第一学期高等数学期末考试试卷答案

一. 计算题（本题满分 35 分，共有 5 道小题，每道小题 7 分），

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\cos x)^{x}-2^{x}}{\sin^{3}x}$.

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)^{x}-2^{x}}{\sin^{3}x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^{x}\left[\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{x}-1\right]}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{x}-1}{x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)}-1}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)}-1}{x\ln\frac{1+\cos x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\frac{1+\cos x}{2}}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+\cos x}{2}}{x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{(1+\cos x)2x}=-\frac{1}{4}.$$

2. 设 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 与 $\dfrac{x^{2}}{2}$ 是等价无穷小，$\displaystyle\int_{0}^{\sqrt[3]{x}}f(t)dt$ 与 Ax^{k} 等价无穷小，求常数 k 与 A.

解：

由于当 $x\to 0$ 时，$\displaystyle\int_{0}^{\sqrt[3]{x}}f(t)dt$ 与 Ax^{k} 等价无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{0}^{\sqrt[3]{x}}f(t)dt}{Ax^{k}}=1$. 而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{\sqrt[3]{x}}f(t)dt}{Ax^{k}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sqrt[3]{x})\frac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}}{Akx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(\sqrt[3]{x})}{\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}}\cdot\frac{\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}}{Akx^{k-1}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}}{6Akx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{6Akx^{k-1}}$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{6Akx^{k-1}}=1$. 因此，$k=1$，$A=\dfrac{1}{6}$.

3. 如果不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^{2}+ax+b}{(x+1)^{2}(1+x^{2})}dx$ 中不含有对数函数，求常数 a 与 b 应满足的条件.

解：

将 $\dfrac{x^2+ax+b}{(x+1)^2(1+x^2)}$ 化为部分分式，有

$$\frac{x^2+ax+b}{(x+1)^2(1+x^2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{1+x^2},$$

因此不定积分 $\int\dfrac{x^2+ax+b}{(x+1)^2(1+x^2)}dx$ 中不含有对数函数的充分必要条件是上式中的待定系数

$$A=C=0.$$

即 $\dfrac{x^2+ax+b}{(x+1)^2(1+x^2)}=\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{D}{1+x^2}=\dfrac{B(1+x^2)+D(x+1)^2}{(x+1)^2(1+x^2)}$.

所以，有 $x^2+ax+b=B(1+x^2)+D(x+1)^2=(B+D)x^2+2Dx+(B+D)$.

比较上式两端的系数，有 $1=B+D$，$a=2D$，$b=B+D$. 所以，得 $b=1$.

5. 计算定积分 $\int_0^{\frac{5}{2}}\min\{1,\ |x-2|\}dx$.

解：

$$\min\{1,\ |x-2|\}=\begin{cases}|x-2| & |x-2|\le 1\\ 1 & |x-2|>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1 & x<1\\ 2-x & 1\le x\le 2\\ x-2 & 2<x\le 3\\ 1 & x>3\end{cases}.$$

所以，$\int_0^{\frac{5}{2}}\min\{1,\ |x-2|\}dx=\int_0^1 1dx+\int_1^2(2-x)dx+\int_2^{\frac{5}{2}}(x-2)dx=\dfrac{13}{8}$.

5. 设曲线 C 的极坐标方程为 $r=a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$，求曲线 C 的全长.

解：

曲线 $r=a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$ 一周的定义域为 $0\le\dfrac{\theta}{3}\le\pi$，即 $0\le\theta\le 3\pi$. 因此曲线 C 的全长为

$$s=\int_0^{3\pi}\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}d\theta=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\theta}{3}+a^2\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}d\theta=\int_0^{3\pi}a\sin^2\frac{\theta}{3}d\theta=\frac{3}{2}\pi a.$$

二. (本题满分 45 分，共有 5 道小题，每道小题 9 分)，

6. 求出函数 $f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(\pi x)}{1+(2x)^{2n}}$ 的所有间断点，并指出这些间断点的类型.

解：

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(\pi x)}{1+(2x)^{2n}}=\begin{cases}\sin(\pi x) & |x|<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & x=\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & x=-\frac{1}{2}\\ 0 & |x|>\frac{1}{2}\end{cases}.$$

因此 $x_1=-\frac{1}{2}$ 与 $x_2=\frac{1}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的间断点.

$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-}0=0$，$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+}f(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+}\sin(\pi x)=-1$，因此 $x=-\frac{1}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的第一类可去型间断点.

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\sin(\pi x)=1$，$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}0=0$，因此 $x=\frac{1}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的第一类可去型间断点.

7. 设 ξ 是函数 $f(x)=\arcsin x$ 在区间 $[0,\ b]$ 上使用 Lagrange（拉格朗日）中值定理中的“中值”，求极限 $\lim_{b\to 0}\frac{\xi}{b}$.

解：

$f(x)=\arcsin x$ 在区间 $[0,\ b]$ 上应用 Lagrange 中值定理，知存在 $\xi\in(0,\ b)$，使得

$$\arcsin b-\arcsin 0=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}(b-0).$$

所以，$\xi^2=1-\left(\frac{b}{\arcsin b}\right)^2$. 因此，

$$\lim_{b\to 0}\frac{\xi^2}{b^2}=\lim_{b\to 0}\frac{1-\left(\frac{b}{\arcsin b}\right)^2}{b^2}=\lim_{b\to 0}\frac{(\arcsin b)^2-b^2}{b^2(\arcsin b)^2}$$

令 $t=\arcsin b$，则有

$$\lim_{b\to 0}\frac{\xi^2}{b^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2-\sin^2 t}{t^2\sin^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2-\sin^2 t}{t^4}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t-\sin 2t}{4t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{2-2\cos 2t}{12t^2}=\frac{1}{6}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 2t}{t^2}=\frac{1}{6}\lim_{t\to 0}\frac{2\sin 2t}{2t}=\frac{1}{3}$$

所以，$\lim_{b\to 0}\frac{\xi}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

8. 设 $f(x)=\int_0^{1-x} e^{y(2-y)}dy$，求 $\int_0^1 f(x)dx$.

解：

$$\int_0^1 f(x)dx=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx$$

在方程 $f(x)=\int_0^{1-x} e^{y(2-y)}dy$ 中，令 $x=1$，得

$$f(1)=\int_0^{1-1} e^{y(2-y)}dy=\int_0^0 e^{y(2-y)}dy=0.$$

再在方程 $f(x)=\int_0^{1-x} e^{y(2-y)}dy$ 两端对 x 求导，得 $f'(x)=-e^{1-x^2}$，

因此，$\int_0^1 f(x)dx=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx=-\int_0^1 xf'(x)dx$

$$=\int_0^1 xe^{1-x^2}dx=e\int_0^1 xe^{-x^2}dx=e\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1).$$

9. 研究方程 $e^x=ax^2\ (a>0)$ 在区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 内实根的个数.

解：

设函数 $f(x)=ax^2e^{-x}-1$，$f'(x)=2axe^{-x}-ax^2e^{-x}=ax(2-x)e^{-x}$.

令 $f'(x)=0$，得函数 $f(x)$ 的驻点 $x_1=0$，$x_2=2$.

由于 $a>0$，所以

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(ax^2e^{-x}-1\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(ax^2e^{-x}-1\right)=a\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}-1=a\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}-1=a\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}-1=-1.$$

因此，得函数 $f(x)$的性态

x	$-\infty$	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ 2)$	2	$(2,\ +\infty)$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\downarrow$	-1		$4ae^{-2}-1$	$\downarrow$	-1

⑴ 若 $4ae^{-2}-1>0$，即 $a>\frac{e^2}{4}$时，函数 $f(x)=ax^2e^{-x}-1$在$(-\infty,\ 0)$、$(0,\ 2)$、$(2,\ +\infty)$内各有一个零点，即方程 $e^x=ax^2$在$(-\infty,\ +\infty)$内有 3 个实根.

⑵ 若 $4ae^{-2}-1=0$，即 $a=\frac{e^2}{4}$时，函数 $f(x)=ax^2e^{-x}-1$在$(-\infty,\ 0)$、$(0,\ +\infty)$内各有一个零点，即方程 $e^x=ax^2$在$(-\infty,\ +\infty)$内有 2 个实根.

⑶ 若 $4ae^{-2}-1<0$，即 $a<\frac{e^2}{4}$时，函数 $f(x)=ax^2e^{-x}-1$在$(-\infty,\ 0)$有一个零点，即方程 $e^x=ax^2$在$(-\infty,\ +\infty)$内有 1 个实根.

10．设函数 $f(x)$可导，且满足

$$f'(-x)=x(f'(x)-1),\quad f(0)=0.$$

试求函数 $f(x)$的极值.

解：

在方程 $f'(-x)=x(f'(x)-1)$中令 $t=-x$，得 $f'(t)=-t(f'(-t)-1)$，即

$$f'(x)=-x(f'(-x)-1).$$

在方程组 $\begin{cases} f'(x)+xf'(-x)=x \\ -xf'(x)+f'(-x)=-x \end{cases}$ 中消去 $f'(-x)$，得

$$f'(x)=\frac{x+x^2}{1+x^2}.$$

积分，注意 $f(0)=0$，得 $f(x)-f(0)=\int_0^x\frac{t+t^2}{1+t^2}dt$．即

$$f(x)=\int_0^x \frac{t+t^2}{1+t^2}dt = x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\arctan x \cdot$$

由 $f'(x)=\dfrac{x+x^2}{1+x^2}$ 得函数 $f(x)$ 的驻点 $x_1=0,\quad x_2=-1$. 而 $f''(x)=\dfrac{1+2x-x^2}{(1+x^2)^2}$. 所以,

$$f''(0)=1>0,\quad f''(-1)=-\frac{1}{2}<0.$$

所以, $f(0)=0$ 是函数 $f(x)$ 极小值; $f(-1)=-1+\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{\pi}{4}$ 是函数 $f(x)$ 极大值.

三. 应用题与证明题(本题满分 20 分, 共有 2 道小题, 每道小题 10 分),

11. 求曲线 $y=\sqrt{x}$ 的一条切线, 使得该曲线与切线 l 及直线 $x=0$ 和 $x=2$ 所围成的图形绕 x 轴旋转的旋转体的体积为最小.

解:

设切点坐标为 $(t,\ \sqrt{t})$, 由 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, 可知曲线 $y=\sqrt{x}$ 在 $(t,\ \sqrt{t})$ 处的切线方程为

$$y-\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t),\ \text{或}\ y=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x+t).$$

因此所求旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^2\left\{\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}(x+t)\right]^2-\left(\sqrt{x}\right)^2\right\}dx=\frac{\pi}{4}\left(\frac{8}{3t}-4+2t\right)$$

所以, $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\pi}{4}\left(-\dfrac{8}{3t^2}+2\right)=0$. 得驻点 $t=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, 舍去 $t=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. 由于

$\left.\dfrac{d^2V}{dt^2}\right|_{t=\frac{2}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\pi}{4}\cdot\left.\dfrac{16}{3t^2}\right|_{t=\frac{2}{\sqrt{3}}}>0$, 因而函数 V 在 $t=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 处达到极小值, 而且也是最小值. 因此所求切线方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

12. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,\ 1]$ 上连续, 在开区间 $(0,\ 1)$ 内可导, 且

$$\int_0^{\frac{2}{\pi}} e^{f(x)}\arctan x dx=\frac{1}{2},\quad f(1)=0.$$

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{-1}{(1+\xi^2)\arctan\xi}$.

解：

因为 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，所以由积分中值定理，知存在 $\eta\in\left[0,\dfrac{2}{\pi}\right]$，使得

$$\int_0^{\frac{2}{\pi}} e^{f(x)}\arctan x\,dx=\frac{2}{\pi}e^{f(\eta)}\arctan\eta.$$

由于 $\int_0^{\frac{2}{\pi}} e^{f(x)}\arctan x\,dx=\dfrac{1}{2}$，所以，$\dfrac{2}{\pi}e^{f(\eta)}\arctan\eta=\dfrac{1}{2}$. 再由 $f(1)=0$，得

$$e^{f(\eta)}\arctan\eta=\frac{\pi}{4}=e^{f(1)}\arctan 1.$$

作函数 $g(x)=e^{f(x)}\arctan x$，则函数在区间 $[\eta,1]\subset[0,1]$ 上连续，在区间 $(\eta,1)$ 内可导. 所以由 Rolle 中值定理，存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得 $g'(\xi)=0$. 而

$$g'(x)=e^{f(x)}f'(x)\arctan x+\frac{e^{f(x)}}{1+x^2}.$$

所以存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得

$$e^{f(\xi)}f'(\xi)\arctan\xi+\frac{e^{f(\xi)}}{1+\xi^2}=0.$$

由于 $e^{f(\xi)}\neq0$，所以 $f'(\xi)\arctan\xi+\dfrac{1}{1+\xi^2}=0$，即 $f'(\xi)=\dfrac{-1}{(1+\xi^2)\arctan\xi}$.