厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷

________学院________系________年级________专业

试卷类型:(理工类A卷)　　　　考试时间:2019.11.16

一、计算下列极限：（每小题 6 分，共 24 分）

1. $\lim\limits_{x\to -1}(\frac{1}{1+x}-\frac{3}{1+x^3})$；

得　分	
评阅人	

2. $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{2-x}{x})^{\frac{\pi}{\sin(\pi x)}}$；

得　分	
评阅人	

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{\sqrt{1+x^2\sin x}-\sqrt{1+x^4}}$；

得　分	
评阅人	

4. 求数列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{2^n+3^n})$。

得　分	
评阅人	

二、求下列函数的导数：（本题 16 分, 第一小题 9 分，第二小题 7 分）

得　分	
评阅人	

1. 求函数 $y=x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$ 的一阶导数；

2. 求函数 $y=\sqrt[6]{\dfrac{x^2-1}{(x+2)(x+4)}}$ 在 $x=2$ 处的微分 $\mathrm{d}y|_{x=2}$。

得　分	
评阅人	

三、（本题 10 分）设方程$e^{x-y}=y-1$确定了隐函数$y=y(x)$，求此隐函数在点$(2,2)$处的一阶导数和二阶导数。

得　分	
评阅人	

四、（本题 8 分）设函数 $f(x)=x\ln(1-x^2)$，求 $f^{(11)}(0)$。

得　分	
评阅人	

五、（本题 8 分）求星形线$\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ $(0<t<2\pi)$在点$(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4})$处的切线方程。

得　分	
评阅人	

六、（本题 12 分）设数列$\{x_n\}$由递推公式$x_1=1$， $x_{n+1}=\sin x_n$给出，

得　分	
评阅人	

(1)证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求其极限值；

(2)试求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$。

七、（本题 12 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x<0 \\ 0 & x=0 \\ \dfrac{1}{1+e^{1/x}} & x>0 \end{cases}$。

得　分	
评阅人	

(1) 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

(2) 求导函数 $f'(x)$ 的连续区间和间断点，并判别其间断点类型。

得　分	
评阅人	

八、（本题 10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=1$，$f(1)=0$。试证：

(1) 存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 $f(x_0)=x_0$；

(2) 存在不同的 $\xi,\eta \in (0,1)$，使得 $f'(\xi)\cdot f'(\eta)=1$。