厦门大学《线性代数》期末试题·答案

考试日期：2010.1　　信息学院自律督导部整理

自律督导部

一．填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1．令 $A=(1,0,3,5)^T$, $B=(-2,8,6,9)^T$, 则 $A^TB=$ __61__，

$AB^T=$ __略__.

2．若三元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 2，β_1,β_2,β_3 是它的三个解向量，且 $\beta_1+\beta_2=(2,-6,3)^T$, $\beta_2+\beta_3=(-6,8,5)^T$, 则该线性方程组的通解是 $\underline{(1,-3,3/2)^T+k(8,14,-2)^T, k\in R.}$

3．设 $A=\begin{pmatrix}1&2&t\\t&-3&6\\-2&t&5\end{pmatrix}$ 的行向量线性相关，则实数 t 满足的条件是

$\underline{t=3, 或 t=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{61}.}$

4．令 A_{ii} 是三阶矩阵 A 的元素 a_{ii} 的代数余子式（i=1，2，3），若 A 的特征值为 3，4，5，则 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=$ __47__.

5．若 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&c+2&0\\1&0&c-5\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 c 的取值范围为

$\underline{C>0}$.

二．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 A、B 均为 n 阶正交矩阵，则__（3）__.

（1）A+B 为正交矩阵　　（2）A-B 为正交矩阵

（3）BAB 为正交矩阵　　（4）kAB 为正交矩阵(k>0 为实数)

2．设 A 为 m 阶可逆矩阵，B 为 n 阶可逆矩阵，则可逆分块矩阵

$D=\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$ 的逆矩阵是__（2）__.

（1）$\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & A^{-1} \end{pmatrix}$　　（4）$\begin{pmatrix} O & A^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$

3．设α与β是线性无关的单位向量，则α与β的内积必

____（4）____.

（1）　>0　　（2）<0　（3）>1　　（4）<1

4．设 A 为n阶可逆矩阵，A^T, A^{-1}, A^*分别是 A 的转置矩阵，逆矩阵和伴随矩阵，若ξ是 A 的特征向量，则下列命题中的不正确的是____（1）____.

（1）ξ是A^T的特征向量

（2）2ξ是A^{-1}的特征向量

（3）3ξ是A^*的特征向量

（4）4ξ是kA的特征向量（k为常数）

5．设$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则____（2）____.

（1）A与B是相似的且是合同的

（2）A与B是相似的但不是合同的

（3）A与B不是相似的但是合同的

（4）A与B不是相似的也不是合同的

三.（15 分）试求五元齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3+x_4+x_5=0, \\ -x_1+x_2+x_3-x_4+3x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4-x_5=0 \end{cases}$$

的解空间 V（作为R^5的子空间）的一组规范（标准）正交基。

解 依题意知，

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3&1&1\\-1&1&1&-1&3\\1&1&1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&3&1&1\\0&2&2&0&2\\0&2&2&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&-2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

故 $R(A)=2$，并且原方程组的一个基础解系为：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

接下来将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交化．令 $\beta_1=\alpha_1,\ \beta_2=\alpha_2-\frac{\alpha_2^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1=\alpha_2,$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\alpha_3^T\beta_2}{\beta_2^T\beta_2}\beta_2-\frac{\alpha_3^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{-2}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-1\\1\end{pmatrix},$$

最后将 β_1,β_2,β_3 单位化可得

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix},\eta_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\eta_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{14}}\\-\frac{1}{\sqrt{14}}\\-\frac{1}{\sqrt{14}}\\\frac{2}{\sqrt{14}}\\\frac{2}{\sqrt{14}}\end{pmatrix},$$

向量组 η_1,η_2,η_3 即为所求。

四．（12 分）求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 5 & 0\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量，并计算 A^9 的

特征值。

解 因为 $\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ -2 & 5-\lambda & 0\\ 1 & -1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=-\left(3+\lambda\right)\left(\lambda-3\right)^2$，

故 A 的特征值值为−3，3（2 重）.

当 $\lambda=-3$ 时，解线性方程组 $\left(A+3E\right)x=0$。由于

$$A+3E=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\ -2 & 8 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 6 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

故 A 的属于特征值−3 的全部特征向量为 $k_1\left(0,0,1\right)^T\left(k_1\neq 0\right)$.

又

$$A-3E=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & -1 & -6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

故 A 的属于特征值 3 的全部特征向量为 $k_2\left(1,1,0\right)^T\left(k_2\neq 0\right)$.

根据特征值的性质 A^9 的特征值为 $(-3)^9,3^9,3^9$.

五．（16 分）令 $\alpha_1=\left(1,k,1\right)^T,\alpha_2=\left(k,1,1\right)^T,\alpha_3=\left(-1,k-2,-1\right)^T$ ，$\beta=(-1,k-2,-1)^T$，

问 k 为何值时

（1） 向量 β 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

（2） 向量 β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示法唯一；

（3） 向量 β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示法不唯一，并求其一般表达式

解 略

六. (12 分) 设三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_2x_3$, 试求一个可逆线性变换 $x=Py$ 的将此二次型化为规范型.

解 依题意知，所给的二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\0&1&-3\end{pmatrix}$.

因 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\0&1&-3\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-3\\1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-4\\1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\1&1&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

令 $P=\begin{pmatrix}1&1&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, 则 $|P|=\frac{1}{2}$.

故 $x=Py$ 是可逆的线性变换，且 f 的规范型为 $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

七. (10 分) 令 A 为 n 阶正定矩阵，证明：（1）存在 n 阶实可逆矩阵 P, 使得 $A=P^TP$; 为（2）对任意 n 阶实可逆矩阵 B, 存在 n 阶实可逆矩阵 Q 使得 Q^TAQ 与 Q^TBQ 均为对角矩阵.

有疑问

证明 （1）因 A 为 n 阶正定矩阵，故 A 是实对称矩阵，且其特征值全部为整数。依相关定理知，存在 n 阶正交矩阵，使得

$$A=U^T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}U,$$

其中 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 是 A 的特征值.令 $P=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}U,$ 则 P 是 n 阶实可逆矩阵，且

$A=P^TP,$ 从而命题（1）得证。

（2）因 A 为 n 阶正定矩阵，故根据命题（1）知存在 n 阶实可逆矩阵 P 使得 $P^TAP=E.$

而对任意 n 阶实可逆矩阵 B，P^TBP 是 n 阶实对称矩阵，故有 n 阶正交矩阵 C,使得

$\left(PC\right)^T BPC=C^TP^TBPC=\wedge,$ 其中 $\wedge$ 为对角矩阵。

同时 $\left(PC\right)^T APC=C^TP^TAPC=E,$ 因此 $Q=PC$ 即为所求.