高斯定理:

在真空中静电场，穿过任意闭合曲面的电场强度通量，等于该闭合曲面所包围的所有电荷的代数和除以ε_0 。

点电荷系

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i^{in}$$

连续分布带电体

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int dq$$

1、利用高斯定理求场强的条件:

电荷分布必须具有一定的对称性。

2、利用高斯定理求场强步骤：

1) 进行对称性分析。由电荷分布对称性→场强分布对称性。

球对称性（均匀带电球面、球体、球壳、多层同心球壳等）

轴对称性（均匀带电无限长直线、圆柱体、圆柱面等）

面对称性（均匀带电无限平面、平板、平行平板层等）

2) 合理选取高斯面，使通过该面的电通量易于计算。

球对称性：球面

轴对称性：圆柱面

面对称性：圆柱面

3) 计算高斯面内包围的电荷的电量（带电体要用微积分）。

4) 用高斯定理求场强。

3、高斯面的选法:

a、高斯面一定要通过待求场强的场点。

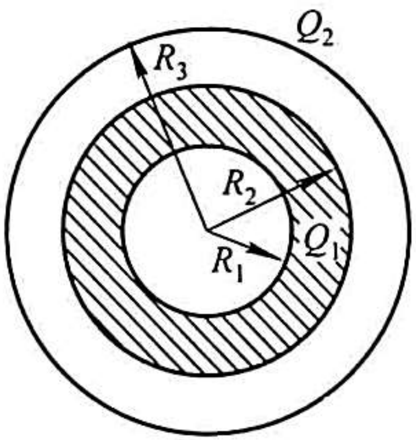
b、高斯面的各部分要与场强垂直或者与场强平行。

与场强垂直的那部分上的各点的场强要相等。

c、高斯面的形状应尽量简单。

P204 5-22 一个内外半径分别为R_1和R_2的均匀带电球壳，总电荷为Q_1，球壳外同心罩一个半径为R_3的均匀带电球面，球面带电荷为Q_2。求电场分布；电场强度是否为离球心距离r的连续函数？试分析。

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i^{in} \qquad E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i^{in}$$

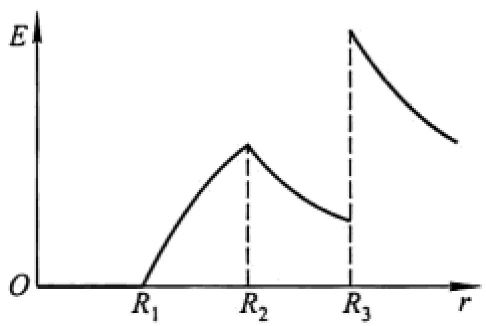


解： 取半径为r的同心球面为高斯面 $E4\pi r^2 = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$

$r<R_1$，该高斯面内无电荷，$\sum q = 0$，故$E_1 = 0$

$R_1<r<R_2$，高斯面内电荷$\sum q = \frac{Q_1(r^3-R_1^3)}{R_2^3-R_1^3}$，

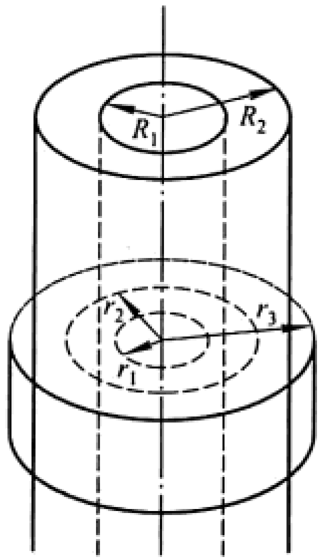
$$E_2 = \frac{Q_1(r^3 - R_1^3)}{4\pi\varepsilon_0(R_2^3 - R_1^3)r^2}$$



$R_2<r<R_3$，高斯面内电荷为Q_1，$E_3 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$r>R_3$，高斯面内电荷为Q_1+Q_2，$E_4 = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

P205 5-24 两个带有等量异号电荷的无限长同轴圆柱面，半径分别为R_1和R_2($R_2>R_1$)，单位长度上的电荷为λ。求离轴线为r处的电场强度：(1) $r<R_1$，(2) $R_1<r<R_2$， (3) $r>R_2$。



$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i^{in} \qquad E2\pi rl = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i^{in}$$

解： 作同轴圆柱面为高斯面，根据高斯定理 $E2\pi rL = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$

$r<R_1$，该高斯面内无电荷，$\sum q = 0$，故$E_1 = 0$

$R_1<r<R_2$，高斯面内电荷$\sum q = \lambda L$，

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

$r>R_2$，高斯面内电荷 $\sum q = 0$ （等量异号电荷），

$E_3 = 0$

电势的计算

（1）利用定义式：

$$\boxed{V_A = \int_A^{电势零点} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

已知在积分路径上 $\vec{E}$ 的函数表达式

电荷分布在有限区域，取无穷远处为电势零点，
电荷分布在无限区域，取有限区域内一点为电势零点。

（2）利用电势的叠加原理

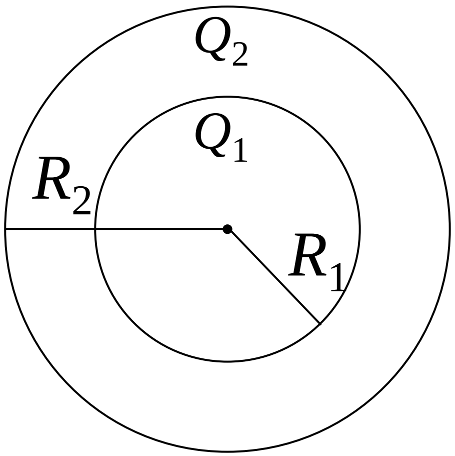
电荷系：$V_A = \sum_{i=1}^{n} V_i$　　带电体：$V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \dfrac{\mathrm{d}q}{r}$

◆ 电势差　$$\boxed{U_{AB} = V_A - V_B = \int_{AB} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

物理学
第六版

P205 5-30 两个同心球面的半径分别为R_1和R_2，各自带有电荷Q_1和Q_2。求：(1) 各区域电势的分布，并画出分布曲线；(2) 两球面上的电势差？

$$\boxed{V_A=\int_A^{\text{电势零点}}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$



（1）由高斯定理可求得电场分布：

$$\boldsymbol{E}_1=0 \qquad (r<R_1)$$

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (R_1<r<R_2)$$

$$\boldsymbol{E}_3=\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (r>R_2)$$

$(r\le R_1)$

$$V_1=\int_r^{R_1}\boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{R_2}^{\infty}\boldsymbol{E}_3\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$
$$=0+\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$
$$=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

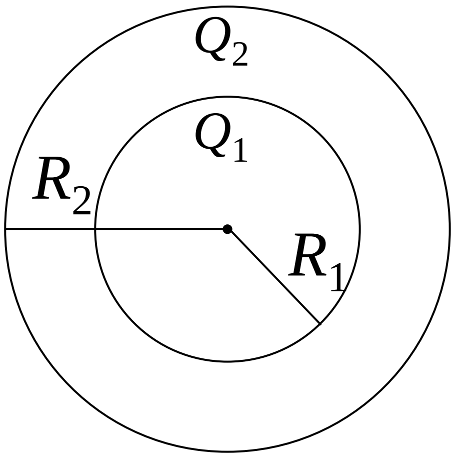
$(R_1\le r\le R_2)$

$$V_2=\int_r^{R_2}\boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{R_2}^{\infty}\boldsymbol{E}_3\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$
$$=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$
$$=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

5-22 同心球壳换为同心球面

P205 5-30 两个同心球面的半径分别为R_1和R_2，各自带有电荷Q_1和Q_2。求：(1) 各区域电势的分布，并画出分布曲线；(2) 两球面上的电势差？

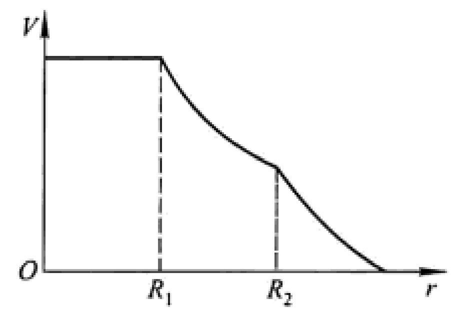
$$\boxed{V_A = \int_A^{\text{电势零点}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$



$(r \le R_1)$ $$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$(R_1 \le r \le R_2)$ $$V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$(r \ge R_2)$ $$V_3 = \int_r^{\infty} \boldsymbol{E}_3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



（1）由高斯定理可求得电场分布：

$$\boldsymbol{E}_1 = 0 \qquad (r < R_1)$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (R_1 < r < R_2)$$

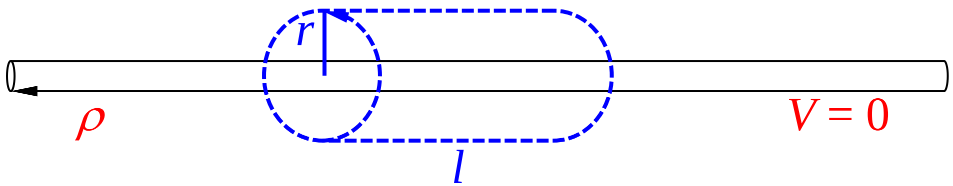
$$\boldsymbol{E}_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (r > R_2)$$

（2）两球面上的电势差：

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

5-22 同心球壳换为同心球面

P206 5-31 一半径为R的无限长带电细棒，其内部的电荷均匀分布，电荷的体密度为ρ。现取棒表面为零电势，求空间电势分布，并画出电势分布曲线。



$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E2\pi r l = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

$$V_p = \int_p^{\infty} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

解： 取高度为l、半径为r且与带电棒同轴的圆柱面为高斯面

$r \le R$，高斯面体积为$\pi r^2 l$，高斯面内电荷量$\sum q = \pi r^2 l\rho$，

$$E_1 2\pi r l = \frac{\pi r^2 l\rho}{\varepsilon_0} \qquad E_1 = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

$r \ge R$，高斯面包围带电细棒，高斯面内电荷量$\sum q = \pi R^2 l\rho$，

$$E_2 2\pi r l = \frac{\pi R^2 l\rho}{\varepsilon_0} \qquad E_2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

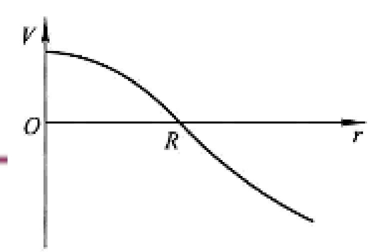
棒表面为零电势，则空间电势分布：

$(r \le R)$

$$V_1 = \int_r^R \boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_r^R \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}r = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R^2 - r^2)$$

$(r \ge R)$

$$V_2 = \int_r^R \boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_r^R \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}$$



有电介质时的高斯定理的应用

（1）分析自由电荷分布的对称性，选择适当的高斯面，求出电位移矢量：

$$\oint_S \vec{\mathbf{D}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}} = \sum_{S内} q_0$$

（2）根据电位移矢量与电场的关系，求出电场强度。

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}$$

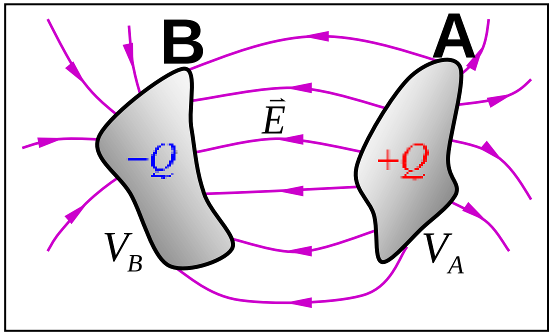
（3）根据电极化强度与电场的关系，求出电极化强度。

$$\vec{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{\mathbf{E}}$$

（4）根据极化电荷与电极化强度关系，求出极化电荷。

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{e}_n \qquad \vec{\mathbf{D}} \rightarrow \vec{\mathbf{E}} \rightarrow \vec{\mathbf{P}} \rightarrow \sigma'$$

电容器电容的计算



$$C = \frac{Q}{U} \qquad U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

步骤：

（1）设两极板分别带电$\pm Q$

（2）求两极板间的电场强度$\vec{E}$

一般用高斯定理

（3）求两极板间的电势差U

（4）由$C=Q/U$求C

P244 6-24 一片二氧化钛晶片，其面积为1.0 cm^2，厚度为0.10 mm。把平行平板电容器的两极板紧贴在晶片两侧。**(1)** 求电容器的电容；**(2)** 当在电容器的两极间加上12 V电压时，极板上的电荷为多少？ 此时自由电荷和极化电荷的面密度各为多少？**(3)** 求电容器内的电场强度。

（1） 二氧化钛的相对电容率$\varepsilon_r=173$，有介质的平板电容器的电容：

$$C=\frac{\varepsilon S}{d}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}=1.53\times10^{-9}\ \mathrm{F}$$ **P226 例1**

（2） 电容器加上$U=12\ \mathrm{V}$的电压时，极板上的电荷：

$$Q=CU=1.84\times10^{-8}\ \mathrm{C}$$

极板上的自由电荷面密度：

$$\sigma_0=\frac{Q}{S}=1.84\times10^{-8}\ \mathrm{C\cdot m^{-2}}$$

晶体表面极化电荷面密度：

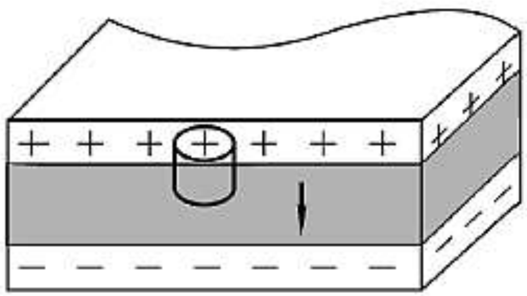
$$\sigma_0{}'=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_0=1.83\times10^{-4}\ \mathrm{C\cdot m^{-2}}$$

P219 6-4(a)

（3） 晶片内的电场强度：

$$E=\frac{U}{d}=1.2\times10^{5}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$$

P245 6-27 有一个平板电容器，充电后极板上电荷面密度为 $\sigma_0=4.5\times10^{-3}\ \mathrm{C\cdot m^{-2}}$，现将两极板与电源断开，然后再把相对电容率为 $\varepsilon_r=2.0$ 的电介质插入两极板之间。此时电介质中电位移矢量 $\boldsymbol{D}$、电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和极化强度 $\boldsymbol{P}$ 各为多少？



分析：由介质中的高斯定理可求得电位移矢量 $\boldsymbol{D}$，再根据 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}-\varepsilon_0\boldsymbol{E}$，可求得电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$。

解：介质中的电位移矢量 $\boldsymbol{D}$：

$$\oint \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=Q$$

$$D=\frac{Q}{S}=\sigma_0=4.5\times10^{-3}\ \mathrm{C\cdot m^{-2}}$$

介质中的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电极化强度 $\boldsymbol{P}$：

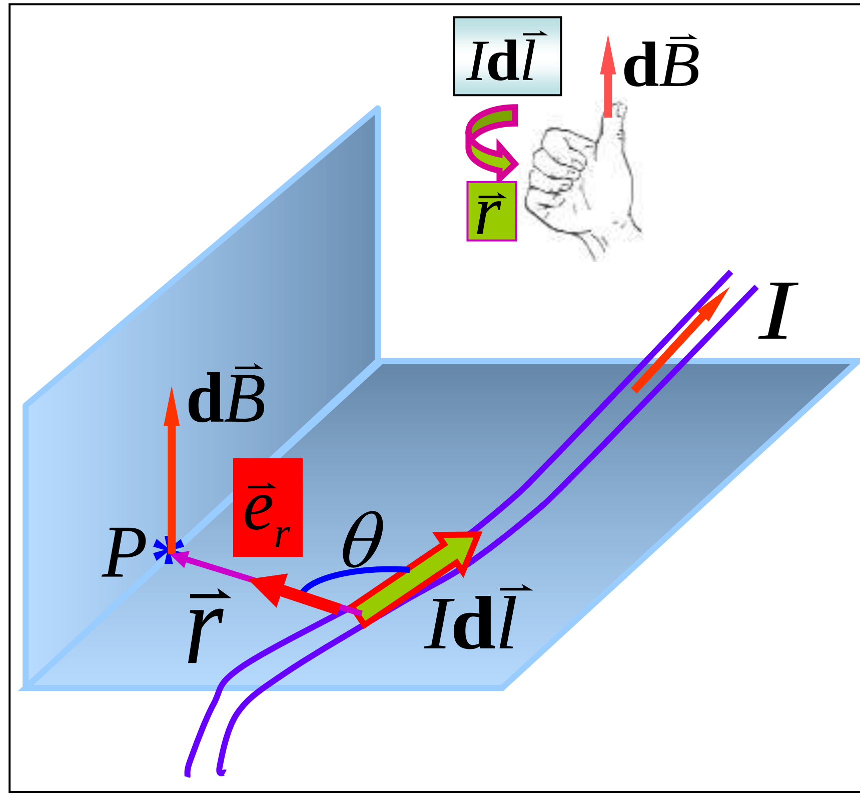
$$E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=2.5\times10^{8}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$$

$$P=D-\varepsilon_0 E=2.3\times10^{-3}\ \mathrm{C\cdot m^{-2}}$$

$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{E}$ 方向相同，均由正极板指向负极板（图中垂直向下）。

毕奥—萨伐尔定律

矢量式： $\boxed{\mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}}$



大小： $\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$

方向： $\boxed{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}$ 右手螺旋法则判定

◆任意载流导线在点P处的磁感强度：

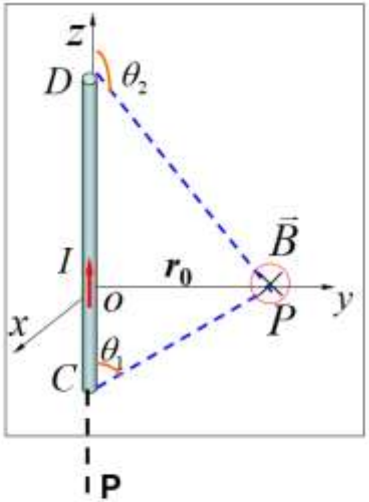
$$\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}$$

$$\boxed{B_x = \int \mathrm{d}B_x\,,\ B_y = \int \mathrm{d}B_y}$$

磁感强度叠加原理

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$



无限长载流长直导线

$\theta_1 \to 0$

$\theta_2 \to \pi$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$$

半无限长载流长直导线

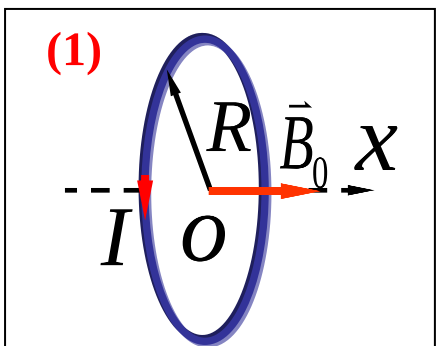
$\theta_1 \to \frac{\pi}{2}$

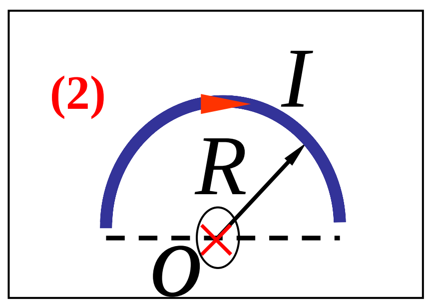
$\theta_2 \to \pi$

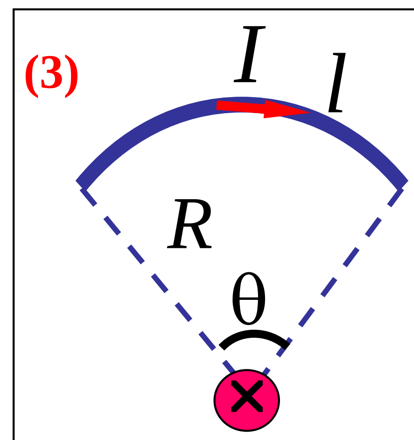
$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}$$

P点位于导线延长线上，***B*=0**

圆弧形载流导线圆心点的磁场





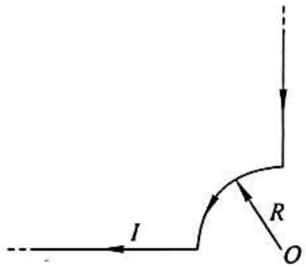


$$B_0=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

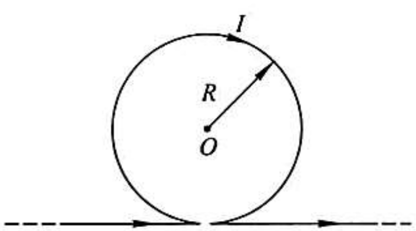
$$B_0=\frac{\mu_0 I}{4R}$$

$$B_0=\frac{\mu_0 I\theta}{4\pi R}=\frac{\mu_0 Il}{4\pi R^2}$$

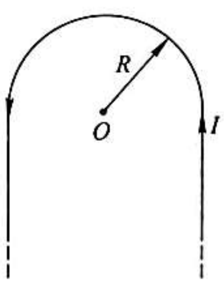
P308 7-11 如图所示，几种载流导线在平面内分布，电流均为I，它们在O点的磁感强度各为多少？。



(a)



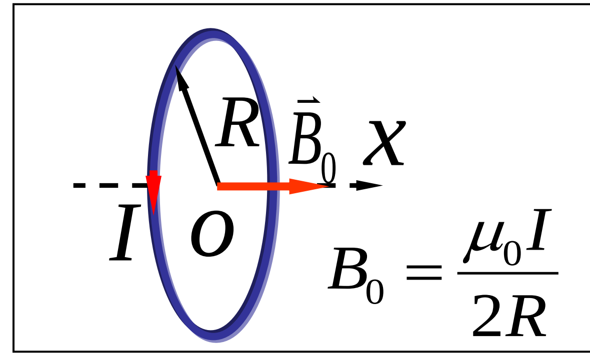
(b)



(c)

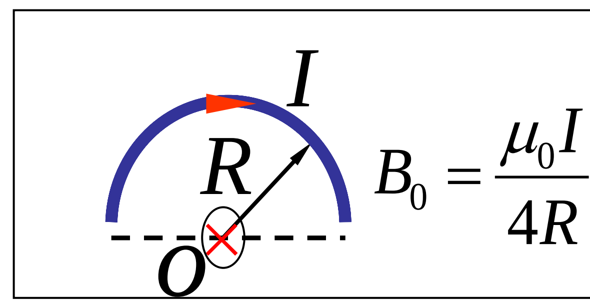
无限长载流长直导线

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$$



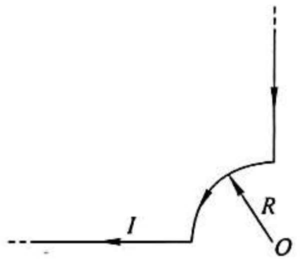
半无限长载流长直导线

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}$$



*P*点位于导线延长线上，***B*=0**

P308 7-11 如图所示，几种载流导线在平面内分布，电流均为I，它们在O点的磁感强度各为多少？。

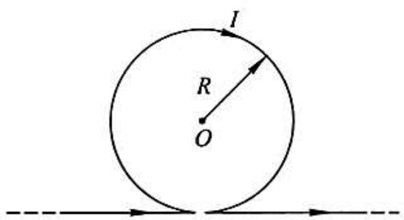


(a)

（a）O点为两长直电流延长线一点，因此两长直电流在O点产生的磁场为零；则O点总的磁感强度为1/4圆弧电流所激发：

$$B=\frac{1}{4}\frac{\mu_0 I}{2R}=\frac{\mu_0 I}{8R}$$

***B*的方向垂直纸面向外**

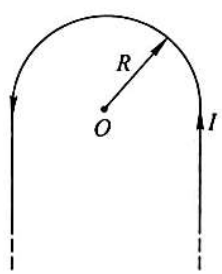


(b)

（b）将载流导线分解为圆电流和长直电流：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}-\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

***B*的方向垂直纸面向里**



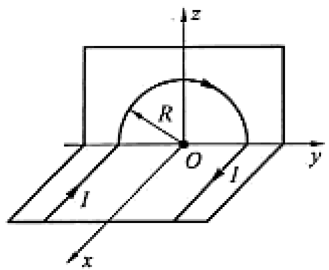
(c)

（c）将载流导线分解为1/2圆电流和两段半无限长直电流：

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}+\frac{\mu_0 I}{4\pi R}+\frac{\mu_0 I}{4R}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}+\frac{\mu_0 I}{4R}$$

***B*的方向垂直纸面向外**

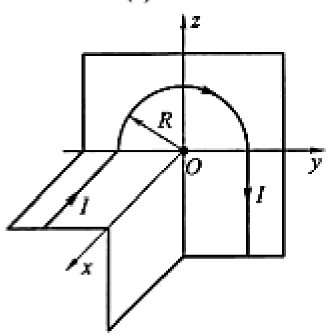
P309 7-12 载流导线形状如图所示（图中直线部分导线延伸到无穷远），求O点的磁感强度$\boldsymbol{B}$。



(a)

（a）将载流导线分解为1/2圆电流和两段半无限长直电流：

$$\boldsymbol{B}=-\frac{\mu_0 I}{4R}\boldsymbol{i}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\boldsymbol{k}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\boldsymbol{k}=-\frac{\mu_0 I}{4R}\boldsymbol{i}-\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\boldsymbol{k}$$

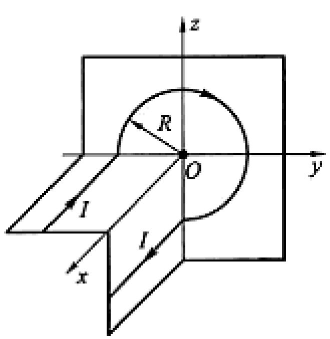


(b)

（b）将载流导线分解为1/2圆电流和两段半无限长直电流：

$$\boldsymbol{B}=-\frac{\mu_0 I}{4R}\boldsymbol{i}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\boldsymbol{i}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\boldsymbol{k}$$

$$=-\frac{\mu_0 I}{4R}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\boldsymbol{i}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\boldsymbol{k}$$



(c)

（c）将载流导线分解为3/4圆电流和两段半无限长直电流：

$$\boldsymbol{B}=-\frac{3\mu_0 I}{8R}\boldsymbol{i}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\boldsymbol{j}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\boldsymbol{k}$$

安培环路定理

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

在真空的恒定磁场中，磁感强度*B*沿任一闭合路径的积分的值，等于μ_0乘以该闭合路径所包围的各电流的代数和。

电流*I*正负的规定：*I*与 *l* 成右螺旋时，*I*为正；反之为负。

应用安培环路定理的解题步骤：

（1）分析磁场分布的对称性；

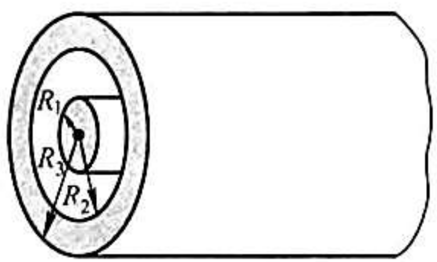
（2）过场点选择适当的路径，使得$\vec{B}$ 沿此环路的积分易于计算：$\vec{B}$的量值恒定，$\vec{B}$与$\mathrm{d}\vec{l}$ 的夹角处处相等。通常选取磁感线作为积分回路（圆形，矩形等）。

（3）求出环路积分；

（4）用右手螺旋定则确定所选定的回路包围电流的正负，最后由磁场的安培环路定理求出磁感应强度 $\vec{B}$ 的大小。

P309 7-17 有一同轴电缆，其尺寸如图所示。两导体中的电流均为I，但电流的流向相反，导体的磁性可不考虑。试计算以下各处的磁感强度：(1) $r<R_1$；(2) $R_1<r<R_2$；(2) $R_2<r<R_3$；(3) $r>R_3$。画出$\boldsymbol{B}$-r图线。

安培环路定理$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = B2\pi r = \mu_0 \sum I$



解：取半径为r的同心圆为积分路径

$r<R_1$，半径为r的同心圆所围面积为πr^2，$\sum I = \dfrac{\pi r^2}{\pi R_1^2} I$

$$B_1 2\pi r = \mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi R_1^2} I \qquad B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

$R_1<r<R_2$，半径为r的同心圆所围面积通电流有$\sum I = I$

$$B_2 2\pi r = \mu_0 I \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$R_2<r<R_3$，半径为r的同心圆所围面积通电流有

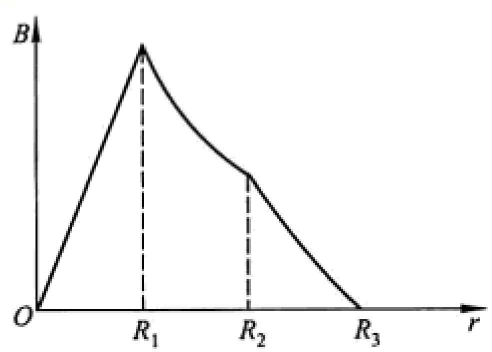
$$\sum I = \left[I - \frac{\pi(r^2 - R_2^2)}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} I \right]$$

$$B_3 2\pi r = \mu_0 \left[I - \frac{\pi(r^2 - R_2^2)}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} I \right] \qquad B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

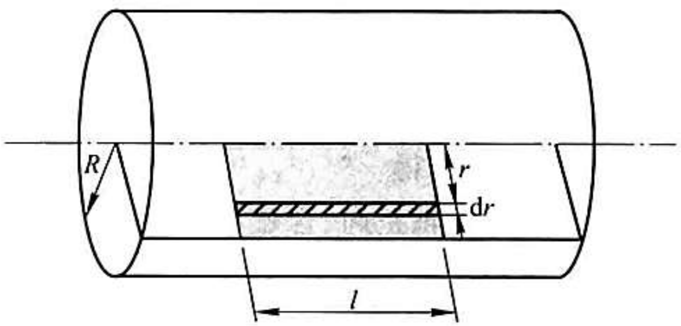
$R>R_3$，半径为r的同心圆所围面积通电流有$\sum I = I - I$

$$B_4 2\pi r = \mu_0 (I - I) = 0$$

$$B_4 = 0$$



P310 7-20 电流I均匀地流过半径为R的圆形长直导线，试计算单位长度导线中通过图中所示剖面的磁通量。



分析：可将导线视作长直圆柱体，电流沿轴向均匀流过导体，故其磁场必然呈轴对称分布，可利用安培环路定理$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum I$，求出导线内部的磁感强度。

解：围绕轴线取导线内部半径为r的同心圆为积分路径，$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = B2\pi r$，此时同心圆所围面积内的电流$\sum I = \dfrac{\pi r^2}{\pi R^2} I$ 。

$$B2\pi r = \mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I \qquad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

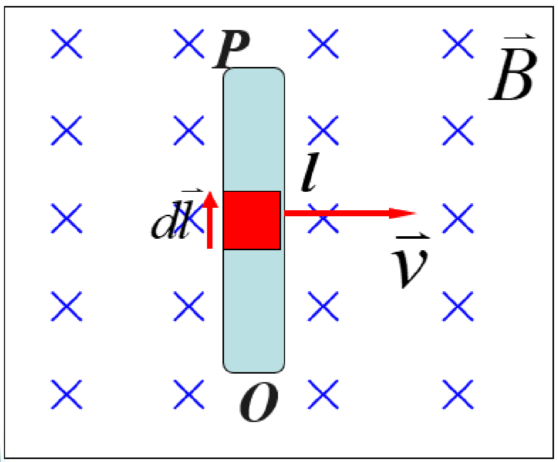
剖面上磁感强度分布不均匀，需使用磁通量的定义$\boldsymbol{\Phi} = \int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$来求解。沿轴线方向在剖面上取面元$\mathrm{d}S = l\mathrm{d}r$，考虑到面元上各点**B** 相同（$\mathrm{d}S$为微分量，可看作面积元上各点距离轴相等），穿过面元的磁通量$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = Bl\mathrm{d}r$，通过积分$\Phi = \int \mathrm{d}\Phi = \int Bl\mathrm{d}r = \int B\mathrm{d}r$（单位长度$l$=1），可得单位长度导线内的磁通量。

$$\Phi = \int_0^R \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

感应电动势

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$ 闭合回路由N匝密绕线圈组成 $$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

动生电动势：$\varepsilon_i = \int_O^P \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_O^P (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$



在均匀磁场中直导体以恒定速度垂直磁场运动而产生的动生电动势。

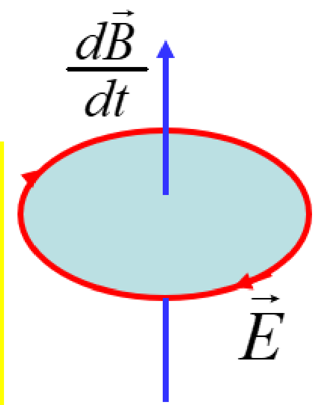
$$\varepsilon_i = vBl$$

ε_i方向$O \longrightarrow P$（右手定则）

闭合回路中的感生电动势：

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

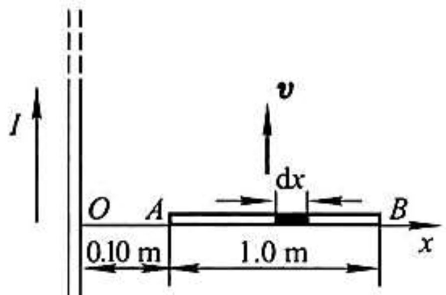
$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$



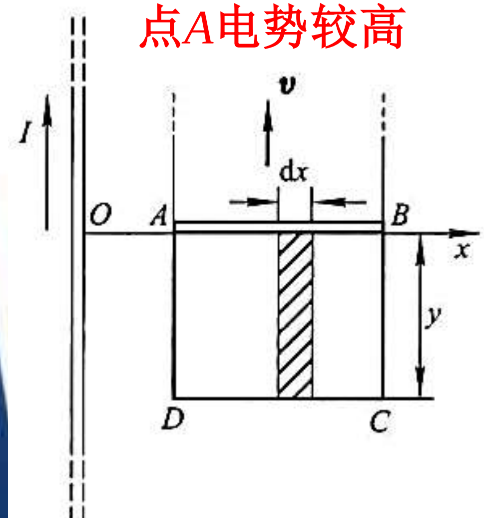
$\vec{E}_k$线的绕行方向与所围的 $\frac{d\vec{B}}{dt}$ 的方向构成左螺旋关系。

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

P349 8-13 如图所示，金属杆AB以匀速率v=2.0 m·s[-1]平行于一长直导线移动，此导线通有电流I＝40 A。问：此杆中的感应电动势为多大？杆的哪一端电势较高？



式中负号表示电动势方向由B指向A，故点A电势较高



分析：建立图中所示的坐标系，取导体元dx，该处的磁感强度$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$，可用公式$\varepsilon=\int(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$求解感应电动势。

解：$$\varepsilon=\int_A^B(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_{0.1}^{1.1}\frac{\mu_0 I v}{2\pi x}\mathrm{d}x=-\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln 11$$

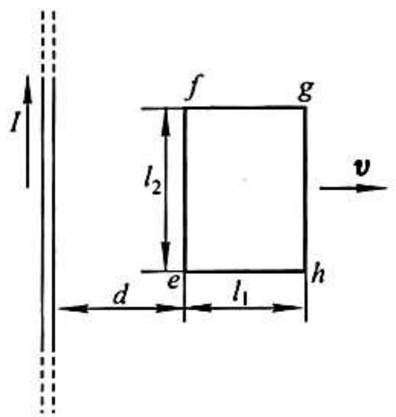
分析：用电磁感应定律$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$求解。构造包含杆$AB$在内的闭合回路。可设想杆$AB$在一个静止的矩形导轨上滑动。设时刻$t$，杆$AB$距导轨下端$CD$的距离为$y$，通过$\boldsymbol{\Phi}=\int\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$求得穿过该回路的磁通量，再由$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$求得感应电动势。

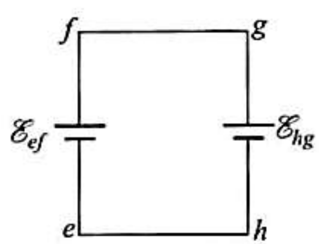
解：设顺时针方向为回路$ABCD$的正向，在距直导线x处，取宽为dx、长为y的面元dS，则穿过面元的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi=B\mathrm{d}S=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}y\mathrm{d}x\qquad \Phi=\int\mathrm{d}\Phi=\int_{0.1}^{1.1}\frac{\mu_0 I y}{2\pi x}\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 I y}{2\pi}\ln 11$$

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln 11\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln 11$$

P350 8-14 如图所示，在一无限长直载流导线的近旁放置一个矩形导体线框，该线框在垂直于导线方向上以匀速率v向右移动，求在图示位置处线框中的感应电动势的大小和方向。





等效电路图

解：当闭合导体线框在磁场中运动时，线框中的总电动势就等于框上各段导体中的动生电动势的代数和。如图所示，导体eh段和fg段上的电动势为零（此两段导体上处处满足：$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$），因而线框中的总电动势为：

$$\varepsilon=\int_e^f(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_g^h(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

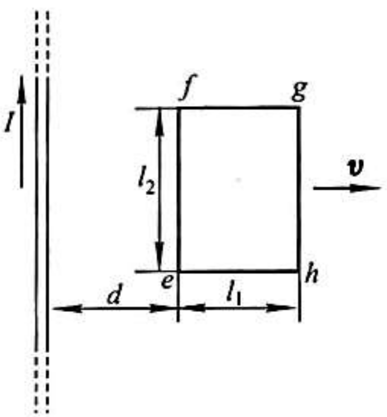
$$=\int_e^f(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}-\int_h^g(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\varepsilon_{\boldsymbol{ef}}-\varepsilon_{\boldsymbol{hg}}$$

$$=\int_0^{l_2}\frac{\mu_0 I v}{2\pi d}\mathrm{d}l-\int_0^{l_2}\frac{\mu_0 I v}{2\pi(d+l_1)}\mathrm{d}l$$

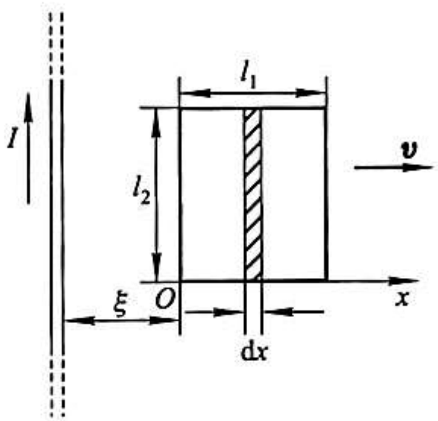
$$=\frac{\mu_0 I v l_1 l_2}{2\pi d(d+l_1)}$$

由$\varepsilon_{\boldsymbol{ef}}>\varepsilon_{\boldsymbol{hg}}$可知，线框中的电动势方向为$efgh$。

P350 8-14 如图所示，在一无限长直载流导线的近旁放置一个矩形导体线框，该线框在垂直于导线方向上以匀速率v向右移动，求在图示位置处线框中的感应电动势的大小和方向。



分析：用电磁感应定律$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$求解。式中$\Phi$是线框运动至任意位置处时，穿过线框的磁通量。为此设时刻t时，线框左边距导线的距离为ξ，如图所示。ξ是时间t的函数，且有$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=v$。在求得线框在任意位置处的电动势$\varepsilon(\xi)$后，再令$\xi=d$，即可得线框在题目所给位置处的电动势。



解：设顺时针方向为线框回路的正向，在任意位置处穿过线框的磁通量为：

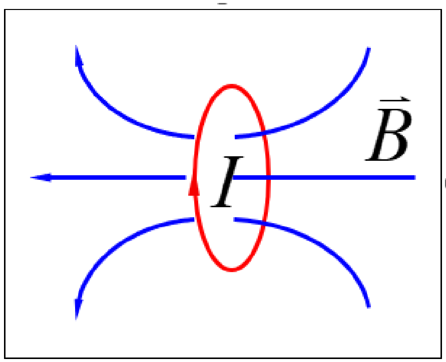
$$\Phi=\int_0^{l_1}\frac{\mu_0 I l_2}{2\pi(x+\xi)}\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 I l_2}{2\pi}\ln\frac{\xi+l_1}{\xi}$$

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 I v l_1 l_2}{2\pi\xi(\xi+l_1)}=\frac{\mu_0 I v l_1 l_2}{2\pi d(d+l_1)}$$

由$\varepsilon>0$可知，线框中电动势方向为顺时针方向。

自感电动势　自感

自感现象：由于回路中电流产生的磁通量发生变化，而在自己回路中激发感应电动势的现象叫做自感现象，这种感应电动势叫做自感电动势。



$\Phi \propto B \propto I$　　$L=\dfrac{\Phi}{I}$

若线圈有N匝

自感：$L=N\dfrac{\Phi}{I}$

自感电动势：

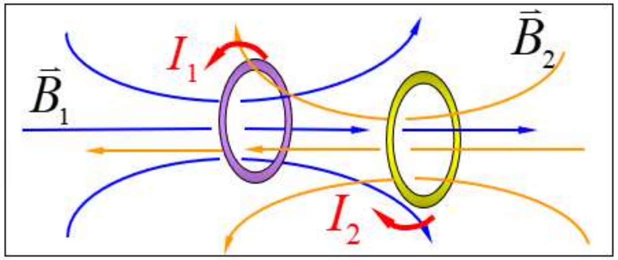
$$\varepsilon_L=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}(LI)}{\mathrm{d}t}=-(L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t})$$

当回路的形状、大小、磁介质及N不变时，L=常数。

$\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=0$　　$\varepsilon_L=-L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$　　自感：$L=-\varepsilon_{\mathrm{L}}\Big/\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

互感电动势　互感

由一个回路中电流变化而在另一个回路中产生感应电动势的现象，叫做互感现象，这种感应电动势叫做互感电动势。



互感系数（互感）：

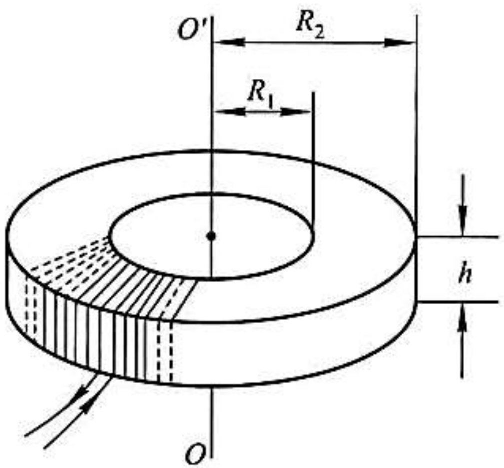
$$M_{12}=M_{21}=M=\frac{\Phi_{21}}{I_1}=\frac{\Phi_{12}}{I_2}$$

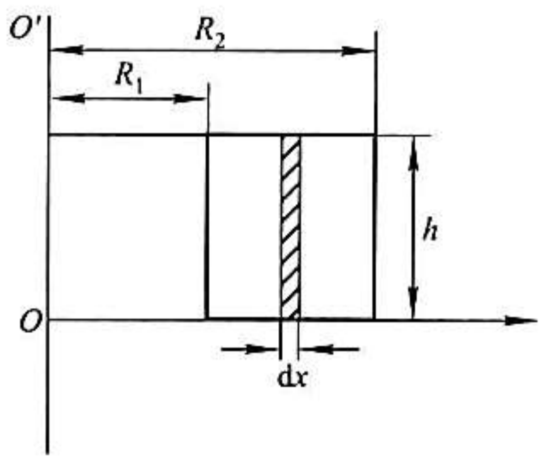
两个线圈形状、大小、匝数、相对位置以及周围的磁介质不变

$$\varepsilon_{21}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t}=-M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}\quad \varepsilon_{12}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t}=-M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

互感：$M=-\dfrac{\varepsilon_{21}}{\mathrm{d}I_1/\mathrm{d}t}=-\dfrac{\varepsilon_{12}}{\mathrm{d}I_2/\mathrm{d}t}$

P351 8-19 截面积为长方形的环形均匀密绕螺绕环，其尺寸如图所示，共有N匝，求该螺绕环的自感L。





分析：设有电流I通过线圈，计算磁场穿过自身回路的总磁通量Φ，再用公式$L=\frac{\Phi}{I}$计算自感L。

解：设有电流I通过线圈，线圈回路呈长方形。由安培环路定理可求得在$R_1 < r < R_2$，范围内的磁场分布为：

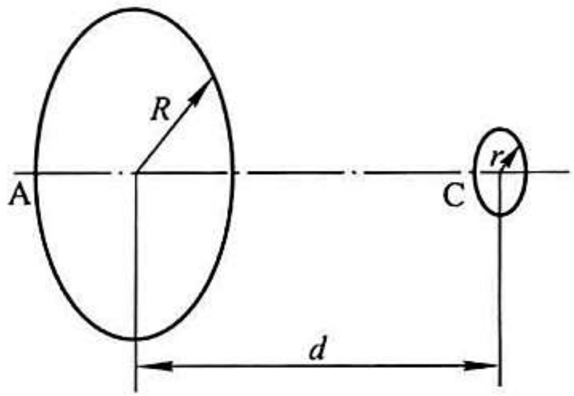
$$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi x}$$ **P273 例1**

线圈由N匝回路构成，所以穿过自身回路的磁链为

$$N\Phi = N\int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = N\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 NI}{2\pi x}h\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 N^2 Ih}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$L=\frac{N\Phi}{I}=\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

P352 8-24 如图所示，两同轴单匝线圈A、C的半径分别为R和r，两线圈相距为d。若r很小，可认为线圈A在线圈C处所产生的磁场是均匀的。求两线圈的互感；若线圈C的匝数为N匝，则互感又为多少？



解： 设线圈A中有电流I通过，它在线圈C所包围的平面内各点产生的磁感强度近似为：

$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+d^2)^{3/2}}$$ **P261 例1**

穿过线圈C的磁通为：

$$\Phi=BS_C=\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+d^2)^{3/2}}\pi r^2$$

则两线圈的互感为：

$$M=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0\pi r^2 R^2}{2(R^2+d^2)^{3/2}}$$

若线圈C的匝数为N匝，则互感为上述值的N倍。