《数字信号处理》

期末不挂科

课时3　z变换与z反变换

知识点	重要程度	常考题型
3.1-3.2　Z变换的定义和收敛域	☆☆☆	选择，填空，计算
3.3　三种变换的关系	☆	理解
3.4　逆Z变换	☆☆☆	选择，填空，计算
3.5　Z变换基本性质及定理	☆☆☆	选择，填空，计算
3.6-3.8　Z变换分析系统	☆☆	选择，填空

3.1 z变换定义

若序列为x(n),则Z变换定义为:

$$X(z) = Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

使其Z变换收敛的所有Z值的集合称为X(Z)的收敛域:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$$

3.2 序列的收敛域

有限长序列

$$x(n)=\begin{cases}x(n), & n_1\le n\le n_2\\ 0, & 其他n\end{cases}$$

$$0\le |z|\le \infty,$$

右边序列

$$x(n)=\begin{cases}x(n), & n\ge n_1\\ 0, & n<n_1\end{cases}$$

$$R_{x\_}<|z|<\infty$$

左边序列

$$x(n)=\begin{cases}x(n), & n\le n_1\\ 0, & n>n_1\end{cases}$$

$$0<|z|<R_{x+}$$

双边序列

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$Rx-<|z|<Rx+$$

题1 求序列 $x(n) = \delta(n)$ 的Z变换及收敛域。

解： $$Z[\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) Z^{-n} = Z^0 = 1$$

收敛域： $0 \leq |z| \leq \infty$

题2 求序列 $x(n) = a^n u(n)$ 的Z变换及收敛域。

解：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a Z^{-1})^n = \frac{1}{1 - aZ^{-1}}$$

收敛域： $|z| > |a|$

题3 求序列 $x(n)=-b^n u(-n-1)$ 的Z变换及收敛域。

解：$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-b^n u(-n-1)Z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}-b^n Z^{-n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}-(b^{-1}Z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}-(b^{-1}Z)^n+1$$

$$=\frac{1}{1-bZ^{-1}}$$

收敛域： $|z|<|b|$

3.3 Z变换、拉普拉斯变换与DTFT的关系

$$X\left(e^{j\omega}\right)=X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

单位圆上的Z变换,就是时域信号的傅里叶变换

$$X_a(j\Omega)=X_a(s)\Big|_{s=j\Omega}$$

连续信号的傅立叶变换是虚轴上的拉普拉斯变换

$$X(z)\Big|_{z=e^{sT}}=X\left(e^{sT}\right)=\hat{X}_a(s)$$

采样序列的z变换就等于理想采样信号的拉普拉斯变换

$$z=e^{sT}$$

3.4逆 Z 变 换

——重点

部分分式展开法： $$\frac{X(z)}{Z}=\frac{A_0}{Z}+\sum_{m=1}^{N}\frac{A_m Z}{Z-Z_m}$$

通过查表求得各部分的逆变换，再相加即得到原序列。

题4已知 $X(z)=\dfrac{1}{(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$，$|z|>2$ 利用部分分式法求Z反变换

解：$X(z)=\dfrac{1}{(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})}=\dfrac{z^2}{(z-2)(z-0.5)}$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z}{(z-2)(z-0.5)}=\frac{A_1}{z-2}+\frac{A_2}{z-0.5}$$

$$X(z)=\frac{4}{3}\cdot\frac{z}{z-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z-0.5}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1-2z^{-1}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

又$|z|>2$, $\rightleftharpoons$ 查表得

$$x(n)=\begin{cases}\frac{4}{3}\cdot 2^n-\frac{1}{3}\cdot(0.5)^n, n\geq 0\\ 0, \qquad n<0\end{cases}$$

3.5 Z变换的基本性质和定理

——简化计算的工具，记

1.线 性

$$Z[x(n)] = X(z), R_{x-} < |z| < R_{x+}$$
$$Z[y(n)] = Y(z), R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

$$\Downarrow$$

$$Z[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z),$$
$$\max(R_{x-}, R_{y-}) < |z| < \min(R_{x+}, R_{y+})$$

*即满足均匀性与叠加性；

*收敛域为两者重叠部分。

3.5 Z变换的基本性质和定理

2.序列的移位

$$Z[x(n)] = X(z), R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$\Downarrow$$

$$Z[x(n-m)] = z^{-m}X(z);\ R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

题5求序列x(n)=u(n)-u(n-3)的z变换。

解： $\because Z[u(n)] = \dfrac{z}{z-1}, |z| > 1$

$$Z[u(n-3)] = z^{-3}\frac{z}{z-1} = \frac{z^{-2}}{z-1}, |z| > 1$$

$$\therefore Z[x(n)] = \frac{z}{z-1} - \frac{z^{-2}}{z-1} = \frac{z^2+z+1}{z^2}, |z| > 1$$

3.5 Z变换的基本性质和定理

3.乘以指数序列

$$Z[x(n)] = X(z), R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$\Downarrow$$

$$Z[a^n x(n)] = X(\frac{z}{a});\ |a|R_{x-} < |z| < |a|R_{x+}$$

题6求序列 $x(n)=\cos(\omega_0 n)u(n)$ 的z变换。

解：

$$\because \cos(\omega_0 n)u(n) = \frac{1}{2}[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}]u(n)$$

$$Z[a^n u(n)] = U(\frac{Z}{a}) = \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$$

$$\therefore Z[e^{j\omega_0 n}u(n)] = \frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}, |z| > \left|e^{j\omega_0}\right| = 1$$

$$Z[e^{-j\omega_0 n}u(n)] = \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}, |z| > \left|e^{-j\omega_0}\right| = 1$$

因此，$Z[\cos(\omega_0 n)u(n)] = \frac{1}{2}[\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}], |z| > 1$

4.序列乘以n

$$\boxed{Z[x(n)] = X(z), R_{x-} < |z| < R_{x+}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Z[nx(n)] = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}X(z), R_{x-} < |z| < R_{x+}}$$

3.5 Z变换的基本性质和定理

5.初值定理　　对于因果序列$x(n)$，则$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$

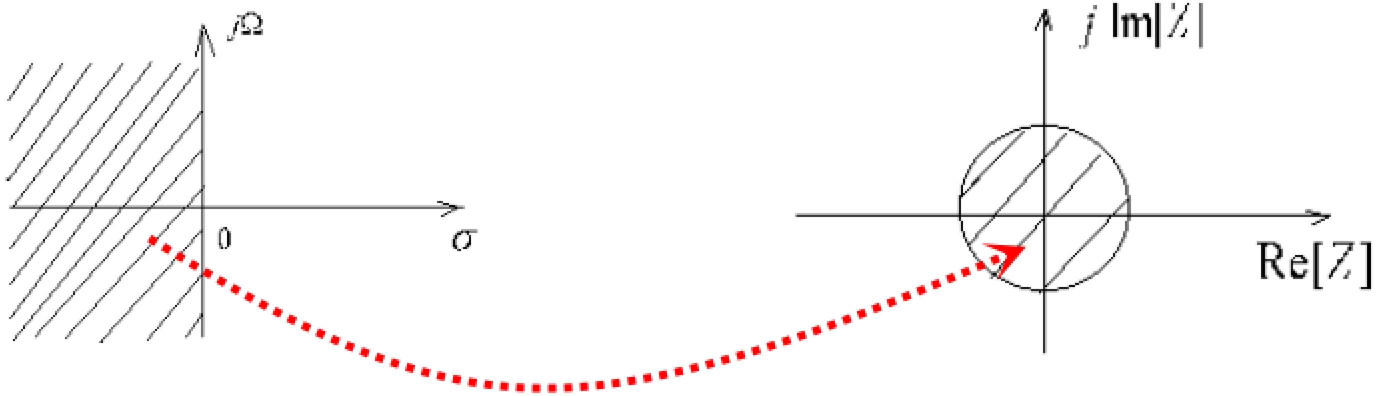
6.终值定理　　对于因果序列$x(n)$，且$X(z) = Z[x(n)]$的极点在单位圆内，且只允许单位圆上$z = 1$处有一阶极点，则有$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$

3.5 Z变换的基本性质和定理

6.终值定理

要求：S 收敛域，包含 jw 轴和 x 轴的正半部分
即极点要在x轴的负半轴（不包含 jw 轴）或者顶多一个在jw 轴上（s=0处）

映射到z变换的复频域：
单位圆内，z=1



极点所在区域示意图

3.6利用Z变换分析频域特性

由Z变换转换为傅里叶变换

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

线性移不变系统 h(n)为单位抽样响应且　y(n)=x(n)*h(n)

$$Y(z) = X(z)H(z),\ H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)Z^{-n}$$

H(Z)称作线性移不变系统的系统函数，

在单位圆上$Z = e^{jw}$的系统函数为系统的频率响应H(e^{jw})

3.7用系统函数分析系统的因果性和稳定性

因果性：n<0，h(n)=0

$$H(Z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

收敛域包含无穷大点

稳定性：$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$

收敛域包含单位圆

收敛域包含无穷大点和单位圆

题7求已知 $H(z)=\dfrac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}, 0<a<1$ 讨论其因果性和稳定性

解： 1）收敛域为$a^{-1}<|z|\le\infty$

对应的是因果系统，但不是稳定系统

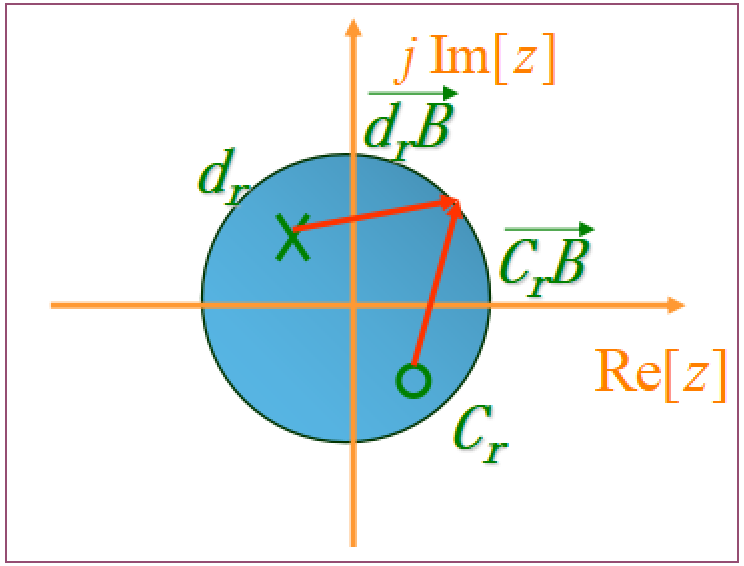
2）收敛域为$0\le|z|<a$

对应的是非因果系统且不稳定系统

3）收敛域为$a<|z|<a^{-1}$

对应的是非因果系统，但是稳定系统

3.8 用系统函数分析系统的频率特性



$$\left|H(e^{j\omega})\right| = |A|\frac{\prod_{r=1}^{M} c_r B}{\prod_{r=1}^{N} d_r B}$$

极点矢量长度最短，愈靠近单位圆，幅度峰值愈高

零点矢量长度最短，愈靠近单位圆，幅度谷值愈低