厦门大学《数值分析》参考答案

信息科学与技术学院计算机2006年级计算机专业

主考教师：曲延云　鞠颖　　试卷类型：（A卷）

1.（15%）假设计算球体积允许其相对误差限为2%，求测量球半径的相对误差限最大为多少？

解：　$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

$$\varepsilon(V)=\frac{dV}{dR}\varepsilon(R)=4\pi R^2\varepsilon(R)$$

$$\varepsilon_r(V)=\frac{\varepsilon(V)}{V}=3|\varepsilon_r(R)|$$

$\therefore |\varepsilon_r(R)|=3|\varepsilon_r(R)|\le 2\%$

$\therefore |\varepsilon_r(R)|\le 0.00667$　　答：测量球半径的相对误差限最大为0.00667。

2.（15%）求一个次数不高于5的多项式$P_5(x)$满足下列插值条件：

$$P_5(0)=2，\ P_5(1)=1，\ P_5(2)=2，\ P_5'(0)=-2，\ P_5'(1)=-1，\ P_5''(0)=-10$$

解：　1）先利用Newton法构造二次多项式

$N_2(x)=P_5(0)+P_5[0,1]+P_5[0,1,2]x(x-1)=x^2-2x+2$

2) 在此基础上构造5次多项式

$P_5(x)=N_2(x)+(ax^2+bx+c)x(x-1)(x-2)$

因为$P_5'(0)=-2$，推出$N_2'(0)+(x-1)(x-2)(ax^2+bx+c)|_{x=0}=-2+2c=-2$，c=0

又$P_5'(1)=-1$，推出$N_2'(1)+x(x-2)(ax^2+bx+c)|_{x=1}=-1$，a+b=1　(1)

又$P_5''(0)=-10$，推出$2+4b=-10$　　(2)

解(1)(2)组成的方程组得，　a=4,b=-3

所构造的5次多项式为：

$$P_5(x)=x^2-2x+2+(4x^2-3x)x(x-1)(x-2)=4x^5-15x^4+17x^3-5x^2-2x+2$$

3.（15%）构造在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的正交多项式$P_0(x),P_1(x),P_2(x)$，并利用所构造的正交多项式求 a,b,c,使

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[aP_2(x)+bP_1(x)+cP_0(x)-\sin x]^2dx$达到最小。

解：　1）构造在$[0,\pi/2]$上的正交多项式$P_0(x),P_1(x),P_2(x)$

令　$P_0(x)=1$，$P_1(x)=x-\alpha_1$

由 $(P_0(x),P_1(x))=0$， $\int_0^{\pi/2}(x-\alpha_1)dx=0$，推出 $\alpha_1=\pi/4$

所以 $P_1(x)=x-\pi/4$

令 $P_1(x)=(x-\alpha_2)P_1(x)-\beta P_0(x)$

由 $(P_0(x),P_2(x))=0$，推出 $\beta=\frac{(xP_1(x),P_0(x))}{(P_0(x),P_0(x))}=\pi^2/48$

由 $(P_1(x),P_2(x))=0$，推出 $\alpha=\frac{(xP_1(x),P_1(x))}{(P_1(x),P_1(x))}=\pi/4$

所以 $P_2(x)=(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\pi^2}{48}=x^2-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{24}$

2)利用最佳平方逼近求系数 a,b,c，由于 P_0,P_1,P_2 是正交多项式，所以，

$$a=\frac{(\sin x,P_2(x))}{(P_2(x),P_2(x))}=\frac{5760}{\pi^3}(\frac{\pi^2}{24}+\frac{\pi}{2}-2)$$

$$b=\frac{(\sin x,P_1(x))}{(P_1(x),P_1(x))}=\frac{96}{\pi^3}(1-\pi/4)$$

$$c=\frac{(\sin x,P_0(x))}{(P_0(x),P_0(x))}=\frac{2}{\pi}$$

另解：

1）利用 Legendre 正交多项式构造本题所求的正交多项式

Legendre 正交多项式: $P_0(t)=1$, $P_1(t)=t$, $P_2(t)=(3t^2-1)/2$ ， $t\in[-1,1]$

则令 $x=\frac{\pi}{4}(1+t),x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,推出 $t=\frac{4}{\pi}x-1,$

带入上面三个多项式，得

$P_0(x)=1$, $P_1(x)=\frac{4}{\pi}x-1$, $P_2(x)=\frac{24}{\pi^2}x^2-\frac{12}{\pi}x+1$

2) $a=\frac{(\sin x,P_2(x))}{(P_2(x),P_2(x))}=\frac{15}{\pi^3}(\pi^2+8\pi-32)$

$$b=\frac{(\sin x,P_1(x))}{(P_1(x),P_1(x))}=6(\frac{4}{\pi^2}-\frac{1}{\pi})$$

$$c=\frac{(\sin x,P_0(x))}{(P_0(x),P_0(x))}=\frac{2}{\pi}$$

4. （15%）对于高斯型求积公式 $\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ ，证明：求积系数 $A_k > 0$, k=0, 1, 2. . . , n，且 $\sum_{k=0}^{n} A_k = \int_a^b \rho(x)dx$.

证明：构造过 Gauss 型求积节点 $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ 的拉格朗日基函数 $l_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$ （j=0, 1, ⋯, n），

则这些基函数是 n 次多项式，且 $l_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

1）取被积函数 $f(x) = [l_j(x)]^2$， 则该函数为 2n 次多项式，因为高斯型求积公式的代数精度为 2n+1，所以利用高斯型求积公式求解时，精确成立，即

$$\int_a^b \rho(x)[l_j(x)]^2 dx = \sum_{k=0}^{n} A_k [l_j(x_k)]^2 = A_j > 0$$

2)取被积函数 f(x)=1,则利用利用高斯型求积公式求解时，精确成立，即

$$\int_a^b \rho(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k * 1 = \sum_{k=0}^{n} A_k$$

5.(15%)应用 Doolittle 方法解线性方程组（10）

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$
$$-x_1 - 3x_2 = 2$$

解：Doolittle 分解 $A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$

以任何形式表示出上述杜利特尔分解形式的就给 <u>5</u> 分，单位下三角阵误作下三角阵的 3 分

① $u_{1i} = a_{1i} (i = 1, 2, \cdots, n)$， $l_{i1} = a_{i1} / u_{11} (i = 2, 3, \cdots, n)$，

计算 $\boldsymbol{U}$ 的第 r 行，$\boldsymbol{L}$ 的第 r 列元素($r = 2, 3, \cdots, n$).

② $u_{ri} = a_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{ki} \quad (i = r, r+1, \cdots, n)$;

③ $l_{ir} = (a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr}) / u_{rr} \quad (i = r+1, \cdots, n$; 且 $r \neq n)$;

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

④ $\begin{cases} y_1 = b_1; \\ y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k \quad (i = 2, 3, \cdots, n) \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x_n = y_n / u_{nn}; \\ x_i = \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k\right) / u_{ii} \end{cases}$

有任何形式表示求解过程为先求解下三角方程组 **Ly=b,** ***解得*** **y；*然后再求解上三角方程组*** **Ux=y，*解得*** **x** ***的*<u>5</u>*分***

y = [0 3 0.5]'，　x = [1 -1 1]'，

6.(15%)设 $A = \begin{bmatrix} 10 & a & 0 \\ b & 10 & b \\ 0 & a & 5 \end{bmatrix}$，$\det A \neq 0$，用 a，b 表示方程组 $Ax = d$ 的 Jacobi 迭代法及 Gauss－Seidel 迭代法收敛的充分必要条件。（20）

解：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \cdots & 0 & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1,n-1} & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2,n-1} & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & -a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

写出 $D = \begin{bmatrix} 10 & & \\ & 10 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$，$L = \begin{bmatrix} & & \\ -b & & \\ & -a & \end{bmatrix}$，$U = \begin{bmatrix} & -a & 0 \\ & & -b \\ & & \end{bmatrix}$

$$B_J=\begin{bmatrix}0 & -\frac{a}{10} & 0\\ -\frac{b}{10} & 0 & -\frac{b}{10}\\ 0 & -\frac{a}{5} & 0\end{bmatrix},$$

***Jacobi* 迭代矩阵 B$_J$=I-D^{-1}A=D^{-1}(L+U)，以任何形式推导出结果**

$$B_G=\begin{bmatrix}0 & -\frac{a}{10} & 0\\ 0 & \frac{ab}{100} & -\frac{b}{10}\\ 0 & -\frac{a^2b}{500} & \frac{ab}{50}\end{bmatrix},$$

***Gauss-Seidal* 迭代矩阵 B$_G$=(D-L)$^{-1}$U，以任何形式给出下面结果**
***迭代法收敛的充要条件是迭代矩阵的谱半径* ρ(B)<1，**

B$_J$ *的特征值为*-$\sqrt{\frac{3ab}{100}}$*，0，*$\sqrt{\frac{3ab}{100}}$*，此结果* 1 *分，收敛的充分必要条件是*$\sqrt{\frac{3ab}{100}}$*<1，*

B$_G$ *的特征值为 0，0，*$\frac{3ab}{100}$*，此结果* 1 *分，收敛的充分必要条件是*$\frac{3ab}{100}$*<1，*

7. (10%)利用 Newton 法求解下列方程组：（15）

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0\\ (x-1)y-3x-1=0\end{cases}$$

在（1，1）附近的近似解，迭代二次求 $\left(x^{(1)},y^{(1)}\right)^T,\left(x^{(2)},y^{(2)}\right)^T$ 。

解：写出二元牛顿迭代公式*$X^{(k+1)}=X^{(k)}-J\left(X^{(k)}\right)^{-1}F\left(X^{(k)}\right)$*得* 5 *分，考虑到此题会做的同学

较少，放宽为一元牛顿迭代公式*$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$*，或以画图形式给出牛顿迭代原理得 5 分，

没有公式但以任何形式解释牛顿迭代意义的 3 分

写出雅克比矩阵*$J\left(X^{(k)}\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 2y\\ y\ \ 3 & x\ \ 1\end{bmatrix}$*,

***第一步迭代结果：*$\begin{bmatrix}x^{(1)}\\ y^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 4.5\end{bmatrix}$**

第二步迭代结果： $\begin{bmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1.5 & -2. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19.25 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.21 \\ 3.41 \end{bmatrix}$