厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷

__________学院__________系__________年级__________专业

试卷类型:（理工类 A 卷）　　　　考试时间:2021.11.7

得　分	
评阅人	

一、填空题:（每小题 4 分，共 24 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2n-1}{2n})^{4n}=$____________________。

2. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=$____________________。

3. 设 $y=\ln|\csc x-\cot x|$，则 $\mathrm{d}y=$____________________。

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f'(1)=f(1)=2$，$f'(2)=3$，则 $y=f(f(x))$ 在 $x=1$ 处的导数为____________________。

5. 设 $y=x\cdot\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=$____________________。

6. 设 $f(x)=(x-1)^3(x-2)(x-3)$，则方程 $f'(x)=0$ 有__________个不相等的实数根。

二、求下列函数极限（每小题 8 分，共 24 分）:

得　分	
评阅人	

1. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$；

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}$；

3. $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]$。

三、（本题 8 分）设方程 $y-x-\frac{1}{2}\sin y=0$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，求此隐函数的一阶导数和二阶导数。

得　分	
评阅人	

四、（本题 10 分）已知笛卡尔叶形线的参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}，其中 a>0 为常数。$$

得　分	
评阅人	

求由此参数方程所确定的函数 $y=y(x)$ 在 $t=1$ 处的一阶导数和二阶导数。

五、（本题 10 分）设数列$\{x_n\}$满足：$x_1=\frac{1}{2}$， $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$。证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其极限值。

得　分	
评阅人	

六、（本题 8 分）已知函数$f(x)$在$x=0$处连续，且满足

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2}\right)=2,$$

证明$f(x)$在$x=0$处可导，并求$f'(0)$。

得　分	
评阅人	

七、（本题 8 分）设函数 $f(x)=(x^2+x+1)\cos(2x)$，求 $f^{(8)}(0)$。

得　分	
评阅人	

八、（本题 8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且有 $f(0)=0$， $f(1)=1$， $f(2)=-1$。证明：至少存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$。

得　分	
评阅人	