厦门大学《线性代数》期末试题

考试日期：2013.1　信息学院自律督导部整理

一．（填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&1&-3\\-1&-2&5\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}3&a&-2\\0&5&a\\0&0&-1\end{bmatrix}$. 则矩阵 $AB-A$ 的秩 $r\left(AB-A\right)=$ ________.

2. 设三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{bmatrix}$，向量 $\alpha=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$. 已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a=$ ________.

3. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&-1&3\\0&1&a&a-1\\1&a&-2&3\end{bmatrix}$，若 $Ax=0$ 的基础解系是 2 个线性无关的解向量，那么 $Ax=0$ 的通解是 ________________________.

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&x&0\\4&2&1\end{bmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$，则 $x=$ ________.

5. 若实对称矩阵 A 与矩阵 $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$ 合同，则二次型 x^TAx 的规范形为 ____.

二．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，则下列结论中不正确的是（　　）

（A）　若 $ABC=E$，则 A,B,C 都可逆

（B）　若 $AB=AC$，且 A 可逆，则 $B=C$

（C）　若 $AB=AC$，且 A 可逆，则 $BA=CA$

（D）　若 $AB=0$，且 $A\neq 0$，则 $B=0$.

2. 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中$c_1,c_2,c_3,c_4$为任意常数，则下列向量组必线性相关的是（　　　）.

（A）　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　（B）　$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　（C）　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　　（D）　$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

3. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是四元非齐次线性方程组$Ax=b$的三个解向量，且矩阵$A$的秩为3，$\alpha_1=[1,2,3,4]^T$，$\alpha_2+\alpha_3=[0,1,2,3]^T$，$c$表示任意常数，则线性方程组$Ax=b$的通解$x=$（　　　）

（A）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$　（B）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$　（C）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$　（D）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$

4. 设A为n阶矩阵，下述结论正确的是（　　　）

（A）　矩阵A有n个不同特征值

（B）　矩阵A和A^T　有相同的特征值和特征向量

（C）　矩阵A的特征向量α_1,α_2的线性组合$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$仍是A的特征向量

（D）　矩阵A对应于不同特征值的特征向量线性无关

不会

5. 设A,B均为n阶正定矩阵，下列各矩阵中不一定是正定矩阵的是（　　）

（A）　$A^{-1}+B^{-1}$　　（B）　AB　（C）　A^*+B^*　（D）　$2A+3B$

三. （10分）设向量组$\alpha_1=[1,1,1,3]^T$，$\alpha_2=[-1,-3,5,1]^T$，$\alpha_3=[3,2,-1,p+2]^T$，$\alpha_4=[-2,-6,10,p]^T$.

当p为何值时，该向量组线性相关？当向量组线性相关时，求向量组的秩和一个极大无关组.

四.（18 分）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}$. 当 a,b 为何值时，存在矩阵 $C=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$，使得 $AC-CA=B$，并求满足条件的所有矩阵 C.

五.（10 分）设 $A=\begin{bmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \beta=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$,

（1）计算 $|A|$；

（2）当实数 a 取何值时，$Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

六.（17 分） 设有 3 元实二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=a\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$，

（1）记 $x=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T,y=\left(y_1,y_2,y_3\right)^T$，求正交变换 $x=Py$，将二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 化为标准型.

（2）问 a 为何值时，二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 为正定二次型？

七.（10 分） 设 A,B 均为三阶矩阵，满足 $AB=A-B$. 若 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是矩阵 A 的三个不同特征值，ξ_1,ξ_2,ξ_3 是与其相对于的特征向量. 证明：

（1） $\lambda_i\neq-1\left(i=1,2,3\right)$；

（2） ξ_1,ξ_2,ξ_3 也是矩阵 B 的特征向量.