厦门大学《线性代数》课程试卷

信息 学院________系 2021 年级________专业

学年学期：212201 主考教师：线性代数教学组 A 卷（√）B 卷

注：$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$表示矩阵 A 的转置矩阵，$\mathbf{A}^{*}$表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，|A|表示方阵 A 的行列式，R(A)表示矩阵 A 的秩，O表示全 0 矩阵

一、单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 设 n 阶矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则|A|= (　　)。

(A) $(-1)^n n$　　(B) $(-1)^{n-1} n$　　(C) $(-1)^{n-1}(n-1)$　　(D) $(-1)^n(n-1)$

2. 齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$ 的系数矩阵记为 A，若存在三阶矩阵 $B\neq O$使得 $AB=O$，则 (　　)。

(A) $\lambda=-2$且$|B|=0$　　(B) $\lambda=-2$且$|B|\neq 0$

(C) $\lambda=1$且$|B|=0$　　(D) $\lambda=1$且$|B|\neq 0$

3. 已知 A 是三阶矩阵，且$(A-E)^{-1}=A^2+A+E$，则$|A|=$ (　　)。

(A) 0　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 8

4. 设 A、B 均为 2 阶矩阵，A^*、B^*分别为A、B的伴随矩阵，若$|A|=2$，$|B|=3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$的伴随矩阵为 (　　)。

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

5. 设 A 为$m\times n$矩阵，B 为$n\times l$矩阵，$B\neq O$，如果有 AB=O，则矩阵 A 的秩为(　　)。

(A) $R(\mathrm{A})=n$ (B) $R(\mathrm{A})<n$ (C) 无法判断 (D) $R(\mathrm{A})<m$

6. 下列结论错误的是( )。

(A) 设$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 2 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$，则$|\mathrm{A}^5-4\mathrm{A}^3|=0$

(B) 若$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$，则$\mathrm{A}^*=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

(C) 设$\mathrm{A}_{3\times3},\mathrm{B}_{4\times4}$，且$|\mathrm{A}|=1,|\mathrm{B}|=-2$，则$\big||\mathrm{B}|\mathrm{A}\big|=-8$

(D) 矩阵$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$的逆矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

7. 已知 A 是 n 阶方阵，E 是 n 阶单位矩阵，且$A^3=E$，则$\begin{pmatrix}O & -\mathrm{E}\\ \mathrm{A} & O\end{pmatrix}^{98}=$( )。

(A) $\begin{pmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{E}\\ O & \mathrm{A}\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}\mathrm{A} & O\\ \mathrm{E} & \mathrm{A}\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}\mathrm{A} & O\\ O & \mathrm{A}\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}-\mathrm{A} & O\\ O & -\mathrm{A}\end{pmatrix}$

8. 设$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$，其中 a、b、c 为实数，则下列选项中不能使$A^{100}=E$的是（ ）。

(A) a=1,b=2,c=-1

(B) a=1,b=-2,c=-1

(C) a=-1,b=2,c=1

(D) a=-1,b=2,c=-1

二、填空题（每空格 3 分，共 15 分）

1. 已知 $R(\mathbf{A}_{3\times3})=2$，$R(\mathbf{AB})=1$，$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -a\\ -1 & -2 & 1\\ 2 & 6 & -1\end{pmatrix}$，则 a=___________。

2. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}$，$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$，$\mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，求

$(\mathbf{P}_1)^{2021}\mathbf{A}(\mathbf{P}_2)^{2021}=$___________。

3. 设$\mathbf{C}=\mathrm{B}_{n\times m}\mathrm{A}_{m\times n}$，且$n>m$，则$|\mathrm{C}|=$___________。

4. 设 A 为 4 阶方阵，$|\mathrm{A}|=3,\mathrm{A}^*$为A的伴随矩阵，若将矩阵 A 的第 3 行与第 4 行交换得到 B，则$|\mathrm{BA}^*|=$ ___________。

5. 设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$，$|A|=2$，A_{ij} 表示 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式（$i,j=1,2,3$），则

$(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23})^2+(a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23})^2+(a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23})^2=$

_______。

三、计算题（共 50 分）

1. 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，且满足 $\mathbf{AX}+\mathbf{E}=\mathbf{A}^2+\mathbf{X}$，其中 $\mathbf{E}$ 为 3 阶单位矩阵，求 $\mathbf{X}$。

2. 设 A, B 都是 3 阶矩阵, 其中 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&\mathrm{a}\\1&2&2\end{pmatrix}$，$\mathrm{AB}-\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{E}$, 且 $\mathrm{B}\neq\mathrm{E}$,

$R(\mathrm{A}+\mathrm{B})=3$, 求常数 a 的值。

3. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\x_1+3x_2+6x_3+\quad x_4=3\\3x_1-x_2+ax_3+15x_4=3\\x_1-5x_2-10x_3+12x_4=b\end{cases}$$

a，b 取何值时，方程组无解？有惟一解？有无穷多解时，求出通解。

4. 设五次多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x+1&1&1&1&1\\1&x+1&1&1&1\\1&1&x+1&1&1\\1&1&1&x+1&1\\1&1&1&1&x+1\end{vmatrix}$，求（1）$x^5$ 的系数；（2）x^4 的系数；（3）常数项。

5. 设 $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\mathrm{A}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{pmatrix}$，求 A。

四、证明题（每小题 5 分，共 15 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & & 0 & a^2 & 2a \end{pmatrix}$ 是 n 阶矩阵，试证明$|A| = (n+1)a^n$。

2. 设矩阵 A 和 B 为同阶方阵，$A = A^T$, $B = -B^T$，证明$7AB - 2BA$是对称矩阵的充要条件是$AB + BA = O$。

3. 证明：当$a_1, a_2, \cdots, a_n$互不相等时，方程组无解。

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2 + \cdots + a_1^{n-2}x_{n-1} = a_1^{n-1} \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2 + \cdots + a_2^{n-2}x_{n-1} = a_2^{n-1} \\ \cdots \\ x_1 + a_nx_2 + a_n^2 + \cdots + a_n^{n-2}x_{n-1} = a_n^{n-1} \end{cases}$$