△7.3.18

7.20 设有N个粒子的系统，其速率分布如题7.20图所示．求

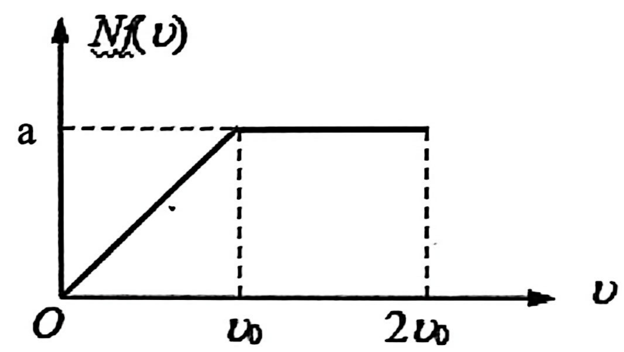
(1)分布函数$f(\upsilon)$的表达式；

(2)a与υ_0之间的关系；

(3)速度在$1.5\upsilon_0$~$2.0\upsilon_0$之间的粒子数.

(4)粒子的平均速率.

(5)$0.5\upsilon_0$~υ_0范围内粒子的平均速率.



解：(1)从图上可得分布函数表达式

$$\begin{cases} Nf(\upsilon)=a\upsilon/\upsilon_0 & (0\le\upsilon\le\upsilon_0) \\ Nf(\upsilon)=a & (\upsilon_0\le\upsilon\le2\upsilon_0) \\ Nf(\upsilon)=0 & (\upsilon\ge2\upsilon_0) \end{cases}$$

$$f(\upsilon)=\begin{cases} a\upsilon/N\upsilon_0 & (0\le\upsilon\le\upsilon_0) \\ a/N & (\upsilon_0\le\upsilon\le2\upsilon_0) \\ 0 & (\upsilon\ge2\upsilon_0) \end{cases}$$

(2) $f(\upsilon)$满足归一化条件，但这里纵坐标是$Nf(\upsilon)$而不是$f(\upsilon)$.故曲线下的总面积为N．由归一化条件

$$\int_0^{\upsilon_0} N\frac{a\upsilon}{\upsilon_0}\mathrm{d}\upsilon+N\int_{\upsilon_0}^{2\upsilon_0} a\mathrm{d}\upsilon=N\text{,}$$

可得$a=\dfrac{2N}{3\upsilon_0}$

(3)可通过面积计算 $\Delta N=a\times(2\upsilon_0-1.5\upsilon_0)=\dfrac{1}{3}N$

(4)N 个粒子平均速率

$$\bar{\upsilon}=\int_0^\infty \upsilon f(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon=\frac{1}{N}\int_0^\infty \upsilon Nf(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon=\int_0^{\upsilon_0}\frac{a\upsilon^2}{\upsilon_0}\mathrm{d}\upsilon+\int_{\upsilon_0}^{2\upsilon_0}a\upsilon\mathrm{d}\upsilon$$

$$\bar{\upsilon}=\frac{1}{N}(\frac{1}{3}a\upsilon_0^2+\frac{3}{2}a\upsilon_0^2)=\frac{11}{6}\upsilon_0$$

(5) $0.5\upsilon_0$到υ_0区间内粒子数

$$N_1=\frac{1}{2}(a+0.5a)(\upsilon_0-0.5\upsilon_0)=\frac{3}{8}a\upsilon_0=\frac{1}{4}N$$

$0.5\upsilon_0$到υ_0区间内粒子平均速率

$$\bar{\upsilon}=\frac{\int_{0.5\upsilon_0}^{\upsilon_0}\upsilon\mathrm{d}N}{N_1}=\frac{N}{N_1}\int_{0.5\upsilon_0}^{\upsilon_0}\frac{\upsilon\mathrm{d}N}{N}=\frac{N}{N_1}\int_{0.5\upsilon_0}^{\upsilon_0}\upsilon f(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon$$

$$\bar{\upsilon}=\frac{N}{N_1}\int_{0.5\upsilon_0}^{\upsilon_0}\frac{a\upsilon^2}{N\upsilon_0}\mathrm{d}\upsilon=\frac{1}{N_1}\int_{0.5\upsilon_0}^{\upsilon_0}\frac{a\upsilon^2}{\upsilon_0}\mathrm{d}\upsilon=\frac{1}{N_1}(\frac{a\upsilon_0^3}{3\upsilon_0}-\frac{a\upsilon_0^3}{24\upsilon_0})=\frac{1}{N_1}\frac{7a\upsilon_0^2}{24}$$

$$\bar{\upsilon}=\frac{7a\upsilon_0^2}{6N}=\frac{7\upsilon_0}{9}$$

8.3.12 8.14 $0.01m^3$氮气在温度为 300K 时，由 0.1MPa 压缩到 10MPa。试分别求氮气经等温及绝热压缩后的(1) 体积；(2) 温度；(3)各过程对外所做的功。

解：（1） N_2体积

等温：$p_1V_1 = p_2V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{p_1V_1}{p_2} = \frac{0.1\times 0.01}{10} = 10^{-4}(m^3)$

绝热

$$p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma} \Rightarrow V_2 = (\frac{p_1}{p_2})^{1/\gamma}V_1 = (\frac{0.1}{10})^{1/1.4}\times 0.01 = 3.73\times 10^{-4}m^3$$

（2） N_2温度

等温：$T_2 = T_1 = 300K$

绝热：$p_1^{\gamma-1}T_1^{-\gamma} = p_2^{\gamma-1}T_2^{-\gamma}$

$$\Rightarrow T_2 = T_1(\frac{p_2}{p_1})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1118K$$

（3） N_2对外做功

等温：$W_T = Q_T = \frac{m}{M}RT\ln(\frac{p_1}{p_2})$

又 $p_1V_1 = \frac{m}{M}RT = p_2V_2$

∴

$$W_T = p_1V_1\ln(\frac{p_1}{p_2}) = 1.013\times 10^5\times 0.01\times \ln(\frac{0.1}{10}) = -4.67\times 10^3 J$$

绝热：$W_s = -\Delta E = -\frac{m}{M}C_{V,m}(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}(p_1V_1 - p_2V_2)$

$$= (1.013\times 10^5\times 0.01 - 100\times 1.013\times 10^5\times 3.73\times 10^{-4})\times \frac{5}{2}$$

$$\approx -6.9\times 10^3(J)$$

9.3.10 半径为R_1和R_2（$R_2 > R_1$）的两无限长同轴圆柱面，单位长度上分别带有电量λ和$-\lambda$，试求：(1) $r < R_1$；(2) $R_1 < r < R_2$；(3) $r > R_2$处各点的场强.

解：高斯定理$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \dfrac{\sum q}{\varepsilon_0}$

取同轴圆柱形高斯面，侧面积$S = 2\pi rl$

则 $$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = E2\pi rl$$

对(1) $$r < R_1 \qquad \sum q = 0, E = 0$$

(2) $$R_1 < r < R_2 \qquad \sum q = l\lambda$$

∴ $$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$ 沿径向向外

(3) $$r > R_2 \qquad \sum q = 0$$

∴ $$E = 0$$

9.3.21

△ 9.23两个半径分别为R_1和R_2（$R_1 < R_2$）的同心薄金属球壳，现给内球壳带电$+q$，试计算：

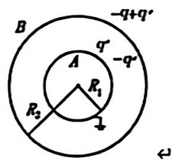
(1)外球壳上的电荷分布及电势大小；

(2)先把外球壳接地，然后断开接地线重新绝缘，此时外球壳的电荷分布及电势；

*(3)再使内球壳接地，此时内球壳上的电荷以及外球壳上的电势的改变量.

解：(1)内球带电$+q$；球壳内表面带电则为$-q$，外表面带电为$+q$，且均匀分布，其电势

$$U=\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{R_2}^{\infty}\frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



题 9.23 图

(2)外壳接地时，外表面电荷$+q$入地，外表面不带电，内表面电荷仍为$-q$、所以球壳电势由内球$+q$与内表面$-q$产生：

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=0$$

(3)设此时内球壳带电量为q'；则外壳内表面带电量为$-q'$，外壳外表面带电量为$-q+q'$（电荷守恒），此时内球壳电势为零，且

$$U_A=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_1}-\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{-q+q'}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=0$$

得
$$q'=\frac{R_1}{R_2}q$$

外球壳上电势

$$U_B=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_2}-\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{-q+q'}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{(R_1-R_2)q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}$$

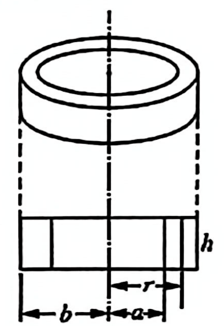
q′ 是“内球在接地后，为保持电势=0 而与地交换的电荷量”；它可能是正也可能是负；因此我们必须设 q′ 才能求出系统最终的电荷分布。

11.3.15

11.18 一矩形截面的螺绕环如题11.18图所示，共有N匝．试求：

(1)此螺线环的自感系数；

(2)若导线内通有电流I，环内磁能为多少？



题 11.18 图

解：如题 11.18 图示

(1)通过横截面的磁通为

$$\Phi=\int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2r\pi} h\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

磁链 $\Psi=N\Phi=\dfrac{\mu_0 N^2 Ih}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$

∴ $$L=\frac{\Psi}{I}=\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

(2)∵ $$W_m=\frac{1}{2}LI^2$$

∴ $$W_m=\frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$