

厦门大学《微积分 I-2》课程期中试卷解答

一、计算下列各题：（每小题 4 分，共 8 分）

(1) 设 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, 2)$, 求 $\text{Prj}_{\vec{b}}(2\vec{a} - \vec{b})$ 和 $(2\vec{a} - \vec{b})$ 与 \vec{a} 的夹角 θ .

解: $\because (2\vec{a} - \vec{b}) = (3, 0, -4)$,

$$\therefore \text{Prj}_{\vec{b}}(2\vec{a} - \vec{b}) = \frac{(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-4) \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = -\frac{5}{3},$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |(2\vec{a} - \vec{b})|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-4)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore \theta = \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(2) 求以 $A(4, 7, -1)$ 、 $B(5, 5, 1)$ 和 $C(3, 7, -2)$ 为顶点的三角形的面积.

解: $\because \overrightarrow{AB} = (1, -2, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, -1)$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2, -1, -2),$$

$$\text{于是三角形的面积 } S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \frac{3}{2}.$$

二、计算下列各题：（每小题 4 分，共 8 分）

(1) 设 $u = y^x \ln(xz)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$.

$$\text{解: } \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{z} \cdot y^x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{1}{z} \cdot y^x \ln y.$$

(2) 设 $u = xyz^2$, 点 $P(1, 1, 1)$, 求 u 在点 P 处的最大的方向导数和它的方向（以单位向量表示）.

$$\text{解: } \text{grad} u|_P = (yz^2, xz^2, 2xyz)|_P = (1, 1, 2), \quad |\text{grad} u|_P| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6},$$

$$\vec{n} = \text{grad} u|_P / |\text{grad} u|_P = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right),$$

因为 u 在点 P 处的最大的方向导数就是在点 P 处的梯度的模, 其方向与梯度方向相同, 所以 u 在点 P 处的最大的方向导数为 $\sqrt{6}$, 其方向为 $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$.

三、计算下列各题: (共 10 分)

$$(1) \text{ 求曲线段 } L: \begin{cases} x = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}, \\ y = t - \frac{1}{2}t^2, \end{cases} \quad t \in [0, 1] \text{ 的弧长. (4 分)}$$

$$\text{解: 弧微分 } ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = (1+t)dt, \quad \text{弧长 } L = \int_0^1 ds = \int_0^1 (1+t)dt = \frac{3}{2}.$$

(2) 求曲线 $\rho = 2 + \sin \theta$ 所围成的图形的面积. (6 分)

$$\begin{aligned} \text{解: 图形的面积 } S &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (2 + \sin \theta)^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (2 + \sin \theta)^2 d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (4 + 4\sin \theta + \sin^2 \theta) d\theta = 4\pi + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = 4\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

四、计算下列各题: (每小题 4 分, 共 8 分)

$$(1) \text{ 求极限 } \lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{e^{xy} - 1}{y\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{e^{xy} - 1}{y\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{e^{xy} - 1}{xy} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{e^{xy} - 1}{xy} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 0^2}} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 求曲线 } \begin{cases} x^2 + 2y^2 + z - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases} \text{ 在 } yoz \text{ 坐标面上的投影柱面和投影曲线方程.}$$

解: 消去 x 得曲线在 $yo z$ 坐标面上的投影柱面方程是 $y^2 + z^2 + z - 1 = 0$, 从而得

$$\text{投影曲线方程 } \begin{cases} y^2 + z^2 + z - 1 = 0, \\ x = 0 \end{cases}.$$

五、设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)y}{(x-1)^2 + y^2}, & (x-1)^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & (x-1)^2 + y^2 = 0, \end{cases}$, (8 分)

① 计算 $f_x(1,0)$ 和 $f_y(1,0)$. ② 问 $f(x, y)$ 在点 $(1,0)$ 处是否可微? 请说明理由.

解: ① $f_x(1,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x, 0) - f(1,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x \cdot 0}{\Delta x^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0,$

类似得 $f_y(1,0) = 0$.

② 答一:

$\because \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,0) \\ y=k(x-1)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot k(x-1)}{(x-1)^2 + [k(x-1)]^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2},$

$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y)$ 极限不存在, 由此可知 $f(x, y)$ 在点 $(1,0)$ 处不连续, 进而得

$f(x, y)$ 在点 $(1,0)$ 处不可微.

② 答二: $\Delta z = f(1+\Delta x, \Delta y) - f(1,0)$, $\Delta z - [f_x(1,0)\Delta x + f_y(1,0)\Delta y] = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2},$

考虑 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - [f_x(1,0)\Delta x + f_y(1,0)\Delta y]}{\rho}$, 其中 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$

取 $\Delta y = \Delta x$, 则

$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \Delta y = \Delta x}} \frac{\Delta z - [f_x(1,0)\Delta x + f_y(1,0)\Delta y]}{\rho} = \lim_{\substack{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0) \\ \Delta y = \Delta x}} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$

$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{2}|\Delta x|} = \infty, \therefore \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - [f_x(1,0)\Delta x + f_y(1,0)\Delta y]}{\rho} \neq 0,$ 即

$\Delta z - [f_x(1,0)\Delta x + f_y(1,0)\Delta y] \neq o(\rho)$, 所以 $f(x, y)$ 在点 $(1,0)$ 处不可微.

六、设 $z = f\left(y, \frac{y}{x}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 、 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. (8 分)

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} f'_2\left(y, \frac{y}{x}\right),$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = -\frac{1}{x^2} f_2' \left(y, \frac{y}{x} \right) + \left(-\frac{y}{x^2} \right) \left[f_{21}'' \left(y, \frac{y}{x} \right) + \frac{1}{x} f_{22}'' \left(y, \frac{y}{x} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{x^2} f_2' - \frac{y}{x^2} f_{21}'' - \frac{y}{x^3} f_{22}''.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{2y}{x^3} f_2' \left(y, \frac{y}{x} \right) + \left(-\frac{y}{x^2} \right) \left[-\frac{y}{x^2} f_{22}'' \left(y, \frac{y}{x} \right) \right] \\ &= \frac{2y}{x^3} f_2' + \frac{y^2}{x^4} f_{22}''.\end{aligned}$$

七、求过点 $M(1,3,1)$ ，且平行于平面 $\pi: 2x+y-2z+6=0$ ，又与直线

$L: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ 相交的直线的方程。（8分）

解一：过点 $M(1,3,1)$ ，与平面 $\pi: 2x+y-2z+6=0$ 相平行的平面方程为 $\pi_1: 2(x-1)+(y-3)-2(z-1)=0$ ，即 $\pi_1: 2x+y-2z-3=0$ 。

又令 $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1} = t$ ，则 $\begin{cases} x=2t, \\ y=t+1, \\ z=t+2, \end{cases}$ 把它们代入 $\pi_1: 2x+y-2z-3=0$ ，解得

$t=2$ ，所以直线 L 与平面 π_1 的交点为 $N(4,3,4)$ 。于是所求的直线的方向向量为

$\overrightarrow{MN}=(3,0,3)$ ，从而得所求的直线方程为 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-1}{1}$ 或 $\begin{cases} x-z=0, \\ y=3. \end{cases}$

解二：过点 $M(1,3,1)$ ，与平面 $\pi: 2x+y-2z+6=0$ 相平行的平面方程为 $\pi_1: 2(x-1)+(y-3)-2(z-1)=0$ ，即 $\pi_1: 2x+y-2z-3=0$ 。

又直线 $L: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ 过点 $P(0,1,2)$ ，其方向向量 $\vec{s}=(2,1,1)$ ，所以过点

$M(1,3,1)$ 和直线 $L: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ 的平面 π_2 的法向量为

$$\vec{n} = \vec{s} \times \overrightarrow{MP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (3, -3, -3) = 3(1, -1, -1),$$

所以平面 π_2 的方程为 $\pi_2: (x-1)-(y-3)-(z-1)=0$, 即 $\pi_2: x-y-z+3=0$.

于是所求的直线方程为 $\begin{cases} 2x+y-2z-3=0, \\ x-y-z+3=0 \end{cases}$.

八、求曲线 $\begin{cases} x^2+2y^2+z^2-x-1=0, \\ 2x+6y+z-3=0 \end{cases}$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切线方程和法平面方程. (8 分)

解: 对方程两边关于 x 求导得: $\begin{cases} 2x+4yy'+2zz'-1=0, \\ 2+6y'+z'=0, \end{cases}$

把点的坐标 $x=1, y=0, z=1$ 代入上面的方程组得 $\begin{cases} 2z'+1=0, \\ 6y'+z'+2=0, \end{cases}$

解方程得 $y'|_{x=1} = -\frac{1}{4}$, $z'|_{x=1} = -\frac{1}{2}$, 所以在点 $(1,0,1)$ 处的切向量为

$$\vec{T} = (1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(4, -1, -2),$$

所以点 $(1,0,1)$ 处的切线方程为 $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-2}$,

法平面方程为 $4(x-1)-y-2(z-1)=0$, 即 $4x-y-2z-2=0$.

九、求曲线 $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases} t \in [0, \pi]$ 与 x 轴围成的图形绕直线 $x=2$ 旋转所产生的旋转体的体积. (8 分)

解一: 记 $\begin{cases} x=x_1(t)=2\cos t, \\ y=y(t)=\sin t, \end{cases} t \in [0, \frac{\pi}{2}],$

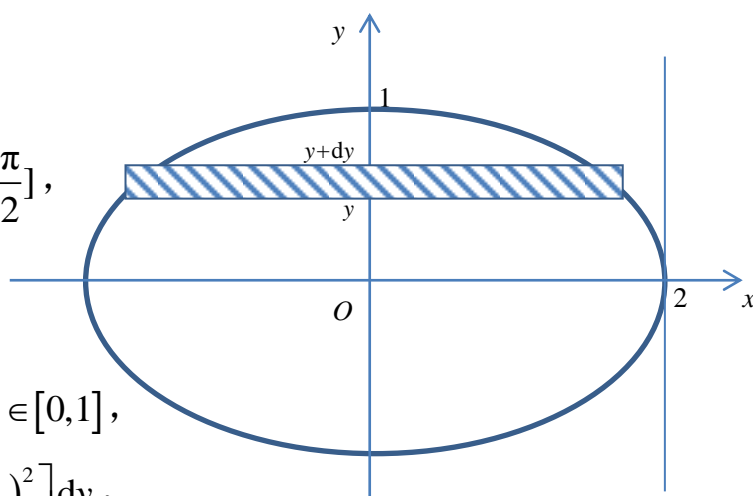
$\begin{cases} x=x_2(t)=2\cos t, \\ y=y(t)=\sin t, \end{cases} t \in [\frac{\pi}{2}, \pi].$

如图所示, 以 y 为积分变量, 则 $y \in [0, 1]$,

体积元素 $dv = [\pi(2-x_2)^2 - \pi(2-x_1)^2] dy$,

于是旋转体的体积

$$V = \int_0^1 dv = \int_0^1 [\pi(2-x_2)^2 - \pi(2-x_1)^2] dy = \pi \int_0^1 (2-x_2)^2 dy - \pi \int_0^1 (2-x_1)^2 dy$$



$$= \pi \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (2 - 2\cos t)^2 d(\sin t) - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - 2\cos t)^2 d(\sin t)$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos t)^2 \cos t dt - 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos t)^2 \cos t dt$$

$$= 16\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 16\pi \cdot \frac{\pi}{4} = 4\pi^2.$$

解二：如图所示，以 x 为积分变量，

则 $x \in [-2, 2]$ ，

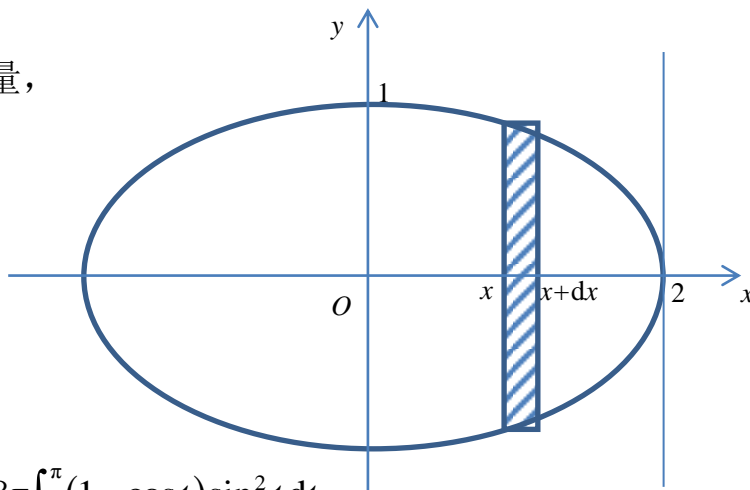
体积元素 $dv = 2\pi(2-x)ydx$ ，

于是旋转体的体积

$$V = \int_{-2}^2 2\pi(2-x)ydx$$

$$= \int_{\pi}^0 2\pi(2-2\cos t)\sin t d(2\cos t) = 8\pi \int_0^{\pi} (1-\cos t)\sin^2 t dt$$

$$= 8\pi \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = 4\pi^2.$$



十、设 $x = f(u, t, y)$ ， $g(u, t, y) = 0$ ，其中 $f(u, t, y)$ ， $g(u, t, y)$ 在 R^3 具有一阶连续偏导数，且在点 (u_0, t_0, y_0) 处有 $g(u_0, t_0, y_0) = 0$ ， $\left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, t)} \right|_{(u_0, t_0, y_0)} \neq 0$ ，① 证明：方

程组 $x = f(u, t, y)$ ， $g(u, t, y) = 0$ 可以确定一对具有连续偏导数的隐函数

$u = u(x, y), t = t(x, y)$ 。② 设 $z = \varphi(x^2, u, t)$ （函数 φ 具有一阶连续偏导数），而

$u = u(x, y), t = t(x, y)$ 为①中由方程组所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 。（10 分）

证明①：已知 $f(u, t, y)$ ， $g(u, t, y)$ 在 R^3 上具有一阶连续偏导数，所以 $f(u, t, y)$ 在 R^3 上有定义。

于是 记 $x_0 = f(u_0, t_0, y_0)$ 。又令 $F(u, t, x, y) = f(u, t, y) - x$ ， $G(u, t, x, y) = g(u, t, y)$ ，

现考虑方程组 $\begin{cases} F(u, t, x, y) = f(u, t, y) - x = 0, \\ G(u, t, x, y) = g(u, t, y) = 0, \end{cases}$

1) $F_u = f_u$ ， $F_t = f_t$ ， $F_x = -1$ ， $F_y = f_y$ ， $G_u = g_u$ ， $G_t = g_t$ ， $G_x = 0$ ， $G_y = g_y$ ，在

R^4 上连续.

$$2) \quad F(u_0, t_0, x_0, y_0) = f(u_0, t_0, y_0) - x_0 = 0, \quad G(u_0, t_0, x_0, y_0) = g(u_0, t_0, y_0) = 0.$$

$$3) \quad \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, t)} \right|_{(u_0, t_0, x_0, y_0)} = \left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, t)} \right|_{(u_0, t_0, y_0)} \neq 0.$$

由隐函数存在定理, 方程组 $\begin{cases} F(u, t, x, y) = f(u, t, y) - x = 0, \\ G(u, t, x, y) = g(u, t, y) = 0, \end{cases}$ 在点 (u_0, t_0, x_0, y_0) 的某

一邻域内确定一对具有连续偏导数的隐函数 $u = u(x, y), t = t(x, y)$.

解②: 对方程组 $\begin{cases} f(u, t, y) - x = 0, \\ g(u, t, y) = 0, \end{cases}$ 两边关于 x 求导得:

$$\begin{cases} f'_1 \cdot u_x + f'_2 \cdot t_x - 1 = 0, \\ g'_1 \cdot u_x + g'_2 \cdot t_x = 0, \end{cases} \quad \text{解此方程组得 } u_x = \frac{g'_2}{f'_1 \cdot g'_2 - f'_2 \cdot g'_1}, \quad t_x = \frac{-g'_1}{f'_1 \cdot g'_2 - f'_2 \cdot g'_1},$$

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = 2x\varphi'_1 + \varphi'_2 \cdot u_x + \varphi'_3 \cdot t_x = 2x\varphi'_1 + \frac{\varphi'_2 \cdot g'_2}{f'_1 \cdot g'_2 - f'_2 \cdot g'_1} - \frac{\varphi'_3 \cdot g'_1}{f'_1 \cdot g'_2 - f'_2 \cdot g'_1}.$$

十一、① 证明旋转抛物面 $\Sigma: x^2 + y^2 - 2z = 0$ 的任意切平面与该抛物面只有一个交点(即切点). ② 求通过直线 $L: \begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ 4y - 8z - 9 = 0 \end{cases}$ 的旋转抛物面 Σ 的切平面方程.

(8 分)

证明①: 设点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为旋转抛物面 Σ 上的任意点, 那么在点 P 处的法向量是 $\vec{n}|_P = (2x, 2y, -2)|_P = (2x_0, 2y_0, -2)$, 所以在点 P 处切平面方程是

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 2(z - z_0) = 0, \quad \text{即 } 2x_0x + 2y_0y - 2z - 2x_0^2 - 2y_0^2 + 2z_0 = 0,$$

注意到 $P(x_0, y_0, z_0)$ 在 Σ 上, 有 $2z_0 = x_0^2 + y_0^2$,

于是切平面方程是 $2x_0x + 2y_0y - 2z - x_0^2 - y_0^2 = 0$,

联立得方程组: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z = 0, \\ 2x_0x + 2y_0y - 2z - x_0^2 - y_0^2 = 0, \end{cases}$ 解方程组得唯一解

$x = x_0, y = y_0, z = z_0$, 所以旋转抛物面 Σ 的任意切平面与该抛物面只有一个交点.

解②: 设通过直线 L 的抛物面 Σ 的切平面为

$$4y - 8z - 9 + \lambda(x - y - 1) = 0, \text{ 即 } \lambda x + (4 - \lambda)y - 8z - \lambda - 9 = 0.$$

$$\text{联立得方程组: } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z = 0, \\ \lambda x + (4 - \lambda)y - 8z - \lambda - 9 = 0, \end{cases}$$

$$\text{消去 } z, \text{ 配方得: } \left(x - \frac{\lambda}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{4 - \lambda}{8}\right)^2 = \frac{1}{32}(\lambda^2 - 12\lambda - 64),$$

因为方程组只有唯一解, 所以 $\lambda^2 - 12\lambda - 64 = 0$, 解得 $\lambda_1 = 16, \lambda_2 = -4$.

所以, 所求的切平面方程是 $16x - 12y - 8z - 25 = 0$ 和 $4x - 8y + 8z + 5 = 0$.

解②: 设通过直线 L 的抛物面 Σ 的切平面为

$$x - y - 1 + \lambda(4y - 8z - 9) = 0, \text{ 即 } x + (4\lambda - 1)y - 8\lambda z - 9\lambda - 1 = 0.$$

$$\text{联立得方程组: } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z = 0, \\ x + (4\lambda - 1)y - 8\lambda z - 9\lambda - 1 = 0, \end{cases}$$

$$\text{消去 } z, \text{ 配方得: } \left(x - \frac{1}{8\lambda}\right)^2 + \left(y - \frac{4\lambda - 1}{8\lambda}\right)^2 = \frac{1}{32\lambda^2}(1 - 12\lambda - 64\lambda^2),$$

因为方程组只有唯一解, 所以 $1 - 12\lambda - 64\lambda^2 = 0$, 解得 $\lambda_1 = \frac{1}{16}, \lambda_2 = -\frac{1}{4}$.

所以所求的切平面方程是 $16x - 12y - 8z - 25 = 0$ 和 $4x - 8y + 8z + 5 = 0$.

十二、求函数 $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3\ln z$ 在部分球面 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) 上的最大值, 并利用此结果证明: 当 $a > 0, b > 0, c > 0$ 时, 有

$$abc^3 \leq 27 \left(\frac{a + b + c}{5} \right)^5. \quad (8 \text{ 分})$$

解: 作拉格朗日函数 $F(x, y, z, \lambda) = \ln x + \ln y + 3\ln z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 5r^2)$, 由之得

$$\text{方程组: } \begin{cases} F_x = \frac{1}{x} + 2\lambda x = 0, \\ F_y = \frac{1}{y} + 2\lambda y = 0, \\ F_z = \frac{3}{z} + 2\lambda z = 0, \\ F_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 5r^2 = 0 \end{cases}, \text{ 由前三个方程得 } x = y, z = \sqrt{3}x, \text{ 将其代入第}$$

四个方程解得 $x = y = r, z = \sqrt{3}r$. 所以当 $x = y = r, z = \sqrt{3}r$ 时, $f(x, y, z)$ 在 Σ 上取最大值, 最大值为 $\ln(\sqrt{27}r^5)$.

又由上可知, 对 $\forall (x, y, z) \in \Sigma$, 恒有 $\ln(xyz^3) = \ln x + \ln y + 3\ln z \leq \ln(\sqrt{27}r^5)$,

即得 $xyz^3 \leq \sqrt{27}r^5$. 因为 $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$, 所以 $r = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{5}}$.

于是有 $xyz^3 \leq \sqrt{27} \left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{5}} \right)^5$, 将不等式两边平方得

$$x^2 y^2 (z^2)^3 \leq 27 \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{5} \right)^5.$$

所以对 $a > 0, b > 0, c > 0$, 令 $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c}$, 则 $abc^3 \leq 27 \left(\frac{a + b + c}{5} \right)^5$.