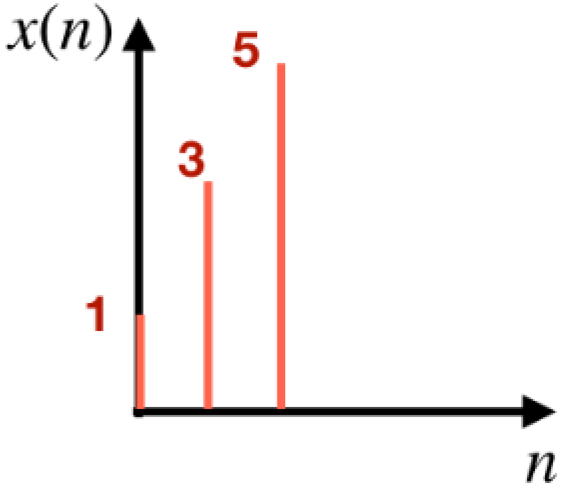
《数字信号处理》

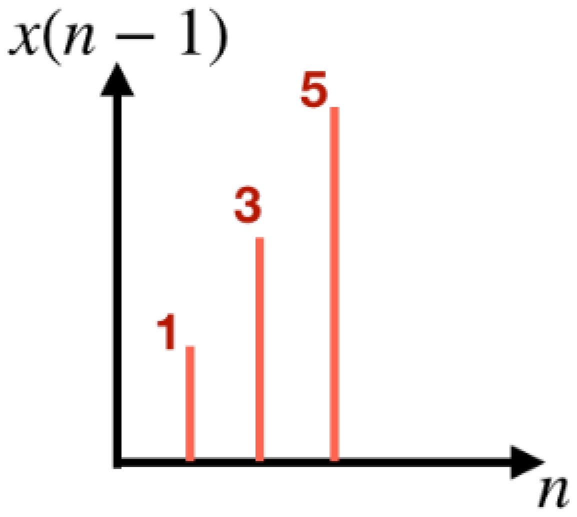
期末不挂科

课时1　离散时间信号与系统

知识点	重要程度	常考题型
1.1序列的运算	☆☆☆☆☆	选择，填空
1.2常见序列		
1.3周期序列及周期序列的周期		
1.4线性时不变系统及其判定		
1.5因果系统与稳定系统及其判定		

1.1序列的运算





加法$x(n) + y(n) = z(n)$

乘法$x(n) * y(n) = z(n)$

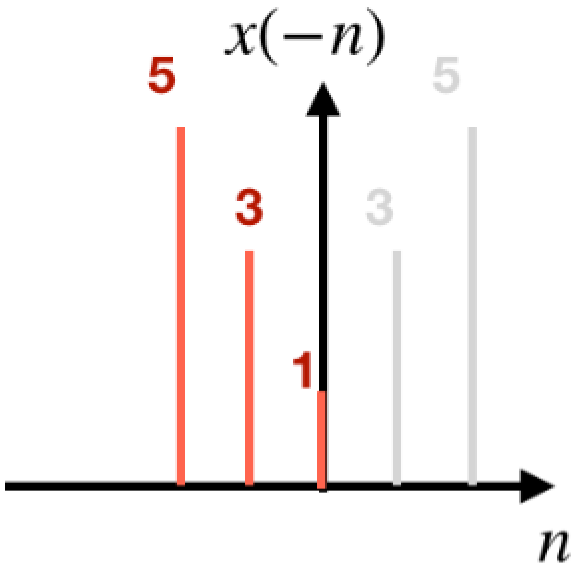
累加$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

前向差分$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$

后向差分$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$

移位$x(n) \to x(n+m)$或$x(n) \to x(n-m)$遵循左加又减

翻转$x(n) \to x(-n)$



1.1序列的运算 ——卷积(重点)

序列的卷积的定义式 $x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

常用公式 $\delta(n)*x(n)=x(n)$ ， $\delta(n-m)*x(n)=x(n-m)$

设 $x(n)$长度为N,h(n)长度为M,那么卷积后序列的长度为 $N+M-1$

题1 已知线性移不变系统的输入为x(n),系统的单位抽样响应为h(n),试求下列系统的输出y(n)

$(1)\ x(n)=\delta(n)\quad,\quad h(n)=R_5(n)$

$(2)\ x(n)=R_3(n)\quad,\quad h(n)=R_4(n)$

$(3)\ x(n)=\delta(n-2)\quad,\quad h(n)=0.5^n R_3(n)$

解： (1) $y(n)=x(n)*h(n)=R_5(n)$

(2) $y(n)=x(n)*h(n)=\{1,2,3,3,2,1\}$

(3) $y(n)=\delta(n-2)*0.5^n R_3(n)=0.5^{n-2}R_3(n-2)$

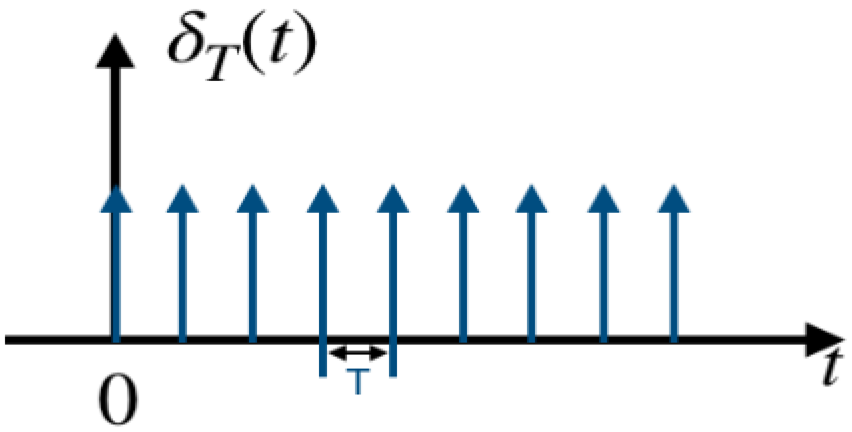
1.2常见序列

1.2.1单位抽样序列δ(n)；周期冲激序列：$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$

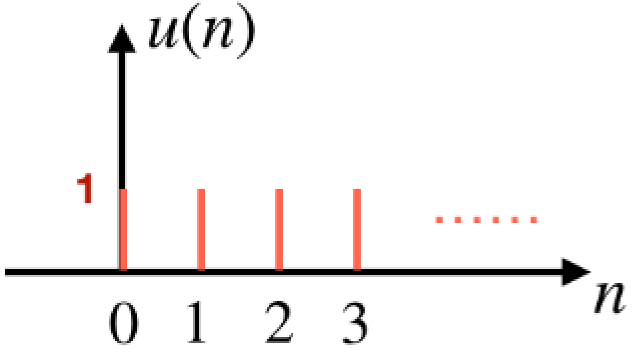
1.2.2单位阶跃序列u(n)：　$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$

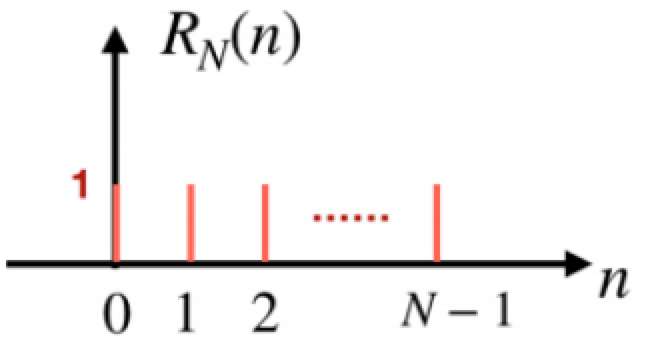
单位冲激与阶跃的转化：$u(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\ldots=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m)$

1.2.3矩形序列：$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$



周期冲激序列





1.2常见序列

1.2.4指数序列：

实指数序列$x(n)=a^n u(n)$,若$|a|<1$序列收敛,若$|a|>1$序列发散

虚指数序列 $x(n)=e^{(\sigma+j\omega_0)n}=e^{\sigma\cdot n}e^{j\omega_0 n}=e^{\sigma\cdot n}\left(\cos\omega_0 n+j\sin\omega_0 n\right)$

1.2.5正弦序列定义为 $x(n)=A\sin\left(n\omega_0+\phi\right)$,其中$\omega_0$为数字频率,

需要注意其与模拟频率的区别。

1.3周期序列及周期序列的周期

- 对序列 $x(n)$,若有 $x(n)=x(n+N)$,则称其为周期序列,周期为N;
- 引入 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 间接计算周期:
- (1) $\frac{2\pi}{\omega_0}=N$ 为整数时,x(n)为周期序列,周期为N;
- (2) $\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{P}{Q}$ 为有理数时,x(n)为周期序列,周期为N=P;
- (3) $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 的结果为无理数(通常带有 π)时,不是周期序列。

题2 判断下列每个序列是否是周期性的,若是周期性的,试确定其周期:

(a) $x(n) = A\cos(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8})$ (b) $x(n) = A\sin(\frac{13}{3}\pi n)$

解: (a) $x(n) = A\cos(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8})$

$$2\pi/\omega_0 = 2\pi/\frac{3\pi}{7} = \frac{14}{3}$$

$\therefore$ 是周期的,周期为14。

(b) $x(n) = A\sin(\frac{13}{3}\pi n)$

$$2\pi/\omega_0 = 2\pi/\frac{13}{3}\pi = \frac{6}{13}$$

$\therefore$ 是周期的, 周期是6

1.4线性时不变系统及其判定

$I=I_1+I_2$　　$P=I^2R=y^2$

$U=U_1+U_2$

- 线性系统满足叠加原理，即满足齐次性和可加性。

满足等式：$a_1y_1(n)+a_2y_2(n)=a_1T\left[x_1(n)\right]+a_2T\left[x_2(n)\right]=T\left[a_1x_1(n)\right]+T\left[a_2x_2(n)\right]$

线性系统
- 时不变系统：参数不随时间而变化,即输入输出关系不随时间而变化的系统
- 时变系统：参数随时间而变化

$$x \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y$$

- 时不变系统:

若 $T[x(n)]=y(n)$，则 $T\left[x(n-n_0)\right]=y(n-n_0)$

$x(n)$　　$y(n)$

$x(n-n_0)$　　$y(n-n_0)$

题3 试判断以下每一系统是否是线性、移不变的?

(1) $T[x(n)] = g(n)x(n)$ (2) $T[x(n)] = \sum_{k=n_0}^{n} x(k)$

解:(2) $T[x(n)] = \sum_{k=n_0}^{n} x(k)$

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)]$$

$$= \sum_{k=n_0}^{n} [ax_1(k) + bx_2(k)]$$

$$= \sum_{k=n_0}^{n} ax_1(k) + \sum_{k=n_0}^{n} bx_2(k)$$

$$= aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$$

∴ 系 统 是 线 性 系 统 。

$$T[x(n-m)] = \sum_{k=n_0}^{n} x(k-m)$$

$$= \sum_{k=n_0-m}^{n-m} x(k)$$

$$y(n-m) = \sum_{k=n_0}^{n-m} x(k)$$

即 $T[x(n-m)] \neq y(n-m)$

∴系统不是移不变的。

题3 试判断以下每一系统是否是线性、移不变的?

(1) $T[x(n)] = g(n)x(n)$ (2) $T[x(n)] = \sum_{k=n_0}^{n} x(k)$

解：(1) $T[x(n)] = g(n)x(n)$

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)]$$
$$= g(n)[ax_1(n) + bx_2(n)]$$
$$= g(n) \times ax_1(n) + g(n) \times bx_2(n)$$
$$= aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$$

∴ 系统是线性系统。

$$T[x(n-m)] = g(n)x(n-m)$$
$$y(n-m) = g(n-m)x(n-m)$$

即 $T[x(n-m)] \neq y(n-m)$

∴ 系统不是移不变的。

1.5因果系统与稳定系统及其判定

- 因果系统：系统的输出不超前输入，即n时刻的输出仅与n时刻及其之前的时刻有关

  判定条件：单位冲激响应是因果序列，即在n<0时，h(n)=0

- 稳定系统：有界输入产生有界输出的系统

  充要条件:单位冲激响应绝对可和,即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = P < \infty$

题4判断下列系统是否是因果、稳定系统

(1) $\frac{1}{n^2}u(n)$　　(2) $0.3^n u(n)$

(3) $3^n u(n)$　　(4) $\delta(n+4)$

解：(1) 当 $n<0$ 时，$h(n)=0$，

$\therefore$ 是因果的。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\frac{1}{0^2}+\frac{1}{1^2}+\ldots\Rightarrow\infty,$$

$\therefore$ 不稳定。

(2) 当 $n<0$ 时，$h(n)=0$，

$\therefore$ 系统是因果的。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=0.3^0+0.3^1+0.3^2+\ldots=\frac{10}{7}$$

$\therefore$ 系统稳定。

题4判断下列系统是否是因果、稳定系统。

(1) $\frac{1}{n^2}u(n)$　　(2) $0.3^n u(n)$

(3) $3^n u(n)$　　(4) $\delta\ (n+4)$

(3) 当$n<0$时，$h(n)=0$,

$\therefore$是因果的。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=3^0+3^1+3^2+\ldots\Rightarrow\infty$$

$\therefore$不稳定。

(7) 当 $n<0$时， $h(n)\neq 0$

$\therefore$ 系统是非因果的。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=1$$

$\therefore$ 系统稳定。