3t^2\mathrm{d}t$$

$$=3\int_0^{+\infty}\frac{t}{t^3+1}\mathrm{d}t$$

因为

$$\int\frac{3t}{t^3+1}\mathrm{d}t=\int\frac{3t}{(t+1)(t^2-t+1)}\mathrm{d}t$$

$$=\int(-\frac{1}{t+1}+\frac{t+1}{t^2-t+1})\mathrm{d}t$$

$$=\int(-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}\frac{2t-1+3}{t^2-t+1})\mathrm{d}t$$

$$=\int(-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}\frac{2t-1}{t^2-t+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}})\mathrm{d}t\,.$$

$$=-\ln(t+1)+\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)+\frac{3}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2}+\sqrt{3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C\,,$$

所以，

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)}\mathrm{d}x=3\int_0^{+\infty}\frac{t}{t^3+1}\mathrm{d}t$$

$$=[\frac{1}{2}\ln\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2}+\sqrt{3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}]\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}[\frac{1}{2}\ln\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2}+\sqrt{3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}]$$

$$-[\frac{1}{2}\ln\frac{0^2-0+1}{(0+1)^2}+\sqrt{3}\arctan\frac{0-1}{\sqrt{3}}]$$

$$=\lim_{t\to+\infty}[\frac{1}{2}\ln\frac{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}{(1+\frac{1}{t})^2}+\sqrt{3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}]$$

$$-\sqrt{3}\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$=\frac{1}{2}\ln 1+\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}(-\frac{\pi}{6})=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi.$$

注： $\frac{3t}{(t+1)(t^2-t+1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2-t+1}=\frac{A(t^2-t+1)+(Bt+C)(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)}$，比较等式两边，得

$$A(t^2-t+1)+(Bt+C)(t+1)=3t.$$

取$t=-1$，得$3A=-3\Rightarrow A=-1$. 于是，

$$-(t^2-t+1)+(Bt+C)(t+1)=3t\Rightarrow(Bt+C)(t+1)=(t+1)^2$$

取$t=0$，得$C=1$，取$t=1$，得$B+C=2$，即$B=1$，

故 $$\frac{3t}{(t+1)(t^2-t+1)}=-\frac{1}{t+1}+\frac{t+1}{t^2-t+1}.$$

例 2. 求反常积分$\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx$.　　　　(2017—2018)

解： 令$t=x^2$，则$2xdx=dt$，$x=0$时$t=0$；$x\to+\infty$时，$t\to+\infty$，所以，

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}2xdx\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t(-e^{-t})'dt\\&=\frac{1}{2}[t(-e^{-t})\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}(-e^{-t})dt]\\&=\frac{1}{2}[\lim_{t\to+\infty}t(-e^{-t})-0-e^{-t}\Big|_0^{+\infty}]\\&=\frac{1}{2}[0-(\lim_{t\to+\infty}(-e^{-t})-1)]\\&=\frac{1}{2}(-(0-1))=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 3. 求反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+\sqrt{x})(1+x)}$.　　　　(2018—2019)

解： 令$\sqrt{x}=t$，$x=t^2$，$dx=2tdt$，$x=0$时，$t=0$；$x\to+\infty$时，$t\to+\infty$，于是，

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+\sqrt{x})(1+x)}=\int_0^{+\infty}\frac{2tdt}{(t^2+t)(1+t^2)}=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}dt .$$

因为 $$\int\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}dt=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{1+t}+\frac{1-t}{1+t^2})dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t}dt-\frac{1}{2}\int\frac{t}{1+t^2}dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln(1+t)-\frac{1}{4}\ln(1+t^2)+\frac{1}{2}\arctan t+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^2}{1+t^2}+\frac{1}{2}\arctan t+C .$$

故 $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+\sqrt{x})(1+x)}=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}dt$$

$$=(\frac{1}{2}\ln\frac{(1+t)^2}{1+t^2}+\arctan t)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(\frac{1}{2}\ln\frac{(1+t)^2}{1+t^2}+\arctan t)-(\frac{1}{2}\ln 1+\arctan 0)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\ln\frac{(\frac{1}{t}+1)^2}{\frac{1}{t^2}+1}+\lim_{t\to+\infty}\arctan t=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

例 4. 求反常积分 $\int_0^{+\infty}[\frac{1}{(x+1)\ln^2(1+x)}-\frac{1}{x^2}]dx$. (2019—2020)

解: $$\int[\frac{1}{(x+1)\ln^2(1+x)}-\frac{1}{x^2}]dx=\int\frac{1}{(x+1)\ln^2(1+x)}dx-\int\frac{1}{x^2}dx$$

$$=\int\frac{1}{\ln^2(1+x)}d\ln(x+1)+\frac{1}{x}$$

$$=-\frac{1}{\ln(1+x)}+\frac{1}{x}+C.$$

故 $$\int_0^{+\infty}[\frac{1}{(x+1)\ln^2(1+x)}-\frac{1}{x^2}]dx=[-\frac{1}{\ln(1+x)}+\frac{1}{x}]\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[-\frac{1}{\ln(1+x)}+\frac{1}{x}]-\lim_{x\to0^+}[-\frac{1}{\ln(1+x)}+\frac{1}{x}]$$

$$=0+\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\qquad(等价无穷小代换)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\qquad(洛必达法则)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

例 5. 求反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{x-1}}\mathrm{d}x$. （2020—2021）

解： 令 $\sqrt[3]{x-1}=t$，则 $x=1+t^3$， $\mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$， $x=1$ 时， $t=0$； $x\to+\infty$ 时， $t\to+\infty$.

因此，
$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{x-1}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^3+1)t}\cdot3t^2\mathrm{d}t=3\int_0^{+\infty}\frac{t}{t^3+1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi.\ (参看例1)$$

例 6. 求反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$. （2021—2022）

解：
$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x\qquad(分部积分)$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x}-(-\frac{\arctan1}{1})+\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})\mathrm{d}x$$

$$=0-(-\frac{\pi}{4})+[\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)]\Big|_1^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Big|_1^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}-\ln\frac{1^2}{1+1^2})$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(\ln1-\ln\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln2.$$

例 7. 已知对于任意的 $t>0$，反常积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x$ 都是收敛的 现设 $\Gamma(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x,\ t>0$，称之为 Gamma 函数.

（1）证明对任意的$t>0$，成立递推公式：$\Gamma(t+1)=t\Gamma(t)$；

（2）试计算积分$\int_0^1 x^2(\ln x)^{10}\mathrm{d}x$　　　　（2020—2021）

解：（1）证明：当$t>0$时，

$$\begin{aligned}\Gamma(t+1)&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^t\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}(-\mathrm{e}^{-x})'x^t\mathrm{d}x\\&=x^t(-\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}(-\mathrm{e}^{-x})tx^{t-1}\mathrm{d}x\\&=\lim_{t\to+\infty}(-x^t\mathrm{e}^{-x})-0+t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x\\&=0+t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x=t\Gamma(t).\end{aligned}$$

(2)令$t=-\ln x$，则$x=\mathrm{e}^{-t}$，$\mathrm{d}x=(\mathrm{e}^{-t})'\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$，$x\to 0^+$时，$\lim\limits_{x\to 0^+}t=\lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln x)=+\infty$，

$x=1$时，$t=0$.

于是，$$\int_0^1 x^2(\ln x)^{10}\mathrm{d}x=\int_{+\infty}^0(\mathrm{e}^{-t})^2(-t)^{10}(-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}t^{10}\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{d}t.$$

令$u=3t$，则

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2(\ln x)^{10}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}(\frac{u}{3})^{10}\mathrm{e}^{-u}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{3^{11}}\int_0^{+\infty}u^{10}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{1}{3^{11}}\Gamma(11)=\frac{10!}{3^{11}},\end{aligned}$$

其中 $$\begin{aligned}\Gamma(11)&=10\Gamma(10)=10\cdot 9\Gamma(9)=\cdots=10!\Gamma(1)\\&=10!\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\&=10!(-\mathrm{e}^{-t})\Big|_0^{+\infty}=10!(0-(-1))=10!.\end{aligned}$$