厦门大学《概率统计I》课程试卷

______学院_____系_____年级_____专业

主考教师: _____ 试卷类型:(A 卷)

1.

分数	阅卷人

(15分) 某地区居民的肝癌发病率为0.0004，先用甲胎蛋白法进行普查。已知化验结果存在错误，患有肝癌的人其化验结果99%呈阳性，而没患肝癌的人其化验结果99.9%呈阴性。

(i) 现某人的检查结果呈阳性，问他真的患肝癌的概率是多少？

(ii) 如果再次检查结果仍然呈阳性，问他真的患患肝癌的概率是多少？

A表示检查结果阳性，B表示真的患肝癌.

(i) $P(B)=0.0004$, $P(A|B)=99\%$, $P(A|\bar{B})=0.1\%$.

根据Bayes公式

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})}=\frac{99\%\times 0.0004}{99\%\times 0.0004+0.1\%\times 0.9996}$$

$$=28.37\%$$

(ii) $P(B)=0.2837$

根据Bayes公式

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})}=\frac{99\%\times 0.2837}{99\%\times 0.2837+0.1\%\times(1-0.2837)}$$

$$=99.75\%$$

2

分数	阅卷人

(10分) 投掷骰子n次，所得的n个点数中的最小值记为X，最大值记为Y，求X与Y的概率分布。

X. Y的所有可能取值为 1, 2, ⋯ 6.

$$P\{X \geq k\} = \frac{(6-k+1)^n}{6^n} \quad k=1,2\cdots 6$$

~~$P\{Y \leq k\} =$~~

因此 $P\{X=k\} = P\{X \geq k\} - P\{X \geq k+1\}$

$$= \frac{(6-k+1)^n}{6^n} - \frac{(6-k)^n}{6^n}$$

$$P\{Y \leq k\} = \frac{k^n}{6^n} \quad k=1,2\cdots 6$$

因此, $P\{Y=k\} = P\{Y \leq k\} - P\{Y \leq k-1\}$

$$= \frac{k^n}{6^n} - \frac{(k-1)^n}{6^n}$$

3

分数	阅卷人

(15分) 假设随机变量X为标准正态分布，

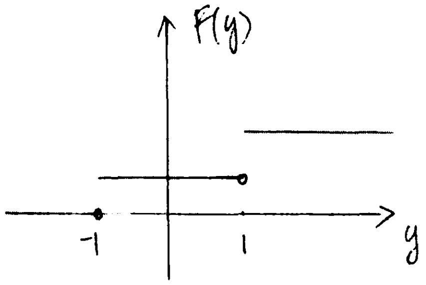
（1）求随机变量$Y=g(X)$的概率分布，并且画出Y的分布函数图像，其中$g(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0.\\ -1 & x<0.\end{cases}$

（2）求随机变量$Z=|X|$的概率密度.

(1). $P\{Y=1\}=P\{X\geq 0\}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{2}$

$P\{Y=-1\}=P\{X<0\}=\frac{1}{2}$

Y的分布函数 $F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<-1\\ \frac{1}{2} & -1\leq y<1\\ 1 & y\geq 1\end{cases}$



当$z>0$时，

(2) $F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{|X|\leq z\}=P\{-z\leq X\leq z\}$

$=\int_{-z}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{z}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

当$z\leq 0$时，

$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=0.$

因此 $f_Z(z)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} & z>0\\ 0 & z\leq 0\end{cases}$

4

分数	阅卷人

(20分) 设(X,Y)在由曲线$y=x^2/2$和$y=x$所围成的有限区域内均匀分布。

(1)求(X,Y)的联合密度函数$f(x,y)$

(2)求X，Y的边缘密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$

(3)求给定X条件下，Y的条件密度函数$f_{Y|X}(y|x)$

(1) 设$D=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{2}<y<x,\ 0<x<2\}$

$$S(D)=\iint_D 1\,dxdy=\int_0^2\int_{\frac{x^2}{2}}^{x} 1\,dy\,dx=\int_0^2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{2}{3}.$$

(X,Y)的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2} & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D.\end{cases}$

(2) 当$0<x<2$时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{\frac{x^2}{2}}^{x}\frac{3}{2}dy=\frac{3}{2}(x-x^2/2)$$

因此，$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}\right) & 0<x<2\\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$

当$0<y<2$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{y}^{\sqrt{2y}}\frac{3}{2}dx=\frac{3}{2}(\sqrt{2y}-y)$$

因此，$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}(\sqrt{2y}-y) & 0<y<2\\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$

(3) 当$0<x<2$时，

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{x-\frac{x^2}{2}} & \frac{x^2}{2}<y<x\\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$$

5

分数	阅卷人

(10分) 设(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y), & 0\le x\le \frac{\pi}{2},\ 0\le y\le \frac{\pi}{2}\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

求协方差$Cov(X,Y)$以及ρ_{XY}.

$$EX=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{1}{2}\sin(x+y)\,dx\,dy=\frac{\pi}{4}$$

同样 $EY=\frac{\pi}{4}$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\sin(x+y)\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-1\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(\sin x-\cos x)\,dx$$

$$=-\frac{(\pi-4)^2}{16}$$

又因为 $EX^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,\frac{1}{2}\sin(x+y)\,dx\,dy=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-2$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{\pi^2+8\pi-32}{16}$$

同样 $DY=\frac{\pi^2+8\pi-32}{16}$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{(\pi-4)^2}{\pi^2-8\pi+32}$$

6

分数	阅卷人

(10分)假设X、Y是相互独立的随机变量，都服从参数为1的指数分布，求$V=X/Y$的~~分布~~密度函数.

由题意，X. Y联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0,\ y>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

当$v>0$时,

$$P\{V\le v\}=P\{X/Y\le v\}=\iint\limits_{\substack{x/y\le v \\ x>0,y>0}} e^{-(x+y)}\,dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{vy} e^{-(x+y)}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-y}(1-e^{-vy})\,dy$$

$$=1-\frac{1}{v+1}$$

因此 $f_V(v)=\begin{cases} \dfrac{1}{(1+v)^2} & v>0 \\ 0 & v\le 0 \end{cases}$

7

分数	阅卷人

(10分) 假设一部手机在$[0,t]$时间内收到的短信数目服从参数为λt的泊松分布，每条短信是否为广告与其到达时间独立，也与其他短信是否为广告独立。假设每条短信是广告短信的概率为p，计算$[0,t]$时间内收到广告短信数目的概率分布。

设$[0,t]$时间内收到短信数为Y，其中广告短信数为X.

$$P\{X=k \mid Y=n\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad 0 \le k \le n$$

因此，由全概率公式

$$P\{X=k\} = \sum_{n=k}^{\infty} P\{Y=n\} P\{X=k \mid Y=n\}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t(1-p))^{n-k}}{k!\,(n-k)!} e^{-\lambda t} (\lambda t p)^k$$

$$= \frac{(\lambda t p)^k}{k!} e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t(1-p))^j}{j!}$$

$$= \frac{(\lambda t p)^k}{k!} e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t(1-p)}$$

$$= \frac{(\lambda t p)^k}{k!} e^{-\lambda t p}$$

8.

分数	阅卷人

(10分) 在长度为a的线段上随机投点，得到A，B，计算所得AB线段长度的数学期望。

设A.B两点的坐标分别为X.Y.

则X.Y都服从$[0,a]$上的均匀分布，并且X.Y相互独立.

因此

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{a^2} & 0\le x\le a,\ 0\le y\le a.\\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$$

$$E|X-Y|=\int_0^a\int_0^a|x-y|\frac{1}{a^2}dxdy$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\int_0^a\int_0^x(x-y)dy\,dx+\int_0^a\int_x^a(y-x)dy\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^a\left(x^2-ax+\frac{a^2}{2}\right)dx$$

$$=\frac{a}{3}.$$