厦门大学《线性代数》课程试卷

信息 学院________系 2022 年级________专业

学年学期：222301 主考教师：线性代数教学组 A 卷（√）B 卷

注：A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，|A|表示方阵 A 的行列式，R(A)表示矩阵 A 的秩

一、单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ l & m & n \end{vmatrix} = x \neq 0$，则 $D = \begin{vmatrix} 2a & e+l & 3l \\ 2b & f+m & 3m \\ 2c & g+n & 3n \end{vmatrix} =$（ ）

(A) 2x (B) 6x (C) 0 (D) 216x

2.设$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，则$|A^6| =$ ( )

(A) 4^6 (B) 5^6 (C) 2^6 (D) 6^6

3. 设A，B都是 n 阶非零矩阵，且$AB = 0$，则A和B的秩(　　)

(A) 必有一个等于零　　(B) 都小于 n

(C)一个小于 n，一个等于 n　　(D) 都等于 n

4. 若$A = E^2(1,2)E\big(2,3(1)\big)$其中$\boldsymbol{E}(1,2)$，$E\big(2,3(1)\big)$为 4 阶初等矩阵，则$\boldsymbol{A}^{-1}$等于(　　)

（A）$E\big(2,3(1)\big)$　（B）$E\big(2,3(-1)\big)$　（C）$\boldsymbol{E}(1,2)$　（D）$\boldsymbol{E}$

5.在函数$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -2x & -x & 4x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$中，$x^3$的系数是（　）

（A）-2　　(B) 2　　(C) -4　　(D) 4

6. 设行列式 $A=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&4\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}3&5\\-3&-4\end{vmatrix}$，则矩阵$\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}$的行列式为　（ ）

(A) 6　　(B) -6　　(C) 12　　(D) -12

7.设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量，矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)^T, B=(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)^T$，$P_1=E(1,4), P_2=E(2,3)$，其中$A$可逆，则$B^{-1}$等于（ ）

(A) $A^{-1}P_1P_2$　　(B) $P_1A^{-1}P_2$　　(C) $P_2P_1A^{-1}$　　(D) $P_2A^{-1}P_1$

8. 设A为n阶非零矩阵，E为n阶单位矩阵，若$A^3=O$，则(　　)

（A）$E-A$不可逆，$E+A$不可逆（B）$E-A$不可逆，$E+A$可逆

（C）$E-A$可逆，$E+A$可逆　　(D) $E-A$不可逆，$E+A$不可逆

9. 对于 n 元线性方程组，下述结论正确的是(　　)

(A) 若$Ax=0$只有零解，则$Ax=b$有唯一解

(B) $Ax=0$有非零解当且仅当 $|A|=0$

(C) $Ax=b$有唯一解当且仅当$r(A)=0$

(D) 若$Ax=b$的有两个不同的解，则$Ax=0$有无穷多解

10. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&a&1\\3&-1&1\end{pmatrix}$，B为 3 阶非零矩阵，且$AB=\mathbf{0}$，则$a=$( )

(A) -1　　　(B)1　　　(C) 2　　　(D) -2

二、填空题（每空格 3 分，共 15 分）

1. 设 f(x)=$\begin{vmatrix} 8 & 27 & x^3 & -8 \\ 4 & 9 & x^2 & 4 \\ 2 & 3 & x & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，试求$f(x)$的根_____

2. 设矩阵 A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵B满足$ABA^* = 2BA^* + E$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，$E$是单位矩阵，$|B| =$______

3. 设 A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & -1 \\ 4 & 2 & a \end{pmatrix}$，B≠0 为三阶矩阵，且 BA=0，则 R(B)=______

4. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 均为4维列向量,并有$|A| = |\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3| = 5$，$|B| = |\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3| = -1$，则 $|A + B| =$ ______

5. 已知 R(A)=2，B=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$，则 R($B^T A^T$)=______

三、计算题（共 50 分）

1.设行列式$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a$，$A_{ij}$为$|A|$的代数余子式。

（1）求$A_{11} + A_{12} + A_{13}$

（2）求$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_{ij}$

2. 设 A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & x & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & y & -1 \end{pmatrix}$，R(A)=2，求 x，y 的值。

3. 设矩阵 A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵X满足$A^*X=A^{-1}+2X$，其中$A^*$为A的伴随矩阵，求X。

4.设有线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \end{cases}$，问$\lambda$取何值时，方程组无解、有惟一解和有无穷多组解，在有无穷多组解时，试求出其通解。

5. 已知$A=\begin{bmatrix} B & O \\ D & C \end{bmatrix}$，其中$B$是$r\times r$可逆矩阵，$C$是$s\times s$可逆矩阵，求$A^{-1}$。

四、证明题（每小题 5 分，共 15 分）

1. 证明：R(A⋮AB)=R(A)

2. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $m<n$，证明：齐次线性方程组$(A^TA)x=0$必有非零解

3. 设A是n阶非零矩阵，A^*是其伴随矩阵，且满足$a_{i,j}=A_{i,j}$，证明A可逆。