

通信原理



第10章 数字信号最佳接收

作业: **P₂₇₆**

9-2

9-3

9-8

9-9

9-10

引言

□ 一个通信系统的质量优劣在很大程度上取决于接收系统的性能。这是因为，影响信息可靠传输的不利因素（信道特性不理想及信道中存在噪声等）直接作用到接收端，对信号接收产生影响。

□ 从接收角度看，在前面几章阐述的各种通信系统中，其接收系统是否是最好的呢？这必须涉及一个通信理论中十分重要的问题——最佳接收或信号接收最佳化问题。

“最好”或“最佳”并非是一个绝对的概念，它是在某个准则意义下说的一个相对概念。这就是说，在某个准则下是最佳的接收机，在另一准则下就并非一定是最佳的。

本章仅讨论数字信号最佳接收的基本原理。在本章中，首先介绍最佳接收的准则，然后寻求并推导出满足一定准则的最佳接收机结构，并分析最佳接收机的性能。最后分析比较几种最佳接收机与实际接收机的性能及给出实现最佳接收机的途径。

10.1 数字信号的统计特性

- 以二进制为例研究接收电压的统计特性。
- 假设：通信系统中的噪声是均值为0的带限高斯白噪声，其单边功率谱密度为 n_0 ；并设发送的二进制码元为“0”和“1”，其发送概率分别为 $P(0)$ 和 $P(1)$ ，则有

$$P(0) + P(1) = 1$$

- 若此通信系统的基带截止频率小于 f_H ，则根据低通信号抽样定理，接收噪声电压可以用其抽样值表示，抽样速率要求不小于其奈奎斯特速率 $2f_H$ 。
- 设在一个码元持续时间 T_s 内以 $2f_H$ 的速率抽样，共得到 k 个抽样值：则有 $k = 2f_H T_s$ 。

10.1 数字信号的统计特性

□ 由于每个噪声电压抽样值都是正态分布的随机变量，故其一维概率密度可以写为

$$f(n_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{n_i^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

式中， σ_n - 噪声的标准偏差；

σ_n^2 - 噪声的方差，即噪声平均功率；

$i = 1, 2, \dots, k$ 。

□ 设接收噪声电压 $n(t)$ 的 k 个抽样值的 k 维联合概率密度函数为

$$f_k(n_1, n_2, \dots, n_k)$$

10.1 数字信号的统计特性

▣ 带限高斯白噪声按奈奎斯特速率抽样得到的抽样值之间是互不相关、互相独立的。这样，此 k 维联合概率密度函数可以表示为

$$f_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = f(n_1)f(n_2)\cdots f(n_k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^k n_i^2\right)$$

▣ 当 k 很大时，在一个码元持续时间 T_s 内：

$$\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^k n_i^2 \quad \underline{\underline{\sigma_n^2 = n_0 f_H}} \quad \frac{1}{2n_0 f_H} \sum_{i=1}^k n_i^2 \quad \underline{\underline{\Delta t = \frac{1}{2f_H}}} \quad \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^k \Delta t n_i^2$$

$$\frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^k \Delta t n_i^2 \quad \underline{\underline{\Delta t \rightarrow 0 \text{ 或 } k \rightarrow \infty}} \quad \frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} n^2(t) dt$$

10.1 数字信号的统计特性

■ 前式的联合概率密度函数可以改写为：

$$f(\mathbf{n}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left[-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} n^2(t) dt\right]$$

$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ - k 维矢量，表示一个码元内噪声的 k 个抽样值，它可以看作是 k 维空间中的一个点。

在码元持续时间 T_s 、噪声单边功率谱密度 n_0 和抽样数 k （它和系统带宽有关）给定后， $f(\mathbf{n})$ 仅取决于该码元期间内噪声的能量。

10.1 数字信号的统计特性

□ 由于噪声的随机性，每个码元持续时间内噪声的波形和能量都是不同的，这就使被传输的码元中有一些会发生错误，而另一些则无错。

□ 设接收电压 $r(t)$ 为信号电压 $s(t)$ 和噪声电压 $n(t)$ 之和：

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

则在发送码元确定之后，接收电压 $r(t)$ 的随机性将完全由噪声决定，故它仍服从高斯分布，其方差仍为 σ_n^2 ，但是均值变为 $s(t)$ 。

10.1 数字信号的统计特性

□ 当发送码元“0”的信号波形为 $s_0(t)$ 时，接收电压 $r(t)$ 的 k 维联合概率密度函数为

$$f_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left\{-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_0(t)]^2 dt\right\}$$

□ 同理，当发送码元“1”的信号波形为 $s_1(t)$ 时，接收电压 $r(t)$ 的 k 维联合概率密度函数为

$$f_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left\{-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_1(t)]^2 dt\right\}$$

式中 \mathbf{r} 表示一个码元内接收电压的 k 个抽样值；仍是 k 维空间中的一个点，是一个矢量。而 k 维联合概率密度函数是一个标量。

10.2 数字信号的最佳接收

□“最佳”的准则：错误概率最小

□产生错误的原因：暂不考虑失真的影响，主要讨论在二进制数字通信系统中如何使噪声引起的错误概率最小。

设在一个二进制通信系统中发送码元“1”的概率为 $P(1)$ ，发送码元“0”的概率为 $P(0)$ ，则总误码率 P_e 等于

$$P_e = P(1)P_{e1} + P(0)P_{e0}$$

式中 $P_{e1} = P(0/1)$ - 发送“1”时，收到“0”的条件概率；

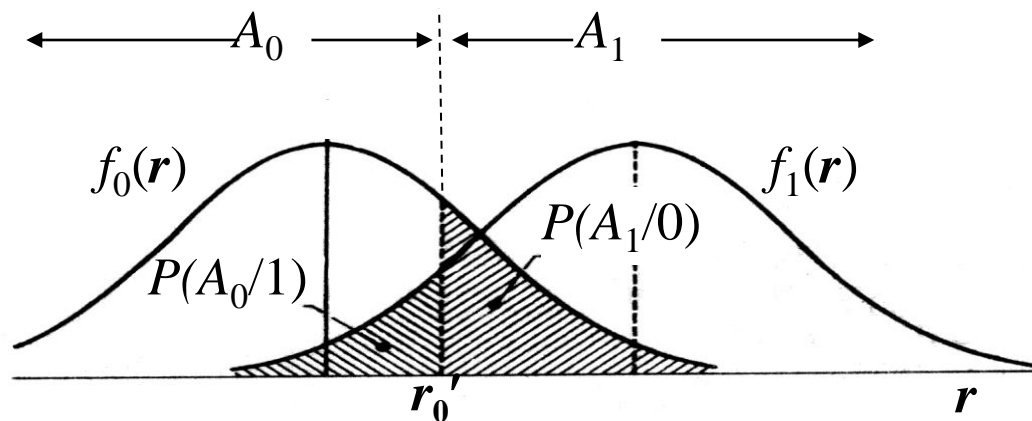
$P_{e0} = P(1/0)$ - 发送“0”时，收到“1”的条件概率；

上面这两个条件概率称为错误转移概率。

10.2 数字信号的最佳接收

判决规则：接收端收到的每个码元持续时间内的电压可以用一个 k 维矢量表示。接收设备需要对每个接收矢量作判决，判定它是发送码元“0”，还是“1”。

由接收矢量决定的两个联合概率密度函数 $f_0(r)$ 和 $f_1(r)$ 的曲线画在下图中：



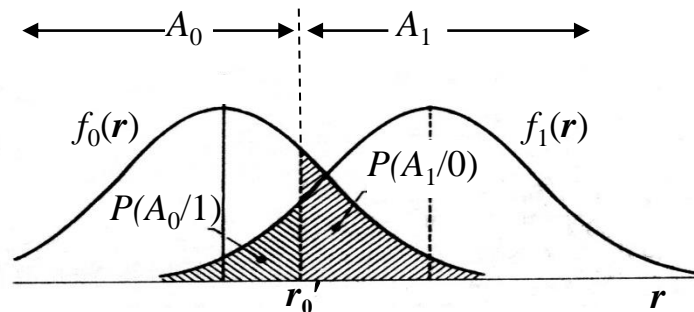
可以将此空间划分为两个区域 A_0 和 A_1 ，其边界是 r'_0 ，并将判决规则规定为：

若接收矢量落在区域 A_0 内，则判为发送码元是“0”；
若接收矢量落在区域 A_1 内，则判为发送码元是“1”。

10.2 数字信号的最佳接收

总误码率可以写为

$$P_e = P(1)P(A_0/1) + P(0)P(A_1/0)$$



式中， $P(A_0/1)$ 表示发送“1”时，矢量 r 落在区域 A_0 的条件概率
 $P(A_1/0)$ 表示发送“0”时，矢量 r 落在区域 A_1 的条件概率

$$P(A_0/1) = \int_{A_0} f_1(r) dr \quad P(A_1/0) = \int_{A_1} f_0(r) dr$$

这两个概率在图中分别由两块阴影面积表示。

10.2 数字信号的最佳接收

得到 $P_e = P(1) \int_{A_0} f_1(r) dr + P(0) \int_{A_1} f_0(r) dr$

参考上图可知，上式可以写为

$$P_e = P(1) \int_{-\infty}^{r_0'} f_1(r) dr + P(0) \int_{r_0'}^{\infty} f_0(r) dr$$

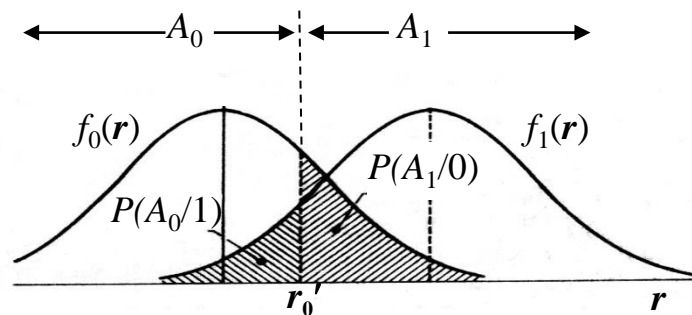
上式表示 P_e 是 r_0' 的函数。为了求出使 P_e 最小的判决分界点 r_0' ，将上式对 r_0' 求导

$$\frac{\partial P_e}{\partial r_0'} = P(1) f_1(r_0') - P(0) f_0(r_0')$$

并令导函数等于0，

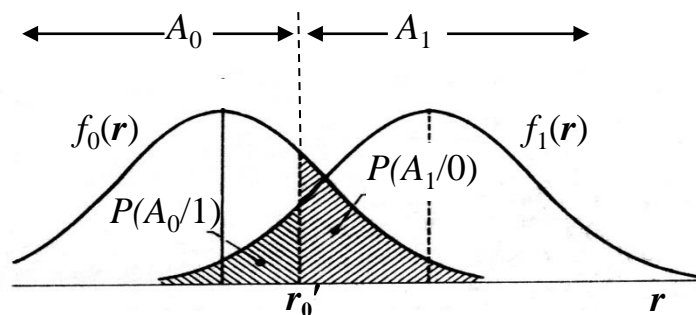
求出最佳分界点 r_0 的条件：

$$P(1) f_1(r_0) - P(0) f_0(r_0) = 0$$



10.2 数字信号的最佳接收

即
$$\frac{P(1)}{P(0)} = \frac{f_0(r_0)}{f_1(r_0)}$$



当先验概率相等时，即 $P(1) = P(0)$ 时， $f_0(r_0) = f_1(r_0)$ ，所以最佳分界点位于图中两条曲线交点处的 r 值上。

在判决边界确定之后，按照接收矢量 r 落在区域 A_0 应判为收到的是“0”的判决准则，这时有：

若
$$\frac{P(1)}{P(0)} < \frac{f_0(r)}{f_1(r)}$$

则判为“0”；

若
$$\frac{P(1)}{P(0)} > \frac{f_0(r)}{f_1(r)}$$

则判为“1”。

似然比
准则

10.2 数字信号的最佳接收

发送“0”和发送“1”的先验概率相等时，上两式的条件为：

$$\begin{cases} \text{若 } f_0(r) > f_1(r), \text{ 则判为 “0”} \\ \text{若 } f_0(r) < f_1(r), \text{ 则判为 “1”} \end{cases}$$

这个判决准则常称为**最大似然准则**。按照这个准则判决就可以得到理论上最佳的误码率，即达到理论上的误码率最小值。

10.3 确知数字信号的最佳接收机

□确知信号：指其取值在任何时间都是确定的、可以预知的信号。

□判决准则

当发送码元为“0”，波形为 $s_0(t)$ 时，接收电压的概率密度为

$$f_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left\{-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_0(t)]^2 dt\right\}$$

当发送码元为“1”，波形为 $s_1(t)$ 时，接收电压的概率密度为

$$f_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left\{-\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_1(t)]^2 dt\right\}$$

因此，将上两式代入判决准则式，经过简化，得到：

10.3 确知数字信号的最佳接收机

若 $P(1) \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_1(t)]^2 dt \right\} < P(0) \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_0(t)]^2 dt \right\}$

则判为发送码元是 $s_0(t)$;

若 $P(1) \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_1(t)]^2 dt \right\} > P(0) \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^{T_s} [r(t) - s_0(t)]^2 dt \right\}$

则判为发送码元是 $s_1(t)$ 。

10.3 确知数字信号的最佳接收机

将上两式的两端分别取对数，得到
若

$$n_0 \ln \frac{1}{P(1)} + \int_0^{T_s} [r(t) - s_1(t)]^2 dt > n_0 \ln \frac{1}{P(0)} + \int_0^{T_s} [r(t) - s_0(t)]^2 dt$$

则判为发送码元是 $s_0(t)$ ；反之则判为发送码元是 $s_1(t)$ 。

由于已经假设两个码元的能量相同，即

$$\int_0^{T_s} s_0^2(t) dt = \int_0^{T_s} s_1^2(t) dt$$

所以上式还可以进一步简化。

10.3 确知数字信号的最佳接收机

若
$$W_1 + \int_0^{T_s} r(t)s_1(t)dt < W_0 + \int_0^{T_s} r(t)s_0(t)dt$$

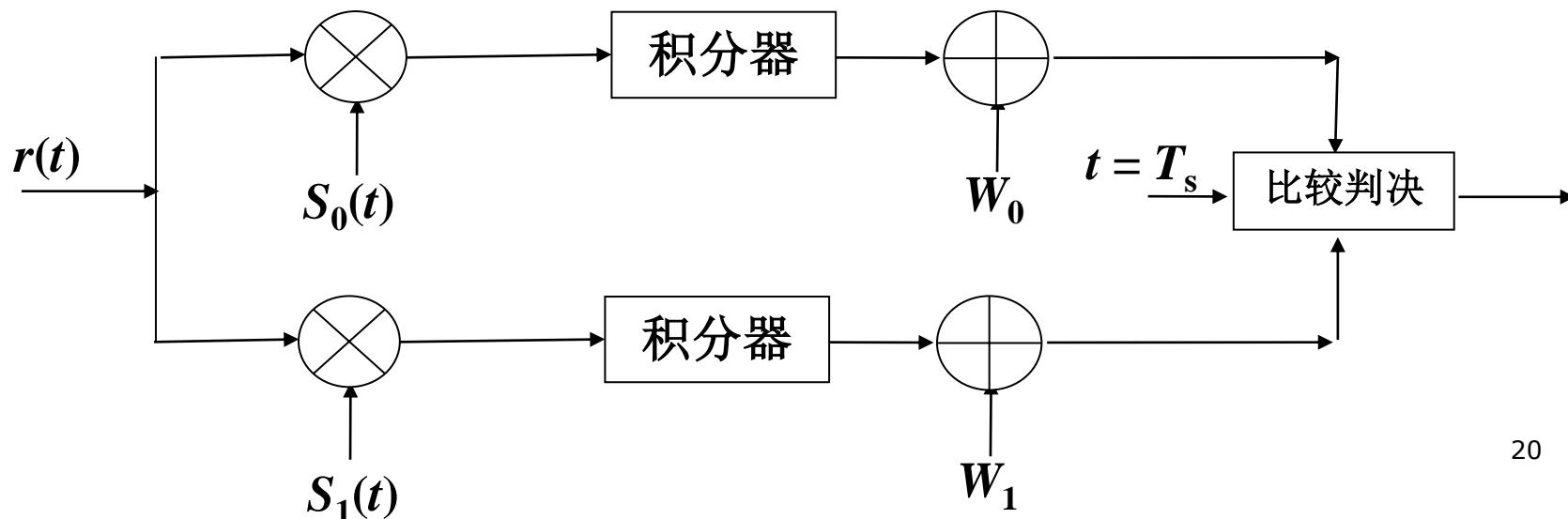
则判为发送码元是 $s_0(t)$ ；反之，则判为发送码元是 $s_1(t)$ 。

式中 $W_0 = \frac{n_0}{2} \ln P(0)$ $W_1 = \frac{n_0}{2} \ln P(1)$

W_0 和 W_1 可以看作是由先验概率决定的加权因子。

■最佳接收机

■按照上式画出的最佳接收机原理方框图如下：

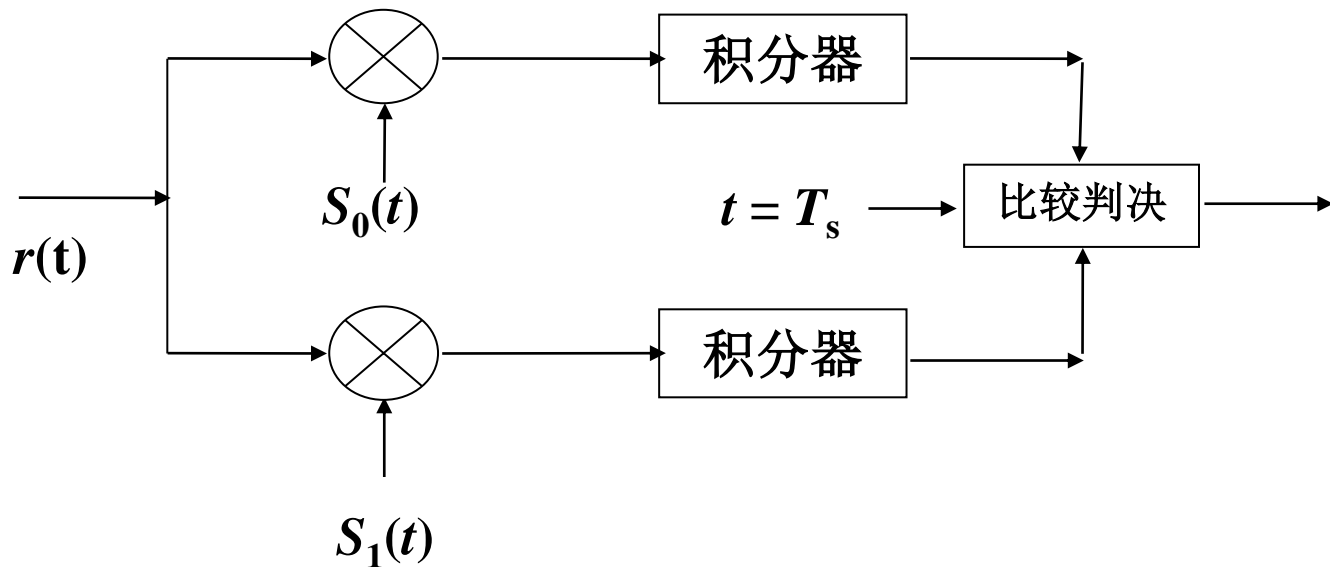


10.3 确知数字信号的最佳接收机

若此二进制信号的先验概率相等，则上式简化为

$$\int_0^{T_s} r(t)s_1(t)dt < \int_0^{T_s} r(t)s_0(t) dt$$

最佳接收机的原理方框图也可以简化成



□ 上面的最佳接收机的核心是由相乘和积分构成的相关运算，所以常称这种算法为**相关接收法**。

□ 由最佳接收机得到的误码率是理论上可能达到的最小值。

10.4 确知数字信号最佳接收的误码率

在最佳接收机中，若

$$n_0 \ln \frac{1}{P(1)} + \int_0^{T_s} [r(t) - s_1(t)]^2 dt > n_0 \ln \frac{1}{P(0)} + \int_0^{T_s} [r(t) - s_0(t)]^2 dt$$

则判为发送码元是 $s_0(t)$ 。

因此，在发送码元为 $s_1(t)$ 时，若上式成立，则将发生错误判决。所以若将 $r(t) = s_1(t) + n(t)$ 代入上式，则上式成立的概率就是在发送码元“1”的条件下收到“0”的概率，即发生错误的条件概率 $P(0/1)$ 。此条件概率的计算结果如下

$$P(0/1) = P(\xi < a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx$$

10.4 确知数字信号最佳接收的误码率

$$P(0/1) = P(\xi < a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx$$

式中

$$a = \frac{n_0}{2} \ln \frac{P(0)}{P(1)} - \frac{1}{2} \int_0^{T_s} [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt$$

$$\sigma_\xi^2 = D(\xi) = \frac{n_0}{2} \int_0^{T_s} [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt$$

同理，可以求出发送 $s_0(t)$ 时，判决为收到 $s_1(t)$ 的条件错误概率

$$P(1/0) = P(\xi < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx$$

式中

$$b = \frac{n_0}{2} \ln \frac{P(1)}{P(0)} - \frac{1}{2} \int_0^{T_s} [s_0(t) - s_1(t)]^2 dt$$

10.4 确知数字信号最佳接收的误码率

因此，总误码率为

$$\begin{aligned} P_e &= P(1)P(0/1) + P(0)P(1/0) \\ &= P(1) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx \right] + P(0) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx \right] \end{aligned}$$

■ 先验概率对误码率的影响

当先验概率 $P(0) = 0$ 及 $P(1) = 1$ 时， $a = -\infty$ 及 $b = \infty$ ，因此由上式计算出总误码率 $P_e = 0$ 。在物理意义上，这时由于发送码元只有一种可能性，即是确定的“1”。因此，不会发生错误。同理，若 $P(0) = 1$ 及 $P(1) = 0$ ，总误码率也为零。

10.4 确知数字信号最佳接收的误码率

□ 当先验概率相等时:

$P(0) = P(1) = 1/2$, $a = b$ 。这样, 上式可以化简为

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^c e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx$$

式中

$$c = -\frac{1}{2} \int_0^{T_s} [s_0(t) - s_1(t)]^2 dt$$

上式表明, 当先验概率相等时, 对于给定的噪声功率 σ_ξ^2 , 误码率仅和两种码元波形之差 $[s_0(t) - s_1(t)]$ 的能量有关, 而与波形本身无关。差别越大, c 值越小, 误码率 P_e 也越小。

□ 当先验概率不等时:

由计算表明, 先验概率不等时的误码率将略小于先验概率相等时的误码率。就误码率而言, 先验概率相等是最坏的情况。

10.4 确知数字信号最佳接收的误码率

□ 先验概率相等时误码率的计算

在噪声强度给定的条件下，误码率完全取决于信号码元的区别。现在给出定量地描述码元区别的一个参量，即码元的相关系数 ρ ，其定义如下：

$$\rho = \frac{\int_0^{T_s} s_0(t)s_1(t)dt}{\sqrt{\left[\int_0^{T_s} s_0^2(t)dt\right]\left[\int_0^{T_s} s_1^2(t)dt\right]}} = \frac{\int_0^{T_s} s_0(t)s_1(t)dt}{\sqrt{E_0 E_1}}$$

式中 $E_0 = \int_0^{T_s} s_0^2(t)dt$ $E_1 = \int_0^{T_s} s_1^2(t)dt$

E_0 、 E_1 为信号码元的能量。

当 $s_0(t) = s_1(t)$ 时， $\rho = 1$ ，为最大值；当 $s_0(t) = -s_1(t)$ 时， $\rho = -1$ ，为最小值。所以 ρ 的取值范围在 $-1 \leq \rho \leq +1$ 。

10.4 确知数字信号最佳接收的误码率

当两码元的能量相等时，令 $E_0 = E_1 = E_b$ ，则上式可以写成

$$\rho = \frac{\int_0^{T_s} s_0(t)s_1(t)dt}{E_b}$$

并且

$$c = -\frac{1}{2} \int_0^{T_s} [s_0(t) - s_1(t)]^2 dt = -E_b(1 - \rho)$$

将上式代入误码率公式，得到

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^c e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^{-E_b(1-\rho)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}} dx$$

为了将上式变成实用的形式，作如下的代数变换：

令 $z = x / \sqrt{2}\sigma_\xi$

则有 $z^2 = x^2 / 2\sigma_\xi^2 \quad dz = dx / \sqrt{2}\sigma_\xi$

10.4 确知数字信号最佳接收的误码率

于是上式变为

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^{-E_b(1-\rho)/\sqrt{2}\sigma_\xi} e^{-z^2} \sqrt{2}\sigma_\xi dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-E_b(1-\rho)/\sqrt{2}\sigma_\xi} e^{-z^2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{E_b(1-\rho)/\sqrt{2}\sigma_\xi}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{E_b(1-\rho)/\sqrt{2}\sigma_\xi}^{\infty} e^{-z^2} dz \right] = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[\frac{E_b(1-\rho)}{\sqrt{2}\sigma_\xi} \right] \right\} \end{aligned}$$

利用下式中 σ_ξ^2 和 n_0 关系

$$\sigma_\xi^2 = D(\xi) = \frac{n_0}{2} \int_0^{T_s} [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt = n_0 E_b (1 - \rho)$$

代入上式，得到误码率最终表示式：

$$P_e = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}} \right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}} \right]$$

10.4 确知数字信号最佳接收的误码率

$$P_e = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}} \right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2n_0}} \right]$$

式中

E_b — 码元能量;

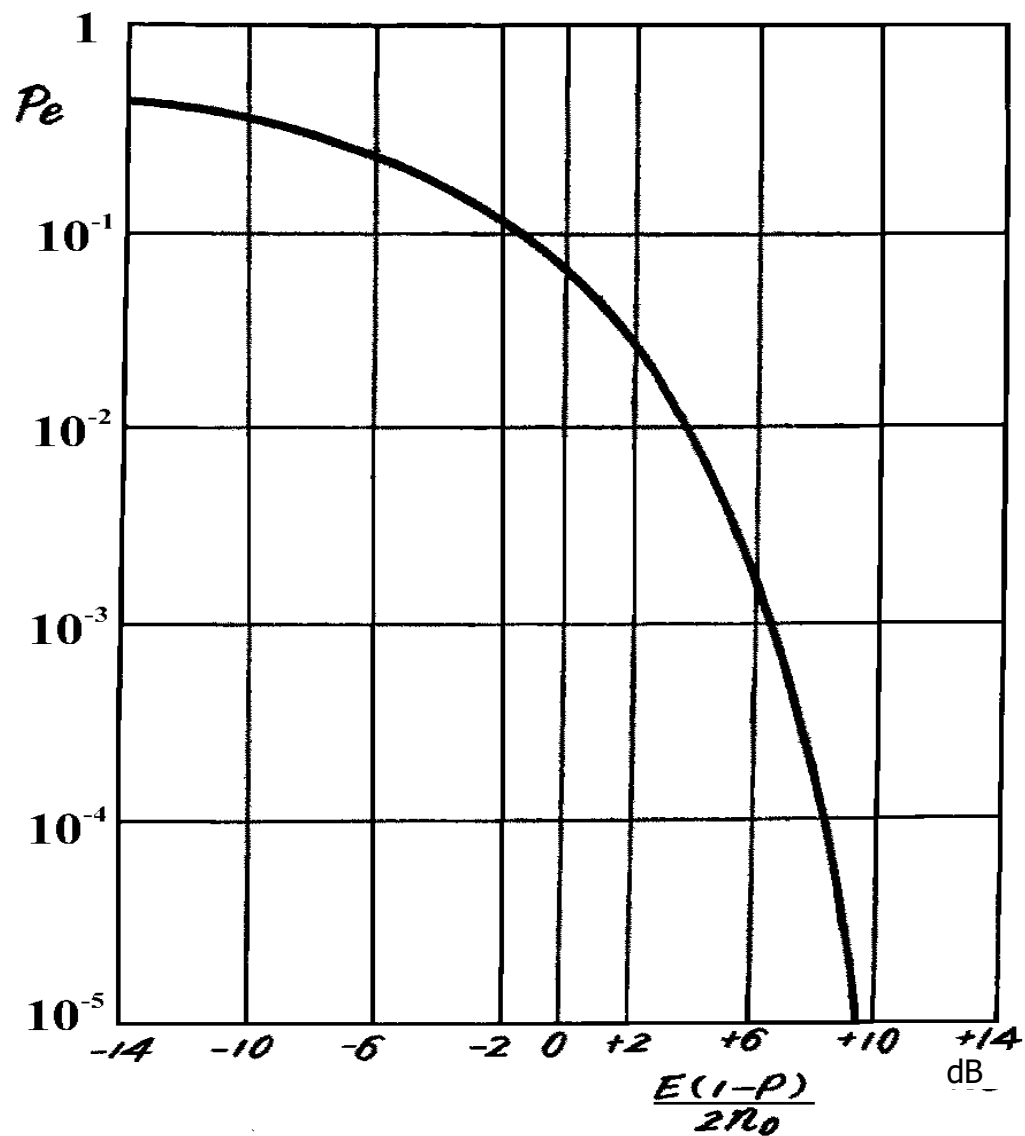
ρ — 码元相关系数;

n_0 — 噪声功率谱密度。

上式是一个非常重要的理论公式，它给出了理论上二进制等能量数字信号误码率的最佳（最小可能）值。在下图中画出了它的曲线。实际通信系统中得到的误码率只可能比它差，但是绝对不可能超过它。

10.4 确知数字信号最佳接收的误码率

□ 误码率曲线



10.4 确知数字信号最佳接收的误码率

最佳接收性能特点

误码率仅和 E_b / n_0 以及相关系数 ρ 有关，与信号波形及噪声功率无直接关系。

码元能量 E_b 与噪声功率谱密度 n_0 之比，实际上相当于信号噪声功率比 P_s/P_n 。因为若系统带宽 B 等于 $1/T_s$ ，
则有

$$\frac{E_b}{n_0} = \frac{P_s T_s}{n_0} = \frac{P_s}{n_0 (1/T_s)} = \frac{P_s}{n_0 B} = \frac{P_s}{P_n}$$

相关系数 ρ 对于误码率的影响很大。当两种码元的波形相同，相关系数最大，即 $\rho=1$ 时，误码率最大。这时的误码率 $P_e = 1/2$ 。因为这时两种码元波形没有区别，接收端是在没有根据的乱猜。

10.4 确知数字信号最佳接收的误码率

■当两种码元的波形相反，相关系数最小，即 $\rho = -1$ 时，误码率最小。这时的最小误码率等于

■

$$P_e = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{E_b}{n_0}} \right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{n_0}} \right)$$

例如，2PSK信号的相关系数就等于-1。

■当两种码元正交，即相关系数 ρ 等于0时，误码率等于

$$P_e = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2n_0}} \right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_b}{2n_0}} \right]$$

■例如，2FSK信号的相关系数就等于或近似等于零。

10.4 确知数字信号最佳接收的误码率

■若两种码元中有一种的能量等于零，例如2ASK信号，则

$$c = -\frac{1}{2} \int_0^{T_s} [s_0(t)]^2 dt$$

误码率为

$$P_e = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{E_b}{4n_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{4n_0}} \right)$$

■比较以上3式可见，它们之间的性能差3dB，即2ASK信号的性能比2FSK信号的性能差3dB，而2FSK信号的性能又比2PSK信号的性能差3dB。

10.7 实际接收机和最佳接收机的性能比较

	实际接收机的 P_e	最佳接收机的 P_e
单极性不归零码	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{A^2 / 8 \sigma_n^2}$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{E_b / 4 n_0}$
相干2ASK信号	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r / 4}$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{E_b / 4 n_0}$
双极性不归零码	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{A^2 / 2 \sigma_n^2}$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{E_b / n_0}$
相干2FSK信号	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r / 2}$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{E_b / 2 n_0}$
相干2PSK信号	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r}$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{E_b / n_0}$

10.7 实际接收机和最佳接收机的性能比较

由表可以看出，横向比较两种结构形式接收机误码性能可等价于比较 r 与 E_b/n_0 的大小。

若 $r > E_b/n_0$ ，实际接收机误码率小于最佳接收机误码率，则实际接收机性能优于最佳接收机性能；

若 $r < E_b/n_0$ ，实际接收机误码率大于最佳接收机误码率，则最佳接收机性能优于实际接收机性能；

若 $r = E_b/n_0$ ，实际接收机误码率等于最佳接收机误码率，则实际接收机性能与最佳接收机性能相同。

10.7 实际接收机和最佳接收机的性能比较

实际接收机输入端总是有一个带通滤波器，其作用有两个：

一是使输入信号顺利通过；

二是使噪声尽可能少的通过，以减小噪声对信号检测的影响。

10.7 实际接收机和最佳接收机的性能比较

信噪比 $r=S/N$ 是指带通滤波器输出端的信噪比。

设噪声为高斯白噪声，单边功率谱密度为 n_0 ，带通滤波器的等效矩形带宽为 B ，则带通滤波器输出端的信噪比为

$$r = \frac{S}{N} = \frac{S}{n_0 B}$$

对于最佳接收系统，接收机前端没有带通滤波器，其输入端信号能量与噪声功率谱密度之比为

$$\frac{E_b}{n_0} = \frac{ST_s}{n_0} = \frac{S}{n_0 \left(\frac{1}{T_s} \right)}$$

10.7 实际接收机和最佳接收机的性能比较

若 $B < \frac{1}{T_s}$

则实际接收机性能优于最佳接收机性能；

若 $B > \frac{1}{T_s}$

则最佳接收机性能优于实际接收机性能；

若 $B = \frac{1}{T_s}$

则实际接收机性能与最佳接收机性能相同。

10.7 实际接收机和最佳接收机的性能比较

对于数字调制信号，接收端的带通滤波器带宽 B 满足：

$$B_{2ASK} = B_{2PSK} = 2 \cdot \frac{1}{T_s} = 2R_s$$

$$B_{2FSK} = 2R_s$$

所以 $B > \frac{1}{T_s}$

10.7 实际接收机和最佳接收机的性能比较

即在实际接收机中，为使信号顺利通过，带通滤波器的带宽必须满足：

$$B > \frac{1}{T_s}$$

此时，实际接收机性能比最佳接收机性能差。

因此在相同的输入条件下，最佳接收机性能一定优于实际接收机性能。

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

□什么是匹配滤波器？

用线性滤波器对接收信号滤波时，使抽样时刻上输出信噪比最大的线性滤波器称为匹配滤波器。

□假设条件：

□接收滤波器的传输函数为 $H(f)$ ，冲激响应为 $h(t)$ ，滤波器输入码元 $s(t)$ 的持续时间为 T_s ，信号和噪声之和 $r(t)$ 为

$$r(t) = s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$

式中， $s(t)$ - 信号码元，

$n(t)$ - 高斯白噪声；

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

□ 并设信号码元 $s(t)$ 的频谱密度函数为 $S(f)$ ，噪声 $n(t)$ 的单边功率谱密度为 n_0 。

□ 输出电压

□ 假定滤波器是线性的，根据线性电路叠加定理，当滤波器输入电压 $r(t)$ 中包括信号和噪声两部分时，滤波器的输出电压 $y(t)$ 中也包含相应的输出信号 $s_o(t)$ 和输出噪声 $n_o(t)$ 两部分，即

$$y(t) = s_o(t) + n_o(t)$$

$$s_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) S(f) e^{j2\pi f t} df$$

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

□输出噪声功率

$$P_Y(f) = |H(f)|^2 P_R(f)$$

这时的输出噪声功率 N_o 等于

$$N_o = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \cdot \frac{n_0}{2} df = \frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

□输出信噪比

在抽样时刻 t_0 上, 输出信号瞬时功率与噪声平均功率之比为

$$r_o = \frac{|s_o(t_0)|^2}{N_o} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f) S(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2}{\frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}$$

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

匹配滤波器的传输特性:

利用施瓦兹不等式求 r_0 的最大值

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx$$

若 $f_1(x) = k f_2^*(x)$ ，则上式的等号成立，其中 k 为任意常数。

令 $f_1(x) = H(f)$, $f_2(x) = S(f) e^{j2\pi f t_0}$

则有

$$r_0 \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{\frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{\frac{n_0}{2}} = \frac{2E}{n_0}$$

式中

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

而且当

$$H(f) = kS^*(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

时，上式的等号成立，即得到最大输出信噪比 $2E/n_0$ 。

上式表明， $H(f)$ 就是我们要找的最佳接收滤波器传输特性。它等于信号码元频谱的复共轭（除了常数因子外）。故称此滤波器为匹配滤波器。

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

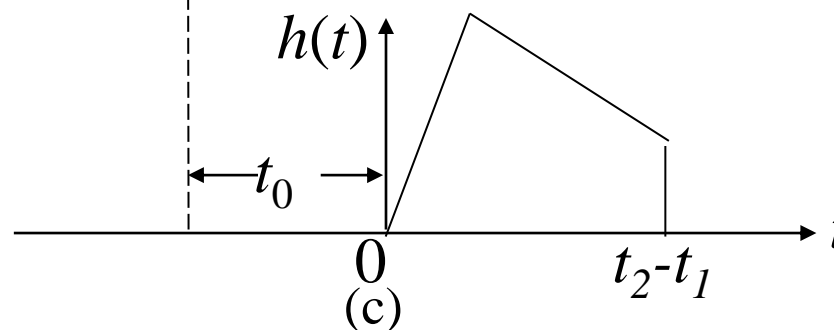
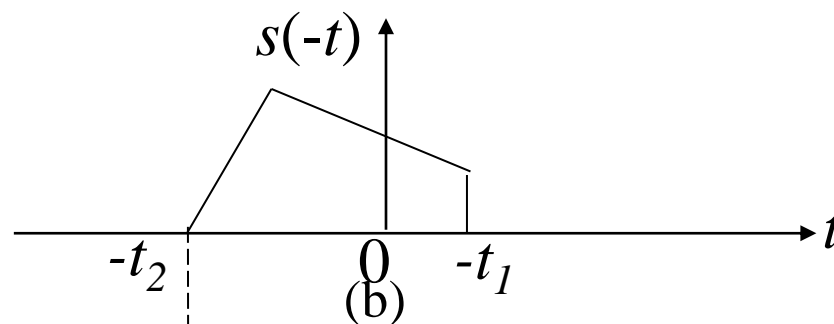
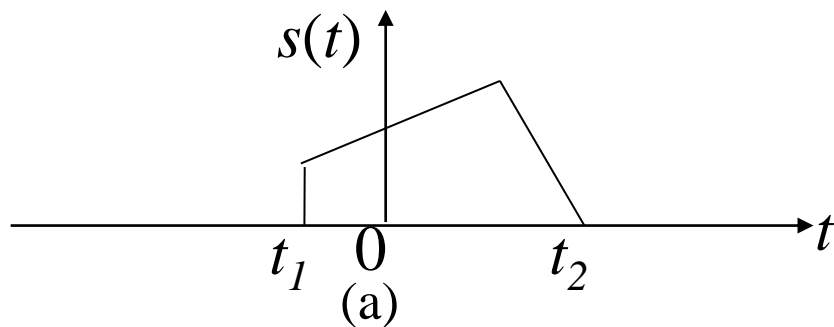
匹配滤波器的冲激响应函数:

$$\begin{aligned}h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} k S^*(f) e^{-j2\pi f t_0} e^{j2\pi f t} df \\&= k \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right]^* e^{-j2\pi f (t_0 - t)} df \\&= k \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f (\tau - t_0 + t)} df \right] s(\tau) d\tau \\&= k \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(\tau - t_0 + t) d\tau = k s(t_0 - t)\end{aligned}$$

由上式可见，匹配滤波器的冲激响应 $h(t)$ 就是信号 $s(t)$ 的镜像 $s(-t)$ ，但在时间轴上（向右）平移了 t_0 。

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

□图解



10.8 数字信号的匹配滤波接收法

□ 实际的匹配滤波器

一个实际的匹配滤波器应该是物理可实现的，其冲激响应必须符合因果关系，在输入冲激脉冲加入前不应该有冲激响应出现，即必须有：

$$h(t) = 0, \quad \text{当 } t < 0$$

即要求满足条件

$$s(t_0 - t) = 0, \quad \text{当 } t_0 - t < 0$$

或满足条件

$$s(t) = 0, \quad \text{当 } t > t_0$$

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

$$s(t) = 0, \quad \text{当 } t > t_0$$

上式条件说明，对于一个物理可实现的匹配滤波器，其输入信号 $s(t)$ 必须在它输出最大信噪比的时刻 t_0 之前结束。

也就是说，若输入信号在 T_s 时刻结束，则对物理可实现的匹配滤波器，其输出最大信噪比时刻 t_0 必须在输入信号结束之后，即 $t_0 \geq T_s$ 。

一般情况可取 $t_0 = T_s$ 。故匹配滤波器的冲激响应可以写为

$$h(t) = ks(T_s - t)$$

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

这时，若匹配滤波器的输入电压为 $s(t)$ ，则输出信号码元的波形为：

$$\begin{aligned} s_o(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)h(\tau)d\tau = k \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)s(T_s-\tau)d\tau \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} s(-\tau')s(t-T_s-\tau')d\tau' = kR(t-T_s) \end{aligned}$$

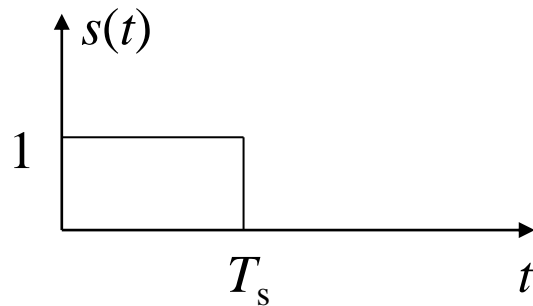
上式表明，匹配滤波器输出信号码元波形是输入信号码元波形的自相关函数的 k 倍。 k 是一个任意常数，它与 r_0 的最大值无关；通常取 $k = 1$ 。

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

□ 【例10.1】 设接收信号码元 $s(t)$ 的表示式为

$$s(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_s \\ 0, & \text{其他}t \end{cases}$$

试求其匹配滤波器的特性和输出信号码元的波形。



10.8 数字信号的匹配滤波接收法

【解】上式所示的信号波形是一个矩形脉冲，如下图所示。
其频谱为

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{j2\pi f} (1 - e^{-j2\pi fT_s})$$

$$H(f) = kS * (f)e^{-j2\pi ft_0}$$

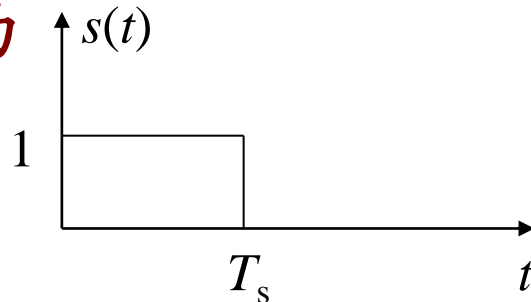
令 $k=1$ ，可得其匹配滤波器的传输函数为

$$H(f) = \frac{1}{j2\pi f} (e^{j2\pi fT_s} - 1)e^{-j2\pi fT_s}$$

可以得到此匹配滤波器的冲激响应为

$$h(t) = ks(t_0 - t)$$

$$h(t) = s(T_s - t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$



10.8 数字信号的匹配滤波接收法

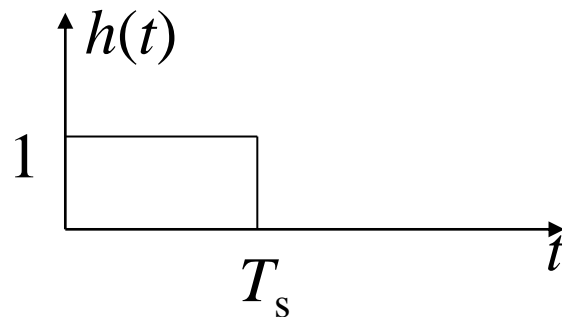
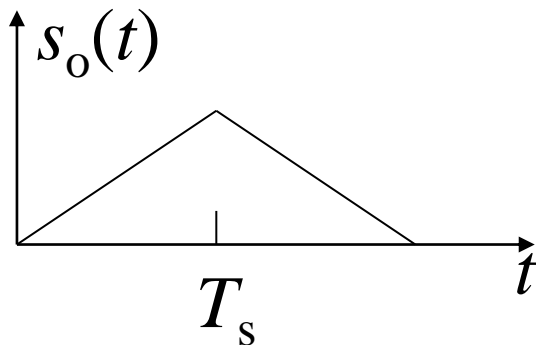
$$h(t) = s(T_s - t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$

此冲激响应示于下图。

表面上看来, $h(t)$ 的形状和信号 $s(t)$ 的形状一样。实际上, $h(t)$ 的形状是 $s(t)$ 的波形以 $t = T_s / 2$ 为轴线反转而来。由于 $s(t)$ 的波形对称于 $t = T_s / 2$, 所以反转后, 波形不变。

由式 $s_o(t) = kR(t - T_s)$

可以求出此匹配滤波器的
输出信号波形如下:

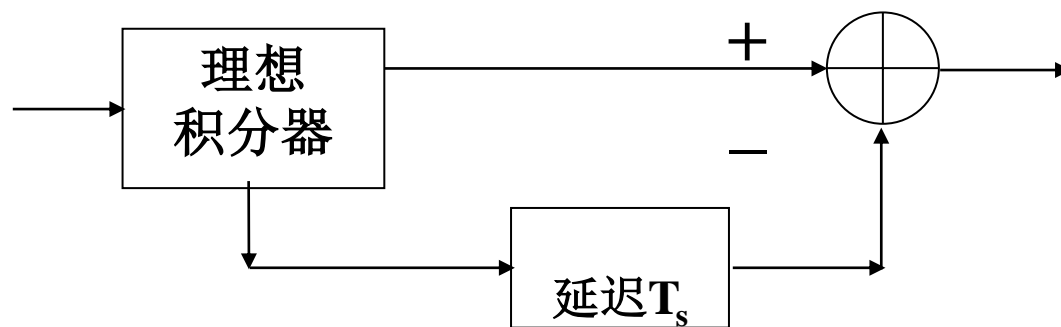


10.8 数字信号的匹配滤波接收法

由其传输函数

$$H(f) = \frac{1}{j2\pi f} (e^{j2\pi f T_s} - 1) e^{-j2\pi f T_s}$$

可以画出此匹配滤波器的方框图如下：



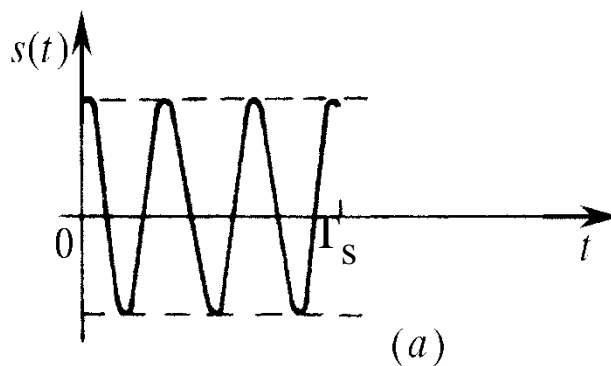
因为上式中的 $(1/j2\pi f)$ 是理想积分器的传输函数，而 $\exp(-j2\pi f T_s)$ 是延迟时间为 T_s 的延迟电路的传输函数。

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

□ 【例10.2】 设信号的表示式为

$$s(t) = \begin{cases} \cos 2\pi f_0 t, & 0 \leq t \leq T_s \\ 0, & \text{其他} t \end{cases}$$

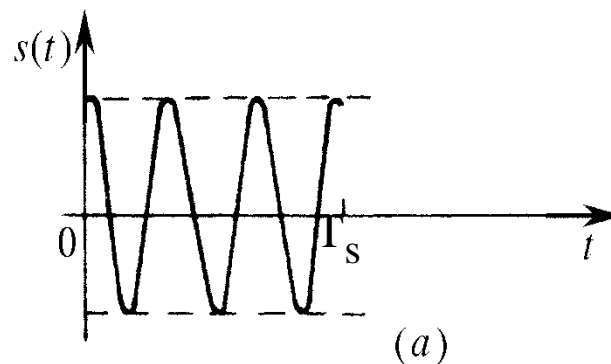
试求其匹配滤波器的特性和匹配滤波器输出的波形。



10.8 数字信号的匹配滤波接收法

【解】

上式给出的信号波形
是一段余弦振荡，
如右图所示：
其频谱为



$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{T_s} \cos 2\pi f_0 t e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{1 - e^{-j2\pi(f-f_0)T_s}}{-j4\pi(f-f_0)} + \frac{1 - e^{-j2\pi(f+f_0)T_s}}{-j4\pi(f+f_0)} \end{aligned}$$

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

因此，其匹配滤波器的传输函数为

$$\begin{aligned} H(f) &= S^*(f)e^{-j2\pi f t_0} = S^*(f)e^{-j2\pi f T_s} \\ &= \frac{\left[e^{j2\pi(f-f_0)T_s} - 1 \right] e^{-j2\pi f T_s}}{j4\pi(f-f_0)} + \frac{\left[e^{j2\pi(f+f_0)T_s} - 1 \right] e^{-j2\pi f T_s}}{j4\pi(f+f_0)} \end{aligned}$$

上式中已令 $t_0 = T_s$ 。

此匹配滤波器的冲激响应为：

$$h(t) = s(T_s - t) = \cos 2\pi f_0 (T_s - t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$

为了便于画出波形简图，令

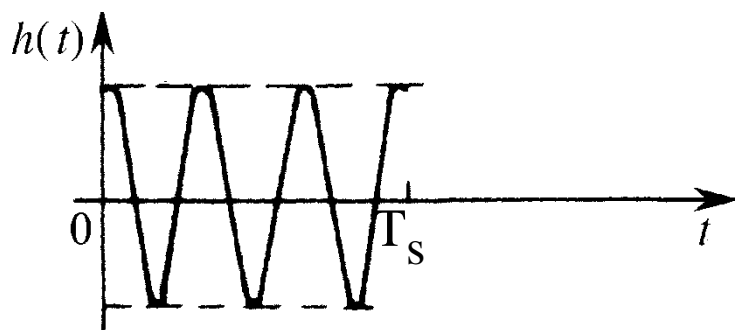
$$T_s = n / f_0$$

式中， $n =$ 正整数。这样，上式可以化简为

$$h(t) = \cos 2\pi f_0 t, \quad 0 \leq t \leq T_s$$

$h(t)$ 的曲线示于下图：

10.8 数字信号的匹配滤波接收法



(b) 冲激响应

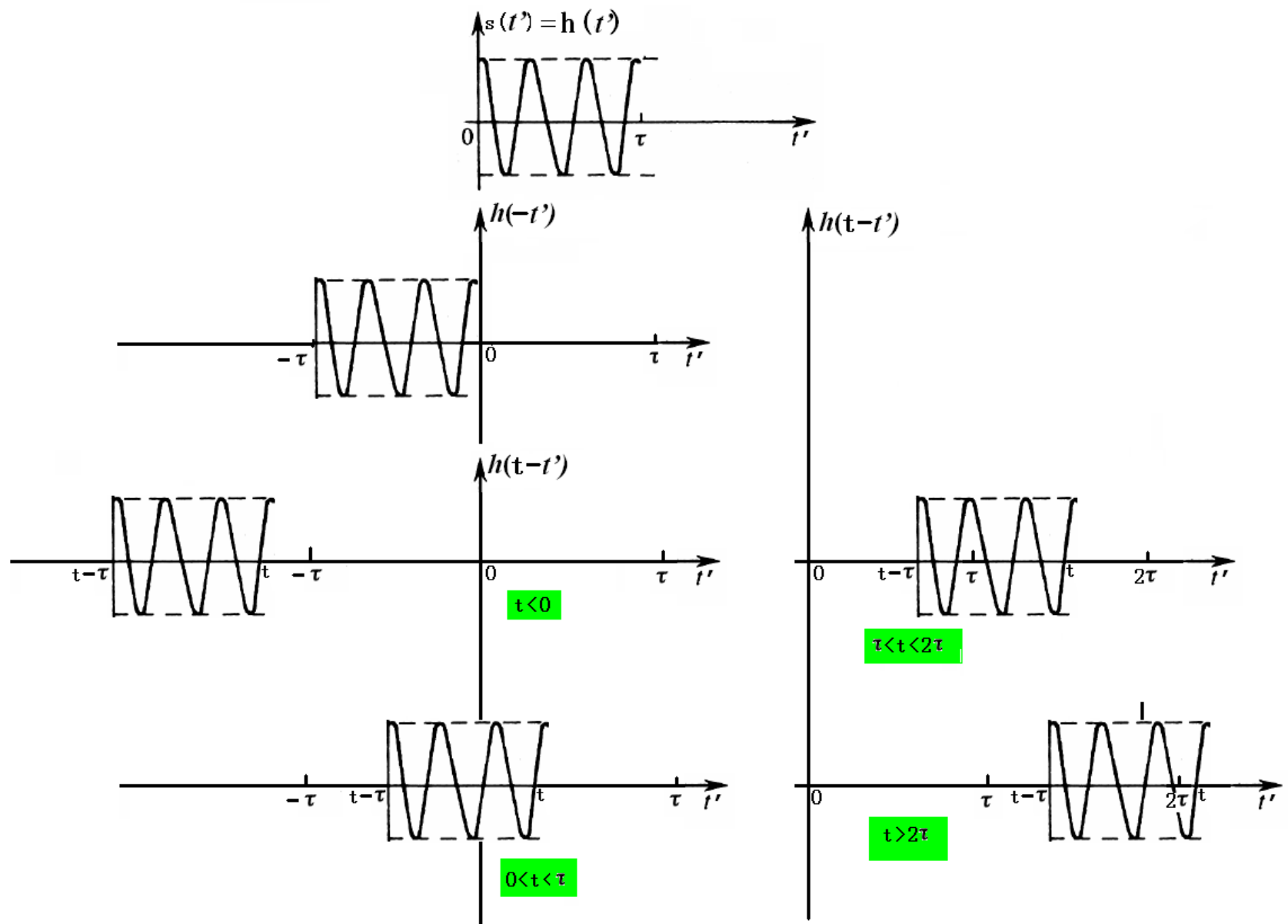
这时的匹配滤波器输出波形可以由卷积公式求出：

$$s_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

由于现在 $s(t)$ 和 $h(t)$ 在区间 $(0, T_s)$ 外都等于零，故上式中的积分可以分为如下几段进行计算：

$$t < 0, \quad 0 \leq t < T_s, \quad T_s \leq t \leq 2T_s, \quad t > 2T_s$$

显然，当 $t < 0$ 和 $t > 2T_s$ 时，式中的 $s(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$ 不相交，故 $s_o(t)$ 等于零。



$$s_0(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t')h(t-t')dt'$$

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

当 $0 \leq t < T_s$ 时, 上式等于

$$\begin{aligned} s_o(t) &= \int_0^t \cos 2\pi f_0 \tau \cos 2\pi f_0 (t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{2} [\cos 2\pi f_0 t + \cos 2\pi f_0 (t - 2\tau)] d\tau = \frac{t}{2} \cos 2\pi f_0 t + \frac{1}{4\pi f_0} \sin 2\pi f_0 t \end{aligned}$$

当 $T_s \leq t \leq 2T_s$ 时, 上式等于

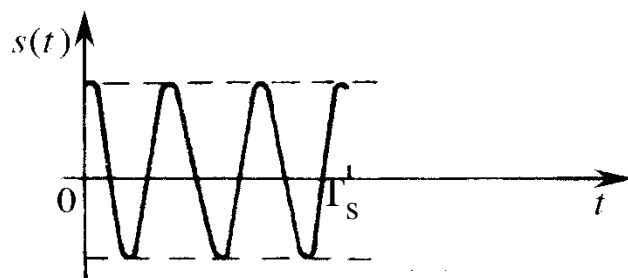
$$s_o(t) = \int_{t-T_s}^{T_s} \cos 2\pi f_0 \tau \cos 2\pi f_0 (t - \tau) d\tau = \frac{2T_s - t}{2} \cos 2\pi f_0 t - \frac{1}{4\pi f_0} \sin 2\pi f_0 t$$

若因 f_0 很大而使 $(1/4\pi f_0)$ 可以忽略, 则最后得到

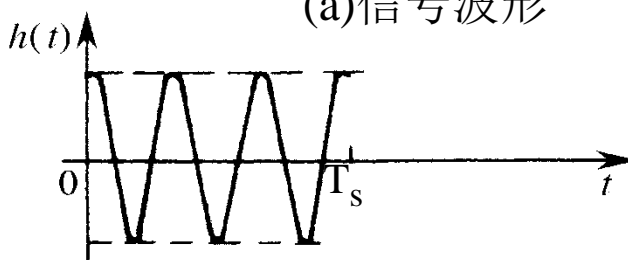
$$s_o(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} \cos 2\pi f_0 t, & 0 \leq t < T_s \\ \frac{2T_s - t}{2} \cos 2\pi f_0 t, & T_s \leq t \leq 2T_s \\ 0, & \text{其他 } t \end{cases}$$

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

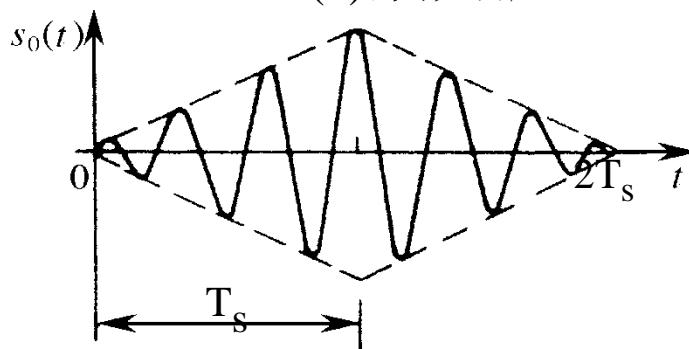
按上式画出的曲线示于下图中。



(a)信号波形



(b)冲激响应

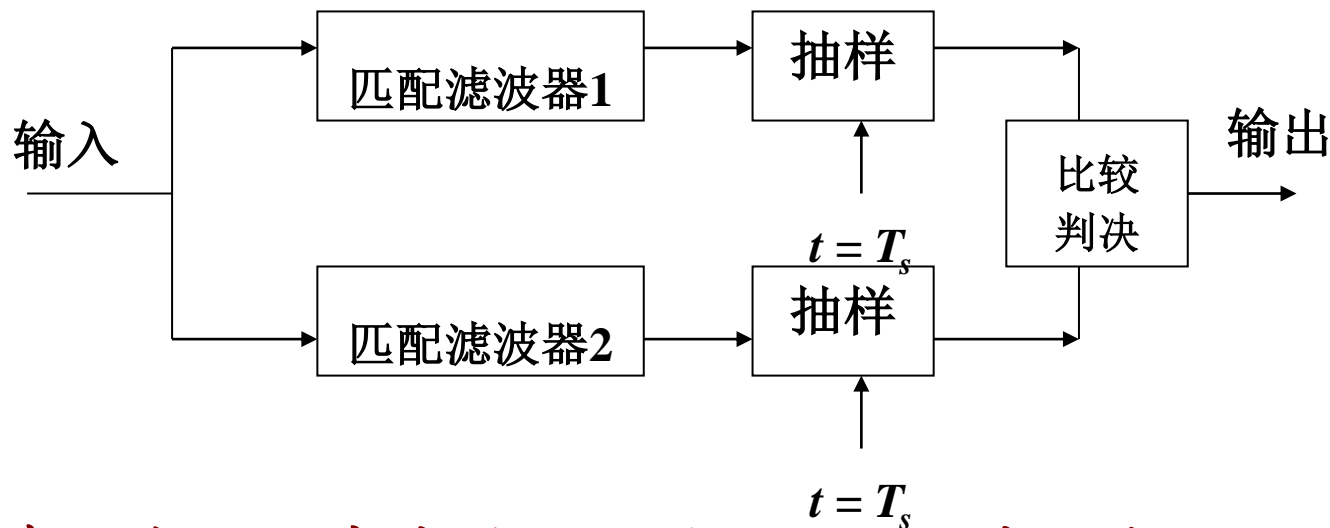


(b)输出波形

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

匹配滤波器接收电路的构成

对于二进制确知信号，使用匹配滤波器构成的接收电路方框图示于下图中。



图中有两个匹配滤波器，分别匹配于两种信号码元。在抽样时刻对抽样值进行比较判决。哪个匹配滤波器的输出抽样值更大，就判决那个为输出。若此二进制信号的先验概率相等，则此方框图能给出最小的总误码率。

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

- 匹配滤波器可以用不同的硬件电路实现，也可以用软件实现。目前，由于软件无线电技术的发展，它日益趋向于用软件技术实现。
- 在上面的讨论中对于信号波形从未涉及，也就是说最大输出信噪比和信号波形无关，只决定于信号能量 E 与噪声功率谱密度 n_0 之比，所以这种匹配滤波法对于任何一种数字信号波形都适用，不论是基带数字信号还是已调数字信号。例10.1中给出的是基带数字信号的例子；而例10.2中给出的信号则是已调数字信号的例子。

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

匹配滤波器的性能

用上述匹配滤波器得到的最大输出信噪比就等于最佳接收时理论上能达到的最高输出信噪比。证明如下：

匹配滤波器输出电压的波形 $y(t)$ 可以写成

$$y(t) = k \int_{t-T_s}^t r(u) s(T_s - t + u) du$$

在抽样时刻 T_s ，输出电压等于

$$y(T_s) = k \int_0^{T_s} r(u) s(u) du$$

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

$$\begin{aligned}y(t) &= r(t) * h(t) = \int_0^T h(z') r(t - z') dz' \\&= K \int_0^T s(t_0 - z') r(t - z') dz' \quad t - z' = z \\&= -K \int_t^{t-T} r(z) s(t_0 - t + z) dz \quad \text{令 } t_0 = T_s \\&= K \int_{t-T}^t r(z) s(T_s - t + z) dz\end{aligned}$$

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

$$y(T_s) = k \int_0^{T_s} r(u)s(u)du$$

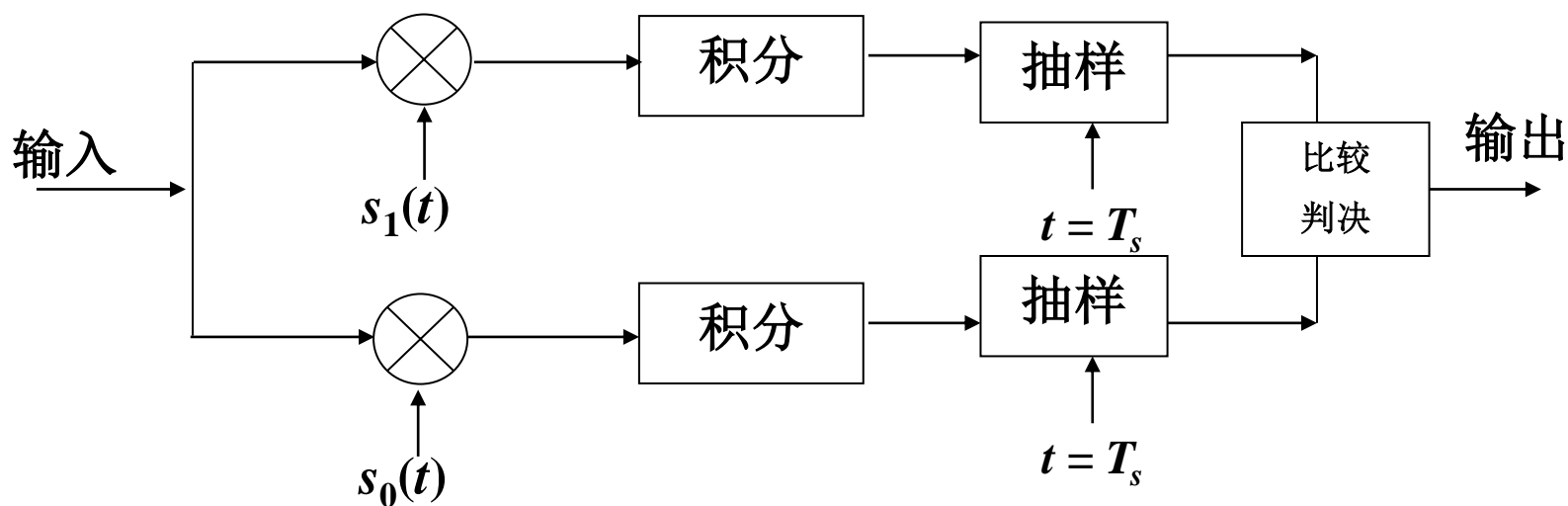
可见，上式与相关器输出完全相同(除 K 外，但 K 值是能够预先调整的，比如使 $K=1$)。

由此我们得到一个重要结论：

由于匹配滤波器在 $t=T_s$ 时刻的输出值恰好等于相关器的输出值，也即匹配滤波器可以作为相关器

10.8 数字信号的匹配滤波接收法

用上述相关运算代替上图中的匹配滤波器得到如下图所示的相关接收法方框图。



匹配滤波法和相关接收法完全等效，都是最佳接收方法。

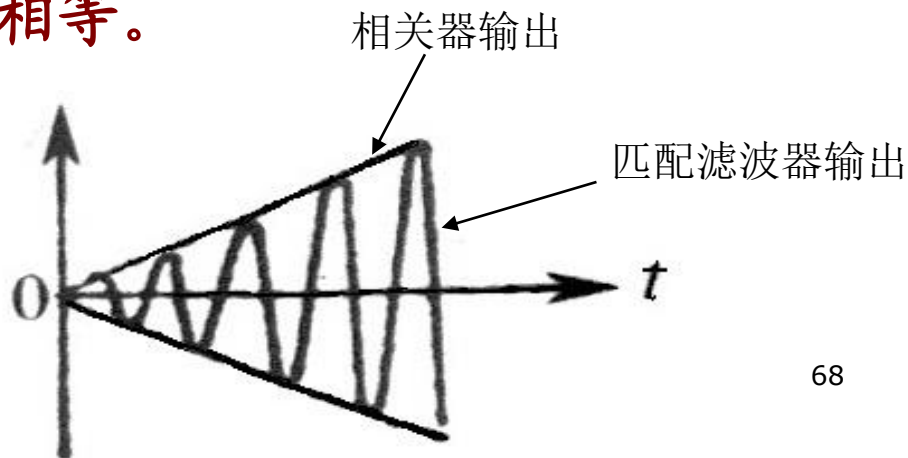
10.8 数字信号的匹配滤波接收法

□ 【例10.3】 设有一个信号码元如例10.2中所给出的 $s(t)$ 。试比较它分别通过匹配滤波器和相关接收器时的输出波形。

【解】 此信号码元通过相关接收器后，输出信号波形等于

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t s(t)s(t)dt = \int_0^t \cos 2\pi f_0 t \cdot \cos 2\pi f_0 t dt = \int_0^t \cos^2 2\pi f_0 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (1 + \cos 4\pi f_0 t) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{8\pi f_0} \sin 4\pi f_0 t \approx \frac{t}{2} \end{aligned}$$

上式中已经假定 f_0 很大，从而结果可以近似等于 $t/2$ ，即与 t 成直线关系。这两种结果示于下图中。由此图可见，只有当 $t = T_s$ 时，两者的抽样值才相等。



10.8 数字信号的匹配滤波接收法

应该强调指出，无论是相关器形式还是匹配滤波器形式的最佳接收机结构，它们的比较器都是在 $t=T_s$ 时刻才做出最后判决的。

换句话说，即在每一个数字信号码元的结束时刻才给出最佳的判决结果。