



厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷

试卷类型：(理工类 A 卷) 考试日期 2020.11.22

一、求下列函数极限（每小题 6 分，共 18 分）：

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 + x} \right) (e^{1+x} - e^{1-x})$;

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x-1}{x^2+x} e^{1-x} (e^{2x} - 1) \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{x^2+x} e^{1-x} \cdot 2x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2(x-1)}{x+1} e^{1-x} \right) = \frac{2(0-1)}{0+1} e^{1-0} = -2e$$

2. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(\pi - \arccos x)^2}{1+x}$;

解法一：令 $t = \pi - \arccos x$ ，则当 $x \rightarrow -1^+$ 时， $t \rightarrow 0^+$ ，且 $x = -\cos t$ 。由复合函数极限运算法则得

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{1 - \cos t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$= 2$$

解法二： $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(\pi - \arccos x)^2}{1+x} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2(\pi - \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{-x} = 2$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x^4}.$

解: $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + 2(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}) + o(x^4)}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7x^4}{12}}{x^4} = \frac{7}{12}$$

二、求下列函数的导数或微分（每小题 8 分，共 16 分）

1. 求 $y = \arctan \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$ 的一阶导数;

解: 令 $u = \sqrt{1-x^2}$, 则 $y = \arctan u + \frac{1}{2} [\ln(1+u) - \ln(1-u)]$ 。

$$\text{从而 } \frac{dy}{du} = \frac{1}{1+u^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right) = \frac{1}{u^2+1} - \frac{1}{u^2-1} = \frac{-2}{(u^2+1)(u^2-1)},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{因此 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{-2}{(u^2+1)(u^2-1)} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{(x^3-2x)\sqrt{1-x^2}}$$

2. 设方程 $2^{xy} = x^2 + y$ 确定了函数 $y = y(x)$, 求 $dy|_{x=0}$;

解: 方程两边微分, 从而

$$d(2^{xy}) = d(x^2 + y)$$

从而 $2^{xy} \ln 2 (ydx + xdy) = 2xdx + dy$, 把 $x=0, y=1$ 代入, 解得

$$dy|_{x=0} = \ln 2 dx$$

三、(8分) 设 $f(x) = (x^2 + x + 1)\cos^2 \frac{x}{2}$, 求 $f^{(10)}(0)$ 。

解: 方程 $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x + 1) + \frac{1}{2}(x^2 + x + 1)\cos x$, 由莱布尼兹公式, 得

$$f^{(10)}(x) = \frac{1}{2}C_{10}^0(\cos x)^{(10)} \cdot (x^2 + x + 1) + \frac{1}{2}C_{10}^1(\cos x)^{(9)} \cdot (x^2 + x + 1)' \\ + \frac{1}{2}C_{10}^2(\cos x)^{(8)} \cdot (x^2 + x + 1)'' ,$$

$$f^{(10)}(x) = \frac{1}{2}\cos(x + \frac{10\pi}{2}) \cdot (x^2 + x + 1) + 5\cos(x + \frac{9\pi}{2}) \cdot (2x + 1) + 45\cos(x + \frac{8\pi}{2})$$

$$f^{(10)}(0) = \frac{1}{2}\cos(5\pi) + 5\cos(\frac{9\pi}{2}) + 45\cos(4\pi) = \frac{89}{2} .$$

四、(8分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} (1+ax^2)^{\frac{1}{x}} & x > 0 \\ b & x = 0 \\ c + \sin x & x < 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 试求常数 a, b, c 。

解: 只考虑 $x=0$ 就行。因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 上连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+ax^2)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (c + \sin x) = b, \quad \text{又} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+ax^2)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+ax^2)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (c + \sin x) = c, \quad \text{从而} \quad b = c = 1$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 上可导, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{x}} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \sin x - 1}{x - 0}, \quad \text{又} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{\ln(1+ax^2)}{x}} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln(1+ax^2)}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2}{x^2} = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \sin x - 1}{x - 0} = 1 \text{ 得 } a = 1, \text{ 因此 } a = b = c = 1.$$

五、(10分) $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$ 所确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-1}$ 及 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=-1}$ 。

解: 方程 $te^y + y + 1 = 0$ 的两边对 t 求导, 得 $e^y + te^y \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0$, 解得

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{e^y}{te^y + 1} = \frac{e^y}{y}, \text{ 因此 } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^y}{2y}, \text{ 两边对 } x \text{ 求导, 得}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{e^y}{2y} \right) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{e^y(y-1)}{2y^2} \cdot \frac{e^y}{2y} = \frac{e^{2y}(y-1)}{4y^3}。 \text{ 当 } x = -1 \text{ 时, } t = 1, y = -1。 \text{ 因此,}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = -\frac{1}{2e}, \quad \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = \frac{1}{2e^2}。$$

六、(8分) 求函数 $y = \frac{|x^2 + x|}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$ 的间断点, 并判别其类型。

解: 间断点为 $x = 0, x = -1$ 。注意到

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{1} = +\infty \text{ 和 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0,$$

因此 $x = 0$ 为第二类间断点中的无穷间断点。

又注意到

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\lim_{x \rightarrow -1^+} x e^{\frac{1}{x}} = e^{-1} \text{ 和 } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x e^{\frac{1}{x}} = -e^{-1},$$

因此 $x = -1$ 为第一类间断点中的跳跃间断点。

七、(8分) 证明数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ 存在, 且极限值大于 1 但不超过 2。

证明: 令 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, 则 $\{x_n\}$ 为单调递增数列。又当 $n > 1$ 时,

$$1 + \frac{1}{4} \leq x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n} < 2。$$

由单调有界准则, 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ 存在。由保号性, $1 < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2$ 。

八、(8分) 试确定常数 a, b , 使 $1 - \sqrt[3]{\cos 3x}$ 和 $a \ln(1+x) + bx$ 为 $x \rightarrow 0$ 时的等价无穷小。

解：当 $x \rightarrow 0$ 时，

$$1 - \sqrt[3]{\cos 3x} = -[(1 + \cos 3x - 1)^{\frac{1}{3}} - 1] : \frac{1}{3}(1 - \cos 3x) : \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3x)^2 = \frac{3}{2}x^2$$

$$a \ln(1+x) + bx = a(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) + bx = (a+b)x - \frac{a}{2}x^2 + o(x^2)$$

因此 $a+b=0$, $-\frac{a}{2} = \frac{3}{2}$, 解得 $a=-3, b=3$ 。

(或者由 $0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \ln(1+x) + bx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \ln(1+x)}{x} + b = a+b$ 和

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \ln(1+x) - ax}{\frac{3}{2}x^2} = \frac{2a}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{2a}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\frac{a}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = -\frac{a}{3}$$

解得 $a=-3, b=3$ 。)

九、(8分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续，在 $(0, 2)$ 内可导，且 $f(1) + f(2) = 0$ 。证明存在一点 $\xi \in (0, 2)$ ，使得 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 。

证明：因为函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续，所以在 $[1, 2]$ 可取到最大值 M 和最小值 m 。

又因为 $m \leq \frac{f(1) + f(2)}{2} = 0 \leq M$ ，所以由介值定理，至少存在一点 $x_0 \in [1, 2]$ ，使得 $f(x_0) = 0$ 。

令 $\varphi(x) = xf(x)$ ， $x \in [0, 2]$ ，根据题意， $\varphi(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续，在 $(0, 2)$ 内可导，且 $\varphi(0) = \varphi(x_0) = 0$ 。由罗尔定理，至少存在一点 $\xi \in (0, x_0) \subset (0, 2)$ ，使得 $\varphi'(\xi) = 0$ ，即有 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 。

十、(8分) (1) 设 $a > b > 0$ ，证明： $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ ；

(2) 证明数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1$ 。

证明：(1) 令 $f(x) = \ln x$ ， $x \in [a, b]$ ，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi \in (a, b)$ ，使得

$$\ln b - \ln a = f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) = \frac{1}{\xi}(b-a)$$

注意到 $a < \xi < b$ ，从而 $\frac{1}{b} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$ ，因此 $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ 。

(2) 由 (1) 的结论，可得对于任意正整数 $k \geq 2$ ，

$$\frac{1}{k} < \ln \frac{k}{k-1} < \frac{1}{k-1}。$$

$$\text{从而 } \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \sum_{k=2}^n \ln \frac{k}{k-1} < \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1}。$$

$$\text{注意到 } \sum_{k=2}^n \ln \frac{k}{k-1} = \ln n，\text{ 因此有 } \ln n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \ln n + 1，\text{ 进而 } 1 < \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n} < 1 + \frac{1}{\ln n}。$$

$$\text{由夹逼准则，} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1。$$