5.3　非线性调制（角度调制）原理

一个未经调制的正弦载波可表示为：

$$c(t) = A\cos\theta(t) = \underline{A}\cos[\underline{\omega_c t + \varphi_0}]$$

↓ 幅度调制 ↓ 线性调制

↓ 角度调制 ↓ 非线性调制

非线性调制： 已调信号的频谱是原调制信号频谱的一种非线性变换，产生出与线性调制频谱搬移不同的新的频率分量。

5.3 非线性调制（角度调制）原理

一、角度调制的基本概念

角度调制信号的一般表达式为

$$s_m(t) = A\cos\theta(t) = A\cos[\omega_c t + \varphi(t)]$$

A 是载波的振幅， ω_c 为载波角频率，A 和 ω_c 均为常数；

$\omega_c t + \varphi(t) \longrightarrow$ 信号的瞬时相位；

$\varphi(t) \longrightarrow$ 瞬时相位偏移； $\varphi(t) = K_p m(t) \Longrightarrow$ PM

$d[\omega_c t + \varphi(t)]/dt \longrightarrow$ 信号的瞬时频率；

$d\varphi(t)/dt \longrightarrow$ 瞬时频率偏移。 $\dfrac{d\varphi(t)}{dt} = K_f m(t) \Longrightarrow$ FM

1. 相位调制(PM)的一般原理

$$s_m(t) = A\cos[\omega_c t + \varphi(t)]$$

相位调制： 当幅度和角频率保持不变，而瞬时相位偏移是调制信号的线性函数。

瞬时相位偏移可表达为：$\varphi(t) = K_p m(t)$

式中：K_p 为常数，调相器的灵敏度，单位rad/V 。

相应的调相(PM)信号为

$$\boxed{s_{PM}(t) = A\cos[\omega_c t + K_P m(t)]}$$

2. 频率调制(FM)的一般原理

$$s_m(t) = A\cos[\omega_c t + \varphi(t)]$$

频率调制： 载波的瞬时频率偏移是调制信号的线性函数。

瞬时角频率偏移为 $\dfrac{d\varphi(t)}{dt} = K_f m(t)$

式中： K_f 为常数，调频器灵敏度， 单位rad/（s·V）或Hz/V。

瞬时相位偏移为 $\varphi(t) = K_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau$

调频信号 $\boxed{s_{FM}(t) = A\cos[\omega_c t + K_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau]}$

3. 频率调制和相位调制的区别和举例

设调制信号为单频正弦波信号

$$m(t) = A_m \cos\omega_m t$$

相位调制信号为：

$$s_{PM}(t) = A\cos[\omega_c t + K_p A_m \cos\omega_m t] = A\cos[\omega_c t + m_p \cos\omega_m t]$$

调相指数： $m_p = K_p A_m = \dfrac{\Delta\omega}{\omega_m} = \dfrac{\Delta f}{f_m}$ ⟹ **表示最大瞬时相位偏移**

最大角频偏： $\Delta\omega = K_p A_m \omega_m$ **（最大频偏：** $\Delta f = \dfrac{\Delta\omega}{2\pi}$ **）**

3. 频率调制和相位调制的区别和举例

设调制信号为单频正弦波信号

$$m(t) = A_m \cos\omega_m t$$

频率调制信号为：

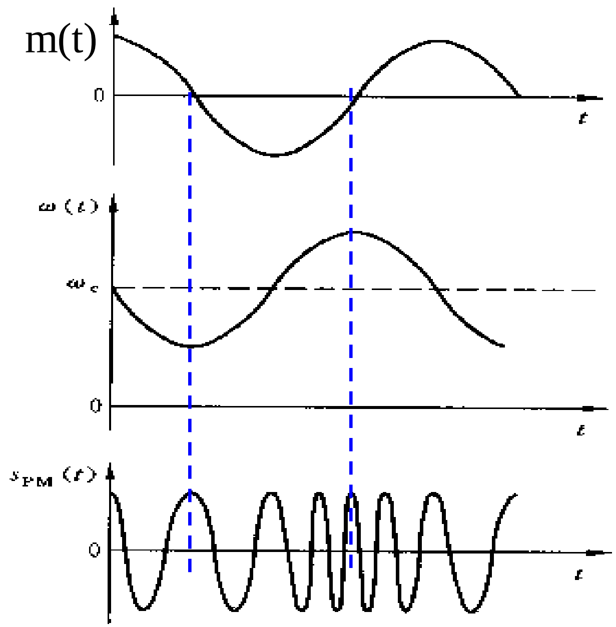
$$\boxed{s_{FM}(t) = A\cos[\omega_c t + K_f A_m \int_{-\infty}^{t} \cos\omega_m t dt] = A\cos[\omega_c t + m_f \sin\omega_m t]}$$

调频指数： $m_f = \dfrac{K_f A_m}{\omega_m} = \dfrac{\Delta\omega}{\omega_m} = \dfrac{\Delta f}{f_m}$ ⟹ **表示最大瞬时相位偏移**

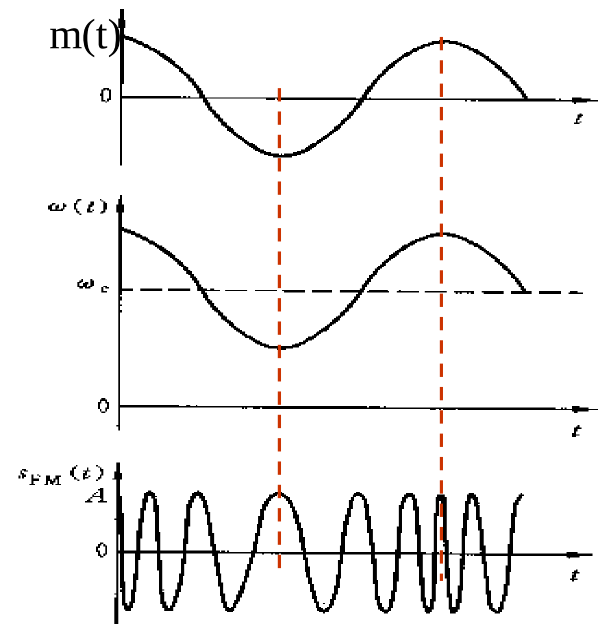
最大角频偏： $\Delta\omega = K_f A_m$ **(最大频偏：** $\Delta f = \dfrac{\Delta\omega}{2\pi}$ **)**

3. 频率调制和相位调制的区别和举例

单频信号PM



单频信号FM



单音正弦波调制时，**PM和FM信号的波形难以区分。**

4. 间接调频和间接调相

$$s_{PM}(t) = A\cos\left[\omega_c t + K_p m(t)\right]$$

$$s_{FM}(t) = A\cos\left[\omega_c t + K_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau) d\tau\right]$$

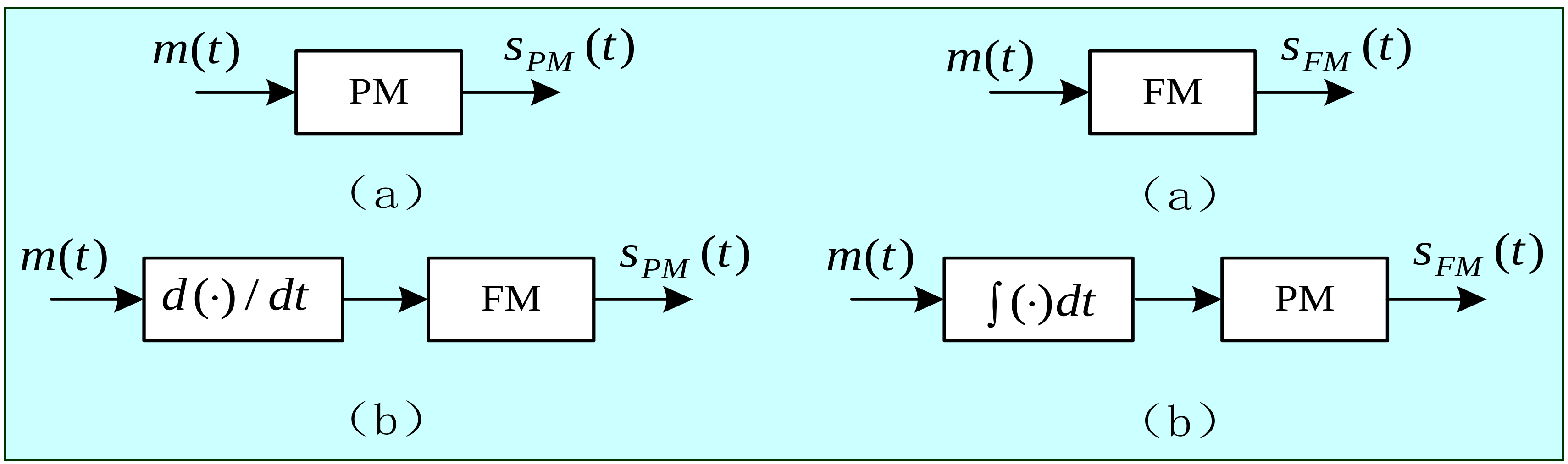


图1：直接和间接调相　　图2：直接和间接调频

5. 小结

从以上分析可见， 调频与调相并无本质区别，两者之间可相互转换。 鉴于在实际应用中多采用FM波，本章将集中讨论频率调制。

二、窄带调频和宽带调频

$$s_{FM}(t) = A\cos\left[\omega_c t + K_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau\right]$$

根据调制后载波瞬时相位偏移的大小，可将频率调制分为：

宽带调频（Wide-Band Frequency Modulation ,**WBFM**）

窄带调频（Narrow-Band Frequency Modulation,**NBFM**）

当 $$\left|K_f[\int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau]\right|_{\max} << \frac{\pi}{6}(\text{或}0.5)$$

时，称为窄带调频。否则，称为宽带调频。

1. 窄带调频

$$s_{FM}(t)=\cos[\omega_c t+K_f\int_{-\infty}^{t}m(\tau)d\tau]$$

$$=\cos\omega_c t\cos[K_f\int_{-\infty}^{t}m(\tau)d\tau]-\sin\omega_c t\sin[K_f\int_{-\infty}^{t}m(\tau)d\tau]$$

当 $\left|K_f[\int_{-\infty}^{t}m(\tau)d\tau]\right|_{\max}<<\frac{\pi}{6}$ (或0.5) **时，**

当$x<<1$时

$\cos x\approx 1$

$\sin x\approx x$

有：

$$\begin{cases}\cos\left[K_f\int_{-\infty}^{t}m(\tau)d\tau\right]\approx 1\\ \sin\left[K_f\int_{-\infty}^{t}m(\tau)d\tau\right]\approx K_f\int_{-\infty}^{t}m(\tau)d\tau\end{cases}$$

所以 $s_{NBFM}(t)\approx\cos\omega_c t-[K_f\int_{-\infty}^{t}m(\tau)d\tau]\sin\omega_c t$

1. 窄带调频

$$s_{NBFM}(t) \approx \cos\omega_c t - [K_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau]\sin\omega_c t$$

若 $m(t) \Leftrightarrow M(\omega)$

则 $\int_{-\infty}^{t} m(t)dt \Leftrightarrow \frac{M(\omega)}{j\omega} + \cancel{\pi M(0)\delta(\omega)}$

$\boxed{\text{设 } \overline{m(t)} = 0\text{，即 } M(0) = 0}$

又有 $\sin\omega_c t \Leftrightarrow j\pi\left[\delta(\omega+\omega_c) - \delta(\omega-\omega_c)\right]$

所以 $\int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau \sin\omega_c t \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\frac{M(\omega+\omega_c)}{\omega+\omega_c} - \frac{M(\omega-\omega_c)}{\omega-\omega_c}]$

得：

$$S_{NBFM}(\omega) = \pi[\delta(\omega+\omega_c) + \delta(\omega-\omega_c)] + \frac{K_f}{2}\left[\frac{M(\omega-\omega_c)}{\omega-\omega_c} - \frac{M(\omega+\omega_c)}{\omega+\omega_c}\right]$$

窄带调频信号的频域表达式：

$$S_{NBFM}(\omega)=\pi[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)]$$

$$+\frac{K_F}{2}\left[\frac{M(\omega-\omega_c)}{(\omega-\omega_c)}-\frac{M(\omega+\omega_c)}{(\omega+\omega_c)}\right]$$

与AM信号的频谱做一比较：

$$s_{AM}(t)=[A_0+m(t)]\cos\omega_c t$$

$$S_{\mathrm{AM}}(\omega)=\pi A_0[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]$$

$$+\frac{1}{2}[M(\omega+\omega_c)+M(\omega-\omega_c)]$$

1. 窄带调频

例：单音调制信号为$m(t)=A_m\cos\omega_m t$，试分析窄带调频后的频谱，并与AM信号频谱相比较

解：

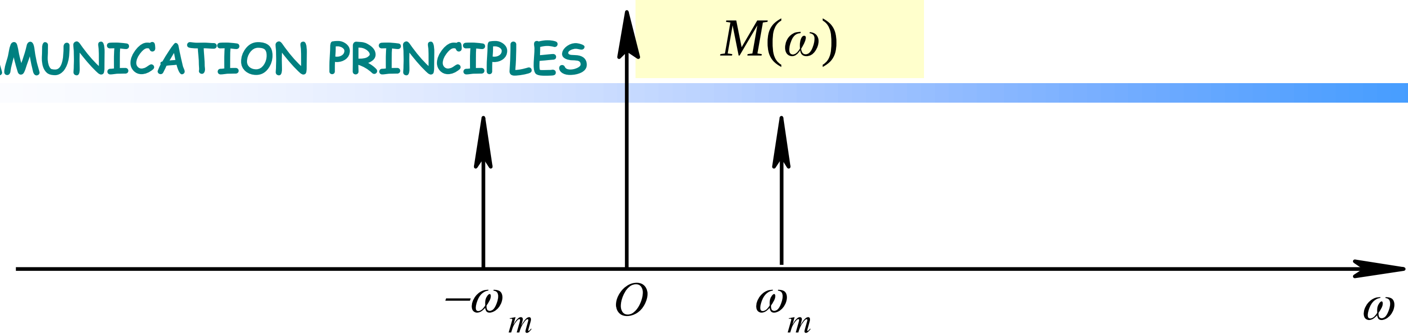
$$s_{NBFM}(t)\approx\cos\omega_c t-\left[K_f\int_{-\infty}^{t}m(\tau)d\tau\right]\sin\omega_c t$$

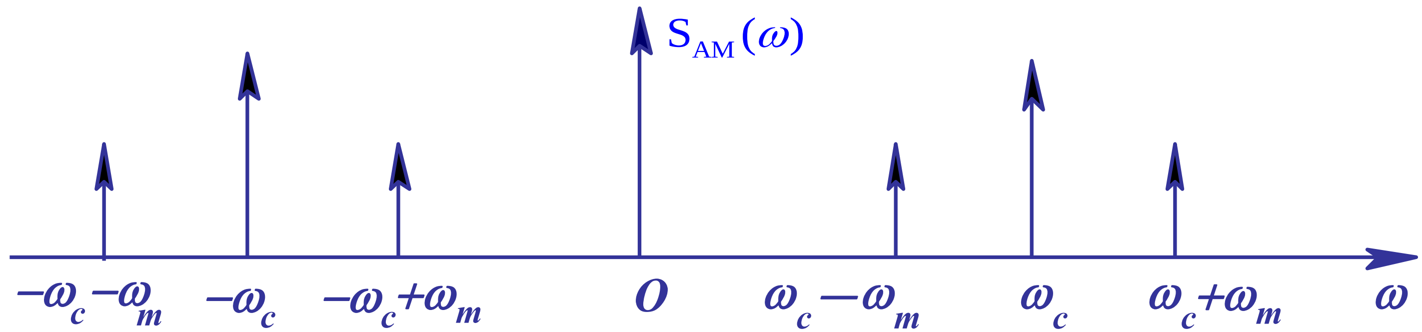
$$=\cos\omega_c t-A_m K_f\frac{1}{\omega_m}\sin\omega_m t\sin\omega_c t$$

$$=\cos\omega_c t+\frac{A_m K_f}{2\omega_m}\left[\cos(\omega_c+\omega_m)t-\cos(\omega_c-\omega_m)t\right]$$

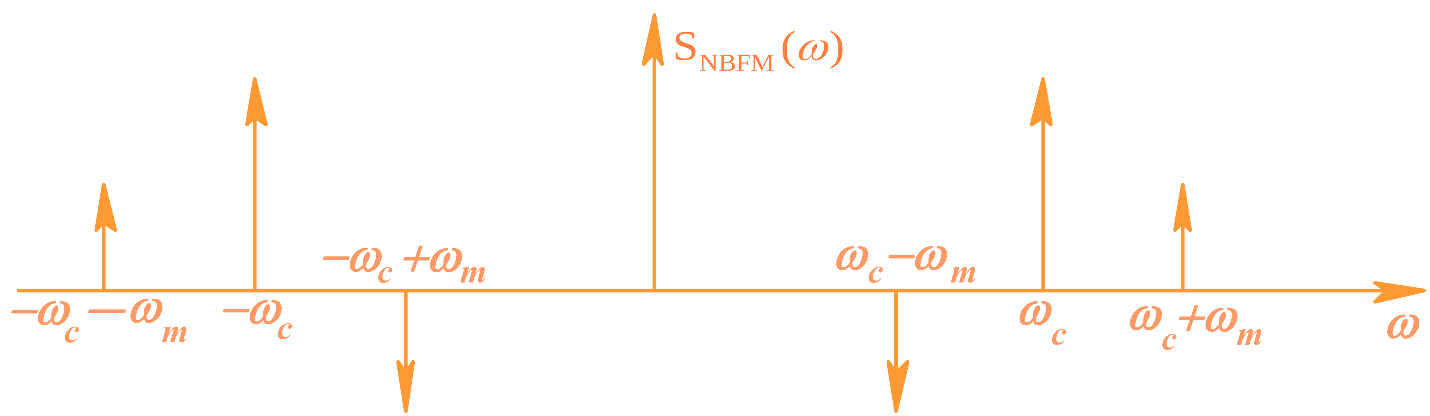
$$s_{AM}(t)=(A_0+A_m\cos\omega_m t)\cos\omega_c t=A_0\cos\omega_c t+A_m\cos\omega_m t\cos\omega_c t$$

$$=A_0\cos\omega_c t+\frac{A_m}{2}\left[\cos(\omega_c+\omega_m)t+\cos(\omega_c-\omega_m)t\right]$$





$$s_{AM}(t)=A_0\cos\omega_c t+\frac{A_m}{2}[\cos(\omega_c+\omega_m)t+\cos(\omega_c-\omega_m)t]$$



$$s_{NBFM}(t)\approx\cos\omega_c t+\frac{A_m K_F}{2\omega_m}[\cos(\omega_c+\omega_m)t-\cos(\omega_c-\omega_m)t]$$

1. 窄带调频

$$
\begin{cases}
S_{NBFM}(\omega) = \pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)] + \dfrac{K_f}{2}\left[\dfrac{M(\omega-\omega_c)}{\omega-\omega_c} - \dfrac{M(\omega+\omega_c)}{\omega+\omega_c}\right] \\
S_{AM}(\omega) = \pi A_0\left[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)\right] + \dfrac{1}{2}[M(\omega+\omega_c)+M(\omega-\omega_c)]
\end{cases}
$$

相同点：

① NBFM和AM都有载波分量和以$\pm\omega_c$为中心的边带分量

② NBFM信号和AM信号有相同的带宽，均为$2f_H$

不同点：

③ NBFM的两个边频分别乘了因式[1/(ω - ω$_c$)]和[1/(ω + ω$_c$)]，由于因式是频率的函数，所以这种加权是频率加权，加权的结果引起调制信号频谱的失真

④ NBFM信号的下边带分量还有180^0的相位反转。

2. 宽带调频信号频谱

- 不满足窄带条件的为宽带调频；
- 调制信号对载波进行频率调制将产生较大频偏；
- 已调信号在传输时要占用较宽频带。

（1） 单频调制时宽带调频信号

设单频调制信号为:

$$m(t) = A_m \cos \omega_m t$$

则单音调频信号的时域表达式为:

$$s_{FM}(t) = A\cos[\omega_c t + K_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau) d\tau]$$

$$= A\cos[\omega_c t + m_f \sin \omega_m t]$$

（1）单频调制时宽带调频信号

$$s_{FM}(t) = A\cos\left[\omega_c t + m_f \sin\omega_m t\right]$$

展开得

$$s_{FM}(t) = A\cos\omega_c t \cdot \cos(m_f \sin\omega_m t) - \sin\omega_c t \cdot \sin(m_f \sin\omega_m t)$$

式中，$\cos\left(m_f \sin\omega_m t\right)$ 和 $\sin\left(m_f \sin\omega_m t\right)$ 为超越函数，都是周期性函数，可以把它们展成傅氏级数

$$\cos\left(m_f \sin\omega_m t\right) = J_0\left(m_f\right) + \sum_{n=1}^{\infty} 2J_{2n}\left(m_f\right)\cos 2n\omega_m t$$

$$\sin\left(m_f \sin\omega_m t\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}\left(m_f\right)\sin(2n-1)\omega_m t$$

$J_n(m_f)$ —第一类n阶贝塞尔(Bessel)函数。

第一类n阶贝塞尔函数

$$J_n(m_f)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m_f/2)^{2m+n}}{m!(m+n)!}$$

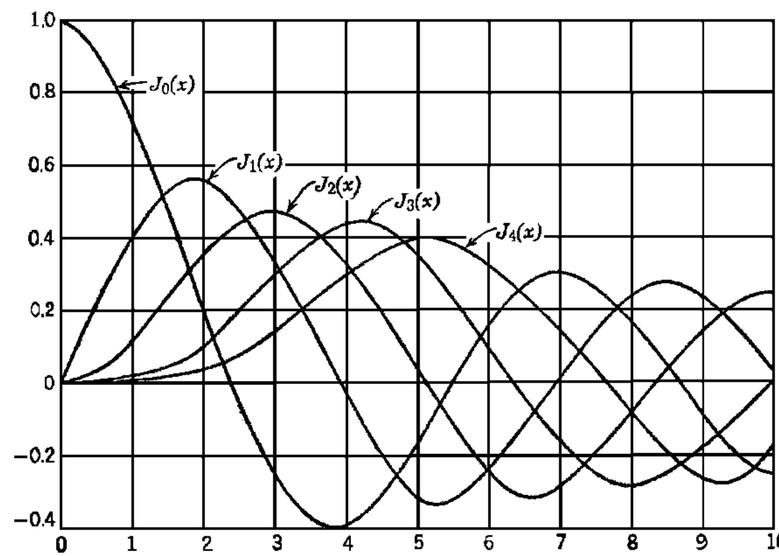
其性质有：

（1） $J_{-n}(m_f)=(-1)^n J_n(m_f)$

（2） $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(m_f)=1$

（3） 当 m_f 很小时有：

$$J_0(m_f)\approx 1,\quad J_1(m_f)\approx\frac{m_f}{2},\quad J_n(m_f)\approx 0\quad (n>1)$$



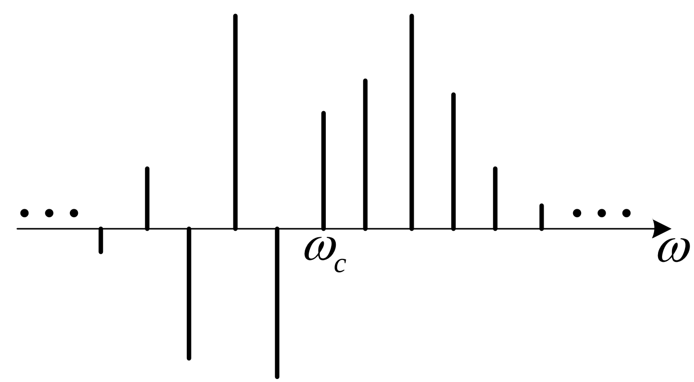
$J_n(m_f)$-m_f 关系曲线

整理得： $$s_{FM}(t) = A\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(m_f)\cos(\omega_c + n\omega_m)t$$

所以： $$S_{FM}(\omega) = A\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_f)[\delta(\omega-\omega_c-n\omega_m)+\delta(\omega+\omega_c+n\omega_m)]$$

调频信号频谱**具有非线性的**特点：

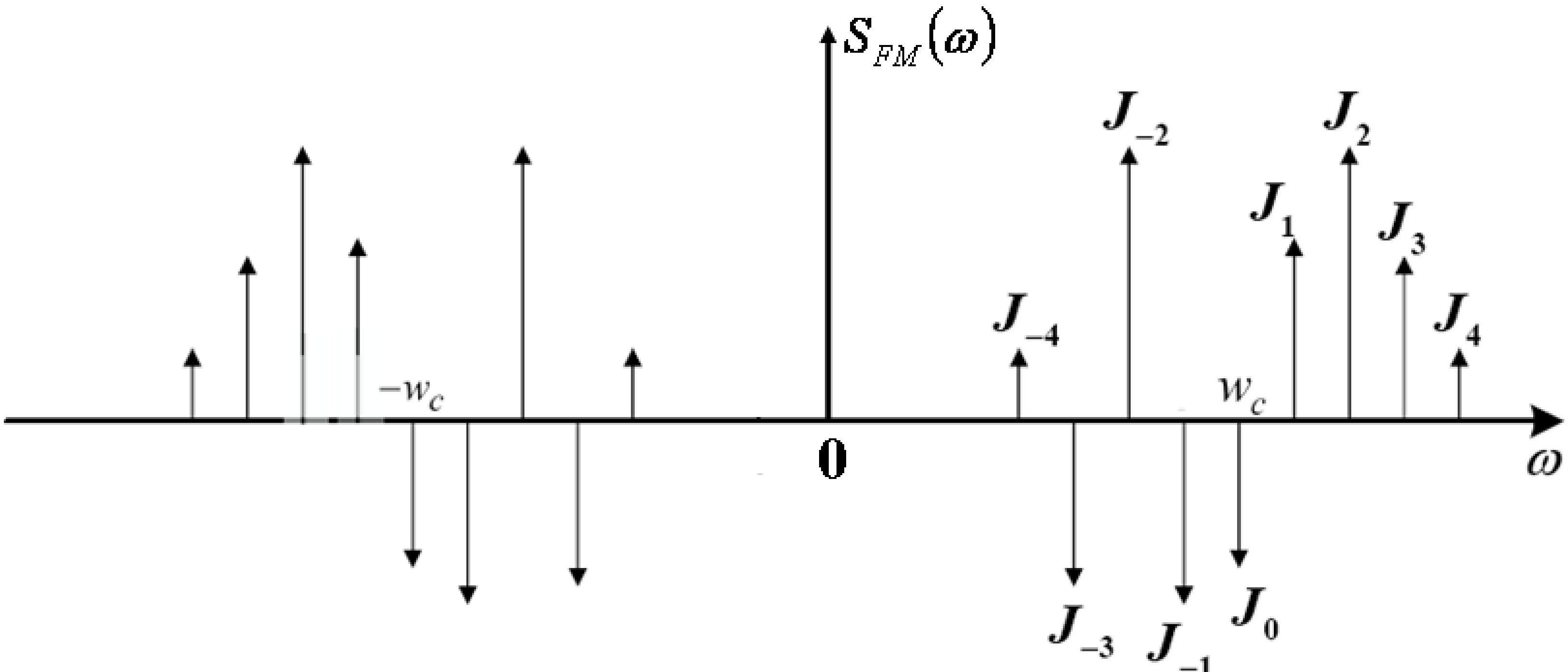
- **有载频，当n=0时，就是载波分量，幅度为$AJ_0(m_f)$；**
- **有上下边频 $\omega_c \pm n\omega_m$，边频幅度为 $AJ_n(m_f)$，n为奇数时，上下边频极性相反。**



例：调频指数为$m_f = 3$

$$J_0(3) = -0.260, J_1(3) = 0.339,$$

$$J_2(3) = 0.486, J_3(3) = 0.309, J_4(3) = 0.132$$



$$S_{FM}(\omega) = \pi A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_f)[\delta(\omega - \omega_c - n\omega_m) + \delta(\omega + \omega_c + n\omega_m)]$$

调频信号的带宽

- 理论上，调频信号的频带宽度为无限宽。
- 实际上，边频幅度随着n的增大而逐渐减小，因此调频信号可近似认为具有有限频谱。
  - 通常采用的原则是，信号的频带宽度应包括**幅度大于未调载波的10%以上**的边频分量。
  - 当$m_f \geq 1$以后，取边频数$n = m_f + 1$即可。因为$n > m_f + 1$以上的边频幅度均小于$0.1A_c$。
- 被保留的上、下边频数共有$2n = 2(m_f + 1)$个，相邻边频之间的频率间隔为f_m，所以调频波的有效带宽为

$$B_{\mathrm{FM}} = 2(1 + m_f) f_{\mathrm{m}}$$

卡森（Carson）公式

$$B_{FM}=2(m_f+1)f_m=2(\Delta f+f_m)$$

卡森公式说明调频信号的带宽取决于最大频偏和调制信号的频率。

若$m_f \ll 1$时，$B_{FM}\approx 2f_m$

这就是窄带调频的带宽，由调制信号的频率决定。

若$m_f \geq 10$ 时，$B_{FM}\approx 2\Delta f$

这是宽带调频情况， 说明带宽由最大频偏决定。

FM信号的功率分配

设P_c，P_f，P_{FM}分别代表载波功率、边频功率和总功率，则有：

$$S_{WBFM}=A\cos[\omega_c t+m_f\sin\omega_m t]$$
$$=A\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(m_f)\cos(\omega_c+n\omega_m)t$$

$$P_c=\frac{A^2}{2}J_0^2(m_f)$$

$$P_f=2\times\frac{A^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}J_n^2(m_f)$$

$$P_{FM}=P_c+P_f=\frac{A^2}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n^2(m_f)=\frac{A^2}{2}$$

结论：

- 对于**FM**信号，已调信号和未调载波信号的功率均为$A^2/2$ 。
- 调制信号虽不提供功率，但却控制着功率的分布。即将原来载波功率中的一部分分配给每个边频分量。

2. 宽带调频

(2) 任意带限信号调制时宽带调频信号的带宽

任意限带信号调制时的调频信号带宽的估算公式

$$B_{FM} = 2(D+1)f_H$$

f_H是调制信号的最高频率，

D(频偏比)是最大频偏Δf与f_H的比值：$D = \Delta f / f_H$

最大频偏Δf： $\Delta f = K_F |m(t)|_{\max}$

【例】基带信号为 $m(t)=\cos 20\pi t$ ，载波为 $10\cos 2\pi f_c t$ 假如用基带信号对载波进行频率调制，$K_F=100\pi\ \mathrm{rad/(s\cdot V)}$ 求调频信号的表示式，并确定含98%已调信号功率的谐波频率及其有效带宽？

解：（1）调频信号表示式：

$$s(t)_{FM}=10\cos\left[2\pi f_c t+m_f\sin(20\pi t)\right]$$

调频指数 $m_f=K_F\dfrac{A_m}{\omega_m}=100\pi\cdot\dfrac{1}{20\pi}=5$

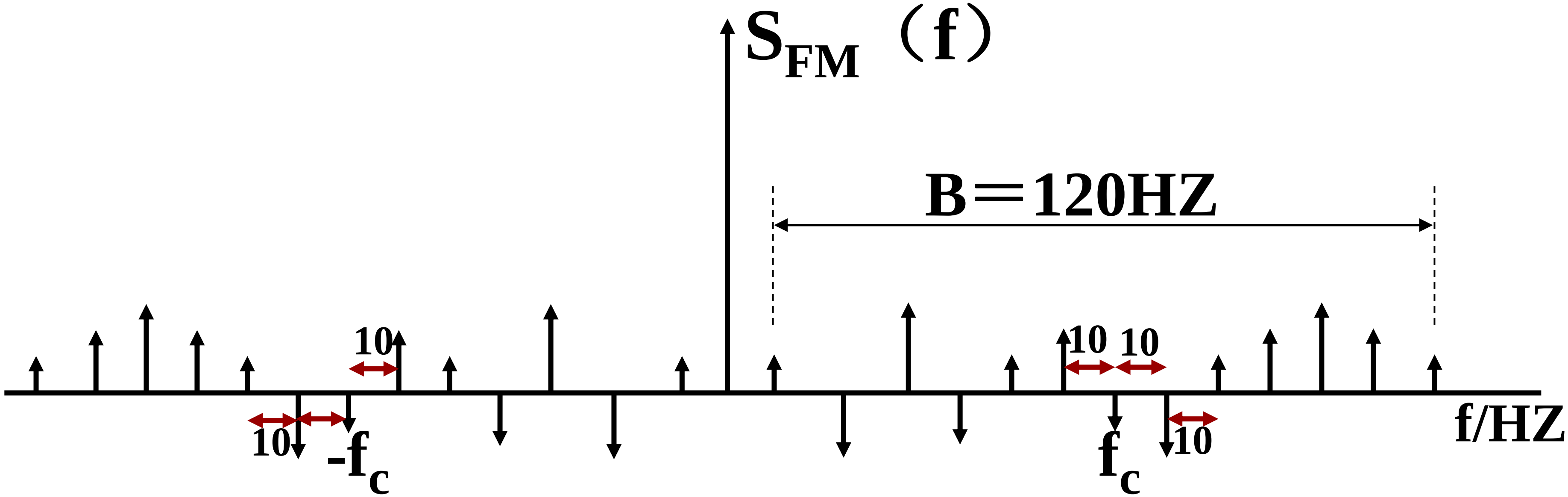
$$\therefore s(t)_{FM}=10\cos\left[2\pi f_c t+5\sin(20\pi t)\right]$$ 表达式一

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}10J_n(m_f)\cos\left[(\omega_c+n\omega_m)t\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}10J_n(5)\cos\left[(\omega_c+n\cdot 20\pi)t\right]$$ 表达式二

（2） $m_f=5 \Rightarrow B_{FM} = 2(m_f + 1) f_m = 2(5+1)\cdot 10 = 120HZ$

$$S_{FM}(\omega) = 10\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(5)[\delta(\omega-\omega_c-n\omega_m)+\delta(\omega+\omega_c+n\omega_m)]$$



三、（宽带）调频信号的产生和解调

1.调频信号的产生

(1) 直接调频法

用调制信号直接改变载频振荡器频率的方法，一般采用压控振荡器（VCO）作为产生调频信号的调制器。

压控振荡器输出高频振荡的频率正比于输入控制电压，即：

$$\omega_i(t)=\omega_0+K_f\, m(t)$$

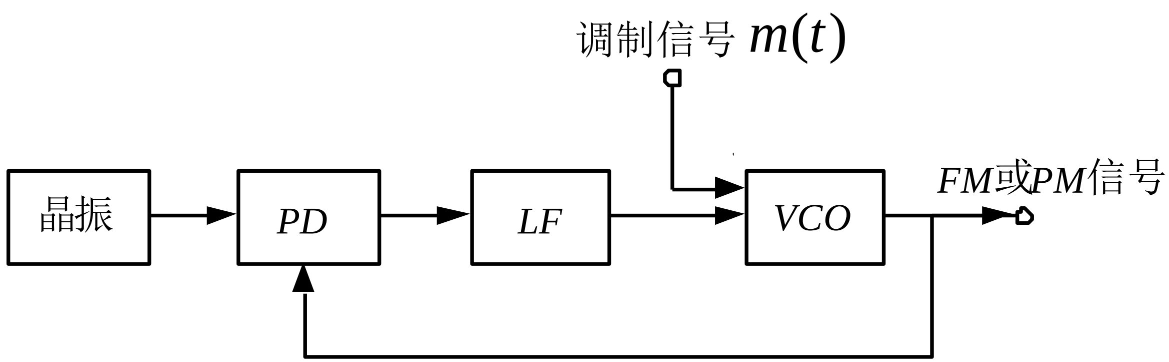
优点:可以获得较大的频偏。

缺点:载频稳定度不高。

1.调频信号的产生

(1) 直接调频法

直接调频法改进：锁相环（PLL）调制器



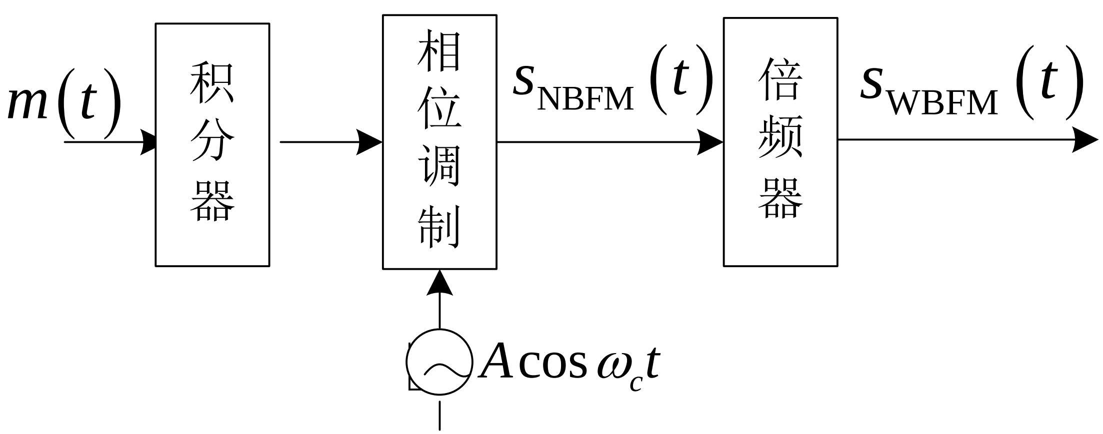
优点:载频稳定度高，可达晶振的稳定度。

缺点:低频调制特性较差。

1.调频信号的产生

(2) 间接调频法

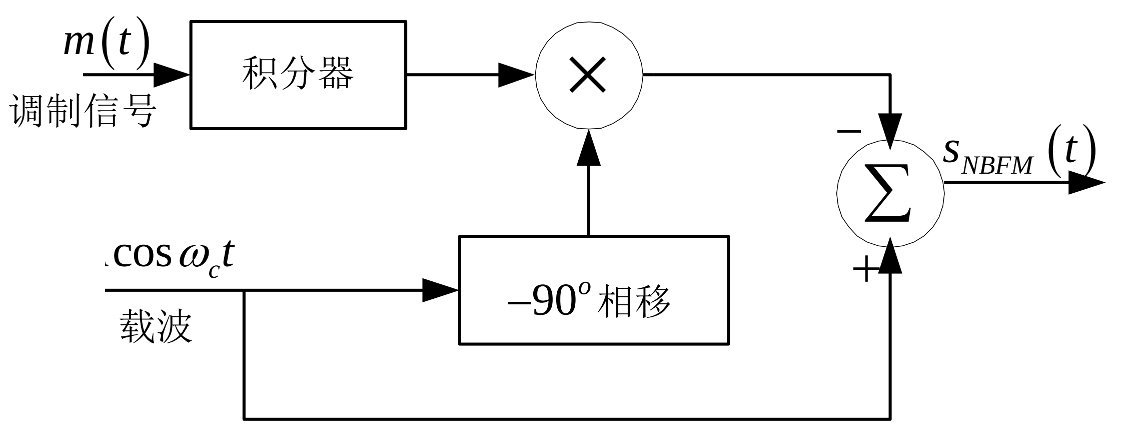
- 先将调制信号积分，然后对载波进行调相，即可产生一个窄带调频(NBFM)信号，再经*n*次倍频器得到宽带调频 (WBFM) 信号。



1.调频信号的产生

(2) 间接调频法

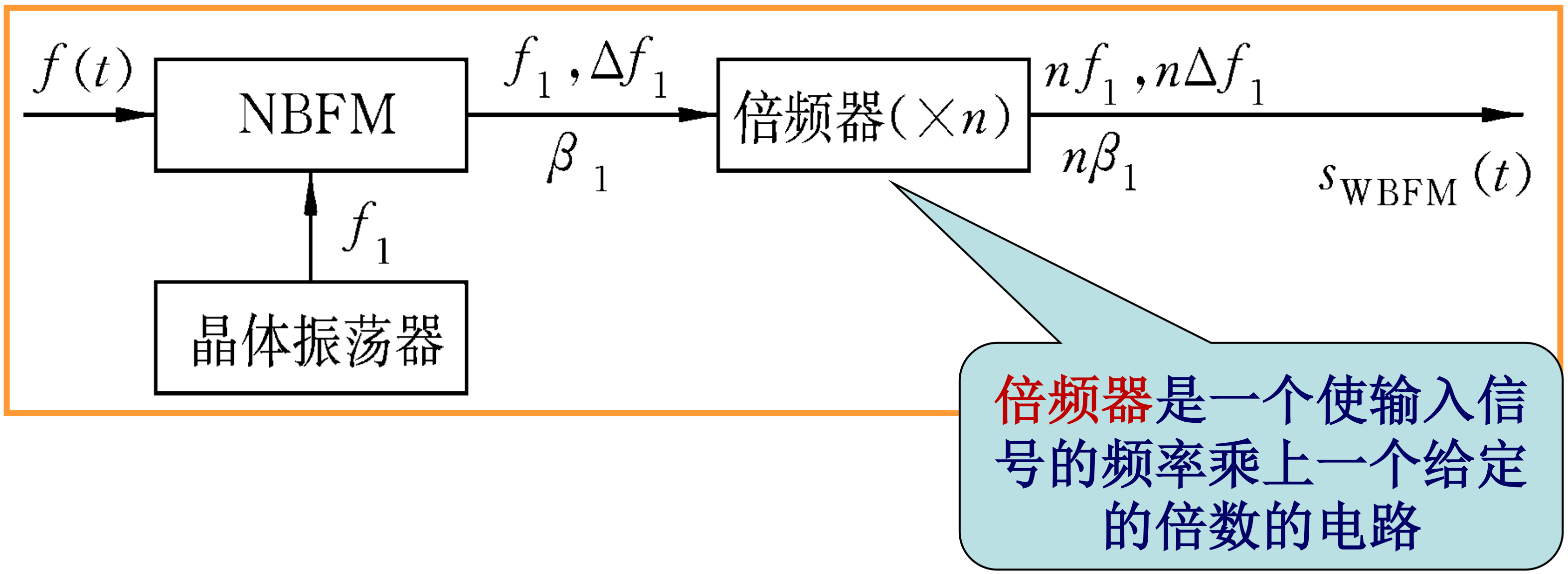
$$s_{NBFM}(t) \approx \cos\omega_c t - [K_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau]\sin\omega_c t$$



窄带调频信号的产生

1.调频信号的产生

(2) 间接调频法



间接调频框图

经n倍频后可以使调频信号的载频和调频指数增为n倍。

2. 倍频:

❖**方法**：倍频器可以用非线性器件实现。

❖**原理**：以理想平方律器件为例，其输出-输入特性为

$$s_0(t) = as_i^2(t)$$

当输入信号为调频信号时，有

$$s_i(t) = A\cos[\omega_c t + \varphi(t)]$$

$$s_o(t) = as_i^2(t) = aA^2\cos^2\left[\omega_c t + \varphi(t)\right] = \frac{1}{2}aA^2 + \frac{1}{2}aA^2\cos[2\omega_c t + 2\varphi(t)]$$

分析与推广

•滤除直流成分后，可得到一个新的调频信号，其载频和相位偏移均增为2倍，由于相位偏移增为2倍，因而调频指数也必然增为2倍。

•经n次倍频后可以使调频信号的载频和调频指数增为n倍。

❖ 典型实例：调频广播发射机

- 载频：f1 = 200kHz
- 调制信号最高频率 fm = 15kHz
- 间接法产生的最大频偏 Δ f1 = 25 Hz
- 调频广播要求的最终频偏 Δ f =75 kHz，发射载频在88-108 MHz频段内，所以需要经过

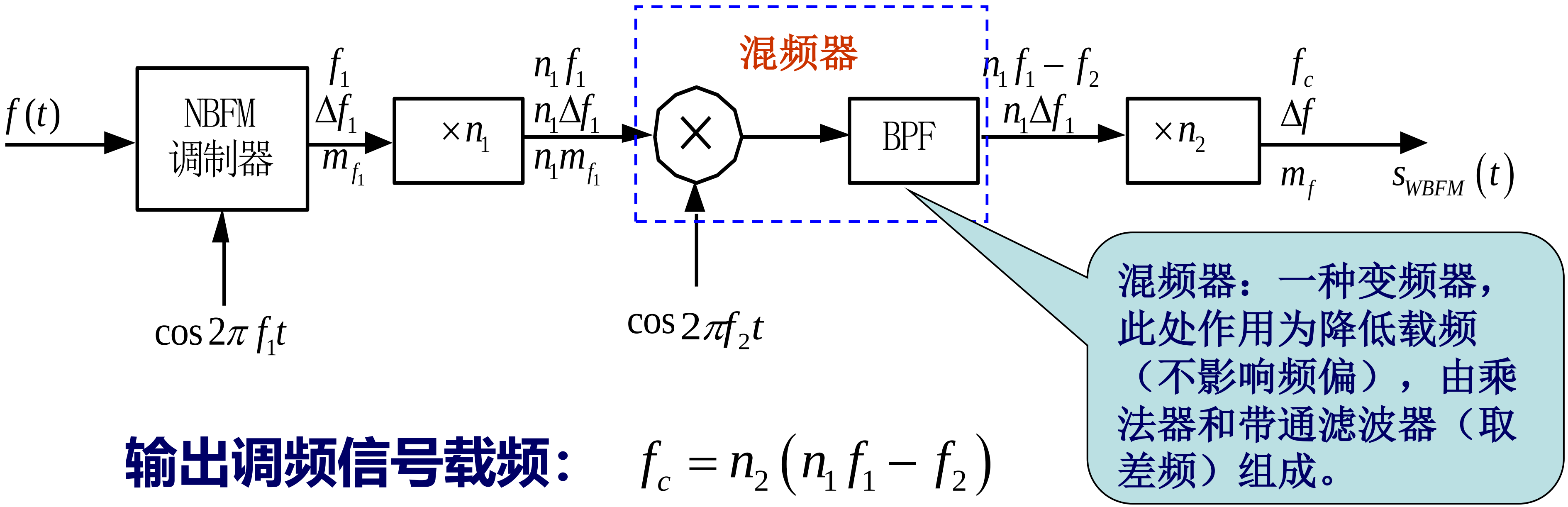
$$n = \Delta f / \Delta f_1 = 75 \times 10^3 / 25 = 3000$$

次的倍频，以满足最终频偏=75kHz的要求。

- 倍频器在提高相位偏移的同时，也使载波频率提高了，倍频后新的载波频率(nf1)高达600MHz，不符合 fc=88-108MHz的要求，因此需用混频器进行下变频来解决这个问题。

(3) Armstrong法

将倍频器和混频器（一种变频器）配合使用—阿姆斯特朗（Armstrong）法。



输出调频信号载频： $f_c = n_2 (n_1 f_1 - f_2)$

输出调频信号最大频偏： $\Delta f = n_1 n_2 \Delta f_1$

输出调频信号调频指数：

$$m_f = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{n_1 n_2 \Delta f_1}{f_m} = \frac{n_1 n_2 m_{f_1} f_m}{f_m} = n_1 n_2 m_{f_1}$$

【例】在上述宽带调频方案中，设调制信号是f_m =15 kHz的单频余弦信号，NBFM信号的载频f_1 =200 kHz，最大频偏Δf_1 =25 Hz；混频器参考频率f_2 = 10.9 MHz，选择倍频次数n_1 = 64，n_2 =48。

(1) 求NBFM信号的调频指数；

(2) 求调频发射信号（即WBFM信号）的载频、最大频偏和调频指数。

解：（1）NBFM信号的调频指数为

$$m_1 = \frac{\Delta f_1}{f_m} = \frac{25}{15\times10^3} = 1.67\times10^{-3}$$

（2）调频发射信号的载频为

$$f_c = n_2(n_1 f_1 - f_2) = 48\times(64\times200\times10^3 - 10.9\times10^6) = 91.2\ \text{MHz}$$

(3) 最大频偏为

$$\Delta f = n_1 n_2 \Delta f_1 = 64 \times 48 \times 25 = 76.8\ kHz$$

(4) 调频指数为

$$m_f = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{76.8 \times 10^3}{15 \times 10^3} = 5.12$$

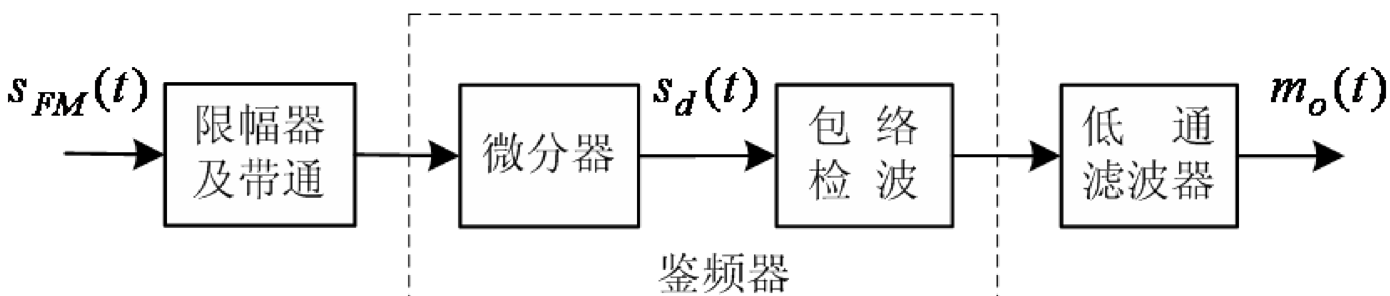
三、（宽带）调频信号的产生和解调

2.调频信号的解调

(1) 非相干解调（鉴频器解调）

鉴频器：输出信号随输入信号的频率作线性变化。

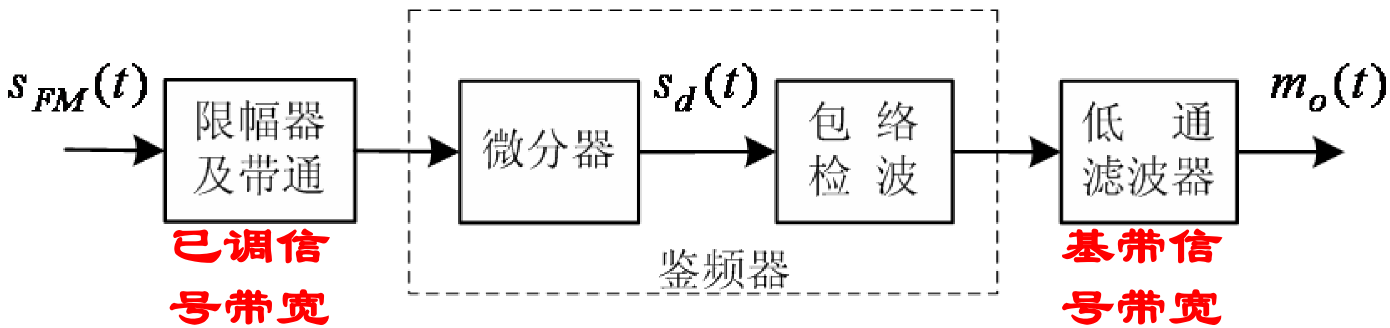
理想鉴频器可看成是微分器与包络检波器的级联。



2.调频信号的解调

(1) 非相干解调（鉴频器解调）

$$s_{FM}(t) = A\cos\left(\omega_c t + K_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau\right)$$



微分器输出： $s_d(t) = -A[\omega_c + K_f m(t)]\sin[\omega_c t + K_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau]$

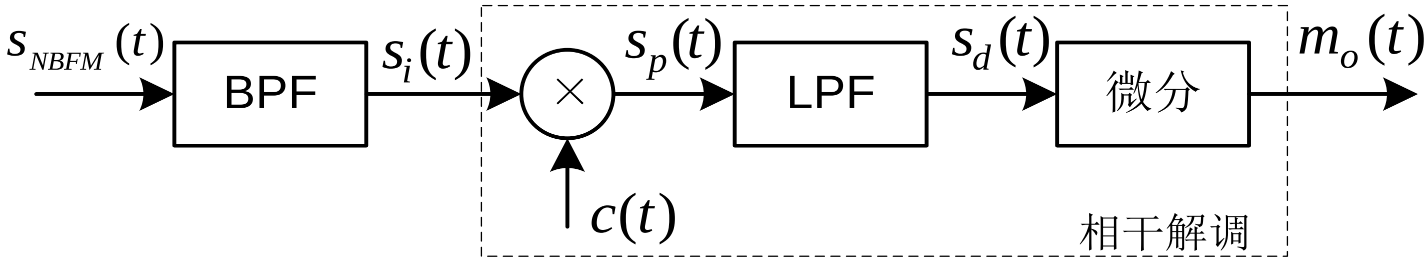
用包络检波器取出其包络，并滤去直流后输出：

$$m_o(t) = K_d K_f m(t)$$

K_d：**鉴频器灵敏度，单位为V/(rad/s)**

(2) 相干解调

窄带调频信号可以用相干解调法进行解调。



窄带调频信号： $s_{NBFM}(t) \approx \cos\omega_c t - [K_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau]\sin\omega_c t$

相干载波： $c(t) = -\sin\omega_c t$

乘法器输出为： $s_p(t) = -\frac{1}{2}\sin 2\omega_c t + [\frac{1}{2}K_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau](1-\cos 2\omega_c t)$

经LPF滤除高频分量，得： $s_d(t) = \frac{1}{2}K_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau$

再经微分，得输出信号： $m_o(t) = \frac{1}{2}K_f m(t)$