



# 期末帮《通信原理》课程讲义

## 第一章 通信原理绪论

### (一) 信号

#### 1. 信息、消息与信号

**消息：**通信系统传输的对象。形式多种：

连续消息:语音、温度、图像

离散消息：数据、文字、符号

**信号：**消息的电表示形式/传输载体

模拟信号：信号参量取值连续

数字信号：信号参量取值离散

**消息：**消息中蕴含的有效内容。

#### 2. 三者关系

消息的**内涵**是信息

信息的**表现形式**是消息

消息的**传输载体**是信号（模拟信号和数字信号）

如何区分模拟与数字信号？

（区分原则：看携带消息的信号参量取值）

**模拟信号：**取值连续（无穷多）

**数字信号：**取值离散（有限个）



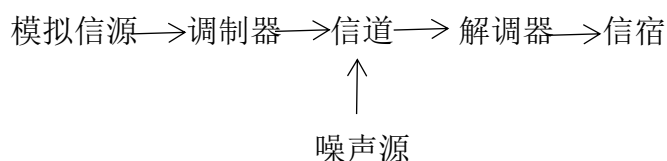
### 3. 通信

**通信：**就是利用电信号传输消息中所包含的信息。

**通信系统：**完成通信过程所需的电子设备和信道总体。

## (二) 通信系统

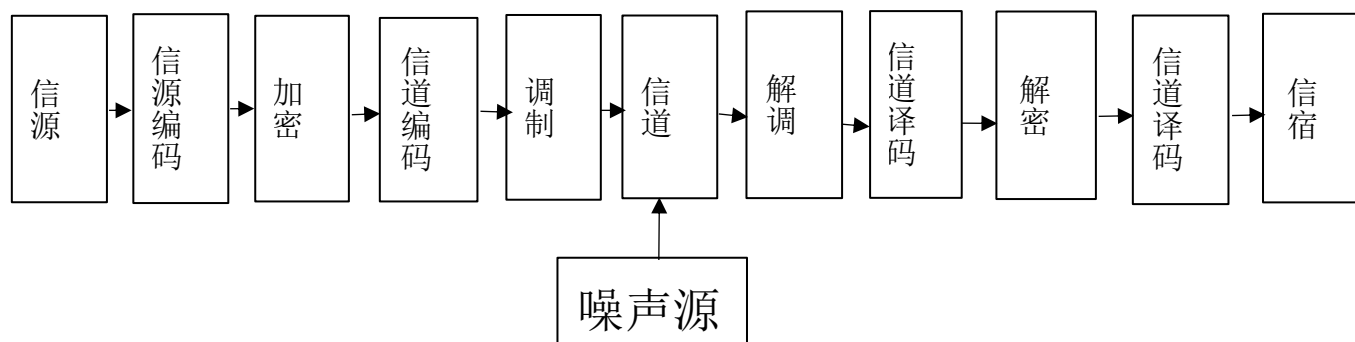
### 1. 模拟通信系统模型



该系统包含两种变换：

- (1) 消息  $\longleftrightarrow$  基带信号，完成这对变换和反变换的是信源和信宿；
- (2) 基带信号  $\longleftrightarrow$  已调信号，完成这对变换和反变换的通常是调制器和解调器。

### 2. 数字通信系统模型



信源编码：

模/数转换

提高有效性

调制：把信息寄托到载波上



解调：从已调信号中卸载信息

信道编码：

增强抗干扰能力

### 3.通信系统分类

按信道信号特征分类	按传输媒质分类	按传输方式分类	按通信业务分类	按工作波段分类	按复用方式分类
模拟通信 数字通信	有线通信 无线通信	基带传输 带通传输	电话通信 数据通信 图像通信 遥控通信	长波通信 短波通信 微波通信 光通信等	频分复用 时分复用 码分复用等

### 4. 通信方式

按传输方向与时间关系分类	按数字码元传输时序分类	按系统结构分类
单工通信 半双工通信 全双工通信	并行传输 串行传输	点到点通信（专线通信） 点到多通信 多点之间通信（网通信）

单工:指单方向传输信息的工作方式,例如广播、遥控、无线寻呼等

半双工通信:指通信双方都能收发信息，但不能同时进行收和发的工作方式，例如普通对讲机、问询等。

全双工通信:指通信双方可同时收发信息的工作方式,例如电话通信。



### (三) 信息及其度量

如何度量消息中所含的信息量？

原则：

度量方法与消息的种类无关。

与消息的重要程度无关。

举例：“明天下雨”

可见：

消息中所含消息量和不可预测性或不确定性有关。

消息所表达的事件越不可能发生，信息量就越大。

#### 1. 离散消息的信息量

设某离散消息  $x$  发生的概率为  $P(x)$ ，则它所携带的信息量为

$$I = \log_a \frac{1}{P(x)} = -\log_a P(x)$$

信息量的单位与对数的底  $a$  有关： $a=e$  时，单位为奈特(nit)； $a=10$  时，单位为哈特莱(Hartly)； $a=2$  时，单位为比特(bit, 简记为 b)，此时有

$$I = \log_2 \frac{1}{P(x)} = -\log_2 P(x) (\text{bit})$$

对于等概信源，二进制的每个码元含 1bit 的信息量， $M$  进制的每个码元含有  $\log_2 M$  bit，这是因为每个  $M$  进制波形可用  $\log_2 M$  个二进制码元表示。

#### 2. 离散消息的平均信息量

设离散信源为：

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ P(x_1) & P(x_2) & \cdots & P(x_n) \end{pmatrix} = 1 \text{ 且 } \sum_{i=1}^M P(x_i)$$



则该信源中每个符号所含的平均信息量(又称熵)为:

$$H(x) = -\sum_{i=1}^M P(x_i) \log_2 P(x_i) \text{ (b/符号)}$$

熵的意义:表示信源的不确定性。当每个符号等概率( $P(z_i)=1/M$ )独立出现时,不确定性最大,此时的熵有最大值.即

$$H_{\max} = \log_2 M \text{ (b/符号)}$$

### 3. 总信息量

设信源的熵为  $H(x)$ , 则该信源发送一条消息(含  $n$  个符号)的平均总信息量为:

$$I = n * H(x) \text{ (bit)}$$

**例题 1:** 出现概率越\_\_\_\_\_的消息, 其所含的信息量越大。

**答:** 小

**例题 2:** 设有一个二进制离散信源 (0, 1), 每个符号独立发送。若“0”、“1”等概率出现, 求每个符号的信息量和平均信息量(熵)。

**解:** 由等概率独立条件可知,  $P(0) = P(1) = 1/2$ , 故每个符号的信息量

$$I_0 = I_1 = \log_2 1/P(x) = \log_2 2 = 1 \quad \text{(bit)}$$

平均信息量(熵)

$$H(x) = -\sum_{i=1}^M P(x_i) \log_2 P(x_i) = P(0) I_0 + P(1) I_1 = 1 \quad \text{(b/符号)}$$

或者  $H = \log_2 M = \log_2 2 = 1 \quad \text{(b/符号)}$

**例题 3:** 某信源符号集由 A, B, C, D 和 E 组成, 设每一符号独立出现, 其出现概率分别为  $1/4, 1/8, 1/8, 3/16$  和  $5/16$ 。若每秒传输 1000 个符号, 试求:

(1) 该信源符号的平均信息量;

(2) 1h 内传送的平均信息量

**解:** (1) 平均信息量(熵)

$$H(x) = -\sum_{i=1}^M P(x_i) \log_2 P(x_i) =$$



$$-\frac{1}{4}\log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\log_2 \frac{1}{8} - \frac{3}{16}\log_2 \frac{3}{16} - \frac{5}{16}\log_2 \frac{5}{16} = 2.23 \text{ (b/符号)}$$

(2) 平均信息速率

$$R_b = R_B \cdot H = 1000 \times 2.23 = 2.23 \times 10^3 \text{ (b/s)}$$

所以, 1h 传送的平均信息量

$$I = R_b \cdot t = 2.23 \times 10^3 \times 3600 = 8.028 \times 10^6 \text{ (bit)}$$

## (四) 有效性和可靠性

### 1. 数字通信系统的有效性指标

(1) 码元传输速率  $R_b$ ; (传码率、波特率)

定义: 每秒传送的码元个数。

计算: 若一个码元的时间长度为  $T_s$  秒, 则

$$R_b = 1/T_s$$

单位: 波特 (Baud)

例如: 1 秒内传输 1000 个码元, 则  $R_B = 1000 \text{ Baud}$

(2) 信息传输速率  $R_b$ ; (传信率, 比特率)

定义: 每秒传递的比特数 (信息量)

单位: 比特/秒 (bit/s) 简记为 b/s 或 bps

$R_b$  与  $R_B$  的关系—— $H$  为组带

$$R_b = R_B \cdot H$$

$$R_b = R_B \cdot \log_2 M$$

注意:  $M=2$

$$R_b = R_B$$

(3) 频带利用率——把  $B$  与传输速率联系起来定义为单位带宽内的传输速率, 即

$$\eta = R_b / B \text{ (Baud/Hz)}$$

$$\eta_b = R_b / B \text{ (b / (s} \times \text{Hz))}$$



$$\eta_b = \eta * \log_2 M$$

## 2. 数字通信系统的可靠性指标

(1) 误码率  $P_e$

$P_e = \text{错误接收的码元数} / \text{传输的总码元数} = N_e / N$

(2) 误信率(误比特率)  $P_b$

$P_b = \text{错误接收的比特数} / \text{传输的总比特数} = I_e / I_b$

两者关系: 二进制时, 有  $P_b = P_e$ ;  $M$  进制时, 有  $P_b < P_e$

**例题 4:** 数字通信系统的主要性能指标是\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_。\_\_\_\_\_定义是每秒传送码元的数目, 单位\_\_\_\_\_。\_\_\_\_\_定义是每秒钟传送的信息量, 单位\_\_\_\_\_。

**解:** 有效性    可靠性    码元速率    Baud    信息速率    bit/s

**例题 5:** 数字通信系统的有效性用(传输速率)衡量, 可靠性用(差错率)衡量。

**解:** 传输速率    差错率

**例题 6:** 多进制系统的误信率\_\_\_\_\_误码率。

**解:** 小于

**例题 7:** 设二进制数字传输系统每隔 0.4ms 发送一个码元。试求:

(1) 该系统的信息速率;

(2) 若改为传送十六进制信号码元, 发送码元间隔不变, 则系统的信息速率变为多少(设各码元独立等概率出现)?

**解:** (1) 已知码元宽度  $T_B = 0.4\text{ms}$ , 则码元速率  $R_B = 1/T_B = 2500 \text{ Baud}$ 。

二进制时, 信息速率等于码元速率, 即

$$R_b = R_B = 2500 \text{ (b/s)}$$

(2) 若码元间隔(码元宽度)不变, 则码元速率也不变, 仍为 2500 Baud,

故十六进制时, 信息速率为



$$R_b = R_B \log_2 16 = 2500 \times 4 = 10000 (\text{b/s})$$

**例题 8:** 已知某四进制数字信号传输系统的信息速率为 2400bit/s, 接收端共收到 216 个错误码元, 试计算该系统  $P_e$  的值。

**解:** 由已知条件  $R_b = 2400$  (bit/s)

$$R_B = R_b / \log_2 4 = 1200 (\text{Baud})$$

半小时共传送的码元为  $200 \times 0.5 \times 3600 = 2.16 \times 10^6$  (个)

系统误码率为  $P_e = 216 / (2.16 \times 10^6) = 10^{-4}$

## 第二章 确知信号

### (一) 信号的分类

#### 1. 确知信号和随机信号

若信号在定义域内的任意时刻都有确定的函数值, 即可表示为确定的时间函数, 则这种信号称为确知信号, 否则为随机信号或不确知信号。

#### 2. 周期信号和非周期信号

若确知信号  $s(t)$  每隔一定的时间间隔按相同规律重复 且无始无终, 即  $s(t)$  可表示为

$$s(t) = s(t + T_0) \quad -\infty < t < +\infty$$

则称为周期信号。满足上式的最小  $T_0$  称为信号的基波周期,  $f_0 = 1/T_0$ 。称为信号的基频。非周期信号是不具有重复性的信号。例如: 符号函数、单位冲激函数、单位阶跃函数等所描述的信号。





### 3.能量信号和功率信号

设连续电压或电流信号为  $s(t)$ , 则它在单位电阻( $1\Omega$ )上的归一化瞬时功率为  $|s(t)|^2$ , 归一化能量(简称能量)为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$$

若  $s(t)$  为实函数, 则  $E = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt$

信号的平均功率为  $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)^2 dt$

若  $0 < E < \infty$  和  $P \rightarrow 0$ , 则称  $s(t)$  为能量有限信号, 简称能量信号。其特征是: 信号的振幅和持续时间均有限, 非周期性。例如: 单个矩形脉冲。

若  $E \rightarrow \infty$  和  $0 < P < \infty$ , 则称  $s(t)$  为功率有限信号, 简称功率信号。其特征是: 信号的持续时间无限。例如: 直流信号、周期信号和随机信号。

**提示 1:** 能量信号和功率信号的分类对于随机信号也适用。

**提示 2:** 同一个信号可以分属于不同的信号分类, 如正弦信号既是周期信号, 也是功率信号。

**例题 1:** 信号类型的区别与关系?

**解:** 1. 同一个信号可以分属于不同的信号类型。例如: 正弦信号既属于确知信号、周期信号, 又属于功率信号

2. 所有的周期信号都是功率信号, 而功率信号不一定是周期信号。

3. 非周期信号可以是能量信号(如单个矩形脉冲), 或功率信号(如阶跃信号), 或既不是能量信号也不是功率信号, 例如:  $e^{-t}$ ,  $\delta(t)$ 。

4. 一般来说, 限时信号( $\delta(t)$ 除外)是能量信号; 非限时信号也可能是能量信号, 例如  $e^{-t^2}$ 。

5. 一个信号不可能既是能量信号又是功率信号。

**例题 2:** 试判断  $s_1(t) = e^{-t}u(t)$  信号是周期信号还是非周期信号, 能量信号还是功率信号。

**解:** 若  $0 < E < \infty$ , 而功率  $P \rightarrow 0$ , 则为能量信号; 若能量  $E \rightarrow \infty$ , 而  $0 < P < \infty$ , 则为功率信号。



(1)  $s_1(t) = e^{-t}u(t)$  的能量为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \left[ -\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

功率为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = 0$$

可见,  $s(t)$  是能量信号, 显然也是非周期信号。

## (二) 确知信号的时域分析

### 1. 能量信号的自相关函数

定义:  $R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau) dt \quad -\infty < \tau < \infty$

性质:

自相关函数  $R(\tau)$  和时间  $t$  无关, 只和时间差  $\tau$  有关。

当  $\tau = 0$  时,  $R(0)$  等于信号的能量:

$R(\tau)$  是  $\tau$  的偶函数

自相关函数  $R(\tau)$  和其能量谱密度  $G(f)$  是一对傅里叶变换对:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

### 2. 功率信号的自相关函数

定义:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t+\tau) dt \quad -\infty < \tau < \infty$$

性质:

自相关函数  $R(\tau)$  和时间  $t$  无关, 只和时间差  $\tau$  有关。

当  $\tau = 0$  时,  $R(0)$  等于信号的功率:

$R(\tau)$  是  $\tau$  的偶函数



自相关函数  $R(\tau)$  和其功率谱密度  $P(f)$  是一对傅里叶变换对。

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

**例题 3:** 求周期正弦信号的自相关函数和功率。

分析：先求功率谱密度，然后对功率谱密度作傅里叶变换，即可求出其自相关函数。

**解：**  $s(t) = A \cos 2\pi f_0 t = (A/2) [e^{-j2\pi f_0 t} + e^{j2\pi f_0 t}]$

$C_1 = C_{-1} = A/2$ ;  $n \neq 1$  时,  $C_n = 0$ ;

$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(f - nf_0)$$

$$= A^2/4 [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$R(\tau) = F^{-1}[P(f)] = F^{-1}\{A^2/4 [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]\} =$$

$$= A^2/4 [e^{-j2\pi f_0 \tau} + e^{j2\pi f_0 \tau}] = A^2/2 \cos(2\pi f_0 \tau)$$

$$P = R(0) = A^2/2 \cos(2\pi f_0 \tau) \big|_{\tau=0} = A^2/2$$

### 3. 能量、功率信号的互相关函数

(1) 两个能量信号  $s_1(t)$  和  $s_2(t)$  的互相关函数:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t + \tau) dt$$

(2) 两个功率信号  $s_1(t)$  和  $s_2(t)$  的互相关函数:

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(t) s_2(t + \tau) dt$$

### 4. 互相关函数的性质

(1) 若对所有的  $\tau$ , 有  $R_{12}(\tau) = 0$ , 则两个信号互不相关。

(2) 互相关函数和两个信号相乘的前后次序有关, 即有

$$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau)$$



(3) 当  $\tau=0$  时  $R_{21}(0) = R_{12}(0)$

$R_{12}(0)$  表示  $s_1(t)$  和  $s_2(t)$  在时无差时的相似性。 $R_{12}(0)$  越大, 说明  $s_1(t)$  和  $s_2(t)$  的相关性越大,  $s_1(t)$  和  $s_2(t)$  之间也就越相似。因此, 通常称  $R_{12}(0)$  为互相关系数。

## 5. 相关函数与谱密度的关系

(1) 能量信号的自相关函数和其能量谱密度是一对傅里叶变换, 即

$$R(\tau) \longleftrightarrow |f|^2$$

(2) 功率信号的自相关函数和其功率谱密度是一对傅里叶变换, 即

$$R(\tau) \longleftrightarrow P(f)$$

## (三) 确知信号的频域分析

### 1. 周期信号的频谱

设  $s(t)$  是一个周期为  $T_0$  的周期功率信号, 若它满足 Dirichlet 条件(大多满足), 则可展开成如下的指数型傅里叶级数:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n e^{j2\pi n t}}{T_0}$$

其中, 傅里叶级数的系数

$$C_n = C(nf_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

式中:  $f_0 = 1/T_0$  称为信号的基频;  $nf_0$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ) 称为  $n$  次谐波频率。

当  $n=0$  时, 有

$$C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) dt$$

它表示信号的时间平均值, 即直流分量。

傅里叶系数  $C_n$  反映了信号中各次谐波的幅度值和相位值, 因此称  $C_n$  为信号的频谱。 $C_n$  一般是复数形式, 可记为

$$C_n = |C_n| e^{j\theta_n}$$



$|C_n|$  随频率  $f_0$  变化的特性称为信号的幅度谱,  $\theta_n$  随频率( $nf_0$ )变化的特性称为信号的相位谱。

## 2.非周期信号的频谱(密度)

设  $s(t)$  为一个非周期信号, 则它的傅里叶变换

$$S(f) = F[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

定义为  $s(t)$  的频谱密度函数(简称频谱函数)。其傅里叶反变换就是原信号

$$s(t) = F^{-1}[S(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df$$

若将频率  $f$  换成角频率  $\omega$ , 则傅里叶正、反变换分别表示为

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad \longleftrightarrow \quad = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

## 3.能量信号的能量谱密度

以非周期信号  $s(t)$  为例, 其傅立叶变换为  $S(f)$

由巴塞伐尔(Parseval)定理

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

将  $|S(f)|^2$  定义为能量谱密度:

$$G(f) = |S(f)|^2$$

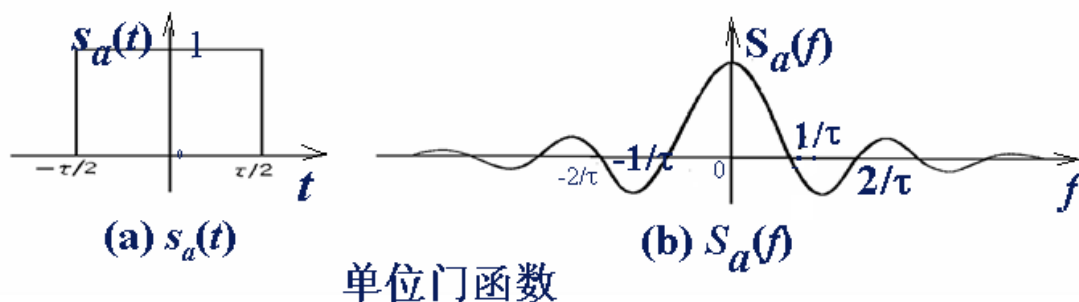
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) df$$

能量谱密度的积分等于能量

**例题 4: 求矩形脉冲信号的能量谱密度和能量**

**解:** 常用非周期信号——单位门函数——矩形——的傅立叶变换:

$$s_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases} \quad S_a(f) = \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} = \tau \text{Sa}(\pi f \tau)$$



能量谱密度

$$G(f) = |S(f)|^2 = S_a^2(f) = \tau^2 \text{Sa}^2(\pi f \tau)$$

$$\text{能量 } E = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) df$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 \text{Sa}^2(\pi f \tau) df$$

## 4. 功率信号的功率谱密度

将信号  $s(t)$  截短为  $s_T(t)$ ,  $-T/2 < t < T/2$ ,  $s_T(t)$  是一个能量信号, 可以傅里叶变换求出其能量谱密度  $|S_T(f)|^2$ , 由巴塞伐尔定理有

$$\int_{-T/2}^{T/2} s_T^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S_T(f)|^2 df$$

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |s_T(t)|^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |S_T(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_T(f)|^2}{T} df \end{aligned}$$

定义信号的功率谱密度  $P(f)$ , 即  $P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |S_T(f)|^2$

则: 功率  $P = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) df$  —— 功率等于功率谱密度的积分

周期信号的功率谱密度:

$$\text{令 } T \text{ 等于信号的周期 } T_0, \text{ 于是有 } P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s^2(t) dt$$

由周期函数的巴塞伐尔 (Parseval) 定理:  $P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s^2(t) dt =$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$



$|C_n|^2$  — 第  $n$  次谐波的功率

利用  $\delta$  函数可将上式表示为  $P = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(f - nf_0) df = \int_{-\infty}^{\infty} p(f) df$

上式中的被积因子就是此信号的功率谱密度  $P(f)$ ，即：

$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(f - nf_0)$$

$C_n$ —傅立叶级数的系数

**例题 6：** 求周期正弦信号的功率谱密度和功率

**解：**  $s(t) = A \cos 2\pi f_0 t = (A/2)[e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-j\pi n f_0 t}$

$C_1 = C_{-1} = A/2$ ； $n \neq \pm 1$  时， $C_n = 0$ ； $P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(f - nf_0)$

$$= |C_1|^2 \delta(f - f_0) + |C_{-1}|^2 \delta(f + f_0) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\infty}^{\infty} P(f) df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] df \\ &= \frac{A^2}{4} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) df + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f + f_0) df \right] = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

**例题 7：** 已知信号  $s(t)$  的自相关函数为  $R_s(\tau) = \frac{k}{2} e^{-k|\tau|}$  试求其功率谱密度  $P_s(f)$  和功率  $P$ 。

**解：**

$$P_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \frac{k}{2} \times \frac{2k}{k^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{k^2}{k^2 + 4\pi^2 f^2}$$

$$P = R_s(0) = \frac{k}{2}$$



## 第三章 随机过程

### (一) 随机过程基本概念

#### 1. 定义

(1) 随机过程  $\xi(t)$  可视为随机试验的全体样本函数  $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$  的集合。

(2) 随机过程  $\xi(t)$  可视为在时间进程中处于不同时刻的随机变量的集合。这说明,  $\xi(t)$  在任意时刻  $t_1$  的取值:  $\xi(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$  是一个不含  $t$  变化的随机变量。

随机过程的基本特征: 是  $t$  的函数, 在任一时刻  $t$  上是一个随机变量。可以把随机过程看成依赖时间参数的一簇随机变量。

随机过程的两重性: 具有随机变量和时间函数的特点。使我们可以用与描述随机变量相似的方法, 来描述随机过程的统计特性。

#### 2. 分布函数和概率密度函数

一维:

随机过程  $\xi(t)$  在任一时刻  $t_1$  上的取值是一维随机变量  $\xi(t_1)$

随机过程  $\xi(t)$  的一维分布函数: 随机变量  $\xi(t_1)$  小于或等于某一数值  $x_1$  的概率  $P[\xi(t_1) \leq x_1]$ , 简记为  $F_1(x_1, t_1)$ , 即  $F_1(x_1, t_1) = P[\xi(t_1) \leq x_1]$

如果  $F_1(x_1, t_1)$  对  $x_1$  的偏导数存在, 则称  $f(x_1, t_1)$  为  $\xi(t)$  的一维概率密度函数。





显然，随机过程的一维分布函数或一维概率密度函数仅仅描述了随机过程在各个孤立时刻的统计特性，而没有说明随机过程在不同时刻取值之间的内在联系，为此需要进一步引入二维分布函数。

二维：

任给两个时刻  $t_1, t_2 \in T$ ，则随机变量  $\xi(t_1)$  和  $\xi(t_2)$  构成一个二元随机变量  $\{\xi(t_1), \xi(t_2)\}$ ，称

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2\}$$

为随机过程  $\xi(t)$  的二维分布函数。

$$\text{如果存在 } \frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = f(x_1, x_2; t_1, t_2)$$

则称  $f(x_1, x_2; t_1, t_2)$  为  $\xi(t)$  的二维概率密度函数。

### 3. 数字特征

分布函数或概率密度函数虽然能够较全面地描述随机过程的统计特性，但在实际工作中，用随机过程的数字特征来描述随机过程的统计特性，更简单直观。

#### (1) 数学期望

设随机过程  $\xi(t)$  在任意给定时刻  $t_1$  的取值  $\xi(t_1)$  是一个随机变量，其一维概率密度函数为  $f_1(x_1, t_1)$ ，则  $\xi(t_1)$  的数学期望为

$$E[\xi(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1, t_1) dx_1$$

这里  $t_1$  是任取的，可以把  $t_1$  直接写为  $t$ ， $x_1$  改为  $x$ ，上式就变为随机过程在任意时刻的数学期望，记作  $a(t)$ ：

$$a(t) = E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x, t) dx$$

均方值：

$$E[\xi^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x, t) dx$$

(2) 方差：



(随机变量:  $D[x] = E[x_2] - E_2[x]$ )

随机过程:  $D[\xi(t)] = E\{[\xi(t) - a(t)]^2\} = E\{\xi^2(t)\} - [a(t)]^2$

$D[\xi(t)]$ 常记为  $\sigma^2(t)$ 。

可见方差等于均方值与数学期望平方之差。

均值和方差都只与随机过程的一维概率密度函数有关, 因而它们描述了随机过程在各个孤立时刻的特征。为了描述随机过程在两个不同时刻状态之间的联系, 还需利用二维概率密度引入新的数字特征。

### (3) 相关函数

衡量随机过程在任意两个时刻获得的随机变量之间的关联程度时, 常用协方差函数  $B(t_1, t_2)$  和相关函数  $R(t_1, t_2)$  来表示。

协方差函数定义为

$$B(t_1, t_2) = E\{[\xi(t_1) - a(t_1)][\xi(t_2) - a(t_2)]\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

相关函数定义为  $R(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\xi(t_2)]$

二者关系:  $B(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - a(t_1)a(t_2)$

若:  $a(t_1)=0$  或  $a(t_2)=0$ , 则:  $B(t_1, t_2)=R(t_1, t_2)$ 。

不相关:  $B(t_1, t_2)=R(t_1, t_2)-a(t_1)a(t_2)=0$  时, 称为不相关;

不相关时:  $R(t_1, t_2)=a(t_1)a(t_2)$

即:  $E[\xi(t_1)\xi(t_2)] = E[\xi(t_1)] \cdot E[\xi(t_2)]$

相关函数的相关程度与选择时刻  $t_1$  及  $t_2$  有关。

若  $t_2 > t_1$ , 并令  $t_2 = t_1 + \tau$ , 则  $R(t_1, t_2)$  可表示为  $R(t_1, t_1 + \tau)$ 。

这说明, 相关函数依赖于起始时刻  $t_1$  及  $t_2$  与  $t_1$  之间的时间间隔  $\tau$ , 即相关函数是  $t_1$  和  $\tau$  的函数。

**例题 1:** 已知随机变量  $\theta$  在区间  $(-\pi \sim \pi)$  均匀分布。求随机过程  $x(t) = 2\sin(\omega t + \theta)$  的均值、方差、自相关函数和功率。

**解:**  $\theta$  在区间  $(-\pi \sim \pi)$  均匀分布,  $\theta$  的概率密度函数为  $f(\theta) = 1/2\pi, -\pi < \theta < \pi$ ;  $f(\theta) = 0, \theta$  取其它值时。



$x(t)$ 的均值:

$$\begin{aligned} E[x(t)] &= 2E[\sin(wt + \theta)] = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(wt + \theta) f(\theta) d\theta = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(wt + \theta) d\theta \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos(wt + \theta) \Big|_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} = 0 \end{aligned}$$

$x(t)$ 的均方值:

$$\begin{aligned} E[x^2(t)] &= E[4 \sin^2(wt + \theta)] \\ &= 2E[1 - \cos 2(wt + \theta)] = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos 2(wt + \theta)] d\theta \\ &= \frac{2}{2\pi} \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2(wt + \theta) \right] \Big|_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} = 2 \end{aligned}$$

$x(t)$ 的方差:

$$D[x(t)] = E[x^2(t)] - E^2[x(t)] = 2$$

自相关函数:

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= R_x(t_1, t_1 + \tau) = E[x(t_1)x(t_1 + \tau)] \\ &= 4E[\sin(wt_1 + \theta) \sin(w(t_1 + \tau) + \theta)] \\ &= 4E\left[\frac{1}{2} \cos w\tau - \frac{1}{2} \cos(w(2t_1 + \tau) + 2\theta)\right] \\ &= 2 \cos w\tau \end{aligned}$$

功率(平均功率或总功率):  $P = R_x(0) = 2$

**例题 2:** 设随机过程  $\xi(t)$  可表示成  $\xi(t) = 2\cos(2\pi t + \theta)$ 。式中,  $\theta$  是离散随机变量, 且  $P(\theta=0) = 1/2$ 、 $P(\theta=\pi/2) = 1/2$ , 试求  $E[\xi(1)]$ 、 $E[\xi(t)]$  及  $R_{\xi}(0, 1)$ 。

**解:**  $E[\xi(1)]$  表示  $t=1$  时,  $\xi(1)$  的期望。此时:  $\xi(1) = 2\cos(2\pi \times 1 + \theta) = 2\cos\theta$   
 $\theta$  为随机变量, 其函数  $2\cos\theta$  也为随机变量。

$$E[g(x)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) P(x = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) P(x_i)$$

$$\begin{aligned} E[\xi(1)] &= E[2\cos\theta] = 2\cos\theta|_{\theta=0} \cdot P(\theta=0) + 2\cos\theta|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \cdot P\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 2\cos 0 + \frac{1}{2} \times 2\cos\frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$E[\xi(t)] = E[2\cos(2\pi t + \theta)]$$

$$= 2\cos(2\pi t + \theta)|_{\theta=0} \cdot P(\theta=0) + 2\cos(2\pi t + \theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \cdot P\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$$



$$= \frac{1}{2} \times 2 \cos 2\pi t + \frac{1}{2} \times 2 \cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}) = \cos 2\pi t - \sin 2\pi t$$

$R_{\xi}(0,1)$  表示  $t_1=0, t_2=1$  时  $\xi(t)$  的自相关函数。

$$R(t_1, t_2) = E[\xi(t_1) \xi(t_2)]$$

$$\therefore R_{\xi}(0,1)$$

$$= E[2 \cos(2\pi t_1 + \theta) \cdot 2 \cos(2\pi t_2 + \theta)]|_{t_1=0, t_2=1}$$

$$= E[4 \cos^2 \theta]$$

$$= 4 \cos^2 \theta |_{\theta=0} \cdot P(\theta=0) + 4 \cos^2 \theta |_{\theta=\frac{\pi}{2}} \cdot P\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \cos^2 0 + \frac{1}{2} \times 4 \cos^2 \frac{\pi}{2} = 2$$

## (二) 平稳随机过程

### 1. 狭义平稳(严平稳)随机过程定义

指它的任何  $n$  维分布函数或概率密度函数与时间起点无关。

若对于任意正整数  $n$  和任意实数  $t_1 < t_2 < \dots < t_n, \tau$ ，随机过程  $\xi(t)$  的  $n$  维概率密度函数满足：

$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$  则称  $\xi(t)$  是平稳随机过程。

该定义说明：平稳随机过程的统计特性不随时间的推移而变化。当取样点在时间轴上作任意平移时，随机过程的所有有限维分布函数是不变的。

### 2. 平稳过程特性

一维分布与时间  $t$  无关，即有： $f_1(x_1, t_1) = f_1(x_1)$

二维分布只与时间间隔  $\tau$  有关：式中： $\tau = t_2 - t_1$ ,

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; t_1, t_1 + \tau) = f_2(x_1, x_2; \tau)$$

平稳随机过程  $\xi(t)$  的均值：



$$E[\varepsilon(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1) dx_1 = a$$

平稳随机过程的方差  $\sigma^2(t) = \sigma^2 = \text{常数}$ 。

平稳随机过程  $\xi(t)$  的自相关函数：

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= R(t_1, t_1 + \tau) = E[\xi(t_1) \xi(t_1 + \tau)] = R(\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R(\tau) \end{aligned}$$

仅是时间间隔  $\tau = t_2 - t_1$  的函数

平稳随机过程  $\xi(t)$  具有“平稳”的数字特征：它的均值为常数；

自相关函数只与时间间隔  $\tau$  有关， $R(t_1, t_1 + \tau) = R(\tau)$

### 3. 广义平稳随机过程定义

定义：称均值是常数，自相关函数是  $\tau$  的函数的随机过程为宽平稳或广义平稳随机过程。

**狭义平稳过程与广义平稳的关系：**

狭义平稳过程一定是广义平稳过程

但广义平稳过程不一定是狭义平稳过程。

通信系统中所遇到的信号及噪声，大多数可视为平稳的随机过程。以后讨论的随机过程除特殊说明外，均假定是平稳的，且均指广义平稳随机过程，简称平稳过程。

### 4. 各态历经性

随机过程的任一实现，好像经历了随机过程的所有可能状态。可以化“统计平均”为“时间平均”。

随机过程的数学期望（统计平均值）可以用任一实现的时间平均值来代替。

$$\begin{aligned} \bar{a} = \overline{X(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) dt \\ \overline{R(\tau)} = \overline{X(t)X(t+\tau)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t)X(t+\tau) dt \end{aligned}$$



只有平稳随机过程才具有各态历经性，具有各态历经性的随机过程必定是平稳随机过程。

但平稳随机过程不一定是各态历经的。

平稳过程，当  $a = \bar{a}$  ,  $R(\tau) = \overline{R(\tau)}$  时，认为该过程是各态历经的。  
在通信系统中所遇到的随机信号和噪声，一般均能满足各态历经条件

## 5. 平稳随机过程自相关函数

$$R(\tau) = E[\xi(t)\xi(t+\tau)]$$

$R(\tau)$  具有下列主要性质：

$$R(0) = E[\xi^2(t)] = P \quad [\xi(t) \text{ 的功率（平均功率或总功率）}]$$

$$R(\infty) = E[\xi(t)\xi(t+\infty)] = E[\xi(t)] \cdot E[\xi(t+\infty)] = E^2[\xi(t)] \quad [\xi(t) \text{ 的直流功率}]$$

当  $\tau \rightarrow \infty$  时  $\xi(t)$  与  $\xi(t+\tau)$  统计独立，且认为  $\xi(t)$  中不含周期分量。

$$R(\tau) = R(-\tau) \quad [\tau \text{ 的偶函数}]$$

$$|R(\tau)| \leq R(0) \quad [R(\tau) \text{ 的上界}]$$

$$R(0) - R(\infty) = E[\xi^2(t)] - E^2[\xi(t)] = \sigma^2 \quad [\xi(t) \text{ 的交流功率=方差}]$$

当均值为 0 时，直流功率为 0，有： $R(0) = \sigma^2$ ，功率等于方差。

## 6. 平稳随机过程的功率谱密度

$$P_{\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

自相关函数  $R(\tau)$  与功率谱密度  $P_{\xi}(\omega)$  互为傅立叶变换对

$$p_{\xi}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$



$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

称为维纳-辛钦关系，在平稳随机过程的理论和应用中是一个非常重要的工具。它是联系频域和时域两种分析方法的基本关系式。

因为  $R(0)$  表示随机过程的平均功率，等于功率谱密度的积分，即功率谱密度曲线下的面积。

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(w) dw = E[\xi^2(t)] = P$$

**例题 3:** 某随机相位正弦波  $\xi(t) = \sin(\omega_0 t + \theta)$ ，其中  $\omega_0$  为常数， $\theta$  是在区间  $(0, 2\pi)$  内均匀分布的随机变量。

- (1) 求  $\xi(t)$  的期望、方差、自相关函数
- (2) 讨论  $\xi(t)$  是否平稳?
- (3) 讨论  $\xi(t)$  是否具有各态历经性?

**解:** (1)

$$a(t) = E[\xi(t)] = E[\sin(\omega_0 t + \theta)] = \int_0^{2\pi} \sin(\omega_0 t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

$$E[\xi^2(t)] = E[\sin^2(\omega_0 t + \theta)] = \frac{1}{2} E[1 - \cos 2(\omega_0 t + \theta)] = \frac{1}{2}$$

$$D[\xi(t)] = E[\xi^2(t)] - E^2[\xi(t)] = \frac{1}{2}$$

$$R_{\xi}(t, t + \tau) = E[\xi(t)\xi(t + \tau)]$$

$$= E[\sin(\omega_0 t + \theta) \sin(\omega_0(t + \tau) + \theta)]$$

$$= \frac{1}{2} E\{\cos \omega_0 \tau - \cos[\omega_0(t_2 + t_1) + 2\theta]\}$$

$$= \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau - 0 = \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau = R(\tau)$$

(2) 可见:  $\xi(t)$  的数学期望为常数，自相关函数只与时间间隔  $\tau$  有关，以  $\xi(t)$  为广义平稳随机过程。

(3) 讨论各态历经性: 求  $\xi(t)$  的时间平均:

$$\bar{a} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_0 t + \theta) dt = 0$$



$$\begin{aligned}\overline{R(\tau)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(w_0 t + \theta) \cdot \sin\{[w_0(t + \tau)] + \theta\} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} \cos w_0 \tau dt - \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2w_0 t + w_0 \tau + 2\theta) dt \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cos w_0 \tau - 0 \\ &= \frac{1}{2} \cos w_0 \tau\end{aligned}$$

比较统计平均与时间平均，得  $a = \bar{a}$ ， $R(\tau) = \overline{R(\tau)}$ ，因此随机相位正弦波是各态历经的。

**例题 4：**什么是广义平稳？什么是狭义平稳？两者有何关系？

**解：**广义平稳：数学期望与  $t$  无关，相关函数仅与时间间隔  $\tau$  有关。狭义平稳：任意  $n$  维分布与时间起点无关。两者关系：狭义平稳则广义平稳，反之不一定成立。

**例题 5：**平稳随机过程的统计特性不随时间的推移而不同，其一维分布与\_\_\_\_\_无关，二维分布只与\_\_\_\_\_有关。

**解：**时间；时间间隔

### (三) 高斯随机过程

#### 1. 定义

若随机过程  $\xi(t)$  的任意  $n$  维 ( $n=1, 2, \dots$ ) 分布都是正态分布，则称它为高斯随机过程或正态过程。其  $n$  维正态概率密度函数表示如下：

$$\begin{aligned}f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n |B|^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp \left[ \frac{-1}{2|B|} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |B|_{jk} \left( \frac{x_j - a_j}{\sigma_j} \right) \left( \frac{x_k - a_k}{\sigma_k} \right) \right]\end{aligned}$$

式中， $a_k = E[\xi(t_k)]$ ， $\sigma_k^2 = E\{[\xi(t_k) - a_k]^2\}$ ， $|B|$  为归一化协方差矩阵的行列式，即：

**关注【期末帮】公众号，助力大学不挂科！**





$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & 1 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$|B|_{jk}$  为行列式  $|B|$  中元素  $b_{jk}$  的代数余因子， $b_{jk}$  为归一化协方差函数，且

$$b_{jk} = \frac{E\{[\xi(t_j) - a_j][\xi(t_k) - a_k]\}}{\sigma_j \sigma_k}$$

## 2. 高斯过程重要性质

高斯过程的  $n$  维分布完全由  $n$  个随机变量的数学期望、方差和两两之间的归一化协方差函数所决定。因此，对于高斯过程，只要研究它的一维和二维数字特征就可以了。

如果高斯过程是广义平稳的，则它的均值为常数，协方差函数只与时间间隔有关，由性质（1）知，它的  $n$  维分布与时间起点无关。所以，广义平稳的高斯过程也是狭义平稳的。

如果高斯过程在不同时刻的取值是不相关的，即对所有  $j \neq k$  有  $b_{jk}=0$ ， $|B|=1$ ，则：也是统计独立的。

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n |B|^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp \left[ \frac{-1}{2|B|} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |B|_{jk} \left( \frac{x_j - a_j}{\sigma_j} \right) \left( \frac{x_k - a_k}{\sigma_k} \right) \right]$$



$$= \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \exp\left[-\frac{(x_j - a_j)^2}{2\sigma_j^2}\right]$$

$$= f(x_1, t_1) \cdot f(x_2, t_2) \cdots f(x_n, t_n)$$

也就是说，如果高斯过程在不同时刻的取值是不相关的，那么它们也是统计独立的。

高斯过程经线性变换后仍为高斯过程。

若  $\xi_1(t)$ 、 $\xi_2(t)$  为高斯分布，则  $a\xi_1(t) + b\xi_2(t)$  也为高斯分布。

### 3.高斯过程与一般随机过程性能比较

#### 一般随机过程

若统计独立，则必不相关；反之，则不然，若不相关，则不一定统计独立。

若狭义平稳，则必广义平稳；反之，则不然，即：若广义平稳，则不一定狭义平稳。

#### 高斯过程

若不相关，则统计独立。

若广义平稳，则狭义平稳。

**例题 6:**  $Z(t) = X_1 \cos \omega_0 t - X_2 \sin \omega_0 t$  是一随机过程。若  $X_1$ 、 $X_2$  是彼此独立且具有均值为 0，方差为  $\sigma^2$  的正态随机变量，求：

- (1)  $E[Z(t)]$ 、 $D[Z(t)]$
- (2)  $Z(t)$  的一维概率密度函数  $f(z)$
- (3)  $Z(t)$  的自相关函数  $R_Z(t_1, t_2)$
- (4) 此随机过程是否广义平稳？
- (5)  $Z(t)$  的平均功率,直流功率,交流功率。

**解:** (1)  $E[Z(t)] = E[X_1 \cos \omega_0 t - X_2 \sin \omega_0 t] = \cos \omega_0 t \cdot E[X_1] - \sin \omega_0 t \cdot E[X_2]$

已知  $E[X_1] = E[X_2] = 0 \quad \therefore E[Z(t)] = 0$

$E[Z^2(t)] = E[(X_1 \cos \omega_0 t - X_2 \sin \omega_0 t)^2]$



$$= \cos 2\omega_0 t E[X_{12}] - 2\cos\omega_0 t \sin\omega_0 t E[X_1 X_2] + \sin 2\omega_0 t E[X_{22}]$$

$$\because D[X_1] = E[X_{12}] - E_2[X_1] = \sigma^2, \quad E_2[X_1] = 0$$

$$\therefore E[X_{12}] = \sigma^2 \quad \text{同理: } E[X_{22}] = \sigma^2$$

$\because X_1, X_2$  是彼此独立

$$\therefore E[X_1 X_2] = E[X_1] E[X_2] = 0$$

$$\therefore E[Z_2(t)] = \cos 2\omega_0 t \cdot \sigma^2 + \sin 2\omega_0 t \cdot \sigma^2 = \sigma^2$$

$$D[Z(t)] = E[Z_2(t)] - E_2[Z(t)] = \sigma^2$$

(2)  $Z(t) = X_1 \cos \omega_0 t - X_2 \sin \omega_0 t$  是正态随机变量  $X_1, X_2$  的线性变换, 所以  $Z(t)$

是正态随机过程, 只要求出  $Z(t)$  的均值和方差, 带入正态分布的一维概率密

度函数公式即得:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$(3) R_Z(t_1, t_2) = E[Z(t_1) Z(t_2)]$$

$$= E[(X_1 \cos \omega_0 t_1 - X_2 \sin \omega_0 t_1)(X_1 \cos \omega_0 t_2 - X_2 \sin \omega_0 t_2)]$$

$$= \cos \omega_0 t_1 \cos \omega_0 t_2 E[X_{12}] - \cos \omega_0 t_1 \sin \omega_0 t_2 E[X_1 X_2]$$

$$- \sin \omega_0 t_1 \cos \omega_0 t_2 E[X_1 X_2] + \sin \omega_0 t_1 \sin \omega_0 t_2 E[X_{22}]$$

$$= \sigma^2 [\cos \omega_0 t_1 \cos \omega_0 t_2 + \sin \omega_0 t_1 \sin \omega_0 t_2]$$

$$= \sigma^2 \cos \omega_0(t_1 - t_2) = \sigma^2 \cos \omega_0 \tau$$

(4)  $a = E[Z(t)] = 0$  为常数,  $R_Z(t_1, t_2) = R_Z(\tau)$  是  $\tau$  的函数

此随机过程是广义平稳随机过程。

(5)  $E[Z(t)] = 0$ ,  $Z(t)$  的直流功率  $= E_2[Z(t)] = 0$ ,

$$\text{交流功率} = D[Z(t)] = \sigma^2$$



平均功率=直流功率+交流功率= $\sigma^2$  或:  $E[Z^2(t)] = \sigma^2$

## (四) 窄带随机过程

### 1. 定义

所谓“窄带”系统，是指其频谱被限制在载波或某中心频率附近一个窄的频带上，而这个中心频率又远离零频率。

通带宽度  $\Delta f \ll f_c$ ，且  $f_c$  远离零频率

例如随机过程通过以  $f_c$  为中心频率的带通滤波器后，即是窄带过程。

实际中，大多数通信系统都是窄带型的，信号和噪声都满足“窄带”的假设。

### 2. 窄带随机过程的正交表示

窄带随机过程:  $\xi(t) = a_{\xi}(t) \cos[\omega_c t + \phi_{\xi}(t)]$

$$\xi(t) = a_{\xi}(t) \cos \phi_{\xi}(t) \cos \omega_c t - a_{\xi}(t) \sin \phi_{\xi}(t) \sin \omega_c t$$

令:  $\xi_c(t) = a_{\xi}(t) \cos \phi_{\xi}(t)$  -- 称为  $\xi(t)$  的同相分量

$\xi_s(t) = a_{\xi}(t) \sin \phi_{\xi}(t)$  -- 称为  $\xi(t)$  的正交分量

$a_{\xi}(t)$ : 随机包络，是低频分量

$\phi_{\xi}(t)$ : 随机相位，是低频分量

等价式为:  $\xi(t) = \xi_c(t) \cos \omega_c t - \xi_s(t) \sin \omega_c t$

$\xi_c(t)$  及  $\xi_s(t)$  也是随机过程，具有低通性质，均属于低通型过程

$\xi(t)$  的统计特性由  $a_{\xi}(t)$ ,  $\phi_{\xi}(t)$  或  $\xi_c(t)$ ,  $\xi_s(t)$  的统计特性确定. 反之, 如果已

知  $\xi(t)$  的统计特性则可确定  $a_{\xi}(t)$ ,  $\phi_{\xi}(t)$  和  $\xi_c(t)$ ,  $\xi_s(t)$  的统计特性。



### 3.同相和正交分量的统计特性

前提条件：针对一个均值为零的窄带平稳高斯过程  $\xi(t)$ ；

结论：

它的同相分量  $\xi_c(t)$ 和正交分量  $\xi_s(t)$ 也是平稳高斯过程，而且均值都为零，方差也相同。

在同一时刻上得到的  $\xi_c(t)$ 和  $\xi_s(t)$ 是互不相关的或统计独立的。

### 4.包络和相位的统计特性

前提条件：针对一个均值为零，方差为  $\sigma_\xi^2$  的窄带平稳高斯过程  $\xi(t)$

包络  $a_\xi(t)$ 的一维分布是瑞利分布：
$$f(a_\xi) = \frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2} \exp\left[-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right], a_\xi \geq 0$$

相位  $\phi_\xi(t)$ 的一维分布是在  $(0, 2\pi)$  内均匀分布；

就一维分布而言， $a_\xi(t)$ 与  $\phi_\xi(t)$ 是统计独立的，即： $f(a_\xi, \phi_\xi) = f(a_\xi) \cdot f(\phi_\xi)$

**例题 7：**一个均值为零、方差为  $\sigma_\xi^2$  的窄带平稳高斯过程,其同相分量和正交分量是\_\_\_过程,均值为\_\_\_，方差为\_\_\_。

**解：**平稳高斯; 0 ;  $\sigma_\xi^2$

**例题 8：**均值为零的平稳窄带高斯过程，其包络的一维分布是\_\_\_，其相位的一维分布是\_\_\_。

**解：**瑞利分布;均匀分布



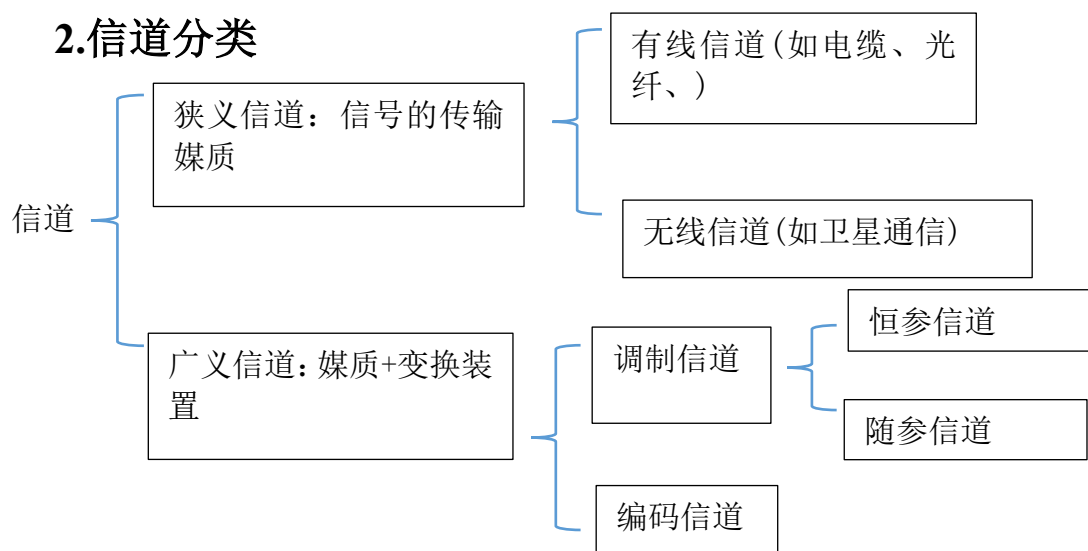
## 第四章 信道

### （一）信道定义与分类

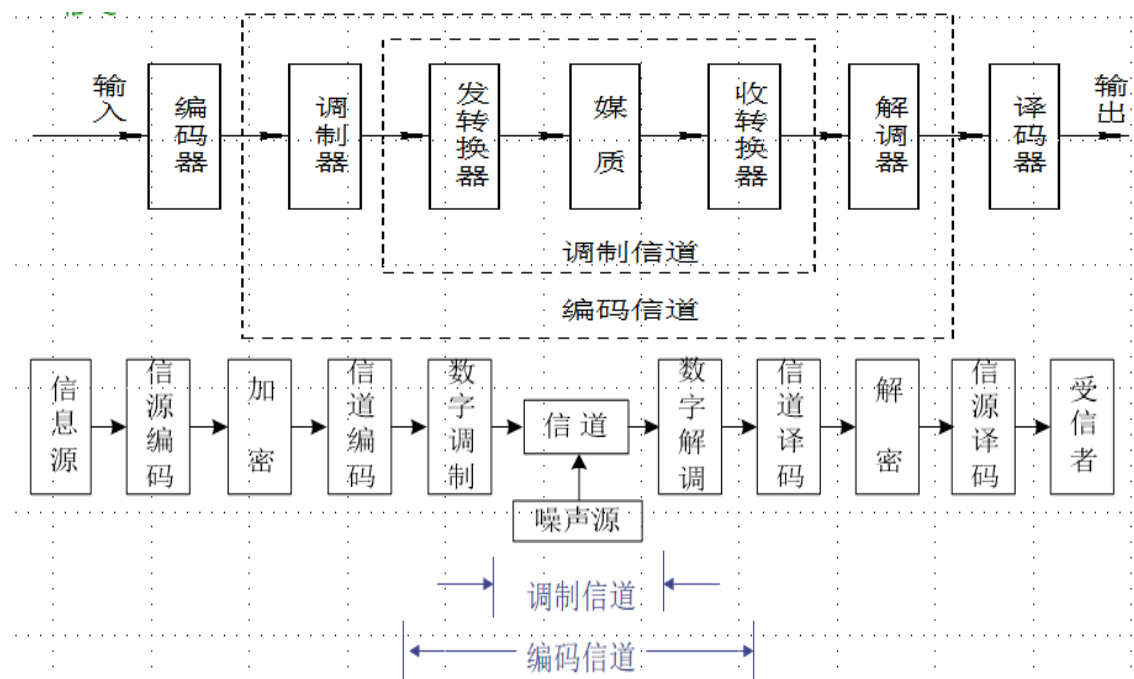
#### 1.信道定义

信号传输的媒质。或：以传输媒质为基础的信号通道。

#### 2.信道分类



（变换装置：发送、接收设备，天线、馈线，调制解调器等）



**调制信道：**指图中调制器输出端到解调器输入端的部分，又称模拟信道。

研究调制和解调时，常用调制信道。

**编码信道：**指图中编码器输出端到译码器输入端的部分，又称数字信道。

研究数字系统时，常用编码信道。

## (二) 信道模型

### 1. 调制信道模型

调制信道具有如下共性：

- 1) 输入端与输出端是一一对应的；
- 2) 绝大多数的信道都是线性的，即满足叠加定理；
- 3) 信号通过信道具有一定的延迟时间，而且还会受到(固定或时变的)损耗；
- 4) 即使没有信号输入，在信道输出端仍有一定的功率输出。

因此，可用一个二对端(或多对端)线性时变网络来表示



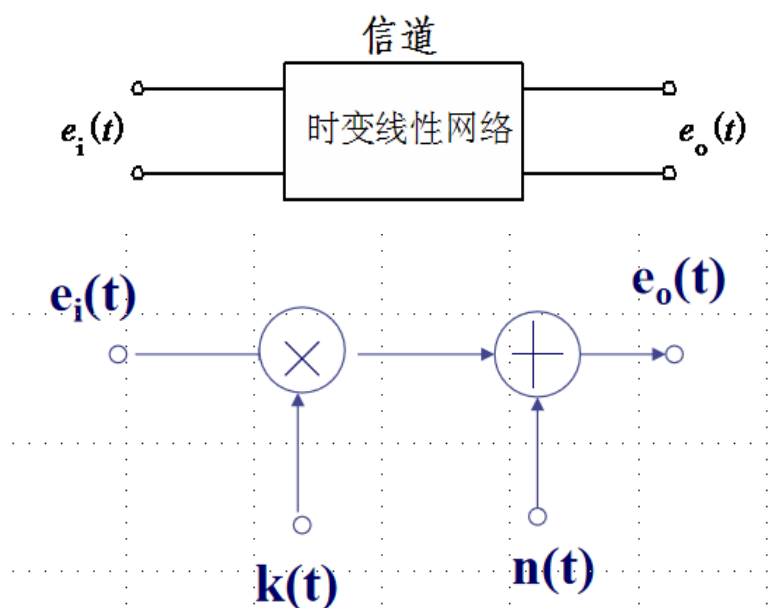
## 2. 二对端信道模型

输入  $e_i(t)$  和输出  $e_o(t)$  之间的关系可表示为

$$e_o(t) = f[e_i(t)] + n(t)$$

$f[e_i(t)]$ : 信道对输入信号  $e_i(t)$  进行的线性(时变或时不变)变换, 是个高度概括的结果, 作为数学上的一种简洁, 令:  $f[e_i(t)] = k(t) \cdot e_i(t)$ , 则:

$$e_o(t) = k(t)e_i(t) + n(t)$$



$k(t)$ : 乘性干扰

$n(t)$ : 独立存在的加性干扰

分析信道对信号的影响, 只要了解  $k(t)$  和  $n(t)$  的特性即可。

依据  $k(t)$  的特性, 可以把信道分为恒参信道和随参信道

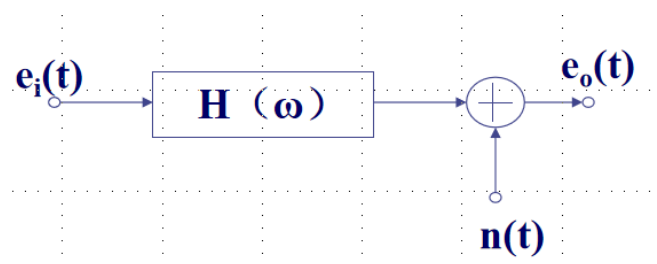
**恒参信道:**

$k(t)$  随时间缓慢变化的信道。

包括: 明线、电缆、光纤、超短波及微波视距传播、卫星中继等;

恒参信道模型: 线性时不变网络



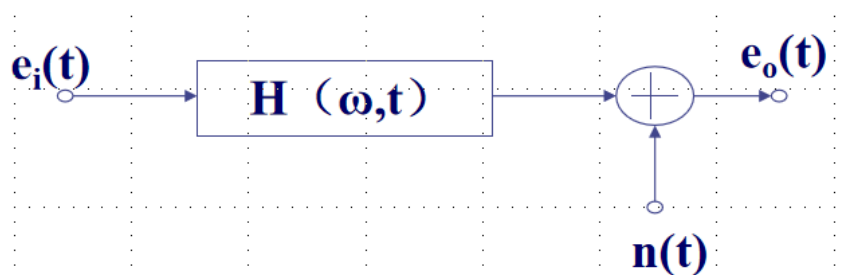


随参信道：

$k(t)$  随机快变化的信道。

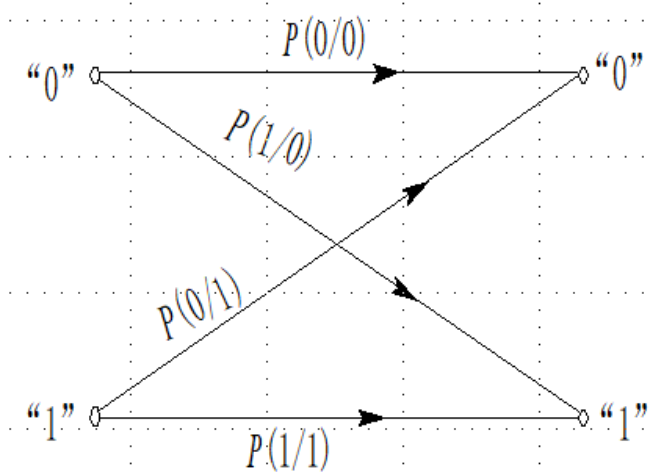
包括：短波电离层反射信道、散射信道、超短波移动通信信道等。

随参信道模型：线性时变网络

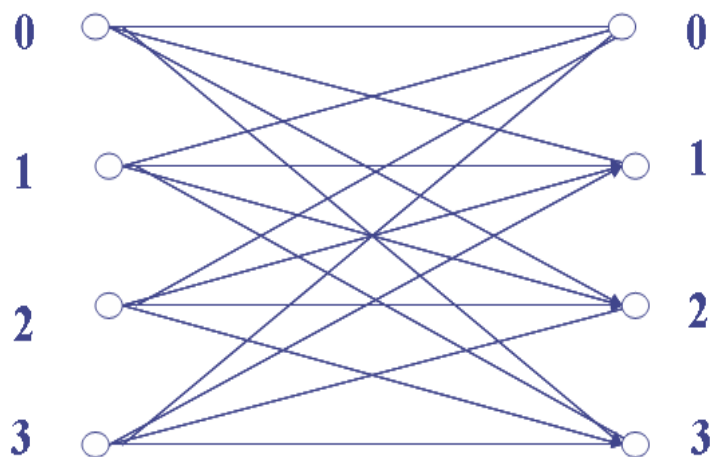


### 3. 编码信道模型

编码信道的输入输出均为数字序列，用转移概率（条件概率）来描述



二进制无记忆编码信道模型



四进制无记忆编码信道模型

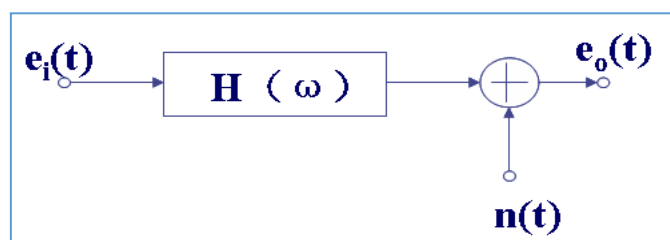
转移概率由信道特性决定，一个特定的编码信道，有确定的转移概率，通过对实际信道的大量统计分析得到。

### （三）恒参/随参信道对信号的影响

#### 1.恒参信道特性及其对信号传输的影响

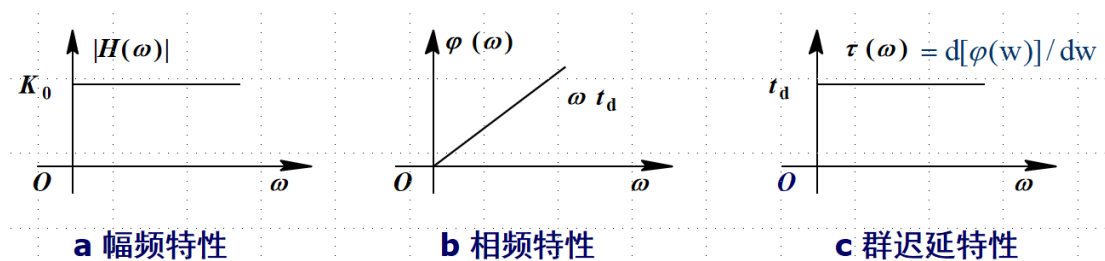
模型——线性时不变网络

特性——幅频、相频特性



$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

理想信道满足无失真传输条件：



非理想信道不满足无失真传输条件，可能引起：

### 幅-频畸变

由来：幅频特性不理想造成

例：电话线传输特性：

### 影响

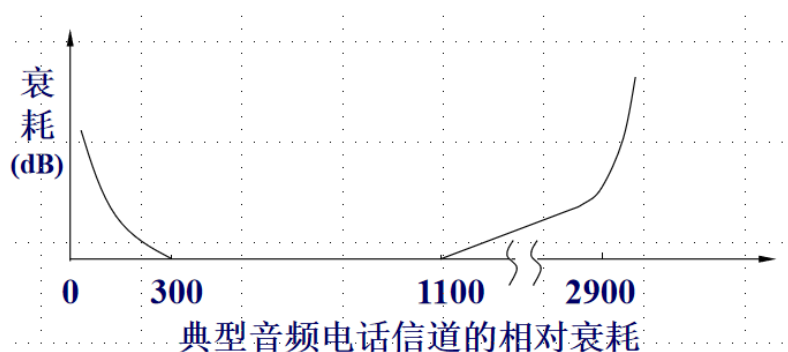
模拟信号波形失真

数字信号产生 ISI

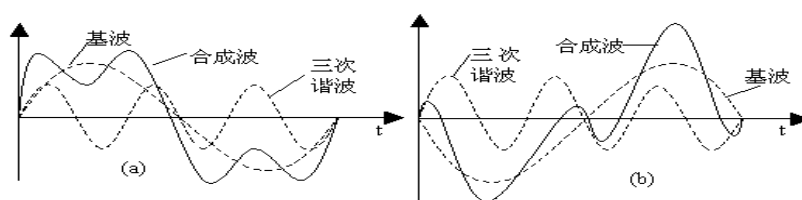
### 解决方法

控制畸变、使用畸变较小区域

均衡（收端加线性补偿网络——特性补偿）



### 相-频畸变



由来：相频特性不理想造成

影响：



模拟信号波形失真

数字信号产生 ISI

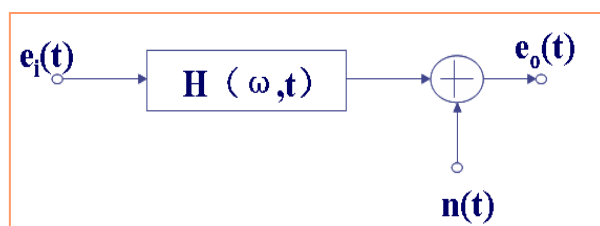
解决方法:

均衡 (收端加线性补偿网络——特性补偿)

## 2. 随参信道特性及其对信号传输的影响

模型——线性时变网络

随参信道主要特性:



对信号的衰减随时间而变化;

传输的时延随时间而变化;

多径传播。

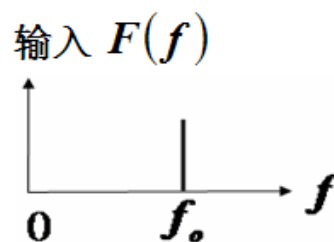
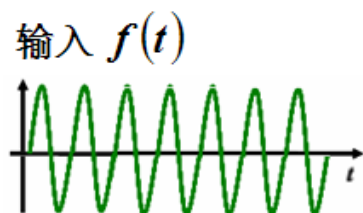
多径传播后的接收信号将是衰减和时延都随时间变化的各条路径的信号的合成。

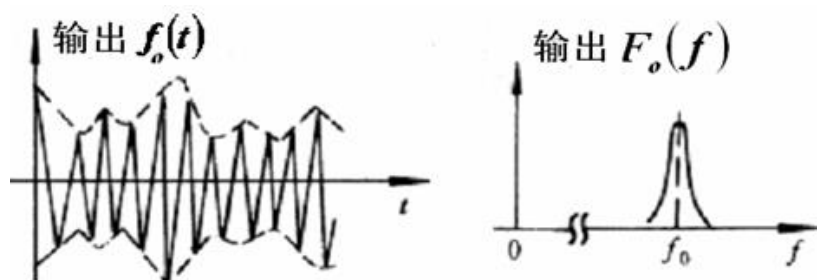
多径传输的影响 (主要从多径时延差的影响进行研究)

一般衰落

频率弥散

频率选择性衰落





设输入单频  $f(t) = A \cos \omega_0 t$ ，信道输出：

波形上，使包络和相位都受到调制的窄带信号——衰落信号；

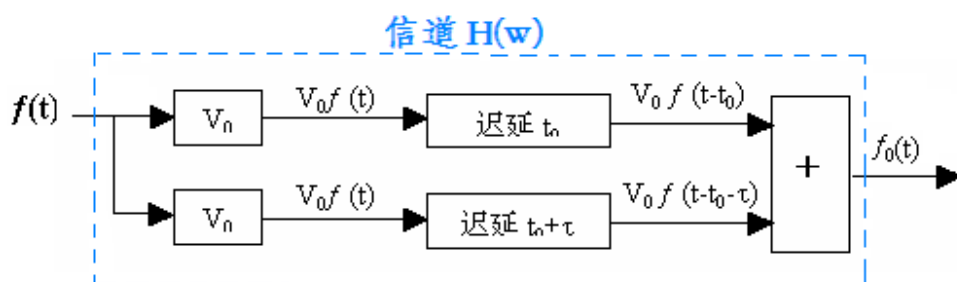
包络  $V(t)$  的一维分布服从瑞利分布，称为瑞利型衰落。

$V(t)$  的一维分布服从均匀分布。

频谱上，多径传输引起频率弥散，即由单个频率变成一个窄带频谱。

频率选择性衰落

以两径传输为例（设衰减相同，时延不同，相对时延差  $\tau$ ）：



$$\therefore \text{信道传输特性 } H(\omega) = \frac{F_o(\omega)}{F(\omega)}$$

信道传输特性  $H(\omega)$ ：

设  $V_0 f(t) \Leftrightarrow V_0 F(\omega)$

$$\textcircled{1} V_0 f(t - t_0) \Leftrightarrow V_0 F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

$$\textcircled{2} V_0 f(t - t_0 - \tau) \Leftrightarrow V_0 F(\omega) e^{-j\omega(t_0 + \tau)}$$

信道二径输出信号：

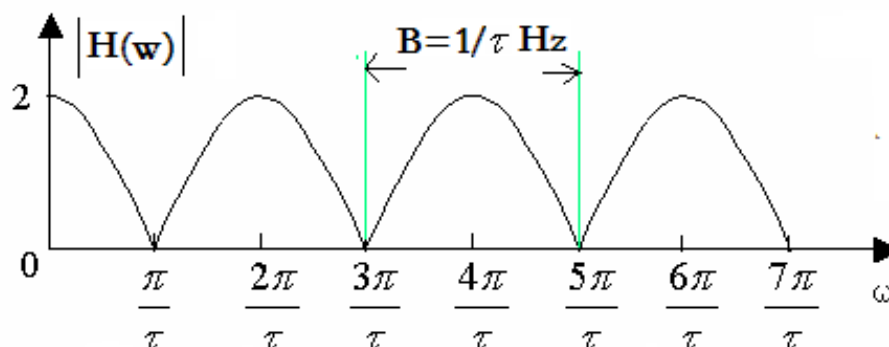
$$f_o(t) \Leftrightarrow F_o(\omega) = V_0 F(\omega) e^{-j\omega t_0} (1 + e^{-j\omega \tau})$$

$$\therefore \text{信道传输特性 } H(\omega) = \frac{F_o(\omega)}{F(\omega)} = V_0 e^{-j\omega t_0} (1 + e^{-j\omega \tau})$$

$$= V_0 e^{-j\omega t_0 - \frac{j\omega \tau}{2}} \left( e^{\frac{j\omega \tau}{2}} + e^{-\frac{j\omega \tau}{2}} \right) = 2V_0 e^{-j\omega \left( t_0 + \frac{\tau}{2} \right)} \cos(\omega \tau / 2)$$



信道传输幅频特性曲线：



$$\Delta f = \frac{1}{\tau_m}$$

m: 最大多径时延差

为了不引起频率选择性衰落，传输信号的频带必须小于相关带宽  $\Delta$

**例题 1:** 根据信道特性参数随时间变化的快慢，可将信道分为\_\_\_\_和\_\_\_\_ 信道。

**答:** 恒参信道和随参信道

**例题 2:** 调制信道分为\_\_\_\_和\_\_\_\_，短波电离层反射信道属于\_\_\_\_ 信道。

**答:** 恒参信道和随参信道;随参

**例题 3:** 理想恒参信道的冲激响应为\_\_\_\_\_。

**答:**  $h(t) = K \delta(t - t_d)$

**例题 4:** 宽带信号在短波电离层反射信道中传输时，可能遇到的主要衰落类型是\_\_\_\_\_。

**答:** 频率选择性衰落

## (四) 信号噪声与容量

### 1. 信道加性噪声

调制信道中干扰包括：

乘性干扰  $k(t)$

加性干扰  $n(t)$

$$e_o(t) = k(t)e_i(t) + n(t)$$



加性噪声一是分散在通信系统中各处噪声的集中表示。

(独立于有用信号，却始终干扰有用信号)

## 2. 噪声来源及分类

根据来源分为

### I. 人为噪声

- ① 外台信号
- ② 人为施放的干扰源
- ③ 工业点火辐射
- ④ 荧光灯干扰

### II. 自然噪声

- ⑤ 闪电
- ⑥ 大气中的电暴
- ⑦ 银河系噪声
- ⑧ 其它宇宙噪声

### III. 内部噪声

- ⑨ 热噪声
- ⑩ 霰弹噪声
- 11 电源哼声
- 12 接触不良
- 13 自激振荡
- 14 各种内部谐波干扰等

根据特征分为

### I. 单频噪声

- ① 外台信号
- ② 人为施放的干扰源

### II. 脉冲噪声



③工业点火辐射

④电器开关通断

⑤闪电

### III. 起伏噪声

⑥宇宙噪声

⑦热噪声

⑧霰弹噪声

普遍存在和不可避免的；是影响通信质量的主要因素之一，是研究噪声的主要对象。

## 3. 信道容量

信道容量：信道能够传输信息的最大传输速率，即信道的极限传输能力。

$$C = \max R$$

$$\{P(x)\}$$

设计通信系统时，要求信息速率  $R_b$  与信道容量  $C$  之间满足： $R_b \leq C$

信息速率在信道容量之内，才能实现无失真传输。否则，一定存在误码。

针对两种广义信道：调制信道(连续信道)——用连续信道的信道容量来表征；

编码信道(离散信道)——用离散信道的信道容量来表征。

离散信道的信道容量——是指信道中信息无差错传输的最大速率。

### 连续信道的信道容量

香农公式：设①加性噪声为  $P_i(t) = n_0/2$  的 G.W ②信道工作频带为  $B$  (单位：Hz)

③有用信号功率为  $S$  (单位：W)，则信道容量  $C$  由香农公式决定：

$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right) = B \log_2 \left( 1 + \frac{S}{n_0 B} \right) \left( \frac{\text{bit}}{s} \right)$$

意义：G.W 背景下，且信道带宽与有用信号功率受限下，调制信道无差错地传输数据信号的极限速率，即理论上单位时间内可能传输的信息量 ——  $R_b$  的极限数值。该式还是频谱扩展技术的理论基础。

信道容量与“三要素 ( $B$ 、 $n_0$ 、 $S$ )”之间的关系

$S \uparrow$  或  $n_0 \downarrow$ ，信噪比  $S/N \uparrow$ ，信道容量  $C \uparrow$

---

关注【期末帮】公众号，助力大学不挂科！





$B \uparrow$ ，可以增加信道容量  $C$ ，但不能无限制地使其增大

$$\lim_{B \rightarrow \infty} C = \frac{S}{n_0} \log_2 e \approx 1.44 \frac{S}{n_0}$$

在信道容量  $C$  一定时，信噪比  $(S/N)$  与信道带宽  $(B)$  可以互换

增加信号带宽可以降低对信噪比的要求；当信噪比太小、不能保证通信质量时，常采用宽带系统，从而使系统具有较好的抗干扰性。

**例题 5：**已知彩色电视图像由  $5 \times 10^5$  个像素组成，设每个像素有 64 种色彩，每种色彩有 16 个亮度等级。试计算：

(1) 每秒传送 100 个画面所需的信道容量；

(2) 如果接收机信噪比为 30dB，那么传送彩色图像所需的信道带宽为多少？

**解：** (1) 每像素信息量  $= \log_2 (64 \times 16) = 10 \text{ bit}$

每幅图信息量  $= 10 \text{ bit} \times 5 \times 10^5 = 5 \times 10^6 \text{ bit/幅} = H(X)$

信源信息速率  $R_b = R_B \times H(X) = 100 \text{ 幅/s} \times 5 \times 10^6 \text{ bit/幅} = 5 \times 10^8 \text{ bit/s}$

由  $C$  的定义可知，应有  $R_b = 5 \times 10^8 \text{ bit/s} \leq C = B \log_2 (1 + S/N)$

(2)  $B \geq R_b / \log_2 (1 + S/N) = (5 \times 10^8) / \log_2 (1 + 1000) \approx 50 \text{ MHz}$

$10 \lg(S/N) = 30 \text{ dB}, S/N = 10^3 = 1000$

**例题 6：**已知传真图像有  $2.25 \times 10^6$  个像素，每个像素有 12 个亮度等级，在电话线路上传输一张传真图片需要多少时间？

(电话线路带宽 3kHz，30dB 信噪比)

**解：** 每像素信息量  $= \log_2 12 = 3.58 \text{ bit}$

每幅图信息量  $I = 3.58 \times 2.25 \times 10^6 = 8.06 \times 10^6 \text{ bit}$

信道容量  $C = B \log_2 (1 + S/N) = 3 \log_2 (1 + 10^3) \approx 29.9 \times 10^3 \text{ bit/s}$

$C \geq R_b \text{ (bit/s)}, 1/R_b \geq 1/C$

$R_b = I/T$ ,  $T$  为传输一张传真图片需要的时间

$T = I/R_b \geq I/C = 8.06 \times 10^6 / 29.9 \times 10^3 = 0.269 \times 10^3 \text{ s}$

$T_{\min} = 0.269 \times 10^3 \text{ s} \approx 4.48 \text{ min}$

**例题 7：**在高斯信道中，当传输系统的信号噪声功率比下降时，为保持信道容量不变，可以采用——的办法，其理论依据是——。

**答：**增大信号带宽；香农信道容量公式



## 第五章 模拟调制系统

### （一）幅度调制

#### 1. 基本概念

调制 — 把信号转换成适合在信道中传输的形式的一种过程。

**调制的目的**

提高无线通信时的天线辐射效率。

把多个基带信号分别搬移到不同的载频处，以实现信道的多路复用，提高信道利用率。

扩展信号带宽，提高系统抗干扰、抗衰落能力，还可实现传输带宽与信噪比之间的互换。

**调制分类**

模拟调制——对模拟信号进行调制，基带信号是模拟信号；



数字调制——对数字信号进行调制，基带信号是数字信号；

广义调制 — 分为基带调制和带通调制（也称载波调制）。

狭义调制 — 仅指带通调制。大多数场合，调制均指载波调制。

载波 — 可以是正弦波，也可以是非正弦波。

载波调制 — 用调制信号去控制载波的参数的过程。

调制信号 — 指来自信源的基带信号。

已调信号 — 载波受调制后称为已调信号。

解调(检波) — 调制的逆过程，其作用是将已调信号中的调制信号恢复出来。

## 2. 常见的模拟调制方式

**幅度调制：**信息加载在正弦载波的幅度上，称为幅度调制。

幅度调制属于线性调制，是基带信号频谱的搬移。

**常见幅度调制方式：**调幅 AM

双边带 DSB

单边带 SSB

残留边带 VSB

**角度调制：**信息加载在正弦载波的角度上，称为角度调制。

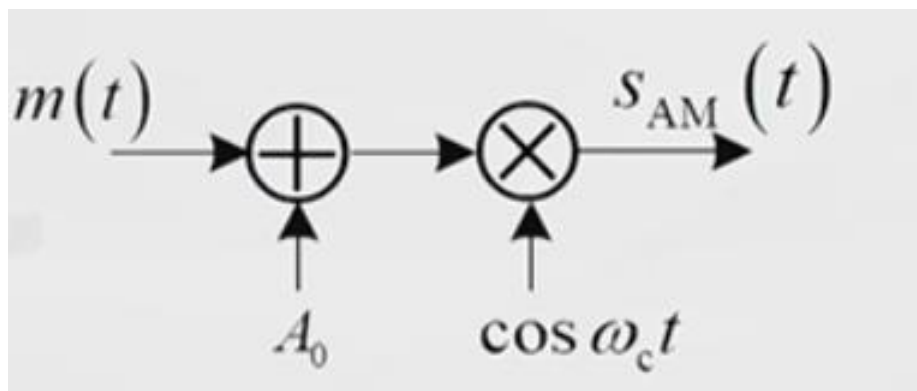
角度调制属于非线性调制，不是基带信号频谱的简单搬移，产生新的频率分量。

**常见角度调制方式：**频率调制 FM

相位调制 PM

## 3. AM(Amplitude Modulation)调制器模型和表示式

模型：



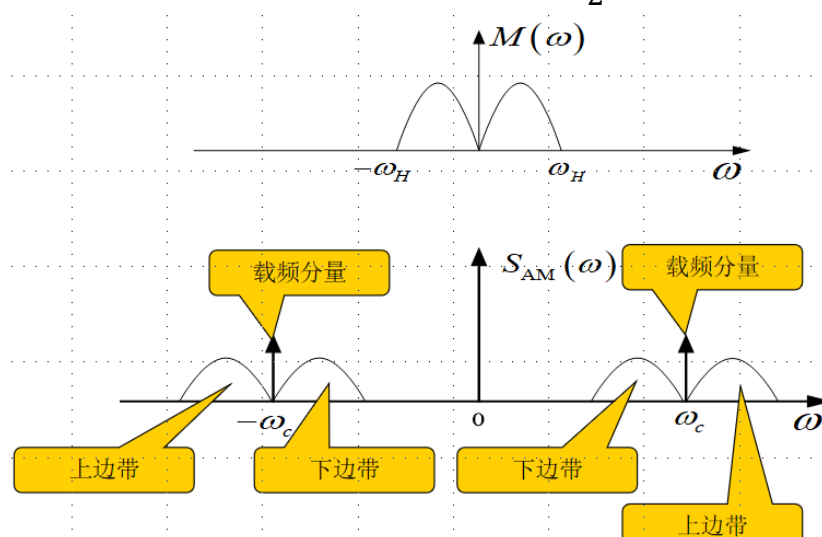
时域表达式:  $s_{AM}(t) = [A_0 + m(t)] \cos \omega_c t$

式中:  $m(t)$ : 调制信号, 均值为 0;  $A_0$ : 常数, 叠加的直流分量。

频谱图:  $s_{AM}(t) = [A_0 + m(t)] \cos \omega_c t$

频谱:

$$S_{AM}(\omega) = \pi A_0 [\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)] + \frac{1}{2} [M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c)]$$



由频谱可以看, AM 信号的频谱由载频分量、上边带、下边带三部分组成。

上边带的频谱结构与原调制信号的频谱结构相同;

下边带是上边带的镜像, 与上边带含有相同的信息。

#### 4. AM 信号的特性

带宽: 是基带信号带宽  $f_H$  的两倍:  $B_{AM} = 2f_H$

功率: 认为 AM 信号是平稳的、各态历经的, 用时间平均代替统计平均, 功率为:



$$P_{AM} = \overline{s_{AM}^2(t)} = \overline{[A_0 + m(t)]^2 \cos^2 \omega_c t}$$

$$= \overline{A_0^2 \cos^2 \omega_c t} + \overline{m^2(t) \cos^2 \omega_c t} + 2A_0 \overline{m(t) \cos^2 \omega_c t}$$

若

$$\overline{m(t)} = 0$$

$$\text{则 } P_{AM} = \frac{A_0^2}{2} + \frac{\overline{m^2(t)}}{2} = P_c + P_s$$

式中  $P_c = A_0^2/2$  — 载波功率——并不携带信息

$$P_s = \frac{\overline{m^2(t)}}{2} \quad \text{— 边带功率——有用功率}$$

调制效率：

$$\eta_{AM} = \frac{P_s}{P_{AM}} = \frac{\overline{m^2(t)}}{A_0^2 + \overline{m^2(t)}}$$

有用功率（边带功率）占信号总功率的比例称为调制效率：

当  $m(t) = A_m \cos \omega_m t$  时，

$$\overline{m^2(t)} = \frac{A_m^2}{2}$$

代入上式，得到

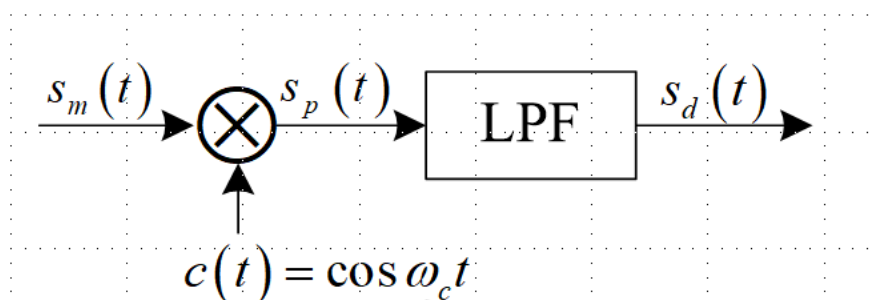
$$\eta_{AM} = \frac{\overline{m^2(t)}}{A_0^2 + \overline{m^2(t)}} = \frac{A_m^2}{2A_0^2 + A_m^2}$$

当  $A_0 = |m(t)|_{\max} = A_m$  时（100%调制）调制效率最高： $\max = 1/3$

可见 AM 功率利用率低。

**AM 解调方式一：相干解调**

模型



性能分析

$$s_{AM}(t) = [A_0 + m(t)] \cos \omega_c t$$

与同频同相的相干载波  $c(t) = \cos \omega_c t$  相乘后，得

$$\begin{aligned} s_p(t) &= [A_0 + m(t)] \cos(\omega_c t) \cos(\omega_c t) \\ &= 1/2 [A_0 + m(t)] [1 + \cos(2\omega_c t)] \end{aligned}$$

经 LPF 后，其中的  $2\omega_c$  频率分量被滤除，得到

$$u_d(t) = 1/2 [A_0 + m(t)]$$

再经隔直流后，恢复基带信号  $m(t)$ 。

### AM 解调方式二：包络检波

适用条件：AM 信号，且要求  $|m(t)|_{\max} \leq A_0$ ，

包络检波器结构：通常由半波或全波整流器和低通滤波器组成。

性能分析

设输入信号是：

$$S_{AM}(t) = [A_0 + m(t)] \cos \omega_c t$$

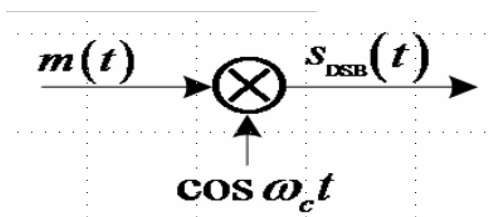
选择 RC 满足如下关系：

$$f_H \ll \frac{1}{RC} \ll f_c$$

检波器的输出为  $s_d(t) = A_0 + m(t)$ ，隔去直流后即可得到原信号  $m(t)$ 。

## 5. 双边带调制 (DSB Double-sideband Modulation)

模型：



时域表示式：

$$s_{DSB}(t) = m(t) \cos \omega_c t$$

频谱：

$$S_{DSB}(\omega) = \frac{1}{2} [M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c)]$$

带宽：

$$B_{DSB} = 2f_H(\text{HZ})$$

## 6. SSB(Single-Sideband Modulation) 原理

用 SSB 原因：

DSB 上、下边带含相同的频谱信息；频带利用率低。

设计合适的  $H(\omega)$  滤掉一个边带，传一个边带即可；

SSB 信号的性能：

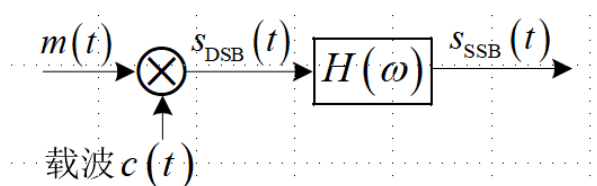
SSB 调制方式节省发射功率，所占用的频带宽度比 AM、DSB 减少了一半。

SSB 已成为短波通信中一种重要的调制方式。

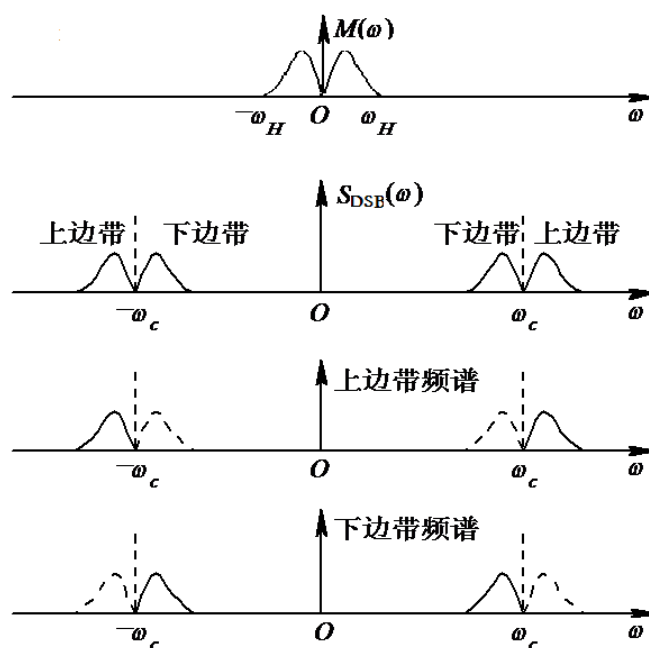
产生 SSB 信号的方法有两种：滤波法和相移法。

**单边带信号产生方法一：滤波法**

滤波法原理框图



$$S_{SSB}(\omega) = S_{DSB}(\omega) \cdot H(\omega)$$



用边带滤波器  $H(\omega)$  滤除不要的边带：

若  $H(\omega)$  具有理想高通特性：

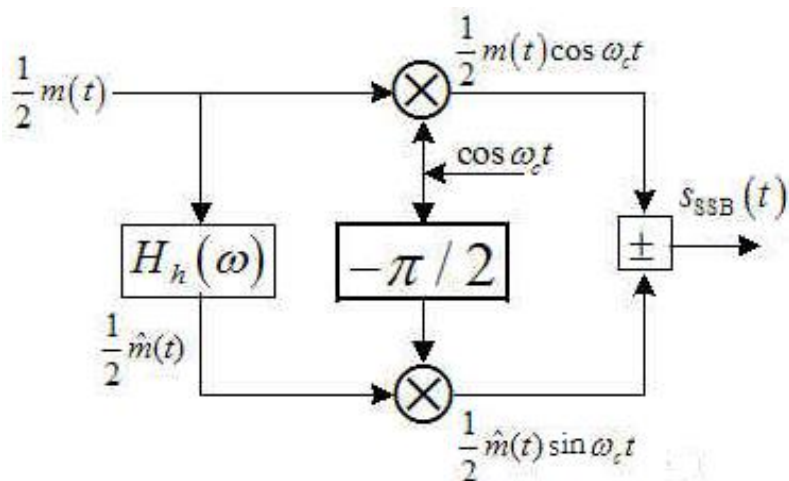
则可滤除下边带，得到 SSB 上边带信号。

若  $H(\omega)$  具有理想低通特性：

则可滤除上边带，得到 SSB 下边带信号。

### 单边带信号产生方法二：相移法

移相法 SSB 调制器方框图



优点：不需要滤波器具有陡峭的截止特性。

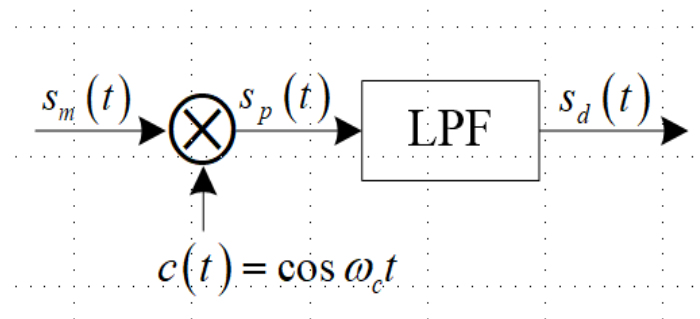
缺点：宽带相移网络难用硬件实现。

SSB 信号的解调





SSB 信号的解调和 DSB 一样，不能采用包络检波，因为 SSB 信号也是抑制载波的已调信号，它的包络不能直接反映调制信号的变化，所以仍需采用相干解调。



$$S_{SSB}(t) = \frac{1}{2}m(t)\cos\omega_c t \pm \frac{1}{2}\hat{m}(t)\sin\omega_c t$$

$$S_p(t) = S_{SSB}(t) \cos(\omega_c t)$$

$$= \frac{1}{2}[m(t) \cos 2(\omega_c t) \pm \hat{m}(t) \sin(\omega_c t) \cos(\omega_c t)]$$

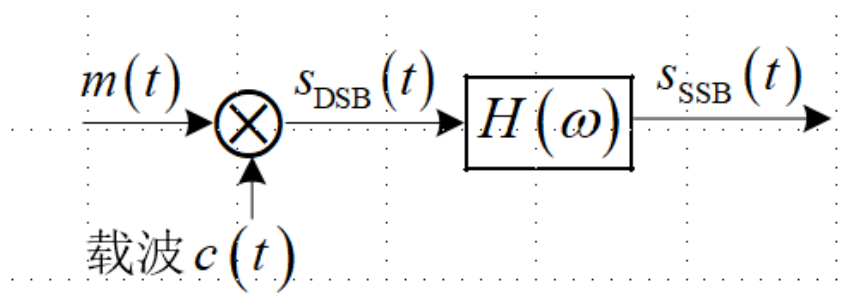
$$= \frac{1}{4}m(t) + \frac{1}{4}[m(t) \cos(2\omega_c t) \pm \hat{m}(t) \sin(2\omega_c t)]$$

经 LPF 后，其中的  $2\omega_c$  频率分量被滤除，得到

$$S_d(t) = \frac{1}{4}m(t) \quad \text{恢复了原基带信号}$$

## 7. 残留边带 (VSB Vestigial-Sideband Modulation) 调制

VSB 是介于 SSB 与 DSB 之间的一种折中方式，它既克服了 DSB 信号占用带宽的缺点，又解决了 SSB 信号实现中的困难。



不像 SSB 那样完全抑制 DSB 信号的一个边带，而是逐渐切割，使其残留一小部分

$H(\omega)$  不再要求十分陡峭的截止特性，比单边带滤波器容易制作。

对残留边带滤波器特性的要求



残留边带信号的频谱为

$$S_{VSB}(\omega) = S_{DSB}(\omega) \cdot H(\omega) \\ = \frac{1}{2} [M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c)] H(\omega)$$

接收端采用相干解调从该信号中恢复原基带信号。

$$S_p(\omega) = [S_{VSB}(\omega + \omega_c) + S_{VSB}(\omega - \omega_c)] \\ = \frac{1}{2} [M(\omega + 2\omega_c) + M(\omega)] H_{VSB}(\omega + \omega_c) + \frac{1}{2} [M(\omega) + M(\omega - 2\omega_c)] H_{VSB}(\omega - \omega_c)$$

经低通滤波器，滤掉  $\pm 2\omega_c$  处的频谱，输出信号频谱：

$$S_d(\omega) = \frac{1}{2} M(\omega) [H(\omega + \omega_c) + H(\omega - \omega_c)]$$

为保证无失真地恢复调制信号  $m(t)$ ，要求上式中的传递函数必须满足：

$$H(\omega + \omega_c) + H(\omega - \omega_c) = \text{常数}, \quad |\omega| \leq \omega_H$$

$\omega_H$ —原基带信号的最高频率

含义：残留边带滤波器的特性  $H(\omega)$  在  $\omega_c$  处必须具有互补对称（奇对称）特性，相干解调时才能无失真地从残留边带信号中恢复所需的调制信号。

**例题 1：**当调频指数满足\_\_\_\_\_时称为窄带调频。

**答：**  $m_f < 1$

**例题 2：**AM 系统在\_\_\_\_\_情况下会出现门限效应。

**答：**包络检波且小信噪比

**例题 3：**AM, DSB, SSB 和 FM 的有效性从优到劣的顺序为\_\_\_\_\_。

**答：**SSB、AM/DSB、FM

**例题 4：**AM, DSB, SSB 和 FM 的可靠性从优到劣的顺序为\_\_\_\_\_。

**答：**FM、SSB/DSB、AM

**例题 5：**残留边带滤波器的传输特性  $H(\omega)$  应满足\_\_\_\_\_。

**答：**  $H(\omega + \omega_c) + H(\omega - \omega_c) = \text{常数}, \quad |\omega| \leq \omega_H$  ;或者说，在载频两边具有互补对称特性

## （二）角度调制

### 1. 基本概念



角度调制：频率调制和相位调制的总称。

频率调制简称调频(FM)，相位调制简称调相(PM)。

这两种调制中，载波的幅度都保持恒定，而频率和相位的变化都表现为载波瞬时相位的变化。

角度调制中，已调信号频谱不再是原调制信号频谱的线性搬移，而是频谱的非线性变换，

会产生与频谱搬移不同的新的频率成分，故又称为非线性调制。

与幅度调制技术相比，角度调制最突出的优势是其较高的抗噪声性能。

## 2. 角度调制信号的一般表达式

$$s_m(t) = A \cos[\omega_c t + \phi(t)]$$

A — 载波的恒定振幅；

$\theta(t)$  — 信号的瞬时相位

$\Psi(t)$  — 瞬时相位偏移。

$d[\omega_c t + \Psi(t)]/dt = \omega(t)$  — 称为瞬时角频率

$d\Psi(t)/dt$  — 称为瞬时频偏。

相位调制(PM)：瞬时相位偏移随调制信号作线性变化，即

$$\phi(t) = K_p m(t)$$

$K_p$  — 调相灵敏度，单位是 rad/V

代入一般表达式得到 PM 信号表达式：

$$s_{PM}(t) = A \cos[\omega_c t + K_p m(t)]$$

频率调制(FM)：瞬时频率偏移随调制信号成比例变化，即

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = K_f m(t)$$

$K_f$  — 调频灵敏度，单位是 rad/s V。

这时相位偏移为

$$\phi(t) = k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$$

将其代入一般表达式

$$s_m(t) = A \cos[\omega_c t + \phi(t)]$$



得到 FM 信号表达式

$$S_{FM}(t) = A \cos[w_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau]$$

PM 与 FM 的关系

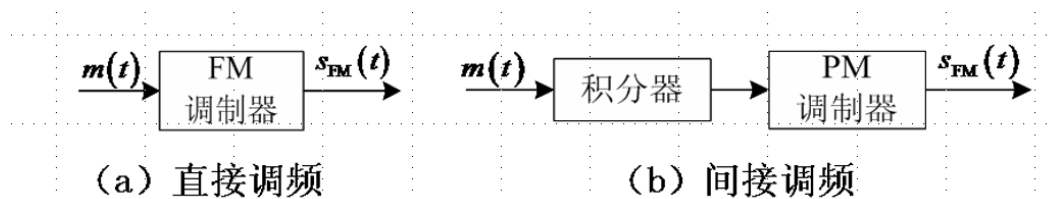
$$s_{PM}(t) = A \cos[\omega_c t + K_p m(t)]$$

$$S_{FM}(t) = A \cos[w_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau]$$

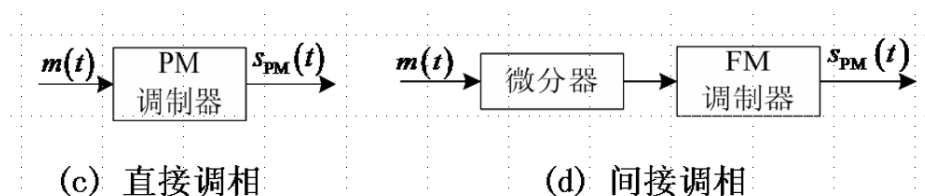
比较上两式可见：

PM 是相位偏移随调制信号  $m(t)$  线性变化，FM 是相位偏移随  $m(t)$  的积分呈线性变化。如果预先不知道调制信号  $m(t)$  的具体形式，则无法判断已调信号是调相信号还是调频信号。

将调制信号先积分，再进行调相，则得到调频波，叫间接调频：



将调制信号先微分，再进行调频，则得到调相波，叫间接调相。



### 3. 单音调制 FM

设调制信号为单一频率的正弦波，即

$$m(t) = A_m \cos \omega_m t = A_m \cos 2\pi f_m t$$

用它对载波进行频率调制时，得到 FM 信号的表达式：

$$\begin{aligned} S_{FM}(t) &= A \cos[w_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau] = A \cos[w_c t + k_f \int_{-\infty}^t A_m \cos \omega_m \tau d\tau] \\ &= A \cos[\omega_c t + m_f \sin \omega_m t] \end{aligned}$$



$$m_f = \frac{K_f A_m}{\omega_m} = \frac{\Delta \omega}{\omega_m} = \frac{\Delta f}{f_m} \text{—调频指数, 表示最大的相位偏移}$$

$$\Delta \omega = K_f A_m \text{—表示最大角频偏}$$

$$\Delta f = m_f \cdot f_m \text{—表示最大频偏}$$

**例题 6:** 某单频调频波的振幅 (A) 是 10V, 瞬时频率为  $f(t) = 10^6 + 10^4 \cos 2\pi \times 10^3 t$  Hz, 求:

[1] 此调频波表达式。

[2] 求频率偏移 ( $\Delta f$ )、调频指数 ( $m_f$ )、频带宽度 (B)

**解:** [1] 瞬时角频率  $\omega(t) = 2\pi f(t)$

$$\begin{aligned} \text{瞬时相位 } \theta(t) &= \int_{-\infty}^t \omega(\tau) d\tau \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^t [10^6 + 10^4 \cos 2\pi \times 10^3 \tau] d\tau \\ &= 2\pi \times 10^6 t + 10 \times \sin 2\pi \times 10^3 t \end{aligned}$$

$$s_{FM}(t) = A \cos \theta(t)$$

$$= 10 \cos [2\pi \times 10^6 t + 10 \times \sin 2\pi \times 10^3 t]$$

[2] 单音信号  $m(t) = A_m \cos \omega_m t = A_m \cos 2\pi f_m t$

$$\begin{aligned} s_{FM}(t) &= A \cos [\omega_c t + m_f \sin \omega_m t] \\ &= 10 \cos [2\pi \times 10^6 t + 10 \times \sin 2\pi \times 10^3 t] \end{aligned}$$

$$\Delta f = m_f \times f_m = 10 \times 10^3 = 10^4 \text{ Hz}$$

$$B = 2(\Delta f + f_m) = 2 \times (10^4 + 10^3) = 22 \text{ kHz}$$

$$\text{或: } B_{FM} = 2(m_f + 1)f_m = 2 \times (10 + 1) \times 10^3 = 22 \text{ kHz}$$

## 4. 调频信号的产生

(1) 直接调频法:

压控振荡器 (VCO) —— 振荡频率正比于输入控制电压。本身就是一个 FM 调制器。

直接调频法的主要优缺点:

优点: 可以获得较大的频偏。 缺点: 频率稳定度不高



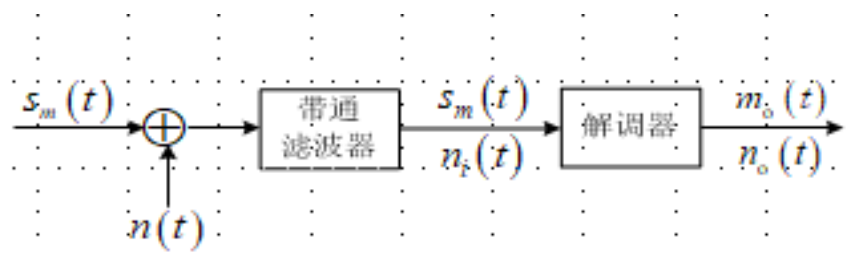
改进途径：采用如下锁相环（PLL）调制器

## （2）间接法调频

原理：先将调制信号积分，然后对载波进行调相，即可产生一个窄带调频（NBFM）信号，再经  $n$  次倍频器得到宽带调频（WBFM）。

## （三）线性调制系统的抗噪声性能

### 1. 分析模型



图中： $s_m(t)$  — 已调信号

$n(t)$  — 加性平稳高斯白噪声

$n_i(t)$  — 带通滤波后的噪声

$m(t)$  — 输出有用信号

$n_o(t)$  — 输出噪声

目标：分析模拟系统可靠性指标

解调器的输入信噪比

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{\text{解调器输入已调信号的平均功率}}{\text{解调器输入噪声的平均功率}} = \frac{\overline{s_m^2(t)}}{\overline{n_i^2(t)}}$$

解调器输出信噪比

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{\text{解调器输出有用信号的平均功率}}{\text{解调器输出噪声的平均功率}} = \frac{\overline{m_o^2(t)}}{\overline{n_o^2(t)}}$$

解调器调制制度增益

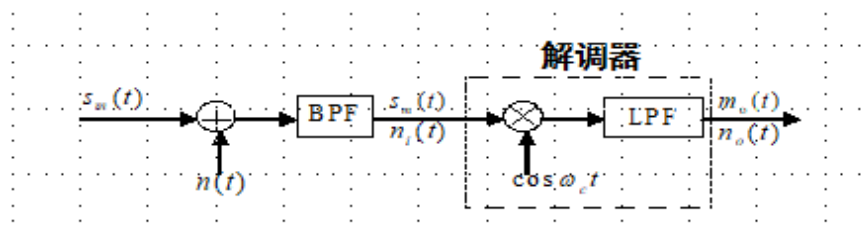
$$G = \frac{\frac{S_o}{N_o}}{\frac{S_i}{N_i}}$$



## 2. 线性调制一相干调制系统的抗噪声性能

DSB、SSB、VSB 和 AM 信号均可采用相干解调。

由于相干解调器满足线性叠加，所以信号与噪声可以分开处理。



线性调制相干解调系统抗噪声性能分析模型

## 3. 解调器输入信噪比

解调器输入信号功率为

$$S_i = \overline{s_m^2(t)} = \overline{[m(t) \cos \omega_c t]^2} = \frac{1}{2} \overline{m^2(t)}$$

输入噪声功率

$$N_i = \overline{n_i^2(t)} = \overline{n_c^2(t)} = \overline{n_s^2(t)} = n_0 B$$

输入信噪比

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{\frac{1}{2} \overline{m^2(t)}}{n_0 B}$$

## 4. 解调器输出信号功率 $S_o$

解调器输入信号为 DSB 信号：

$$s_m(t) = m(t) \cos \omega_c t$$

与相干载波  $\cos_c t$  相乘后，得

$$m(t) \cos^2 \omega_c t = \frac{1}{2} m(t) + \frac{1}{2} m(t) \cos 2 \omega_c t$$

经低通滤波器后，输出信号为

$$m_o(t) = \frac{1}{2} m(t)$$

因此，解调器输出端的有用信号功率为



$$S_o = \overline{m_o^2(t)} = \frac{1}{4} \overline{m^2(t)}$$

## 5. 解调器输出噪声功率 $N_o$

解调器输入端的窄带噪声可表示为

$$n_i(t) = n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t$$

它与相干载波相乘后，得

$$\begin{aligned} n_i(t) \cos \omega_c t &= [n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t] \cos \omega_c t \\ &= \frac{1}{2} n_c(t) + \frac{1}{2} [n_c(t) \cos 2\omega_c t - n_s(t) \sin 2\omega_c t] \end{aligned}$$

经低通滤波器后，解调器最终的输出噪声为

$$n_o(t) = \frac{1}{2} n_c(t)$$

故输出噪声功率为

$$N_o = \overline{n_o^2(t)} = \frac{1}{4} \overline{n_c^2(t)} = \frac{1}{4} \overline{n_i^2(t)} = \frac{1}{4} N_i \quad N_i = \frac{1}{4} n_0 B$$

## 6. 解调器输出信噪比和调制制度增益

解调器输出信噪比

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{\frac{1}{4} \overline{m^2(t)}}{\frac{1}{4} N_i} = \frac{\overline{m^2(t)}}{n_0 B}$$

调制制度增益

$$G_{DSB} = \frac{\frac{S_o}{N_o}}{\frac{S_i}{N_i}} = 2$$

由此可见，DSB 调制系统的制度增益为 2。也就是说，DSB 信号的解调器使信噪比改善一倍。

这是因为采用相干解调，使输入噪声中的正交分量被消除的缘故。

## 7. AM 包络检波系统的抗噪声性能

$$G_{AM} = \frac{\frac{S_o}{N_o}}{\frac{S_i}{N_i}} = \frac{\overline{2m^2(t)}}{A_0^2 + \overline{m^2(t)}}$$

1. AM 信号的调制制度增益  $G_{AM}$  随  $A_0$  的减小而增加， $G_{AM}$  总是小于 1，这说





明包络检波器对输入信噪比没有改善，而是恶化了。

例如：对于 100% 的调制，且  $m(t)$  是单频正弦信号，这时 AM 的调制制度增益为

$$(G_{AM}) \frac{2}{3_{max}}$$

2. 对于 AM 调制系统，在大信噪比时，采用包络检波器解调时的性能与同步检测器时的性能几乎一样。

**例题 7：**  $G_{DSB} = 2$ ， $G_{SSB} = 1$ ，这能否说明 DSB 系统的抗噪声性能比 SSB 系统好呢？回答是否定的。

**答：**因为，两者的输入信号功率不同、带宽不同，在相同的噪声功率谱密度条件下，输入噪声功率也不同，所以两者的输出信噪比是在不同条件下得到的。如果我们在相同的输入信号功率，相同的输入噪声功率谱密度，相同的基带信号带宽条件下，对这两种调制方式进行比较：

$$\begin{aligned} \frac{S_0}{N_0} |_{DSB} &= G \cdot \frac{S_i}{N_i} |_{DSB} = 2 \cdot \frac{S_i}{n_0 B} |_{DSB} = 2 \cdot \frac{S_i}{n_0 \times 2f_H} = \frac{S_i}{n_0 f_H} \\ \frac{S_0}{N_0} |_{SSB} &= G \cdot \frac{S_i}{N_i} |_{SSB} = \frac{S_i}{N_i} |_{SSB} = \frac{S_i}{n_0 B} |_{SSB} = \frac{S_i}{n_0 f_H} \\ \frac{S_0}{N_0} |_{DSB} &= \frac{S_0}{N_0} |_{SSB} \end{aligned}$$

比较结果：输出信噪比相等。这就是说，两者的抗噪声性能相同。

但 SSB 所需的传输带宽仅是 DSB 的一半，因此 SSB 得到普遍应用。

**例题 8：**设计一个单边带下边带调制系统，信道白噪声的双边功率谱密度为  $n_0/2 = 0.5 \times 10^{-5} \text{ W/Hz}$ ，载波频率  $f_c$  为 100kHz。模拟基带调制信号为  $m(t)$ ，功率为 4W，频带在  $0 \sim f_m$  范围内， $f_m = 4\text{k}$ ，求：

- (1) 单边带已调信号的表达式；
- (2) 单边带已调信号所在的频带范围；
- (3) 画出接收端原理方框图；
- (4) 解调器输入端信噪比？输出端信噪比？
- (5) 解调器输出端的噪声功率谱密度？

(6) 若  $N$  路最高频率为  $f_m$  的信号按 SSB 方式进行频分复用，再进行调频，



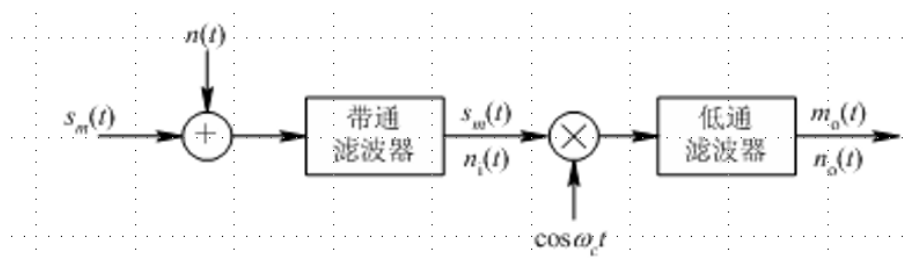
最大频偏为 $\Delta f$ 。求调频后输出信号带宽。

解： (1)

$$s_m(t) = \frac{1}{2} \left[ m(t) \cos \omega_c t - \hat{m}(t) \sin \omega_c t \right]$$

(2) 通带为 96~100 kHz;

(3)



$$(4) \quad \overline{m^2(t)} = \int p_m(f) df = 4w$$

$$s_i = \overline{s_m^2(t)} = \frac{1}{4} \overline{m^2(t)} = 1w$$

$$N_i = n_0 B = 10^{-5} \times 4 \times 10^3 = 0.04w$$

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{1}{0.04} = 25$$

$$\frac{S_o}{N_o} = G \times \frac{S_i}{N_i} = 1 \times 25 = 25$$

$$(5) \quad N_o = \frac{1}{4} N_i = 0.01w, \quad N_o = P N_o(f) * 2f_m,$$

$$P N_o(f) = N_o / (2f_m) = 0.01 / (2 * 4e^3) = 1.25e^{-6} \text{ (双边谱)}$$

$$(6) \quad B = 2(Nf_m + \Delta f)$$

**例题 9:** 信道双边噪声功率谱密度  $n_0/2 = 0.5 \times 10^{-6} \text{ W/Hz}$ , 传输抑制载波单边带(下边带)信号。设基带信号  $m(t)$  的频带限制在 10kHz, 功率是 20W。载波频率是 1MHz。采用相干解调, 接收机在输入信号加至解调器之前先经过一理想带通滤波器。试问:

- (1) 解调器输入端的信噪比是多少?
- (2) 解调器输出端的信噪比是多少? 调制制度增益是多少?
- (3) 解调器输出端的信号功率是多少?

**解:** (1)  $S_i/N_i = \overline{m^2(t)} / [4(n_0 \times B)] = 20 / [4(2 \times 0.5 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^3)] = 500$



$$(2) G=1, S_0/N_0 = S_i/N_i=500$$

$$(3) S_0 = \overline{m^2(t)} / 16 = 20/16 = 1.25 \text{ W}$$

$$\text{或 } N_0 = [n_0 B] / 4 = 1/400, S_0/N_0 = S_i/N_i=500, S_0 = 500 \times (1/400) = 1.25 \text{ W}$$

## （四）角度调制系统的抗噪声性能

### 1. 大信噪比时的解调增益

在解调器输入信噪比足够大时，信号和噪声可分开来计算。经过分析，可得解调器的输出信噪比

$$\frac{S_0}{N_0} = \frac{3A^2 K_f^2 \overline{m^2(t)}}{8\pi n_0 f_m^3}$$

如果调制信号  $m(t) = \cos \omega_m t$  (单音调制), 则有

$$\frac{S_0}{N_0} = 3m_f^2(m_f + 1) \frac{S_i}{N_i}$$

$$G_{FM} = 3m_f^2(m_f + 1)$$

$$B_{FM} = 2(m_f + 1)f_m = 2(\Delta f + f_m)$$

可见, 在大信噪比情况下,  $m_f$  增大  $\rightarrow B_{FM}$  增大  $> G_{FM}$  增大。这说明, 调频系统可以通过增加传输带宽来改善抗噪声性能。

注意, FM 系统以带宽换取输出信噪比改善并不是无止境的。带宽增加  $\rightarrow$  输入噪声功率增大  $\rightarrow$  输入信噪比下降  $\rightarrow$  出现门限效应。



## 第六章 数字基带传输系统

### （一）数字基带信号及其频谱特性

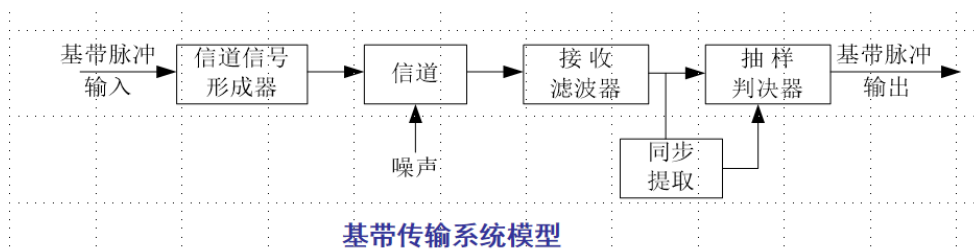
#### 1、数字基带传输系统

**数字基带信号：**二进制（或多进制）的脉冲序列（码流或比特流）

**特点：**没有经过正弦载波调制,频带在零频  $0$ ~最高截至频率  $f_H$  之间。往往包含丰富的低频分量，甚至直流分量。



**数字基带传输:**是在具有低通特性的有线信道中，特别是传输距离不太远的情况下，直接传输基带信号。



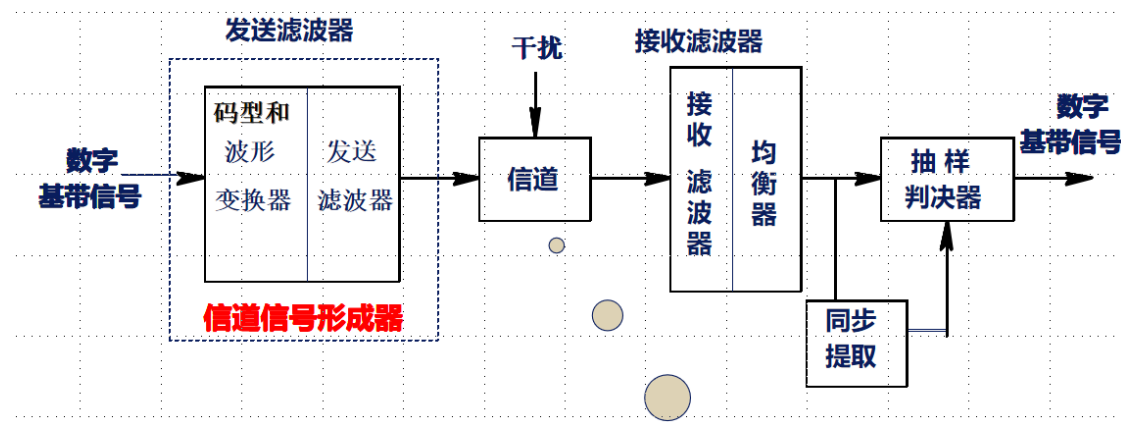
**信道信号形成器:**把传输码变换成适宜于信道传输的基带信号波形。

**信道:**信道的传输特性一般不满足无失真传输条件，因此会引起传输波形的失真。另外信道还会引入噪声  $n(t)$ ，并假设它是均值为零的高斯白噪声。

**接收滤波器:**它用来接收信号，滤除信道噪声和其他干扰，对信道特性进行均衡，使输出的基带波形有利于抽样判决。

**同步提取:**用同步提取电路从接收信号中提取定时脉冲。

**抽样判决器:**对接收滤波器的输出波形进行抽样判决以恢复或再生基带信号。



信道信号形成器把原始基带信号变换成适合于信道传输的基带信号，这种变换主要是通过码型变换、波形变换和发送滤波器来实现的。

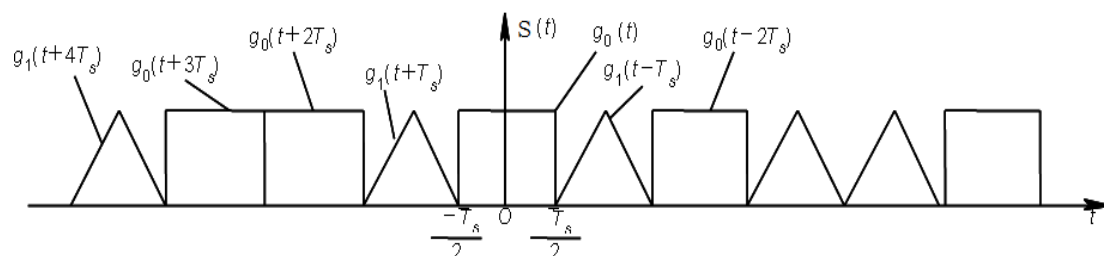
信道是允许基带信号通过的媒质，通常为有线信道，如市话电缆、架空明线等。

## 2、数字基带信号及其频谱分析

数字基带信号是随机的脉冲序列，没有确定的频谱函数，用功率谱来描述



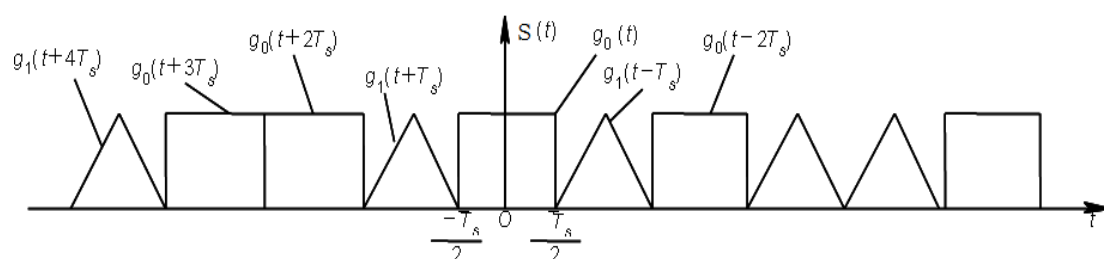
它的频谱特性通过功率谱分析，可以了解信号需要占据的频带宽度，所包含的频谱分量，有无直流分量，有无定时分量等。这样，才能针对信号谱的特点来选择相匹配的信道，以及确定是否可从信号中提取定时信号。



二元随机脉冲序列波形

### 3、数学表达

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n(t), \text{ 其中 } S_n(t) = \begin{cases} g_1(t - nT_s), & \text{以概率 } P \\ g_2(t - nT_s), & \text{以概率 } 1 - P \end{cases}$$



$f_s = 1/T_s = R_B$ —码元速率；

$T_s$  - 码周期 - 码元宽度（码元持续时间）

$G_1(f)$ 和  $G_2(f)$ 分别是  $g_1(t)$ 和  $g_2(t)$ 的傅里叶变换

### 4、波形分解

将信号  $s(t)$ 看成由稳态波  $v(t)$ 和交变波  $u(t)$ 构成。

$$S(t) = v(t) + u(t)$$

$$= \text{稳态波} + \text{交变波}$$



$\therefore$  功率谱密度:  $P(\omega) = P_v(\omega) + P_u(\omega)$

分析过程: (1) 稳态波分析

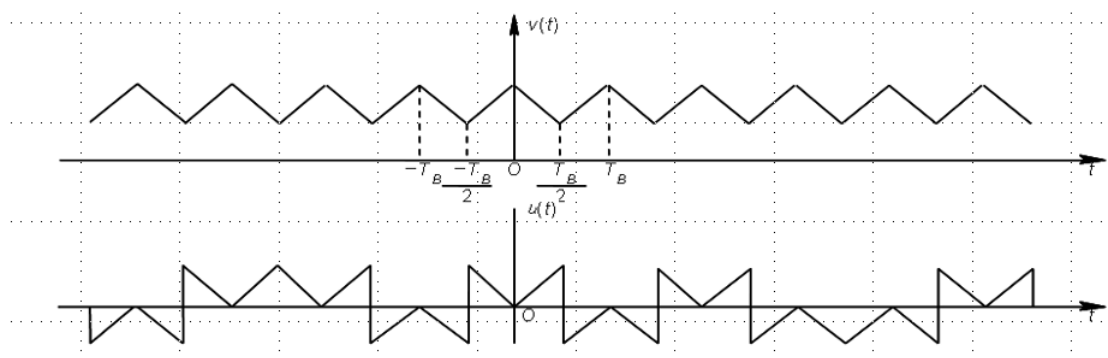
(2) 交变波分析

(3) 求合成波的功率谱密度

$$\begin{aligned} P_s(\omega) &= P_v(\omega) + P_u(\omega) \\ &= f_s P(1-P) |G_1(f) - G_2(f)|^2 \\ &\quad + \sum |f_s [PG_1(mf_s) + (1-P)G_2(mf_s)]|^2 \delta(f - mf_s) \end{aligned}$$

**v(t)--稳态波:** 是随机序列  $s(t)$  的统计平均分量, 它取决于每个码元内出现  $g_0(t)$ 、 $g_1(t)$  的概率加权平均。

**u(t)--交变波:** 是随机序列  $s(t)$  的变动部分, 它取决于  $g_0(t)$ 、 $g_1(t)$  随机出现的情况采用双极性波形。



## 5、稳态波分析

稳态波是随机序列  $s(t)$  的统计平均分量, 它取决于每个码元内出现  $g_1(t)$ 、 $g_2(t)$  的概率加权平均, 且每个码元统计平均波形相同, 因此可表示成

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [Pg_1(t - nT_s) + (1-P)g_2(t - nT_s)] = v_n(t)$$

$$v_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [Pg_1(t - nT_s) + (1-P)g_2(t - nT_s)]$$

$v(t)$  是一个以  $T_s$  为周期的周期函数。

由周期函数的功率谱公式

$$P(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |F_m|^2 \cdot \delta(f - mf_s)$$

需先求  $F_m$ 。



求  $F_m$ :

$v(t)$  是以  $T_s$  为周期的周期信号, 可以展成傅氏级数

$$v(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{-j2\pi m f_s t}$$

$$\text{式中 } F_m = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} v(t) e^{-j2\pi m f_s t} dt$$

由于积分上下限在  $(-T_s/2, T_s/2)$  范围内 (相当  $n=0$ )

此时:  $v(t) = v_0(t) = P g_1(t) + (1-P) g_2(t)$

$$\text{所以: } F_m = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} [p g_1(t) + (1-p) g_2(t)] e^{-j2\pi m f_s t} dt$$

$$V(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(t)$$

又由于  $P g_1(t) + (1-P) g_2(t)$  只存在  $(-T_s/2, T_s/2)$  范围内, 所以上式的积分限

可以改为从  $-\infty$  到  $\infty$ , 因此

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{\infty} [p g_1(t) + (1-p) g_2(t)] e^{-j2\pi m f_s t} dt \\ &= f_s [p G_1(m f_s) + (1-p) G_2(m f_s)] \end{aligned}$$

式中

$$G_1(m f_s) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) e^{-j2\pi m f_s t} dt$$

$$G_1(m f_s) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) e^{-j2\pi m f_s t} dt$$

将  $F_m$  周期函数的功率谱公式:

$$P(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |F_m|^2 \cdot \delta(f - m f_s)$$

可得  $v(t)$  的功率谱密度:

$$P_v(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |f_s [P G_1(m f_s) + (1-P) G_2(m f_s)]|^2 \cdot \delta(f - m f_s)$$





## 6、合成波的功率谱——即数字基带信号的功率谱

双边功率谱：

$$p_s(f) = f_s p(1-p) |G_1(f) - G_2(f)|^2 + f_s^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |pG_1(mf_s) + (1-p)G_2(mf_s)|^2 \delta(f - mf_s) \quad \text{—— 双边谱}$$

$f_s = 1/T_s$ ，在数值上=码元速率  $R_B$

$P$  为“1”出现的概率

$G_1(f), G_2(f)$  是  $g_1(t), g_2(t)$  的傅立叶变换

## (二) 基带传输码型

### 1、传输码的码型选择原则

- (1) 不含直流，且低频分量和高频分量尽量少；
- (2) 含有丰富的定时信息，以便于从接收码流中提取位定时信号；
- (3) 功率谱主瓣宽度窄，以节省传输频带，码型的传输效率应尽可能地高；
- (4) 不受信源统计特性的影响，即能适应于信息源的变化；
- (5) 码型结构含有内在的检错能力；
- (6) 编译码简单，以降低通信延时和成本等。

以上 1、2、3 点是最主要的考虑因素。

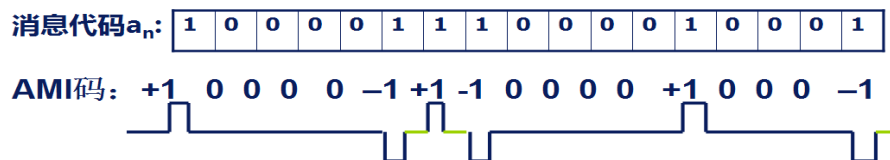
### 2、常用的传输码型

#### 2.1 传号交替反转码 (AMI 码)

编码规则：

信息码的“0”——空号——仍编为传输码的 0；

信息码的“1”——传号——交替地变换为 +1, -1, +1, -1, …,



### AMI 码的优缺点

#### 优点

没有直流成分，高、低频分量少，能量集中在  $1/2$  码速率处；

编译码电路简单，可利用传号极性交替这一规律观察误码情况；

如果它是 AMI-RZ 波形，接收后只要全波整流，就可变为单极性 RZ 波形，从中可以提取位定时分量。

鉴于上述优点，AMI 码成为较常用的传输码之一。

#### 缺点

当原信码出现长连“0”串时，信号的电平长时间不跳变，造成提取定时信号的困难。解决连“0”码问题的有效方法之一是采用 HDB3 码。

## 2.2 三阶高密度双极性码（HDB3 码）

### HDB3 (High Density Bipolar 3) 码

3 阶高密度双极性码：是 AMI 码的一种改进型，使连“0”个数不超过 3 个；

改进目的：保持 AMI 码的优点而克服其缺点，便于提取位定时。

#### HDB3 码编码规则

首先，将信息码变换成 AMI 码；

然后，检查 AMI 码中连“0”的情况：

当没有发现 4 个以上（包括 4 个）连“0”时，则不作改变，AMI 码就是 HDB3 码；

当发现 4 个以上或 4 个以上连“0”串时，就将第 4 个“0”变成与前一非“0”码元（“-1”或“+1”）同极性的码元；

将这个码元称为“破坏码元”，并用符号“V”表示，即用“+V”表示“+1”，即用“-V”表示“-1”；

为了保证相邻“V”符号也是极性交替：



当相邻“V”之间有奇数个非“0”码元时，这是能够保证的；

当相邻“V”之间有偶数（包括0）个非“0”码元时，不符合此极性交替要求。这时，需将这个连“0”码元串的第1个“0”编成“+B”或“-B”，B的符号与前一非“0”码元符号相反；让后面的非“0”码元从V码元开始再极性交替变化。

### HDB3 码编码规则总结

若信息码中不出现四连“0”，HDB3 码就是 AMI 码；

若出现四连“0”：

加“V”：将第四个“0”变成“V”；0000→000V

判断是否加“B”：若“V”与前一个“V”之间“1”的个数为偶数（包括0），则将第一个“0”变成“B”；

0000→B00V

“V”和“B”的极性：B与前一非0符号极性相反，“V”与前一非零符极性相同，这是四连“0”的标记，是编码要领的核心，其余非零符均正负交替。

“V”与前一非零符极性相同

是译码的核心，找到同号的，就找到了四连“0”，恢复四连“0”即可实现译码

### HDB3 码的编码特点：

只有V与前一非0符号极性相同--HDB3 码的显著特点

相邻V符号极性交替

B与前一非0符号极性相反

同一个破坏节中，B与V极性相同

所有1与B一起极性交替

### HDB3 码的译码规则：

“V”与前一非零符极性相同

是译码的核心，找到同号的，就找到了四连“0”，恢复四连“0”即可实现译码

若HDB3 码中出现相连的同符号的“非0符号”，将后面的“非0符



号”及其前面的三个符号均译为“0”；

$+100+1 \rightarrow 0000$ ,  $-100-1 \rightarrow 0000$ ,  $0+10000+1-1 \rightarrow 01000001$

然后，将“+1”和“-1”均译为“1”。

**HDB3 码的优点：**

HDB3 码保持了 AMI 码的优点；

AMI 码的优点

没有直流成分，且高、低频分量少，能量集中在  $1/2$  码速率处；编译码电路简单，且可利用传号极性交替这一规律观察误码情况。

将连“0”码限制在 3 个以内，故有利于位定时信号的提取。

HDB3 码是应用最为广泛的码型，A 律 PCM 四次群以下的接口码型均为 HDB3 码。

**例题 1：AMI 码、HDB3 编码和译码**

**解：** 信息码： 0 100 1 0000 1 0000 1 1 0000

1...

AMI 码：  $0+100-1$  0000  $+1$  0000  $-1+1$  0000  $-1...$

HDB3 码：  $0+100-1$   $000-V$   $+1$   $000+V$   $-1+1$   $-B00+V$   $-1... (x)$

$0+100-1$   $000-V$   $+1$   $000+V$   $-1+1$   $-B00-V$   $+1...(\sqrt{)}$

即：  $0+100-1$   $000-1$   $+1$   $000+1$   $-1+1$   $-100-1$   $+1...$

译码： HDB3 码：  $0+100-1$   $000-1$   $+1$   $000+1$   $-1+1$   $-100-1$   $+1...$

信息码：  $0+100-1$  0000  $+1$  0000  $-1+1$  0000  $+1...$

信息码： 0 100 1 0000 1 0000 1 1 0000 1...

**例题 2：写出信息码 an 对应的 HDB3 码**

**解：** 1、an: 1 0000 1 1 0000 1 000000 1

HDB3 码:  $+1$   $000V$   $+1+1B-00V-$   $+1$   $000V$   $+00-1$

2、an: 1 0000 1 1 0000 1 1 0000 0 1

HDB3 码:  $+1$   $000V$   $+1+1B-00V-$   $+1-1B+00V$   $+0-1$

3、an: 1 0000 0000 0000 1 1



HDB3 码: +1 000V+ B-00V- B+00V+ -1+1

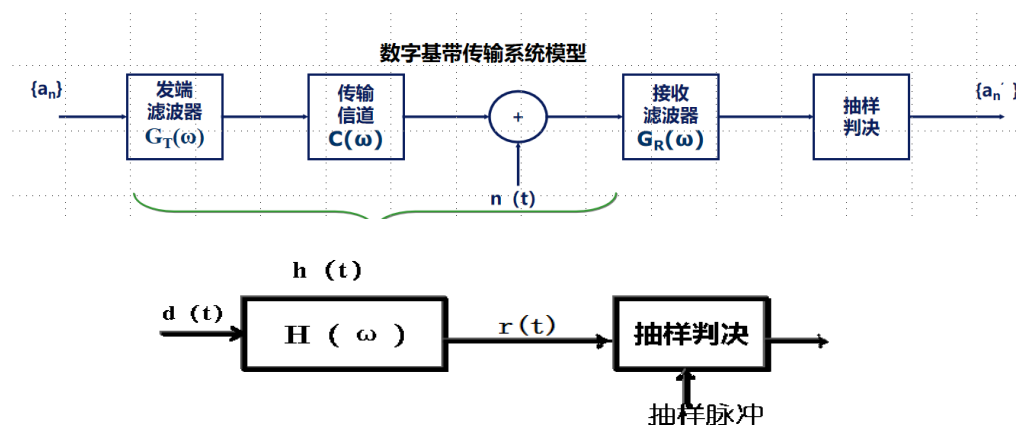
**例题 3:** 已知信息码为 1000000000000101, 编出相应的 HDB3 码, 并简述该码的特点。

**解:** HDB3 码: +1→1000V\_ 0+ 1000V+B - 00V-+ 10-1。

特点: 无直流, 且高、低频分量小; 具有宏观检错能力; 三电平(正负零) 波形; 连“0”数目不超过 3 个。

### (三) 基带传输和码间干扰

(码间串扰 ISI——Inter Symbol Interference)



$$D(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t - nT_s)$$

$$H(\omega) = G_T(\omega)C(\omega)G_R(\omega)$$

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

发端信号:

$$d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t - nT_s)$$

接收滤波器输出信号:

$$r(t) = d(t) * h(t) + n_R(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(t - nT_s) + n_R(t)$$

在第 k 个时刻的抽样值为:



$$t_k = kT_s + t_0$$

$$r(kT_s + t_0) = a_k h(t_0) + \sum_{n \neq k} a_n h[(k - n)T_s + t_0] + n_R(kT_s + t_0)$$

第  $k$  个码元在  $t_k$  时刻的输出值--有用信号值  $a_k$

除第  $k$  个码元之外所有的码元在  $t=t_k$  时刻对  $a_k$  造成的干扰总和。称为码间串扰 ISI。

$n_R(kT_s + t_0)$  信道中随机噪声在  $t=t_k$  时刻对  $a_k$  的干扰值。

**例题 4:** 消除或减小码间串扰的措施有哪些? 码间串扰的影响能否通过增加信号功率的方法来减弱?

**解:** 良好选择传输码型, 良好设计传输特性, 采用均衡措施等。不能。

## (四) 无 ISI 基带系统的抗噪声性能

### 1、无 ISI 的理论条件

理想信道的情况下 (忽略噪声的影响), 基带信号经过传输后在抽样点上无码间串扰, 也即瞬时抽样值应满足: (设  $t_0=0$ )

$$r(kT_s + t_0) = a_k h(t_0) + \sum_{n \neq k} a_n h[(k - n)T_s + t_0] + n_R(kT_s + t_0)$$

$$h(t_0) = 1$$

$$h[(k - n)T_s + t_0] = 0$$

$n_R(kT_s + t_0)$  先暂时忽略

$$\begin{cases} a_k \cdot h(0) = a_k \\ \sum_{n \neq k} a_n h[(k - n)T_s] = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} h(0) = 1 \\ h[(k - n)T_s] = 0 \quad k \neq n \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{等价于}} h(kT_s) = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

无 ISI 的理论条件—时域条件:



$$h(kT_s) = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

若满足上述条件，则以  $R_B$  的码速率传输，系统无 ISI

无 ISI 的理论条件——频域条件——奈奎斯特第一准则：

$$H_{eq}(\omega) = \sum_i H\left(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}\right) = T_s$$

$$|\omega| \leq \frac{\pi}{T_s},$$

$H(\omega)$  的特性若能等效成一个理想低通滤波器，则可实现无 ISI。

凡是能符合此要求的  $H(\omega)$ ，以  $R_B$  为码速率时，均能消除码间串扰。

等价于：

$$H_{eq}(\omega) = \sum_i H(\omega + 2\pi R_B i) = \text{常数}$$

$$|\omega| \leq \pi R_B$$

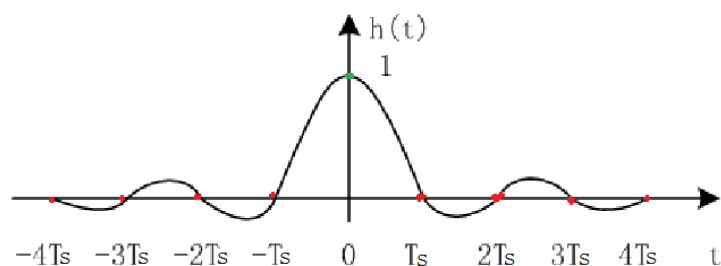
或：

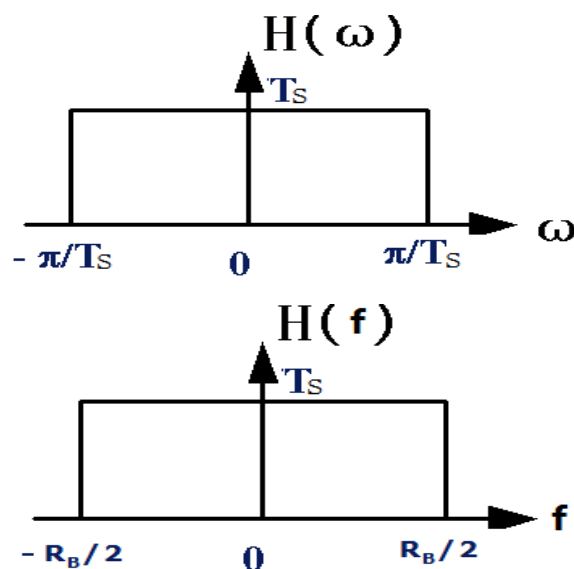
$$H_{eq}(f) = \sum_i H(f + R_B i) = \text{常数}$$

$$|f| \leq \frac{R_B}{2}$$

时域：抽样信号  $\leftrightarrow$  频域：理想低通滤波器

$$h(t) = \text{Sa}(\pi t/T_s)$$





截至频率为:

$R_B$  (rad/s)

或  $R_B/2$ (Hz)

频带利用率:单位频带内的传码率。

$$\eta = \frac{R_B}{B} = \frac{2B}{B} = 2 \left( \frac{\text{Baud}}{\text{Hz}} \right)$$

$$B = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{T_s} = \frac{1}{2T_s} = \frac{R_B}{2}$$

$$R_B = 2B$$

对于带宽为  $B=1/(2T_s) = R_B / 2$  的理想低通传输特性:

若以  $R_b=1/T_s$  波特的速率进行传输,则在抽样时刻上无 ISI。

若以高于  $R_b=1/T_s$  波特的码元速率传送时,将存在码间串扰。

此基带系统能提供的最高频带利用率----理论极大值

$$\eta = R_B/B = 2 \quad (\text{B/Hz})$$

通常将此带宽  $B$  称为奈奎斯特带宽,将  $R_B$  称为奈奎斯特速率。

二者关系:  $R_B = 2B$ ,  $B = R_B / 2$ ----理论极值

若系统带宽为  $B$ ,则此系统无 ISI 的最大码速率为  $(R_B)_{\max} = 2B$

若系统码速率为  $R_B$ ,则无 ISI 传输所需要的最小带宽为  $(B)_{\min} = R_B/2$

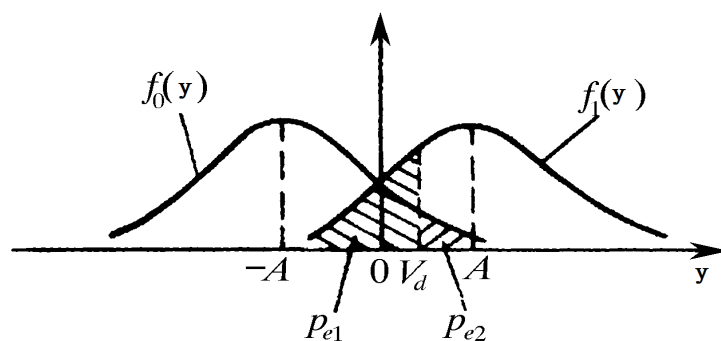




## 2、二进制双极性基带系统的抗噪声性能

$$s(kT_S) = \begin{cases} A, & \text{发送“1”时} \\ -A, & \text{发送“0”时} \end{cases}$$

$$y(kT_S) = \begin{cases} A + n_R(kT_S), & \text{发送“1”时} \\ -A + n_R(kT_S), & \text{发送“0”时} \end{cases}$$



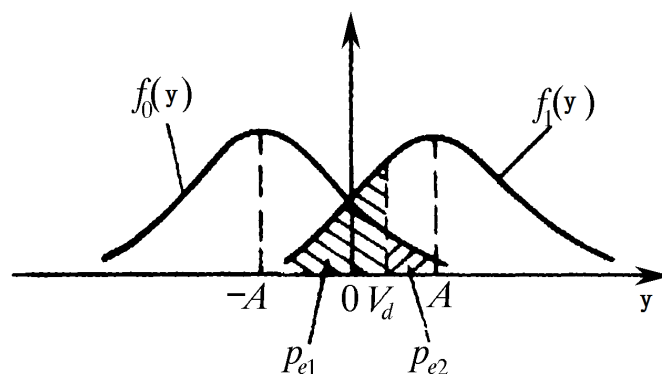
当发送“1”时， $A + n_R(kT_S)$ 的一维概率密度函数为

$$f_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(y-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

当发送“0”时， $-A + n_R(kT_S)$ 的一维概率密度函数为

$$f_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(y+A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

判决规则：



$V_d$ 为判决门限

$P_e$ :图中的阴影部分面积

$$\text{对 '1' 码} \begin{cases} \text{当 } y > V_d, \text{ 判为“1”码 (正确)} \\ \text{当 } y < V_d, \text{ 判为“0”码 (错误)} \end{cases}$$



对 0' 码  $\begin{cases} \text{当 } y < V_d, \text{ 判为“0”码 (正确)} \\ \text{当 } y > V_d, \text{ 判为“1”码 (错误)} \end{cases}$

有两种差错形式：发“1”，误判为“0” --  $P_{e1}$

发“0”，误判为“1” --  $P_{e2}$

发“1”错判为“0”的概率  $P(0/1)$  为

$$P\left(\frac{0}{1}\right) = P(y < V_d) = \int_{-\infty}^{V_d} f_1(y) dy =$$

$$\int_{-\infty}^{V_d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(y-A)^2}{2\sigma_n^2}\right) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{V_d - A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

发“0”错判为“1”的概率  $P(1/0)$  为

$$P\left(\frac{1}{0}\right) = P(y > V_d) = \int_{V_d}^{\infty} f_0(y) dy =$$

$$\int_{V_d}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(y+A)^2}{2\sigma_n^2}\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{V_d + A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

总误码率为

$$P_e = P(1)P\left(\frac{0}{1}\right) + P(0)P\left(\frac{1}{0}\right)$$

误码率与发送概率  $P(1), P(0)$ , 信号峰值  $A$ , 噪声功率  $2n$ , 判决门限电平  $V_d$  有关

在  $A$  和  $n$  一定条件下，可以找到一个使误码率最小的判决门限电平，称为最佳门限电平。若令

$$\frac{\partial P_e}{\partial V_d} = 0$$

则可求得最佳门限电平

$$V_d^* = \frac{\sigma_n^2}{2A} \ln \frac{P(0)}{P(1)}$$

若  $P(1) = P(0) = 1/2$ ，则有

$$V_d^* = 0$$

这时，基带传输系统总误码率为

$$P_e = \frac{1}{2} \left[ P\left(\frac{0}{1}\right) + P\left(\frac{1}{0}\right) \right]$$



$$= \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n} \right)$$

在等概、最佳门限下，双极性基带系统的误码率仅依赖于信号峰值  $A$  与噪声均方根值  $n$  的比值，而与采用什么样的信号形式无关。且比值  $A/n$  越大， $P_e$  就越小。

### 3、二进制单极性基带系统的抗噪声性能

$$s(kT_s) = \begin{cases} A, & \text{发送“1”时} \\ 0, & \text{发送“0”时} \end{cases}$$

$$y(kT_s) = \begin{cases} A + n_R(kT_s), & \text{发送“1”时} \\ n_R(kT_s), & \text{发送“0”时} \end{cases}$$

发送“1”时， $A + n_R(kT_s)$  的一维概率密度函数为

$$f_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left( -\frac{(y-A)^2}{2\sigma_n^2} \right)$$

当发送“0”时， $n_R(kT_s)$  的一维概率密度函数为

$$f_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left( -\frac{y^2}{2\sigma_n^2} \right)$$

最佳门限

$$V_d^* = \frac{A}{2} + \frac{\sigma_n^2}{A} \ln \frac{P(0)}{P(1)}$$

当  $P(1) = P(0) = 1/2$ ， $V_d^* = A/2$  时

### 4、双极性和单极性基带系统性能比较

当比值  $A/n$  一定时，在等概条件下：

	误码率	最佳判决门限
双极性基带系统	$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n} \right)$	0
单极性基带系统	$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n} \right)$	$A/2$

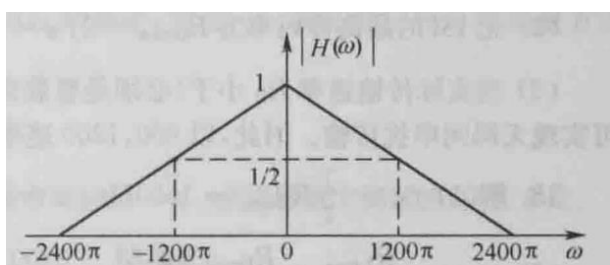


双极性误码率比单极性的低，抗噪声性能好。

抗信道衰落性能:双极性的最佳判决门限电平为 0，与信号幅度无关，因而不随信道特性变化而变，故能保持最佳状态--抗信道衰落;而单极性则不然,最佳判决门限电平为  $A/2$ ，它易受信道特性变化的影响，从而导致误码率增大。因此，双极性基带系统比单极性基带系统应用更为广泛。

**例题 5:** 设某基带系统的总传输特性  $|H(\omega)|$  如下图所示，试确定。

- (1) 滚降系数  $\alpha$ 、奈奎斯特带宽  $f_N$  和系统(绝对)带宽  $B$ ;
- (2) 无 ISI 传输时的最高码元速率和最高频带利用率;
- (3) 若分别以 400、600、1200、2400Baud 的速率传输，那些速率传输时无 ISI。



**解:** (1) 由传输特性曲线可看出奈奎斯特带宽为  $f_N = 1200 \pi / 2 \pi$

$= 600\text{Hz}$ , 超出奈奎斯特带宽的扩展量  $f_\Delta =$

$(2400 \pi - 1200 \pi) / 2 \pi = 600\text{Hz}$ , 因此, 滚降系数  $\alpha = f_\Delta / f_N = 1$ ,

系统带宽为  $B = 2400 \pi / 2 \pi = 1200\text{Hz}$ 。

(2) 无 ISI 的最高传码率为  $RB_{\max} = 2f_N = 1200\text{Baud}$ , 最高频带利用率为  $\eta$

$= RB/B = 2/(1 + \alpha) = 1\text{Baud/Hz}$

(3) 当实际传输速率  $RB$  小于(必须是整数倍)或等于  $RB_{\max}$  时, 即满足  $RB_{\max}$

$= nRB (n = 1, 2, 3, \dots)$  时, 可实现无码间串扰传输。因此, 以 600、1200 速率传输时不存在码间干扰。

## (五) 眼图和均衡

### 1、眼图

在实际应用中需要用简便的实验手段来定性评价系统的性能。眼图是一种



有效的实验方法。

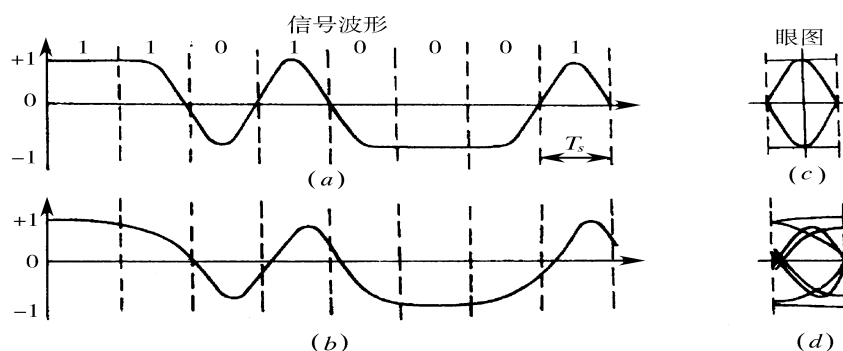
眼图是指通过用示波器观察接收端的基带信号波形,从而估计和调整系统性能的一种方法。因为在传输二进制信号波形时,示波器显示的图形很像人的眼睛,故名“眼图”。

## 2、如何获眼图

将示波器跨接在抽样判决器的输入端,调整示波器水平扫描周期,使其与接收码元周期同步。

此时可以从示波器显示的图形上,观察码间干扰和信道噪声等因素影响的情况,从而估计系统性能的优劣程度。

### 眼图实例



图(a)是接收滤波器输出的无码间串扰的双极性基带波形

图(b)是接收滤波器输出的有码间串扰的双极性基带波形

眼图的“眼睛”张开的越大,且眼图越端正,表示码间串扰越小;反之,表示码间串扰越大。

## 3、均衡

均衡是一种减小码间串扰的信号处理或滤波技术,通过在系统中插入一种称为均衡器的滤波器来实现。它是现代数字通信,尤其是高速数字传输中的重要技术之。

频域均衡,是从频域上校正信道或系统的频率特性,使包括均衡器在内的基带系统的总特性满足奈奎斯特准则。

时域均衡,是将均衡器输入端(即接收滤波器输出端)的有码间串扰的响应波形  $x(t)$  变换成无码间串扰的响应波形  $y(t)$ 。



例题 6：衡量均衡效果的两个准则是些为\_\_\_\_\_和 \_\_\_\_\_ 准则。

答：峰值畸变；均方畸变

## 第七章 数字带通传输系统&新型数字带通调制技术

### （一）二进制数字调制原理

#### 1、数字调制概念

数字调制——指正弦载波数字调制

用数字基带信号去控制正弦载波波形的某个参量，例如：幅度、频率、相位，使这个参量随基带信号的变化而变化。

利用数字脉冲信号序列对载波进行开关形式的控制，故又称为数字键控。

#### 2、数字调制分类

(1) 根据控制载波波形参量不同，分为：

振幅键控（ASK）

用数字消息控制载波的振幅。

频移键控（FSK）

用数字消息控制载波的频率。



相移键控 (PSK)

用数字消息控制载波的相位。

(2) 根据已调信号频谱结构特点不同, 数字调制分为:

线性调制 (如 ASK)

线性调制中已调信号的频谱结构与基带信号的频谱结构相同, 只不过搬移一个频率位置, 无新的频率成分出现。

非线性调制 (如 FSK, PSK)

非线性调制中已调信号的频谱结构与基带信号的频谱结构不同, 有新的频率成分出现。

(3) 根据基带信号进制不同, 分为:

二进制数字调制

当数字基带信号为二进制时, 则为二进制键控如: 2ASK, 2FSK, 2PSK, 2DPSK

多进制数字调制

当数字基带信号为多进制时, 则为多进制键控如: MASK, MFSK, QPSK, QDPSK

### 3、二进制振幅键控 (2ASK)

振幅键控是正弦载波的幅度随数字基带信号变化的数字调制。

当数字基带信号为二进制时, 则为二进制振幅键控 2ASK。

2ASK 信号的时间波形随二进制基带信号  $s(t)$  通断变化, 所以又称为通 (on)、断(off)键控 OOK。

2ASK 信号的表示

二进制符号序列: 设发送的二进制符号序列由 0、1 序列组成, 发送 0 符号的概率为  $P$ , 发送 1 符号的概率为  $1-P$ , 且相互独立。该二进制符号序列可表示为:

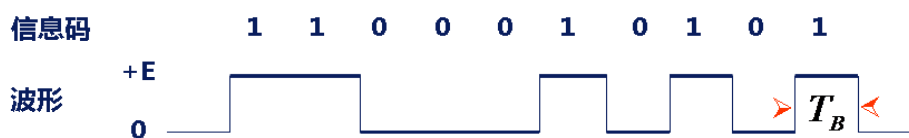
$$s(t) = \sum_n a_n g(t - nT_B)$$

其中



$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{发送概率为 } P \\ 1, & \text{发送概率为 } 1-P \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_B \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



则 2ASK 信号可表示为:

$$\begin{aligned} e_{2ASK} &= s(t) \cos \omega_c t \\ &= \sum a_n g(t - T_n) \cos \omega_c t \\ &= \begin{cases} \cos \omega_c t & \text{传信号 "1"} \\ 0 & \text{传信号 "0"} \end{cases} \end{aligned}$$

2ASK 信号的功率谱密度

$$e_{2ASK} = s(t) \cos \omega_c t = \sum_n a_n g(t - nT_n) \cos \omega_c t$$

$s(t)$ ——单极性不归零矩形随机脉冲序列, 等概 ( $P=1/2$ ) 时的功率谱密度为:

$$\begin{aligned} s(t) &\Leftrightarrow P_s(f) \\ P_s(f) &= \frac{1}{4} T_B S a^2 (\pi f T_B) + \frac{1}{4} \delta(f) \\ B = f_b &= \frac{1}{T_B} \end{aligned}$$

## 2ASK 信号的功率谱

基带信号:  $s(t) = \sum a_n g(t - nT_s)$ , 2ASK 信号:  $e(t) = s(t) \cos \omega_c t$

若  $s(t)$  是确定信号, 则:

$$E(\omega) = 1/2 [S(\omega + \omega_c) + S(\omega - \omega_c)]$$

而  $s(t)$  是随机信号, 不存在  $S(\omega)$ , 应该用功率谱密度  $P_s(f)$

若  $s(t)$  的功率谱为  $P_s(f)$ , 且  $e(t) = s(t) \cos \omega_c t$ ,

则:  $P_e(f) = 1/4 [P_s(f + f_c) + P_s(f - f_c)]$ 。

## 2ASK 信号功率谱密度特点

二进制振幅键控信号的功率谱密度由离散谱和连续谱两部分组成。

离散谱由载波分量确定, 连续谱由基带信号波形  $g(t)$  确定。





二进制振幅键控信号的带宽  $B_{2ASK}$  是基带信号波形带宽的两倍, 即  $B_{2ASK}=2B_{基}=2f_B=2R_B$ 。

因为系统的传码率  $R_B=f_B(\text{Baud})$ , 故 2ASK 系统的频带利用率为:

$$\eta_B = \frac{R_B}{B_{2ASK}} = \frac{f_B}{2f_B} = \frac{1}{2} (\text{Baud} / \text{Hz})$$

**例题 1:** 已知某 OOK 系统的传码率为 103B, 所用的载波信号为  $A\cos(6\pi \times 103t)$ , 问:

- (1) 设传送数字信息为 1011001, 画出相应的 2ASK 信号波形。
- (2) 求 2ASK 信号的带宽。

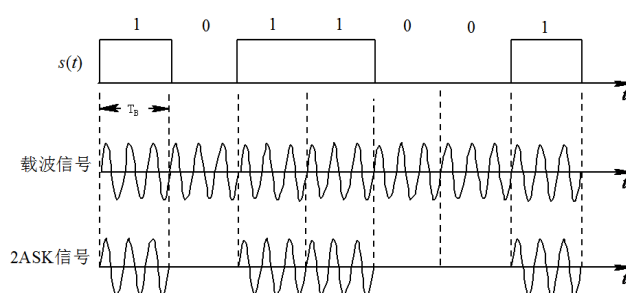
**解:** (1)

$$R_B=10^3\text{B}$$

$$\omega_c=6\pi \times 10^3 \quad (2\pi f_c)=6\pi \times 10^3$$

每个码元内有  $3 \times 10^3 / 10^3 = 3$  个载波波形

$$\text{所以 } f_c=3 \times 10^3 \text{ Hz} = 3R_B$$



(2) 2ASK 信号的带宽  $B_{2ASK}$  是基带信号波形带宽的两倍

$$B=2R_B=2 \times 10^3 = 2000 \text{ Hz}$$

## 4、二进制振幅键控 (2FSK)

移频键控是正弦载波的频率随数字基带信号而变化的数字调制。

当数字基带信号为二进制时, 则为二进制移频键控 2FSK。

假设二进制基带信号 “1”  $\rightarrow f_1$ , “0”  $\rightarrow f_2$

**2FSK 信号的表示**

假设二进制基带信号 “1”  $\rightarrow f_1$ , “0”  $\rightarrow f_2$

则二进制移频键控信号的时域表达式为:



$$e_{2FSK} = y_1(t) + y_2(t) = s(t) \cos \omega_1 t + \overline{s(t)} \cos \omega_2 t$$

其中基带信号是单极性 NRZ

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_n a_n g(t - nT_B) \\ \overline{s(t)} &= \sum_n \overline{a_n} g(t - nT_B) = \sum_n b_n g(t - nT_B) \end{aligned}$$

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{发送概率为 } P \\ 1, & \text{发送概率为 } 1 - P \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{发送概率为 } P \\ 0, & \text{发送概率为 } 1 - P \end{cases}$$

2FSK 信号的功率谱密度

$$e_{2FSK}(t) = s(t) \cos \omega_1 t + \overline{s(t)} \cos \omega_2 t$$

2FSK 可以看成由两个不同载波的 2ASK 信号的叠加

2FSK 的功率谱密度可以近似表示成两个不同载波的 2ASK 信号功率谱密度的叠加。

$$\begin{aligned} e_{2FSK}(t) &= \sum a_n g(t - nT_s) \cos \omega_1 t + \sum b_n g(t - nT_s) \cos \omega_2 t \\ &= s_1(t) \cos \omega_1 t + s_2(t) \cos \omega_2 t \end{aligned}$$

$$b_n = \overline{a_n} \quad P_{s_1}(f) = P_{s_2}(f) = \frac{1}{4} T_B S a^2 (\pi f T_B) + \frac{1}{4} \delta(f)$$

$$P_{2FSK}(f) = 1/4 [P_{s_1}(f + f_1) + P_{s_1}(f - f_1)] + 1/4 [P_{s_2}(f + f_2) + P_{s_2}(f - f_2)]$$

$$\begin{aligned} P_{2FSK}(f) &= \frac{T_s}{16} [|S_a \pi(f + f_1) T_B|^2 + |S_a \pi(f - f_1) T_B|^2] \\ &\quad + \frac{T_s}{16} [|S_a \pi(f + f_2) T_B|^2 + |S_a \pi(f - f_2) T_B|^2] \\ &\quad + \frac{1}{16} [\delta(f + f_1) + \delta(f - f_1) + \delta(f + f_2) + \delta(f - f_2)] \end{aligned}$$

2FSK 信号功率谱密度特点

2FSK 信号的功率谱由离散谱和连续谱所组成；

离散谱位于两个载频  $f_1$  和  $f_2$  处；连续谱由两个中心位于  $f_1$  和  $f_2$  处的双边谱叠加形成；

若  $|f_1 - f_2| \leq f_B$ ，则连续谱在  $f_c$  处出现单峰；若  $|f_1 - f_2| > f_B$ ，则连续谱出现双峰。



所需传输带宽  $B_{2FSK} = |f_1 - f_2| + 2f_B$

$f_B = 1/T_B$ , 与  $R_B$  数值相等, 单位不同

### 2FSK 系统的频带利用率

为了便于接收端解调, 要求 2FSK 信号的两个频率  $f_1, f_2$  间要有足够的间隔。对于采用带通滤波器来分路的解调方法, 通常取  $|f_2 - f_1| = (3 \sim 5)R_B$ 。于是, 2FSK 信号的带宽为

$$B_{2FSK} \approx (5 \sim 7)R_B$$

相应地, 这时 2FSK 系统的频带利用率为

$$\eta_B = \frac{R_B}{B_{2FSK}} = \frac{1}{(5 \sim 7)} \left( \frac{\text{Baud}}{\text{Hz}} \right)$$

## 5、二进制相移键控 (2PSK)

相移键控是正弦载波的相位随数字基带信号而变化的数字调制。

当数字基带信号为二进制时, 则为二进制相移键控 2PSK。

相移信号可分为两种:

绝对相移--PSK

相对相移 (差分相移)--DPSK

2PSK 信号的表示

通常用已调信号载波的  $0^\circ$  和  $180^\circ$  初相分别表示二进制数字基带信号的 "0" 和 "1"。

载波  $A \cos(\omega_c t + \phi_n)$

$$\phi_n = \begin{cases} 0^\circ, & \text{发送 "0", 概率为 } P \\ 180^\circ, & \text{发送 "1", 概率为 } 1 - P \end{cases}$$

设发送的二进制符号序列由 0、1 序列组成, 发送 0 符号的概率为  $P$ , 发送

1 符号的概率为  $1-P$ , 且相互独立。该二进制符号序列可表示为:

$$s(t) = \sum_n a_n g(t - nT_B)$$

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_B \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

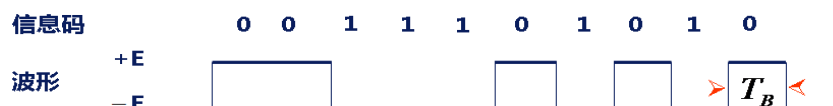


其中,  $a_n$  与 2ASK 和 2FSK 时的不同, 在 2PSK 调制中,  $a_n$  应选择双极性,

即

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{发送"0", 概率为 } P \\ -1, & \text{发送"1", 概率为 } 1 - P \end{cases}$$

双极性 NRZ 矩形脉冲, 周期  $T_B$



## 2PSK 信号的功率谱密度

$$e_{2PSK}(t) = s(t)\cos\omega_c t = \sum a_n g(t-nT_B)\cos\omega_c t$$

$s(t)$ --双极性不归零矩形随机脉冲序列, 等概 ( $P=1/2$ ) 时的功率谱密度为

$$s(t) \Leftrightarrow P_s(f)$$

$$P_s(f) = T_B Sa^2(\pi f T_B)$$

若:  $s(t) = \sum a_n g(t-nT_B)$ ,  $e(t) = s(t)\cos\omega_c t$

$$P_s(f) = T_B Sa^2(\pi f T_B)$$

$$s(t) \quad \quad \quad P_s(f)$$

$$e(t) \quad \quad \quad P_e(f)$$

则:  $P_e(f) = 1/4 [P_s(f+f_c) + P_s(f-f_c)]$

$$= \frac{T_B}{4} [Sa^2(\pi(f+f_c)T_B) + Sa^2(\pi(f-f_c)T_B)]$$

## 2PSK 信号功率谱密度特点

功率谱是双极性基带脉冲频谱的搬移, 不是单极性基带脉冲频谱的搬移, 双极性是单极性经码变换得来的, 所以 2PSK 信号不是线性变换, 而是非线性变换, 属于非线性调制。

功率谱一般情况下由离散谱和连续谱所组成, 当 “1” 和 “0” 符号出现概率相等时, 则不存在离散谱。

带宽是基带信号波形带宽的两倍, 即  $B_{2PSK} = 2B_{基} = 2f_B$ 。

传码率  $R_B = f_B$  (Baud), 故频带利用率为



$$\eta_B = \frac{R_B}{B_{2FSK}} = \frac{f_B}{2f_B} = \frac{1}{2} (\text{Baud} / \text{HZ})$$

## 6、2DPSK 信号的表示

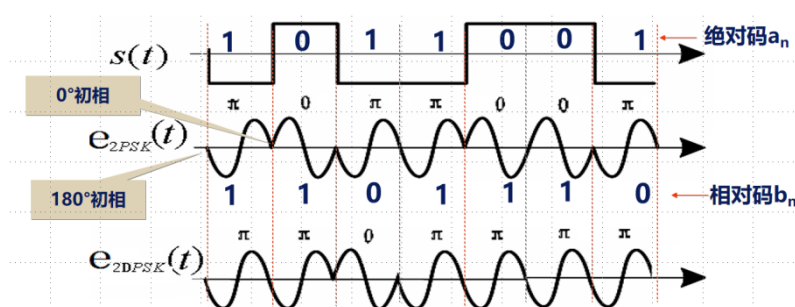
2DPSK 信号的表达式与 2PSK 的形式应完全相同，  
所不同的只是  $s(t)$  信号表示的是差分码数字序列  $b_n$ 。

$$s_{2DPSK}(t) = s(t) \cos \omega_c t$$

$$s(t) = \sum_n b_n g(t - nT_B)$$

$$s(t) = \sum_n b_n g(t - nT_B)$$

例 2: 当码元宽度  $T_B = \text{载波周期 } T_c$  时，2PSK 和 2DPSK 信号的波形。



2DPSK 信号的功率谱密度与 2PSK 相同

$$e_{2PSK}(t) = s(t) \cos \omega_c t = \sum a_n g(t - nT_B) \cos \omega_c t$$

$$e_{2DPSK}(t) = s(t) \cos \omega_c t = \sum b_n g(t - nT_B) \cos \omega_c t$$

$$b_n = a_n \oplus b_{n-1}$$

$$P_{2DPSK}(f) = P_{2PSK}(f)$$

$$= \frac{1}{4} [p_s(f + f_c) + p_s(f - f_c)]$$

$$= \frac{T_B}{4} [S a^2 \pi (f + f_c) T_B + S a^2 \pi (f - f_c) T_B]$$

(“0”和“1”符号等概时)

2DPSK 信号功率谱密度特点与 2PSK 相同



功率谱是双极性基带脉冲频谱的搬移，不是单极性基带脉冲频谱的搬移，双极性是单极性经码变换得来的，所以 2DPSK 信号不是线性变换，而是非线性变换，属于非线性调制。

功率谱一般情况下由离散谱和连续谱所组成，当“1”和“0”符号出现概率相等时，则不存在离散谱。

带宽是基带信号波形带宽的两倍，即  $B_{2DPSK} = 2B_{基} = 2f_B$ 。

传码率  $R_B = f_B$  (Baud)，故频带利用率为

$$\eta = \frac{R_B}{B_{2DPSK}} = \frac{f_B}{2f_B} = \frac{1}{2} (\text{Baud}/\text{HZ})$$

## (二) 二进制数字调制系统的抗噪声性能

### 1、通信系统的主要性能指标——有效性和可靠性

数字通信系统的主要性能指标

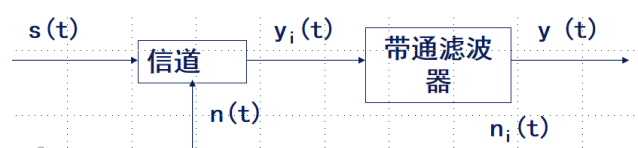
有效性 --  $B, R_B, R_b$

可靠性 -- 误码率  $P_e$  -- 本知识点讨论内容：求  $P_e$  的表达式，计算  $P_e$

讨论的前提条件：信道等效为加性高斯白噪声，均值为零，方差为  $\sigma_n^2$ ，双边噪声功率谱密度为  $n_0/2$ 。

### 2、2ASK 系统的抗噪声性能

分析在接收端进行



$$s(t) = \begin{cases} A \cos \omega_c t, & \text{发“1”} \\ 0, & \text{发“0”} \end{cases}$$

$$n_i(t) = n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t$$

$$y(t) = \begin{cases} A \cos \omega_c t + n_i(t), & \text{发“1”} \\ n_i(t), & \text{发“0”} \end{cases}$$

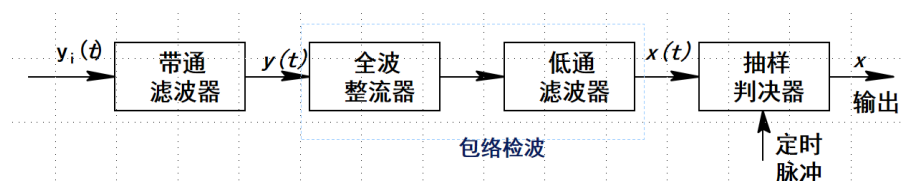


$$y(t) = \begin{cases} A \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \\ n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [A + n_c(t)] \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t, & \text{发送符号“1”} \\ n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t, & \text{发送符号“0”} \end{cases}$$

包检法的系统性能

包络检波法的系统性能分析模型：



$x(t) = y(t)$  的包络

正弦+窄带噪声

包络服从广义瑞利分布  $f_1(x)$

窄带噪声

包络服从瑞利分布  $f_0(x)$

$$y(t) = \begin{cases} A \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \\ n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \end{cases}$$

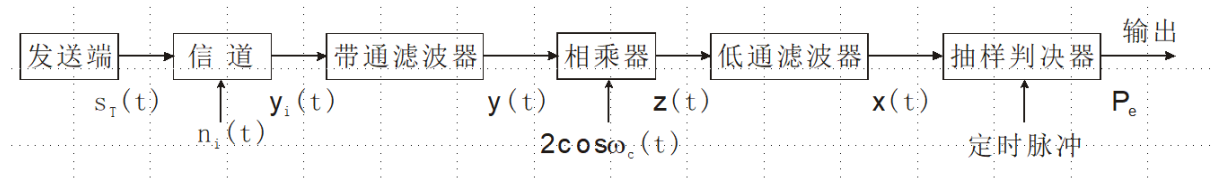
总误码率：  $P_e = P(1)P(0/1) + P(0)P(1/0)$

最佳门限：  $U_d = U_d^* = A/2$

误码率近似为：  $P_e \approx \frac{1}{2} e^{-\frac{r}{4}}$

其中  $r = A^2 / (2\sigma_n^2)$  表示信噪比。

相干解调时的系统性能



2ASK 信号同步检测法的系统性能分析模型

$$x(t) = \begin{cases} A + n_c(t), & \text{发“1”} \\ n_c(t), & \text{发“0”} \end{cases}$$



$$y(t) = \begin{cases} A \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t, & \text{发 "1"} \\ n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t, & \text{发 "0"} \end{cases}$$

最佳判决门限为:

$$U_d^* = A/2$$

这时系统的误码率为:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{r}}{2} \right)$$

当信噪比远大于 1 时, 上式近似为:

$$P_e \approx \frac{1}{\sqrt{\pi r}} e^{-\frac{r}{4}}$$

**例题 3:** 设某 2ASK 系统中二进制码元传输速率为 9600 波特, 发送“1”符号和“0”符号的概率相等, 已知接收端输入信号幅度  $A=1\text{mV}$ , 信道等效加性高斯白噪声的双边功率谱密度  $n_0/2=4 \times 10^{-13} \text{ W/Hz}$ 。试求:

- (1) 同步检测法解调时系统的误码率;
- (2) 包络检波法解调时系统的误码率。

解: 带通滤波器 BPF 带宽  $= B_{2\text{ASK}} = 2R_B$

$$B = 2R_B = 2 \times 9600 = 19200 \text{ Hz}$$

输出噪声平均功率

$$\sigma_n^2 = n_0 B = 1.536 \times 10^{-8} \text{ W}$$

解调器输入信噪比为

$$r = \frac{A^2}{2\sigma_n^2} = \frac{1 \times 10^{-6}}{2 \times 1.536 \times 10^{-8}} \approx 32.55 \gg 1$$

- (1) 同步检测法误码率 (信噪比  $r \gg 1$ )

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{\pi r}} e^{-\frac{r}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3.1416 \times 32.55}} e^{-8.138} = 2.89 \times 10^{-5}$$

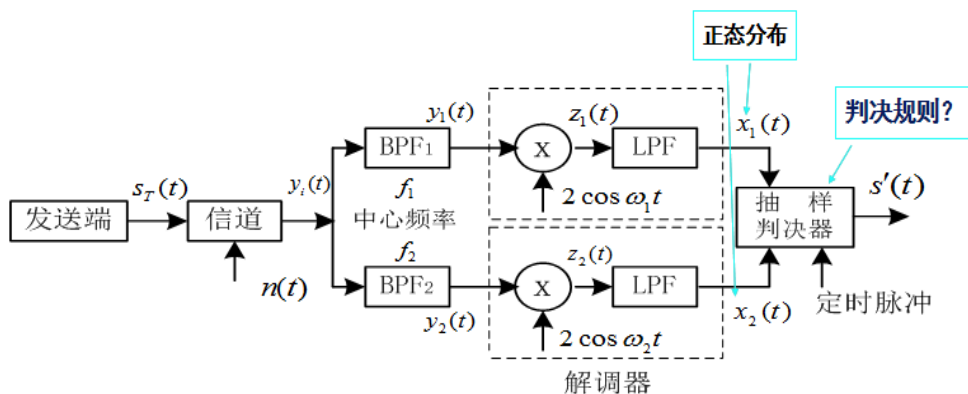
- (2) 包络检波法误码率 (信噪比  $r \gg 1$ )

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{r}{4}} = \frac{1}{2} e^{-8.138} = 1.46 \times 10^{-4}$$





### 3、2FSK 系统的抗噪声性能



2FSK 信号采用同步解调性能分析

发送端产生的 2FSK 信号可表示为：

$$s_T(t) = s_{2FSK}(t) = \begin{cases} A \cos \omega_1 t, & \text{发“1”} \\ A \cos \omega_2 t, & \text{发“0”} \end{cases}$$

接收机收入端合成波形为：

$$y_i(t) = \begin{cases} a \cos \omega_1 t + n(t), & \text{发“1”} \\ a \cos \omega_2 t + n(t), & \text{发“0”} \end{cases}$$

接收端上、下支路两个带通滤波器 BPF1、BPF2 的输出波形分别为：

$$y_1(t) = \begin{cases} a \cos \omega_1 t + n_1(t), & \text{发“1”} \\ n_1(t), & \text{发“0”} \end{cases}$$

$$y_2(t) = \begin{cases} a \cos \omega_2 t + n_2(t), & \text{发“0”} \\ n_2(t), & \text{发“1”} \end{cases}$$

发送“1”符号，则上下支路低通滤波器输出分别为：

$$x_1(t) = a + n_{1c}(t)$$

$$x_2(t) = n_{2c}(t)$$

将造成发送“1”码而错判为“0”码，错误概率为：

$$P(0/1) = P(x_1 < x_2) = P(x_1 - x_2 < 0) = P(z < 0)$$

**例题 4：**采用二进制频移键控方式在有效带宽为 2400Hz 的信道上传送二进制数字消息。已知 2FSK 信号的两个频率： $f_1=2925\text{Hz}$ ,  $f_2=2225\text{Hz}$ ，码元速

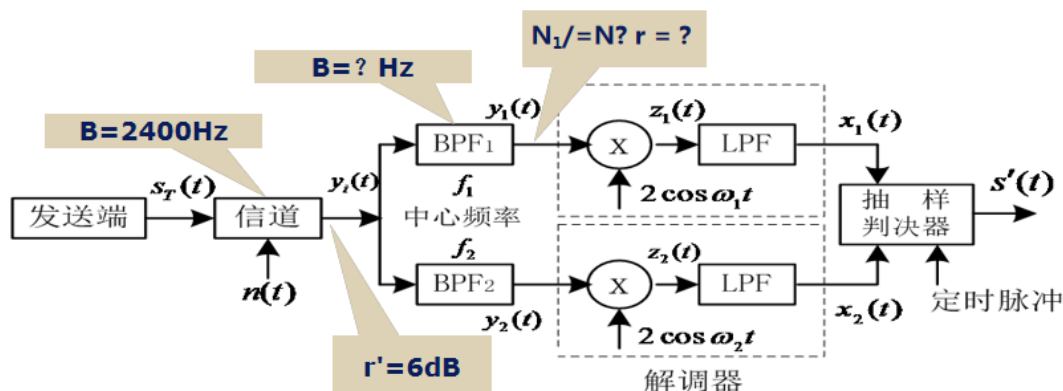


率  $R_B=300$  波特，信道输出端的信噪比为  $6\text{dB}$ ，试求：

- (1) 2FSK 信号的带宽；
- (2) 采用同步检测法解调时的误码率；
- (3) 采用包络检波法解调时的误码率。

**解：** (1)  $B_{\text{FSK}} = |f_1 - f_2| + 2f_s = |2925 - 2025| + 2 \times 300 = 1500\text{Hz}$

(2) 计算采用同步检测法的误码率，关键求解  $r$ ——解调器的输入信噪比



$$\sigma_n^2 = n_0 B$$

$$r = \frac{A^2}{2\sigma_n^2}$$

因为  $10 \log r' = 6 (\text{dB})$

所以  $r' = 4$

$$\text{因为 } r' = \frac{a^2 / 2}{n_0 B}$$

其中  $B = 2400\text{Hz}$ ，是信道的有效带宽

$$\text{又因为 } r = \frac{a^2 / 2}{n_0 B_1}$$

其中  $B_1$  为每个之路  $BPF$  的带宽， $B_1 = 2f_s = 2R_B = 600\text{Hz}$

$$\text{所以 } r = 4 * \frac{a^2 / 2}{n_0 B} = 4r' = 16 \gg 1$$

同步检波法的误码率

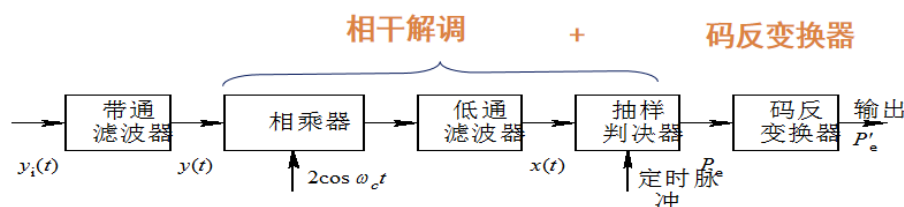
$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi * r}} e^{-r/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi * 16}} e^{-16/2} = 3.17 * 10^{-5}$$



包络检波法的误码率

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-r/2} = \frac{1}{2} e^{-16/2} = 1.68 \times 10^{-4}$$

#### 4、DPSK 系统性能-- (1) 相干解调加码反变换器方式



$p_e$  是 2PSK 相干解调系统的误码率，前面已经求出：

$$P_e \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi r}} e^{-r}$$

**例题 5：**若采用 2DPSK，已知发送端发出的信号振幅为 5V，输入接收端解调器的高斯噪声功率  $\sigma_n^2 = 3 \times 10^{-12} \text{W}$ ，要求误码率  $P_e = 10^{-5}$ 。试求：

- (1) 采用差分相干接收时，由发送端到解调器输入端的衰减为多少？
- (2) 采用相干解调一码反变换接收时，由发送端到解调器输入端的衰减为多少？

解：(1) 2DPSK，差分相干接收，误码率为  $P_e = (1/2)e^{-r} = 10^{-5}$

$$r = \frac{a^2}{2\sigma_n^2}$$

可得  $r = 10.82$  又因为

解得：

$$a = \sqrt{2\sigma_n^2 r} = \sqrt{2 \times 3 \times 10^{-12} \times 10.82} \approx 8 \times 10^{-6}$$

衰减分贝数为： $k = 20 \lg(5/a) = 115.9 \text{ dB}$

(2) 采用相干解调一码反变换接收时误码率为 ( $P_e$  很小时)

$$P_e' \approx 2P_e = \text{erfc} \sqrt{r} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi r}} e^{-r} \quad (r \gg 1 \text{ 时}) = 10^{-5}$$

可得  $r = 9.8$

$$a = \sqrt{2\sigma_n^2 r} = \sqrt{5.88 \times 10^{-11}} = 7.67 \times 10^{-6}$$



衰减分贝数为：

$$k=20\lg \frac{5}{a} = 20\lg \frac{5}{7.76 \times 10^{-6}} = 116.3 \text{ dB}$$

### (三) 多进制数字调制原理

#### 1、多进制数字调制系统的定义

多进制数字基带信号：

在每个符号时间间隔  $0 \leq t \leq T_s$  内，可能发送的符号有  $M$  种，分别为  $s_1(t)$ 、 $s_2(t)$ 、 $\dots$ 、 $s_M(t)$ 。在实际应用中，通常取  $M=2N$ ， $N$  为大于 1 的正整数。

若用多进制数字基带信号去调制载波的振幅、频率或相位，相应地产生：

多进制数字振幅调制--MASK

多进制数字频率调制--MFSK

多进制数字相位调制--MPSK

#### 2、多进制数字振幅调制 (MASK)

MASK 又称多电平调制，是指用具有多个电平的随机基带脉冲序列对载波进行振幅调制。

MASK 信号的时域表示

$M$  进制数字振幅调制信号可表示为  $M$  进制数字基带信号与正弦载波相乘的形式，其时域表达式为

$$e_{\text{MASK}}(t) = \left[ \sum_n a_n g(t - nT_s) \right] \cos \omega_c t$$

$g(t)$  为高度为 1，宽度为  $T_s$  的矩形脉冲；

$a_n$  为幅值，共有  $M$  种取值， $a_n \in \{0, 1, \dots, M-1\}$ ，

$a_n = 0$       发送概率为  $P_0$

1      发送概率为  $P_1$

$M-1$       发送概率为  $P_{M-1}$

MASK 信号的带宽



MASK 信号可以看成 M 个在时间上不重叠的 OOK 信号的叠加，所以：  
MASK 信号的功率谱是 M 个 OOK 信号功率谱的叠加，叠加后的谱结构很复杂。但就信号带宽而言，MASK 信号的带宽与该 OOK 信号的带宽相同，即：

$$B_{MASK} = 2(B)_{基} = 2(R_B)_M = 2/T_S$$

其中：(RB)M -- 多进制码元速率；

$T_S$  -- 多进制码周期。

### MASK 信号的频带利用率

码元速率形式的频带利用率

$$\eta_B = \frac{R_B}{B_{MASK}} = \frac{R_B}{2R_B} = \frac{1}{2} (\text{Baud/Hz})$$

这与 2ASK 系统相同，不能反映多进制的高频带利用率特点

信息速率形式的频带利用率--能反映多进制的高频带利用率特点

$$\eta_b = \frac{R_b}{B_{MASK}} = \frac{R_B \log_2 M}{2R_B} = \frac{\log_2 M}{2} (b/s \cdot \text{Hz})$$

$$(\eta_b)_M = (\eta_b)_2 \log_2 M$$

## 3、多进制数字频率调制 (MFSK)

MFSK 是指用多个频率不同的正弦波分别代表不同的数字信号。在某一码元时间内只发送其中一个频率。

### MFSK 信号的频带利用率

$$B_{MFSK} = f_M - f_1 + 2f_s$$

$$(\eta_B)_{MFSK} = \frac{R_B}{B_{MFSK}} = \frac{R_B}{f_M - f_1 + 2R_B}$$

$$(\eta_b)_{MFSK} = \frac{R_b}{B_{MFSK}} = \frac{R_B \log_2 M}{f_M - f_1 + 2R_B}$$

MFSK 系统的抗噪声性能

MFSK 信号采用非相干解调时的误码率为

$$P_e = \int_0^{+\infty} x e^{-[(x^2+a^2)/\sigma_n^2]/2} I_0\left(\frac{xa}{\sigma_n}\right) [1 - (1 - e^{-z^2/2})^{M-1}] dz \approx \left(\frac{M-1}{2}\right) e^{-\frac{r}{2}}$$

式中, r 为平均接收信号的信噪比。

MFSK 信号采用相干解调时的误码率为



$$p_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(x-a/\sigma_n)^2}} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du\right)^{m-1} dx \approx \left(\frac{M-1}{2}\right) \text{erfc}\left[\sqrt{\frac{r}{2}}\right]$$

## (四) 正交振幅调制

### 1、正交振幅调制(QAM)信号的表示

信号的一个码元可以表示为

$$s_k(t) = A_k \cos(\omega_0 t + \theta_k)$$

$$kT < t \leq (k+1)T$$

式中,  $k = \text{整数}$ ;  $A_k$  和  $k$  分别可以取多个离散值。

上式可以展开为

$$\text{令 } X_k = A_k \cos \theta_k \quad Y_k = -A_k \sin \theta_k$$

则信号表示式变为

$$s_k(t) = X_k \cos \omega_0 t + Y_k \sin \omega_0 t$$

$$s_k(t) = A_k \cos \theta_k \cos \omega_0 t - A_k \sin \theta_k \sin \omega_0 t$$

$X_k$  和  $Y_k$  也是可以取多个离散值的变量。

$s_k(t)$  是两个正交的振幅键控信号之和--正交振幅调制(QAM)

### 2、QAM 矢量图--4QAM

若:  $k$ --取/4 和-/4,  $A_k$ --取+A 和-A,

则:  $X_k$  和  $Y_k$ --取 $\pm(\sqrt{2}/2)$ -- $\pm 1$ (归一化),

4QAM 信号--两个幅度为 $\pm 1$  的正交振幅键控信号之和

4QAM 就成为 QPSK--QPSK 信号是一种 QAM 信号

**例题 6:** 采用 4PSK 或 4QAM 调制传输 2400b/s 数据:

(1) 最小理论带宽是多少?

(2) 若传输带宽不变, 而比特率加倍, 则调制方式应如何改变?

**解:** (1)  $M=4$ ,  $R_b=2400\text{b/s}$ ,  $R_B=R_b/\log_2 M=1200\text{Baud}$ ;

$$B_{\text{MPSK}}=2B_{\text{基}}, \quad (B_{\text{基}})_{\min}=R_B/2=600\text{ Hz}$$



( $\eta = 2$ 时, 理论上最小, 为乃奎斯特带宽)

最小理论带宽是:  $B_{\text{MPSK}} = 2B_{\text{基}} = 2 \times R_b/2 = R_b$

$B_{4\text{PSK}} = 1200 \text{ Hz}$

$$\eta = \frac{R_b}{B}, \eta_{\max}$$

(2)若  $B_{\text{MPSK}} = 1200 \text{ Hz}$  不变,  $R_b = 4800 \text{ b/s}$ (加倍),

最小理论带宽  $B_{\text{MPSK}} = R_b$ ,  $R_b = B_{\text{MPSK}} = 1200$

$\log_2 M = R_b/R_b = 4800/1200 = 4$ ,  $M = 2^4 = 16$ , 应采用 16QPSK

**例题 7:** 采用 2PSK 调制传输 2400b/s 数据: 最小理论带宽是多少?

解:  $M=2$ ,  $R_b=2400 \text{ b/s}$ ,  $R_b=R_b=2400 \text{ Baud}$ ;

最小理论带宽是:  $B_{2\text{PSK}} = R_b = 2400 \text{ Hz}$

**例题 8:** 采用 MPSK 调制传输 9600b/s 数据:

(1)若  $M=4$ , 最小理论带宽是多少?

(2)若传输带宽为 2400Hz,  $M=?$

解: (1)  $M=4$ ,  $R_b=9600 \text{ b/s}$ ,  $R_b=R_b/\log_2 M = 4800 \text{ Baud}$ ;

最小理论带宽是:  $B_{\text{MPSK}} = R_b$

$B_{4\text{PSK}} = 4800 \text{ Hz}$

(2)若  $B_{\text{MPSK}} = 2400 \text{ Hz}$ ,

最小理论带宽  $B_{\text{MPSK}} = R_b$ ,  $R_b = B_{\text{MPSK}} = 2400$

$\log_2 M = R_b/R_b = 9600/2400 = 4$ ,  $M = 2^4 = 16$ ,

应采用 16QPSK 或 16QAM。

## (五) 最小频移键控

### 1、最小频移键控 (MSK) 定义

定义: 最小频移键控 (MSK) 信号是一种包络恒定、相位连续、带宽最小并且严格正交的 2FSK 信号。



## 2、正交 2FSK 信号的最小频率间隔

假设 2FSK 信号码元的表示式为

$$s(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_1 t + \phi_1) & \text{当发送“1”时} \\ A \cos(\omega_0 t + \phi_0) & \text{当发送“0”时} \end{cases}$$

现在，为了满足正交条件，要求

$$\int_0^{T_s} [\cos(\omega_1 t + \phi_1) \cdot \cos(\omega_0 t + \phi_0)] dt = 0$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{T_s} \{ \cos[(\omega_1 + \omega_0)t + \phi_1 + \phi_0] + \cos[(\omega_1 - \omega_0)t + \phi_1 - \phi_0] \} dt = 0$$

上式积分结果为

$$\frac{\sin[(\omega_1 + \omega_0)T_s + \phi_1 + \phi_0]}{\omega_1 + \omega_0} + \frac{\sin[(\omega_1 - \omega_0)T_s + \phi_1 - \phi_0]}{\omega_1 - \omega_0} -$$

$$\frac{\sin(\phi_1 + \phi_0)}{\omega_1 + \omega_0} - \frac{\sin(\phi_1 - \phi_0)}{\omega_1 - \omega_0} = 0$$

## 3、MSK 基本原理

MSK 信号的表达式：第 k 个码元可以表示为

$$s_k(t) = \cos(\omega_c t + \frac{a_k \pi}{2T_s} t + \phi_k)$$

$$(k-1)T_s < t \leq kT_s$$

式中：k—第 k 个码元的初始相位，在一个码元宽度中是不变的。

c — 载波角频率； Ts — 码元宽度；

瞬时频率等于瞬时相位的导数：

$$d[\omega_c t + \frac{a_k \pi}{2T_s} t + \phi_k] / dt = \omega_c + \frac{a_k \pi}{2T_s} = (f_c + \frac{a_k}{4T_s}) Hz$$

信息码元为“1”时， $a_k = +1$ ； 此码元载频：  $f_1 = f_c + 1/(4T_s)$

信息码元为“0”时， $a_k = -1$ ； 此码元载频：  $f_0 = f_c - 1/(4T_s)$

频差：  $f_1 - f_0 = 1 / (2T_s)$  --是正交 2FSK 信号的最小频率间隔





#### 4、MSK 信号的相位连续性

$$s_k(t) = \cos(\omega_c t + \frac{a_k \pi}{2T_s} t + \phi_k)$$

$$(k-1)T_s < t \leq kT_s$$

波形（相位）连续的一般条件是前一码元末尾的总相位等于后一码元开始时的总相位，即

$$\frac{a_{k-1}\pi}{2T_s} t + \phi_{k-1} \Big|_{t=kT_s} = \frac{a_k\pi}{2T_s} t + \phi_k \Big|_{t=kT_s}$$

$$\frac{a_{k-1}\pi}{2T_s} \cdot kT_s + \phi_{k-1} = \frac{a_k\pi}{2T_s} \cdot kT_s + \phi_k$$

由上式推导出下列递归条件

$$\phi_k = \phi_{k-1} + \frac{k\pi}{2}(a_{k-1} - a_k) = \begin{cases} \phi_{k-1}, & \text{当 } a_k = a_{k-1} \text{ 时} \\ \phi_{k-1} \pm k\pi, & \text{当 } a_k \neq a_{k-1} \text{ 时。} \end{cases}$$



## 第八章 数字信号的最佳接收

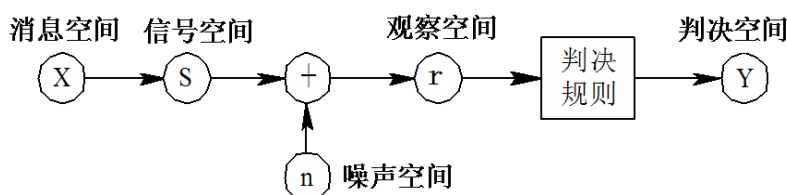
### (一) 最佳接收原则

#### 1、最佳接收分析思路

在数字信号的最佳接收分析中，我们不是采用先给出接收机模型然后分析其性能的分析方法，而是采用如下分析思路：

依据统计判决 (statistical decision) 理论，从数字信号接收统计模型出发，依据某种最佳接收准则，推导出相应的最佳接收机结构，然后再分析其性能。

#### 2、数字信号的统计特性 —— 数字通信系统的统计模型



$x, s, n, r, y$  空间：代表消息、发送信号、噪声、接收信号波形及判决结果的所 有可能状态的集合。

各个空间的状态：用参数  $x, s, n, r, y$  的统计特性来描述。

##### 消息空间

消息空间：  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

在数字系统中，消息空间是离散的状态，且：  $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$

##### 信号空间

消息本身不能直接在数字通信系统中进行传输，需要将消息变换为相应的电

信号  $s_i(t)$ ，即将消息集合  $\{X\}$  映射成信号集合  $\{S\}$ 。

映射是一一对应，即消息  $x_i$  与信号  $s_i$  一一对应。

信号集合  $\{S\}$  也由  $m$  个离散状态组成，即  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ，且  $P(s_i) = P(x_i)$



$$\sum_{i=1}^n p(s_i) = 1$$

$P(s_i)$  是信号发送概率，称为先验概率，是信号统计检测的第一数据

## 噪声空间

噪声空间  $\{n\}$ ：假定信道为加性高斯白噪声信道：

均值为零，方差为  $\sigma_n^2$ ，双边噪声功率谱密度为  $n_0/2$ 。

$k$  维联合概率密度函数：

在前面各章分析系统抗噪声性能时，用噪声的一维概率密度函数来描述噪声的统计特性，在本章最佳接收中，为了更全面地描述噪声的统计特性，采用噪声的  $k$  维联合概率密度函数：

$$f(n) = f(n_1, n_2, \dots, n_k)$$

$n_1, n_2, \dots, n_k$  为噪声  $n(t)$  在一个码周期  $T$  内， $k$  个采样时刻  $t_i$  的随机变量  
根据随机信号分析理论我们知道：

对于白噪声：自相关函数  $R(\tau) = \delta(\tau)$  是冲击函数，只在  $\tau = 0$  时值不为 0。

说明：在采样时刻的随机变量之间，满足：自相关，互不相关。

对于高斯过程：若互不相关的，则统计独立。

若噪声是高斯白噪声，则它在任意两个时刻上得到的样值都是不相关的，同时也是统计独立的，即： $k$  维联合概率密度函数等于  $k$  个一维概率密度函数的乘积：

$$f(n_1, n_2, \dots, n_k) = f(n_1)f(n_2)\dots f(n_k)$$

$f(n_i)$  是噪声  $n$  在  $t_i$  时刻的取值  $n_i$  的一维概率密度函数，是均值为零，方差为  $\sigma_n^2$  的高斯分布，其一维概率密度函数为：

$$f(n_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left\{-\frac{n_i^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

噪声  $n$  的  $k$  维联合概率密度函数为：

$$f(n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^k n_i^2\right\}$$

噪声  $n$  的  $k$  维联合概率密度函数：



$$f(n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^k n_i^2 \right\}$$

当  $k$  很大时,  $\frac{1}{2f_H T} \sum_{i=1}^k n_i^2$  代表在观察时间  $(0, T)$  内的平均功率, 根据帕塞瓦尔定理, 应有:

$$\frac{1}{T} \int_0^T n^2(t) dt = \frac{1}{2f_H T} \sum_{i=1}^k n_i^2$$

$$\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^k n_i^2 = \frac{1}{n_0} \int_0^T n^2(t) dt$$

$$\sigma_n^2 = n_0 f_H$$

$$f(n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^T n^2(t) dt \right\}$$

观察空间

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

在观察时间  $(0, T)$  内, 信号  $s_1, s_2, \dots, s_n$  中之一被发送, 此时:  $r(t) = s_i(t) + n(t)$

$s_i(t)$  是确定信号,  $r(t)$  的随机性完全由噪声决定, 故它仍服从高斯分布, 其方差仍为  $\sigma_n^2$ , 但是均值变为  $s_i(t)$ 。

当信号波形为  $s_i(t)$  时,  $r(t)$  的  $k$  维联合概率密度函数  $f_{s_i}(r)$  为:

$$f_{s_i}(r) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^T [r(t) - s_i(t)]^2 dt \right\}, (i = 1, 2, \dots, m)$$

$f_{s_i}(r)$  称为似然函数, 它是信号统计检测的第二数据。

### 3、数字信号的最佳接收——讨论数字通信系统的统计模型中的判决准则



所谓最佳接收是指在某种准则意义下的最佳接收。

“最小差错概率”准则——是数字通信系统中最直观且最合理的最佳接收准则。

总误码率  $P_e$

$$P_e = P(1)P_{e1} + P(0)P_{e0}$$

式中：

$P_{e1} = P(0/1)$  — 发送“1”时，收到“0”的错误转移概率；

$P_{e0} = P(1/0)$  — 发送“0”时，收到“1”的错误转移概率；

下一步：

求错误转移概率的表达式  $P_{e1}$  和  $P_{e0}$ ，进而求得总误码率公式。

似然函数——发送  $s_i(t)$  时  $r(t)$  的概率密度函数

二进制数字系统，假设发送信号为  $s_0(t)$  和  $s_1(t)$ ，出现  $s_0(t)$  信号时  $r(t)$  的

概率密度函数(即似然函数)  $f_0(r)$  为：

$$f_0(r) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^T [r(t) - s_0(t)]^2 dt \right\}$$

同理，出现  $s_1(t)$  信号时  $y(t)$  的似然函数  $f_1(y)$  为

$$f_1(r) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^T [r(t) - s_1(t)]^2 dt \right\}$$

似然比准则

因此，为了达到最小差错概率，可以按以下规则进行判决：

此判决规则称为似然比准则

$$\frac{f_0(r)}{f_1(r)} > \frac{p(1)}{p(0)},$$

判为“0” (即  $s_0(t)$  出现)

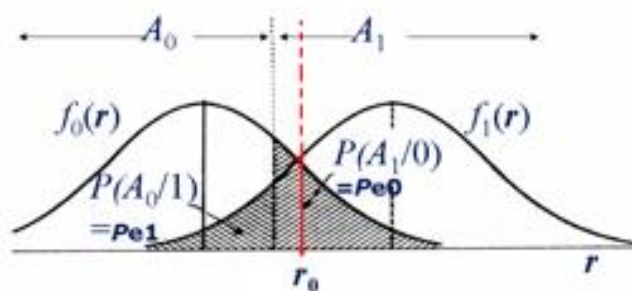


$$\frac{f_0(r)}{f_1(r)} < \frac{p(1)}{p(0)},$$

判为"1" (即  $s_1(t)$  出现)

在加性高斯白噪声条件下，似然比准则和最小差错概率准则是等价的

最大似然准则



在  $P(0)=P(1)$  时，上式简化为：

若  $f_0(r) > f_1(r)$ ，则判为“0”

若  $f_0(r) < f_1(r)$ ，则判为“1”

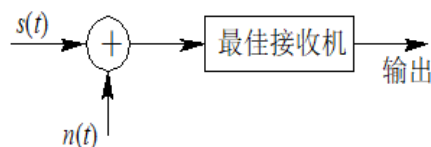
即：哪路信号的似然函数大，就判为哪路信号出现。

这个判决准则常称为最大似然准则。按照这个准则判决就可以得到理论上最佳的误码率，即达到理论上的误码率最小值。

## （二）确知/随相信号的最佳接收

### 1、确知信号的最佳接收机

利用似然准则，推导出确知信号的满足最小差错概率准则的最佳接收机的结构——即相关器形式的最佳接收机。



### 2、确知信号与随参信号



**确知信号**是指一个信号出现后，它的所有参数(如幅度、频率、相位、到达时刻等)都是确知的。

**随参信号**是指一个信号出现后，它的某些参数(如幅度、频率、相位、到达时刻等)是随机的。

**随参信号**又分为：

随相信号：相位是随机的；

随机振幅信号：幅度是随机的；

起伏信号：振幅和相位都是随机的。

### 3、相关器形式的最佳接收机结构

和  $s_1(t)$ ，它们在码元持续时间  $(0, T)$  内且有相等的能量，即

$$E = E_0 = \int_0^T S_0^2(t) dt = E_1 = \int_0^T s_1^2(t) dt$$

设：噪声  $n(t)$  是高斯白噪声，均值为零，单边功率谱密度为  $n_0$ 。

要求的设计准则：最小差错概率准则。

根据上一节的分析我们知道，在加性高斯白噪声条件下，最小差错概率准则与似然比准则是等价的。因此，我们可以直接利用似然比准则对确知信号作出判决。

在观察空间，在观察时间  $(0, T)$  内，接收机输入端的信号为：

$r(t) = s_0(t) + n(t)$ , 发送  $s_0(t)$  时

$s_1(t) + n(t)$ , 发送  $s_1(t)$  时

当出现  $s_0(t)$  或  $s_1(t)$  时观察空间的似然函数分别为：

$$f_{s_0}(r) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^T [r(t) - s_0(t)]^2 dt \right\}$$

$$f_{s_1}(r) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_n)^k} \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^T [r(t) - s_1(t)]^2 dt \right\}$$

其似然比判决规则为：

$$\frac{f_0(r)}{f_{s_1}(r)} > \frac{p(1)}{p(0)},$$



判为  $r_0$  (即  $s_0$ )

$$\frac{f_{s_0}(\mathbf{r})}{f_{s_1}(\mathbf{r})} < \frac{p(1)}{p(0)},$$

判为  $r_1$  (即  $s_1$ )

$$P(0) \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^T [\mathbf{r}(t) - s_0(t)]^2 dt \right\} > P(1) \exp \left\{ -\frac{1}{n_0} \int_0^T [\mathbf{r}(t) - s_1(t)]^2 dt \right\}$$

当满足上式子时，判为  $s_0$ ；反之判为  $s_1$

## 4、随相数字信号的最佳接收机结构

以 2FSK 随相信号为例来推导。

假设 2FSK 信号的能量相等、先验概率相等、互不相关；通信系统中存在带限高斯白噪声；接收信号码元相位的概率密度服从均匀分布。因此，可以将此信号表示为：

$$\begin{cases} s_0(t, \phi_0) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0), & \text{发送码元 "0"} \\ s_1(t, \phi_1) = A \cos(\omega_1 t + \phi_1), & \text{发送码元 "1"} \end{cases}$$

随机相位的概率密度表示为：

$$f(\phi_0) = \begin{cases} 1/2\pi, & 0 \leq \phi_0 < 2\pi \\ 0, & \text{其他处} \end{cases}$$

$$f(\phi_1) = \begin{cases} 1/2\pi, & 0 \leq \phi_1 < 2\pi \\ 0, & \text{其他处} \end{cases}$$

判决条件：

若接收矢量  $\mathbf{r}$  使  $f_0(\mathbf{r}) > f_1(\mathbf{r})$ ，则判发送码元是 “0”，

若接收矢量  $\mathbf{r}$  使  $f_0(\mathbf{r}) < f_1(\mathbf{r})$ ，则判发送码元是 “1”。

接收矢量具有随机相位，故  $f_0(\mathbf{r})$  和  $f_1(\mathbf{r})$  分别可以表示为：

$$f_0(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} f(\phi_0) f_0(\mathbf{r} / \phi_0) d\phi_0$$

$$f_1(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} f(\phi_1) f_1(\mathbf{r} / \phi_1) d\phi_1$$

上两式经过复杂的计算后，代入判决条件，就可以得出最终的判决条件：





最终的判决条件：

若接收矢量  $r$  使  $M_0 > M_1$ ，则判为发送码元是“0”，

若接收矢量  $r$  使  $M_0 < M_1$ ，则判为发送码元是“1”。

其中：

$$M_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}$$

$$M_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$$

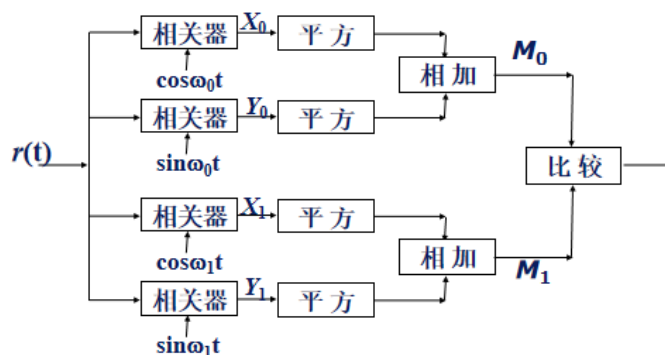
$$X_0 = \int_0^{T_s} r(t) \cos \omega_0 t dt$$

$$Y_0 = \int_0^{T_s} r(t) \sin \omega_0 t dt$$

$$X_1 = \int_0^{T_s} r(t) \cos \omega_1 t dt$$

$$Y_1 = \int_0^{T_s} r(t) \sin \omega_1 t dt$$

## 5、随相数字信号最佳接收机的结构



上述最佳接收机是 2FSK 随相信号的非相干接收机。

因为随相信号的相位带有由信道引入的随机变化，所以在接收端不能采用相干接收方法。换句话说，相干接收只适用于相位确知的信号。

对于随相信号而言，非相干接收是最佳的接收方法。

**例题 1：**按照最大似然准则设计的接收机能使（ ）达到最小。

**答：**差错概率

**例题 2：**对二进制确知信号进行最佳接收时，最佳信号形式是（ ）。

**答：**使  $\rho = 1$  的信号形式



**例题 3：**二进制数字信号最佳接收的最大似然准则为( )。

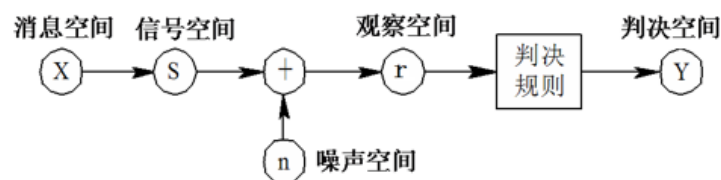
**答：** $P(1)f_1(r) > P(0)f_0(r)$ ，判为  $s_1$ ；

$P(1)f_1(r) < P(0)f_0(r)$ ，判为  $s_0$

### (三) 数字信号的匹配滤波接收法

#### 1、数字信号的匹配滤波接收法

暂不考虑失真的影响，以二进制数字通信系统为例，采用输出信噪比最大准则推导出匹配滤波器接收机的结构。



#### 2、最佳线性滤波器设计的两种准则

**均方误差最小：**使滤波器输出的信号波形与发送信号波形之间的均方误差最小，由此而导出的最佳线性滤波器称为维纳滤波器；

**输出信噪比最大：**使滤波器输出信噪比在某一特定时刻达到最大，由此而导出的最佳线性滤波器称为匹配滤波器。

#### 3、匹配滤波器的定义

**匹配滤波器：**输出信噪比最大的最佳线性滤波器

#### 4、匹配滤波器依据的最佳接收准则

所谓最佳接收是指在某种准则意义下的最佳接收。

匹配滤波器依据的最佳接收准则：

“输出信噪比最大” 准则

#### 5、最佳接收匹配滤波器的传输函数 $H(\omega)$

根据施瓦兹不等式中，等号成立的条件： $X(\omega) = KY(\omega)$ ，可得信噪比不等式中，等号成立的条件为：



$$H(\omega) = KS(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$X(\omega) = H(\omega)$$

$$Y(\omega) = S(\omega)e^{j\omega t_0}$$

此  $H(\omega)$  就是我们所要求的最佳线性滤波器的传输函数。

该滤波器在给定时刻  $t_0$  能获得最大输出信噪比。

$K$  为常数，通常可选择为  $K=1$ 。

$S(\omega)$  是信源信号频谱  $S(\omega)$  的复共轭。滤波器的传输函数  $H(\omega)$  与信源信号频谱的复共轭相一致，所以称该滤波器为匹配滤波器。

施瓦兹不等式：

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y(\omega)d\omega \right|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega$$

式中， $X(\omega)$  和  $Y(\omega)$  都是实变量  $\omega$  的复函数。

当且仅当：

$$X(\omega) = KY(\omega)$$

时，上式中，等号成立，左式取得极大值。

## 6、最佳接收匹配滤波器的冲击响应 $h(t)$

$$h(t) = F^{-1}[H(\omega)]$$

$$h(t) = F^{-1}[H(\omega)]$$

$K$  为常数，通常可选择  $K=1$ 。

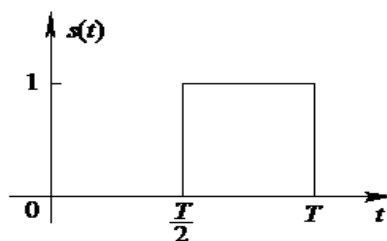
$t_0$  为输出最大信噪比时刻

**例题 4：** 设输入信号如图所示，试求：

在  $T/2 \leq t \leq T$  时  $s(t)=1$ ，在其他情况下  $s(t)=0$

(1) 该信号的匹配滤波器传输函数  $h(t)$  并画  $h(t)$  波形；

(2) 画匹配滤波器输出信号波形，指出输出信号取得最大值时刻以及此时刻得到的最大值是多少(即信号码元能量  $E$  是多少)。求最大输出信噪比。

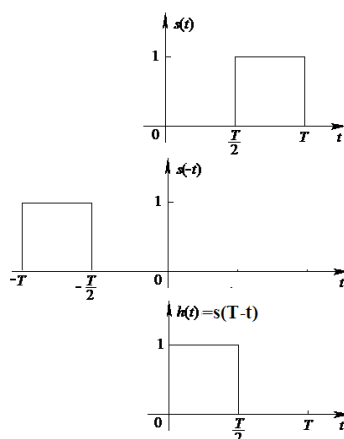


解:(1)匹配滤波器的单位冲激响应为

$$h(t)=s(t_0-t)$$

取  $t_0=T$ , 则有:  $h(t)=s(T-t)$

画  $h(t)$  波形:



(2) 匹配滤波器的输出为:

$$s_0(t) = s(t) * h(t) = \int s(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

用图解法求卷积: 分段求解

$$t < T/2, \quad T/2 \leq t < T, \quad T \leq t \leq 3T/2, \quad t > 3T/2$$

$$s_0(t) = \begin{cases} -\frac{T}{2} + t, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \\ -\frac{3T}{2} - t, & T \leq t \leq \frac{3T}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

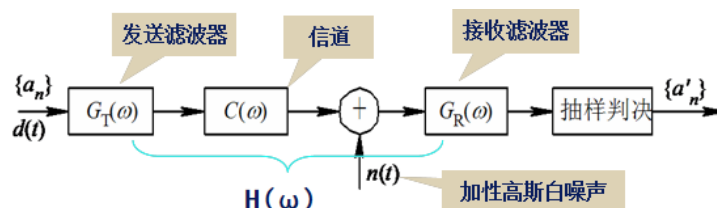
**例题 5:** 匹配滤波器是基于——准则来设计的。

**答:** 最大输出信噪比



## (四) 最佳基带传输系统

### 1、基带传输系统的组成



系统总的传输函数  $H(\omega) = G_T(\omega)C(\omega)G_R(\omega)$

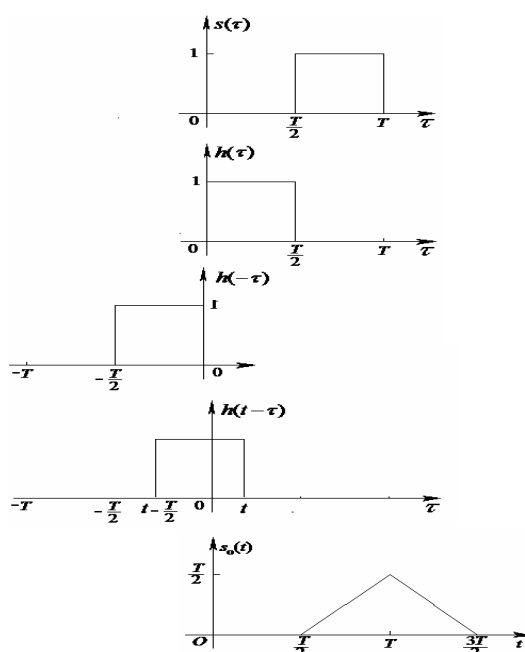
### 2、基带传输系统无码间串扰条件——满足奈奎斯特第一准则

当系统总的传输函数  $H(\omega)$  满足下式时，就可以消除抽样时刻的码间干扰，即

$$H_{eq}(\omega) = \sum_i H\left(\omega + \frac{2\pi i}{T_s}\right) = k \quad | \omega | \leq \frac{\pi}{T_s}$$

$$0 \quad | \omega | \geq \frac{\pi}{T_s}$$

奈奎斯特第一准则是设计基带系统总传输函数的依据。





匹配滤波器的输出：

取得最大值时刻： $t=T$ ，码周期结束时刻

此时刻得到最大的能量  $E=T/2$ ；

最大输出信噪比  $(r_0)_{\max}=2E/n_0=T/n_0$

### 3、基带传输系统最佳接收条件——满足匹配滤波器理论

为使接收滤波器输出在抽样时刻得到最大信噪比，接收滤波器传输函数

$G_R(\omega)$  应满足与其输入信号频谱复共轭一致，即：

$$G_R(\omega)=G_T(\omega)e^{-j\omega t_0}=G_T(\omega) \quad \text{取 } t_0=0$$

### 4、无码间串扰条件且最佳接收的基带传输系统条件

结合无码间串扰条件和最佳接收条件，可得以下方程组：

$$H(\omega)=G_T(\omega)G_R(\omega)$$

$$G_R(\omega)=G_T(\omega)$$

$$H(\omega)=G_T^2(\omega)=G_R^2(\omega)$$

$$|G_T(\omega)|=|G_R(\omega)|=|H(\omega)|^{1/2}$$

选择合适的相位，即可得到：

$$G_T(\omega)=G_R(\omega)=H(\omega)^{1/2}$$

**例题 6：**什么是最佳基带系统？理想信道下的最佳基带系统应满足哪些条件？

**答：**能消除码间串扰且误码率最小的基带系统称为最佳基带系统； $G_T(\omega)=G_R(\omega)=\sqrt{H(\omega)}$



## 第九章 信源编码

### （一）信源编码概述

#### 1、信源编码的目的

（1）A/D 变换，数字化，以便数字传输；

将信源输出的模拟信号转换为数字信号，经过信源编码输出的信号应该是在时间上离散、在取值上为有限个状态的数字脉冲串；

（2）减少编码位数，提高通信有效性，减少原消息的冗余度。

#### 2、信源编码包含

PCM、DPCM、DM 、 $\Delta M$

### （二）抽样定理及脉冲振幅调制 PAM

#### 1、抽样分类

根据信号是低通型的还是带通型的，抽样分为低通抽样和带通抽样

根据用来抽样的脉冲序列是等间隔的还是非等间隔的，分为均匀抽样和非均匀抽样；

根据抽样的脉冲序列是冲击序列还是非冲击序列，又可分理想抽样和实际抽样。

#### 2、低通抽样定理

一个频带限制在 $(0, f_H)$ 赫兹内的时间连续信号  $m(t)$ ，如果以  $T_s \leq 1/(2f_H)$  秒的间隔（或以  $f_s \geq 2f_H$  的频率）对它进行等间隔（均匀）抽样，则  $m(t)$  将被抽样值完全确定，可以由抽样值无失真的恢复原信号。

抽样频率  $f_s$ （每秒内的抽样点数） $\geq 2f_H$

若抽样频率  $f_s < 2f_H$ ，则会产生失真，这种失真叫混叠失真

奈奎斯特间隔



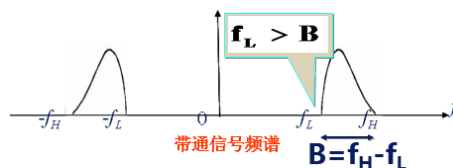
最大允许抽样间隔  $T_s=1/(2f_H)$

奈奎斯特抽样频率

允许的最低抽样频率  $f_s=2f_H$

### 3、带通抽样定理

一个带通信号  $m(t)$ ，其频率限制在  $f_L$  与  $f_H$  之间，带宽为  $B=f_H-f_L$ ，如果最小抽样速率  $f_s$  为下列时，那么  $m(t)$  可完全由其抽样值确定。



$$f_s = 2B(1 + \frac{k}{n})$$

$n$  — 商( $f_H / B$ )的整数部分， $n=1, 2, \dots$ ;

$k$  — 商( $f_H / B$ )的小数部分， $0 < k < 1$ 。

当  $n$  很大，无论  $f_H$  是否为带宽的整数倍，均有：

$$f_s \approx 2B$$

**例题 1：** 信号 312KHz~552KHz，求  $f_s$

**解：**  $B=552-312=240\text{KHz}$

$f_L > B$ ，是带通型信号，用带通抽样定理求  $f_s$

$$\frac{f_H}{B} = \frac{552}{240} = 2.3 = 2 + 0.3$$

$$n=2, \quad k=0.3$$

$$f_s = 2B(1 + \frac{k}{n})$$

$$f_s = 2B(1 + \frac{k}{n}) = 2 \times 240 \times (1 + \frac{0.3}{2}) = 552$$

### 4、脉冲振幅调制

时间上连续的模拟信号经过抽样后，成为时间上离散但幅度取值仍是连续





变化的信号

脉冲振幅调制 (PAM) 是脉冲载波的幅度随基带信号变化的一种调制方式。

### (三) 模拟信号的量化

量化：利用预先规定的有限个电平来表示模拟信号抽样值的过程称为量化。

量化分为：均匀量化和非均匀量化

#### 1、均匀量化（线性量化）

均匀量化：

把输入信号的取值域按等距离分割的量化称为均匀量化。

量化电平  $q_i$ ：把取值无限的抽样值划分成有限的  $L$  个量化区间，取各区间的中点。

量化间隔  $\Delta$ ：量化间隔  $\Delta_i = \text{输入信号的变化范围} / \text{量化电平数 } L$ ，通常  $L=2k$

#### 2、量化噪声功率 $N_q$

$$N_q = \frac{\Delta^2}{12}$$

#### 3、量化信号功率 $S_q$

设信号  $m(t)$  在  $[-A, A]$  间均匀分布，概率密度为  $1/2A$ ， $m_{qi}$  取值为： $\pm\Delta/2$ ， $\pm3\Delta/2$ ， $\pm5\Delta/2 \dots \pm(L-1)\Delta/2$ ；信号功率  $S_q$  为  $m_{qi}$  的均方电压：

$$\begin{aligned} S_q &= E[(m_q)^2] = \int_{-A}^A x^2 f(x) dx = \int_{-A}^A x^2 \frac{1}{2A} dx \\ &= \frac{1}{2A} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-A}^A = \frac{A^2}{3} = \frac{\Delta^2}{12} L^2 \end{aligned}$$

#### 4、量化信噪比



$$\frac{S_q}{N_q} = \frac{\frac{\Delta^2}{12} L^2}{\frac{\Delta^2}{12}} = L^2$$

$$\left( \frac{S_q}{N_q} \right)_{dB} = 10 \lg L^2 = 20 \lg L$$

$$= 20 \lg 2^k = 20k \lg 2 \approx 6k$$

量化信噪比随量化电平数  $L$  的增加而提高, 信号的逼真度越好。通常量化电平数应根据对量化信噪比的要求来确定。

均匀量化器广泛应用于线性 A/D 变换接口和遥测遥控系统、仪表、图像信号的数字化接口。

## 5、非均匀量化

在语音信号数字化通信(数字电话通信)中, 均匀量化的不足: 量化信噪比随信号电平的减小而下降。

产生原因: 均匀量化中量化间隔  $\Delta$  为固定值, 因而无论信号大小如何, 量化噪声功率固定不变, 这样, 小信号时的量化信噪比就难以达到给定的要求。

均匀量化:  $N_q = \frac{\Delta^2}{12}$  与信号大小无关

均匀量化时输入信号的动态范围将受到较大的限制。为此, 实际中往往采用非均匀量化。

## 6、非均匀量化的优点

非均匀量化是一种在整个动态范围内量化间隔不相等的量化。

大信号用大的量化间隔, 小信号用小的量化间隔, 提高了小信号的量化信噪比, 相当于扩大了输入信号的动态范围。

**例题 2:** 简述非均匀量化原理。与均匀量化相比较, 非均匀量化的主要目的是什么?

**解:** 非均匀量化是指量化间隔不相等的量化, 即信号小时, 量化间隔也小; 信号大时, 量化间隔也大。目的是改善小信号的量化信噪比, 减小编码位数和传输带宽。



## （四）脉冲（差分）编码调制、增量调制 $\Delta M$

### 1、脉冲编码调制（PCM）简称脉码调制

对连续信号的抽样值（即 PAM）进行编码，用一组二进制数字代码来表示，即得到脉冲编码调制 PCM。

在 PCM 中，信息加载在脉冲载波的幅度上，并对幅度进行量化编码，故称为脉冲编码调制。

PCM 十三折线 A 率编译码

由于这种通信方式抗干扰能力强，它在光纤通信、数字微波通信、卫星通信中均获得了极为广泛的应用。

### 2、PCM 十三折线 A 率编码

把量化后的信号电平值变换成二进制码组的过程称为编码，其逆过程称为解码或译码。

### 3、码字

对每一个量化电平值，用 N 位二进制码来表示，这 N 位二进制码称为一个码字。

### 4、码型

在 PCM 中常用的二进制码型有三种：

自然二进制

折叠二进制

格雷二进制（反射二进制）

### 5、码位数 N 的选择

码位数 N 的多少，决定了量化分层的多少，反之，若信号量化分层数一定，则编码位数也被确定。

均匀量化时：量化分层数 L

$$L = 2^N$$



在信号变化范围一定时,用的码位数越多,量化分层越细,量化误差就越小,通信质量当然就更好。

但码位数越多,设备越复杂,使码速率增加,传输带宽加大,有效性越低。

## 6、编码

8 位码的安排如下:

极性码  $a_1$

段落码  $a_2 a_3 a_4$

段内码  $a_5 a_6 a_7 a_8$

### (1) 极性码

$a_1=1$ , 表示信号为正极性

$a_1=0$ , 表示信号为负极性

对于正、负对称的双极性信号,在极性判决后被整流(相当取绝对值),以后则按信号的绝对值进行编码,因此,之后的段落码和段内码只要考虑 13 折线中的正方向的 8 段折线就行了。

### (2) 段落码

$a_2 a_3 a_4$ : 3 位码的 8 种可能状态分别表示信号的绝对值处在哪个段落

映射: 将输入信号归一化值映射成以  $\Delta$  为单位, 求解公式:

$[\text{输入信号归一化值} \times 2048]$  取整

**例题 3:** 设输入信号归一化值为 0.36, 将 0.36 以  $\Delta$  为单位表示:

**解:**  $[0.36 \times 2048]$  取整 =  $[737.28]$  取整 = 737 $\Delta$ , 即:  $0.36 = 737\Delta$

虽然各段内的 16 个量化级是均匀的,但因段落长度不等,故不同段落间的量化级是非均匀的。

小信号时,段落短,量化间隔小;大信号时,量化间隔大。

因此,这种非线性编码(压缩编码)可以改善小信号时的量噪比,增加输入信号的动态范围。

13 折线的最小量化间隔为  $\Delta = 1/2048$ ,

按照二进制编码位数  $N$  与量化级数  $M$  的关系:  $M = 2^N$ ,  $2048 = 2^{11}$



均匀量化需要编 11 位码。

非均匀量化只需要 7 位编码,实现了压缩。

通常把按非均匀量化编码称为非线性编码;按均匀量化特性的编码称为线性编码。

在保证小信号时的量化间隔相同的条件下,7 位非线性编码与 11 位线性编码等效。由于非线性编码的码位数减少,因此,所需数字传输系统带宽减小。

## 7、PCM 信号的码元速率和带宽

一个抽样值,PCM 要用  $N$  位二进制代码表示:  $T_B = T_s/N$

一个抽样周期  $T_s$  内要编  $N$  位码,码元宽度为:  $R_B = Nf_s$

码位越多,码元宽度  $T_B$  越小,占用带宽越大。

显然,传输 PCM 信号所需要的带宽要比模拟基带信号  $m(t)$  的带宽大得多。

## 8、 码元速率

单路 PCM 的码元速率:

设  $m(t)$  为低通信号,最高频率为  $f_H$ ;

设抽样频率为  $f_s$ ,按照抽样定理:抽样速率  $f_s = 2f_H$ ,

若编码位数为  $N$ ,则:  $T_B = T_s / N$

码元速率  $R_B$  为:  $R_B = N f_s = 2 f_H \times N$

## 9、传输 PCM 信号所需的带宽

在无码间串扰和采用理想低通传输特性的情况下:

所需最小理论带宽为:  $B = \frac{R_B}{2} (Hz)$

PCM 十三折线 A 率编码时,  $R_B = 64k\text{Baud}$ ,

所需最小理论带宽为:  $B = \frac{R_B}{2} = 32kHz$

若 PCM 码流采用矩形波形,最小传输带宽为:

$$\tau = T_B \text{ 时 } B = \frac{1}{T_B} = R_B (Hz) = 64kHz$$

## 10、PCM 系统的抗噪声性能



接受端低通的输出： $m(t) = m_0 + n_q + n_e(t)$

$M_0$ : 输出信号成分

$n_q(t)$ : 量化造成引起输出噪声

$n_e(t)$ : 信道噪声引起输出噪声

系统输出端信噪比

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{E[m_o^2(t)]}{E[n_q^2(t)] + E[n_e^2(t)]} = \frac{L^2}{1 + 4P_e 2^{2N}} = \frac{2^{2N}}{1 + 4P_e 2^{2N}}$$

## 11、差分脉冲编码调制 DPCM 的定义

利用信源的相关性，对相邻样值的差值而不是样值本身进行编码，就是差分脉冲编码调制 DPCM。

优点：由于相邻样值的差值比样值小，可以用较少的比特数表示差值。这样，用差值编码可以在量化台阶不变的情况下(即量化噪声不变)，使编码位数显著减少，信号带宽大大压缩。

## 12、DPCM 与增量调制

增量调制--简称  $\Delta M$  或 DM (Delta Modulation):

是用一位二进制码来表示相邻样值的差值。从而反映出抽样时刻波形的变化趋势。

增量调制可以看成是 DPCM 的一个重要特例。

DPCM 用  $N$  位二进制码元的来表示相邻样值的差值;

$N=1$  时的 DPCM 就是  $\Delta M$ 。

$\Delta M$  的目的在于进一步简化语音编码方法。

## 13、增量调制--简称 $\Delta M$ 或 DM

是用一位二进制码来表示相邻样值的差值。从而反映出抽样时刻波形的变化趋势。

是 DPCM 的一个重要特例。 DPCM 用  $N$  位二进制码元的来表示相邻样值的差值)， $N=1$  时的 DPCM 就是  $\Delta M$ ;

$\Delta M$  的目的在于简化语音编码方法。



## 14、量化噪声

一般量化噪声

过载量化噪声（斜率过载失真）

## 15、无过载条件

$$\left| \frac{dm(t)}{dt} \right|_{\max} \leq \sigma \cdot f_s$$

为了不发生过载，必须增大  $\sigma$  和  $f_s$ 。

$\sigma \uparrow$ ，一般量化误差也大。

$f_s \uparrow$ ，一般量化误差和过载噪声都减小，但抽样点数增多，有效性下降。

因此， $\Delta M$  系统中的抽样速率要比 PCM 系统中的抽样速率高的多（通常两倍）。

## 16、起始编码电平

起始编码电平  $A_{\min} = \sigma/2$

$A_{\min} = \sigma/2$

$A_{\max} = \sigma \cdot f_s / w_k = \sigma \cdot f_s / 2\pi k$

要求:  $A_{\min} \leq \text{起始编码电平} \leq A_{\max}$

## 17、增量调制系统的抗噪声性能

在  $\Delta M$  系统中同样存在两类噪声:

量化噪声

过载噪声

一般量化噪声

由于在实际应用中都是防止工作到过载区域，因此仅考虑一般量化噪声。

信道加性噪声。

在不过载的情况下，系统最大的量化信噪比为

$$\frac{S_{\max}}{N_q} = \frac{3}{8\pi^2} \cdot \frac{f_s^3}{f_k^2 f_m} \approx 0.04 \frac{f_s^3}{f_k^2 f_m}$$



**例题 3:** 已知采用 13 折线 A 律编码的 PCM 码组为 1101100 最小量化间隔为 1 个量化单位, 则该码组相对应的译码电平为\_\_\_\_\_量化单位。

**解:**  $896+32/2$

**例题 4:** 线性 PCM 的编码位数每增加 1 位, 信号量噪比就提高\_\_\_\_\_ dB。

**解:** 6

**例题 5:** 设线性 PCM 的抽样速率为 8kHz, 若编码后比特率由 32kb/s 增加为 64kb/s, 则信号量噪比增加\_\_\_\_\_ dB。

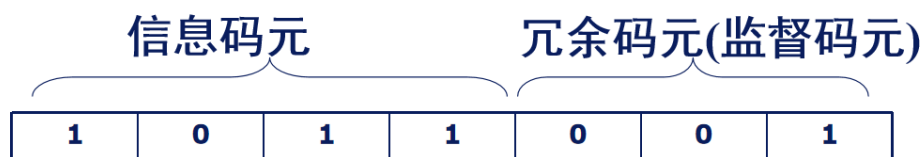
**解:** 24

## 第十章 差错控制编码

### (一) 差错编码基础

#### 1、差错控制编码的基本思想

在数字信号序列中加入一些冗余码元--监督码元, 这些冗余码元不含有通信信息, 但与信息码元有着某种制约关系, 译码时利用这些规律性来鉴别传输过程是否发生错误, 或进而纠正错误, 从而起到降低误码率的作用。



#### 2、差错控制编码的优缺点

优点: (也是差错控制的目的)

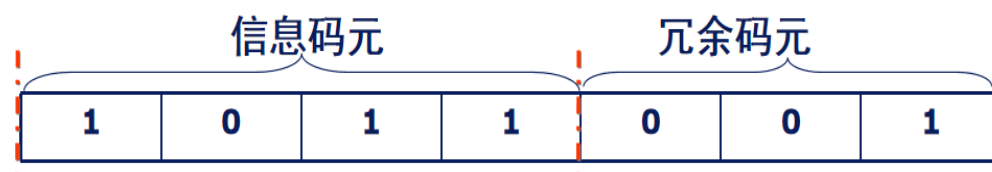
降低误码率, 增加系统可靠性。

缺点:





在相同的码速率下，降低了信息速率。



在相同的信息速率下，提高了码速率，增加了系统带宽。



### 3、常用的四种差错控制方式

检错重发 (ARQ)

前向纠错 (FEC)

反馈校验 (IRQ)

混合方式 (HEC)

(1) 检错重发法

其中之一：自动要求重发 (ARQ)

发送能检错的码。

收端在接收到的信码中发现错码时，就通知发端重发，直到正确接收为止。

例如：奇偶校验。

一般需具备双向信道。

(2) 前向纠错法 (FEC)

发送能够纠正错误的码，接收端根据编码规则进行检查，如果有错自动纠正

不需要反馈信道，特别适合只能提供单向信道场合

自动纠错，不要求检错重发，延时小，实时性好

纠错码必须与信道的错误特性密切配合

若纠错较多，则编、译码设备复杂，传输效率低



### (3) 反馈校验法 (IRQ)

接收端将接收到的信码原封不动地转发回发端，并与原发送信码相比较，若发现错误，发端再重发。

不需要编码和译码，设备简单；

需要双向信道；

发端需要一定容量的存储器以存储发送码组；

实时性差。



### (4) 混合纠错检错 (HEC)

FEC 与 ARQ 的结合

发端发出同时具有检错和纠错能力的码，收端收到后，检查错误情况：如果错误在纠错能力之内，则自动纠正；若超出纠错能力，但在检错能力之内，则经反向信道要求重发。

在实时性和译码复杂性方面是 FEC 和 ARQ 的折衷。



## 4、差错控制编码分类

按功能分：检错码、纠错码和纠错码

按监督码元与信息码元关系分：线性码与非线性码

按信息码元与监督码元之间的约束关系不同分：

分组码与卷积码

按信息码元在编码后是否保持原来的信号形式分：



系统码与非系统码

按纠正差错的类型分：

纠正随机错误的码与纠正突发错误的码

按码元的取值分：二进制码与多进制码

## 5、码的一些基本概念

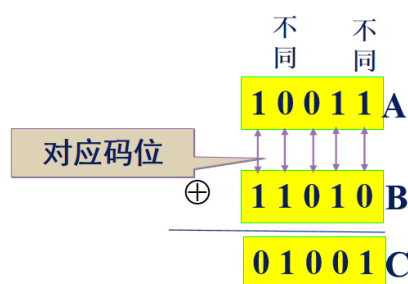
码长：码字中码元的数目。

码重：码字中非零码元的数目定义为该码字的重量，简称码重。

例如“10011”码字中“1”的个数为3，码重为3。

码距：两个等长码字中，对应码位上，不同二进制码元的位数，定义为两码字的距离，简称码距（d）。

如两码字“10011”与“11010”间码距为2



$$d = \sum_{i=1}^n A_i \oplus B_i$$

最小码距：在一个码字集合（许用码组）中，任意两个码字间距离的最小值，即码字集合中任意两元素间的最小距离，记为  $d_{\min}$ 。

二进制码的最小码距又称为汉明距离。

## 6、纠错编码的基本原理

在数字信号序列中加入冗余码元--监督码元，这些冗余码元与信息码元有着某种制约关系，译码时利用这些规律性来鉴别传输过程是否发生错误，或进而纠正错误。

举例说明：假如要传送 A、B 两个消息

编码一：



消息 A---- “0”；消息 B---- “1”

最小码距  $d_{\min} = 1$

若传输中产生错码（“0”错成“1”或“1”错成“0”），收端无法发现，该编码无检错纠错能力。

编码二：

消息 A---- “00”；消息 B---- “11”，加了一位监督位，最小码距  $d_{\min} = 2$ ；

若传输中产生一位错码，则变成“01”或“10”，因“01”和“10”为禁用码组，收端译码时可以检测出该码有错，但无法确定错码位置，不能纠正。

编码三：

消息 A---- “000”；消息 B---- “111”，增加两位监督位；

最小码距  $d_{\min} = 3$ ；

传输中产生一位或两位错码，都将变成禁用码组，收端判决传输有错。该编码具有检出两位错码的能力。

在产生一位错码（错 1 位概率远远大于错 2 位、3 位概率）情况下，收端可根据“大数”法则进行正确判决，能够纠正这一位错码。该编码具有纠正一位错码的能力。例如收到 110，认为是 111。

## 7、码距与检错和纠错能力的关系

检测  $e$  个错码，要求： $d_{\min} \geq e+1$

纠正  $t$  个错码，要求： $d_{\min} \geq 2t+1$

纠正  $t$  个错码，同时能检测  $e$  个错码，要求： $d_{\min} \geq e+t+1$  ( $e > t$ )

最小码距  $d_{\min}$  决定了码的检纠错能力,  $d_{\min}$  越大，码的检纠错能力越强

**例题 1：**只选两组 000 和 111 为许用码组时，其最小码距  $d_{\min}=3$ ，那么：

**解：**若该码用于检错，要求  $d_{\min} \geq e+1$ ，

$3 \geq e+1$ ， $e=2$ ，能检测 2 个错码，

若该码用于纠错，要求  $d_{\min} \geq 2t+1$ ，

$3 \geq 2 \times t + 1$ ， $t=1$ ，能纠 1 个错码，



若该码用于检纠错,要求  $d_{\min} \geq e+t+1$  且  $(e>t)$ ,

$3 \geq e+t+1$  且  $(e>t)$ , 无满足条件的  $e$  和  $t$ , 该码不能同时检纠错。

要想同时检纠错, 要求  $d_{\min}$  至少为 4。

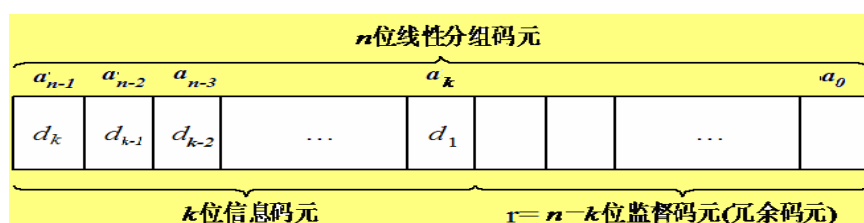
## (二) 线性分组码

### 1、线性分组码的基本概念和原理

分组码: 将信息码进行分组, 然后为每组信息码附加若干位监督码元的编码方法得到的码集合称为分组码。

线性分组码: 是指信息码元与监督码元之间的关系可以用一组线性方程来表示的分组码。

线性分组码格式: 编码长度为  $n$ , 其中信息码长度为  $k$ , 监督码长度为  $r$ , 则:  $n=k+r$ , 该线性分组码称为  $(n, k)$  线性码。



### 2、线性分组码的主要性质

具有封闭性: 任意两个许用码组之和 (逐位模二加) 仍为一个许用码组。

最小码距  $d_{\min}$  等于非零码的最小码重。

全零码组一定是线性码中的一个许用码组。线性码中的单位元是  $A=0$ , 即全零码组。

线性码中一个元素的逆元就是该元素本身, 因为  $A+A=0$

$$\begin{array}{r}
 1011 \text{ 许用码组} \\
 +0110 \text{ 许用码组} \\
 \hline
 1101 \text{ 许用码组}
 \end{array}$$



编解码思路：奇偶监督码是一种简单的线性分组码。以其为例介绍

在偶校验时，它的信息码元  $a_{n-1}\cdots a_1$  和监督码元  $a_0$  满足以下线性关系：

$$a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + a_0 = 0 \quad (\text{mod } 2)$$

该式表示偶校验时的监督关系，称为监督方程。

接收时为了检验传输过程中是否出现错误，需要计算：

$S = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_0$  ---- 伴随式， $S$  被称为校正子。

如果  $S=0$ ，表示接收码组正确；

如果  $S=1$ ，表示出现误码。

由于只有一个监督码元，只能得到一个校正子，只能表示有错和无错两种情况，而不能指出错码位置。

如果有三位监督位，就有三个监督方程，得到三个校正子  $S_1$ 、 $S_2$  和  $S_3$ ：

$S_1$ 、 $S_2$  和  $S_3$  的 8 种组合就可以表示收到码字的 8 种状态：

一种：表示无错，

另七种：用来指出一位错码的七种不同位置，

若码长  $n=7$ ，该码就有纠一位错码的能力。

如果有  $r$  个监督码元，就有  $r$  个监督方程，这时校正子则有  $2^r$  种组合，其中一种表示无错，其余  $2^r-1$  种组合可以用来指出一位错码的  $2^r-1$  个可能位置。

取  $2^r-1=n$ ，构成  $(n,k)$  分组码，能纠正一位错码。

### 3、汉明码

汉明码是一种能够纠正一位错码且编码效率较高的线性分组码。

汉明码取：  $2^r-1=n$ ，  $k=n-r=2^r-1-r$

如：(7,4)、(15,11)、(31,26)、(63,57)。 (63,57) 汉明码的编码效率  $\approx 90\%$

下面以 (7, 4) 汉明码为例来说明如何构造线性分组码。

用  $A=a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$  表示 7 个码元，其中  $a_2a_1a_0$  是监督位， $S_1, S_2, S_3$  表示与三个监督方程对应的校正子。

定义校正子  $S_1 S_2 S_3$  的 8 种状态与误码位置的关系



$S_1S_2S_3$	误码位置
<b>001</b>	<b><math>a_0</math></b>
<b>010</b>	<b><math>a_1</math></b>
<b>100</b>	<b><math>a_2</math></b>
<b>011</b>	<b><math>a_3</math></b>
<b>101</b>	<b><math>a_4</math></b>
<b>110</b>	<b><math>a_5</math></b>
<b>111</b>	<b><math>a_6</math></b>
<b>000</b>	<b>无误码</b>

校正子与误码位置

由此表可以推出伴随式：

$$1 \cdot a_6 + 1 \cdot a_5 + 1 \cdot a_4 + 0 \cdot a_3 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_0 = S_1$$

$$1 \cdot a_6 + 1 \cdot a_5 + 0 \cdot a_4 + 1 \cdot a_3 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_0 = S_2$$

$$1 \cdot a_6 + 0 \cdot a_5 + 1 \cdot a_4 + 1 \cdot a_3 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = S_3$$

即：

$$S_1 = a_6 + a_5 + a_4 + a_2$$

$$S_2 = a_6 + a_5 + a_3 + a_1$$

$$S_3 = a_6 + a_4 + a_3 + a_0$$

#### 4、监督矩阵和生成矩阵

由校正子与误码位置表，得到伴随式：

或：

$$1 \cdot a_6 + 1 \cdot a_5 + 1 \cdot a_4 + 0 \cdot a_3 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_0 = S_1$$

$$1 \cdot a_6 + 1 \cdot a_5 + 0 \cdot a_4 + 1 \cdot a_3 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_0 = S_2$$

$$1 \cdot a_6 + 0 \cdot a_5 + 1 \cdot a_4 + 1 \cdot a_3 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0 = S_3$$

$$a_6 + a_5 + a_4 + a_2 = S_1$$

$$a_6 + a_5 + a_3 + a_1 = S_2$$

$$a_6 + a_4 + a_3 + a_0 = S_3$$

将伴随式用矩阵来表示



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_6 \\ a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$$

发端编码时:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_6 \\ a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}^T}$$

$$\text{令 } S = [S_1 \quad S_2 \quad S_3] = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$A = [a_6 \quad a_5 \quad a_4 \quad a_3 \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0]$$

$$0 = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{AT})^T = \mathbf{A}$$

收端解码时:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_6 \\ a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}^T}$$

$$\text{则: } \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{S}^T$$

$$\text{或: } \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{S} \quad \text{--- 伴随式}$$

$$B = [a_6 \quad a_5 \quad a_4 \quad a_3 \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0]$$





$$S = [S_1 \ S_2 \ S_3]$$

则:  $H \cdot A^T = 0^T$  或:  $A \cdot H^T = 0$  ---监督方程

H 称为监督矩阵或一致校验矩阵, 它决定了信息码元和监督码元之间的校验关系。H 为  $r \times n$  阶矩阵。H 矩阵的各行应线性无关。

## 5、监督矩阵 H 的特点:

H 矩阵是  $r \times n$  阶矩阵。H 矩阵的各行应线性无关。

H 确定了编码时监督码元与信息码元的关系。

H 矩阵与错码位置表对应。

H 矩阵可以分为两部分: P 和  $I_r$ , P 为  $r \times k$  阶矩阵,  $I_r$  为  $r$  阶单位阵。

$$H = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [P \ I_r]$$

具有  $[P \ I_r]$  形式的 H 矩阵称为典型监督矩阵。若 H 不是典型阵形式, 要通过矩阵初等行变换, 将 H 化为典型阵, 才能得到 P 矩阵。

可见监督矩阵 H 能确定编解码。但不能直接用 H 来实现编码。

我们希望得到一个直接用来编码的矩阵 G:

$$[\text{信息码}] \cdot G = [\text{许用码组 A}]$$

发送端编码时, 令  $S=0$ , 即表示无错时的监督关系求监督码:

$$\begin{array}{l} s_1 = a_6 + a_5 + a_4 + a_2 = 0 \\ s_2 = a_6 + a_5 + a_3 + a_1 = 0 \\ s_3 = a_6 + a_4 + a_3 + a_0 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_2 = a_6 + a_5 + a_4 \\ a_1 = a_6 + a_5 + a_3 \\ a_0 = a_6 + a_4 + a_3 \end{array} \Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_6 \\ a_5 \\ a_4 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$P$

或写成:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_6 & a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}}_{\text{信息码}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{Q=P^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}}_{\text{监督码}}$$



$$H = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_P \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{I_r}$

信息码乘以 Q 矩阵，得到监督码。

将 Q 左边加上一个  $k \times k$  单位阵  $I_k$ ，构成生成矩阵 G：

令  $G_{k \times n} = [I_k Q]$

用信息码乘 G 即可构成信息码+监督码---整个码组 A。所以称 G 为生成矩阵。

$$\begin{aligned} [a_6 \ a_5 \ a_4 \ a_3]G &= [a_6 \ a_5 \ a_4 \ a_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [a_6 \ a_5 \ a_4 \ a_3 \ a_2 \ a_1 \ a_0] = A \\ [a_6 \ a_5 \ a_4 \ a_3]G &= [a_6 \ a_5 \ a_4 \ a_3 \ a_2 \ a_1 \ a_0] = A \end{aligned}$$

具有  $[I_k Q]$  形式的生成矩阵称为典型生成矩阵。

由典型生成矩阵生成的码组为系统码。

## 6、生成矩阵 G 特点

G 为  $k \times n$  阶矩阵，G 矩阵的各行应线性无关，每行均为许用码组，G 的行最小码重= $d_{\min}$

编码完全由生成矩阵 G 确定。

[信息码]  $\cdot$  G = A

具有  $[I_k \cdot Q]$  形式的 G 矩阵称为典型生成矩阵。

由典型生成矩阵产生的分组码一定是系统码。

**例题 2：**已知线性分组码的监督矩阵为

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(1)  $n=?$ ,  $r=?$ , 编码效率  $\eta=?$  求生成矩阵。

(2) 该码的全部许用码组

**解:** (1)  $H$  是  $r \times n$  矩阵,  $n=7, r=3, \eta=4/7$ 。求生成矩阵  $G$ :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_P \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{I_r}$

$$Q = P^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad G = [I_k Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{生成矩阵 } G}$

信息码组矩阵  $[a_6 a_5 a_4 a_3]$

全部许用码组  $[a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0]$

## (三) 循环码

### 1、循环码的编解码原理

循环码是线性分组码的一个重要子集，循环码是一种重要的线性分组码。这种码的编码和解码设备都不太复杂，且有较强的检（纠）错能力，是目前研究得最成熟的一类码，它有许多特殊的代数性质。除具有线性分组码的性质外，还具有循环性。



## 2、循环码的特点

封闭性:两个码组之和（模 2 加）仍为一个许用码组。

循环性:循环码中任一许用码组经过循环移位后，仍然是许用码组。

左移一位：每位码左移一位，最左端的码元移到右端

若： $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0)$  是一  $(n, k)$  循环码的码组，

则： $(a_{n-2}, a_{n-3}, \dots, a_1, a_0, a_{n-1})$  -- 循环左移 1 次

$(a_{n-3}, a_{n-4}, \dots, a_0, a_{n-1}, a_{n-2})$  -- 循环左移 2 次

.....

也都是该循环码的码组。

## 3、循环码的描述--码多项式 $T(x)$

码长为  $n$  的码组，若码组  $A = (a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0)$ ，其码多项式为：

$$T(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$$

例如：（7，3）循环码的任意码组可表示为：

$$T(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

如码组  $A_7 = 1100101$ ，对应的码多项式：

$$\begin{aligned} T_7(x) &= 1 \cdot x^6 + 1 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \\ &= x^6 + x^5 + x^2 + 1 \end{aligned}$$

## 4、循环码的生成多项式与生成矩阵

循环码完全由其码组长度  $n$  和生成多项式  $g(x)$  所决定。

$k$  个线性无关的许用码组可构成生成矩阵。

将循环码中次数最低的码多项式作为生成多项式  $g(x)$

$(n, k)$  循环码中一定能找到这样一个码组：前面的  $k-1$  位都是 0，而第  $k$  位和最后一位为 1：

其对应的码多项式为生成多项式  $g(x)$ ，且  $g(x)$  一定是码中唯一的一个  $n-k+1$  次多项式。



$$\underbrace{(000\dots 01)}_{k-1\text{位}} \underbrace{g_{n-k-1}g_{n-k-2}\dots g_2 g_1}_{n-k+1\text{位}} \underbrace{1}_{n-k\text{阶}}$$

+  
n位

$g(x)$ 是一个常数项为 1 的  $r=n-k$  次多项式。

**例题 3:** 试求 (7, 3) 循环码表中的生成多项式和生成矩阵。

**解:** 对 (7,3) 循环码,  $n=7$ ,  $k=3$ ,  $r=4$

由于  $g(x)$ 是一个常数项为 1 的  $r=n-k=4$  次多项式, 查表知为: 0010111 对应生成多项式:  $g(x)=x^4+x^2+x+1$ , 生成矩阵  $G(x)$ 为:

$$G(X) = \begin{bmatrix} x^2 g(x) \\ x g(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^6 + x^4 + x^3 + x^2 \\ x^5 + x^3 + x^2 + x \\ x^4 + x^2 + x + 1 \end{bmatrix}$$

等价于:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## 5、循环码的监督矩阵

由生成矩阵求监督矩阵:

$G = [Ik \cdot Q]$ , 得到  $Q$ ,  $P = QT$ , 得到  $P$ , 由  $P$  得到  $H$ :  $H = [P \cdot Ir]$

**例题 4:** 已知(7,3)循环码的生成多项式为:  $g(x)=x^4+x^2+x+1$ 。

(1) 求典型生成矩阵;

(2) 全部许用码组;

(3) 典型监督矩阵;

**解:** (1) 生成矩阵为:

$$G(X) = \begin{bmatrix} x^2 g(x) \\ x g(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^6 + x^4 + x^3 + x^2 \\ x^5 + x^3 + x^2 + x \\ x^4 + x^2 + x + 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \mathbf{r}_1 \\ \\ \leftarrow \mathbf{r}_3 \end{matrix}$$



该生成矩阵并不是典型生成矩阵；

经初等行变换化为典型生成矩阵：r3+r1→r1

$$G = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\quad}_{\mathbf{I}_k} \quad \underbrace{\quad}_{\mathbf{Q}}$

(2) 全部许用码组

$$G = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$A = [a_6 \ a_5 \ a_4]G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) 求典型监督矩阵：

$$G = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\quad}_{\mathbf{I}_k} \quad \underbrace{\quad}_{\mathbf{Q}}$

$$H = PI_r = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\quad}_{\mathbf{P}} \quad \underbrace{\quad}_{\mathbf{I}_r}$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P = Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



**例题 5:** 设 (7, 3) 循环码的生成多项式为  $g(x)=x^4+x^2+x+1$ , 待编码信息位为 101,

求对应循环码码组。

**解:**  $m(x)=x^2+1$ ,  $x^{n-k}m(x)=x^4(x^2+1)=x^6+x^4$

$$\frac{x^{n-k}m(x)}{g(x)} = \frac{x^6 + x^4}{x^4 + x^2 + x + 1} = x^2 + \frac{x^3 + x^2}{x^4 + x^2 + x + 1}$$

余式  $r(x)=x^3+x^2$

对应码组  $T(x)=x^{n-k}m(x)+r(x) = x^6+x^4+x^3+x^2$

编码为 1011100