《高等数学（一）》期末第一套复习题

一、选择题

1、极限 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$ 的结果是 （ C ）

（A）0 （B）∞ （C）$\frac{1}{2}$ （D）不存在

2、方程 $x^3-3x+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内 （ B ）

（A）无实根 （B）有唯一实根 （C）有两个实根 （D）有三个实根

3、 $f(x)$ 是连续函数， 则 $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的 （ C ）

（A）一个原函数； (B) 一个导函数； (C) 全体原函数； (D) 全体导函数；

4、由曲线 $y=\sin x\ (0<x<\pi)$ 和直线 $y=0$ 所围的面积是 （ C ）

（A）$1/2$ (B) 1 (C) 2 (D) π

5、微分方程 $y'=x^2$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=2$ 的特解是 （ D ）

（A）x^3 （B）$\frac{1}{3}+x^3$ （C）x^3+2 （D）$\frac{1}{3}x^3+2$

6、下列变量中，是无穷小量的为（ A ）

(A) $\ln x\,(x\to 1)$ (B) $\ln\frac{1}{x}\,(x\to 0^+)$ (C) $\cos x\ (x\to 0)$ (D) $\frac{x-2}{x^2-4}\,(x\to 2)$

7、极限 $\lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sin x)$ 的结果是（ C ）

（A）0 （B）1 （C）-1 （D）不存在

8、函数 $y=e^x+\arctan x$ 在区间 $[-1,1]$ 上 （ A ）

（A）单调增加 （B）单调减小 （C）无最大值 （D）无最小值

9、不定积分 $\int\frac{x}{x^2+1}dx=$ （ D ）

(A) $\arctan x^2+C$ (B) $\ln(x^2+1)+C$ (C) $\frac{1}{2}\arctan x+C$ (D) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

10、由曲线 $y=e^x\ (0<x<1)$ 和直线 $y=0$ 所围的面积是 （ A ）

（A）$e-1$ (B) 1 (C) 2 (D) e

11、微分方程 $\frac{dy}{dx}=xy$ 的通解为　　　　（ B 　）

（A） $y=Ce^{2x}$ （B） $y=Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ （C） $y=e^{Cx}$ （D） $y=Ce^{x^2}$

12、下列函数中哪一个是微分方程 $y'-3x^2=0$ 的解（ D 　）

（A） $y=x^2$ （B） $y=-x^3$ （C） $y=-3x^2$ （D） $y=x^3$

13、函数 $y=\sin x+\cos x+1$ 是　（ C 　）

(A) 奇函数；(B) 偶函数；(C) 非奇非偶函数；(D) 既是奇函数又是偶函数 .

14、当 $x\to 0$ 时，下列是无穷小量的是　　（ B 　）

（A） e^{x+1} (B) $\ln(x+1)$ (C) $\sin(x+1)$ (D) $\sqrt{x+1}$

15、当 $x\to\infty$ 时，下列函数中有极限的是　　　（ A 　）

（A） $\frac{x+1}{x^2-1}$ (B) $\cos x$ (C) $\frac{1}{e^x}$ (D) $\arctan x$

16、方程 $x^3+px+1=0(p>0)$ 的实根个数是　（ B 　）

（A）零个　（B）一个　（C）二个　（D）三个

17、$\int(\frac{1}{1+x^2})'dx=$（ B 　）

（A） $\frac{1}{1+x^2}$ （B） $\frac{1}{1+x^2}+C$ （C） $\arctan x$ （D） $\arctan x+c$

18、定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是　　　　（ C 　）

（A）一个函数族　（B） $f(x)$ 的的一个原函数　（C）一个常数　（D）一个非负常数

二、填空题

1、$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$ $\underline{\quad\frac{1}{2}\quad}$

2、若 $f(x)=e^{2x}+2$，则 $f'(0)=$ $\underline{\quad 2\quad}$

3、$\int_{-1}^{1}(x^3\cos x-5x+1)dx=$ $\underline{\quad 2\quad}$

4、$\int e^t dx=$ $\underline{\quad e^t x+C\quad}$

5、微分方程 $y'-y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=2$ 的特解为 $\underline{\quad y=2e^x\quad}$

6、 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x+3}=$ ____0____

7、 极限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}=$ ____$\dfrac{3}{4}$____

8、设 $y=x\sin x+1$,则 $f'(\dfrac{\pi}{2})=$ ____1____

9、 $\int_{-1}^{1}(x\cos x+1)dx=$ ____2____

10、 $\int\dfrac{3}{1+x^2}dx=$ ____$3\arctan x+C$____

11、微分方程 $ydy=xdx$ 的通解为 ____$y^2=x^2+C$____

12、 $\int_{-1}^{1}5x^4dx=$ ____2____

13、 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin 2x}{x}=$ ____1____

14、设 $y=\cos x^2$，则 $dy=$ ____$-2x\sin x^2dx$____

15、 设 $y=x\cos x-3$,则 $f'(\pi)=$ ____-1____

16、不定积分 $\int e^x de^x=$ ____$\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$____

17、微分方程 $y'=e^{-2x}$ 的通解为 ____$y=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+C$____

18、微分方程 $\ln y'=x$ 的通解是 ____$y=e^x+C$____

三、解答题

1、（本题满分 9 分）求函数 $y=\sqrt{x-1}+6\sqrt{2-x}$ 的定义域。

2、（本题满分 9 分）设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-110)$，求 $f'(0)$。

3、（本题满分 10 分）设曲线方程为 $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+6x+1$, 求曲线在点 $(0,1)$ 处的切线方程。

4、（本题满分 10 分）求由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的平面区域的面积。

5、（本题满分 10 分）讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\geq 1 \\ 3x & x<1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处的连续性。

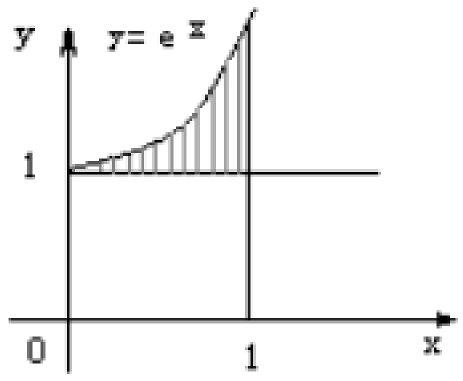
6、（本题满分 10 分）求微分方程 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=2x+3 \\ y|_{x=1}=3 \end{cases}$ 的特解。

7、（本题满分 9 分）求函数 $y=2\sqrt{x-4}+\cos\sqrt{5-x}$ 的定义域。

8、（本题满分 9 分）设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-130)$，求 $f'(0)$。

9、（本题满分 10 分）设平面曲线方程为 $x^2-2xy+3y^2=3$，求曲线在点（ 2，1）处的切线方程。

10、（本题满分 10 分）求由曲线 $y=e^x$ 及直线 $y=1$ 和 $x=1$ 所围成的平面图形的面积（如下图）.



11、（本题满分 10 分）讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ e^x-1 & x\geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性。

12、（本题满分 10 分）求方程 $(1+y^2)dx-(1+x^2)dy=0$ 的通解。

13、（本题满分 9 分）证明方程 $x^5-7x=4$ 在区间 $(1,2)$ 内至少有一个实根。

14、（本题满分 9 分）设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-120)$，求 $f'(0)$。

15、（本题满分 10 分）求曲线 $e^y+xy=e$ 在点（ 0，1）处的法线方程。

16、（本题满分 10 分）求曲线 $y=\cos x$ 与直线 $y=2, x=\dfrac{\pi}{2}$ 及 y 轴所围成平面图形的面积。

17、（本题满分 10 分）讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \cos x & x\geq 0 \\ x+1 & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性。

18、（本题满分 10 分）求微分方程 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=1-x+y^2-xy^2 \\ y|_{x=0}=1 \end{cases}$ 的特解。

《高等数学（一）》期末复习题答案

三、解答题

1、（本题满分　9 分）

解：由题意可得, $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x\geq 1 \\ x\leq 2 \end{cases}$

所以函数的定义域为　$[1\ ,\ 2]$

2、（本题满分　9 分）

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-110)$

$=110!$

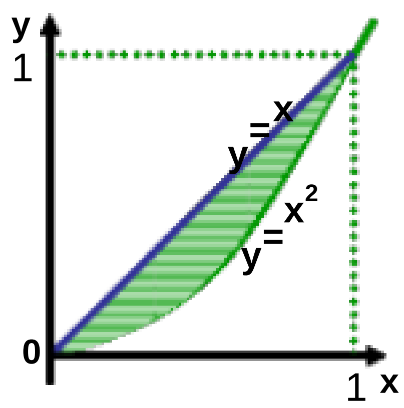
3、（本题满分　10 分）

解：方程两端对　x 求导，得　$y'=x^2+x+6$

将 $x=0$ 代入上式，得　$y'\big|_{(0,1)}=6$

从而可得：切线方程为　$y-1=6(x-0)$　即 $y=6x+1$

4、（本题满分　10 分）



解：作平面区域，如图示

解方程组 $\begin{cases} y=x \\ y=x^2 \end{cases}$ 得交点坐标：（0，0），（1，1）

所求阴影部分的面积为：　$S=\int_0^1(x-x^2)dx=\left[\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1=\dfrac{1}{6}$

5、（本题满分　10 分）

解：∵　$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}x+2=3=f(1)$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3x = 3 = f(1)$$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=1$ 处是连续的。

6、（本题满分 10 分）

解：将原方程化为 $dy=(2x+3)dx$

两边求不定积分，得 $\int dy=\int(2x+3)dx$，于是 $y=x^2+3x+C$

将 $y|_{x=1}=3$ 代入上式，有 $3=1+3+C$，所以 $C=-1$，

故原方程的特解为 $y=x^2+3x-1$。

7、（本题满分 9 分）

解：由题意可得，$\begin{cases} x-4\ge 0 \\ 5-x\ge 0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x\ge 4 \\ x\le 5 \end{cases}$

所以函数的定义域为 [4，5]

8、（本题满分 9 分）

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-130)$

$=130!$

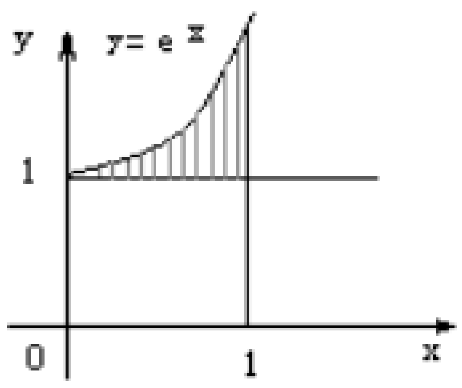
9、（本题满分 10 分）

解：方程两端对 x 求导，得 $2x-2(y+xy')+6yy'=0$

将点（2，1）代入上式，得 $y'|_{(2,1)}=-1$

从而可得：切线方程为 $y-1=-(x-2)$ 即 $x+y-3=0$

10、（本题满分 10 分）



解：所求阴影部分的面积为 $S=\int_0^1 (e^x-1)dx$

$$=(e^x-x)\Big|_0^1$$

$$=e-2$$

11、（本题满分 10 分）

解： $\because$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^x-1=0=f(0)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x=0=f(0)$$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的。

12、（本题满分 10 分）

解：由方程 $(1+y^2)dx-(1+x^2)dy=0$，得

$$\frac{dy}{1+y^2}=\frac{dx}{1+x^2}$$

两边积分： $\int\frac{dy}{1+y^2}=\int\frac{dx}{1+x^2}$

得 $\arctan y=\arctan x+C$

所以原方程的通解为： $\arctan y=\arctan x+C$

或 $y=\tan(\arctan x+C)$

13、（本题满分 9 分）

解：令 $F(x)=x^5-7x-4$， $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续

$F(1)=-10<0$，

$F(2)=14>0$

由零点定理可得，在区间 $(1,2)$ 内至少有一个 ξ，使得函数

$F(\xi)=\xi^5-7\xi-4=0$，

即方程 $x^5-7x-4=0$ 在区间 $(1,2)$ 内至少有一个实根。

14、（本题满分 9 分）

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-120)$

$=120!$

15、（本题满分 10 分）

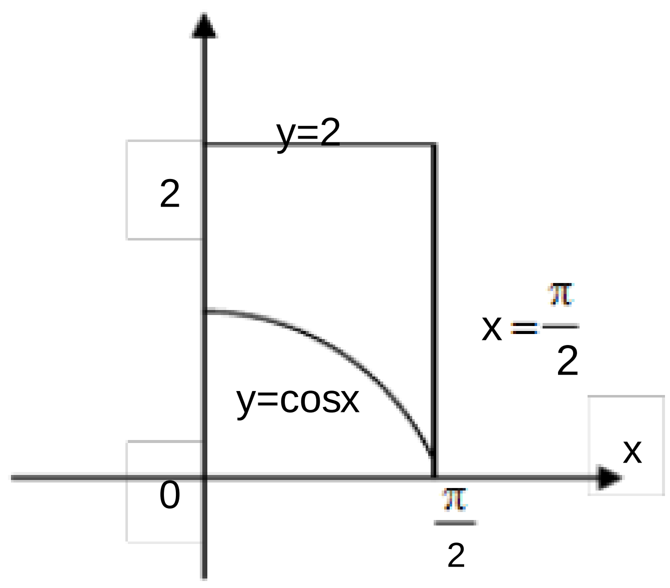
解：方程两端对 x 求导，得 $e^y y'+y+xy'=0$

将点（0，1）代入上式，得 $y'\big|_{(0,1)}=-\dfrac{1}{e}$

从而可得： 法线方程为 $y=ex+1$

16、（本题满分 10 分）

解：作平面图形，如图示



$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-\cos x)dx$

$=(2x-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=(2\cdot\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2})-0=\pi-1$

17、（本题满分 10 分）

解：$\because$ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1=f(0)$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的。

18、（本题满分 10 分）

解：将原方程化为 $\dfrac{dy}{dx}=(1-x)(1+y^2)$ 或 $\dfrac{dy}{1+y^2}=(1-x)dx$

两边求不定积分，得 $\arctan y = x - \frac{1}{2}x^2 + C$

由 $y|_{x=0} = 1$ 得到 $C = \frac{\pi}{4}$

故原方程的特解为 $\arctan y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}$

或 $y = \tan(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4})$.