《数字信号处理》

期末不挂科

课时2　离散时间傅里叶变换

知识点	重要程度	常考题型
1、DTFT和IDTFT的定义	☆☆☆	选择、填空、计算
2、DTFT的特点	☆	判断、选择
3、常见序列	☆☆	填空、计算
4、DTFT的常用性质	☆☆☆☆	计算
5、DTFT的对称性质	☆☆☆	选择，填空，计算

2.1离散时间傅里叶变换（DTFT）

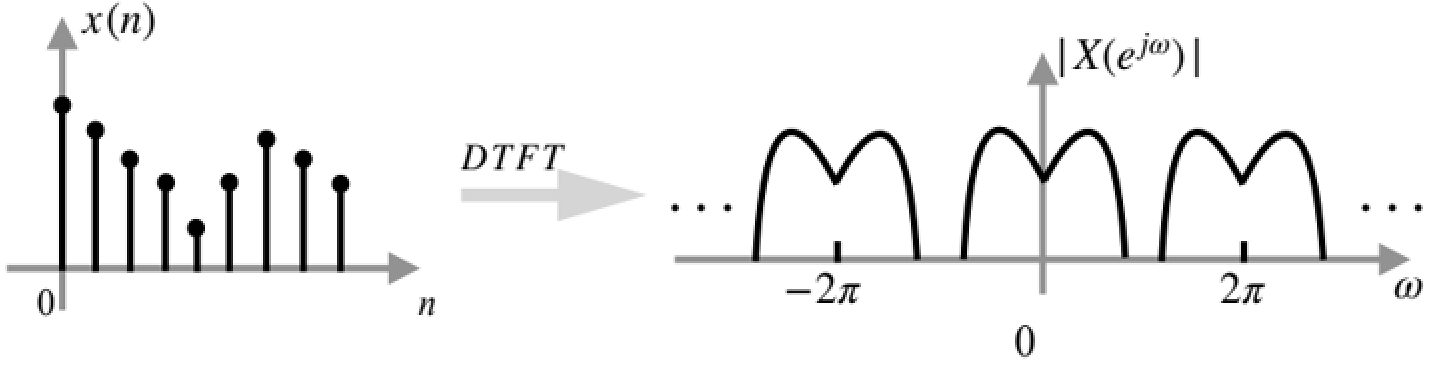
（背）

1、离散时间傅里叶变换DTFT定义式： $X\left(e^{j\omega}\right)=DTFT[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega\cdot n}$

离散时间傅里叶逆变换IDTFT定义式: $x(n)=IDTFT\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)\cdot e^{j\omega n}d\omega$

其中， $x(n)$为非周期序列， $X\left(e^{j\omega}\right)$为$x(n)$的频谱密度,简称频谱。

2、离散时间傅立叶变换的特点



时域 ⇄ 频域

$x(n)$	$X\left(e^{j\omega}\right)$
离散	周期
非周期	连续

2.1离散时间傅里叶变换（DTFT）

3、存在条件

傅立叶变换存在的充分条件是序列$x(n)$ 绝对可和,即：$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty$

4、常用序列的DTFT(选择、填空直接用)

$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
$\delta(n)$	1
$\delta(n-n_0)$	$e^{-j\omega n_0}$
$R_N(n)$	$\frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$
$\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & \lvert\omega\rvert<\omega_c \\ 0 & \omega_c<\lvert\omega\rvert<\pi\end{cases}$

P45

题1计算以下序列的傅立叶变换。

等比数列求和公式： $S=a_1\frac{1-q^n}{1-q}$

(1) $x(n) = R_5(n)$

(2) $x(n) = \frac{\sin(\frac{3\pi}{5}n)}{n}$

$0 \le n \le 4$

解：$(1)X(e^{j\omega}) = DTFT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega\cdot n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_5(n)\, e^{-j\omega\cdot n}$

$= \sum_{n=0}^{4} 1\, e^{-j\omega\cdot n} = \underbrace{e^{-jw0}}_{a_1} + e^{-jw} + e^{-j2w} + e^{-j3w} + e^{-j4w}$

$q = e^{-jw}$

$=\frac{1-e^{-j5w}}{1-e^{-jw}}$

$S = \frac{1-e^{-jw5}}{1-e^{-jw}}$

题1计算以下序列的傅立叶变换。

$$\frac{\sin\omega_c n}{\pi n} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

(1) $x(n) = R_5(n)$

(2) $x(n) = \frac{\sin(\frac{3\pi}{5}n)}{n}$

解：(2) $X(e^{j\omega}) = DTFT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega\cdot n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\frac{3\pi}{5}n)}{n} e^{-j\omega\cdot n}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\frac{3\pi}{5}n)}{\Pi n} \Pi\, e^{-j\omega\cdot n}$$

$$= \begin{cases} \Pi & |w| < \frac{3\Pi}{5} \\ 0 & \frac{3\Pi}{5} < |w| < \Pi \end{cases}$$

题2 x (n)={-1，0，1，$\underline{2}$，1，0，1，2，1，0，-1},该序列的DTFT用$X\left(e^{j\omega}\right)$表示，不直接求$X\left(e^{j\omega}\right)$，完成下列计算。(1)$X(e^{j0})$； (2)$\int_{-\Pi}^{\Pi} X(e^{jw})dw$； (3)$X(e^{j\Pi})$

解：定义式 $\underline{X\left(e^{j\omega}\right)} = DTFT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega\cdot n}$

$$x(n) = IDTFT\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right] = \underline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)\cdot e^{j\omega n}d\omega}$$

n=0时

n=0

$$(1)\underline{X(e^{j0})} = \sum_{n=-3}^{7} x(n) = 6$$

$$(2)\ \int_{-\Pi}^{\Pi} X(e^{jw})dw = 2\Pi\, x(0) = 4\Pi$$

$$(3)X(e^{j\Pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\underline{e^{-j\Pi}}^{\cdot n} = \sum_{n=-3}^{7}(-1)^n x(n) = 2$$

$e^{j\pi} = -1$

$(-1)^n$ -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1

-3 7

题2 x (n)={-1, 0, 1, $\underline{2}$, 1, 0, 1, 2, 1, 0, -1},该序列的DTFT用$X(e^{j\omega})$表示，不直接求$X(e^{j\omega})$，完成下列计算。(1)$X(e^{j0})$; (2)$\int_{-\Pi}^{\Pi} X(e^{jw})dw$; (3)$X(e^{j\Pi})$

解：定义式 $X(e^{j\omega}) = DTFT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega\cdot n}$

$$x(n) = IDTFT\left[X(e^{j\omega})\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

(1)$X(e^{j0}) = \sum_{n=-3}^{7} x(n) = 6$

w=0

n=0

(2) $\int_{-\Pi}^{\Pi} X(e^{jw})dw = 2\Pi\, x(0) = 4\Pi$

(3)$X(e^{j\Pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Pi\cdot n} = \sum_{n=-3}^{7} (-1)^n x(n)$

$= 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + 2 - 1 + 1 = 2$

w=π

$e^{-j\pi} = -1$

2.2DTFT的主要性质

——计算重点

1线性 $ax(n) \pm by(n) \Leftrightarrow aX\left(e^{j\omega}\right) \pm bY\left(e^{j\omega}\right)$

2时移性质 $x(n-m) \Leftrightarrow e^{-j\omega m}X\left(e^{j\omega}\right)$

3频移性质 $e^{j\omega_0 n}x(n) \Leftrightarrow X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$

4时域卷积 $x(n) * h(n) \Leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$

5频域卷积 $x(n) \cdot h(n) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right) * H\left(e^{j\omega}\right)$

6微分 $nx(n) \Leftrightarrow j\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$ (记)

7帕塞瓦定理 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$

2.2DTFT的主要性质 ——计算重点

8反转 $x(-n) \Leftrightarrow X(e^{-j\omega})$

9共轭 $x^*(n) \Leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$

$$\left.\begin{array}{l} x(-n) \Leftrightarrow X(e^{-j\omega}) \\ x^*(n) \Leftrightarrow X^*(e^{-j\omega}) \end{array}\right\} x^*(-n) \Leftrightarrow X^*(e^{j\omega})$$

题3已知x (n)有傅立叶变换$X(e^{j\omega})$。利用傅立叶变换的性质,求以下序列的傅立叶变换。

(1) $x_1(n) = x(1-n) + x(-1-n)$ (2) $x_2(n) = x^*(-n) + x(n)$

(3) $y(n) = \cos(\omega_0 n) \cdot x(n)$

$-(n-1)$ $-(n+1)$

解：(1)$X_1(e^{j\omega}) = DTFT[x_1(n)]$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(1-n) + x(-1-n)]\, e^{-j\omega\cdot n}$

$= (e^{-j\omega} + e^{j\omega})X(e^{-j\omega})$

(2)$X_2(e^{j\omega}) = DTFT[x_2(n)]$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\underline{x^*(-n)} + x(n)]\, e^{-j\omega\cdot n}$

$= \underline{X^*(e^{j\omega})} + X(e^{j\omega})$

① $e^{j\omega_0 n} = \cos\omega_0 n + j\sin\omega_0 n$ ② $e^{-j\omega_0 n} = \cos\omega_0 n - j\sin\omega_0 n$

题3已知x (n)有傅立叶变换$X(e^{j\omega})$。利用傅立叶变换的性质,求以下序列的傅立叶变换。

(1) $x_1(n) = x(1-n) + x(-1-n)$ (2) $x_2(n) = x^*(-n) + x(n)$

(3) $y(n) = \cos(\omega_0 n) \cdot x(n)$

记

解：$(3)Y(e^{j\omega}) = DTFT[y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boxed{\cos(\omega_0 n)} \cdot x(n)\ e^{-j\omega \cdot n}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boxed{\frac{e^{-j\omega_0 n} + e^{j\omega_0 n}}{2}} \cdot x(n)\ e^{-j\omega \cdot n}$$

记：

$\sin\omega_0 n = \frac{e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}}{2}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot x(n)\ [e^{-j(\omega+\omega_0)\cdot n} + e^{-j(\omega-\omega_0)\cdot n}]$$

$$= \frac{1}{2}[X(e^{j(\omega+\omega_0)}) + X(e^{j(\omega-\omega_0)})]$$

2.3DTFT的对称性质

——难点

共轭对称序列$x_e(n)$：$x_e(n) = x_e*(-n)$ 实部偶对称，虚部奇对称（实偶虚奇）

共轭反对称序列$x_o(n)$：$x_o(n) =- x_o*(-n)$ 实部奇对称，虚部偶对称（实奇虚偶）

例：$x_e(n) = (1-j, 2+j, 1, 2-j, 1+j)$ 实偶虚奇

$x_o(n) = (-1-j, -2+j, 1, 2+j, 1-j)$ 实奇虚偶

2.3DTFT的对称性质

任意序列$x(n)$总可以表示为共轭对称序列和共轭反对称序列的和: $x(n) = x_e(n) + x_o(n)$

利用共轭性质: $x^*(-n) = x_e(n) - x_o(n)$

$x(n) \rightarrow x^*(-n) \rightarrow Xe(n)、Xo(n)$

联立可得:
$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x*(-n)]$$
$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x*(-n)]$$

同理, 频域也有该性质:

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \rightarrow \begin{cases} X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \\ X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] \end{cases}$$

2.3DTFT的对称性质

总结：

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x*(-n)] \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x*(-n)] \Leftrightarrow j\mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right]$$

$$\begin{array}{ccccccccc} x(n) & = & \mathrm{Re}\,[x(n)] & + & j\mathrm{Im}\,[x(n)] & = & x_e(n) & + & x_o(n) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \end{array}$$

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) = \mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right] + j\cdot\mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right]$$

① $x(n)$ ② $x^*(-n)$ ③ $x_e(n)$、$x_o(n)$

题4求x (n)的共轭对称序列和共轭反对称序列。

$$x(n) = \{1+j, 2-j, 3+2j\}$$

解：$x^*(-n) = \{3\text{-}2j, 2+j, 1\text{-}j\}$

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x*(-n)]$$

$$x_e(n) = \{\frac{4-j}{2}, 2, \frac{4+j}{2}\}$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x*(-n)]$$

$$x_o(n) = \{\frac{3j-2}{2}, -j, \frac{3j+2}{2}\}$$