厦门大学《线性代数I》期末试卷

________ 学院 ________ 系 ________ 年级 ________ 专业

主考教师：________ 试卷类型：（A卷）

分数	阅卷人

一、（20）填空题

1. 所有与$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$可交换的矩阵是$\underline{\begin{bmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{bmatrix}\ a,b,c\in R}$；

2. 求行列式$\begin{vmatrix}5&-1&3\\2&2&2\\196&203&199\end{vmatrix}=$____8____；

3. 向量组$\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}$的秩是____2____；

4. 向量$\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$在基$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$下的坐标是$\underline{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-1\right)}$；

5. 二次型$x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$正定的充要条件是$\underline{-\frac{4}{5}<t<0}$。

分数	阅卷人

二、（15）选择题

1. A是对称矩阵，B是反称矩阵，则下面是反称矩阵的是____3____；

   (1) AB^2A (2) $AB-BA$ (3) ABA (4) BA^2B

2. A 是$n(\geq 2)$阶方阵，则$(A^*)^*=$____4____；

   (1) A (2) $|A|A^{-1}$ (3) $|A|^{n-1}A^{-1}$ (4) $|A|^{n-2}A$

3. 设α,β,γ是线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，则____3____不是它的基础解系；

   (1) $\alpha,2\beta,3\gamma$ (2) $\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\alpha$ (3) $\alpha-\beta,\beta-\gamma,\gamma-\alpha$ (4) $\alpha,\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma$

4. 不同的单位向量α,β 的内积满足____4____；

   (1) >0 (2) <0 (3) >1 (4) <1

5. $A=\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}6&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则$A$与$B$____2____。

(1) 相似且合同　(2) 相似但不合同　(3) 不相似但合同　(4) 不相似也不合同

分数	阅卷人

三、（10）求方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0\\4x_1+3x_2+2x_3+2x_4-2x_5=1\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2\end{cases}$的通解

解：

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&0\\4&3&2&2&-2&1\\5&4&3&3&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad(5')$$

令$x_3=c_1,x_4=c_2,x_5=c_3$，得通解

$$x=\begin{bmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{bmatrix},\quad c_i\in R\qquad(5')$$

分数	阅卷人

四、（15）求向量组$a_1=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\-1\end{bmatrix}$，$a_2=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\0\end{bmatrix}$，$a_3=\begin{bmatrix}1\\3\\4\\-2\end{bmatrix}$，$a_4=\begin{bmatrix}4\\-3\\1\\1\end{bmatrix}$的秩和一个最大线性无关组，并用其线性表示出其他的向量

解：

$$\begin{bmatrix}2&3&1&4\\1&-1&3&-3\\3&2&4&1\\-1&0&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad(5')$$

因此向量组的秩是2,　(3')

a_1,a_2是最大线性无关组,　(3')

且

$$a_3=2a_1-a_2,a_4=-a_1+2a_2.\qquad(4')$$

分数	阅卷人

五、（15）证明$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$和$\beta_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$, $\beta_2=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$, $\beta_3=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$都是空间$R^3$的基，然后求所有在两组基下坐标相同的向量

解：由于

$$\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&0&2\\1&1&1\end{vmatrix}=-4\neq 0,\quad \begin{vmatrix}2&0&-2\\1&1&1\\0&2&1\end{vmatrix}=-6\neq 0 \qquad (4')$$

所以向量组$\{\alpha_i\}$和$\{\beta_i\}$的秩都是3，因此是R^3的基。 (2')

设γ在两组基下坐标同为x_1,x_2,x_3，则有

$$\gamma=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3, \qquad (2')$$

即$x_1(\alpha_1-\beta_1)+x_2(\alpha_2-\beta_2)+x_3(\alpha_3-\beta_3)=0$，得线性方程组

$$x_1\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=0 \qquad (3')$$

解线性方程组

$$\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得通解为

$$x=\begin{bmatrix}c\\c\\0\end{bmatrix},\quad c\in R \qquad (2')$$

因此

$$\gamma=c\alpha_1+c\alpha_2=c\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix},\quad c\in R \qquad (2')$$

分数	阅卷人

六、（15）求正交变量替换$X=PY$使二次型$f=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 化为标准形

解：二次型矩阵为$A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{bmatrix}$ (1')

由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\-2&2-\lambda&-2\\0&-2&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-5)$$

得特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=5.$ (2')

对$\lambda_1=-1$，解方程组$(A+E)x=0$得基础解系$\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$，单位化得$\beta_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ (3')

对$\lambda_2=2$，解方程组$(A-2E)x=0$得基础解系$\alpha_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}$，单位化得$\beta_2=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$ (3')

对$\lambda_3=5$，解方程组$(A-5E)x=0$得基础解系$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$，单位化得$\beta_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$ (3')

令$P=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$，则做正交变量替换$X=PY$， (1')

二次型化为标准形$f=-y_1^2+2y_2^2+5y_3^2.$ (2')

分数	阅卷人

七、（10）证明：

(1) 秩等于r的实对称矩阵可以写成r个秩等于1的对称矩阵之和；

(2) 二阶矩阵A满足$A^k=O(k\geq 3)$, 则$A^2=O$。

证：(1)设实对称矩阵A的秩为r，存在正交矩阵P满足$P^TAP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，其中$\lambda_i$是$A$的特征值。由于$R(A)=r$，则可设$\lambda_i\neq 0,i\leq r$, $\lambda_i=0,i>r$。于是有

$$P^TAP=A_1+\cdots+A_r=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}\ddots&&&\\&\lambda_r&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{bmatrix}$$

因此令$B_i=PA_iP^T$，则B_i是秩为1的实对称矩阵，且$A=B_1+\cdots+B_r.$ (5')

(2)由于$A^k=O$，得$|A|=0$，因此$R(A)<2$。若$R(A)=0$，则$A=O$，显然成立$A^2=O$；若$R(A)=1$，则两行向量成比例，于是存在向量α,β使得$A=\alpha\beta^T$。由

$$A^k=(\alpha\beta^T)^k=(\beta^T\alpha)^{k-1}A=O$$

得$\beta^T\alpha=0$，于是$A^2=(\beta^T\alpha)A=O$ (5')