



厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷(含答案及评分标准)

试卷类型: (理工类 A 卷) 考试日期 2023.02.18

得 分

评阅人

一、选择题 (每小题 4 分, 共 16 分)

1. 若 $\int f(x) dx = x^2 + C$, 则 $\int xf(1-x^2) dx =$ (D)。

(A) $2(1-x^2)^2 + C$; (B) $-2(1-x^2)^2 + C$; (C) $\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C$ (D) $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C$ 。

2. 定积分 $\int_0^2 \sqrt{2x-x^2} dx =$ (B)。 几何意义: 圆

(A) $\frac{\pi}{4}$; (B) $\frac{\pi}{2}$; (C) π ; (D) $\frac{\pi}{8}$ 。

3. 设 $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$, $b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} dx$, 则 (C)。

(A) $a > b > 1$; (B) $1 > a > b$; (C) $b > a > 1$; (D) $1 > b > a$ 。

4. 对于 $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-x-2}$, 下列说法正确的是 (D)。

(A) 其值为 $-\ln 2$; (B) 其值为 $\ln 2$; (C) 其值为 $2\ln 2$; (D) 发散。

二、填空题: (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 两条抛物线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$ 。

2. $\int_{-1}^1 \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1+|x|} dx = 2\ln 2$ 。

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+xt) dt}{x^3} = \frac{1}{2}$ 。

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1^2} + 2\sqrt{n^2+2^2} + 3\sqrt{n^2+3^2} + \dots + n\sqrt{n^2+n^2}}{n^3} = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$ 。

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = \frac{1}{5}(e^{\frac{\pi}{2}} - 2)$ 。

6. 若 $f(x) = 3x + 4 \int_0^1 t f(t) dt$, 则 $f(2) = 2$ 。

三、(8分) 设函数 $f(x)$ 满足 $\int xf(x)dx = \arcsin x + C$ ，其中 C 为任意常数，求不定积分 $\int f(x)dx$ 。

得 分	
评阅人	

解：由 $\int xf(x)dx = \arcsin x + C$ ，得 $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ 。(2分) 因此

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx \quad (2\text{分}) = \int \frac{1}{-x^2}d\sqrt{1-x^2} = \int \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^2-1}d\sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + C = \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|} + C。 (4\text{分})\end{aligned}$$

或者 $\int f(x)dx = \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ ，令 $x = \sin t, t \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ ，则 $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ ，(2分)

$$\begin{aligned}\text{代入得，} \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{1}{\sin t \cos t} d\sin t = \int \frac{1}{\sin t} dt \quad (2\text{分}) = \ln |\csc t - \cot t| + C \\ &= \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|} + C。 (2\text{分})\end{aligned}$$

四、求下列定积分（每小题8分，共16分）：

得 分	
评阅人	

1. $\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx$;

解：令 $t = \sqrt[4]{x}$ ，(2分) 则

$$\begin{aligned}\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx &= \int_1^2 \frac{1}{t^2 + t} dt^4 = 4 \int_1^2 \frac{t^2}{t+1} dt \quad (2\text{分}) = 4 \int_1^2 t - 1 + \frac{1}{t+1} dt \quad (1\text{分}) \\ &= [2t^2 - 4t + 4\ln(t+1)] \Big|_1^2 \quad (2\text{分}) = 2 + 4\ln 3 - 4\ln 2。 (1\text{分})\end{aligned}$$

2. $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$ 。

解法一： $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 |\ln x| dx + \int_1^e |\ln x| dx = -\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx$ (2分)

$$= -(x \ln x - x) \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + (x \ln x - x) \Big|_1^e \quad (4\text{分}) = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + (e - e + 1) = 2 - \frac{2}{e}。 (2\text{分})$$

解法二: $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx = \int_{-1}^1 |t| de^t = \int_{-1}^1 |t| e^t dt \quad (2 \text{ 分}) = \int_0^1 t(e^t + e^{-t}) dt$

$$= \int_0^1 t d(e^t - e^{-t}) = t(e^t - e^{-t}) \Big|_0^1 - \int_0^1 (e^t - e^{-t}) dt = t(e^t - e^{-t}) \Big|_0^1 - (e^t + e^{-t}) \Big|_0^1 \quad (4 \text{ 分})$$

$$= 2 - \frac{2}{e} \quad (2 \text{ 分})$$

五、(8 分) 求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2} dx$ 。

得 分	
评阅人	

解: $\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1+2x}{(x^2+1)^2} dx$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (2 \text{ 分}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} d(x^2+1)$$

$$= \arctan x \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{x^2+1} \Big|_0^{+\infty} \quad (4 \text{ 分}) = \arctan x \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{x^2+1} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 - (0-1) = \frac{\pi}{2} + 1 \quad (2 \text{ 分})$$

六、(10 分) 设两条曲线 $y = \sec^2 x$ 、 $y = \cos 2x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 和直线

得 分	
评阅人	

$x = \frac{\pi}{4}$ 所围成的平面图形为 D。试求该平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所

形成的立体的体积 V。

解: $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x)^2 dx \quad (4 \text{ 分}) = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1) d \tan x - \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \pi \left(\frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \pi \left(\frac{1}{2} x + \frac{\sin 4x}{8} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \frac{4}{3} \pi - \frac{1}{8} \pi^2 \quad (2 \text{ 分})$$

七、(10 分) 在摆线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ 上求分该曲线的弧长

得 分	
评阅人	

成 3:1 的点的坐标。

解: 令该点坐标为 (x_0, y_0) , 其对应的参数 $t = t_0$, 则 $\pi \leq t_0 \leq 2\pi$ 。

注意到

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} dt$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos t} dt = 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt, \quad (3 \text{ 分})$$

从而整条摆线全长为 $s = \int_0^{2\pi} 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8$, (2 分)

摆线对应于 $0 \leq t \leq t_0$ 的那一段曲线弧长为

$$s_1 = \int_0^{t_0} 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2 \int_0^{t_0} \sin \frac{t}{2} dt = -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{t_0} = -4 \cos \frac{t_0}{2} + 4. \quad (2 \text{ 分})$$

根据题意, 有 $s_1 = \frac{3}{4}s$, 故 $-4 \cos \frac{t_0}{2} + 4 = 6$, 进而有 $\cos \frac{t_0}{2} = -\frac{1}{2}$, 解得 $t_0 = \frac{4}{3}\pi$, (2 分) 因

此该点坐标为 $(x_0, y_0) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \Big|_{t=\frac{4}{3}\pi} = \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$. (1 分)

八、(8 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内可导,

且 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $f'(\xi) = f(\xi) \tan \xi$.

得 分	
评阅人	

证明: 作辅助函数 $\varphi(x) = f(x) \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (3 分), 则 $\varphi(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 连续, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$

内可导. 由积分中值定理, 存在 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = f(x_0) \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$, 即有

$f(x_0) = 0$. (2 分) 因此 $\varphi(x_0) = \varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$ (1 分), 在 $[x_0, \frac{\pi}{2}]$ 上用罗尔定理, 可知存在

$\xi \in (x_0, \frac{\pi}{2}) \subset (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $\varphi'(\xi) = 0$, 结论得证. (2 分)