Memo No.

Date / /

☆1. $B \sim \text{diag}(\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2), \varphi(\lambda_3))$

$\Rightarrow \text{diag}(-5, 0, -3)$

$\therefore \det(B+4E) = \det(\text{diag}(-1, 4, 1))$

$= -4 \Longleftrightarrow \underline{D}$

☆2. $|A-\lambda E| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

即 $-\lambda^3(4-\lambda)=0$，$\lambda = 4$ 或 $0 \Longleftrightarrow \underline{C}$

☆3. 根据特征值定义：$A\alpha = \lambda\alpha$

$\Longleftrightarrow A(1, -1, 2)^T = \lambda(1, -1, 2)^T$

$\Longleftrightarrow (5, 2a-b+2, 7-a)^T = \lambda(1, -1, 2)^T$

$$\begin{cases} \lambda = 5 \\ -\lambda = 2a-b+2 \\ 2\lambda = 7-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \underline{B}$$

Memo No.
Date / /

☆ 4. 由定义，$A\alpha=\lambda_0\alpha$

$\Leftrightarrow PBP^{-1}\alpha=\lambda_0\alpha$

$\Leftrightarrow B(P^{-1}\alpha)=\lambda_0(P^{-1}\alpha)$，选 C.

本题也可根据选项代入求解.

☆ 5. 由 $k_1\alpha_1+k_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$

$\Leftrightarrow (k_1+\lambda_1k_2)\alpha_1+(k_2\lambda_2)\alpha_2=0$

$\Rightarrow \begin{cases} k_1+\lambda_1k_2=0 \\ k_2\lambda_2=0 \end{cases}$

由 $k_1=k_2=0$，仅有零解，得 $\lambda_2\neq0$，$\Leftrightarrow$ 选 D

否则 k_2 可取任意值，此时 $k_1=-\lambda_1k_2$，与题设矛盾.

☆ 6. $|A-\lambda E|=0$

即 $(2-\lambda)((a-\lambda)(3-\lambda)-4)=0$

$\Leftrightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=b$

分别代入：$\lambda_1=1 \Rightarrow a=3$

$\lambda_2=2 \Rightarrow 0=0$

$\lambda_3=b \Rightarrow b=1$ 或 5

又 $\because |A|=|B|=10=2b$

$\therefore b=5$，选 B

Memo No. ______
Date / /

☆7. A特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$

$\Rightarrow B^{-1}$特征值为 A^{-1}的特征值：2, 3, 4, 5

$\Rightarrow B^{-1}-E$ 的特征值为：1, 2, 3, 4

$\Rightarrow \det(B^{-1}-E)=2\times3\times4=24$. A

☆8. 首先排除~~对角~~矩阵 C，

可对角化的充要条件是有 n个线性无关的特征向量

$\Rightarrow$ 对于B选项：$|B-\lambda E|=0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2(2-\lambda)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=2$

着重按习题对应两个无关的特征向量，代入 $\lambda=1$，得

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$，基础解系：$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

或 $\begin{cases}x_2=x_3=0\\x_1=k\end{cases}$

仅有一个特征向量 η_1，因此不可对角化，选 B

Memo No.

Date / /

9. A) $P^{-1}AP=B$

$\Rightarrow P^T A^T (P^{-1})^T = B^T$

$\Rightarrow ((P^T)^{-1})^{-1} A^T ((P^T)^{-1}) = B^T$

即 $A^T \sim B^T$

B) $P^{-1}AP=B$

$\Rightarrow A = PBP^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1} = (PBP^{-1})^{-1} = PB^{-1}P^{-1}$

$\Leftrightarrow A^{-1} \sim B^{-1}$

c) $A^* = A^{-1} \cdot |A|$

由 $A \sim B$, $\Rightarrow A^{-1} \sim B^{-1}$, 且 $|A| = |B|$

$\Rightarrow |A| \cdot A^{-1} \sim |B| \cdot B^{-1}$

$\Leftrightarrow A^* \sim B^*$

D) 无法得证 选 D

10. A.B.D 均为性质

C), 仅可推出 $|A-\lambda E| = |B-\lambda E| = 0$

$\not\Leftrightarrow A-\lambda E = B-\lambda E$. 选 C

Memo No.

Date / /

☆11 $A\alpha=\alpha$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ c-d=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ d=c+1 \end{cases}$

代入选项仅有C满足

此时根据 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$，代入，得：

$\begin{cases} b(d-1)-b(d-1)=0 \Leftrightarrow 0=0 \\ (b-1)(d-2)-b(d-1)=0 \Leftrightarrow b+d=2 \end{cases}$

仅有C满足条件，选C

☆12. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\because \alpha^T\alpha=1+1=2$

$\Rightarrow A^n=\alpha\alpha^T\cdot\alpha\alpha^T\cdots\alpha\alpha^T=2^{n-1}A$

$\Rightarrow aE-A^n=\begin{pmatrix} a-2^{n-1}, & 0, & 2^{n-1} \\ 0 & , \underline{\underline{a}}, & 0 \\ 2^{n-1}, & 0 & a-2^{n-1} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(aE-A^n)=a[(a-2^{n-1})^2-(2^{n-1})^2]$

$=a^2(a-2^n)$

选 B

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.

Date / /

☆ 13. $B=\varphi(A)=A^3-3A^2+2E$

$\varphi(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2+2$

$\Rightarrow\begin{cases}\varphi(-2)=-18\\ \varphi(-1)=-2\\ \varphi(2)=-2\end{cases}$

$\Rightarrow |B|=-18\times(-2)\times(-2)=-72$，选 D

中 14 $\begin{cases}\det(3A+2E)=0\\ \det(A-E)=0\\ \det(3E-2A)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=-\frac{2}{3}\\ \lambda_2=1\\ \lambda_3=\frac{3}{2}\end{cases}$

则 A^{-1} 的特征值为：$-\frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}$，$|A|=-1$

$\Rightarrow \det(A^*-E)=\det(-A^{-1}-E)=(\frac{3}{2}-1)(-1-1)(-\frac{2}{3}-1)$

$=\frac{1}{2}\times(-2)\times(-\frac{5}{3})=\frac{5}{3}$，选 A

☆ 15 $A\alpha=\lambda\alpha \Leftrightarrow -2A\alpha=-2\lambda\alpha$，A 成立

$\Leftrightarrow A^{-1}\alpha=\frac{1}{\lambda}\alpha$

$\Rightarrow A^{-1}|A|\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$

$\Leftrightarrow A^*\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$，C 成立

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2\alpha=\frac{1}{2}\lambda^2\alpha$

取逆：$(\frac{1}{2}A^2)^{-1}\alpha=\frac{2}{\lambda^2}\alpha$，B 成立

故选 D

Memo No.
Date / /

Mo Tu We Th Fr Sa Su

☆16 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(\lambda+3)$

$\Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=-3$，选A

☆17 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$

$\Rightarrow \begin{cases} k_1+k_2=-1 \\ k_1=1 \\ k_2=-2 \end{cases} \Rightarrow \beta = \alpha_1 - 2\alpha_2$

$A\beta = A\alpha_1 - 2A\alpha_2 = \lambda\alpha_1 - 2\lambda\alpha_2$
$= (-2, 4, -4)^T$

☆18. 根据定理4. 特征值不等则对应的特征向量.

☆19. 有 充要条件是n个线性无关的特征向量，不同特征值是充分不必要条件. 选B

☆20 $\varphi(\lambda) = (2-\lambda)^2(3-\lambda) = 0$
仅考虑 $\lambda=2$ 时是否有一样的特征向量
$r(A-\lambda E) = 1$

Memo No.
Date / /

$r(A_3-\lambda E)=1$, $r(A_1-\lambda E)=2$

$r(A_2-\lambda E)=2$, $r(A_4-\lambda E)=2$

仅A_3相等，故选 C

☆21. A)：$\det(\lambda E-A)=\det(\lambda E-B)$ $\not\Leftrightarrow$ $\lambda E-A=\lambda E-B$

B)：特征向量不一定相同

C)：不一定可对角化

D)：$\varphi(A)\sim\varphi(B)$，故成立

☆22. 三个无关特征向量：

$\varphi(\lambda)=(\lambda+1)(1-\lambda)^2$

$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$

代入$\lambda=1$，$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-1&0&1\\x&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&1\\x&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$r(A-\lambda E)=1$时有两个基础解系，故$x=0$选 B

☆23. $r(E-A)=r(E-B)$，$r(A-3E)=r(B-3E)$

由$r(E-B)=4$，$r(B-3E)=2$

∴原式$=6$，故选 B