# 厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期　2022.01.02

| 得　分 | |
| --- | --- |
| 评阅人 | |

一、填空题：（每小题 4 分，共 24 分）

1. 曲线 $y=\ln(1+e^x)$ 的斜渐近线方程为 $\underline{\quad y=x \quad}$。

2. 反正弦曲线 $y=\arcsin x$ 的拐点是 $\underline{\quad (0,0) \quad}$。

3. 设常数 $a,b$ 满足 $\int\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x=ax\sqrt{x^2+4}+b\ln(x+\sqrt{x^2+4})+C$，则 $a=\underline{\frac{1}{2}}$，$b=\underline{2}$。

4. $\int_{-3}^{3}\frac{x^3\cos^2 x}{\sqrt{1+x^2+x^4}}\,\mathrm{d}x=\underline{\quad 0 \quad}$。

5. 悬链线 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 上相应于 $-\ln 2\le x\le \ln 2$ 的这一段曲线弧的长度为 $\underline{\frac{3}{2}}$。

6. 设 $f(x)=\int_x^1\cos t^2\,\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\frac{1}{2}\sin 1}$。

二、求下列的不定积分（每小题 6 分，共 12 分）：

1. $\int\frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$；

**解：** $\int\frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}(x^2+1)=\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}[\ln(x^2+1)]=\frac{1}{4}\ln^2(1+x^2)+C$

2. $\int\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$。

**解：** 令 $x=\sin t, t\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\sqrt{1-x^2}=\cos t$，代入

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sin^2 t\,\cos t}\,\mathrm{d}\sin t=\int\frac{1}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int\csc^2 t\,\mathrm{d}t=-\cot t+C=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$$

三、求下列的定积分（每小题 8 分，共 16 分）：

1. $\int_{-1}^{6}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}}\,\mathrm{d}x$；

**解：** 令 $t=\sqrt[3]{x+2}$，则

$$\int_{-1}^{6}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}}\,\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}(t^3-2)=\int_{1}^{2}\frac{3t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_{1}^{2}3t-3+\frac{3}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{2}t^2\,|_1^2-3+3\ln(1+t)\,|_1^2=\frac{9}{2}-3+\ln 3-\ln 2=\frac{3}{2}+3\ln 3-3\ln 2$$

2. $\int_{0}^{\pi}x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$。

**解法一：** $\int_{0}^{\pi}x\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$

$$=\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$$

**解法二：** $\int_{0}^{\pi}x\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}x(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}x\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}x\cos 2x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}x\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}x\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^2\,|_0^{\pi}-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x)\,|_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-0-0+0-0=\frac{\pi^2}{4}$$

四、（8 分）求反常积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x$。

**解法一：** $\int_{1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\int_{1}^{+\infty}\arctan x\,\mathrm{d}\frac{1}{x}=-\frac{\arctan x}{x}\,|_1^{+\infty}+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\arctan x$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x}+\frac{\pi}{4}+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x=0+\frac{\pi}{4}+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x^2=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x^2=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\,|_1^{+\infty}$$

$=\frac{\pi}{4}+0-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ （注：$\int\frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C$）

**解法二：** $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x \overset{t=\arctan x}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\tan^2 t}\,\mathrm{d}(\tan t)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} t\csc^2 t\,\mathrm{d}\,t$

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} t\ \mathrm{d}(\cot t)=-t\cdot\cot t\,|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot t\ \mathrm{d}\,t=-t\cdot\cot t\,|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\ln\csc t\,|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=0-(-\frac{\pi}{4})-0+\ln\sqrt{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

五、（14 分）设曲线 $y=xe^x$ 和直线 $y=ex$ 所围成的平面图形为 D。试求：(1) 平面图形 D 的面积 $A$; (2) 平面图形 D 绕 $y$ 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 $V$。

**解：** (1) $A=\int_0^1(ex-xe^x)\,\mathrm{d}x=(\frac{e}{2}x^2-xe^x+e^x)\,|_0^1=\frac{e}{2}-1$

(2) $V=\pi\int_0^e x^2(y)\,\mathrm{d}y-\frac{\pi}{3}\cdot 1^2\cdot e \overset{y=xe^x}{=} \pi\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}(xe^x)-\frac{\pi}{3}e$

$$=\pi\int_0^1(x^3+x^2)e^x\,\mathrm{d}\,x-\frac{\pi}{3}e=\pi(x^3-2x^2+4x-4)e^x\,|_0^1-\frac{\pi}{3}e=4\pi(1-\frac{e}{3})$$

(2)的另外一种解法：柱壳法。$V=2\pi\int_0^1 x\cdot(ex)\,\mathrm{d}x-2\pi\int_0^1 x\cdot(xe^x)\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{2\pi e}{3}x^3\,|_0^1-2\pi\int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi e}{3}x^3\,|_0^1-2\pi(x^2-2x+2)e^x\,|_0^1$$

$$=\frac{2\pi e}{3}-0-2\pi e+4\pi=4\pi-\frac{4\pi e}{3}$$

六、（8 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续且 $f(x)>0$，令 $F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$，证明 $F(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调增加。

**证：** 由题意，$F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，且当 $x\in(0,+\infty)$ 时，

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t)^2}=\frac{\int_0^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}{(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t)^2}\cdot f(x)$$

由积分中值定理，存在 $\xi\in(0,x)$，使得 $\int_0^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t=(x-\xi)f(\xi)x$。因此

$F'(x)=\frac{(x-\xi)f(\xi)x}{(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t)^2}\cdot f(x)>0$，故 $F(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调增加。

七、（10 分）试求：(1) 函数 $f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)$ 的带有佩亚诺余项的 4 阶麦克劳林公式；

(2) 函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{-x^2}{2}}-\cos x}{x^2-(1+x)\ln^2(1+x)}$。

**解法一：**(1) 由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$，故　　有问题

$$f(x)=(1+x)(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^2+o(x^3))^2=(1+x)x^2(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2))^2$$

$$=(1+x)x^2(1-x+\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}x^2+o(x^2))=(1+x)x^2(1-x+\frac{11}{12}x^2+o(x^2))$$

$$=x^2(1-x^2+\frac{11}{12}x^2+o(x^2))=x^2(1-x^2+\frac{11}{12}x^2+o(x^2))=x^2-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)\text{。}$$

(2) $\because e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x=[1+(-\dfrac{x^2}{2})+\dfrac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2!}+o(x^4)]-[1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)]=\dfrac{1}{12}x^4+o(x^4)$，

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^2-(1+x)\ln^2(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^2-(x^2-\frac{1}{12}x^2+o(x^4))}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}=1\text{。}$$

**解法二：**(1) 由 $f'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)$，

$$f''(x)=2(x+1)^{-1}\ln(x+1)+2(x+1)^{-1}=\frac{2[\ln(1+x)+1]}{x+1}\text{，}$$

$$f'''(x)=\frac{2[\ln(1+x)+1]}{x+1}=\frac{2(1+x)^{-1}(x+1)-2[\ln(1+x)+1]}{(x+1)^2}=\frac{-2\ln(1+x)}{(x+1)^2}\text{，}$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{-2(x+1)^{-1}(x+1)^2+4(x+1)\ln(1+x)}{(x+1)^4}=\frac{-2+4\ln(1+x)}{(x+1)^3}\text{，}$$

得 $f(0)=0$， $f'(0)=0$， $f''(0)=2$， $f'''(0)=0$， $f^{(4)}(0)=-2$。

故函数 $f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)$ 的带有佩亚诺余项的 4 阶麦克劳林公式为

$$f(x)=f(0)+f(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+o(x^4)=x^2-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)\text{。}$$

(2) 令 $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$，$h(x)=\cos x$，则

$g'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$，$g''(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}+x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$，　$g''(x)=(3x-x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}$，

$g^{(4)}(x)=(3-3x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}+(3x-x^3)xe^{-\frac{x^2}{2}}=(-x^4+3)e^{-\frac{x^2}{2}}$，得 $g(0)=1$，$g'(0)=0$，$g''(0)=-1$，

$g'''(0)=0$，$g^{(4)}(0)=3$。故函数 $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的带有佩亚诺余项的 4 阶麦克劳林公式为

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=g(0)+g(0)x+\frac{g''(0)}{2!}x^2+\frac{g'''(0)}{3!}x^3+\frac{g^{(4)}(0)}{4!}x^4+o(x^4)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\text{。}$$

又 $h'(x)=-\sin x$，$h''(x)=-\cos x$，$h'''(x)=\sin x$，$h^{(4)}(x)=\cos x$，得 $h(0)=1$，$h'(0)=0$，

$h''(0)=-1$，$h'''(x)=0$，$h^{(4)}(0)=1$，故 $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$。从而

$$e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x=(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)]-[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)]=\frac{1}{12}x^4+o(x^4)\text{。}$$

因此

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^2-(1+x)\ln^2(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^2-(x^2-\frac{1}{12}x^2+o(x^4))}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}=1\text{。}$$

八、(8 分)设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上有二阶导数且 $f''(x)\ge0$。现已知 $f(1)=-4$，$f'(1)=2$，证明：方程 $f(x)=0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有且只有一个实根。

**证：**由泰勒公式，存在 $\xi\in(1,x)$，使得 $f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-1)^2$，又根据题意，$f''(\xi)\ge0$，从而有 $f(x)\ge f(1)+f'(1)(x-1)=-4+2(x-1)=2x-6$，故有 $f(3)\ge0$，又 $f(1)=-4$，因此由闭区间连续函数的介值定理，知方程 $f(x)=0$ 在区间 $(1,3]$ 上有一个实根。另一方面，由 $f''(x)\ge0$，故 $f'(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上不减，即有 $f'(x)\ge f'(1)=2$，从而 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 单调递增，因此方程 $f(x)=0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 的实根是唯一的。