第一学期期末高等数学试卷

一、解答下列各题

(本大题共 16 小题，总计 80 分)

1、(本小题 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-12x+16}{2x^3-9x^2+12x-4}$

2、(本小题 5 分)

求 $\int\dfrac{x}{(1+x^2)^2}dx.$

3、(本小题 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x\cdot\arcsin\dfrac{1}{x}$

4、(本小题 5 分)

求 $\int\dfrac{x}{1-x}dx.$

5、(本小题 5 分)

求 $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt.$

6、(本小题 5 分)

求 $\int\cot^6 x\cdot\csc^4 x\,dx.$

7、(本小题 5 分)

求 $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}dx.$

8、(本小题 5 分)

设 $\begin{cases}x=e^t\cos t^2\\ y=e^{2t}\sin t\end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

9、(本小题 5 分)

求 $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx.$

10、(本小题 5 分)

求函数 $y=4+2x-x^2$ 的单调区间

11、(本小题 5 分)

求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{8+\sin^2 x}dx.$

12、(本小题 5 分)

设 $x(t)=e^{-kt}(3\cos\omega t+4\sin\omega t)$，求 dx.

13、(本小题 5 分)

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2+\ln y^2=x^6$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

14、(本小题 5 分)

求函数 $y=2e^x+e^{-x}$ 的极值

15、(本小题 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2+(2x+1)^2+(3x+1)^2+\cdots+(10x+1)^2}{(10x-1)(11x-1)}$

16、(本小题 5 分)

求 $\int\dfrac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}dx.$

二、解答下列各题

(本大题共 **2** 小题，总计 **14** 分)

1、(本小题 **7** 分)

某农场需建一个面积为 512平方米的矩形的晒谷场，一边可用原来的石条围沿，另三边需砌新石条围沿，问晒谷场的长和宽各为多少时，才能使材料最省.

2、(本小题 **7** 分)

求由曲线 $y=\frac{x^2}{2}$ 和 $y=\frac{x^3}{8}$ 所围成的平面图形绕 ox轴旋转所得的旋转体的体积.

三、解答下列各题

(本大题**6** 分)

设 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$，证明 $f'(x)=0$ 有且仅有三个实根.

一学期期末高数考试 (答案)

一、解答下列各题

(本大题共 **16** 小题，总计 **77** 分)

1、(本小题 **3** 分)

$$\text{解:原式}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{6x^2-18x+12}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{6x}{12x-18}$$
$$=2$$

2、(本小题 **3** 分)

$$\int\frac{x}{(1+x^2)^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}+c.$$

3、(本小题 **3** 分)

因为 $|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$ 而 $\lim_{x\to\infty}\arcsin\frac{1}{x}=0$

故 $\lim_{x\to\infty}\arctan x\cdot\arcsin\frac{1}{x}=0$

4、(本小题 **3** 分)

$$\int\frac{x}{1-x}dx$$
$$=-\int\frac{1-x-1}{1-x}dx$$
$$=-\int dx+\int\frac{dx}{1-x}$$
$$=-x-\ln|1-x|+c.$$

5、(本小题 **3** 分)

$$\text{原式}=2x\sqrt{1+x^4}$$

6、(本小题 **4** 分)

$$\int \cot^6 x \cdot \csc^4 x\,dx$$

$$= -\int \cot^6 x(1+\cot^2 x)\,d(\cot x)$$

$$= -\frac{1}{7}\cot^7 x - \frac{1}{9}\cot^9 x + c.$$

7、(本小题 4 分)

原式 $= -\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \cos\frac{1}{x}\,d(\frac{1}{x})$

$= -\sin\frac{1}{x}\Big|_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}$

$= -1$

8、(本小题 4 分)

解： $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2t}(2\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t^2 - 2t\sin t^2)}$

$= \dfrac{e^t(2\sin t + \cos t)}{(\cos t^2 - 2t\sin t^2)}$

9、(本小题 4 分)

令 $\sqrt{1+x} = u$

原式 $= 2\int_1^2 (u^4 - u^2)\,du$

$= 2(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3})\Big|_1^2$

$= \dfrac{116}{15}$

10、(本小题 5 分)

函数定义域 $(-\infty, +\infty)$

$y' = 2 - 2x = 2(1-x)$

当 $x = 1$, $y' = 0$

当 $x < 1$, $y' > 0$ 函数单调增区间为 $(-\infty, 1]$

当 $x > 1$, $y' < 0$ 函数的单调减区间为 $[1, +\infty)$

11、(本小题 5 分)

原式 $= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{d\cos x}{9 - \cos^2 x}$

$= -\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{3+\cos x}{3-\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \dfrac{1}{6}\ln 2$

12、(本小题 6 分)

$dx = x'(t)dt$

$= e^{-kt}[(4\omega - 3k)\cos\omega t - (4k + 3\omega)\sin\omega t]dt$

13、(本小题 6 分)

$2yy' + \dfrac{2y'}{y} = 6x^5$

$y' = \dfrac{3yx^5}{y^2 + 1}$

14、(本小题 6 分)

定义域 $(-\infty, +\infty)$，且连续

$$y' = 2e^{-x}(e^{2x} - \frac{1}{2})$$

驻点：$x = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$

由于 $y'' = 2e^{x} + e^{-x} > 0$

故函数有极小值，$y(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}) = 2\sqrt{2}$

15、(本小题 8 分)

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})^2+(2+\frac{1}{x})^2+(3+\frac{1}{x})^2+\cdots+(10+\frac{1}{x})^2}{(10-\frac{1}{x})(11-\frac{1}{x})}$$

$$= \frac{10\times 11\times 21}{6\times 10\times 11}$$

$$= \frac{7}{2}$$

16、(本小题 10 分)

解：$\int\frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}dx = \int\frac{\cos 2x}{1+\frac{1}{2}\sin 2x}dx$

$$= \int\frac{d(\frac{1}{2}\sin 2x+1)}{1+\frac{1}{2}\sin 2x}$$

$$= \ln\left|1+\frac{1}{2}\sin 2x\right| + c$$

二、解答下列各题

(本大题共 2 小题，总计 13 分)

1、(本小题 5 分)

设晒谷场宽为 x，则长为 $\frac{512}{x}$ 米，新砌石条围沿的总长为

$L = 2x + \frac{512}{x}$　　$(x > 0)$

$L' = 2 - \frac{512}{x^2}$　　唯一驻点　　$x = 16$

$L'' = \frac{1024}{x^3} > 0$　　即 $x = 16$ 为极小值点

故晒谷场宽为 16 米，长为 $\frac{512}{16} = 32$ 米时，可使新砌石条围沿

所用材料最省

2、(本小题 8 分)

解：$\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{8}, 8x^2 = 2x^3$　　$x_1 = 0, x_1 = 4.$

$$V_x = \pi\int_0^4\left[(\frac{x^2}{2})^2 - (\frac{x^3}{8})^2\right]dx = \pi\int_0^4(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{64})dx$$

$$= \pi(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{7}x^7)\Big|_0^4$$

$$=\pi 4^4(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})=\frac{512}{35}\pi$$

三、解答下列各题

(本 大 题 10 分)

证明: $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续, 可导, 从而在$[0,3]$; 连续, 可导.

又$f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=0$

则分别在$[0,1],[1,2],[2,3]$上对$f(x)$应用罗尔定理得, 至少存在

$\xi_1\in(0,1),\ \xi_2\in(1,2),\ \xi_3\in(2,3)$使$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$

即$f'(x)=0$至少有三个实根, 又$f'(x)=0$, 是三次方程, 它至多有三个实根,

由上述$f'(x)$有且仅有三个实根

高等数学（上）试题及答案

一、 填空题（每小题 **3** 分，本题共 **15** 分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}=$______.。

2、当 k______时，$f(x)=\begin{cases}e^x & x\le 0\\ x^2+k & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

3、设 $y=x+\ln x$,则 $\frac{dx}{dy}=$______

4、曲线 $y=e^x-x$ 在点（0，1）处的切线方程是 ____________

5、若 $\int f(x)dx=\sin 2x+C$， C 为常数，则 $f(x)=$________。

二、 单项选择题（每小题 **3** 分，本题共 **15** 分）

1、若函数 $f(x)=\frac{|x|}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$（ ）

A、0　　B、-1　　C、1　　D、不存在

2、下列变量中，是无穷小量的为（ ）

A. $\ln\frac{1}{x}(x\to 0^+)$　B. $\ln x(x\to 1)$　C. $\cos x\ (x\to 0)$　D. $\frac{x-2}{x^2-4}(x\to 2)$

3、满足方程 $f'(x)=0$ 的 x 是函数 $y=f(x)$的（ ）.

A．极大值点　B．极小值点　C．驻点　D．间断点

4、下列无穷积分收敛的是（ ）

A、$\int_0^{+\infty}\sin x dx$　　B、$\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx$　　C、$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}dx$　　D、$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

5、设空间三点的坐标分别为 M（1，1，1）、A（2，2，1）、B（2，1，2）。则$\angle AMB$ =_______

A、$\frac{\pi}{3}$　　B、$\frac{\pi}{4}$　　C、$\frac{\pi}{2}$　　D、π

三、 计算题（每小题 **7** 分，本题共 **56** 分）

1、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{\sin 2x}$。

2、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$

3、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt}{x^2}$

4、设 $y=e^5+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 y'

5、设 $f=y(x)$ 由已知 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=\arctan t\end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

6、求不定积分 $\int\frac{1}{x^2}\sin(\frac{2}{x}+3)dx$

7、求不定积分 $\int e^x\cos x dx$

8、设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+e^x} & x<0\\ \frac{1}{1+x} & x\geq 0\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x-1)dx$

四、 应用题（本题 **7** 分）

求曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 所围成图形的面积 A 以及 A 饶 y 轴旋转所产生的旋转体的体积。

五、 证明题（本题 **7** 分）

若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，证明：

在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ，使 $f'(\xi)=1$。

参考答案

一。填空题（每小题 **3** 分，本题共 **15** 分）

1、e^6　2、$k=1$.　3、$\frac{x}{1+x}$　4、$y=1$　5、$f(x)=2\cos 2x$

二．单项选择题（每小题 **3** 分，本题共 **15** 分）

1、D　2、B　3、C　4、B　5、A

三．计算题（本题共 **56** 分，每小题 **7** 分）

1.解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x(\sqrt{4+x}+2)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x(\sqrt{4+x}+2)}=\frac{1}{8}$

2.解：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$

3、解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin xe^{-\cos^2 x}}{2x}=-\frac{1}{2e}$

4、解：$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})\quad=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

5、解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{-\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{4t^3}$$

6、解：$\int\frac{1}{x^2}\sin(\frac{2}{x}+3)dx=-\frac{1}{2}\int\sin(\frac{2}{x}+3)d(\frac{2}{3}+3)=\frac{1}{2}\cos(\frac{2}{x}+3)+C$

7、　解：$\int e^x\cos xdx=\int\cos xde^x$

$=e^x\cos x+\int e^x\sin xdx\ =e^x\cos x+\int\sin xde^x$

$=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos xdx$

$=e^x(\sin x+\cos x)+C$

8、解：$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx\cdots$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+e^x}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x}$$

$$=\int_{-1}^{0}(1-\frac{e^x}{1+e^x})dx+\ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$=1-\ln(1+e^x)\Big|_{-1}^{0}+\ln 2$$

$$=1+\ln(1+e^{-1})=\ln(1+e)$$

四. 应用题（本题 **7** 分）

解：曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 的交点为（ 1，1），

于是曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 所围成图形的面积 A 为

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^2]_0^1=\frac{1}{3}$$

A 绕 y 轴旋转所产生的旋转体的体积为：

$$V=\pi\int_0^1\left((\sqrt{y})^2-y^4\right)dy=\pi\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right]_0^1=\frac{3}{10}\pi$$

五、证明题（本题 **7** 分）

证明： 设 $F(x)=f(x)-x$，

显然 $F(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续，在 $(\frac{1}{2},1)$ 内可导，

且 $F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}>0$，$F(1)=-1<0$.

由零点定理知存在 $x_1\in[\frac{1}{2},1]$，使 $F(x_1)=0$.

由 $F(0)=0$，在 $[0,x_1]$ 上应用罗尔定理知，至少存在一点

$\xi\in(0,x_1)\subset(0,1)$，使 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$，即 $f'(\xi)=1$ …