# 历届期末试题选解（定积分的计算）

## 定积分计算小结：

### 一、定积分的换元积分法：

换元积分公式：

（1）第一换元公式：$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(u)\mathrm{d}u$，其中

$$u=\varphi(x)，\ \varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u，\ \alpha=\varphi(a)，\ \beta=\varphi(b).$$ （例 7，例 9，例 11）

注：第一换元法又称凑微分法，不一定要换元，如果没有换元，就不必换限. 例如，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}\sin x=\mathrm{e}^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}-1.$$

（2）第二换元公式：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$，其中

$$x=\varphi(t)，\ \mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t，\ a=\varphi(\alpha)，\ b=\varphi(\beta).$$ （例 8）

（3）常用的变量替换：

被积函数含有$\sqrt{a^2-x^2}$，则可令$x=a\sin t$；（见例 2，例 4）

被积函数含有$\sqrt{a^2+x^2}$，则可令$x=a\tan t$；

被积函数含有$\sqrt{x^2-a^2}$，则可令$x=a\sec t$；

被积函数含有$\sqrt[m]{ax+b}$，则可令$t=\sqrt[m]{ax+b}$；（见例 1，例 6，例 14）

被积函数含有$\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$，则可令$t=\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

对于三角函数有理式，可采用万能代换$t=\tan\dfrac{x}{2}$，万能代换用到的公式：

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}，\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}，\ \mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$ （见例 4）

### 二、分部积分法：

分部积分公式：$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$.（例 3，例 12，例 15）

### 三、常用的结论：

（1）根据定积分的几何意义，$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$ 表示半圆 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 与 $x$ 轴围成的半圆面积，即

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}a^2.$$ （例 2，例 5）

（2）$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$，特别地，如果 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$；如果 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.（结论见书上 P249 例 5）（例 2，例 4，例 5，例 7，例 10，例 11，例 13）

（3）$\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$；（结论见书上 P249 例 6）（例 3，例 10，例 15）

（4）$\int_{0}^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x$，（例 10）

证明：
$$\int_{0}^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

令 $x=\pi-t$，则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(\sin(\pi-t))(-\mathrm{d}t)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x$.

于是，
$$\int_{0}^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

（5）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, & n\text{为奇数时},\\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数时}.\end{cases}$ （结论见 P253 例 12）（例 10）

（6）$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$.（结论见 P202 例 22）.（例 11）

## 四、历届试题

**例 1.** 求定积分 $\int_{0}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$；（2016-2017）

**解：** 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=(t^2)'\mathrm{d}t=2t\mathrm{d}t$.

$x=0$ 时，$t=0$；$x=4$ 时，$t=2$. 于是，

$$\int_{0}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}=\int_{0}^{2}\frac{1}{1+t}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int_{0}^{2}(1-\frac{1}{1+t})\mathrm{d}t$$

$$=2(t-\ln(1+t))\Big|_0^2=4-2\ln 3.$$

**例 2.** 求定积分 $\int_{-3}^{3}[\sqrt{9-x^2}+x\ln(1+x^2)]\mathrm{d}x$；（2016-2017）

**解：** 注意到 $f(x)=x\ln(1+x^2)$ 为奇函数，故 $\int_{-3}^{3}x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=0$.

所以，$\int_{-3}^{3}[\sqrt{9-x^2}+x\ln(1+x^2)]\mathrm{d}x=\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$.

令 $x=3\sin t,-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$， $\mathrm{d}x=(3\sin t)'\mathrm{d}t=3\cos t\mathrm{d}t$.

$x=-3$时，$t=-\frac{\pi}{2}$； $x=3$时，$t=\frac{\pi}{2}$.

于是，

$$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\mathrm{d}t$$

$$=9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=9(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{2}\pi.$$

故

$$\int_{-3}^{3}[\sqrt{9-x^2}+x\ln(1+x^2)]\mathrm{d}x=\frac{9}{2}\pi.$$

**例 3.** 求定积分 $\int_{0}^{\pi}x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x$；（2016-2017）

**解一：**

$$\int_{0}^{\pi}x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi}x\sqrt{\cos^2 x(1-\cos^2 x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{\pi}x|\cos x|\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\sin x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\cos x\sin x\mathrm{d}x.$$

其中

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x(-\frac{1}{2}\cos 2x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{1}{2}\cos 2x)\mathrm{d}x \quad \text{（分部积分）}$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}.$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\cos x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x(-\frac{1}{2}\cos 2x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\frac{1}{2}\cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x=-\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\frac{3\pi}{8}.$$

故 $$\int_0^{\pi}x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}-(-\frac{3\pi}{8})=\frac{\pi}{2}.$$

**解二：** 注意到，$\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}=\sqrt{\cos^2 x(1-\cos^2 x)}=\sqrt{(1-\sin^2 x)\sin^2 x}$ 是 $\sin x$ 的函数，于是，

$$\int_0^{\pi}x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin x\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\mathrm{d}x-\frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}(-\frac{1}{2}\cos 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{4}(-\frac{1}{2}\cos 2x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

**例 4.** 求定积分 $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；（2017-2018）

**解一：** 令 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$．$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$t=-\frac{\pi}{4}$；$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$t=\frac{\pi}{4}$．

故 $$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\sin t)\cos t}\cos t\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin t}{1-\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t.$$

因为 $\frac{-\sin t}{\cos^2 t}$ 为奇函数，则 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=0$.

故 $$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\tan t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2.$$

**解二：** 令 $x=\sin t$，则 $dx=\cos t dt$． $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时， $t=-\frac{\pi}{4}$； $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时， $t=\frac{\pi}{4}$．

故 $$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\sin t)\cos t}\cos t dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin t}dt.$$

利用万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}$，则

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin t}dt=\int_{-\tan\frac{\pi}{8}}^{\tan\frac{\pi}{8}}\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=2\int_{-\tan\frac{\pi}{8}}^{\tan\frac{\pi}{8}}\frac{1}{(t+1)^2}dt$$

$$=-\frac{2}{t+1}\Big|_{-\tan\frac{\pi}{8}}^{\tan\frac{\pi}{8}}$$

$$=-\frac{2}{\tan\frac{\pi}{8}+1}+\frac{2}{-\tan\frac{\pi}{8}+1}$$

$$=\frac{4\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}=2\tan\frac{\pi}{4}=2.$$

**解三：** 令 $x=\sin t$，则 $dx=\cos t dt$． $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时， $t=-\frac{\pi}{4}$； $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时， $t=\frac{\pi}{4}$．

故 $$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\sin t)\cos t}\cos t dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin t}dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2})^2}dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{2})^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})}\mathrm{d}t$$

$$=-\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=-\tan\frac{\pi}{8}+\tan\frac{3\pi}{8}$$

$$=-\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8})+\tan(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4})$$

$$=-\frac{1-\tan\frac{\pi}{8}}{1+\tan\frac{\pi}{8}}+\frac{1+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\pi}{8}}=\frac{2\cdot 2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}=2\tan\frac{\pi}{4}=2.$$

**解四:** 令 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$． $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$t=-\frac{\pi}{4}$； $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$t=\frac{\pi}{4}$.

故 $$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\sin t)\cos t}\cos t\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin t}\mathrm{d}t.$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{1+\sin t}+\frac{1}{1-\sin t})\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{1-\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\tan t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2.$$

例 5. 计算 $\int_{-1}^{1}(1+x+\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x$；（2017—2018）

解：$$\int_{-1}^{1}(1+x+\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}[(1+\sqrt{1-x^2})^2+x^2+2x\sqrt{1-x^2}]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{1}[1+2\sqrt{1-x^2}+1-x^2+x^2]\mathrm{d}x+2\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{-1}^{1}(1+\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x+2\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

注意到，$x\sqrt{1-x^2}$ 是奇函数，故 $\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=0$.

而 $$\int_{-1}^{1}(1+\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=2+\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2=2+\frac{\pi}{2}.$$

于是，$\int_{-1}^{1}(1+x+\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x=4+\pi.$

注：（1）若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$；（2） $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi a^2$ （半圆的面积）.

**例 6.** 计算 $\int_{-3}^{1}\frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$；（2018—2019）

**解一：** $\int_{-3}^{1}\frac{x}{1+\sqrt{1-x}}dx=\int_{-3}^{1}\frac{x(1-\sqrt{1-x})}{1^2-(\sqrt{1-x})^2}dx=\int_{-3}^{1}(1-\sqrt{1-x})dx$

$$=[x+\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}]\Big|_{-3}^{1}=1-(-3+\frac{2}{3}\cdot 8)=-\frac{4}{3}.$$

**解二：** 令 $\sqrt{1-x}=t$，则 $x=1-t^2$，$dx=-2tdt$.

$$\int_{-3}^{1}\frac{x}{1+\sqrt{1-x}}dx=\int_{2}^{0}\frac{1-t^2}{1+t}(-2t)dt$$

$$=2\int_{0}^{2}(t-t^2)dt$$

$$=2(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3})\Big|_0^2=2\cdot(2-\frac{8}{3})=-\frac{4}{3}.$$

**注：** 换元后，一定要注意换限.

**例 7.** 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$；（2018—2019）

**解一：**

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}d(1+\cos x)$$

$$=\tan\frac{x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\ln(1+\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2.$$

**解二：**

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx.$$

注意到，$\frac{\sin x}{1+\cos x}$ 是奇函数，故 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=0$.

又 $\frac{1}{1+\cos x}$ 为偶函数，则

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=2\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2.$$

**例 8.** 计算$\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{(x+2)^3}\mathrm{d}x$；（2019—2020）

**解：** 令$t=x+2$，则

$$\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{(x+2)^3}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{(t-2)^2}{t^3}\mathrm{d}t$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{t}-\frac{4}{t^2}+\frac{4}{t^3}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\left(\ln t+\frac{4}{t}-\frac{2}{t^2}\right)\Big|_1^2$$

$$=\left(\ln t+\frac{4}{t}-\frac{2}{t^2}\right)\Big|_1^2$$

$$=\ln 2+2-\frac{1}{2}-(0+4-2)=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

**例 9.** 计算$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$；（2019—2020）

**解一：** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-\sec x\tan x)\mathrm{d}x$$

$$=(\tan x-\sec x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\sqrt{2}-(-1)=2-\sqrt{2}.$$

**解二：** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\tan\frac{x}{2}+1)^2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\tan\frac{x}{2}+1)^2}\mathrm{d}(\tan\frac{x}{2}+1)$$

$$=-\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{2}{\tan\frac{\pi}{8}+1}-(-2)=2-\sqrt{2}.$$

**注：** $\tan\frac{\pi}{4}=\dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}=1\Rightarrow\tan^2\frac{\pi}{8}+2\tan^2\frac{\pi}{8}+1=2\Rightarrow\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1.$

**例 10.** 计算$\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\sin^3 x\mathrm{d}x$；（2019—2020）

**解：** 因为 $f(x)=x^2\sin^3 x$ 为奇函数，所以，$\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin^3 x\mathrm{d}x=0.$

故
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\sin^3 x\mathrm{d}x&=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^3 x\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{\pi}x\sin^3 x\mathrm{d}x\quad(\text{因为 } x\sin^3 x \text{ 为偶函数})\\&=2\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^3 x\mathrm{d}x\\&=2\cdot\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\mathrm{d}x=2\pi\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\pi.\end{aligned}$$

**例 11.** 计算$\int_{-2}^{2}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+9}}\mathrm{d}x$；（2020—2021）

**解：** $\int_{-2}^{2}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+9}}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}\frac{x}{\sqrt{4x^2+9}}\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{4x^2+9}}\mathrm{d}x$.

因为 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4x^2+9}}$ 是奇函数，所以，$\int_{-2}^{2}\frac{x}{\sqrt{4x^2+9}}\mathrm{d}x=0$.

由于$\frac{1}{\sqrt{4x^2+9}}$为偶函数，则

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+9}}\mathrm{d}x&=\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{4x^2+9}}\mathrm{d}x=2\int_0^2\frac{1}{\sqrt{4x^2+9}}\mathrm{d}x\\&=\int_0^2\frac{1}{\sqrt{(2x)^2+9}}\mathrm{d}(2x)=\ln(2x+\sqrt{4x^2+9})\Big|_0^2\\&=\ln 9-\ln 3=\ln 3.\end{aligned}$$

**例 12.** 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x$；（2020—2021）

**解：** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx$.

其中，
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x dx = e^x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}} - 1,$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx &= e^x \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x dx \quad \text{（分部积分）} \\
&= -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x dx \\
&= -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 2(e^x \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx) \quad \text{（分部积分）} \\
&= -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx,
\end{aligned}$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx = -\frac{1}{5}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$.

因此，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1) - \frac{1}{2}(-\frac{1}{5}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)) = \frac{3}{5}e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{5}$.

**例 13.** 计算 $\int_{-3}^{3} \frac{x^3 \cos^2 x}{\sqrt{1+x^2+x^4}} dx$；（2021—2022）

**解：** 因为 $\frac{x^3 \cos^2 x}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$ 为奇函数，则 $\int_{-3}^{3} \frac{x^3 \cos^2 x}{\sqrt{1+x^2+x^4}} dx = 0$.

**例 14.** 计算 $\int_{-1}^{6} \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}} dx$；（2021—2022）

解：令 $t = \sqrt[3]{x+2}$，则 $x = t^3 - 2$，$dx = (t^3-2)' dt = 3t^2 dt$.

$x = -1$ 时，$t = 1$；$x = 6$ 时，$t = \sqrt[3]{6+2} = 2$.

于是，
$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{6} \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}} dx &= \int_1^2 \frac{1}{1+t} 3t^2 dt \\
&= 3\int_1^2 \frac{t^2-1+1}{1+t} dt \\
&= 3\int_1^2 (t-1) dt + 3\int_1^2 \frac{1}{1+t} dt \\
&= 3 \cdot \frac{1}{2}(t-1)^2 \Big|_1^2 + 3\ln(1+t)\Big|_1^2 = \frac{3}{2} + 3\ln\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

**例 15.** 计算 $\int_0^{\pi} x \sin^2 x dx$；（2021—2022）

**解一：**

$$\int_0^\pi x\sin^2 x\mathrm{d}x = \int_0^\pi x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\pi x\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}x^2\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}(x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x\mathrm{d}x) \qquad \text{（分部积分）}$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4}(-\frac{1}{2}\cos 2x)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}.$$

**解二：**

$$\int_0^\pi x\sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\mathrm{d}x = \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$