Лабораторная работа № 8
«Программная реализация типовых алгоритмов с итеративными циклическими структурами»
по Разделу
«Циклические алгоритмические структуры. Итеративные циклические структуры и их программная реализация»

8.1 Общее задание

1) Изучить вопросы программирования алгоритмов итеративных циклических структур.
2) Выбрать вариант задания из таблицы 8-1.
3) Провести формализацию поставленной задачи.
4) Разработать схемы алгоритмов и программные коды следующих функций:
   - решения поставленной задачи, использующей итеративную циклическую структуру со страховкой от «зацикливания». Предусмотреть вывод промежуточных результатов с указанием номера итерации и значения вычисляемого члена бесконечной последовательности или приближения к корню уравнения, а также, если требуется, вызовы других функций, необходимых для решения задачи;
   - ввода исходных данных;
   - вывода результатов;
   - главной функции `main`, которая вызывает описанные выше функции для решения поставленной задачи.
5) Создать консольный проект, содержащий 3 раздельно откомпилированных файла:
   - файл, содержащий функцию ввода исходных данных и функцию вывода результатов;
   - файл с разработанными согласно п.4. функциями;
   - файл с главной функцией `main`, которая должна содержать только операторы вызова пользовательских функций (ввода, функции решения задачи и вывода), причем обмен данными между функциями должен осуществляться через параметры, без использования глобальных переменных.
6) Выполнить проект и получить результаты.
7) Доказать правильность полученных результатов.

8.2. Варианты индивидуальных заданий

Таблица 8-1

№	Задача
1)	Найти наибольшее целое **n** такое, что $\mathbf{3 \cdot n^4 - 730 \cdot n < 5}$
2)	Дано натуральное число **n**. Получить наименьшее число вида $\mathbf{2^r}$, превосходящее **n**.
3)	Вычислите с точностью **ε=0.00001** значение функции $\mathbf{y = \sqrt{x}}$ при x=2, воспользовавшись рекуррентной формулой: $y_{i+1} = 0.5\left[y_i + \frac{x}{y_i}\right]; \quad i = 0,1,2...; \quad y_0 = \frac{x}{2}$ Сравните результат со значением, полученным с помощью соответствующей встроенной функции.
4)	Найти наибольшее целое **n** такое, что $\mathbf{e^n - 1000 \cdot \ln(n) <= 10}$
5)	Дано целое число **m** > 1. Получить наибольшее целое **k**, при котором $\mathbf{4^k < m}$.
6)	Вычислите с точностью **ε=0.00001** значение функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ при **x** = **2**, воспользовавшись формулой: $y_{i+1} = 1.5y_i - 0.5xy_i^3; \quad i = 0,1,2,...; \quad y_0 = 1$ Сравните результат со значением, полученным с помощью соответствующей библиотечной функции
7)	Вычислить число $\frac{\pi}{4}$ через разложение в ряд $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{к+1}\frac{1}{2к-1}$ с точностью $\mathbf{ε = 10^{-3}}$. Сравнить с точным значением.
~~8)~~	Вычисления значения $\frac{\pi}{2}$ с точностью $\mathbf{ε = 10^{-4}}$, используя формулу $\prod_{i=1}^{\infty}\frac{(2i)^2}{(2i-1)(2i+1)}$
9)	Вычислить ***S*** – сумму всех тех чисел Фибоначчи, которые не превосходят **1000**. Числа Фибоначчи определяются формулами: $f_0 = f_1 = 1; \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ при n = 2, 3, … .
10)	Вычислите с точностью **ε=0.0001** корень уравнения $\boldsymbol{x - \cos x = 0}$ воспользовавшись формулой: $x_{i+1} = \cos(x_i); \quad i = 0,1,2..., \quad x_0 = 0$ Проверьте правильность решения подстановкой найденного корня в уравнение.
11)	Вычислить бесконечную сумму $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}$ с заданной точностью $\mathbf{ε = 10^{-4}}$.

12)	Вычислить приближенное значение корня уравнения $\boldsymbol{x = \varphi(x)}$ методом простой итерации с точностью $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-4}}$ и начальным приближением $\boldsymbol{x_0=0}$ к корню: $\boldsymbol{\varphi(x)=\frac{e^x}{4.7}}$
13)	Вычислите корень уравнения $\boldsymbol{f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 1 = 0}$ с точностью **ε=0.0001**, воспользовавшись итерационной формулой $\boldsymbol{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}; i = 0,1,2,...; x_0 = 0}$ Проверьте правильность решения подстановкой найденного корня в уравнение.
14)	Вычислите значение $\sqrt{2}$ с точностью **ε=0.00001**, воспользовавшись представлением в виде цепной дроби: $\sqrt{2} - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{...}}}$ Значение дроби равно пределу числовой последовательности, члены которой вычисляются по рекуррентной формуле до достижения заданной точности $\mathbf{a_n = \frac{1}{2 + a_{n-1}}, n = 1,2,3,..., \quad a_0 = 0.5.}$ Сравните результат со значением, полученным с помощью соответствующей библиотечной функции.
15)	Дано целое число **n** > **1**. Получить наибольшее целое **i**, при котором $\mathbf{5^i < n}$.
16)	Вычислить сумму бесконечного ряда $\frac{1\cdot2}{3\cdot4} + \frac{2\cdot3}{5\cdot6} + \frac{3\cdot4}{7\cdot8} + \frac{4\cdot5}{9\cdot8} \ldots$ с высокой точностью $\mathbf{10^{-4}}$.
17)	Вычислить приближенное значение корня уравнения $\boldsymbol{x = \varphi(x)}$ методом простой итерации с точностью $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-5}}$ и начальным приближением $\boldsymbol{x_0=0.2}$ к корню: $\boldsymbol{\varphi(x)= \frac{1+x^4}{6}}$
18)	Вычислите корень уравнения $\mathbf{x-0.5(\sin x^2-1)=0}$ с точностью **ε=0.0001,** воспользовавшись итерационной формулой: $x_{i+1} = 0.5(\sin x_i^2 - 1); \qquad i = 0,1,2,...; \qquad x_0 = -0.25$ Проверьте правильность решения подстановкой найденного корня в уравнение.
19)	Вычислите корень уравнения **f(x)=x-cos(x/3)=0** с точностью **ε=0.0001**, воспользовавшись итерационной формулой $\boldsymbol{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}; i = 0,1,2,...; x_0 = 0}$ Проверьте правильность решения подстановкой найденного корня в уравнение.
20)	Вычислите с точностью **ε = 0.00001** корень уравнения $f(x) = tg(x) - x = 0$ воспользовавшись итерационной формулой $\mathbf{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, i = 0,1,2,..., x_0 = 4.6.}$ Проверьте правильность решения подстановкой найденного корня в уравнение.

21)	Вычислить сумму бесконечного ряда $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot5}{2\cdot8}+\frac{1\cdot5\cdot9}{2\cdot8\cdot14}+\frac{1\cdot5\cdot9\cdot13}{2\cdot8\cdot14\cdot20}\ldots$ с точностью 10^{-4} .
22)	Пусть задано действительное число $\varepsilon > 0$. Найдите первый член $y_{i+1}=1.5y_i-0.5xy_i^3; \quad i=0,1,2,\ldots; \quad y_0=1$ y_n, для которого выполнено условие $y_n - y_{n-1} < \varepsilon$.
23)	С заданной точностью ε найти предел последовательности с элементом $a_n = n\sqrt{n^3+1}$ при $n \to \infty$. Точность считать достигнутой, как только выполнится неравенство $\lvert a_{n+1} - a_n \rvert < \varepsilon$.
24)	Задано действительное число a. Среди чисел вида $1; 1+\frac{1}{2}; 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}; \ldots$ найти первое, большее a.
25)	Пусть $x_0 = 1$; $x_i = \frac{2-x_{i-1}^3}{5}, i = 1, 2, \ldots$ Найти первый член x_n, для которого $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert < \varepsilon$.
26)	Найти наименьшее целое положительное **n**, при котором: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots > 4$
27)	Пусть $y_0 = 0$; $y_i = \frac{y_{i-1}+1}{y_{i-1}+2}, i = 1, 2, \ldots$ Дано действительное число $\varepsilon > 0$. Найти первый член y_n, для которого выполнено неравенство $\lvert y_n - y_{n-1}\rvert < \varepsilon$.
28)	Вычислите приближенное значение бесконечной суммы с точностью **ε=0,0001** (справа от суммы дается ее точное значение, с которым можно сравнить полученный результат): **1+1/2²+1/3²+…** $\qquad$ **π²/6**
29)	Вычислите приближенное значение бесконечной суммы с точностью **ε=0,0001** (справа от суммы дается ее точное значение, с которым можно сравнить полученный результат): **1-1/3+1/5-1/7+…** $\qquad$ **π/4**
30)	Вычислите приближенное значение бесконечной суммы с точностью **ε=0,0001** (справа от суммы дается ее точное значение, с которым можно сравнить полученный результат): **1/(1*3)+1/(2*4)+1/(3*5)+…** $\qquad$ **3/4**

8.3. Содержание отчёта

Титульный лист с указанием номера и названия работы, варианта индивидуального задания, группы и Ф.И.О. студента, Ф.И.О. преподавателя.

1) Общее задание.
2) Индивидуальное задание.
3) Формализация и уточнение задания.
4) Схемы алгоритмов проекта.
5) Программный код проекта.
6) Результаты выполнения проекта.
7) Доказательство правильности результатов выполнения проекта.

8.4. Пример выполнения задания «Приближенное вычисление корня уравнения»

1) **Индивидуальное задание**

Создать проект для вычисления с точностью **ε=10**$^{-5}$ корня уравнения **f(x)=x**^{3}**-2x**^{2}**+x-3=0**, воспользовавшись итерационной формулой

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}; \quad i = 0,1,2,\ldots, x_0 = 2.2.$$

Проверить правильность решения подстановкой найденного корня в уравнение.

2) **Формализация и уточнение задания**

Вычислим производную **f'(x)=3x**^{2}**-4x+1** и обозначим:

- **x** – текущее приближение к корню;
- **a** – предыдущее приближение;
- **i** – номер итерации, совпадающий с номером текущего приближения к корню;
- **y** – значение функции **f(x)** для найденного с заданной точностью корня.

Будем считать, что заданная точность обеспечена, если модуль разности между текущим и предыдущим значениями корня меньше допустимой погрешности `ε`, то есть для нашего случая `|x-a| < ε`.

Для решения поставленной задачи необходимо реализовать функцию `Кор()`, которая в качестве входных параметров получает начальное значение `x0=2.2`, точность `ε=10`$^{-5}$ и максимальное число итераций. Результатами работы функции являются:

1) найденный корень уравнения `x` - возвращаемое значение, а также возвращаемые через параметры по ссылке:
2) значение функции `y` при найденном значении корня и
3) число итераций `i`, которое потребовалось для вычисления корня с заданной точностью.

Функция для вычисления приближения к корню по заданной формуле должна вызывать две функции: одна – `Funy()`, вычисляет значение **f(x)**, а другая – `Fproiz()` – значение производной этой функции **f'(x)**.

3) Схема алгоритма функции `Kop()` представлена на рисунке 8.1.

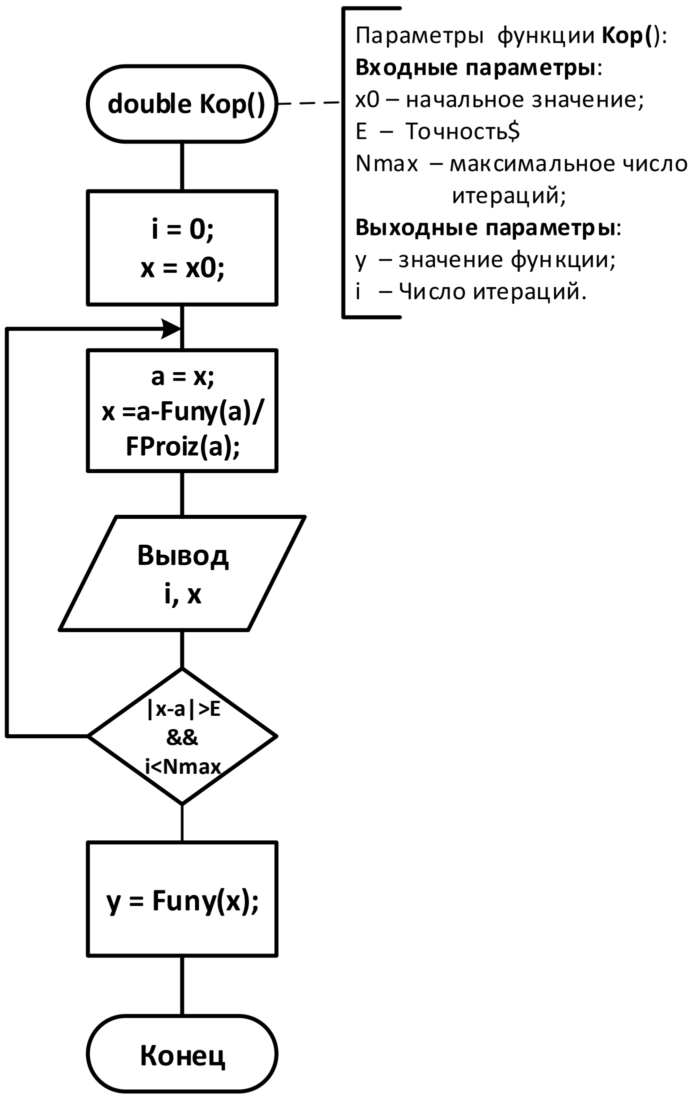

Рисунок 8.1 – Схема алгоритма функции **`Kop(x)`** вычисления с заданной точностью корня уравнения $x^3-2x^2+x-3=0$

4) **Программный код проекта** представлен на рисунке 8.2.

```
// файл с функциями решения задачи
#include <cmath>
#include <iostream>
using namespace std;

//функция - заданное уравнение
double Funy(double x)
{
    return x*x*x - 2*x*x + x - 3;
}

//функция, вычисляющая производную
double FProiz(double x)
{
    return 3*x*x - 4*x + 1;
}

//функция решения задачи поиска корня
double Kop(double x0, double E,int Nmax, double& y, int& i)
{
    double a,x;//предыдущее и текущее значение корня
     i = 0;//счетчик числа итераций
     x = x0;//начальное приближение
     cout<<"\tВычисление корня уравнения:"<<endl;
     cout<<"\tитерация \tприближение x"<<endl;
     // вывод исходных i и x
     cout<<'\t'<<i<<'\t'<<'\t'<<x<<endl;
     do
    {
         a = x;
         x = a-Funy(a)/FProiz(a);//расчет по рекур.ф-ле
         i++;
         cout<<'\t'<<i<<'\t' <<'\t'<<x<<endl;//вывод промежут. знач.
    }while (abs(x-a)>=E && i<Nmax);
    y=Funy(x);//значение ф-ции в точке корня
    return x;
}
//файл GetPut.cpp с ф-циями ввода и вывода

#include <iostream>
using namespace std;

// определение функции ввода
void GetXE(double& x,double& E,int& Nmax)
{
    setlocale(LC_ALL,"rus");
    cout<<" Введите начальное приближение к корню  ";
    cin>>x;
    cout<<" Введите точность  ";
    cin>>E;
    cout<<" Введите макс. число итераций ";
    cin>>Nmax;
}
```

```
// определение функции вывода
void Put(double x, double y,int n)
{
    setlocale(LC_ALL,"rus");
    cout<<endl<<" Корень уравнения равен "<<x<<endl;
    cout<<" Значение функции в корне равно "<<y<<endl;
    cout<<" Корень найден за "<<n<<" итераций "<<endl;
}

//файл main.cpp
#include <iostream>

void GetXE(double& x,double& E,int& Nmax);
void Put(double x, double y,int n);
double Kop(double x0, double E,int Nmax, double& y, int& i);

int main()
{
    double x0,E,x,y;
    int n,Nmax;
    GetXE(x0,E,Nmax); //вызов функции ввода исх. данных
    x=Kop(x0,E,Nmax,y,n);//вызов ф-ции решения
    Put(x,y,n);//вызов функции вывода рез-тов
    system("PAUSE");
    return 0;
}
```

Рисунок 8.2 – Программный код проекта

5) **Результаты выполнения проекта** приведены на рисунке 8.3.

```
 Введите начальное приближение к корню  2.2
 Введите точность  0.000001
 Введите макс. число итераций 100
        Вычисление корня уравнения:
        итерация        приближение x
        0               2.2
        1               2.175
        2               2.17456
        3               2.17456

 Корень уравнения равен 2.17456
 Значение функции в корне равно 8.34888e-014
 Корень найден за 3 итераций
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```

Рисунок 7.3 - Результаты выполнения проекта**:**

6) **Доказательство правильности результатов выполнения проекта**
Значение функции при подстановке найденного приближения к корню **f(x) = 8.34888*10^{-14}**. Это говорит о том, что найденное приближенное значение корня близко к его точному значению.