第一章　极限与连续

极限存在准则 $\begin{cases}\text{单调有界必有极限}\\ \text{夹逼定理}\end{cases}$

两类重要极限 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}\end{cases}$

无穷小与无穷大
- 性质
  - 有限个无穷小的和,积仍是无穷小
  - 无穷小与有界量的积仍是无穷小
- 比较 (高阶, 低阶,同阶,等价,k 阶)

常用等价无穷小

当 $x \to 0$,

$e^x - 1 \sim x$　　$a^x - 1 \sim x \ln a$

$\sin x \sim x$　　$\arcsin x \sim x$

$\tan x \sim x$　　$\arctan x \sim x$

$\ln(1+x) \sim x$　　$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$　　$\tan x - \sin x \sim \dfrac{x^3}{2}$

函数极限的求法

(1) 消去零因子法; (2) 同除最高次幂; (3) 通分;

(4) 同乘共轭因式; (5) 利用无穷小运算性质

(6) 复合函数求极限法则

(7) 利用左、右极限求分段函数极限;

(8) 利用夹逼定理;

(9) 利用两类重要极限;

(10) 利用等价无穷小代换;

(11) 利用连续函数的性质(代入法);

(12) 利用洛必达法则.

洛必达法则+等价无穷小代换

洛必达法则+变上限积分求导

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})(e^{\tan x}-e^{\sin x})}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}$$

当 $x\to 0$, $e^{\tan x-\sin x}-1\sim \tan x-\sin x$,

故原式 $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{e^{\sin x}(\tan x-\sin x)}=\frac{1}{2}$$

两对重要的单侧极限

$$(a>1) \quad \lim_{x\to 0^-} a^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} a^{\frac{1}{x}} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 0^+} \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

一类需要注意的极限

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -1, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1.$$

连续的定义
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- 左连续、右连续

间断点的分类
- 第一类间断 (可去型, 跳跃型)
- 第二类间断 (无穷型, 振荡型)

闭区间连续函数的性质
- 最大,最小值定理
- 有界性
- 介值定理,零点定理

例 求 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的间断点, 并指出其类型.

解 当$x=0, x=1$时,函数无定义,是函数的间断点.

$x=0$, 由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=\infty$,

所以 $x=0$ 是函数的第二类间断点, 且是无穷型.

$x=1$, 由于 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1-e^{\boxed{\frac{x}{1-x}}\to+\infty}}=0$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1-e^{\boxed{\frac{x}{1-x}}\to-\infty}}=1$$

所以$x=1$是函数的第一类间断点, 且是跳跃型.

例求 $f(x)=\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}$ 的间断点,并判别其类型.

解 $x=-1, x=1, x=0$是间断点,

$x=-1$, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(\cancel{1+x})\sin x}{|x|(\cancel{x+1})(x-1)}=\dfrac{1}{2}\sin 1$,

$x=-1$为第一类可去间断点

$x=1$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$,

$x=1$为第二类无穷间断点

$x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$.

$x=0$为第一类跳跃间断点

例 求$y=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}+\sin(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}$的间断点,

并判断其类型.

解： 可知$x=0$，$x=1$是可能的间断点.

(1) 在$x=0$处，

$$\lim_{x\to 0^-} y=-1+\sin^2(-1),\ \lim_{x\to 0^+} y=1+\sin^2(-1)$$

因在$x=0$处的左右极限都存在,但不相等，

所以$x=0$为函数的第一类间断点,且是跳跃间断点.

(2) 在$x=1$处，

$$\lim_{x\to 1} y = \lim_{x\to 1}\left[\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}+\sin(x-1)\sin\frac{1}{x-1}\right]=\frac{1}{3}$$

即在$x=1$处函数的左右极限都存在且相等，

所以$x=1$是函数的第一类间断点，且是可去间断点

例 设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a(1-\cos x)}{x^2} & x<0 \\ 1, & x=0 \\ \ln(b+x^2), & x>0 \end{cases}$

在$x=0$连续, 则$a=$ __2__, $b=$__e__.

提示: $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a(1-\cos x)}{x^2}=\dfrac{a}{2}$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\ln(b+x^2)=\ln b$$

$$\frac{a}{2}=1=\ln b$$

$$\boxed{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}$$

例 讨论 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

在$x=0$处的连续性与可导性.

例 如果 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{ax}, & x\leq 0 \\ b(1-x^2), & x>0 \end{cases}$ 处处可导,那么

(　　)

$(A)\quad a=b=1;$　　　$(B)\quad a=-2, b=-1;$

$(C)\quad a=1, b=0;$　　　$(D)\quad a=0, b=1.$

第二章　导数与微分

导数
- 定义
  - 左导数 $f'_-(x_0)$, 右导数 $f'_+(x_0)$
  - 导数存在的充要条件
- 几何意义　切线斜率 $k = f'(x_0)$
- 可导性与连续性的关系　可导 $\Rightarrow$ 连续

微分
- 求微分　$\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x$
- 可导与微分的关系　可导 $\Leftrightarrow$ 可微

$$
\text{求导数方法}\begin{cases}
\text{按定义求导} \\
\text{复合函数求导} \\
\text{隐函数,参数方程求导} \\
\text{对数法求导} \\
\text{分段函数在分段点求导} \\
\text{高阶导数}\left(\sin x, \cos x, e^{x}, \dfrac{1}{1-x} \cdots\right)
\end{cases}
$$

参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$求导数:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

第三章　微分中值定理及其应用

- 中值定理
  - 罗尔定理
  - 拉格朗日中值定理
  - 柯西中值定理
  - 泰勒定理(泰勒公式,麦克劳林公式)
- 洛必达法则(计算$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty,1^{\infty}$等未定型极限)
- 中值定理的应用
  - 证明不等式
  - 讨论方程根的存在与徼

函数性态

- 函数的单调性(利用导数判断)
- 函数的极值
  - 驻点
  - 极值存在的必要条件
  - 极值存在的充分条件
- 函数的凹凸性 (拐点,凹凸性和判别法)
- 函数的最大最小值
- 函数的渐近线 (水平,垂直)

带Peano型余项的泰勒公式

设 $f(x)$ 在含 x_0 的区间 (a,b) 内有 n 阶连续导数, 则对于 $x \in (a,b)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{2}(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n].$$

常用函数的麦克劳林公式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

洛必达法则

基本类型： $\dfrac{0}{0}$型， $\dfrac{\infty}{\infty}$型

变型： $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$型

法则： $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

注 (1) 当上式右端极限存在时，才能用此法则，

(2) 在求极限过程中，可能要多次使用此法则，

(3) 在使用中，要进行适当的化简，

(4) 在使用中，注意和其它求极限方法相结合.

定理(第一充分条件) 设 $f(x)$在邻域$U(x_0)$内,

(a) 当$x < x_0$, 有 $f'(x) > 0$; 而当$x > x_0$, 有 $f'(x) < 0$, 则$f(x)$在x_0处取极大值

(b) 当$x < x_0$, 有 $f'(x) < 0$; 而当$x > x_0$, 有 $f'(x) > 0$, 则$f(x)$在x_0处取极小值

(c) 若 $f(x)$在邻域$U(x_0)$内符号相同,则 $f(x)$在x_0处无极值

定理(第二充分条件)

设 $f(x)$在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, 则

(a) 当$f''(x_0)<0$, $f(x)$在 x_0 处取得极大值

(b) 当$f''(x_0)>0$, $f(x)$在 x_0 处取得极小值

求极值的步骤:

$a.$ 求导数 $f'(x)$;

$b.$ 求驻点(方程 $f'(x)=0$ 的根) 及 $f'(x)$ 不存在的点.

$c.$ 检查 $f'(x)$ 在 b 中所有点左右的正负,

或 $f''(x)$ 在该点的符号, 判断极值点

$d.$ 求极值.

渐近线的求法

(a) 水平渐近线 若函数$f(x)$满足

$$\lim_{x\to\infty(-\infty,+\infty)} f(x)=a,$$

则函数$f(x)$的曲线有水平渐近线$y=a$.

(b) 垂直渐近线 若函数$f(x)$满足

$$\lim_{x\to x_0(x_0^-,x_0^+)} f(x)=\infty,$$

则函数$f(x)$的曲线有垂直渐近线$x=x_0$.

计算题

1. 设 $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} & x \le 1 \\ ax+b & x > 1 \end{cases}$, 已知函数在 $x=1$处可导,确定 a,b.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})\right]$

3.求极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x - 1 - x)^{\frac{1}{\ln x}}$

计算题解答

1. 由连续性,有 $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$

$$\therefore a+b=1 \qquad (1)$$

由可导性,有 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$\therefore \lim_{x\to1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\dfrac{2}{1+x^2}-1}{x-1}$$

$$\therefore a=\lim_{x\to1^-}\frac{\dfrac{2}{1+x^2}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-4x}{(1+x^2)^2}=-1$$

$a=-1$ 由 ① $\Rightarrow b=2.$

2. $$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

令 $t=\frac{1}{x}$，则原式 $$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{t}\ln(1+t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1+t-1}{2t(1+t)}=\frac{1}{2}$$

3. 解(1)：

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x+e^x\cos x-1-2x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)-2}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1}{3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x\sin x+e^x\cos x}{3}$$

$$=\frac{1}{3}$$

解法2：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\mathrm{e}^x(\sin x-x)}{x^3}+\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x}$$

$$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\mathrm{e}^x-1-x)^{\frac{1}{\ln x}}$ $\quad(0^0)$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\mathrm{e}^x-1-x)}{\ln x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-1-x}}{\frac{1}{x}}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x(\mathrm{e}^x-1)}{\mathrm{e}^x-1-x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}}=\mathrm{e}^{1+\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}}$$

$\because x\to 0$时，$\mathrm{e}^x-1\sim x$

$\therefore$上式$=\mathrm{e}^{1+\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^x}=\mathrm{e}^2$

第四章　不定积分

- 基本概念 (原函数,不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$)
- 基本性质(与求导,微分运算间关系;线性可加性)
- 积分法
  - 换元积分法
    - 第一类换元(凑微分法)
    - 第二类换元(三角代换,倒代换)
  - 分部积分法
  - 有理函数的积分
    - 四种基本形式的积分
    - 可化为有理函数的积分

例 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$ 分子分母同除以 x^2

解 原式$=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)+C$$

例 $\int \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C$$

$(x \neq 0)$

例 求 $\int \max\{1,|x|\}dx$.

解 设 $f(x)=\max\{1,|x|\}$, 则 $f(x)=\begin{cases}-x, & x<-1\\ 1, & -1\le x\le 1,\\ x, & x>1\end{cases}$

$\because f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续, 则必存在原函数$F(x)$,

$$F(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+C_1, & x<-1\\ x+C_2, & -1\le x\le 1.\\ \dfrac{1}{2}x^2+C_3, & x>1\end{cases}$$

又$\because F(x)$须处处连续，有

$\lim\limits_{x\to -1^+}(x+C_2)=\lim\limits_{x\to -1^-}(-\frac{1}{2}x^2+C_1)$, 即 $-1+C_2=-\frac{1}{2}+C_1$,

$\lim\limits_{x\to 1^+}(\frac{1}{2}x^2+C_3)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+C_2)$, 即 $\frac{1}{2}+C_3=1+C_2$,

联立并令 $C_1=C$, 可得 $C_2=\frac{1}{2}+C$, $C_3=1+C$.

$$故\int \max\{1,|x|\}\mathrm{d}x=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+C, & x<-1\\ x+\frac{1}{2}+C, & -1\le x\le 1.\\ \frac{1}{2}x^2+1+C, & x>1\end{cases}$$

第五章　定积分

- 定积分的定义 几何意义
- 基本性质 (线性, 区间可加性,比较性质)
- 基本公式
  - 变上限函数及其导数(和求极限结合)
  - $N-L$公式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b$
- 定积分估值定理$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)$

- 计算
  - 换元法 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x=\varphi(t)}{=\!=} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$
  - 分部积分法 $\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$
- 广义积分
  - 基本概念
    - 无穷限的广义积分
    - 无界函数的广义积分
  - 计算

第六章　定积分的应用

几何应用

- 平面图形的面积(直角,参数,极坐标)
- 体积
  - 旋转体体积
  - 截面面积已知立体的体积
- 平面曲线的弧长(直角,参数,极坐标)