USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Departamento de Matemática Aplicada

Facultade de Matemáticas
Avenida Diego López de Marzoa s/n
15782 Santiago de Compostela
Tel. 981563100 ext. 13184

Grado en Matemáticas. Curso 2020-21
Métodos Numéricos en Optimización y Ecuaciones Diferenciales
Práctica 4: Métodos de Runge-Kutta

Nuevamente en esta práctica buscamos resolver numéricamente el siguiente problema de valor inicial

$$\left|\begin{array}{rcl} \dot{\boldsymbol{y}} & = & \boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}), \qquad x\in[a,b], \\ \boldsymbol{y}(a) & = & \boldsymbol{\eta}. \end{array}\right. \tag{1}$$

1. El método de Runge-Kutta clásico

Uno de los mayores inconvenientes del método de *Euler explícito* es su bajo orden de convergencia. En efecto, dado que su error se comporta en general del siguiente modo,

$$\max_{0\le n\le N}\|\boldsymbol{y}(x_n)-\boldsymbol{y}_n\|\approx\mathcal{C}\,h,$$

para obtener una precisión dada, digamos $\varepsilon=1.d-4$, tendremos que tomar el paso de discretización proporcional a dicha tolerancia, i. e., $h\approx\varepsilon/\mathcal{C}$. El número de pasos (que en este caso coincide con el número de evaluaciones de la función $\boldsymbol{f}(\cdot,\cdot)$) que deberemos dar para alcanzar el tiempo final $x=b$ es

$$N=\left[\frac{b-a}{h}\right]\approx\frac{(b-a)\,\mathcal{C}}{\varepsilon}$$

que en nuestro caso particular sería proporcional a 10^4.

Supongamos ahora que empleamos para resolver el problema de valor inicial un método Runge-Kutta explícito de 4 etapas y de orden 4. En este caso tendremos en general

$$\max_{0\le n\le N}\|\boldsymbol{y}(x_n)-\boldsymbol{y}_n\|\approx\widetilde{\mathcal{C}}\,h^4.$$

Para alcanzar la misma precisión, el valor aproximado del paso de discretización sería

$$h\approx\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{\widetilde{\mathcal{C}}}},$$

que implicaría

$$4\,N=4\left[\frac{b-a}{h}\right]\approx4\,(b-a)\frac{\sqrt[4]{\widetilde{\mathcal{C}}}}{\sqrt[4]{\varepsilon}},$$

evaluaciones de la función $\boldsymbol{f}(\cdot,\cdot)$. Este número será, en general, mucho menor que el correspondiente para el método de orden 1 ya que $1/\sqrt[4]{\varepsilon}=10$.

Proponemos en esta práctica emplear el integrador llamado *método de Runge-Kutta clásico* definido por el tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac12 & \frac12 & 0 & 0 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac16 & \frac26 & \frac26 & \frac16 \end{array} \tag{2}$$

Se pide:

a) Comprobar que el método propuesto satisface las condiciones que garantizan consistencia de orden 4.

b) Escribir la formulación que usa los $\boldsymbol{k}_{n,i}$.

c) Crear una función MATLAB que llamaremos `RK4.m` con argumentos de entrada:

- `f` el función con valores vectoriales que define el sistema de EDO a integrar,
- `a` $\in\mathbb{R}$ y `eta` $\in\mathbb{R}^m$ la condición inicial,
- `h` el longitud de paso,
- `N` el número total de pasos,
- `sol` la solución exacta del problema de valor inicial (argumento de entrada opcional),

y que devuelva

- `x` el tiempo final de la integración: $x_N=a+hN$,
- `y` la solución numérica en el instante final: $\boldsymbol{y}_N$.

d) De cara a validar el programa en el marco escalar, resolver el problema

$$\left|\begin{array}{rcl} \dot{y} & = & 1+(x-y)^2,\ x\in[2,3], \\ y(2) & = & 1, \end{array}\right.$$

y cubrir la siguiente tabla

h	$\max_{0\le n\le N}\lvert y(x_n)-y_n\rvert$
$\frac{1}{10}$	
$\frac{1}{100}$	
$\frac{1}{1000}$	

¿Qué orden se observa?

e) Para validar el método en el marco vectorial, resolver

$$\left|\begin{array}{rcl} \ddot{y} + y &=& \cos(3x), \\ y(0) &=& 1, \\ \dot{y}(0) &=& 0, \end{array}\right.$$

y cubrir la siguiente tabla

h	$n^\star$	$\lvert y(2.4) - y_{n^\star}\rvert$	$\lvert \dot{y}(2.4) - z_{n^\star}\rvert$
0.08			
0.04			
0.02			
0.01			
0.005			

¿Qué orden se observa?

f) Calcular la función de estabilidad del método.

Si empleáramos este método para resolver

$$\dot{y} \;=\; -10^4 y, \qquad y(0) \;=\; 1.$$

¿Cuál es el mayor valor de h que garantiza que la solución numérica $\{y_n\}_{n\geq 0}$ permanezca acotada?

2. El sistema de Lorenz

El sistema de Lorenz es un modelo simplificado de un fenómeno de convección atmosférica dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\left|\begin{array}{rcl} \dot{y}_1 &=& \sigma\,(y_2 - y_1), \\ \dot{y}_2 &=& y_1\,(\rho - y_3) - y_2, \\ \dot{y}_3 &=& y_1\,y_2 - \beta\,y_3. \end{array}\right. \tag{3}$$

Se trata de un sistema ampliamente estudiado por presentar soluciones caóticas para algunos valores de los parámetros tales como $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$. Esto implica una alta sensibilidad de la solución con respecto a las condiciones iniciales. En este tipo de situaciones, el uso de métodos numéricos de alto orden es altamente aconsejable.

Se pide:

1. Integrar el sistema de Lorenz con el Runge-Kutta clásico para la condición inicial

   $$\boldsymbol{y}(0) \;=\; (1, 10, 10)^t,$$

   y un tiempo final $b = 10$ para $h \in \{\frac{1}{50}, \frac{1}{100}, \frac{1}{200}\}$. Observar que la solución con todos los pasos es bastante similar (el método parece estar proporcionando una solución precisa).

2. Repetir el cálculo del apartado anterior esta vez integrando con el método de Euler explícito tomando $h \in \{\frac{1}{200}, \frac{1}{400}, \frac{1}{800}\}$.

   Observaremos que, a pesar de que el coste computacional es similar al del primer apartado, las soluciones proporcionadas por el método de bajo orden no tienen la misma precisión.

   Resolveremos con valores del paso $h \in \{\frac{1}{12800}, \frac{1}{25600}\}$ para comenzar a observar un comportamiento de la solución numérica al final de la integración similar al obtenido por el Runge-Kutta clásico con los pasos del primer apartado.

3. Repetir el primer apartado considerando esta vez la condición inicial

   $$\boldsymbol{y}(0) \;=\; (1.01, 10.01, 10.01)^t,$$

   Observar que, nuevamente, el Runge-Kutta clásico proporciona soluciones muy parecidas entre sí independientemente del paso.

   Comparar las órbitas calculadas en el primer y tercer apartados y comprobar que alrededor del tiempo $x = 6$ se separan considerablemente a pesar de partir de condiciones iniciales muy cercanas.