通 信 原 理

鲁东大学信息与电气工程学院
智能科学系　臧睦君
E-mail: zmj_ldu@126.com

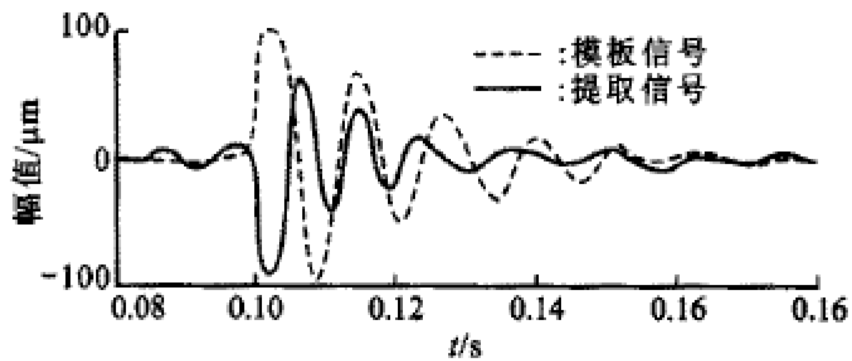
第2章 确知信号

主 要 内 容

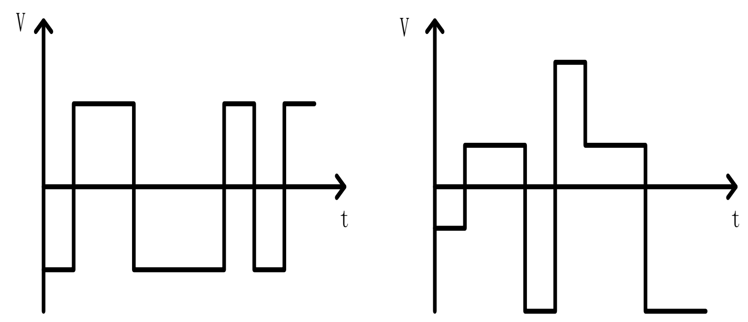
- 2.1 信号的分类
- 2.2 确知信号的频域性质
- 2.3 确知信号的时域性质
- 2.4 确知信号通过线性系统

按照信号参量的取值

❖ **模拟信号（连续信号）：信号参量的取值是连续的或取无穷多个值的，如连续变化的语音、图像等；**

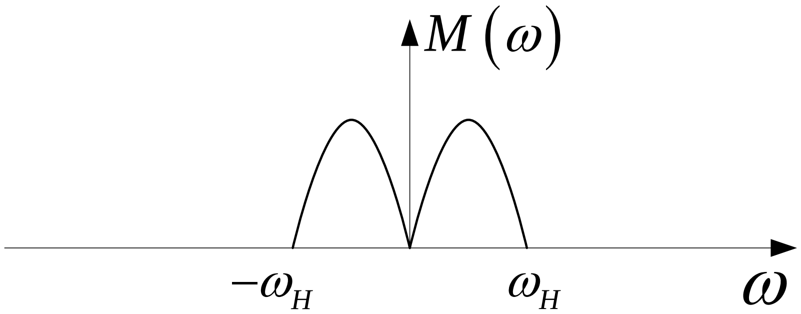


❖ **数字信号（离散信号）：信号参量只能取有限个值，如文字、符号、数据等。**

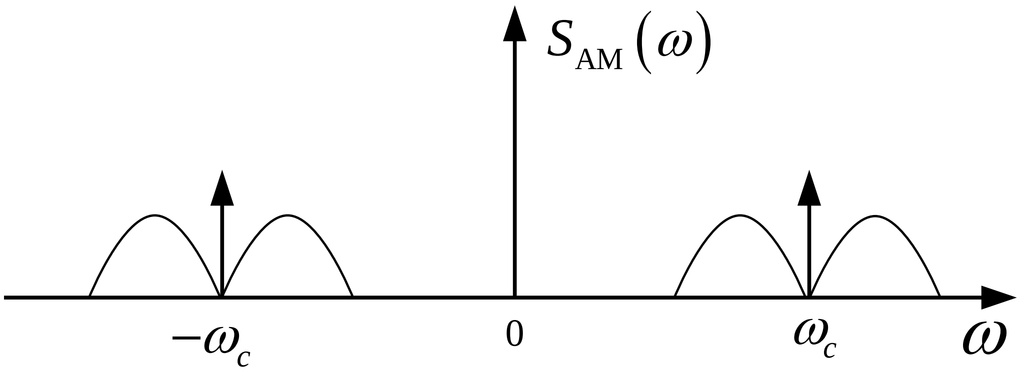


按照信号是否经过调制

- 基带信号（低通信号）：信息源发出的信号，能量主要集中在低频端；

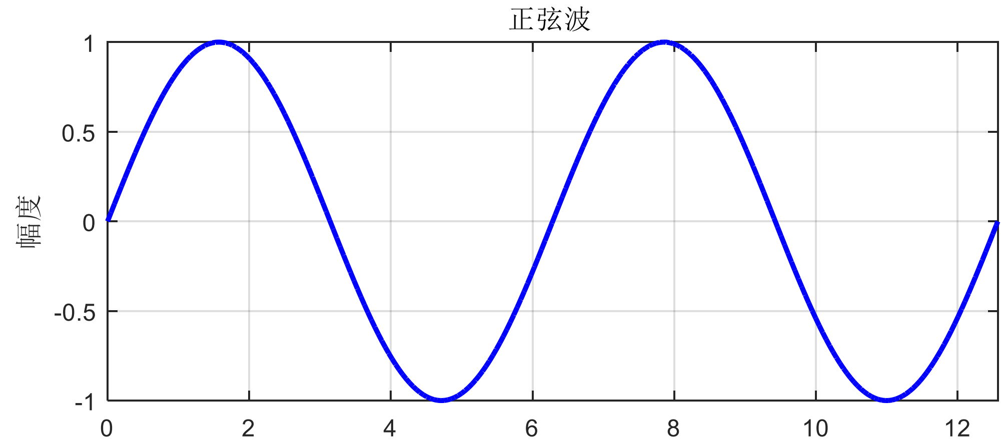


- 频带信号（带通信号）：将基带信号以特定调制方式“载荷”到某一指定的高频载波。

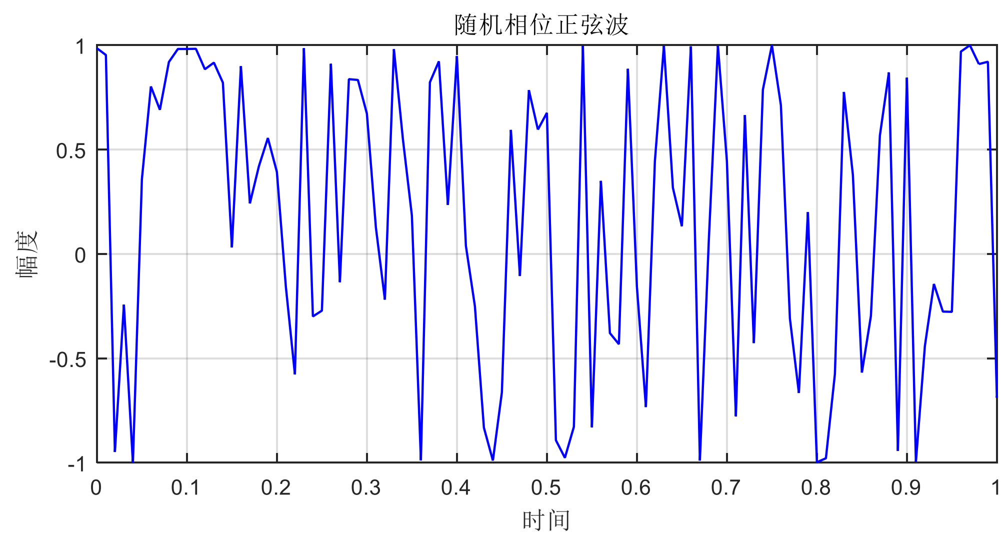


信号是否可用确定的时间函数表示

- 确知信号 ：可以用明确的数学表示式表示，无论过去、现在和未来的任何时间，其取值总是唯一确定的；



- 随机信号：没有明确的数学表示式，给定一个时间值通常只知道它取某一数值的概率。



按照周期性

❖周期信号

信号满足

$$s(t)=s(t+nT_0),-\infty<t<\infty$$

T_0-信号的周期，n-任意整数

❖非周期信号

不存在满足上式的任何大小的T值

按照能量

❖ 能量信号：能量有限，平均功率为零

$$0 < E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt < \infty$$

- 能量的单位是J
- 如限时信号、某些非限时信号 $e^{-|t|}$、 e^{-t^2}

❖ 功率信号：平均功率有限，能量无穷大

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt < \infty$$

- 功率的单位是W
- 周期信号是功率信号

信号分析方法

- 时域分析法：写出信号的时域表达式，绘制信号的波形。
  - 可以方便的计算出信号某时刻的值
- 频域分析法：确定信号带宽，用合适的信道来传输信息。

主 要 内 容

- 2.1 信号的分类
- 2.2 确知信号的频域性质
- 2.3 确知信号的时域性质
- 2.4 确知信号通过线性系统

2.2.1 功率信号的频谱

周期性功率信号频谱定义

- 设一个周期性功率信号$s(t)$的周期为T_0，展开成指数形式的傅里叶级数

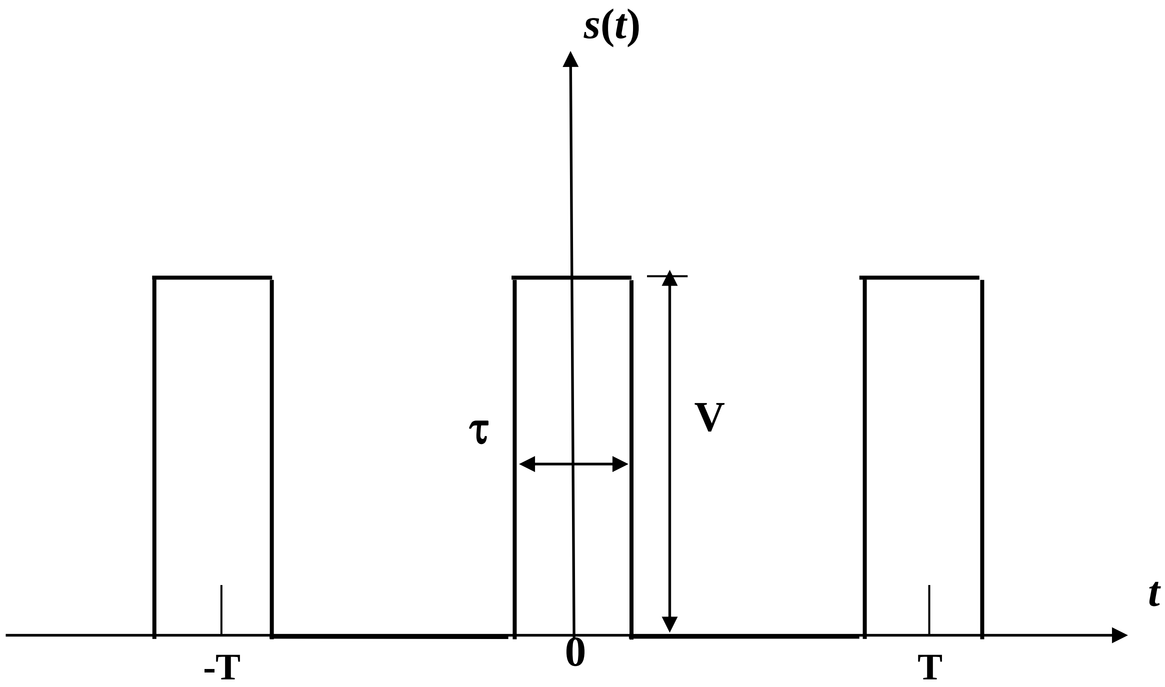
$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

其中

$$C_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)e^{-jn\omega_0 t}dt, \quad \omega_0=2\pi f_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

周期信号的傅里叶级数

【例2-1】试求如图所示周期性方波的频谱。



周期信号的傅里叶级数

- 解：此周期性方波的周期为 *T*，宽度为 **τ**，幅度为 *V*，它用公式表示如下：

$$s(t)=\begin{cases} V, & -\tau/2 \le t \le \tau/2 \\ 0, & \tau/2 < t < (T-\tau/2) \end{cases}$$

$$s(t)=s(t-T), \qquad -\infty < t < \infty$$

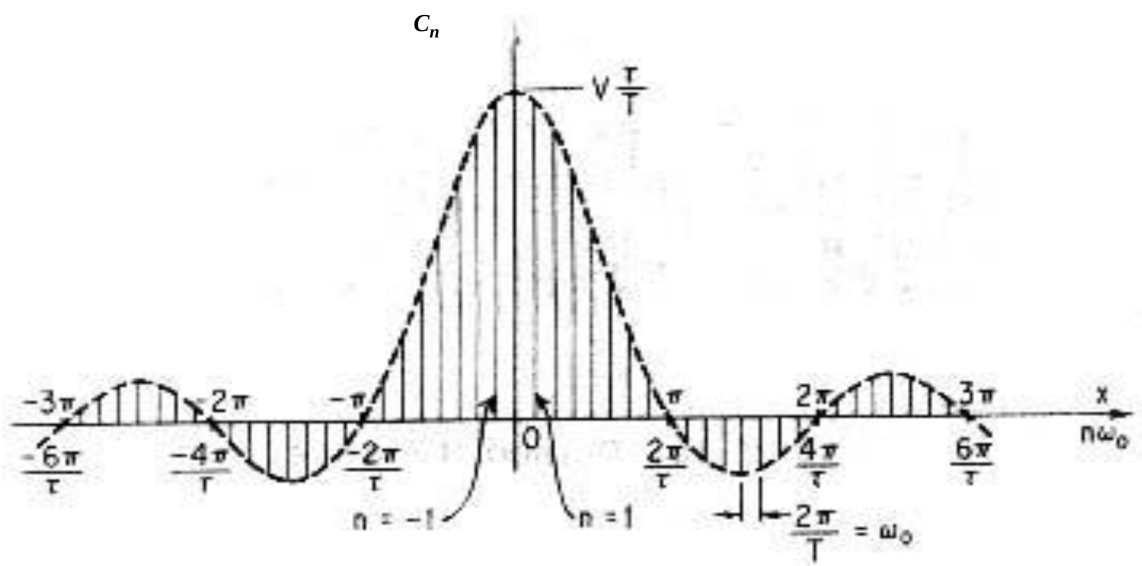
$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} V e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\left[-\frac{V}{jn\omega_0}e^{-jn\omega_0 t}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$=\frac{V}{T}\frac{e^{jn\omega_0\frac{\tau}{2}}-e^{-jn\omega_0\frac{\tau}{2}}}{jn\omega_0}=\frac{V}{n\pi}\sin n\omega_0\frac{\tau}{2}=\frac{V\tau}{T}Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

周期信号的傅里叶级数

- 此信号的傅里叶级数表示式为

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{V\tau}{T}Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)e^{jn\omega_0 t}$$



2.2.2 能量信号的频谱密度

❖ 傅里叶变换

- 表达式： $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- 充分条件：$f(t)$在无限区间内绝对可积

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

傅里叶变换的运算特性(1)

	$f(t)$	$\Leftrightarrow$	$F(\omega)$
❖放大	$kf(t)$		$kF(\omega)$
❖叠加	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$		$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
❖复共轭	$f^*(t)$		$F^*(-\omega)$
❖尺度变换	$f(at)$		$\dfrac{1}{\|a\|} F(\dfrac{\omega}{a})$
❖时移	$f(t-t_0)$		$e^{-j\omega t_0} F(\omega)$
❖频移	$e^{j\omega_0 t} f(t)$		$F(\omega - \omega_0)$

傅里叶变换的运算特性(2)

	$f(t)$ $\Leftrightarrow$	$F(\omega)$
❖调制	$f(t)\cos\omega_0 t$	$\frac{1}{2}F(\omega+\omega_0)+\frac{1}{2}F(\omega-\omega_0)$
❖对偶	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
❖时域卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$
❖频域卷积	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}[F_1(\omega)*F_2(\omega)]$
❖时域微分	$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
❖时域积分	$\int_{-\infty}^{t} f(z)dz$	$\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$

常用信号的傅里叶变换(1)

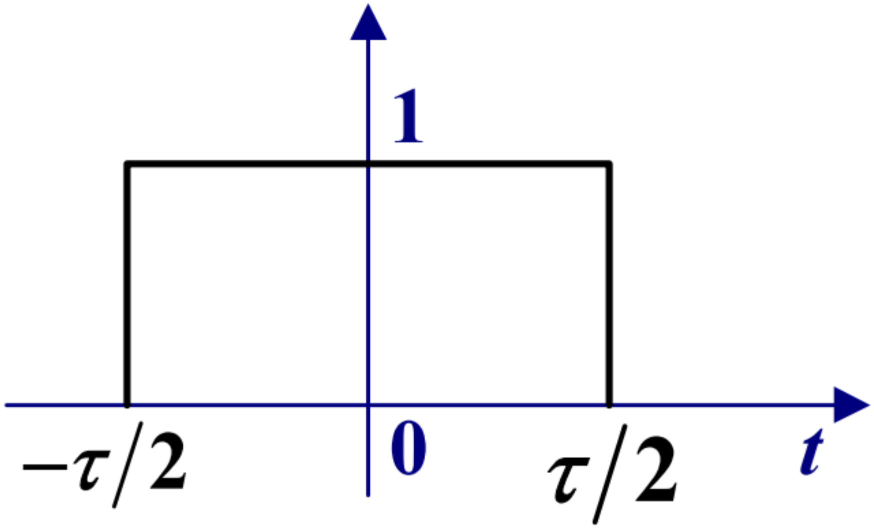
$f(t)$	$\Leftrightarrow$	$F(\omega)$
$\delta(t)$		1
1		$2\pi\delta(\omega)$
$u(t)$		$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$
e^{-at}		$\dfrac{1}{a+j\omega}$
$e^{-a\|t\|}$		$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$

常用信号的傅里叶变换(2)

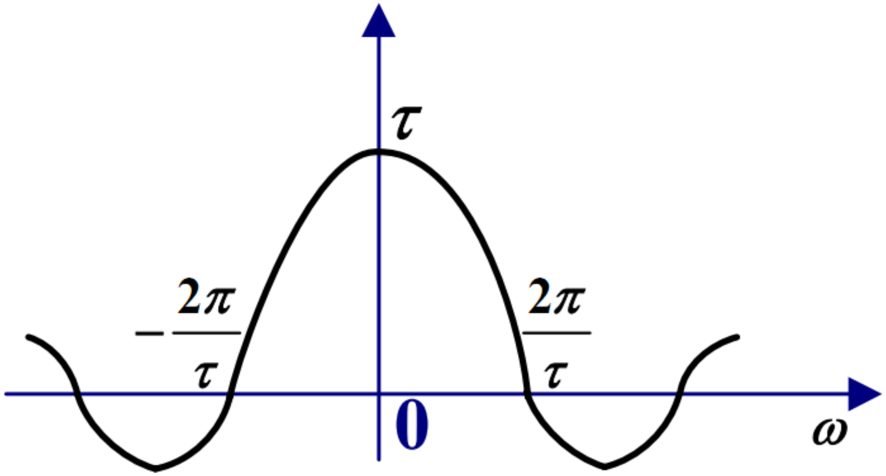
$f(t)$	$\Leftrightarrow$	$F(\omega)$
$\mathrm{sgn}(t)$		$\dfrac{2}{j\omega}$
任意周期信号 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$		$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_0)$
$\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$		$\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$
$\cos \omega_0 t$		$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$		$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

常用信号的傅里叶变换(3)

$$rect\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

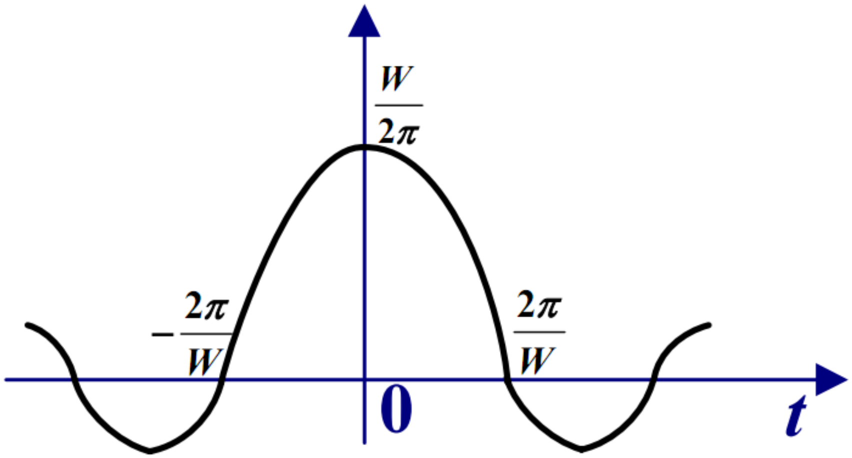


$$\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

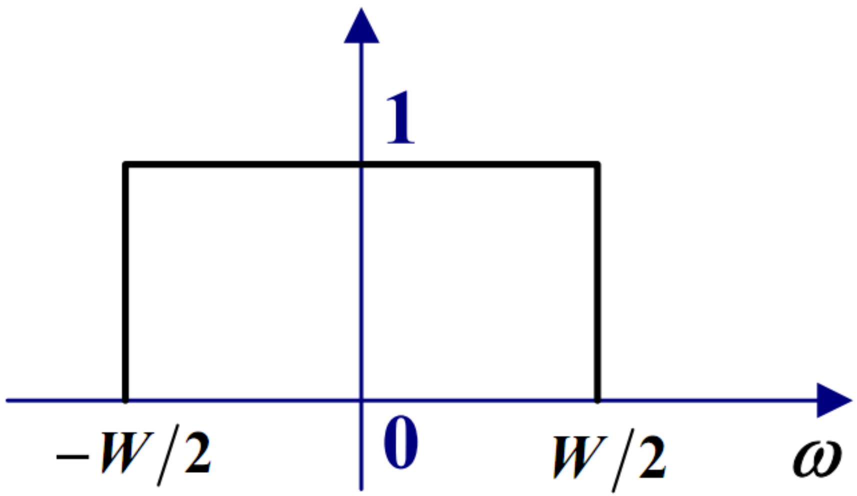


常用信号的傅里叶变换(4)

$$\frac{W}{2\pi}Sa\left(\frac{Wt}{2}\right)$$

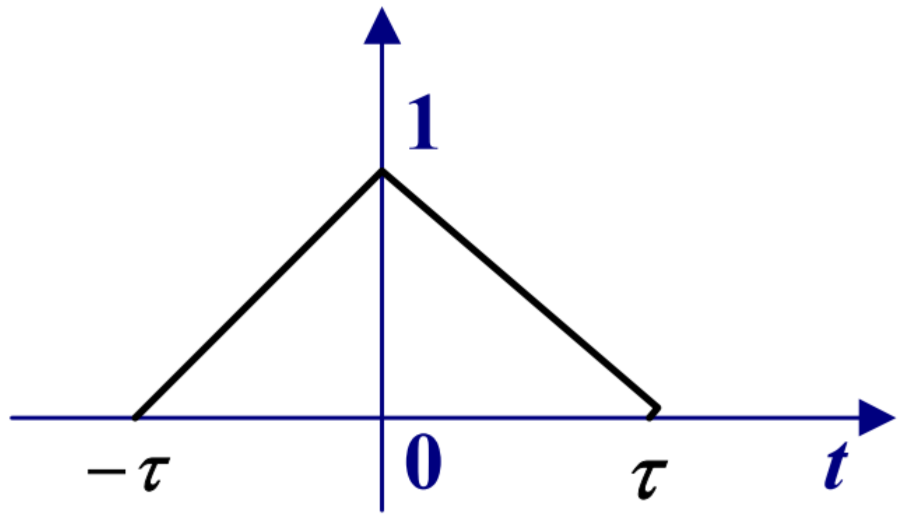


$$rect\left(\frac{\omega}{W}\right)$$

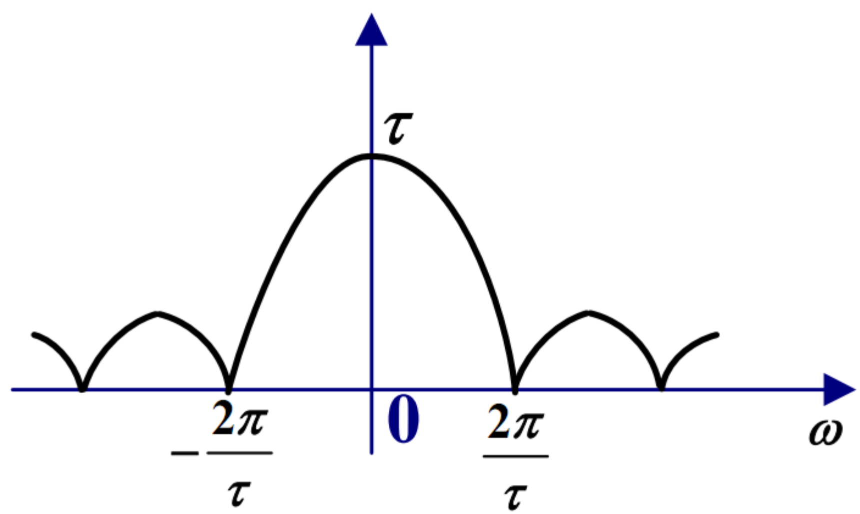


常用信号的傅里叶变换(5)

$$tri\left(\frac{t}{\tau}\right)$$



$$\tau Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



2.2.3 能量信号的能量谱密度

❖ **定义：由巴塞伐尔(Parseval)定理**

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}s^2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|S(f)\right|^2df=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|S(\omega)\right|^2d\omega$$

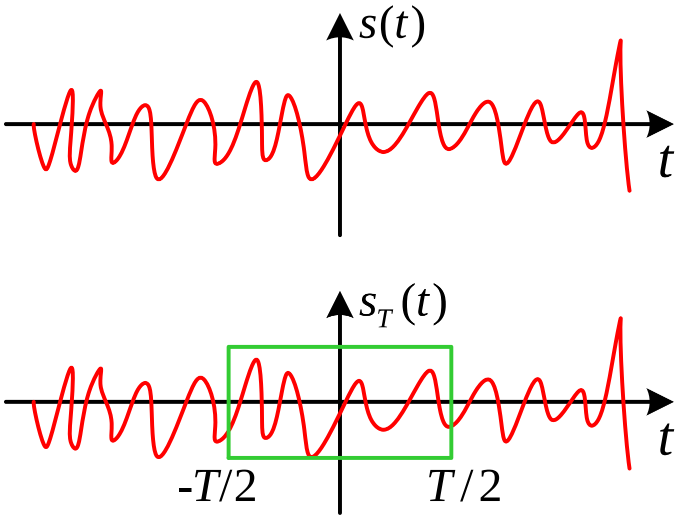
❖ **通常将 $E(f)=|S(f)|^2$ 定义为能量信号 $s(t)$ 的能量谱密度。**

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}E(f)df=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E(\omega)d\omega$$

2.2.4 功率信号的功率谱密度

❖定义截短信号

$$s_T(t)=\begin{cases} s(t) & |t|<\dfrac{T}{2} \\ 0 & \text{其它}t \end{cases}$$



$$s_T(t)\Leftrightarrow S_T(\omega)$$

$$E_T=\int_{-T/2}^{T/2}s_T^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S_T(\omega)|^2\,d\omega$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{E_T}{T}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S_T(\omega)|^2\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|S_T(\omega)|^2\,d\omega}$$

$$P(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|S_T(\omega)|^2$$ **或** $$P(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|S_T(f)|^2$$

主 要 内 容

- 2.1 信号的分类
- 2.2 确知信号的频域性质
- 2.3 确知信号的时域性质
- 2.4 确知信号通过线性系统

确知信号的卷积

❖ 连续时间信号 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$，定义卷积为

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau$$

❖ 离散时间信号 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，定义离散卷积为

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m)$$

卷积的性质

- 与单位冲激信号的卷积 $s(t)*\delta(t)=s(t)$

$$s(t)*\delta(t-t_0)=s(t-t_0)$$

$$s(t-t_1)*\delta(t-t_2)=s(t-t_1-t_2)$$

- 交换律

$$s_1(t)*s_2(t)=s_2(t)*s_1(t)$$

- 分配律

$$s_1(t)*[s_2(t)+s_3(t)]=s_1(t)*s_2(t)+s_1(t)*s_3(t)$$

- 结合律

$$s_1(t)*[s_2(t)*s_3(t)]=[s_1(t)*s_2(t)]*s_3(t)$$

自相关函数

- 自相关函数反映同一信号 $s(t)$ 在不同时刻的关联程度
  - 能量信号 $R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)s(t+\tau)dt,\quad -\infty<\tau<\infty$

    (1) $R(0)=\int_{-\infty}^{\infty}s^2(t)dt=E$

    (2) $R(\tau)\Leftrightarrow|S(\omega)|^2$
  - 功率信号 $R(\tau)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)s(t+\tau)dt,\quad -\infty<\tau<\infty$

    (1) $R(0)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s^2(t)dt=P$

    (2) $R(\tau)\Leftrightarrow P(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}|S_T(\omega)|^2$

互相关函数

- 互相关函数反映两个信号 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 之间的关联程度

  - 能量信号

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t+\tau)dt,\quad -\infty<\tau<\infty$$

  - 功率信号

$$R_{12}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)s_2(t+\tau)dt,\quad -\infty<\tau<\infty$$

相关函数的性质

1. $R(0) \geq |R(\tau)|$

2. $R(\tau) = R(-\tau)$

3. $R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau)$

4. **对于周期为 T 的周期信号，其自相关函数仍为同周期的周期信号**

$$R(\tau) = R(\tau + nT)$$

主 要 内 容

- 2.1 信号的分类
- 2.2 确知信号的频域性质
- 2.3 确知信号的时域性质
- 2.4 确知信号通过线性系统

确知信号通过线性系统(1)

$x(t)$

$X(\omega)$

线性系统

$H(\omega), h(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

❖ 传递函数

$$h(t) \Leftrightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$|H(\omega)|$ 称幅–频特性

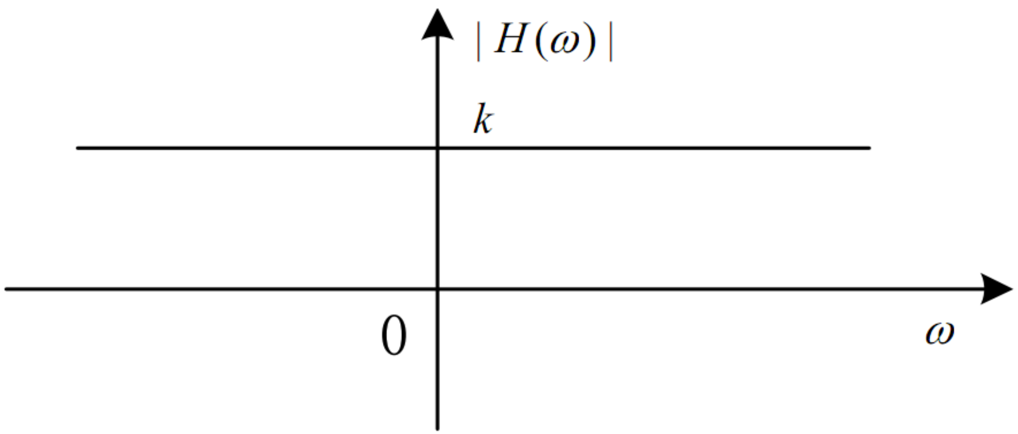
$\varphi(\omega)$ 称相–频特性

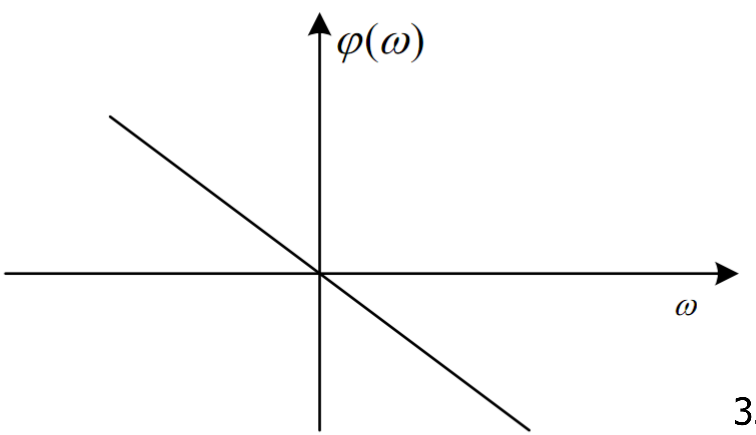
确知信号通过线性系统(2)

- 信号不失真条件—理想系统

$$y(t) = kx(t-t_0) \Rightarrow \begin{cases} h(t) = k\delta(t-t_0) \\ H(\omega) = ke^{-j\omega t_0} = ke^{j\varphi(\omega)} \end{cases}$$

- 幅-频特性：是一个不随频率变换的常数
- 相-频特性：是一条过原点的直线

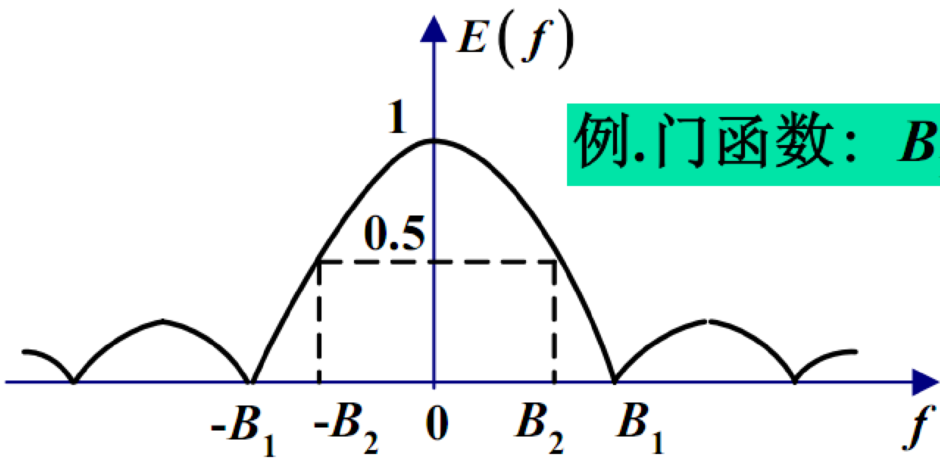




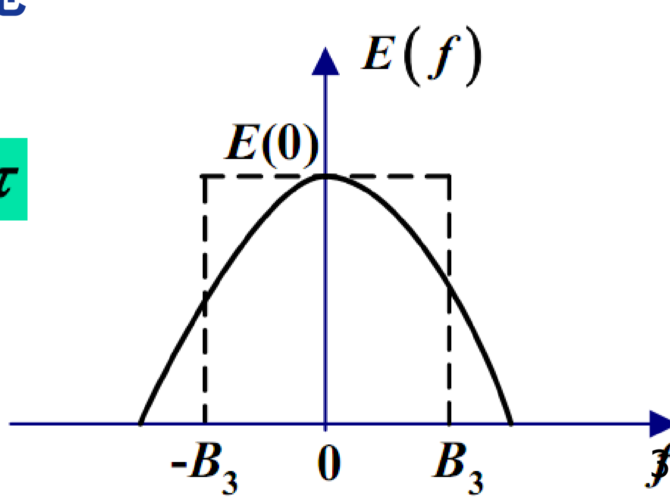
信号的带宽

- 信号带宽：信号能量或功率主要部分集中的频率范围（正频率部分）—— HZ
- 定义方法
  - 零点带宽：B_1
  - 3dB(半功率点)带宽：B_2
  - 等效矩形带宽：B_3
  - 占总能量（功率）的百分比带宽

$$B_3 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} E(f)df}{2E(0)}$$



例.门函数：$B_1 = 1/\tau$



Thank You !