行列式

1.逆序数

2.行列式的定义

3.行列式的性质

性质 1: 行列式与它的转置行列式相等
性质 2: 互换行列式中任意两行(列)一次,行列式变号一次
　推论: 如果有两行（列）相同，行列式为 0
性原 3: 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数k, 等于用 K 乘以行列式
　推论：行列式的某一行(列)的所有元素的共因子可以提到行列式的外而
性质 4: 行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零
性质 5: 行列式可按某一行(列)分解为两个行列式之和
性原 6: 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后再加到另一行(列)上,行列式值不变
性质 7: 设有行列式D

1.将D上、 下翻转或左右翻转,所得行列式为

$$D_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$$

2.将 D顺时针或逆时针旋转90°, 所得行列式为

$$D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$$

3.将 D主副角线翻转后,所得行列式为

$$D_3=D$$

4.将 D主对角线翻转后(转置),所得行列式为

$$D_4=D$$

4.行列式的计算

- 常用方法:
    - 行列式性质结合行列式按行(列)展开定理:行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和.
    - 推论: 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.
    - 二阶矩阵:主对角元素乘积 - 副对角元素乘积
- 上三角,下三角,主对角行列式等于主对角线上元素得乘积
- 关于副对角线
    - $$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & O \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$
- 抽象型行列式
    - 题型特点: 题目给你一个方阵,以及它对应的行列式的值,还有给一个关于矩阵乘法的等式,让你求另一个矩阵的行列式的值
    - 方法:看到方阵,立马想到逆,代数余子式,相关的所有关于行列式的性质,然后把题目给的矩阵乘法的等式做恒等变换,结合相关性质代换计算出结果
    - 举例:
- 参数型行列式
    - 行列式中的元素有一个为参数(未知数),且已知行列式的值,求行列式中未知参数的值
        - 总体思路:根据行列式的常用计算方法,可以得到关于该参数的一个方程,解方程即可得到该参数的值
        - 必会固定思路:
            - 多次利用行列式的性质,使得行列式中某一行(列)出现带该参数的公因式,提取公因式
- 分块矩阵行列式

- $$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B| \ (A,B\text{都是方阵,不必同阶})$$
- $$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix} = (-1)^{nm}|A||B| \ (A,B\text{都是方阵,不必同阶},n,m\text{分别为}A,B\text{的阶数})$$

- 范德蒙德行列式
  - $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j),\text{共有}\frac{n(n-1)}{2}\text{个因子}$$

- 行(列)和相等型行列式
  - 当行列式中每一行的元素之和相等(称为行和相等型)时,计算时把各列全部加到第一列,从第一列中提出公因式,然后,各行都减去第一行就可以降阶
  - 列和相等型行列式同理
- 爪型行列式
  - $$\text{爪形行列式}D_n\text{的计算,假设主对角上的元素分别为}a_0,a_1,a_2,\cdots a_n$$
    - 分为下面三种情况
      - $$\text{如果}a_1,a_2,\cdots a_n\text{中有两个或者两个以上的元素为}0,\text{则必有两行成比例,故}D_n=0$$
      - $$\text{如果}a_1,a_2,\cdots a_n\text{中只有一个元素为}0,\text{则该元素所在行列只有一个元素不为}0,\text{直接行列式按行(列)展开定理}$$
      - $$\text{如果}a_1,a_2,\cdots a_n\text{中所有元素都不为}0,\text{直接公式法}$$
        $$\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = (\prod_{j=1}^{n}a_j)(a_0 - \sum_{i=1}^{n}\frac{c_ib_i}{a_i}),\text{其中}a_i\ne 0$$

5.题目隐藏条件

$$|A|\ne 0\begin{cases} A\text{可逆} \\ r(A)=n \\ A\text{的行(列)向量线性无关} \\ A\text{的特征值全不为}0 \\ Ax=O\text{只有零解}\iff \forall x\ne 0, Ax\ne O \\ \forall\beta\in\mathbb{R}^n, Ax=\beta\text{总有唯一解} \\ A^TA\text{是正定矩阵} \\ A\cong E \\ A=P_1P_2\cdots P_s, P_i\text{是初等阵} \\ \text{存在}n\text{阶矩阵}B,\text{使得}AB=E\text{或}BA=E \\ A\text{的行(列)向量是}\mathbb{R}^n\text{的一组基} \\ A\text{是}\mathbb{R}^n\text{的某两组基的过渡矩阵} \end{cases}$$

$$|A|=0\begin{cases} A\text{不可逆} \\ r(A)<n \\ A\text{的行(列)向量线性相关} \\ 0\text{是}A\text{的特征值} \\ Ax=O\text{有非零解,其基础解系即为}A\text{关于}\lambda=0\text{的特征向量} \end{cases}$$

矩阵

- 研究矩阵,首先务必务必务必清楚研究的对象,是方阵还是行列不相等的矩阵
  - 行列式是研究方阵的一个重要工具(方阵方阵方阵才有行列式)
  - 只和方阵相关的性质: 行列式,逆矩阵,伴随矩阵
    - 看到矩阵的行列式,矩阵的逆,矩阵的伴随,这个矩阵一定是方阵
- 其次判断出一个矩阵是方阵
  - 立马联想到他的行列式,以及所有与行列式有关的性质
  - 其次判断是否可逆,若可逆联系到所有关于逆的性质
  - 然后联想到所有关于矩阵秩的性质
  - 最后联想到所有关于伴随的性质

1.矩阵转置的性质:

$$\begin{cases}(A^T)^T=A \quad A\text{为任意矩阵}\\(AB)^T=B^TA^T \quad A,B\text{为任意矩阵}\\(kA)^T=kA^T \quad A\text{为任意矩阵}\\|A^T|=|A| \quad A\text{为方阵}\\(A\pm B)^T=A^T\pm B^T \quad A,B\text{为同型的任意矩阵}\\(A^{-1})^T=(A^T)^{-1} \quad A\text{为方阵}\\(A^T)^*=(A^*)^T \quad A\text{为方阵}\end{cases}$$

2.方阵行列式的性质

$$\begin{cases}|AB|=|A||B|\\|kA|=k^n|A|\\|A^k|=|A|^k\\|A\pm B|\neq|A|\pm|B|\end{cases}$$

3.方阵可逆,关于逆的性质

$$\begin{cases}(A^{-1})^{-1}=A\\(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}\\(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}\\|A^{-1}|=|A|^{-1}=\frac{1}{|A|}\\(A\pm B)^{-1}\neq A^{-1}\pm B^{-1}\\(A^{-1})^k=(A^k)^{-1}=A^{-k}\end{cases}$$

4.方阵的伴随矩阵(方阵)的性质

$$\begin{cases}AA^*=A^*A=|A|E \quad \text{无条件成立}\\(A^*)^*=|A|^{n-2}A\\(AB)^*=B^*A^*\\(kA)^*=k^{n-1}A^*\\|A^*|=|A|^{n-1}\\(A\pm B)^*\neq A^*\pm B^*\\(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}\\(A^k)^*=(A^*)^k\end{cases}$$

5.矩阵秩的性质

$$\begin{cases}A\neq O\Leftrightarrow r(A)\geq 1\\A=O\Leftrightarrow r(A)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_{mn},B_{ns},\text{若}r(AB)=0\Rightarrow\begin{cases}r(A)+r(B)\leq n\\B\text{的列向量全部是}Ax=O\text{的解}\end{cases}\\r(A\pm B)\leq r(A)+r(B)\\\text{若}A,B\text{均为}n\text{阶方阵},r(AB)\geq r(A)+r(B)-n\\max\{r(A),r(B)\}\leq r(A,B)\leq r(A)+r(B)\end{cases}$$

$$0\leq r(A_{mn})\leq min\{m,n\}$$

$$r(A)=r(A^T)=r(AA^T)=r(A^TA) \quad \text{若}AA^T=O\text{则}A=O$$

$$r(kA)=r(A) \quad k\neq 0$$

$$r(AB)\leq min\{r(A),r(B)\}$$

$$\begin{cases}\text{若}A\text{可逆},r(AB)=r(B)\\\text{若}B\text{可逆},r(AB)=r(A)\\\text{综上一个矩阵乘以一个逆矩阵的秩等于它本身的秩}\end{cases}$$

$$G\text{为列满秩},H\text{为行满秩},\text{则}r(GA)=r(AH)=r(A)$$

$$r(\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix})=r(\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix})=r(A)+r(B)$$

$$r(A+E)+r(A-E)\geq r((A+E)-(A-E))=r(2E)=n$$

$$\text{若}A^2=E_n\text{则}r(A+E)+r(A-E)=n$$

综上所有性质,发现,我们所学的两个矩阵相加的性质中除了转置,没有一个取绝对等号

矩阵相乘

- 常用快速计算方法

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&0&0\\0&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$$

1.用对角矩阵A左乘一个矩阵B，相当于用A的对角线上的各元素依次乘此矩阵B的行向量

$$AB=\begin{bmatrix}a_{11}&0&0\\0&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}&a_{11}b_{12}&a_{11}b_{13}\\a_{22}b_{21}&a_{22}b_{22}&a_{22}b_{23}\\a_{33}b_{31}&a_{33}b_{32}&a_{33}b_{33}\end{bmatrix}$$

2.用对角矩阵A右乘一个矩阵B，相当于用A的对角线上的各元素依次乘此矩阵B的列向量

$$BA=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&0&0\\0&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}&a_{22}b_{12}&a_{33}b_{13}\\a_{11}b_{21}&a_{22}b_{22}&a_{33}b_{23}\\a_{11}b_{31}&a_{22}b_{32}&a_{33}b_{33}\end{bmatrix}$$

深入:

$$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$$

1.用一个初等阵A左乘一个矩阵B,其结果相当于矩阵B做和初等阵A一样的初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\kb_{21}&kb_{22}&kb_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{11}+b_{21}&b_{12}+b_{22}&b_{13}+b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$$

2.用一个初等阵A右乘一个矩阵B,其结果相当于矩阵B做和初等阵A一样的初等列变换

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{12}&b_{11}&b_{13}\\b_{22}&b_{21}&b_{23}\\b_{32}&b_{31}&b_{33}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}&kb_{12}&b_{13}\\b_{21}&kb_{22}&b_{23}\\b_{31}&kb_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}+b_{12}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}+b_{22}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}+b_{32}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$$

深入2:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{11}+b_{21}&b_{12}+b_{22}&b_{13}+b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}+b_{21}&b_{12}+b_{22}&b_{13}+b_{23}\\b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}b_{11}+b_{21}&b_{12}+b_{22}&b_{13}+b_{23}\\kb_{11}&kb_{12}&kb_{13}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

考研考法:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix}1&1&0\\k&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}b_{11}+b_{21}&b_{12}+b_{22}&b_{13}+b_{23}\\kb_{11}&kb_{12}&kb_{13}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}
$$

矩阵A可由E经过有限次初等行变换得到,那么A左乘矩阵B的结果为B做同样行变换后的矩阵

同理:

矩阵A可由E经过有限次初等列变换得到,那么A右乘矩阵B的结果为B做同样列变换后的矩阵

- 同阶对角阵相乘:把对角线上的元素对应相乘

$$
\begin{bmatrix}a_{11}&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&b_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&a_{nn}b_{nn}\end{bmatrix}
$$

方阵的逆

- 伴随矩阵

$$
\text{伴随矩阵}A^*=(A_{ij})^T=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix},A_{ij}\text{为}|A|\text{中各个元素的代数余子式}.A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}
$$

$$
\text{当}A\text{中的元素}a_{ij}=A_{ij}\text{时},\text{有}A^T=(a_{ij})^T=(A_{ij})^T=A^*,\text{故有}A^*=A^T
$$

  - 二阶矩阵伴随矩阵通用公式:(口诀:主对换,副取反)

$$
\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^*=\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}
$$

$$
\left.\begin{matrix}\text{行列式}\\\text{子式}\\\text{余子式}\\\text{代数余子式}\\\text{主子式}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\text{区别与联系}
$$

- 方阵逆的计算
  - 公式法

$$
A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}
$$

$$
\text{逆矩阵具有唯一性设}B,C\text{都是}A\text{的逆矩阵，则有}B=BE=B(AC)=(BA)C=EC=C
$$

  - 二阶矩阵的逆通用公式

$$
\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}
$$

- 主/副对角矩阵的逆

$$
\begin{bmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a_1}&&\\&\frac{1}{a_2}&\\&&\frac{1}{a_3}\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}&&a_1\\&a_2&\\a_3&&\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}&&\frac{1}{a_3}\\&\frac{1}{a_2}&\\\frac{1}{a_1}&&\end{bmatrix}
$$

- 抽象矩阵逆的计算
  - 结合 矩阵转置的性质,方阵行列式的性质,方阵可逆,关于逆的性质,方阵的伴随矩阵(方阵)的性质 进行恒等变换求出结果

分块矩阵

- 分块矩阵的转置

$$
\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}A^T&C^T\\B^T&D^T\end{bmatrix}
$$

- 分块矩阵的行列式

$$
\begin{vmatrix}A&O\\O&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&*\\O&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&O\\*&B\end{vmatrix}=|A||B|\ (A,B\text{都是方阵},\text{不必同阶})
$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix} = (-1)^{nm}|A||B| \ (A,B\text{都是方阵,不必同阶},n,m\text{分别为}A,B\text{的阶数})$$

- 分块对角阵的伴随

$$\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} |B|A^* & \\ & |A|B^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & A \\ B & \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} & (-1)^{mn}|A|B^* \\ (-1)^{mn}|B|A^* & \end{bmatrix}\text{其中}mn\text{为}A,B\text{的阶数}$$

$$\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}^* = \begin{vmatrix} A & \\ & B \end{vmatrix} \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}^{-1} = |A||B| \begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A||B|A^{-1} & \\ & |A||B|B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & A \\ B & \end{bmatrix}^* = \begin{vmatrix} & A \\ B & \end{vmatrix} \begin{bmatrix} & A \\ B & \end{bmatrix}^{-1} = (-1)^{mn}|A||B| \begin{bmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & (-1)^{mn}|A||B|B^{-1} \\ (-1)^{mn}|A||B|A^{-1} & \end{bmatrix}$$

- 分块矩阵的逆

$$\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & A \\ B & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

- 分块矩阵的秩

$$r(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}) = r(A) + r(B)$$

- 分块矩阵相乘

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & \\ & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & \\ & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} A_{11}^n & \\ & A_{22}^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

  - 已知矩阵A,但是在计算中我们可能要使用矩阵B
    - 在矩阵A左右两边乘上一个题目已知矩阵,把A转化为B
    - 没有题目已知矩阵,根据解决问题的目标,选用矩阵乘法或加法把矩阵拆开

方程组

方程组解的问题

$$\beta\text{可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性表示} \Leftrightarrow Ax=\beta\text{有解} \Leftrightarrow r(A)=r(A\vdots\beta)\begin{cases} <n\begin{cases} \Leftrightarrow Ax=\beta\text{有无穷多解} \xrightarrow{\text{当}A\text{为方阵时}} |A|=0 \\ \Leftrightarrow \text{表示法不唯一} \\ \Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性相关} \Leftrightarrow Ax=O\text{有非零解} \end{cases} \\ =n\begin{cases} \Leftrightarrow Ax=\beta\text{有唯一解} \xrightarrow{\text{当}A\text{为方阵时}} |A|\neq 0 \Rightarrow \text{克莱姆} \\ \Leftrightarrow \text{表示法唯一} \\ \Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性无关} \Leftrightarrow Ax=O\text{只有零解} \end{cases} \end{cases}$$

$$\beta\text{不可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性表示} \Leftrightarrow Ax=\beta\text{无解}\begin{cases} \Leftrightarrow r(A)\neq r(A\vdots\beta) \\ \Leftrightarrow r(A)<r(A\vdots\beta) \\ \Leftrightarrow r(A)+1=r(A\vdots\beta) \end{cases}$$

$$\text{方程组}\begin{cases} \text{有解}\begin{cases} \text{有唯一解} \\ \text{有无穷多解} \end{cases} \\ \text{无解} \end{cases}$$

方程组无解充要条件来由

已知方程组:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1-2x_2+7x_3+x_4=2 \\ 3x_1+6x_2+9x_3+12x_4=11 \\ 2x_1+4x_2+6x_3+8x_4=9 \end{cases}$$

一般采用消元法来解线性方程组，而消元法实际上是反复对方程进行变换，而所做的变换也只是以下三种基本的变换所构成：

(1)用一非零的数乘以某一方程

(2)把一个方程的倍数加到另一个方程

(3)互换两个方程的位置

于是，将变换(1),(2),(3)称为线性方程组的初等变换

我们对上面的方程组使用消元法消元

为了方便,我们在方程组外面加上[ ]括号

$$\begin{bmatrix} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1-2x_2+7x_3+x_4=2 \\ 3x_1+6x_2+9x_3+12x_4=11 \\ 2x_1+4x_2+6x_3+8x_4=9 \end{bmatrix} \overset{\text{第三个方程乘以}\frac{1}{3}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1-2x_2+7x_3+x_4=2 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=\frac{11}{3} \\ 2x_1+4x_2+6x_3+8x_4=9 \end{bmatrix}$$

此时我们发现第一个方程和第三个方程矛盾,继续变换

$$\begin{bmatrix} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1-2x_2+7x_3+x_4=2 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=\frac{11}{3} \\ 2x_1+4x_2+6x_3+8x_4=9 \end{bmatrix} \overset{\text{第四个方程乘以}\frac{1}{2}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1-2x_2+7x_3+x_4=2 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=\frac{11}{3} \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

此时我们发现第一个方程,第三个方程,和第四个方程矛盾,为了更加突出这个矛盾,继续变换

$$\begin{bmatrix} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1-2x_2+7x_3+x_4=2 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=\frac{11}{3} \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=\frac{9}{2} \end{bmatrix} \overset{\text{第一个方程的}-1\text{倍分别加到第三,四个方程}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1-2x_2+7x_3+x_4=2 \\ 0+0+0+0=-\frac{4}{3} \\ 0+0+0+0=-\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

此时我们可以清楚的看到,方程组经过以上步骤消元后,出现了矛盾的等式(这是方程组无解的根本原因)

我们以x_1为基准,使用第一个方程再来消消第二个方程

$$\begin{bmatrix} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1-2x_2+7x_3+x_4=2 \\ 0+0+0+0=-\frac{4}{3} \\ 0+0+0+0=-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \overset{\text{第一个方程的}-2\text{倍加到第二个方程}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 0-4x_2+x_3-7x_4=-8 \\ 0+0+0+0=-\frac{4}{3} \\ 0+0+0+0=-\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

我们再把第三,四个方程等号右边的部分消一消

$$\begin{bmatrix} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 0-4x_2+x_3-7x_4=-8 \\ 0+0+0+0=-\frac{4}{3} \\ 0+0+0+0=-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \overset{\text{第三个方程的}-\frac{3}{8}\text{倍加到第四个方程}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 0-4x_2+x_3-7x_4=-8 \\ 0+0+0+0=-\frac{4}{3} \\ 0+0+0+0=0 \end{bmatrix}$$

此时已经不能再消元了,结束.

通过以上消元过程,来看方程组中有没有矛盾的方程,我们可以判断出一个方程组有解还是无解,但是数学家们为使方程组有无解这个问题的研究更加方便,统一,把以上判断方程组有无解的过程进行了矩阵形式的抽象

抽象的过程:把以上过程中运算符号去掉,未知数x去掉,等号换为竖的虚线得到下面大家熟悉的矩阵

$$\begin{bmatrix} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1-2x_2+7x_3+x_4=2 \\ 3x_1+6x_2+9x_3+12x_4=11 \\ 2x_1+4x_2+6x_3+8x_4=9 \end{bmatrix} \overset{\text{抽象}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5 \\ 2 & -2 & 7 & 1 & \vdots & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & \vdots & 11 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$$

同时为了方便数学家们把下面这部分叫做系数矩阵

$$\text{系数矩阵}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

把这样合起来的叫做增广矩阵

$$\text{增广矩阵}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5 \\ 2 & -2 & 7 & 1 & \vdots & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & \vdots & 11 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$$

有了抽象后的矩阵,我们使用该矩阵来一比一还原上面方程组的消元过程

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5\\2 & -2 & 7 & 1 & \vdots & 2\\3 & 6 & 9 & 12 & \vdots & 11\\2 & 4 & 6 & 8 & \vdots & 9\end{bmatrix}\overset{\text{第三行乘以}\frac{1}{3}}{\Rightarrow}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5\\2 & -2 & 7 & 1 & \vdots & 2\\1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & \frac{11}{3}\\2 & 4 & 6 & 8 & \vdots & 9\end{bmatrix}$$

继续变换

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5\\2 & -2 & 7 & 1 & \vdots & 2\\1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & \frac{11}{3}\\2 & 4 & 6 & 8 & \vdots & 9\end{bmatrix}\overset{\text{第四行乘以}\frac{1}{2}}{\Rightarrow}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5\\2 & -2 & 7 & 1 & \vdots & 2\\1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & \frac{11}{3}\\1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & \frac{9}{2}\end{bmatrix}$$

继续变换

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5\\2 & -2 & 7 & 1 & \vdots & 2\\1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & \frac{11}{3}\\1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & \frac{9}{2}\end{bmatrix}\overset{\text{第一行的}-1\text{倍分别加到第三,四行}}{\Rightarrow}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5\\2 & -2 & 7 & 1 & \vdots & 2\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{4}{3}\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

继续变换

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5\\2 & -2 & 7 & 1 & \vdots & 2\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{4}{3}\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\overset{\text{第一行的}-2\text{倍加到第二行}}{\Rightarrow}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5\\0 & -4 & 1 & -7 & \vdots & -8\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{4}{3}\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

继续变换

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5\\0 & -4 & 1 & -7 & \vdots & -8\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{4}{3}\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\overset{\text{第三行的}-\frac{3}{8}\text{倍加到第四行}}{\Rightarrow}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5\\0 & -4 & 1 & -7 & \vdots & -8\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{4}{3}\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}$$

结束

数学家们给最终得到的这个有阶梯状的矩阵起了个名字:行阶梯形矩阵

给以上使用行变换消元的过程起了个名字:求矩阵的行阶梯形

$$\text{行阶梯形矩阵}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5\\0 & -4 & 1 & -7 & \vdots & -8\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{4}{3}\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}$$

最后数学家们要从这个矩阵中抽象出一条高度总结的性质来表示有无矛盾方程:

$$r(\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & -4 & 1 & -7\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}) \neq r(\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5\\0 & -4 & 1 & -7 & \vdots & -8\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{4}{3}\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}) \Leftrightarrow \text{有矛盾方程}$$

数学家们又根据矩阵初等变换不改变矩阵的秩得出了这个终极性质:系数矩阵的秩不等于增广矩阵的秩 <==>有矛盾方程 <==>方程组无解

$$r(\text{系数矩阵}) = r(\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & -2 & 7 & 1\\3 & 6 & 9 & 12\\2 & 4 & 6 & 8\end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & -4 & 1 & -7\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}) \neq r(\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5\\0 & -4 & 1 & -7 & \vdots & -8\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{4}{3}\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5\\2 & -2 & 7 & 1 & \vdots & 2\\3 & 6 & 9 & 12 & \vdots & 11\\2 & 4 & 6 & 8 & \vdots & 9\end{bmatrix}) = r(\text{增广矩阵}) \Leftarrow$$

在以上过程中,还得出以下结论

$$r(\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & -4 & 1 & -7\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}) < r(\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5\\0 & -4 & 1 & -7 & \vdots & -8\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{4}{3}\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}) \Leftrightarrow \text{有矛盾方程}$$

$$r(\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & -4 & 1 & -7\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix})+1=r(\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5\\0 & -4 & 1 & -7 & \vdots & -8\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{4}{3}\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}) \Leftrightarrow \text{有矛盾方程}$$

综上所述,方程组无解的充要条件整理为下面结论

$$Ax=\beta\text{无解}\begin{cases}\Leftrightarrow r(A)\neq r(A\vdots\beta)\\ \Leftrightarrow r(A)<r(A\vdots\beta)\\ \Leftrightarrow r(A)+1=r(A\vdots\beta)\end{cases}$$

方程组有解的充要条件来由

- 根据以上方程组无解的最终结论:"系数矩阵的秩不等于增广矩阵的秩 <==>有矛盾方程 <==>方程组无解" 有
    - 系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩 <==>无矛盾方程 <==>方程组有解

方程组有无穷多个解的充要条件来由

1.首先讨论方程组有无穷多个解的前提是方程组有解 : 系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩 <==>无矛盾方程 <==>方程组有解

2.所以在本节中给的所有方程组都是有解的

为了便于理解,我们首先看下面几个方程组:

1.两个未知数,一个方程的方程组

$$\{3x_1+6x_2=9 \quad \text{有无穷多解}$$

2.三个未知数,两个方程的方程组

$$\begin{cases}3x_1+6x_2+2x_3=9\\x_1+6x_2+5x_3=7\end{cases} \quad \text{有无穷多解}$$

3.三个未知数,三个方程的方程组

$$\begin{cases}3x_1+6x_2+2x_3=9\\x_1+6x_2+5x_3=7\\12x_1+24x_2+8x_3=36\end{cases} \quad \text{有无穷多解}$$

4.四个未知数,四个方程的方程组

$$\begin{cases}3x_1+6x_2+2x_3-x_4=9\\x_1+6x_2+5x_3=7\\12x_1+24x_2+8x_3-4x_4=36\\-3x_1-6x_2-2x_3+x_4=-9\end{cases} \quad \text{有无穷多解}$$

观察上面四个方程组,发现有解的方程组是否有无穷多解似乎和方程组中未知数的个数以及方程的个数有关系:

关系 : 有解的方程组,若方程的个数小于未知数的个数 ,则方程组有无穷多解 (但是又不通用,因为3,4不满足该关系)

以上关系通用怎么办?那我们就要着重解决3,4这样的方程组,回归到线性方程组的初等变换,对以上四个方程组消元

1.

$$\{3x_1+6x_2=9 \quad \text{有无穷多解}$$

这个方程组只有一个方程, 故无论问么消它都有一个方程

$$\{3kx_1+6kx_2=9k \quad k\neq 0 \ \text{有一个有效方程}$$

2.

$$\begin{cases}3x_1+6x_2+2x_3=9\\x_1+6x_2+5x_3=7\end{cases}\overset{\text{第二个方程的}-3\text{倍加到第一个方程,然后再交换第一个方程和第二个方程}}{\Rightarrow}\begin{cases}x_1+6x_2+5x_3=7\\0-12x_2-13x_3=-12\end{cases}\text{两个有效方程}$$

3.

$$\begin{cases}3x_1+6x_2+2x_3=9\\x_1+6x_2+5x_3=7\\12x_1+24x_2+8x_3=36\end{cases}\overset{\text{第一个方程的}-4\text{倍加到第三个方程}}{\Rightarrow}\begin{cases}3x_1+6x_2+2x_3=9\\x_1+6x_2+5x_3=7\\0+0+0=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x_1+6x_2+2x_3=9\\x_1+6x_2+5x_3=7\\0+0+0=0\end{cases}\overset{\text{第二个方程的}-3\text{倍加到第一个方程,然后再交换第一个方程和第二个方程}}{\Rightarrow}\begin{cases}x_1+6x_2+5x_3=7\\0-12x_2-13x_3=-12\end{cases}\text{两个有效方程}$$

4.

$$\begin{cases}3x_1+6x_2+2x_3-x_4=9\\x_1+6x_2+5x_3=7\\12x_1+24x_2+8x_3-4x_4=36\\-3x_1-6x_2-2x_3+x_4=-9\end{cases}\overset{\text{线性方程组的初等变换}}{\Rightarrow}\begin{cases}x_1+6x_2+5x_3=7\\0-12x_2-13x_3-x_4=-12\end{cases}\text{两个有效方程}$$

综上,我们给出"有效方程"的定义:使用线性方程组的初等变换对方程组进行消元,一直消到无法再消元时,所剩下的方程为该方程组的有效方程

所以在我们引入有效方程后, "有解的方程组,若方程的个数小于未知数的个数 ,则方程组有无穷多解"这个不通用的的关系就可以变为一个通用的结论:

- 有解的方程组,若有效方程的个数小于未知数的个数 ,则方程组有无穷多解(通用)

综上,我们判断一个有解的方程组是否有无穷多个解,关键在于求有效方程的个数,那么为了研究方便,数学家们把以上过程进行了矩阵形式的抽象

抽象的过程:把以上过程中运算符号去掉,未知数x去掉,等号换为竖的虚线得到下面大家熟悉的矩阵

我们以第三个方程组为为例子

$$\begin{bmatrix} 3x_1+6x_2+2x_3=9 \\ x_1+6x_2+5x_3=7 \\ 12x_1+24x_2+8x_3=36 \end{bmatrix} \overset{\text{抽象}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 & \vdots & 9 \\ 1 & 6 & 5 & \vdots & 7 \\ 12 & 24 & 8 & \vdots & 36 \end{bmatrix}$$

开始消元

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 & \vdots & 9 \\ 1 & 6 & 5 & \vdots & 7 \\ 12 & 24 & 8 & \vdots & 36 \end{bmatrix} \overset{\text{第一行的}-4\text{倍加到第三行}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 & \vdots & 9 \\ 1 & 6 & 5 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 & \vdots & 9 \\ 1 & 6 & 5 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{第二行的}-3\text{倍加到第一行,然后再交换第一行和第二行}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 & \vdots & 7 \\ 0 & -12 & -13 & \vdots & -12 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

最后这个矩阵中非零行的行数就是有效方程的个数

经过这么一系列行变换最后得到的这个有阶梯状的矩阵叫做 行阶梯形矩阵

这个变换的过程叫做求矩阵的行阶梯形

行阶梯形矩阵的性质: 行阶梯形矩阵中非零行的行数 等于行阶梯形矩阵的秩

综上,数学家们把有效方程的个数 映射为 下面这个等式

$$r(\begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 & \vdots & 7 \\ 0 & -12 & -13 & \vdots & -12 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}) = \text{有效方程的个数}$$

又因为初等变换不改变矩阵的秩,和方程组有解,得到最终的结论:

$$r(\text{增广矩阵}) = r(\begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 & \vdots & 9 \\ 1 & 6 & 5 & \vdots & 7 \\ 12 & 24 & 8 & \vdots & 36 \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 & \vdots & 7 \\ 0 & -12 & -13 & \vdots & -12 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}) = r(\text{系数矩阵}) = \text{有效方程的个数}$$

- 最后一个有解的方程组有无穷解的充要条件就可以整理为下面结论:

$$A_{mn}x = \beta(A\text{的列数}n\text{为未知数的个数})\text{有无穷多解} \Leftrightarrow r(A) = r(A\vdots\beta) < n$$