



厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：(理工类 A 卷) 考试日期 2021.01.05

一、求下列的不定积分（每小题 6 分，共 18 分）：

1. $\int \frac{x^2}{1-x^6} dx;$

得 分

评阅人

2. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx;$

3. $\int x \cdot \arctan x dx .$

二、求下列的定积分（每小题 7 分，共 14 分）：

1. $\int_{-2}^2 \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+9}} dx;$

得 分	
评阅人	

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x dx。$

三、（8 分）求反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{x-1}} dx。$

得 分	
评阅人	

四、（8 分）设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\int_1^{y^3} e^{-t^2} dt + \int_x^0 \cos^6(x-t) dt = 0$ 所

确定，求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$ 。

得 分	
评阅人	

五、（12 分）已知标准正态分布密度函数为 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$,

- (1) 求该函数的单调区间、极值、最值；
- (2) 判定该函数图形的凹凸性，并求其拐点。

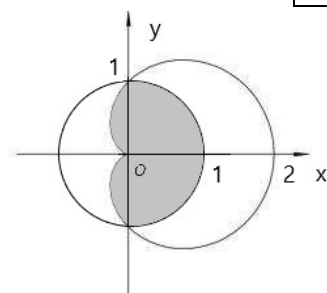
得 分	
评阅人	

六、（8 分）求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ 的全长 s 。

得 分	
评阅人	

七、（8 分）求心形线 $\rho = 1 + \cos \theta$ 所围成的平面图形与圆 $\rho = 1$ 所围成平面图形之间重叠部分的面积 A 。

得 分	
评阅人	



八、（8 分）求由圆 $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ 所围成的平面图形绕 x 轴一周所形成的旋转体的体积 V 。

得 分	
评阅人	

九、（8 分）设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，证明 Cauchy-Schwartz 不等式：

$$\left(\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) \, dx \cdot \int_a^b g^2(x) \, dx \circ$$

得 分	
评阅人	

十、（8 分）已知对于任意的 $t > 0$ ，反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$ 都是收敛的。现设 $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$ ， $t > 0$ ，称之为 Gamma 函数。

得 分	
评阅人	

(1) 证明对任意的 $t > 0$ ，成立递推公式： $\Gamma(t+1) = t \Gamma(t)$ ；

(2) 试计算反常积分 $\int_0^1 x^2 \cdot (\ln x)^{10} dx$ 。