大一上学期高数期末考试

一、单项选择题 (本大题有 4 小题，每小题 4 分，共 16 分)

1. 设 $f(x)=\cos x(x+|\sin x|)$，则在 $x=0$ 处有（　　）.

（A）$f'(0)=2$　（B）$f'(0)=1$　（C）$f'(0)=0$　（D）$f(x)$ 不可导.

2. 设 $\alpha(x)=\frac{1-x}{1+x}$，$\beta(x)=3-3\sqrt[3]{x}$，则当 $x\to1$ 时（　　）.

（A）$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小，但不是等价无穷小；　（B）$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小；

（C）$\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小；　（D）$\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小.

3. 若 $F(x)=\int_0^x(2t-x)f(t)dt$，其中 $f(x)$ 在区间上 $(-1,1)$ 二阶可导且 $f'(x)>0$，则（　　）.

（A）函数 $F(x)$ 必在 $x=0$ 处取得极大值；

（B）函数 $F(x)$ 必在 $x=0$ 处取得极小值；

（C）函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处没有极值，但点 $(0,F(0))$ 为曲线 $y=F(x)$ 的拐点；

（D）函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处没有极值，点 $(0,F(0))$ 也不是曲线 $y=F(x)$ 的拐点。

4. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$，则 $f(x)=$（　　）

（A）$\frac{x^2}{2}$　（B）$\frac{x^2}{2}+2$　（C）$x-1$　（D）$x+2$.

二、填空题（本大题有 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

5. $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ ________.

6. 已知 $\frac{\cos x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)\cdot\frac{\cos x}{x}dx=$ ____.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\cos^2\frac{\pi}{n}+\cos^2\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos^2\frac{n-1}{n}\pi\right)=$ ________.

8. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2\arcsin x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$ ________.

三、解答题（本大题有 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

9. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\sin(xy)=1$ 确定，求 $y'(x)$ 以及 $y'(0)$.

10. 求 $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx$.

11. 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x\le 0 \\ \sqrt{2x-x^2}, & 0<x\le 1 \end{cases}$ 求 $\int_{-3}^{1} f(x)dx$.

12. 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，A 为常数．求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性．

13. 求微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解．

四、 解答题（本大题 10 分）

14. 已知上半平面内一曲线 $y=y(x)\ (x\ge 0)$，过点（0,1），且曲线上任一点 $M(x_0,y_0)$ 处切线斜率数值上等于此曲线与 x 轴、y 轴、直线 $x=x_0$ 所围成面积的 2 倍与该点纵坐标之和，求此曲线方程．

五、解答题（本大题 10 分）

15. 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A；(2) 求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

六、证明题（本大题有 2 小题，每小题 4 分，共 8 分）

16. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递减，证明对任意的 $q\in[0,1]$，$\int_0^q f(x)dx\ge q\int_0^1 f(x)dx$.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)dx=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx=0$．证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.（提示：设 $F(x)=\int_0^x f(x)dx$）

解答

一、单项选择题 (本大题有 4 小题，每小题 4 分，共 16 分)

1、D　2、A　3、C　4、C

二、填空题（本大题有 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

5. e^6 . 6. $\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{x}\right)^2+c$ .7. $\frac{\pi}{2}$. 8. $\frac{\pi}{3}$.

三、解答题（本大题有 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

9. 解：方程两边求导

$$e^{x+y}(1+y')+\cos(xy)(xy'+y)=0$$

$$y'(x)=-\frac{e^{x+y}+y\cos(xy)}{e^{x+y}+x\cos(xy)}$$

$x=0, y=0$，$y'(0)=-1$

10. 解：$u=x^7$　$7x^6dx=du$

原式 $=\frac{1}{7}\int\frac{(1-u)}{u(1+u)}du=\frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{2}{u+1}\right)du$

$$=\frac{1}{7}(\ln|u|-2\ln|u+1|)+c$$

$$=\frac{1}{7}\ln|x^7|-\frac{2}{7}\ln|1+x^7|+C$$

11. 解：$\int_{-3}^{1}f(x)dx=\int_{-3}^{0}xe^{-x}dx+\int_{0}^{1}\sqrt{2x-x^2}dx$

$$=\int_{-3}^{0}xd(-e^{-x})+\int_{0}^{1}\sqrt{1-(x-1)^2}dx$$

$$=\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_{-3}^{0}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2\theta d\theta\ (\text{令}\ x-1=\sin\theta)$$

$$=\frac{\pi}{4}-2e^3-1$$

12. 解：由 $f(0)=0$，知 $g(0)=0$。

$$g(x)=\int_0^1 f(xt)dt \overset{xt=u}{=} \frac{\int_0^x f(u)du}{x}\quad (x\neq 0)$$

$$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}\quad (x\neq 0)$$

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2} = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}$$，$g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

13. 解：$\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x} y = \ln x$

$$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(\int e^{\int \frac{2}{x}dx} \ln x dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{3} x\ln x - \frac{1}{9} x + Cx^{-2}$$

$y(1) = -\dfrac{1}{9}$，$C = 0$，$y = \dfrac{1}{3} x \ln x - \dfrac{1}{9} x$

四、 解答题（本大题 10 分）

14. 解：由已知且 $y' = 2\int_0^x y dx + y$，

将此方程关于 x 求导得 $y'' = 2y + y'$

特征方程：$r^2 - r - 2 = 0$ 解出特征根：$r_1 = -1$，$r_2 = 2$.

其通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$

代入初始条件 $y(0) = y'(0) = 1$，得 $C_1 = \dfrac{2}{3}$，$C_2 = \dfrac{1}{3}$

故所求曲线方程为：$y = \dfrac{2}{3} e^{-x} + \dfrac{1}{3} e^{2x}$

五、解答题（本大题 10 分）

15. 解：(1) 根据题意，先设切点为 $(x_0, \ln x_0)$，切线方程：$y - \ln x_0 = \dfrac{1}{x_0}(x - x_0)$

由于切线过原点，解出 $x_0 = e$，从而切线方程为：$y = \dfrac{1}{e} x$

则平面图形面积 $A = \int_0^1 (e^y - ey) dy = \dfrac{1}{2} e - 1$

（2）三角形绕直线 $x = e$ 一周所得圆锥体体积记为 V_1，则 $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi e^2$

曲线 $y = \ln x$ 与 x 轴及直线 $x = e$ 所围成的图形绕直线 $x = e$ 一周所得旋转体体积为 V_2

$$V_2 = \int_0^1 \pi (e - e^y)^2 dy$$

D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 $V = V_1 - V_2 = \dfrac{\pi}{6}(5e^2 - 12e + 3)$

六、证明题（本大题有 2 小题，每小题 4 分，共 12 分）

16. 证明：$\int_0^q f(x) dx - q\int_0^1 f(x)dx = \int_0^q f(x) dx - q\left(\int_0^q f(x) dx + \int_q^1 f(x)dx\right)$

$$=(1-q)\int_0^q f(x)\,dx - q\int_q^1 f(x)dx$$

$$\overset{\xi_1\in[0,q]\ \xi_2\in[q,1]}{=} q(1-q)f(\xi_1)-q(1-q)f(\xi_2) \overset{f(\xi_1)\geq f(\xi_2)}{\geq} 0$$

故有：

$$\int_0^q f(x)\,dx \geq q\int_0^1 f(x)dx$$

证毕。

17.

证：构造辅助函数：$F(x)=\int_0^x f(t)dt\ ,\ 0\leq x\leq\pi$。其满足在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 上可导。$F'(x)=f(x)$，且 $F(0)=F(\pi)=0$

由题设，有 $0=\int_0^\pi f(x)\cos xdx=\int_0^\pi \cos xdF(x)=F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi \sin x\cdot F(x)dx$，

有 $\int_0^\pi F(x)\sin xdx=0$，由积分中值定理，存在 $\xi\in(0,\pi)$，使 $F(\xi)\sin\xi=0$ 即 $F(\xi)=0$

综上可知 $F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0,\ \xi\in(0,\pi)$.在区间 $[0,\xi],[\xi,\pi]$ 上分别应用罗尔定理，知存在

$\xi_1\in(0,\xi)$ 和 $\xi_2\in(\xi,\pi)$，使 $F'(\xi_1)=0$ 及 $F'(\xi_2)=0$，即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.