一、填空题：本题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分.

1、 $\underline{9,8}$； 2、 $\underline{n}$； 3、 $\underline{0}$；

4、 $\underline{\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)+k\left[(\eta_1+\eta_2)-(\eta_2+\eta_3)\right]=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1\right)^T+k(0,1,-1,-1)^T}$； 5、 $\underline{\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}}$；

6、 $\underline{-3}$ ； 7、 $\underline{2}$； 8、 $\underline{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4}}$； 9、 $\underline{a=4,b=2}$； 10、 $\underline{20}$.

二、单项选择题：本题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分.

C D B A A; C A C C A

三、解答题：本题共 4 小题，每小题 10 分，满分 40 分.【前 2 题简单。后 2 题的基础与前两题同】

1、(10 分) 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. 【Ch1】

解：$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 9 & 0 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 9 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ --------降为三阶 5 分

$$=-2\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 13 & 14 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} 13 & 14 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=24.$$ ---------（5 分）

2、(10 分) 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵. 【Ch2】 【初等行变换】

解：$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right)$ ----------8 分

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. -------------2 分

3、(10 分)求方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=3, \\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4=6, \\ 2x_1+x_3-x_4=3. \end{cases}$的通解 . 【Ch3】 【初等行变换】

解 因$A=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

于是方程组$\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4+\frac{3}{2}, \\ x_2=-\frac{1}{2}x_3-\frac{3}{2}x_4+\frac{3}{2}. \end{cases}$的一个特解为$\eta^*=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$,

其导出组$\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4, \\ x_2=-\frac{1}{2}x_3-\frac{3}{2}x_4. \end{cases}$的基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \xi_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$,

所以方程组的通解为$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta^*$.

4、(10 分)设矩阵$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,求可逆矩阵$P$,使$P^{-1}AP$为对角矩阵. 【Ch4】

解 由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$得特征值$\lambda_1=-1, \lambda_2=\lambda_3=1$.

$\lambda_1=-1$时,解方程组$(-E-A)x=0$得特征向量为$p_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\lambda_1=1$时,解方程组$(E-A)x=0$得特征向量为$p_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $p_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

取$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$