《数字信号处理》

期末不挂科

课时4　DFT和DFS

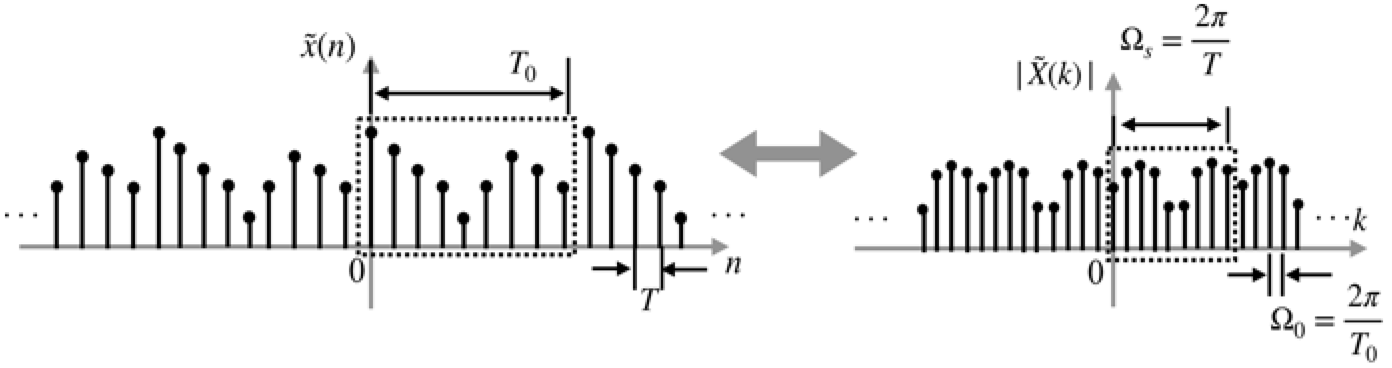
知识点	重要程度	常考题型
1DFS定义	☆	选择，填空
2DFT定义	☆☆	计算
3DFT,DTFT,Z变换三者关系	☆☆	理解
4DFT隐含周期性	☆☆	选择，填空，计算
5DFT的基本性质	☆☆☆	计算
6频域采样定理	☆☆	选择
7频谱分析三大问题	☆☆	简答

1离散傅立叶级数(DFS)

定义：周期序列 $\tilde{x}(n)$　则周期序列的离散傅立叶级数变换为

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$ (记)

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$ (记)



$W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

2离散傅立叶变换（DFT）

定义：x(n)是一个长度为M的有限长序列，则定义x(n)的N点离散傅里叶变换为

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn},\ \mathrm{k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1}$$

(记)

X(k)的离散傅里叶逆变换为

$$x(n) = \mathrm{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn},\ \mathrm{n=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1}$$

(记)

式中N称为DFT变换区间长度N≥M

$0 \le n \le 3$ $\quad W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

题1 x(n)=R4(n), 求x(n)的4点和8点DFT。

解：设变换区间N=4，则

$$X(k)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W_4^{kn}=\sum_{n=0}^{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}kn}=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}k}}=\begin{cases}4 & k=0\\ 0 & k=1,2,3\end{cases}$$

$e^{-j2\pi k} = 1$ $\quad e^{-j\frac{\pi}{2}k} = (-j)^k$

① k=0时，$\frac{0}{0}$型

$$\frac{(1+e^{-j\pi k})(1+e^{-j\frac{\pi}{2}k})(1-e^{-j\frac{\pi}{2}k})}{1-e^{-j\frac{\pi}{2}k}} = 2\times 2 = 4$$

$0 \le n \le 3$ $\qquad W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

题1 x(n)=R4(n), 求x(n)的4点和8点DFT。

解：设变换区间N=4，则

$$X(k)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W_4^{kn}=\sum_{n=0}^{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}kn}=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}k}}=\begin{cases}4 & k=0\\ 0 & k=1,2,3\end{cases}$$

$e^{-j2\pi k}=1$ $\qquad e^{-j\frac{2\pi}{4}k}=(-j)^k$

② $k=1,2,3$

分子： $1-1=0$ $\qquad \Rightarrow 0$

分母： $1-(-j)^k \neq 0$

题1 x(n)=R4(n), 求x(n)的4点和8点DFT。

解：设变换区间N=4，则

$$X(k)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W_4^{kn}=\sum_{n=0}^{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}kn}=\underline{\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}k}}}=\begin{cases}4 & k=0\\ 0 & k=1,2,3\end{cases}$$

设变换区间N=8，则

$$X(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)W_8^{kn}=\sum_{n=0}^{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{8}kn}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{8}\pi k}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)},\ k=1,2,\ldots,N-1$$

$$=\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{8}k\cdot 4}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{8}k}}=\frac{1-e^{-j\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$

3 DFT与傅里叶变换和Z变换的关系

FT

$$X(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}\,[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Z

$$X(z) = Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}\,,\ \mathrm{k}=0, 1, \cdots, \mathrm{N}-1$$

DFT

$$\Rightarrow \begin{cases} X(e^{j\omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} \\ X(k) = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \\ X(k) = X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \end{cases}$$

① 定义

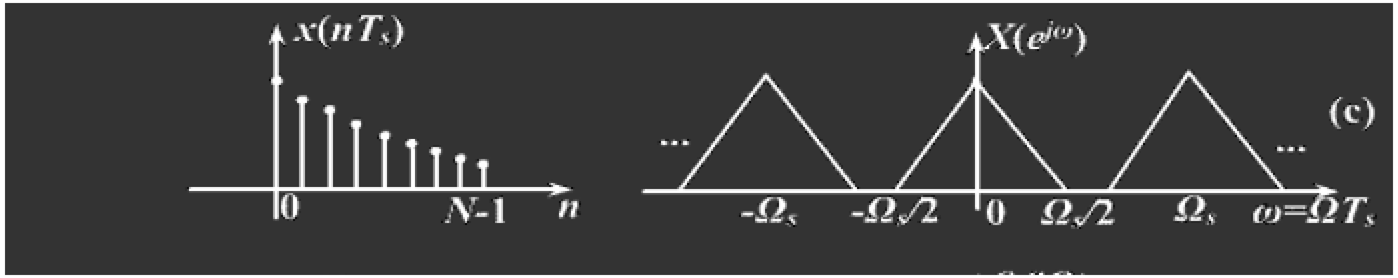
② **总结**：DTFT 在 [0,2Π]上N点等间隔采样得到DFT

③ Z变换 在 单位圆上N点等间隔采样得到DFT

3 DFT与傅里叶变换和Z变换的关系

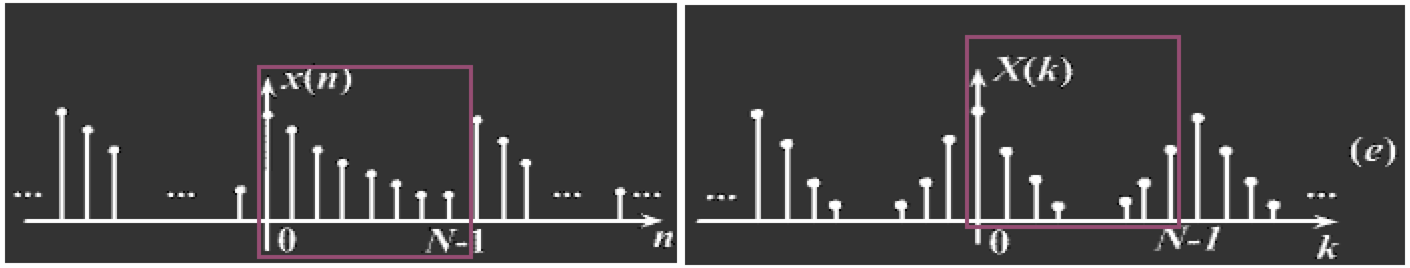
时域　　　　　　　　频域

FT



$(\Omega s=2\pi/T_S)$

DTFT



$(\Omega_0=2\pi/T)$

DFT

4DFT的隐含周期性

由W_N^{kn}的周期性，使$X(k)$隐含周期性，周期为N。对任意整数m， 总有

$$W_N^K = W_N^{(K+mN)}, K, m, N\text{均为整数}$$

$$X(K+mN) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(K+mN)n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{Kn}$$

$$= X(K)$$

4DFT的隐含周期性

定义

x(n)：有限长序列，n=0,1,2，...N-1

$\tilde{x}(n)$：无限长，周期为N

$$\tilde{x}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN)$$ → 周期延拓

$$x(n)=\tilde{x}(n)\cdot \underline{R_N(n)}$$ → 主值序列

通常表示为：$\underline{\tilde{x}(n)=x((n))_N}$ △

5离散傅立叶变换的性质

线性性质：

$$x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$$

$$X_3(k) = aX_1(k) + bX_2(k)$$

圆周移位性质(循环移位):

序列循环移位： $x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$

时域循环移位： $y(n) = x((n+m))_N R_N(n) \Leftrightarrow Y(k) = X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}km} = X(k)W_N^{-km}$

频域圆周移位性质： $Y(k) = X((k+l))_N R_N(k) \Leftrightarrow y(n) = x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} = x(n)W_N^{nl}$

5离散傅立叶变换的性质

循环卷积定理：有限长序列$x_1(n)$和$x_2(n)$，长度为N_1，N_2，N点循环卷积后，

$$x(n)=\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)\, x_2((n-m))_N R_N(n)$$

题2 $x_1(n)=\{1,2,2,1\}$, $x_2(n)=\{1,-1,-1,1\}$,请计算：

(1)线性卷积 (2)5点循环卷积 (3)4点循环卷积 (4)7点循环卷积

解：(1)$\{1,\ 1,\ -1,\ -2,\ -1,\ 1,\ 1\}$ 列表法

结果

名称	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$y(n)=x_1(n)*x_2(n)$
① $x_1(m)$	0	0	0	1	2	2	1	0	0	0	0	\
$x_2(m)$	0	0	0	1	-1	-1	1	0	0	0	0	\
② $x_2(-m)$	1	-1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	$y(0)$ =1
$x_2(1-m)$	0	1	-1	-1	1	0	0	0	0	0	0	$y(1)$ =1
$x_2(2-m)$	0	0	1	-1	-1	1	0	0	0	0	0	$y(2)$ =-1
$x_2(3-m)$	0	0	0	1	-1	-1	1	0	0	0	0	$y(3)$ =-2
$x_2(4-m)$	0	0	0	0	1	-1	-1	1	0	0	0	$y(4)$ =-1
$x_2(5-m)$	0	0	0	0	0	1	-1	-1	1	0	0	$y(5)$ =1
$x_2(6-m)$	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	1	0	$y(6)$ =1
$x_2(7-m)$	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	1	$y(7)$ =0

题2 $x_1(n)=\{1,2,2,1\}$, $x_2(n)=\{1,-1,-1,1\}$,请计算: 4 4

(1)线性卷积 (3)4点循环卷积

(2)5点循环卷积 (4)7点循环卷积

4+4-1=7

解: (1)$\{1, 1, -1, -2, -1, 1, 1\}$ 7

(2)$\{2,2,-1,-2,-1\}$

(3)$\{0,2,0,-2\}$

(4)$\{1, 1, -1, -2, -1, 1, 1\}$ 7

N ≥ 线性卷积长度

循环卷积 = 线性卷积

5离散傅立叶变换的性质

共轭对称性： $x_{ep}(n)=\frac{1}{2}[x((n))_N+x^*((N-n))_N]R_N(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(N-n)]$

共轭反对称性： $x_{op}(n)=\frac{1}{2}[x((n))_N-x^*((N-n))_N]R_N(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(N-n)]$

复数序列：

时 $x(n)=\mathrm{Re}[x(n)]+j\cdot Im[x(n)]=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$

$$\Updownarrow \quad \Updownarrow \quad \Updownarrow \quad \Updownarrow \quad \Updownarrow$$

频 $X(k)=X_{ep}(k)+X_{op}(k)=\mathrm{Re}[X(k)]+j\cdot Im[X(k)]$

频域：
$$\begin{cases} X_e(\mathrm{k})=\frac{1}{2}[X(\mathrm{k})+X^*(\mathrm{k})] \\ X_o(\mathrm{k})=\frac{1}{2}[X(\mathrm{k})-X^*(\mathrm{k})] \end{cases}$$

$x(n) \longrightarrow x^*(N-n) \longrightarrow x_{ep}(n)$、$x_{op}(n)$

题3 已知$x(n) = \{2 + j, 4 + 2j, 3 + 3j\}$,试求$x_{ep}(n)$、$x_{op}(n)$。

解: $x^*(N-n) = \{3 - 3j, 4 - 2j, 2 - j\}$

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)] = \{\frac{5-2j}{2}, 4, \frac{5+2j}{2}\}$$

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)] = \{\frac{-1+4j}{2}, 2j, \frac{1+4j}{2}\}$$

题4已知$x_1(n)$,$x_2(n)$都是N点实序列,$X_1(k)$ 为$x_1(n)$的N点DFT,$X_2(k)$为$x_2(n)$的N点DFT;试用一次N点DFT运算同时计算$X_1(k)$与$X_2(k)$。

解:

$$x(n) = \mathrm{Re}\,[\,x(n)] + j\cdot Im[x(n)] = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$

$$\Updownarrow \qquad \Updownarrow \qquad \Updownarrow \qquad \Updownarrow \qquad \Updownarrow$$

$$X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k) = \mathrm{Re}\,[\,X(k)] + j\cdot Im[X(k)]$$

令$x(n) = x_1(n) + jx_2(n)$

$x(n) = x_1(n) + jx_2(n)$

$$X_1(k) = X_{ep}(k) = \frac{1}{2}[X(\mathrm{k}) + X^*(\mathrm{k})]$$

$X(k) = DFT[x(n)]$

$$X_2(k) = X_{op}(k) = \frac{1}{2}[X(\mathrm{k}) - X^*(\mathrm{k})]$$

6频域采样定理

时域采样定理

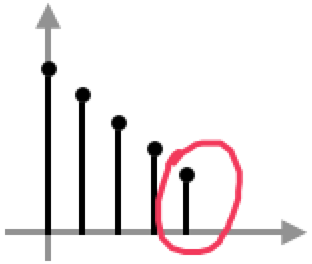
当采样频率大于等于奈奎斯特采样频率，即 $f_s \geq 2f_h$ ，则可无失真恢复。

频域采样定理

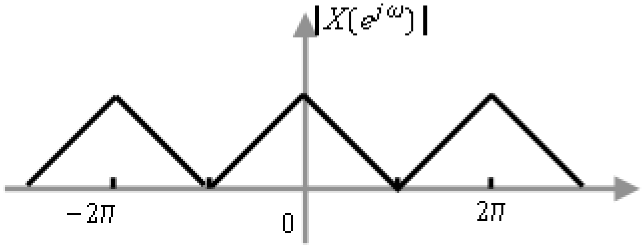
序列x(n)长度为M，当频域采样点数 $N \geq M$ 时，可无失真恢复。

内插公式和内插函数（了解即可）

6频域采样定理

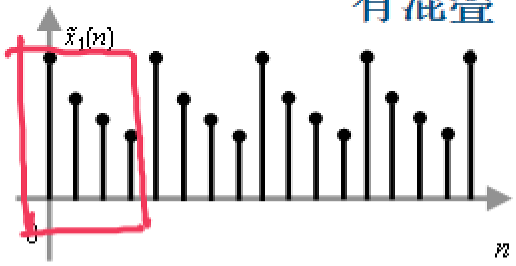


5点序列

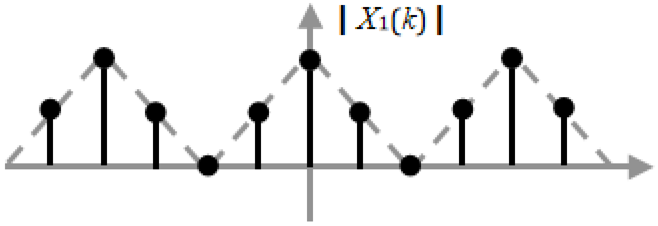


$N=5$

有混叠



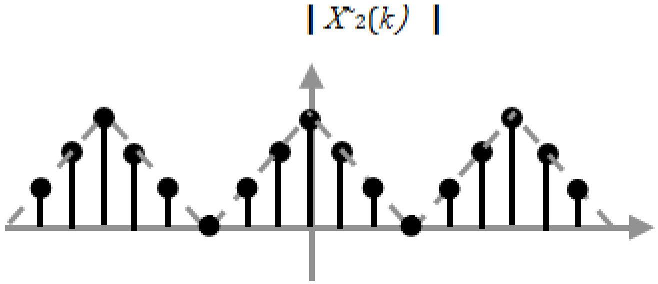
4点采样



$N=4<5$

无混叠

6点采样



$N=6>5$

7频谱分析三大问题

——简答题（背）

$f_s \geq 2f_h$

名称	成因	解决方法	备注
混叠失真	时域采样	增大采样频率,加装防混叠滤波器 f_s LPF	可以消除
频谱泄漏	时域截断	增加数据截取长度,改变窗函数形状(减小旁瓣)	不可以消除,只可以降低
栅栏效应	频域采样	增加频率采样点数,在有效数据不变时尾部补零 N	不可以消除,只可以降低