



厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷答案

_____学院_____系_____年级_____专业

试卷类型: (理工类 A 卷)

考试时间: 2021. 11. 7

一、填空题: (每小题 4 分, 共 24 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{4n} = e^{-2}$ 。

2. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ 。

3. 设 $y = \ln |\csc x - \cot x|$, 则 $dy = \csc x dx$ 。

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(1) = f(1) = 2$, $f'(2) = 3$, 则 $y = f(f(x))$ 在 $x=1$ 处的导数为 6。

5. 设 $y = x \cdot \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} = -\frac{11}{72} \sqrt{6}$ 。

6. 设 $f(x) = (x-1)^3(x-2)(x-3)$, 则方程 $f'(x) = 0$ 有 3 个不相等的实数根。

二、求下列函数极限 (每小题 8 分, 共 24 分):

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$;

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (x - \sin x)}{x \sin^2 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$;

解法一: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(e^{(x-1)\ln x} - 1)}{1 - x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\ln x}{1 - x + \ln x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\ln(1+x-1)}{1 - x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{1 - x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{-1 + 1/x} = \lim_{x \rightarrow 1} (-2x) = -2$$

解法二: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{-1 + 1/x} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{x - 1}$

$$= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{1} = -2$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right]$ 。

解：注意到当 $x \neq 0$ 时， $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$ 。

因此，当 $x > 0$ 时， $1 - x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$ ；当 $x < 0$ 时， $1 - x > x \left[\frac{1}{x} \right] \geq 1$ 。

又因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x) = 1$ ，所以由夹逼准则得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\frac{1}{x} \right]$ 。故 $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$ 。

三、（本题 8 分）设方程 $y - x - \frac{1}{2} \sin y = 0$ 确定了隐函数 $y = y(x)$ ，求此隐函数的一阶导数和二阶导数。

解：方程 $y - x - \frac{1}{2} \sin y = 0$ 两边对 x 求导，得 $\frac{dy}{dx} - 1 - \frac{1}{2} \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ ，解得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2 - \cos y}, \text{ 继续两边对 } x \text{ 求导, 得}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{2}{2 - \cos y} \right) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{-2 \sin y}{(2 - \cos y)^2} \cdot \frac{2}{2 - \cos y} = \frac{-4 \sin y}{(2 - \cos y)^3}。$$

四、（本题 10 分）已知笛卡尔叶形线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}, \text{ 其中 } a > 0 \text{ 为常数。}$$

求由此参数方程所确定的函数 $y = y(x)$ 在 $t = 1$ 处的一阶导数和二阶导数。

解： $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{6at(1+t^3) - 3at^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}}{\frac{3a(1+t^3) - 3at \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}} = \frac{2t - t^4}{1 - 2t^3}。$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{2t - t^4}{1 - 2t^3} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{(2 - 4t^3)(1 - 2t^3) - (2t - t^4)(-6t^2)}{(1 - 2t^3)^2} \cdot \frac{(1+t^3)^2}{3a(1+t^3) - 3at \cdot 3t^2} \\ &= \frac{2(1+t^3)^4}{3a(1-2t^3)^3}。 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} \Big|_{t=1} = \frac{2-1}{1-2} = -1, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=1} = \frac{2 \cdot 2^4}{3a(1-2)^3} = -\frac{32}{3a}。$$

五、(本题 10 分) 数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = -x_n^2 + 2x_n$ 。证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其极限。

证: 根据题意, 有 $x_{n+1} = -x_n^2 + 2x_n = -(x_n - 1)^2 + 1$ 。由归纳假设得 $0 < x_n < 1$ 。

又 $x_{n+1} - x_n = x_n - x_n^2 = x_n(1 - x_n) > 0$, 因此 $\{x_n\}$ 为单调增加数列, 且 $\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$ (单调性也可由以下给出: 令 $f(x) = -x^2 + 2x$, $x \in (0, 1)$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 为单调增加函数, 又因为 $x_2 = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = x_1$, 故 $\{x_n\}$ 为单调增加数列)。

由单调有界准则, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在。令 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 则由极限的保号性, 知 $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ 。由 $x_{n+1} = 2x_n - x_n^2$ 两边取极限, 有 $a = -a^2 + 2a$, 解得 $a = 0$ (舍去), $a = 1$ 。因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ 。

六、(本题 8 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2} \right) = 2$,

证明: $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(0)$ 。

证: 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。

又由 $2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1 - \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}}{x}$, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) - 1 - \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2} \right) \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 2 \cdot 0 = 0。$$

因此, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[f(x) - 1 - \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} + \left(1 + \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} \right) \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) - 1 - \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} \right) + 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} = 0 + 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x}{x} = 2。$$

进一步有, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2} - \frac{2}{x} \right) \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2} = 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 - 1}{2x}$$

$$= 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{-\frac{1}{2}} - 1}{2x} = 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} \cdot 2x}{2x} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}。故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0) = \frac{3}{2}$ 。$$

七、(本题 8 分) 设函数 $f(x) = (x^2 + x + 1)\cos 2x$ ，求 $f^{(8)}(0)$ 。

解：首先有， $(\cos 2x)^{(n)} = 2^n \cos(2x + \frac{n}{2}\pi)$ 。

由莱布尼茨公式，

$$\begin{aligned} f^{(8)}(x) &= C_8^0 (\cos 2x)^{(8)} (x^2 + x + 1) + C_8^1 (\cos 2x)^{(7)} (x^2 + x + 1)' + C_8^2 (\cos 2x)^{(6)} (x^2 + x + 1)'' \\ &= 2^8 \cos(2x + 4\pi) \cdot (x^2 + x + 1) + 8 \cdot 2^7 \cos(2x + \frac{7}{2}\pi) \cdot (2x + 1) + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 2^6 \cos(2x + 3\pi) \cdot 2 \\ &= 2^8 [(x^2 + x + 1) \cos 2x + 4(2x + 1) \sin 2x - 14 \cos 2x] \end{aligned}$$

所以 $f^{(8)}(0) = 2^8(1 + 0 - 14) = -13 \cdot 2^8 = -3328$ 。

八、(本题 8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续，在 $(0, 2)$ 内可导，且有 $f(0)=0$ ， $f(1)=1$ ， $f(2)=-1$ 。

证明：至少存在一点 $\xi \in (0, 2)$ ，使得 $f'(\xi) = f(\xi)$ 。

证：因为 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续，且 $f(1)=1>0$ ， $f(2)=-1<0$ ，所以由零点存在定理，存在 $\eta \in (1, 2)$ ，使得 $f(\eta)=0$ 。

令 $\varphi(x) = e^{-x} f(x)$ ，知 $\varphi(x)$ 在 $[0, \eta]$ 上连续，在 $(0, \eta)$ 内可导，且 $\varphi(0) = f(0) = 0$ ，

$\varphi(\eta) = e^{-\eta} f(\eta) = 0$ 。由罗尔定理，至少存在一点 $\xi \in (0, \eta) \subset (0, 2)$ ，使得 $\varphi'(\xi) = 0$ ，即有

$f'(\xi) = f(\xi)$ 。