第二讲

二进制数字调制系统的抗噪声性能

第7章

7.2.1二进制振幅键控（2ASK)系统的抗噪声性能

7.2.2二进制频移键控（2FSK)系统的抗噪声性能

7.2.3 二进制相移键控（2PSK)系统的抗噪声性能

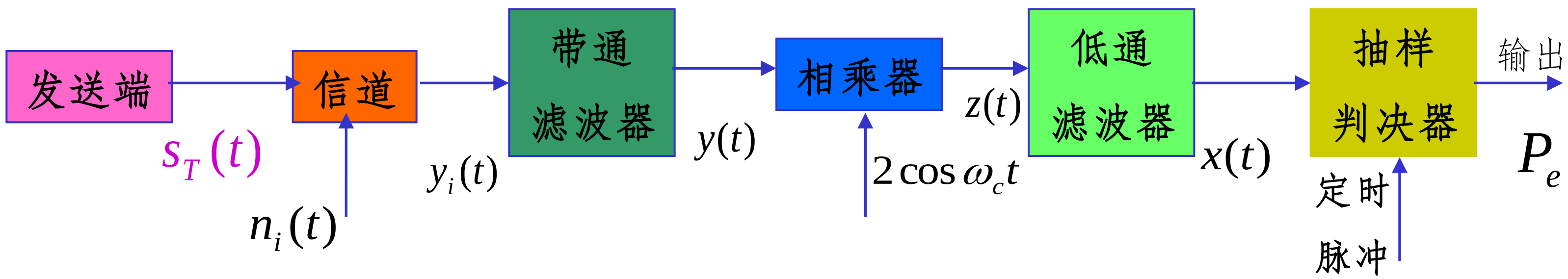
通信系统的抗噪声性能是指系统克服加性噪声影响的能力。模拟通信系统的抗噪声性能用接收机输出端的信噪比来描述。而对于数字通信系统的抗噪声性通常用误码率来衡量。

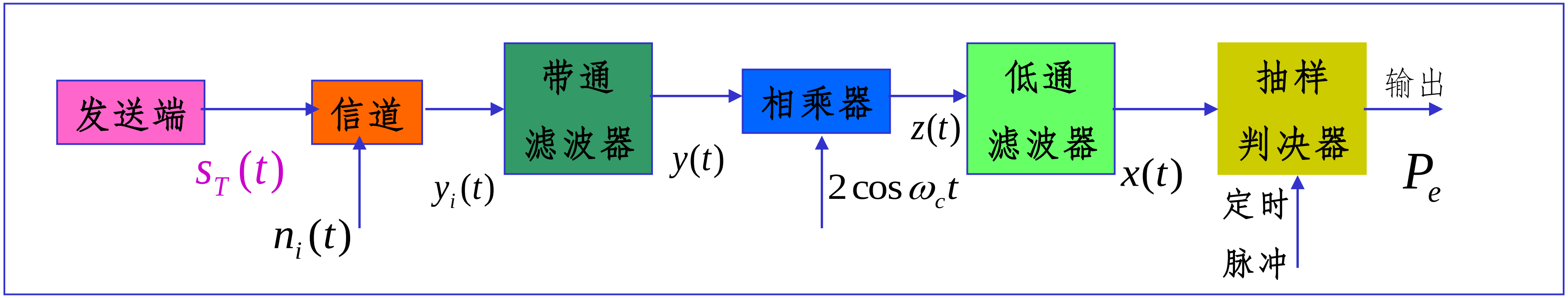
7.2 二进制数字调制系统的抗噪声性能

7.2.1 二进制振幅键控(2ASK)系统的抗噪声性能

1. 同步检测法的系统性能

对2ASK系统，同步检测法的系统性能分析模型如图所示。



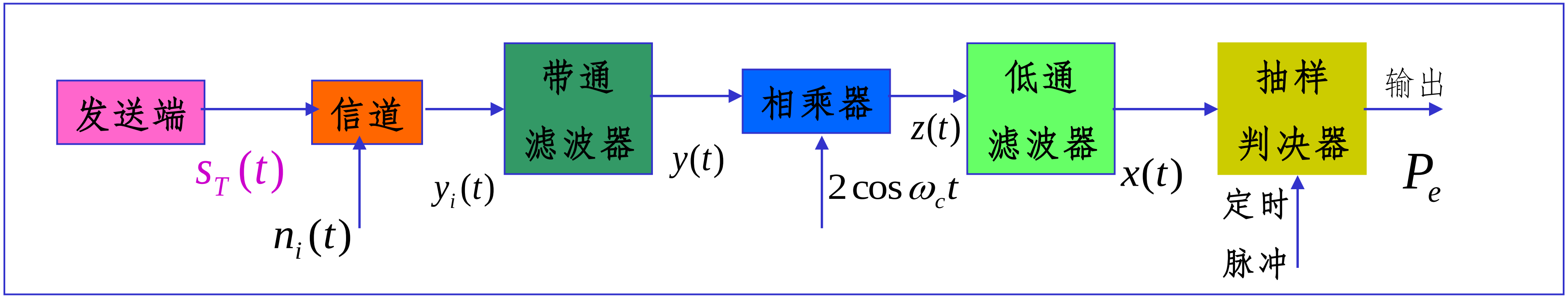


在一个码元的时间间隔内，发送端输出的信号波形为

$$s_T(t) = \begin{cases} u_T(t), & \text{发送“1”符号} \\ 0, & \text{发送“0”符号} \end{cases}$$

其中：

$$u_T(t) = A\cos\omega_c t, \quad 0 < t < T_S$$



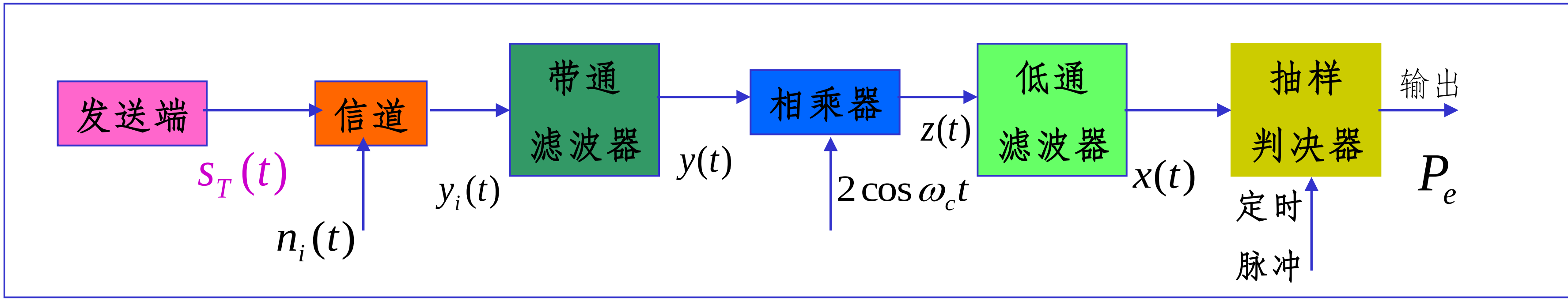
信道输出波形 $y_i(t)$ 为

$$y_i(t) = \begin{cases} AK\cos\omega_c t + n_i(t) & \text{发送“1”符号} \\ n_i(t) & \text{发送“0”符号} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a\cos\omega_c t + n_i(t) & \text{发送“1”符号} \\ n_i(t) & \text{发送“0”符号} \end{cases}$$

K 为信道衰减系数

$n_i(t)$ 为加性高斯白噪声，其均值为零.

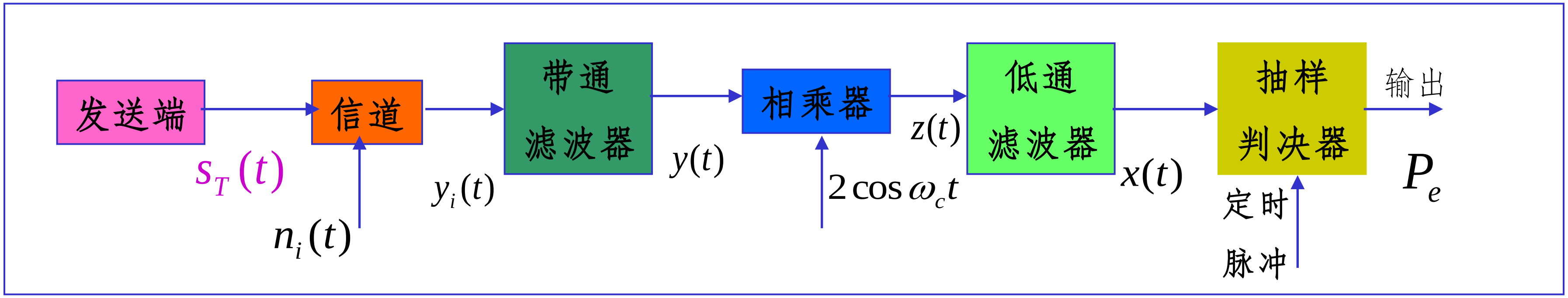


设接收端带通滤波器具有理想矩形传输特性，恰好使信号完整通过，则带通滤波器的输出波形 $y(t)$为：

$$y(t)=\begin{cases} a\cos\omega_c t+n(t) & \text{发送“1”符号} \\ n(t) & \text{发送“0”符号} \end{cases}$$

$n(t)$为窄带高斯噪声，其均值为零，方差为σ_n^2，且可表示为

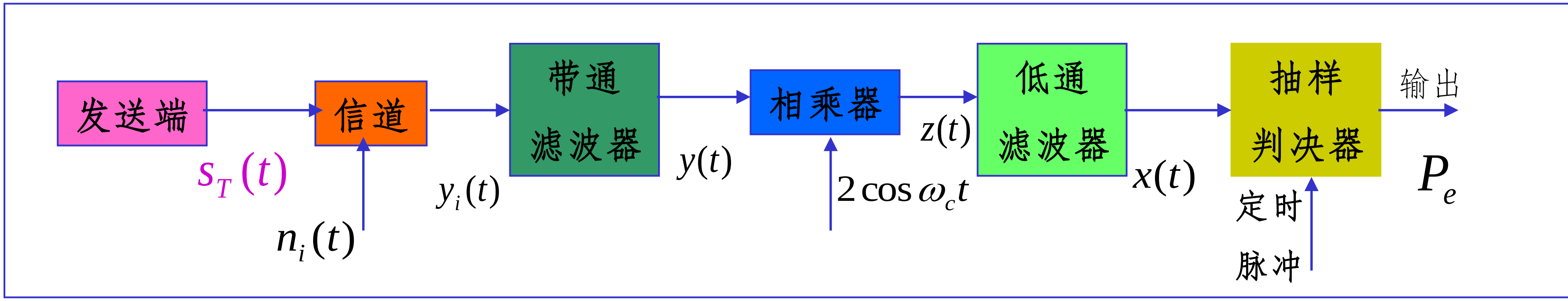
$$n(t)=n_c(t)\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t$$



于是输出波形$y(t)$可表示为

$$y(t)=\begin{cases} a\cos\omega_c t+n_c(t)\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t \\ n_c(t)\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t \end{cases}$$

$$=\begin{cases} [a+n_c(t)]\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t, & \text{发送“1”符号} \\ n_c(t)\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t, & \text{发送“0”符号} \end{cases}$$

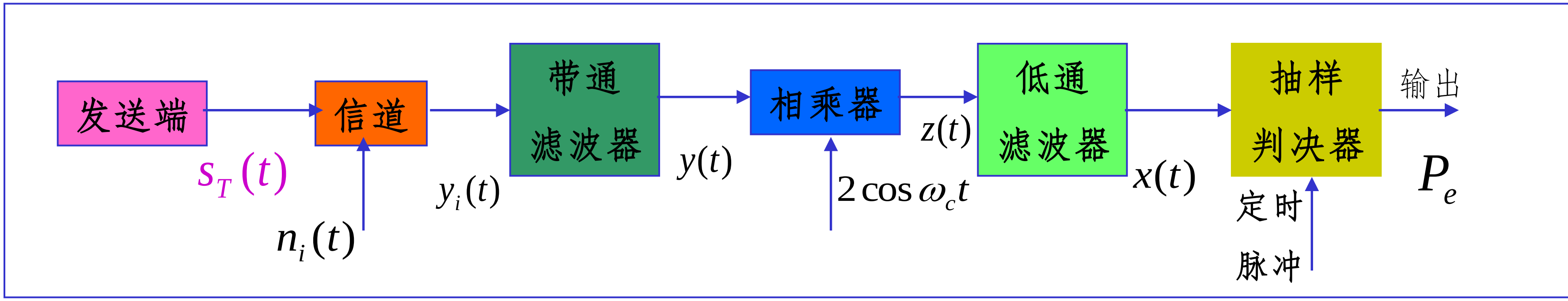


乘法器的输出波形$z(t)$ 为

$$z(t) = 2y(t)\cos\omega_c t$$

$$= \begin{cases} 2[a + n_c(t)]\cos^2\omega_c t - 2n_s(t)\sin\omega_c t\cos\omega_c t \\ 2n_c(t)\cos^2\omega_c t - 2n_s(t)\sin\omega_c t\cos\omega_c t \end{cases}$$

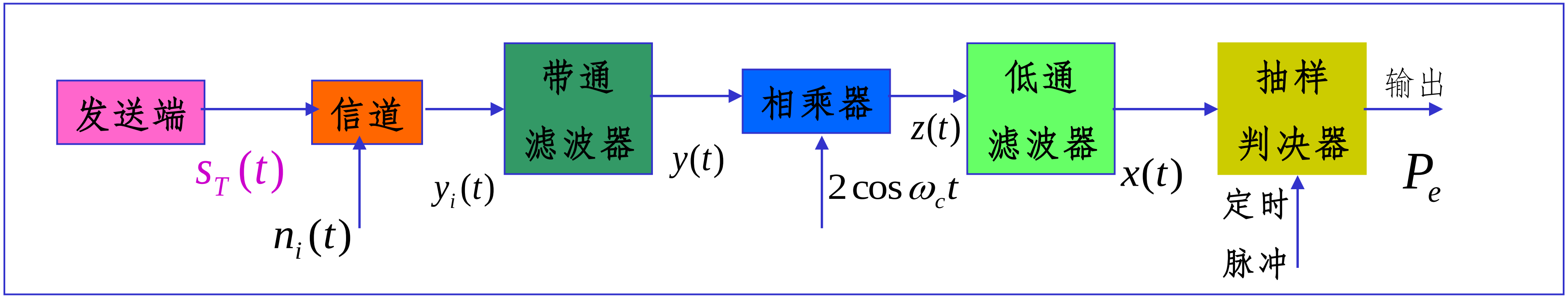
$$= \begin{cases} \underline{[a + n_c(t)]} + [a + n_c(t)]\cos 2\omega_c t - n_s(t)\sin 2\omega_c t, & \text{发送“1”符号} \\ \underline{n_c(t)} + n_c(t)\cos 2\omega_c t - n_s(t)\sin 2\omega_c t, & \text{发送“0”符号} \end{cases}$$



因此，通过理想低通滤波器的输出波形 $x(t)$

$$x(t)=\begin{cases} a+n_c(t), & \text{发送“1”符号} \\ n_c(t), & \text{发送“0”符号} \end{cases}$$

式中，a为信号成分,$n_c(t)$为低通型高斯噪声，其均值为零，方差为 σ_n^2



抽样值x为

$$x=\begin{cases} a+n_c(kT_s) \\ n_c(kT_s) \end{cases}=\begin{cases} a+n_c, & \text{发送“1”符号} \\ n_c, & \text{发送“0”符号} \end{cases}$$

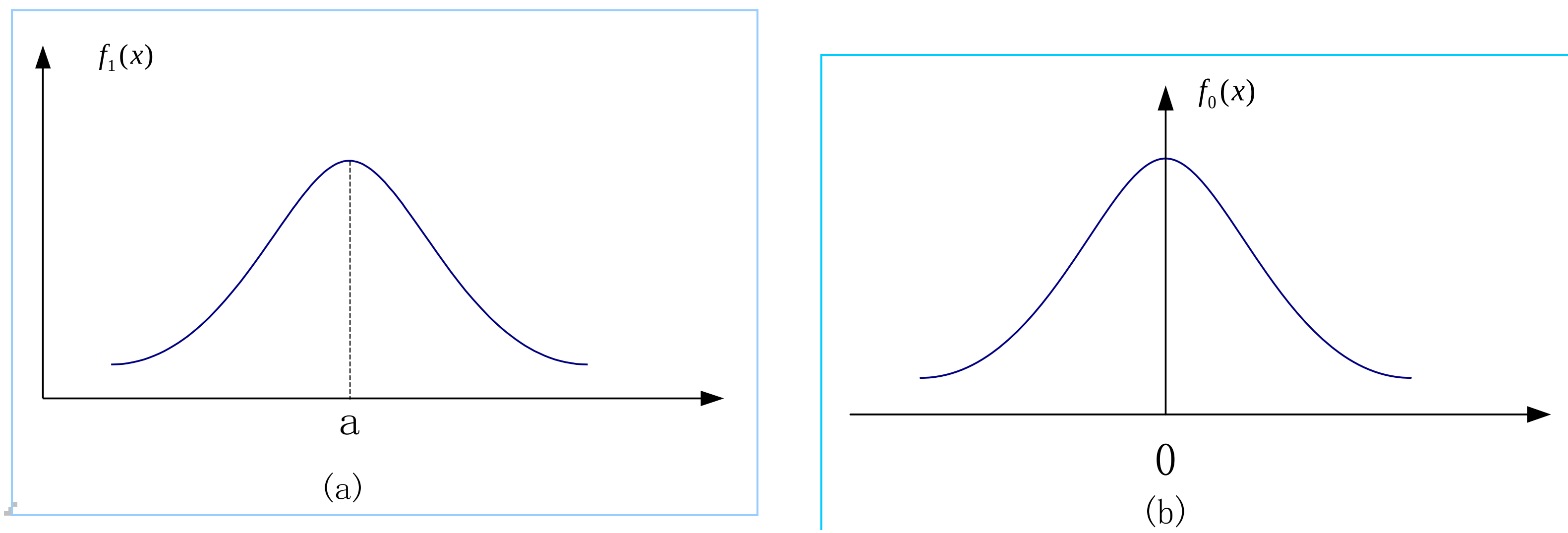
式中，n_c是均值为零，方差为σ_n^2的高斯随机变量。

发送“1”符号时的抽样值$x = a + n_c$的一维概率密度函数$f_1(x)$为

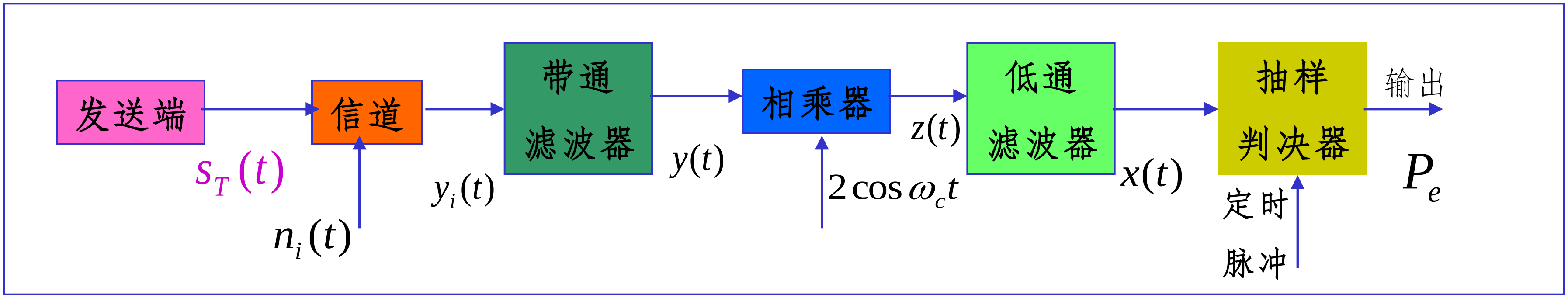
$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

发送“0”符号时的抽样值$x = n_c$ 的一维概率密度函数$f_0(x)$ 为

$$f_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$



抽样值x的一位概率密度函数



假设抽样判决器的判决门限为b，判决规则为

抽样值 $x \le b$ 时判为“0”符号输出；

抽样值 $x > b$ 时判为“1”符号输出。

若发送的第k个符号为“1”，则错误接收的概率$P(0/1)$为

$$P(0/1) = P(x \le b) = \int_{-\infty}^{b} f_1(x)dx$$

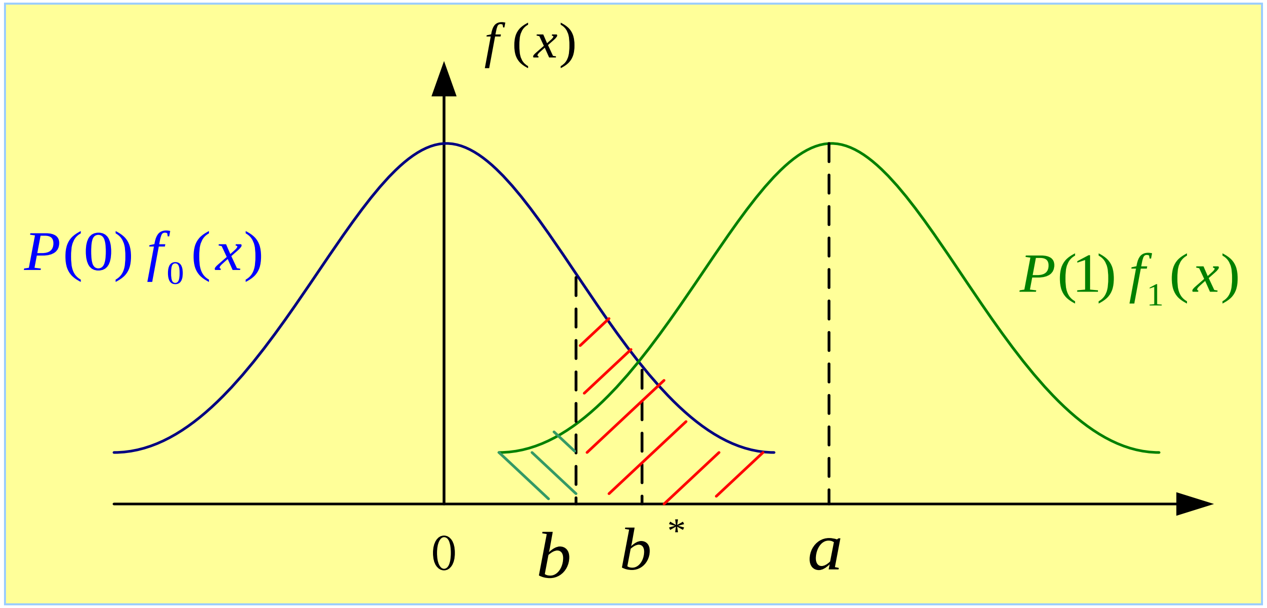
当发送的第k个符号为“0”时，则错误接收的概率$P(1/0)$ 为

$$P(1/0) = P(x > b) = \int_{b}^{\infty} f_0(x)dx$$

则总误码率为：

$$P_e = P(1)P(0/1) + P(0)P(1/0)$$

$$P_e = P(1)P(0/1) + P(0)P(0/1) = \int_{-\infty}^{b} P(1)\, f_1(x)dx + \int_{b}^{\infty} P(0)\, f_0(x)dx$$



误码率等于图中阴影的面积。

判决门限取为 b^* 时，此时系统的误码率 P_e 最小。这个门限就称为**最佳判决门限**。

令 $$p(0)\,f_0(x) = p(1)\,f_1(x)$$

可得：

$$b^* = \frac{a}{2} + \frac{\sigma_n^2}{a}\ln\frac{P(0)}{P(1)}$$

上式就是所需的最佳判决门限。

当 $P(1) = P(0)$时，最佳判决门限b^*为

$$b^* = \frac{a}{2}$$

$$P_e = P(1)P(0/1) + P(0)P(0/1) = \int_{-\infty}^{b} P(1)\, f_1(x)dx + \int_{b}^{\infty} P(0)\, f_0(x)dx$$

对2ASK信号采用同步检测法进行解调时的误码率 P_e 为

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{r}{4}}\right)$$

式中， $r = \dfrac{a^2}{2\sigma_n^2}$ 为解调器输入端的峰值信噪比。

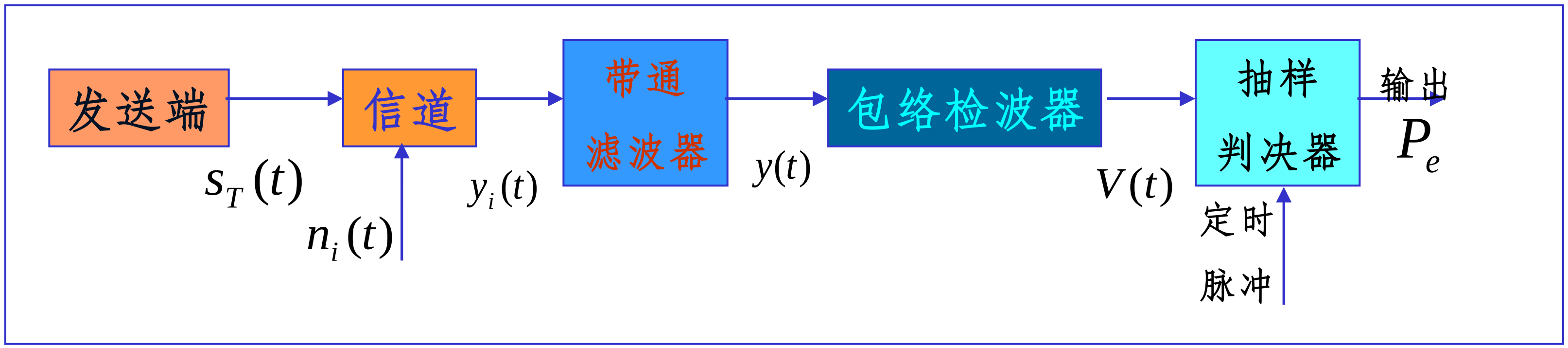
当$r >> 0$，即大信噪比时，上式可近似表示为

$$P_e \approx \frac{1}{\sqrt{\pi r}} e^{-r/4}$$

7.2.1 二进制振幅键控(2ASK)系统的抗噪声性能

2. 包络检波法的系统性能

包络检波法的系统性能分析模型如图所示



接收端带通滤波器的输出波形与相干检测法的相同，即

$$y(t)=\begin{cases} u_i(t)+n(t) \\ n(t) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} [a+n_c(t)]\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t, & \text{发送“1”符号} \\ n_c(t)\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t, & \text{发送“0”符号} \end{cases}$$

- 当发送信号为1时，包络检波器输入信号为：

$$y(t) = a\cos\omega_c t + n_c(t)\cos\omega_c t - n_s(t)\sin\omega_c t$$
$$= V(t)\cos\left[\omega_c t + \phi(t)\right]$$

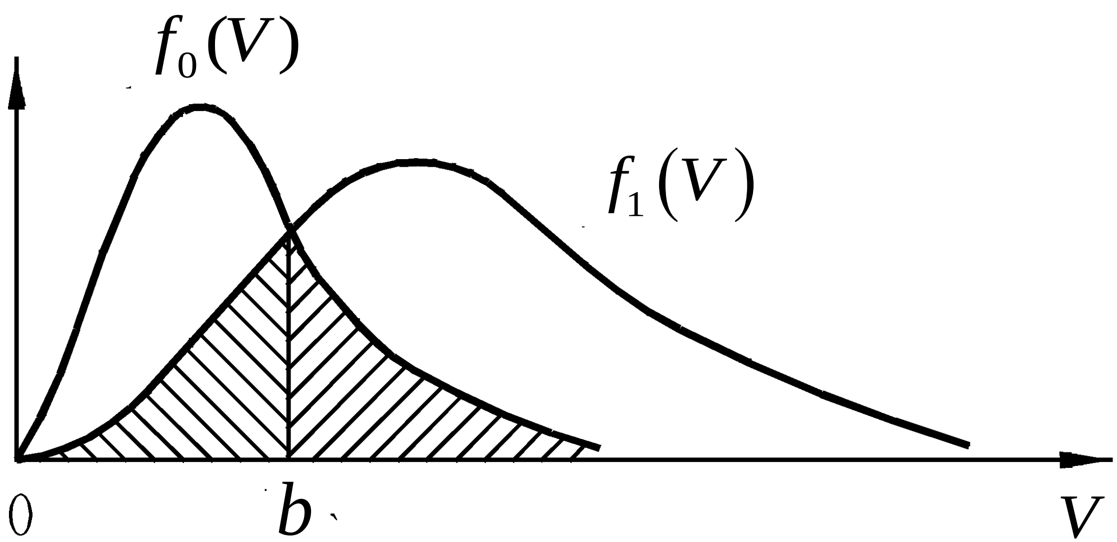
包络V的概率密度符合莱斯分布，即：

$$f_1(V) = \frac{V}{\sigma_n^{\ 2}}\exp\left[\frac{-(V^2+a^2)}{2\sigma_n^{\ 2}}\right] I_0\left(\frac{aV}{\sigma^2}\right), \quad V \ge 0$$

- 当发送信号为0时，包络V符合瑞利分布，即：

$$f_0(V) = \frac{V}{\sigma_n^{\ 2}}\exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma_n^{\ 2}}\right), \quad V \ge 0$$

抽样值概率分布如下图所示

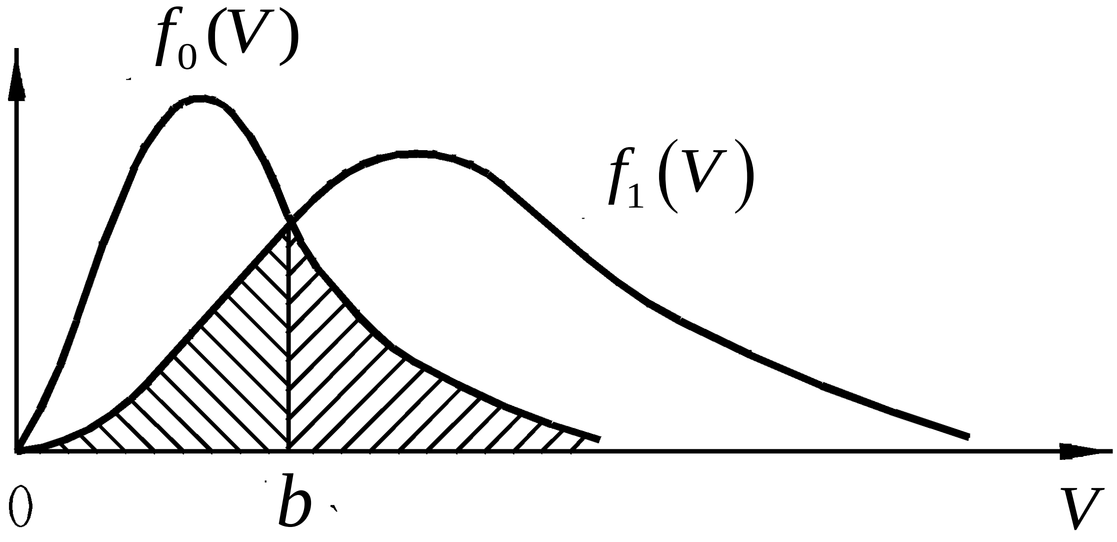


平均误码率为：

$$P_e = p(0)\int_b^{\infty} f_0(V)\,\mathrm{d}V + p(1)\int_0^{b} f_1(V)\,\mathrm{d}V$$

最佳判决门限b^*满足，

$$p(0)\,f_0(b^*) = p(1)\,f_1(b^*)$$



当0和1等概发送时，最佳判决门限为

$$b^* \approx \frac{a}{2}\left(1+\frac{8\sigma_n^{\ 2}}{a^2}\right)^{1/2}$$

当0和1等概发送时，最佳判决门限为

$$b^* \approx \frac{a}{2}\left(1+\frac{8\sigma_n^{\,2}}{a^2}\right)^{1/2}$$

0, 1等概出现时，在大信噪比（r>>1）条件下

- 最佳门限: $b^* = a/2$

0, 1等概出现时，在小信噪比（r<<1）条件下

- 最佳门限: $b^* = \sqrt{2}\sigma_n$

小信噪比时会出现“门限效应”。

因此，实际工作中，系统总是工作在大信噪比的情况下，因此最佳判决门限应取 $b_0^* = a/2$

此时系统的总误码率 P_e 为

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{r}{4}}\right) + \frac{1}{2} e^{-r/4}$$

当 $r \to \infty$ 时，上式的下界为

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-r/4}$$

可以看出：

在相同的信噪比条件下，同步检测法的误码性能优于包络检波法的性能；

在大信噪比条件下，包络检波法的误码性能将接近同步检测法的性能；

包络检波法存在门限效应，同步检测法无门限效应。

例7-1 对2ASK信号分别进行非相干接收和相干接收。数字信号的码元速率 $R_s = 4.8\times10^6$ baud，接收端输入信号幅度*A*=1 mV，信道噪声的单边功率谱密度为 $n_0 = 2\times10^{-15}$ W/Hz 。

求：（1）非相干接收时的误比特率；

（2）相干接收时的误比特率。

解：（1）由码元速率可求出接收端BPF近似带宽为：

$$B \approx 2R_s = 9.6\times10^6 \ \text{(Hz)}$$

因此，可得带通滤波器输出噪声的平均功率为：

$$\sigma^2 = n_0 B = 1.92\times10^{-8} \ \text{(W)}$$

解调器输入峰值信噪比为：

$$r=\frac{A^2}{2\sigma^2}=\frac{(1\times10^{-3})^2}{2\times1.92\times10^{-8}}\approx26.04$$

由 $P_e\approx\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r/4}$ 可得非相干接收时的误比特率为：

$$p_e\approx\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r/4}\approx\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-6.5}\approx7.5\times10^{-4}$$

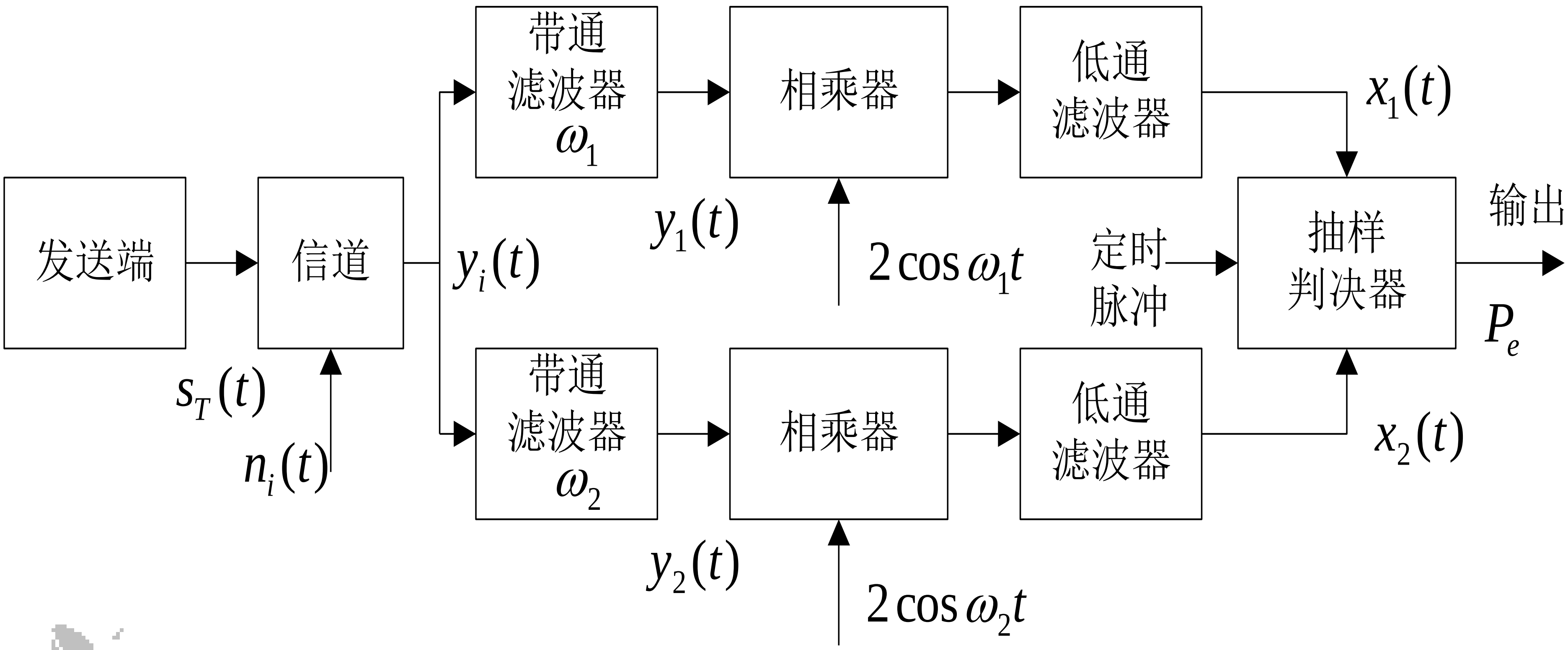
（2）同理，可得相干接收时的误比特率为：

$$P_e\approx\frac{1}{\sqrt{\pi r}}e^{-\mathrm{r}/4}\approx1.6\times10^{-4}$$

7.2.2　FSK的抗噪声性能

1. 相干FSK的误码率

(1) 相干FSK抗噪声性能的分析模型



2FSK信号可表示为：

$$s_{2FSK}(t)=\begin{cases} A\cos\omega_1 t, & \text{发送“1”} \\ A\cos\omega_2 t, & \text{发送“0”} \end{cases}$$

当发送1时，BPF1的输出为：

$$y_1(t)=a\cos\omega_1 t+n_1(t)$$

$$=a\cos\omega_1 t+n_{1c}(t)\cos\omega_1 t-n_{1s}(t)\sin\omega_1 t$$

所以，LPF1的输出为： $x_1(t)=a+n_{1c}(t)$

其概率密度函数为：

$$f(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left[-\frac{(x_1-a)^2}{2\sigma_n{}^2}\right]$$

而此时的BPF2的输出只有窄带噪声

$$y_2(t)=n_2(t)=n_{2c}(t)\cos\omega_2 t-n_{2s}(t)\sin\omega_2 t$$

经低通LPF2后，输出为：$x_2(t)=n_{2c}(t)$

它的概率密度函数为 $f(x_2)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\left(-\dfrac{x_2{}^2}{2\sigma_n{}^2}\right)$

- 当$x_1(t)$的抽样值x_1小于$x_2(t)$的抽样值x_2时，判决器输出“0”符号，造成将“1”判为“0”的错误,
- 设两个低通输出信号的差为

$$x(t)=x_1(t)-x_2(t)=a+n_{1c}(t)-n_{2c}(t)$$

显然，差值小于零时就会造成误判。

设变量 $x = a + n_{1c} - n_{2c}$，则x是均值为a，方差为$\sigma_x^2 = 2\sigma_n^2$ 的高斯随机变量，概率密度函数为：

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2\sigma_n^2)}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2(2\sigma_n^2)}\right]$$

- 同理，当发送数字0时，也可以导出类似的结论。

此时的输出为：$x(t) = n_{1c}(t) - a - n_{2c}(t)$

显然，这时若输出大于零会造成误判。

而此时x的概率密度函数为：$f_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(2\sigma_n^2)}} \exp\left[-\dfrac{(x+a)^2}{2(2\sigma_n^2)}\right]$

所以误比特率为：

$$P_e = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f_1(x)\mathrm{dx} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} f_0(x)\mathrm{dx}$$

整理得

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right)$$

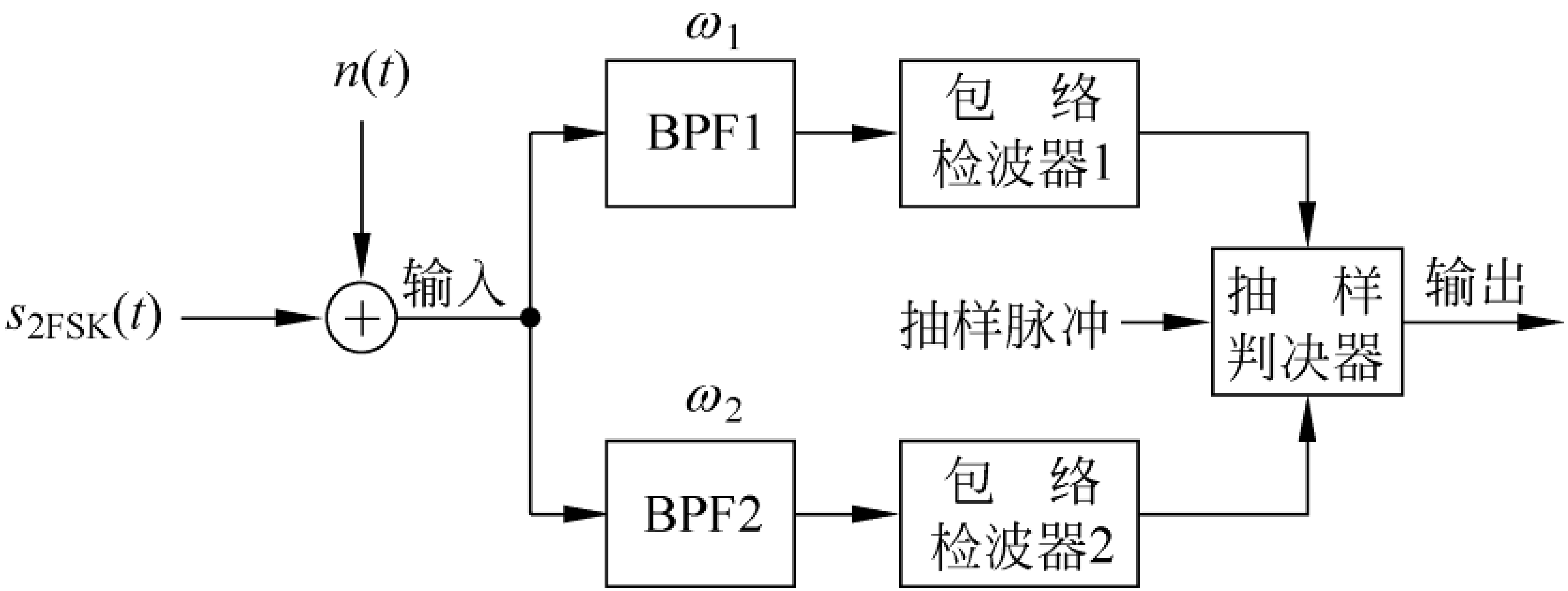
这里 $r = \dfrac{a^2/2}{\sigma^2}$，为接收信噪比。

大信噪比条件下，

$$P_e \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} e^{-\frac{r}{2}}$$

2. 非相干FSK的误比特率

（1）分析模型



$$\boxed{P_e = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{A^2}{4\sigma^2}\right) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{r}{2}\right)}$$

$$r = \frac{A^2/2}{\sigma^2}$$

结论分析

- 将上式与2FSK同步检波时系统的误码率公式比较：
  - 在大信噪比条件下，2FSK信号包络检波时的系统性能与同步检测时的性能相差不大；
  - 同步检测法的设备复杂；
  - 在满足信噪比要求的场合，多采用包络检波法。

例7-2 已知2FSK信号的两个频率 $f_1 = 2\,025\ \text{Hz}$， $f_2 = 2\,225\ \text{Hz}$，码元速率 $R_s = 300\ \text{baud}$，信道有效带宽为3000 Hz输出端的信噪比为 6 dB。求：

（1）2FSK信号传输带宽；

（2）非相干接收的误码率；

（3）相干接收的误码率。

例7-2 已知2FSK信号的两个频率 $f_1 = 2\,025\ \text{Hz}$， $f_2 = 2\,225\ \text{Hz}$

，码元速率 $R_s = 300\ \text{baud}$ ，信道有效带宽为 3000 H

输出端的信噪比为 6 dB。求：

（1）2FSK信号传输带宽；

（2）非相干接收的误比特率；

（3）相干接收的误比特率。

解：（1）∵ 2FSK信号的带宽为 $B_{2FSK} \approx 2B_B + |f_2 - f_1|$

∴ $B_{2FSK} \approx 2R_s + |f_2 - f_1| = 2 \times 300 + (2\,225 - 2\,025) = 600 + 200 = 800\ (\text{Hz})$

（2）对于2FSK信号，当码元速率为300 baud时，

接收机中带通滤波器的带宽近似为：$B_F \approx 2R_s = 600\ (\text{Hz})$

由于信道带宽为3 000 Hz，即信道带宽是支路中BPF带宽的5倍，所以BPF输出信噪比是信道输出信噪比的5倍。当信道输出信噪比为6 dB时，BPF输出信噪比为：

$$r = 5 \times 10^{0.6} = 5 \times 4 = 20$$

∵ 非相干接收时的误码率为 $P_e = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{A^2}{4\sigma^2}\right) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{r}{2}\right)$

∴ $P_e \approx \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r/2} \approx \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-10} \approx 2.27 \times 10^{-5}$

（3）同理，

∵相干接收时的误码率为

∴ $$P_e \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} e^{-\frac{r}{2}} \approx 3.93 \times 10^{-6}$$