2016-2017 学年第二学期《微积分 I-2》期末试卷

一、讨论下列级数的敛散性. 如果收敛，说明是条件收敛，还是绝对收敛？（每小题 4 分，共 12 分）

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$；　　2. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}+n\sin\frac{1}{n}\right)$；　　3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2[1+2(-1)^n]^n}{6^n}$.

二、计算下列各题：（每小题 6 分，共 12 分）

1. $\iint_D |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，平面区域 $D:\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\},a>0$.

2. $\iiint_\Omega x^2+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为 $z=1$，$z=4$ 和 $z=y^2+x^2$ 所围区域.

三、计算下列各题：（每小题 6 分，共 12 分）

(1) $\iiint_\Omega e^{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω：$x^2+y^2+z^2\le 1$.

(2) $\int_\Gamma z^2\mathrm{d}s$，曲线 Γ 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $y=x$ 的交线.

四、(1)确定常数 a,b, 使得 $\frac{ax+y}{x^2+y^2}dx-\frac{x-y+b}{x^2+y^2}dy$ 为某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分;

(2)求该二元函数 $u(x,y)$ 。（8 分）

五、用格林公式计算曲线积分 $I=\int_L(x^2-2y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2y)\mathrm{d}y$，其中 L 是点 A(0,0)到点 B(2,0)的上半圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$.（8 分）

解: 设从 A(0,0)到 B(2,0)的有向线段为 l.则 L^-+l 为上半球面 $D: y\le\sqrt{2x-x^2}$ 的正向边界，由格林公式　　------(2 分)

$$I=-\int_{L^-}(x^2-2y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2y)\mathrm{d}y$$

$$=-\left[\int_{L^-+l}(x^2-2y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2y)\mathrm{d}y-\int_l(x^2-2y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2y)\mathrm{d}y\right]$$

$$=-\left(\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^2x^2\mathrm{d}x\right)$$　　--------(6 分)

$$=-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{3}-\frac{\pi}{2}.$$　　--------(8 分)

六、将函数$\frac{1}{x^2-1}$展开成$(x-3)$的幂级数。（8 分）

七、设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,利用 Gauss 公式计算曲面积分

$$\oiint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy,$$

其中Σ为任意不经过原点的闭曲面,取外侧。(10 分)

八、设Σ是四面体$x+y+z\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$的表面，计算$I=\oiint_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S$.（10 分）

九、求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{(n+1)!}$的收敛域以及和函数$S(x)$，并由此求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)4^n}{(n+1)!}$（10 分）

十、将函数$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in[0,\frac{\pi}{2}) \\ 0, & x\in[\frac{\pi}{2},\pi]\end{cases}$在$[0,\pi]$上展开成正弦级数，并求该级数在$[0,\pi]$上的和函数$S(x)$.（10 分）