厦门大学《数值分析》课程试卷

信息科学与技术学院计算机 2005 年级计算机专业

主考教师：曲延云　鞠颖　　试卷类型：（A 卷）

1. (15%) 求一个次数不高于 4 的多项式 $P_4(x)$ 满足下列插值条件：

   $P_4(1)=2$，$P_4(2)=4$，$P_4(3)=12$，$P_4'(1)=1$，$P_4'(3)=-1$

2. (15%)设 $f(x)=1-x+x^2-x^3+x^4$，在[0,1]上求 f(x)的三次最佳一致逼近多项式，并分析误差。

3. (20%)设 $\{\varphi_n(x)\}$ 是[a, b]上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式序列，$x_i(i=0,1,2,\cdots n)$ 为 $\varphi_{n+1}(x)$ 的零点，$l_i(x)$（i=0, 1, 2, …n）是以 $\{x_i\}$ 为节点的拉格朗日插值基函数，$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 为高斯型求积公式，证明：

   1）当 $0\le k,l\le n,k\ne l$ 时，$\sum_{i=0}^{n} A_i\varphi_k(x_i)\varphi_l(x_i)=0$

   2）$\sum_{k=0}^{n}\int_a^b \rho(x)l_k^2(x)dx=\int_a^b \rho(x)dx$

4. (15%)用 LDL^T 分解法解方程组 $\begin{bmatrix}3&3&5\\3&5&9\\5&9&17\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\16\\30\end{bmatrix}$.

5. (15%)给定方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{bmatrix}3&2\\1&2\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$，用迭代公式

   $$x^{(k+1)}=x^{(k)}+a(b-Ax^{(k)}),k=0,1,2,\cdots$$

   求解，问 a 取何实数可使迭代收敛？a 为何值时迭代收敛最快？

6. (10%)利用适当的迭代格式证明

   $$\lim_{k\to\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{k个}=2$$

7. (10%)计算 $(10-\sqrt{99})^{10}$ 取 $\sqrt{99}\approx 9.9499$，分析下述两种运算各具有几位有效数字。

   $(10-\sqrt{99})^{10}\approx(10-9.9499)^{10}=0.99627047\times10^{-13}$

   $\frac{1}{(10+\sqrt{99})^{10}}\approx\frac{1}{(10+9.9499)^{10}}=0.10013658\times10^{-12}$