厦门大学《微积分 I-2》课程期中试卷

________学院________系________年级________专业

试卷类型:(理工类 A 卷)　　　　考试时间:2019.04.13

一、(**本题 6 分**)已知空间中四个点的坐标分别为 A(0,0,0)、B(6,0,6)、C(4,3,0)、D(2,-1,3),求以 AB、AC 和 AD 为棱的平行六面体的体积。

解: $AB=(6,0,6)$, $AC=(4,3,0)$, $AD=(2,-1,3)$。

平行六面体的体积 $V=|(AB\times AC)\cdot AD|$

$$=\left|\left(\begin{vmatrix}0&6\\3&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}6&6\\0&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}6&0\\4&3\end{vmatrix}\right)\cdot(2,-1,3)\right|$$

$$=|(-18,24,18)\cdot(2,-1,3)|=|-36-24+54|=6$$

或者

$$V=|(AB\times AC)\cdot AD|=\left|\begin{vmatrix}6&0&6\\4&3&0\\2&-1&3\end{vmatrix}\right|=6$$

二、(**每小题 6 分,共 12 分**)求解下列微分方程:

1. 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\sin^2(x+y)$ 的通解;

解: 令 $u=x+y$,则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1$,代入方程,整理得 $\dfrac{du}{dx}=\cos^2 u$,

从而 $\sec^2 u\,du=dx$,进而 $\int\sec^2 u\,du=\int 1dx$,解得 $\tan u=x+C$。因此原微分方程的通解为

$\tan(x+y)=x+C$

2. 求满足初始条件 $y(0)=y'(0)=1$ 的微分方程 $y''=2y^3$ 的特解。

解: 令 $P(y)=y'$,则 $y''=P\dfrac{dP}{dy}$,代入方程,得 $P\dfrac{dP}{dy}=2y^3$,进一步整理得

$2PdP=4y^3dy$,积分得 $\int 2PdP=\int 4y^3dy$,求得 $P^2=y^4+C_1$。又由初始条件有 $P(1)=1$,故有

$C_1=0$ 且 $P=y^2$,即 $\dfrac{dy}{dx}=y^2$,整理得 $\dfrac{dy}{y^2}=dx$,积分得 $\int\dfrac{dy}{y^2}=\int dx$,求得 $-\dfrac{1}{y}=x+C_2$,由初始

条件 $y(0)=1$,解得 $C_2=-1$,因此所求的特解为 $y=\dfrac{1}{1-x}$。　　不需要分类讨论吗?

三、（本题 8 分）已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，且满足：

$$f(x)=e^x+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

试求 $f(x)$。

解：对方程 $f(x)=e^x+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 两边对 x 求导，得 $f'(x)-f(x)=e^x$，且有 $f(0)=1$。此微分方程通解为 $f(x)=e^{\int \mathrm{d}x}(C+\int e^x e^{\int -\mathrm{d}x}\mathrm{d}x)=xe^x+Ce^x$，又 $f(0)=1$，求得 $C=1$。因此 $f(x)=(x+1)e^x$。

四、（本题 10 分）求微分方程 $y''-2y'+y=1+\sin x$ 的通解。

解：特征方程为 $r^2-2r+1=0$，求得特征根为 $r_1=r_2=1$。可令微分方程的特解为 $y=a+b\sin x+c\cos x$，代入方程求得 $a=1,b=0,c=\frac{1}{2}$。从而通解为

$$y=\frac{1}{2}\cos x+(C_1+C_2x)e^x$$

五、（本题 8 分）求两异面直线 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 与 $x-1=y=\frac{z}{2}$ 的距离。

解：$\vec{s}_1=(1,2,3),\vec{s}_2=(1,1,2)$，求得过直线 $x-1=y=\frac{z}{2}$ 并与 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 平行的平面Π的法向量为 $\vec{n}=(1,2,3)\times(1,1,2)=(1,1,-1)$，因此平面$\Pi$的方程为 $x-1+y-z=0$。任取直线 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 的一点 $(0,0,0)$，其到平面Π的距离 $d=\frac{|0-1+0-0|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 也就是所求两异面直线的距离。

六、（本题 10 分）平面上的广义极坐标 (ρ,θ) 与直角坐标 (x,y) 满足关系式：$\begin{cases}x=a\rho\cos\theta\\ y=b\rho\sin\theta\end{cases}$，

其中 $a,b>0$ 为常数，试求 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(\rho,\theta)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial\rho}{\partial x}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}-\frac{\partial\rho}{\partial y}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}$ 的值。

解法一：令 $F(x,y,\rho,\theta)=x-a\rho\cos\theta$，$G(x,y,\rho,\theta)=y-b\rho\sin\theta$，则

$\frac{\partial F}{\partial x}=1$，$\frac{\partial F}{\partial y}=0$，$\frac{\partial F}{\partial\rho}=-a\cos\theta$，$\frac{\partial F}{\partial\theta}=a\rho\sin\theta$；

$\frac{\partial G}{\partial x}=0$，$\frac{\partial G}{\partial y}=1$，$\frac{\partial G}{\partial\rho}=-b\sin\theta$，$\frac{\partial G}{\partial\theta}=-b\rho\cos\theta$，

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(\rho,\theta)}=\frac{\partial F}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial G}{\partial\theta}-\frac{\partial F}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial G}{\partial\rho}=(-a\cos\theta)(-b\rho\cos\theta)-(a\rho\sin\theta)(-b\sin\theta)=ab\rho\ ,$$

$$J_1=\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,\theta)}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial G}{\partial\theta}-\frac{\partial F}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial G}{\partial x}=1\cdot(-b\rho\cos\theta)-(a\rho\sin\theta)\cdot 0=-b\rho\cos\theta\ ,$$

$$J_2=\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,\theta)}=\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial G}{\partial\theta}-\frac{\partial F}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial G}{\partial y}=0\cdot(-b\rho\cos\theta)-(a\rho\sin\theta)\cdot 1=-a\rho\sin\theta$$

$$J_3=\frac{\partial(F,G)}{\partial(\rho,x)}=\frac{\partial F}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial G}{\partial\rho}=(-a\cos\theta)\cdot 0-1\cdot(-b\sin\theta)=b\sin\theta$$

$$J_4=\frac{\partial(F,G)}{\partial(\rho,y)}=\frac{\partial F}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial G}{\partial\rho}=(-a\cos\theta)\cdot 1\cdot-0\cdot(-b\sin\theta)=-a\cos\theta$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=-\frac{J_1}{J}=-\frac{-b\rho\cos\theta}{ab\rho}=\frac{\cos\theta}{a}\ ,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial y}=-\frac{J_2}{J}=-\frac{-a\rho\sin\theta}{ab\rho}=\frac{\sin\theta}{b}\ ,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{J_3}{J}=-\frac{b\sin\theta}{ab\rho}=-\frac{\sin\theta}{a\rho}\ ,\qquad \frac{\partial\theta}{\partial y}=-\frac{J_4}{J}=-\frac{-a\cos\theta}{ab\rho}=\frac{\cos\theta}{b\rho}$$

$$\frac{\partial(\rho,\theta)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial\rho}{\partial x}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}-\frac{\partial\rho}{\partial y}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\cos\theta}{a}\frac{\cos\theta}{b\rho}-\frac{\sin\theta}{b}(-\frac{\sin\theta}{a\rho})=\frac{1}{ab\rho}\ 。$$

解法二：

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\frac{\partial x}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}-\frac{\partial x}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial y}{\partial\rho}=(a\cos\theta)\cdot(b\rho\cos\theta)-(-a\rho\sin\theta)\cdot(b\sin\theta)=ab\rho\ ,$$

因此$\dfrac{\partial(\rho,\theta)}{\partial(x,y)}=1/\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\dfrac{1}{ab\rho}$ 。

七、（本题 10 分）设二元函数 $z=f(x-y,\dfrac{x}{y})$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，试求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-f_{11}''+(-\frac{x}{y^2})f_{12}''-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}[-f_{21}''+(-\frac{x}{y^2})f_{22}'']$$

$$=-f_{11}''-\frac{x+y}{y^2}f_{12}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''$$

八、（本题 12 分，第一小题 3 分，第二小题 9 分）已知椭球面$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=5$被平面$y=z$所截，得到的曲线为一椭圆，求：

(1) 该椭圆在xoy坐标面的投影曲线方程。

(2) 该椭圆上的点到原点(0, 0, 0)的最长距离和最短距离。

解：(1) 其投影曲线方程为$\begin{cases}\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1\\ z=0\end{cases}$。

(2) 问题转化为求解$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在限制条件$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=5$和$y=z$下的最值。

用 Lagrange 乘数法。令$L(x,y)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2+\frac{z^2}{4}-5)+\mu(y-z)$，则由

$$\begin{cases}L_x=2x+2\lambda x=0\\ L_y=2y+2\lambda y+\mu=0\\ L_z=2z+\frac{1}{2}\lambda z-\mu\\ x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=5\\ y=z\end{cases}$$

解得$x=0,y=z=\pm 2$ 或者 $x=\pm\sqrt{5},y=z=0$。进一步有$f(0,\pm 2,\pm 2)=8$，$f(\pm\sqrt{5},0,0)=5$。

因为$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=5$和$y=z$的交线为闭曲线，$f(x,y)$为连续函数，所以$f(x,y)$在此交线上能取到最大值和最小值，即有最大值为 8，最小值为 5。因此该椭圆上的点到原点(0, 0, 0)的最长距离为$2\sqrt{2}$，最短距离为$\sqrt{5}$。

九、（本题 8 分）求曲线$\begin{cases}3x^2+y-z-1=0\\ x-y^2+2z+2=0\end{cases}$在点(0, 2, 1)处的切线方程和法平面方程。

解：两曲面在点(0, 2, 1)处的法向量分别为$\vec{n}_1=(6x,1,-1)|_{(0,2,1)}=(0,1,-1)$和$\vec{n}_2=(1,-2y,2)|_{(0,2,1)}=(1,-4,2)$，因此在该点处曲线的一个切向量为

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(0,1,-1)\times(1,-4,2)=(-2,-1,-1)=-(2,1,1)$$

因此切线方程为$\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}$，法平面方程为$2x+y-2+z-1=0$ 即$2x+y+z-3=0$。

十、（本题 10 分，第一小题 6 分，第二小题 4 分）设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

(1) 试问 $f(x,y)$ 在点 (0, 0) 处是否可微？请给出判定理由；

(2) 试问 $f(x,y)$ 在点 (0, 0) 处沿方向 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数是否存在？若存在，试求之。

解：(1) $f_x(0,0)=\dfrac{\mathrm{d}f(x,0)}{\mathrm{d}x}|_{x=0}=0,\ f_y(0,0)=\dfrac{\mathrm{d}f(0,y)}{\mathrm{d}y}|_{y=0}=0$ 。

注意到

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0^+\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to0^+\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\Delta x\cdot(\Delta y)^2}{(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})^3}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\neq0$$

因此 $f(x,y)$ 在点 (0, 0) 处不可微。

(2) 令 $\vec{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(0+\rho\cos\alpha,0+\rho\sin\alpha)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\dfrac{\rho\cos\alpha\cdot(\rho\sin\alpha)^2}{\rho^2}}{\rho}=\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha,$$

因此 $f(x,y)$ 在点 (0, 0) 处沿方向 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数是存在的，且 $\dfrac{\partial f}{\partial\vec{l}}|_{(0,0)}=\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha$ 。

十一、（本题 6 分）设二元函数 $f(x,y)$ 在全平面 R^2 上有连续的一阶偏导数，且满足：$\lim\limits_{\rho\to+\infty}(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y})=1$，其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 。证明：$f(x,y)$ 在全平面 R^2 上能取到最小值。

证明：在极坐标下，我们可以把 f 看成是 ρ,θ 的函数，其中 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$ 。则

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial\rho}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial\theta}(-\frac{\sin\theta}{\rho}),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial\rho}\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial\theta}(\frac{\cos\theta}{\rho})。$$

因此在极坐标下有 $(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y})=\rho\dfrac{\partial f}{\partial\rho}$，从而 $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\rho\dfrac{\partial f}{\partial\rho}=\lim\limits_{\rho\to+\infty}(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y})=1$。由极限的保号性，存在 $\rho_0>0$，当 $\rho\geq\rho_0$ 时，有 $\rho\dfrac{\partial f}{\partial\rho}\geq\dfrac{1}{2}$，即有 $\dfrac{\partial f}{\partial\rho}\geq\dfrac{1}{2\rho}$，从而有

$$f(\rho,\theta)-f(\rho_0,\theta)=\int_{\rho_0}^{\rho} f_\rho(s,\theta)\,\mathrm{d}s \ge \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{1}{2\rho}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}(\ln\rho-\ln\rho_0)\ ,$$

故有 $f(\rho,\theta)\ge f(\rho_0,\theta)+\frac{1}{2}(\ln\rho-\ln\rho_0)$。因此当 $\rho\to+\infty$ 时，$f(\rho,\theta)\to+\infty$。

因为 $f(x,y)$ 在全平面 R^2 上有连续的一阶偏导数，所以 $f(x,y)$ 在全平面 R^2 上连续。记 $m=\min\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)$。又因为 $\rho\to+\infty$ 时，$f(\rho,\theta)\to+\infty$，所以存在 $R>0$，当 $x^2+y^2>R^2$ 时，$f(x,y)>m$，这就说明了 $f(x,y)$ 只能在 $x^2+y^2\le R^2$ 上取得其最小值。