厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型:(理工类 A 卷)　考试日期　2022.01.02

得　分	
评阅人	

一、填空题:(**每小题 4 分,共 24 分**)

1. 曲线 $y=\ln(1+e^x)$ 的斜渐近线方程为________________________。

2. 反正弦曲线 $y=\arcsin x$ 的拐点是________________________。

3. 设常数 a,b 满足 $\int\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x=ax\sqrt{x^2+4}+b\ln(x+\sqrt{x^2+4})+C$,则 $a=$_____,$b=$_____。

4. $\int_{-3}^{3}\frac{x^3\cos^2 x}{\sqrt{1+x^2+x^4}}\mathrm{d}x=$ ______________________。

5. 悬链线 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 上相应于 $-\ln 2\le x\le\ln 2$ 的这一段曲线弧的长度为________________。

6. 设 $f(x)=\int_x^1\cos t^2\,\mathrm{d}t$,则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$________________________________。

二、求下列的不定积分(**每小题 6 分,共 12 分**):

得　分	
评阅人	

1. $\int\frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

2. $\int\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$。

三、求下列的定积分（每小题 8 分，共 16 分）：

得　分	
评阅人	

1. $\int_{-1}^{6}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}}\,\mathrm{d}x$；

2. $\int_{0}^{\pi}x\sin^{2}x\,\mathrm{d}x$。

四、（8 分）求反常积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^{2}}\,\mathrm{d}x$。

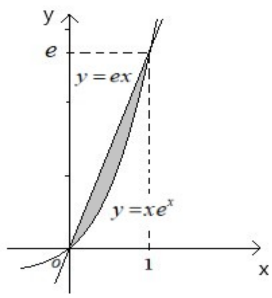
得　分	
评阅人	

五、（14 分）设曲线 $y = xe^x$ 和直线 $y = ex$ 所围成的平面图形为 D。

得　分	
评阅人	

试求：(1) 平面图形 D 的面积 A;

(2) 平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V。



六、（8 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续且 $f(x)>0$，

得　分	
评阅人	

令 $F(x)=\dfrac{\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$，证明：$F(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调增加。

七、（10 分）试求：(1) 函数 $f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)$ 的带有佩亚诺余项的 4 阶麦克劳林公式；(2) 函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{-x^2}{2}}-\cos x}{x^2-(1+x)\ln^2(1+x)}$ 。

得　分	
评阅人	

八、（8 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上有二阶导数且 $f''(x)\geq 0$ 。现已知 $f(1)=-4$ ， $f'(1)=2$ ，证明：方程 $f(x)=0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有且只有一个实根。

得　分	
评阅人	