**一、单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）**

1. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ l & m & n \end{vmatrix} = x \neq 0$，则 D = $\begin{vmatrix} 2a & e+l & 3l \\ 2b & f+m & 3m \\ 2c & g+n & 3n \end{vmatrix} =$ (B)

(A) 2x　　(B) 6x　　(C) 0　　(D) 216x

2.设 A = $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，则$|A^6| = (\ )$.　答案：B

(A) $4^6$　　(B) $5^6$　　(C) $2^6$　　(D) $6^6$

3. **设$\mathbf{A}, \mathbf{B}$都是 $n$ 阶非零矩阵，且$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$，则$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的秩(　B　).**

**(A) 必有一个等于零　　(B) 都小于 $n$**

**(C) 一个小于 $n$，一个等于 $n$　　(D) 都等于 $n$**

4. 若 $A = E^2(1,2)E\big(2,3(1)\big)$其中$\boldsymbol{E}(1,2)$，$E\big(2,3(1)\big)$为 4 阶初等矩阵，则$\boldsymbol{A}^{-1}$等于(　B　).

（A）$E\big(2,3(1)\big)$　（B）$E\big(2,3(-1)\big)$　（C）$\boldsymbol{E}(1,2)$　（D）$\boldsymbol{E}$

5.在函数$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -2x & -x & 4x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$中，$x^3$的系数是（A）

（A）-2　(B) 2　(C) -4　(D) 4

6. 设行列式 $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$，$B = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$，则矩阵$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$的行列式为 （B）

(A) 6　(B) $-6$　(C) 12　(D) $-12$

7.设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量，矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)^T, B=(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)^T, P_1=E(1,4), P_2=E(2,3)$，其中 $A$ 可逆，则 $B^{-1}$ 等于（A）

(A) $A^{-1}P_1P_2$ (B) $P_1A^{-1}P_2$ (C) $P_2P_1A^{-1}$ (D) $P_2A^{-1}P_1$

8. 设$A$为$n$阶非零矩阵，$E$为$n$阶单位矩阵，若$A^3=O$，则( C ).

（A）$E-A$不可逆，$E+A$不可逆 （B）$E-A$不可逆，$E+A$可逆

（C）$E-A$可逆，$E+A$可逆 (D) $E-A$不可逆，$E+A$不可逆

9. 对于 $n$ 元线性方程组，下述结论正确的是( D)

(A) 若$Ax=0$ 只有零解，则$Ax=b$有唯一解

(B) $Ax=0$ 有非零解当且仅当 $|A|=0$

(C) $Ax=b$有唯一解当且仅当$r(A)=0$

(D) 若$Ax=b$的有两个不同的解，则$Ax=0$ 有无穷多解

10. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & a & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, B 为 3 阶非零矩阵，且 $AB=\mathbf{0}$，则$a=$ (A).

(A) -1 (B)1 (C) 2 (D) -2

## 二、填空题（每空格 3 分，共 15 分）

1. 设 f(x)=$\begin{vmatrix}8 & 27 & x^3 & -8\\ 4 & 9 & x^2 & 4\\ 2 & 3 & x & -2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$,试求$f(x)$的根______

答案：将这个行列式做 6 次对换后为一个关于 2，3，x，-2 的范德蒙行列式，利用范德蒙行列式的结论可以得到：$f(x)=20(x-2)(x-3)(-2-x)=-20(x-2)(x+2)(x-3)$，于是 $f(x)$ 的根为：2，-2，3

2. 设矩阵 A=$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足$ABA^*=2BA^*+E$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，$E$是单位矩阵，$|B|=$______．答案：1/9

3. 设 A=$\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&a&-1\\4&2&a\end{pmatrix}$，B≠0 为三阶矩阵，且 BA=0，则 R(B)=______

1

4. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 均为 4 维列向量，并有 $|A|=|\alpha_1,\beta_1,\beta_2,\beta_3|=5$，$|B|=|\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3|=-1$，则 $|A+B|=$ 32

5. 已知 R(A)=2,B=$\begin{pmatrix}1&3&7\\3&1&5\\7&5&1\end{pmatrix}$，则 R($B^TA^T$)= ______ 2

**三、计算题（共 50 分）**

1.设行列式$|A|=\begin{vmatrix}2&2&2\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a$，$A_{ij}$为$|A|$的代数余子式。

（1）求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}$

（2）求 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{ij}$

答案：

（1）

由$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a$可得：$2A_{11}+2A_{12}+2A_{13}=a$，即$A_{11}+A_{12}+A_{13}=a/2$

（2）

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{ij}=(A_{11}+A_{12}+A_{13})+(A_{21}+A_{22}+A_{23})+(A_{31}+A_{32}+A_{33})$$

$$=\frac{a}{2}+\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

设 A, B 都是 3

$$=\frac{a}{2}+0+0$$

$$=\frac{a}{2}$$

2. 设 A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & x & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & y & -1 \end{pmatrix}$，R(A)=2,求 x，y 的值。

解： A 经过初等行变换

A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & x-1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & y-3 & 2 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y-2 & 0 \end{pmatrix}$$\Rightarrow x=0, y=2$

3. 设矩阵 A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足$A^*X=A^{-1}+2X$，其中$A^*$为 A 的伴随矩阵，求 X。

解：计算得$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4$. 关系式$A^*X=A^{-1}+2X$左乘 A

可得 $4X=E+2AX$，整理为 $(4E-2A)X=E$，故$X=(4E-2A)^{-1}$.

由

$$(4E-2A,E)=\begin{pmatrix}2&-2&2&1&0&0\\2&2&-2&0&1&0\\-2&2&2&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&1&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

可得

$$X=\left(4E-2A\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

4.设有线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$，问$\lambda$取何值时，方程组无解、有惟一解和有无穷多组解，在有无穷多组解时，试求出其通解。

【解答】因为

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1-\lambda&1-\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&1-\lambda^2\\\lambda-1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2\begin{vmatrix}1&1+\lambda\\-1&1\end{vmatrix}$$

$=(1-\lambda)^2(\lambda+2)$

所以当$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$时，由克拉默法则可知，方程组有惟一解

当$\lambda = -2$时，原方程组成为

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$$

对增广矩阵施行初等行变换

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 + 2r_3} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

由此可知$R(A)=2$，$R(B)=3$，所以当$\lambda \neq -2$时方程组无解

当$\lambda = 1$时，方程组成为$x_1 + x_2 + x_3 = -2$

此时方程组有无穷多组解，若选$x_1$为非自由未知量，则有

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - 2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases}$$

故方程组的通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中$x_2$，$x_3$为任意常数

5. 已知$A = \begin{bmatrix} B & O \\ D & C \end{bmatrix}$，其中$B$是$r \times r$可逆矩阵，$C$是$s \times s$可逆矩阵，求$A^{-1}$。

解： 因$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{C}| \neq 0$，故$\boldsymbol{A}$可逆。设$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{bmatrix}$，由定义，有

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}B & O\\ D & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X & Y\\ Z & W\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}BX & BY\\ DX+CZ & DY+CW\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E & O\\ O & E\end{bmatrix},$$

得

$$BX=E\Rightarrow X=B^{-1}\text{，}BY=O\Rightarrow Y=O\text{（}B\text{可逆），}$$

$$DX+CZ=O\Rightarrow Z=-C^{-1}DB^{-1}\text{（}X=B^{-1}\text{），}DY+CW=E\Rightarrow W=C^{-1}\text{（}Y=O\text{），}$$

故

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & O\\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1}\end{bmatrix}.$$

**四、证明题（每小题 5 分，共 15 分）**

1. 证明：R(A︰AB)=R(A)

证：$\because \max\{r(A),R(AB)\}\le R(A\vdots AB)$

$\therefore R(A)\le R(A\vdots AB)$

又$\because R(A\vdots AB)=R\big(A(E\vdots B)\big)\le \min\{R(A),R(E\vdots B)\}\quad\Rightarrow\ R(A\vdots AB)\le R(A)$

$\therefore\ R(A\vdots AB)=R(A)$ 得证

2. 设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵，且 $m<n$，证明：齐次线性方程组$(A^TA)x=0$ 必有非零解

【证明】

证 $A^TA$ 是$n\times n$矩阵，由于
$R(A)=R(A^T)\le m, R(A^TA)\le \min(R(A),R(A^T))\le m<n$ ,根据齐次线性方程组解的理论，以$n$阶矩阵 $A^TA$ 为系数矩阵的齐次线性方程组$(A^TA)x=0$有非零解的充要条件为$R(A^TA)<n$

3. 设 A 是 n 阶非零矩阵，$A^*$是其伴随矩阵，且满足$a_{i,j}=A_{i,j}$，证明 A 可逆。

证明：条件 A 的每一个元素 $a_{ij}$ 等于它的代数余子式，即 $a_{ij}=A_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 意味着 $A^*=A^T$.利用伴随矩阵的性质有 $A^*A=|A|E$，因此 $A^TA=|A|E$.

下面证明$|A|\neq 0$ .若$|A|=0$ ，则上式意味着 $A^TA=0$，

因此 A=0,这与 A 是非零矩阵是矛盾的，因此 $|A|\neq 0$，即 A 可逆.