《数字信号处理》

期末不挂科

课时7 无限长单位脉冲响应(IIR)数字滤波器的设计方法

知识点	重要程度	常考题型
1数字滤波器的技术指标	☆	大题，画图
2模拟滤波器的设计	☆	理解
3巴特沃斯低通滤波器的设计方法	☆☆☆	大题，简答
4切比雪夫滤波器的设计方法	☆☆	简答
5理想模拟滤波器幅频特性	☆	理解
6脉冲响应不变法	☆☆☆☆	大题
7双线性变换法	☆☆☆☆	大题
8设计IIR数字低通滤波器的步骤	☆	理解

1数字滤波器的技术指标

频响函数 $H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\phi(\omega)}$

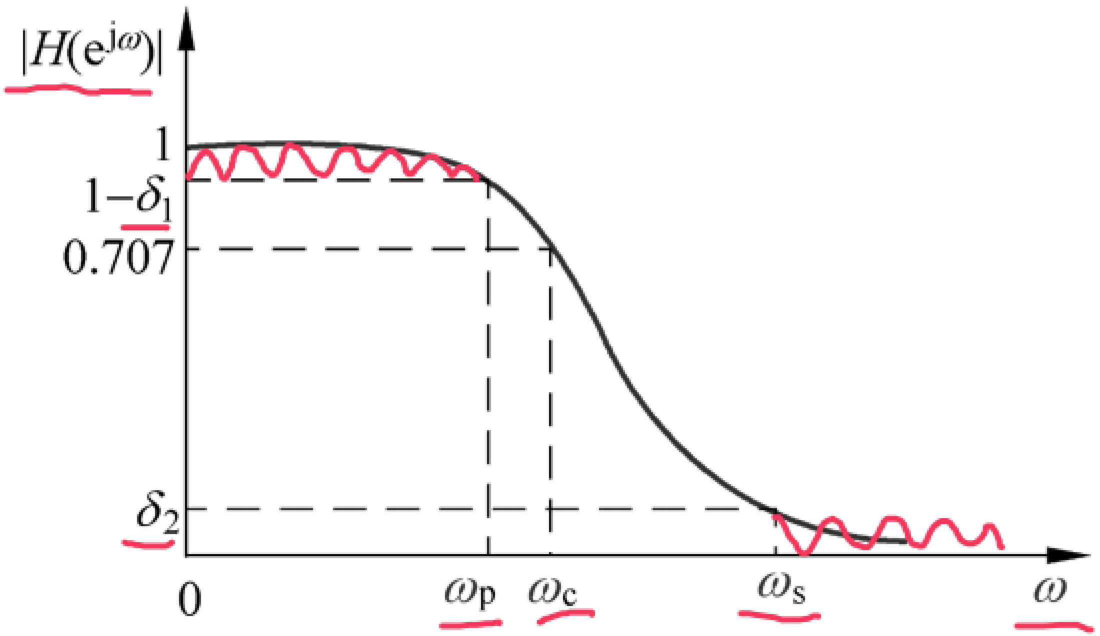
幅频特性 $\left|H(e^{j\omega})\right|$

表示信号通过该滤波器后各频率成分衰减情况

相频特性 $\phi(\omega)$

反映各频率成分通过滤波器后在时间上的延时情况

1数字滤波器的技术指标



ω_p：通带截止频率

ω_s：阻带截止频率

ω_c：3dB截止频率

δ_1：通带波纹幅度

δ_2：阻带波纹幅度

①通带 $0 \le \omega \le \omega_p$ $(1-\delta_1) < |H(e^{j\omega})| \le 1$

②阻带 $\omega_s \le \omega \le \pi$ $|H(e^{j\omega})| \le \delta_2$

③过渡带 $\omega_p \le \omega \le \omega_s$

2模拟滤波器的设计

常用的模拟滤波器 （记）

巴特沃斯（Butterworth）滤波器

具有单调下降的幅频特性

切比雪夫（Chebyshev）滤波器 Ⅰ Ⅱ

幅频特性在通带或者阻带内有波动

椭圆（Ellipse）滤波器

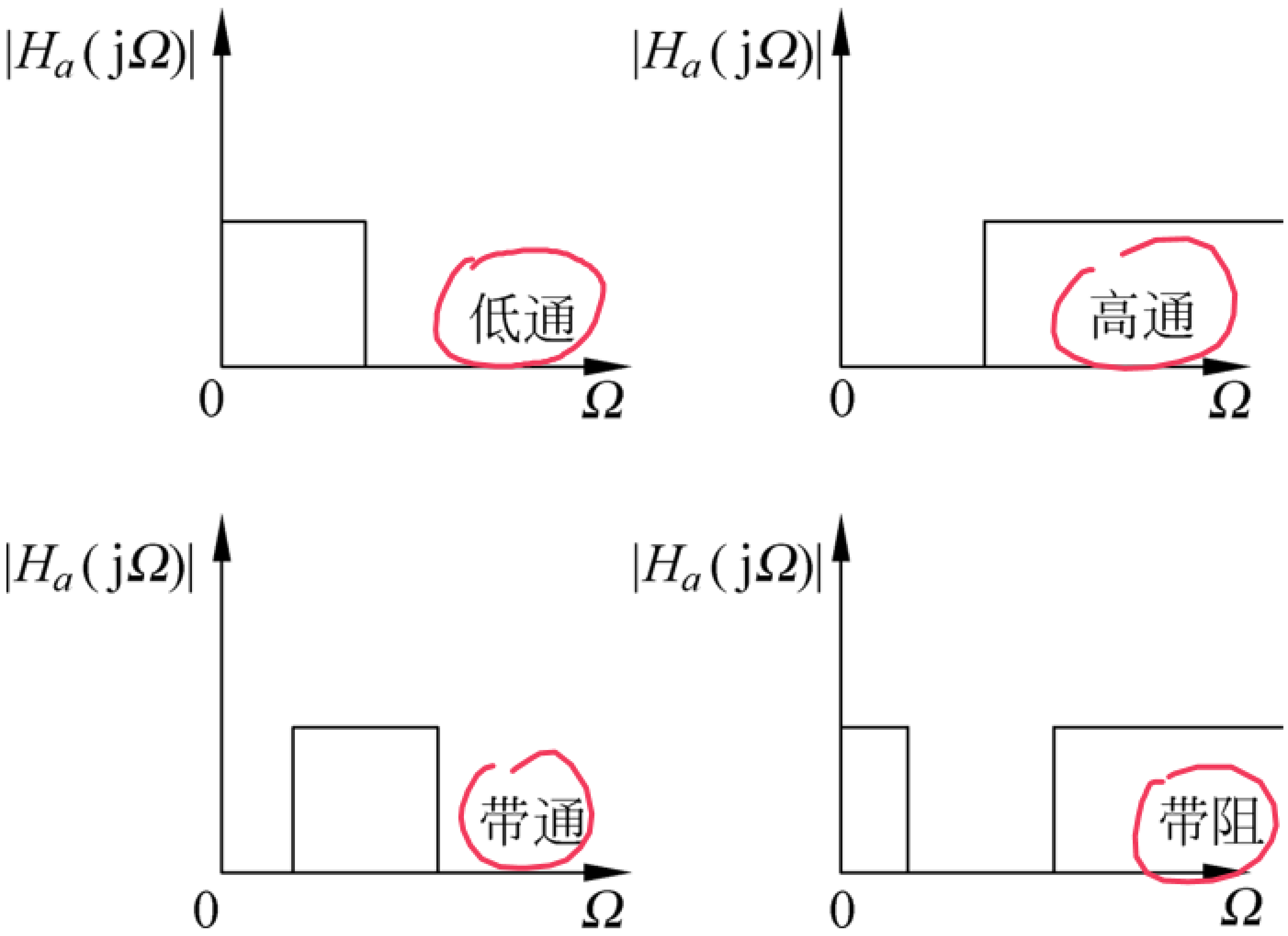
在通带和阻带内都有纹波

贝塞尔（Bessel）滤波器等

通带内有较好的线性相位特性

2模拟滤波器的设计

理想模拟滤波器幅频特性



3巴特沃斯低通滤波器的设计方法

巴特沃斯低通滤波器的幅度平方函数为：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}}$$

现成的公式

- N为滤波器阶数
- Ω_c为3dB截止频率

3巴特沃斯低通滤波器的设计方法

巴特沃斯滤波器的设计流程

1.根据技术指标求出滤波器的阶数N； Ω_p； Ω_s； α_p； $\alpha_s \Rightarrow \Omega_c$

$$\Omega_C = \Omega_p(10^{0.1\alpha_p} - 1)^{-\frac{1}{2N}}$$
$$\Omega_C = \Omega_s(10^{0.1\alpha_s} - 1)^{-\frac{1}{2N}}$$

$$(\frac{\Omega_p}{\Omega_S})^N = \sqrt{\frac{10^{\alpha_p/10} - 1}{10^{\alpha_s/10} - 1}}$$

2.根据公式或查表求出归一化极点，得到归一化传输函数；

$$p_k = e^{j\pi(\frac{1}{2}+\frac{2k+1}{2N})}$$

$$H_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1}(p - p_k)}$$

3巴特沃斯低通滤波器的设计方法

巴特沃斯滤波器的设计流程

3.将归一化传输函数去归一化，得到实际的传输函数；

$$H(s) = H_a(p)\big|_{p=\frac{s}{\Omega_C}}$$

题1已知通带截止频率fp=5kHz，通带最大衰减αp=2dB，阻带截止频率fs=12kHz，阻带最小衰减αs=30dB，按照以上技术指标设计巴特沃斯低通滤波器

解: (1) 确定阶数N

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1a_s} - 1}{10^{0.1a_p} - 1}} = 41.3223$$

$$\lambda_{sp} = \frac{2\pi f_s}{2\pi f_p} = 2.4$$

$$N = -\frac{\log 0.0242}{\log 2.4} = 4.25\text{，} N=5$$

注意要取大于或等于**N**的整数

题1已知通带截止频率fp=5kHz，通带最大衰减αp=2dB，阻带截止频率fs=12kHz，阻带最小衰减αs=30dB，按照以上技术指标设计巴特沃斯低通滤波器

（2）求Ha(p)

直接查表，由N=5，得到：

极点：-0.3090±j0.9511, -0.8090±j0.5878;

-1.0000　得到Ha(p)

或：　直接查表,由N = 5，得到：

b0=1.0000,b1=3.2361,b2=5.2361,b3=5.2361,

b4=3.2361

$$H_a(p) = \frac{1}{p^5 + b_4p^4 + b_3p^3 + b_2p^2 + b_1p + b_0}$$

题1已知通带截止频率fp=5kHz，通带最大衰减αp=2dB，阻带截止频率fs=12kHz，阻带最小衰减αs=30dB，按照以上技术指标设计巴特沃斯低通滤波器

(3) 将$H_a(p)$去归一化，得到$H_a(s)$

A、先求3dB截止频率Ωc

$$\Omega_c = \Omega_p\left(10^{0.1a_p-1}\right)^{-\frac{1}{2N}}$$
$$= 2\Pi \cdot 5.2755krad/s$$

将Ω_c代入得到:

$$\Omega_s' = \Omega_c\left(10^{0.1a_s-1}\right)^{-\frac{1}{2N}} = 2\Pi \cdot 10.525krad/s$$

fs=12kHz有富裕量

题1已知通带截止频率fp=5kHz，通带最大衰减αp=2dB，阻带截止频率fs=12kHz，阻带最小衰减αs=30dB，按照以上技术指标设计巴特沃斯低通滤波器

B、将$p=s/\Omega_c$代入$H_a(p)$中，去归一化得到：

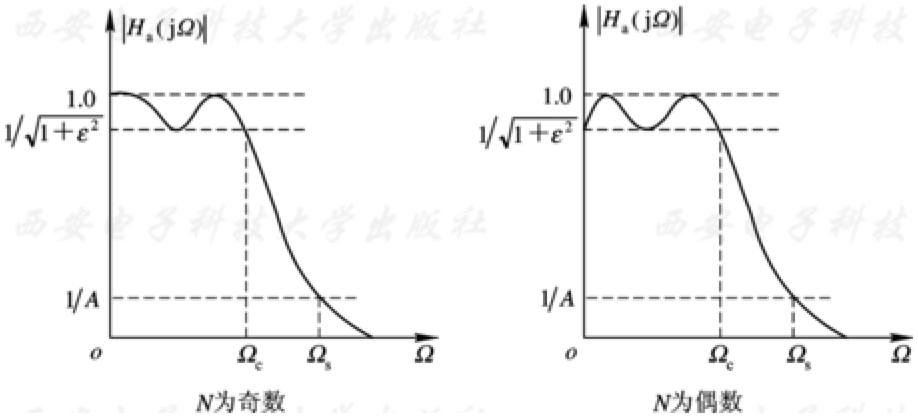
$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^5}{s^5+b_4\Omega_c s^4+b_3\Omega^2{}_c s^3+b_2\Omega^3{}_c s^2+b_1\Omega^4{}_c s+b_0\Omega^5{}_c}$$

4切比雪夫滤波器的设计方法

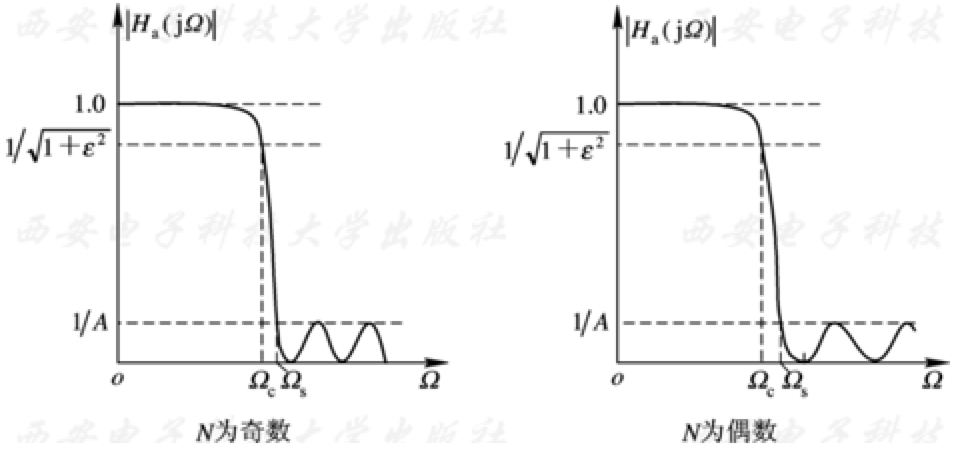
切比雪夫滤波器的幅频特性具有等波纹特性

在通带内是等波纹的，在阻带内是单调的，称为切比雪夫Ⅰ型滤波器；

在通带内是单调的，在阻带内是等波纹的，称为切比雪夫Ⅱ型滤波器。



切比雪夫Ⅰ型低通滤波器的幅度特性



切比雪夫Ⅱ型低通滤波器的幅度特性

5理想模拟滤波器幅频特性

设计思想：　　模拟系统 $H_a(s) \to H(z)$ 数字系统

$$s\text{平面} \xrightarrow{\text{映射}} z\text{平面}$$

Z

因果稳定的 $H_a(s)$ 映射到因果稳定的 $H(z)$

　　即 s 平面的左半平面 $\mathrm{Re}[s] < 0$ 映射到 z 平面的单位圆内 $|z| < 1$

$H(z)$ 的频率响应要能模仿 $H_a(s)$ 的频率响应

　　即 s 平面的虚轴映射到 z 平面的单位圆

6脉冲响应不变法变换

$$H_a(s) \xrightarrow{1} h_a(t) \xrightarrow{2} h(n) \xrightarrow{3} H(z)$$

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}$$

1 $\Downarrow$

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t} u(t)$$

2 $\Downarrow$

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k nT} u(n)$$

3 $\Downarrow$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k nT} z^{-n}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

转换公式

6脉冲响应不变法变换

数字化方法

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}$$

极点：s = sk

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

极点： $z_k = e^{s_k T}$

6脉冲响应不变法变换

——S平面到Z平面的映射关系

① s和z的关系：　$z = e^{sT}$

② ω和Ω的关系：　$s = \sigma + j\Omega \quad z = re^{j\omega}$

$z = e^{sT}$ $\Rightarrow$ $re^{j\omega} = e^{\sigma T}e^{j\Omega T}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\omega = T\Omega}$　　线性关系

r和σ的关系

$r = e^{\sigma T}$

保证系统稳定

保证频响逼近

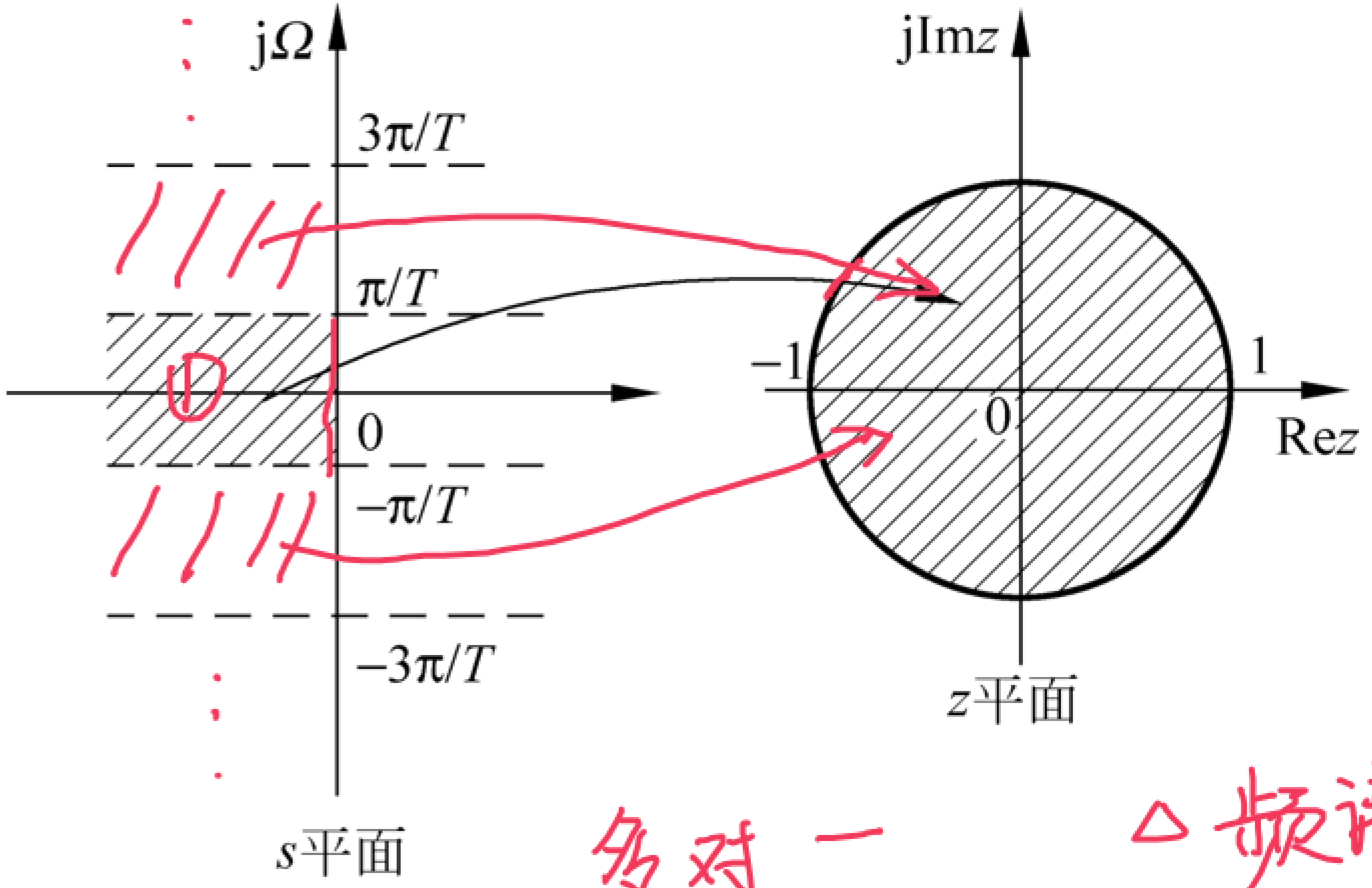
$\sigma < 0$时，$r < 1$　s左半平面映射到z平面单位圆内

$\sigma = 0$时，$r = 1$　s虚轴映射到z平面单位圆上

$\sigma > 0$时，$r > 1$

6脉冲响应不变法变换

——S平面到Z平面的映射关系



多对一

△频谱混叠

6脉冲响应不变法变换 ——设计IIR DF的步骤

（1）确定数字低通滤波器的技术指标

$\omega_P, \omega_S, \alpha_P, \alpha_S,\quad T = 1$

（2）将数字滤波器的技术指标转化为模拟滤波器指标

$\omega = T\Omega \qquad \Omega_p = \dfrac{\omega_p}{T} \qquad \Omega_s = \dfrac{\omega_s}{T}, \alpha_p, \alpha_s$

（3）按模拟指标设计模拟低通滤波器

$\Omega_P, \Omega_S, \alpha_P, \alpha_S \to H_a(s)$

修正过的

(4) 将模拟滤波器$H_a(s)$转换成数字滤波器H(z)

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k} \Rightarrow H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{T A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

6脉冲响应不变法变换

（简答题）

优点：

- $h(n)$完全模仿模拟滤波器的单位抽样响应$h_a(t)$时域逼近良好
- 保持线性关系： $\omega = \Omega T$ 两者线性的关系使得线性相位模拟滤波器转变为线性相位数字滤波器

缺点：

$S \xrightarrow{\text{多对一}} Z$

- 频谱产生混叠

  只适用于设计限带的低通、带通滤波器，不适合用于设计高通和带阻的滤波器。

题2设模拟滤波器的系统函数为 $H_a(s)=\dfrac{2}{s^2+4s+3}$ 试利用脉冲响应不变法求数字滤波器的系统函数。

$$= \frac{2}{(s+1)(s+3)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+3}$$

解：将$H_a(s)$展开成部分分式得

$$H_a(s)=\frac{2}{s^2+4s+3}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}$$

$$= \frac{A_1(s+3)+A_2(s+1)}{(s+1)(s+3)}$$

$$(A_1+A_2)s+3A_1+A_2$$

$$=2$$

$$\begin{cases} A_1+A_2=0 \\ 3A_1+A_2=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1=1 \\ A_2=-1 \end{cases}$$

用 $(1-e^{s_kT}z^{-1})$ 代换 $s-s_k$ 得到

$$H(z)=\frac{T}{1-e^{-T}z^{-1}}-\frac{T}{1-e^{-3T}z^{-1}}$$

题2设模拟滤波器的系统函数为 $H_a(s)=\dfrac{2}{s^2+4s+3}$ 试利用脉冲响应不变法求数字滤波器的系统函数。

取T=1，得到

$$H(z)=\frac{0.3181z^{-1}}{1-0.4177z^{-1}+0.01831z^{-2}}$$

数字滤波器的频率响应为 $z=e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega})=\frac{0.3181\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{1-0.4177\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}+0.01831\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega}}$$

7双线性变换法

1.非线性频率压缩

$\triangle$ $$\boxed{\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{1}{2}\underline{\Omega_1}T\right)}$$ $\Omega_1 \to w$

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{w}{2}T\right)$$

$$\boxed{s = \mathrm{j}\frac{2}{T}\tan\left(\frac{1}{2}\Omega_1 T\right) = \frac{2}{T}\frac{1 - e^{-s_1 t}}{1 + e^{-s_1 t}}}$$

$\Rightarrow$

$\triangle$ $$\boxed{s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

$$\boxed{z = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s}}$$

7双线性变换法

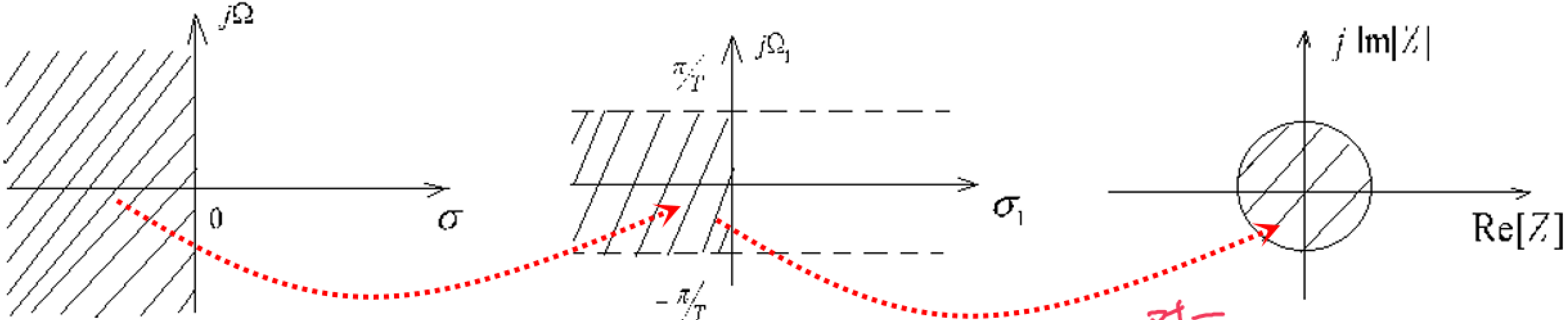
2.S平面转换成Z平面

$H_a(s) = j\Omega$

$H_a(s)|s = j\Omega$

$H_a(s_1)|s_1 = j\Omega_1$

$H(z)|z = e^{s_1 T}$



一对一

双线性变换

不可能产生频率混叠现象

7双线性变换法

$$s = j\Omega, z = e^{j\omega}$$

$$\boxed{\Omega = \frac{2}{T}\tan\frac{1}{2}\omega}$$

$$\boxed{s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{H(z) = H_a(s)\Big|_{s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}}$$

$$H_a(s) = \frac{A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \cdots + A_k s^k}{B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + \cdots + B_k s^k}$$

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_k z^{-k}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_k z^{-k}}$$

题3试分别用脉冲响应不变法和双线性不变法将下式低通模拟滤波器转换成数字滤波器。 $H_a(s)=\dfrac{\alpha}{\alpha+s},\alpha=\dfrac{1}{RC}$

1.脉冲响应不变法

$$s=-\alpha \qquad H_1(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}} \qquad =\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha T}z^{-1}}$$

$$S=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

2.双线性变换法

$$H_2(z)=\frac{\alpha T+\alpha Tz^{-1}}{\alpha T+2+(\alpha T-2)z^{-1}}$$

8设计IIR数字低通滤波器的步骤

1.确定数字低通滤波器的技术指标；

ω_s； ω_p； α_p； α_s

2.转换成模拟低通滤波器的技术指标；

Ω_s； Ω_p； α_p； α_s

双线性 $\Leftarrow$ $\boxed{\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{1}{2}\omega\right)}$ $\boxed{\omega = \Omega T}$ $\Rightarrow$ 脉冲

3.按照技术指标设计模拟低通滤波器；

$H_a(s)$

8设计IIR数字低通滤波器的步骤

4.转换成低通数字滤波器；

$$H_a(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_i}$$

脉冲

$$\boxed{H(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}}}$$

$$\boxed{H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}}$$

双线性

脉冲响应不变法只能设计数字低通、带通滤波器，频率线性转换；

双线性变换法可以设计所有类型的滤波器，频率非线性变换。

简答