厦门大学《微积分 I-2》课程期中试卷

________学院________系________年级________专业

试卷类型：（理工类 A 卷）考试时间：2023 年 4 月 16 日

一、选择题（**每小题 4 分，共 20 分**）

1. 欧拉方程 $x^3y'''+3x^2y''-2xy'+2y=x^2$ 的阶数为（　C　）。

（A）1；　（B）2；　（C）3；　（D）4。

2. 以点 $A(1,1,1)$、$B(3,2,0)$、$C(2,0,3)$、$D(2,3,2)$ 为顶点的四面体 $ABCD$ 的体积为（　A　）。

（A）2；　（B）4；　（C）6；　（D）12。

3. $f(x,y)=\begin{cases}1 & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（　B　）。

（A）连续；　（B）$f_x(0,0)$ 存在；　（C）$f_y(0,0)$ 存在；　（D）可微。

4. $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 存在且连续是 $f(x,y)$ 在该点可微的（　B　）。

（A）必要非充分条件；　（B）充分非必要条件；　（C）充要条件；　（D）两者无关。

5. 下列平面中，与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 在点 $(-1,-2,3)$ 的切平面平行是（　D　）。

（A）$x-3y+z=1$；　（B）$x+z=1$；　（C）$3x-2y+3z=1$；　（D）$3x+2y-3z=1$。

二、填空题（**每小题 4 分，共 20 分**）

1. 点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z=10$ 的距离为___1___。

2. 设二元函数 $z=x^y$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(\mathrm{e},1)}=$ __$\mathrm{d}x+\mathrm{e}\,\mathrm{d}y$__。

3. 已知 $y=x^k(x+1)\mathrm{e}^{3x}$ 是微分方程 $y''-6y'+9y=(6x+2)\mathrm{e}^{3x}$ 的一个特解，其中 k 为常数，则 $k=$___2___。

4. 曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ z^2=2x\end{cases}$ 在点 $(1,1,\sqrt{2})$ 的切线的对称式方程为 __$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$__。

5. 由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $x+y+z=1$ 所围成的空间有界区域在 xoy 坐标面上的投影为 $\{(x,y,z)\in\mathrm{R}^3\mid \underline{x^2+y^2+x+y\leq 1,\ z=0}\}$。

三、求解下列微分方程：（**每小题 8 分，共 24 分**）

1. 求微分方程 $(x^2+y^2)\mathrm{d}x - xy\mathrm{d}y = 0$ 的通解；

解：原微分方程变形为 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$，令 $u = \frac{y}{x}$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入得

$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u} + u$，整理得 $u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$，从而 $\int u\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$，进一步有

$u^2 = 2\ln|x| + C$，因此原微分方程的通解为 $y^2 = 2x^2\ln|x| + Cx^2$。

2. 求满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 1$ 的微分方程 $yy'' + y'^2 - 2yy' = 0$ 的特解；

解：这是二阶可降阶微分方程。 令 $P(y) = y'(x)$，则原微分方程转化为

$yP\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} + P^2 = 2yP$，整理得 $P = 0$（舍去）或者 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{y}P = 2$，后者是一阶线性微分方程，其通

解为 $P = \mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}(C_1 + \int 2\,\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y) = \frac{1}{y}[C_1 + y^2] = \frac{C_1}{y} + y$。因为

$P(1) = P(y(0)) = y'(0) = 1$，得 $C_1 = 0$ 且 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P = y$，解得 $y = C_2\mathrm{e}^x$， 又 $y(0) = 1$，得 $C_2 = 1$，因此满足初始条件的特解为 $y = \mathrm{e}^x$。

3. 求微分方程 $y'' + 4y = 3\cos x$ 的通解。

解：这是二阶非齐次常系数线性微分方程。其特征方程为 $r^2 + 4 = 0$，解得特征根为 $r_{1,2} = \pm 2i$。又因为 $\lambda + i\omega = i$ 不是特征根，因此可设特解为 $y* = a\cos x + b\sin x$，代入微分方程求得 $a = 1,\ b = 0$，从而微分方程的通解为 $y = \cos x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$。

四、（本题 9 分） 求过点 $(-1,0,6)$，且平行于平面 $3x-2y+z=8$，又与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交的直线的方程。

解：设所求直线与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 的交点为 $(-1+t, 3+t, 2t)$，则该直线的一个切向量为 $(t, 3+t, 2t-6)$。又因为该直线平行于平面 $3x-2y+z=8$，所以

$(t, 3+t, 2t-6)\cdot(3,-2,1) = 0$，即 $3t - 2(3+t) + (2t-6) = 0$，解得 $t = 4$，因此该直线的一个切向量为 $(4,7,2)$，故所求直线的方程为 $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z-6}{2}$。

五、（本题 9 分）验证$u(x,t)=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$为一维波动方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$的解，其中$a$为常数，$\varphi$和$\psi$具有连续的二阶导数。

解：$\dfrac{\partial u}{\partial t}=a\varphi'(x+at)-a\psi'(x-at)$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\varphi''(x+at)+a^2\psi''(x-at)$，

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+at)+\psi'(x-at)$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+at)+\psi''(x-at)$。

因此$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\varphi''(x+at)+a^2\psi''(x-at)-a^2(\varphi''(x+at)+\psi''(x-at))=0$。

六、（本题 9 分）设方程$\mathrm{e}^z-xyz=0$确定了二元函数$z=z(x,y)$，试求二阶偏导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$在点$(-1,\dfrac{1}{\mathrm{e}})$处的值。

解法一：令$\mathrm{F}(x,y,z)=\mathrm{e}^z-xyz$，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=-\dfrac{-yz}{\mathrm{e}^z-xy}=\dfrac{yz}{\mathrm{e}^z-xy}$，进一步有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y(\mathrm{e}^z-xy)\dfrac{\partial z}{\partial x}-yz(\mathrm{e}^z\dfrac{\partial z}{\partial x}-y)}{(\mathrm{e}^z-xy)^2}=\frac{2y^2z\mathrm{e}^z-y^2z^2\mathrm{e}^z-2xy^3z}{(\mathrm{e}^z-xy)^3}。$$

注意到当$x=-1$，$y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时，$z=-1$，因此$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-1,\frac{1}{\mathrm{e}})}=\dfrac{\dfrac{-2}{\mathrm{e}^3}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}-\dfrac{2}{\mathrm{e}^3}}{(\dfrac{1}{\mathrm{e}}+\dfrac{1}{\mathrm{e}})^3}=-\dfrac{5}{8}$。

解法二：方程两边对x求导，则$\mathrm{e}^z\dfrac{\partial z}{\partial x}-yz-xy\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，解得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz}{\mathrm{e}^z-xy}=\dfrac{yz}{xyz-xy}=\dfrac{1}{x}\dfrac{z}{z-1}$，

进一步地有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{z}{z-1}-\frac{1}{x}\frac{1}{(z-1)^2}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}\frac{z}{z-1}-\frac{1}{x^2}\frac{z}{(z-1)^3}=-\frac{z}{x^2(z-1)}[1+\frac{1}{(z-1)^2}]。$$

注意到当$x=-1$，$y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时，$z=-1$，因此$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-1,\frac{1}{\mathrm{e}})}=-\dfrac{-1}{-2}\cdot(1+\dfrac{1}{(-2)^2})=-\dfrac{5}{8}$。

七、（本题 9 分）设定义域为$D=\{(u,v)\in \mathrm{R}^2 \mid u>0\}$的二元函数$f(u,v)$有连续的偏导数且$f_u(1,0)=f_v(1,0)=1$，又 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 由方程组$\begin{cases} x=uv \\ y=u^2-v^2 \end{cases}$所确定，求$z=f(u(x,y),v(x,y))$的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}$。

解：令$F(x,y,u,v)=x-uv$，$G(x,y,u,v)=y-u^2+v^2$，则

$$F_x=1，\ F_y=0，\ F_u=-v，\ F_v=-u；$$

$$G_x=0，\ G_y=1，\ G_u=2u，\ G_v=-2v。$$

故$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\dfrac{\begin{vmatrix}1 & -u \\ 0 & -2v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-v & -u \\ 2u & -2v\end{vmatrix}}=\dfrac{v}{u^2+v^2}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\dfrac{\begin{vmatrix}-v & 1 \\ 2u & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-v & -u \\ 2u & -2v\end{vmatrix}}=\dfrac{u}{u^2+v^2}$。

从而$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{vf_u+uf_v}{u^2+v^2}$。注意到当$x=0$，$y=1$时，$u=1$，$v=0$，因此$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}=\dfrac{0\cdot f_u(1,0)+1\cdot f_v(1,0)}{1^2+0^2}=1$。