《线性代数 B》
学习手册

学院：______________________

专业：______________________

班级：______________________

学号：______________________

姓名：______________________

教学记录表序号：__________

同学们，人生没有多走的路，脚下的每一步都算数。没有不请自来的幸运，只有有备而来的惊艳。没有人能定义你的未来，除了你自己。永远不要忘了你最初的那份干劲，不忘初心，方得始终！

- 数一（高等数学 56%，线性代数 22%，概率 22%）
- 数二（高等数学 78%，线性代数 22%）
- 数三（微积分 56%，线性代数 22%，概率 22%）

得数学者得天下，数学满分 150 分，这是一个最能够拉开考生成绩的科目。只有数学考好了，才能圆大家上研究生的梦。所以同学们只要你以后有可能会选择考研，那么请现在就下苦工夫，打好基础，练好数学基本功。

作业书写要求：

1、计算步骤要详细、规范；

2、符号表示要准确；

3、书写整齐美观，要养成使用直尺的习惯；

4、教师线上批改后或讲解后，大家要主动及时订正。

第一章 行列式

教学内容：

1．n元排列的逆序数，n阶行列式的概念。

2．行列式的性质，用行列式的性质计算行列式。

3．行列式元素的余子式和代数余子式的概念，行列式按行（列）展开法则。

4．克莱姆法则。

要求学生：

1．掌握n元排列的逆序数，理解n阶行列式的概念。

2．掌握行列式的性质，并且会使用行列式的性质化简、计算行列式。

3．理解行列式元素的余子式和代数余子式的概念，灵活掌握行列式按行（列）展开法则。

4．理解克莱姆法则，并会用克莱姆法则判定线性方程组解的存在性、唯一性及求出方程组的解。

重点：应用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式。

难点：应用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式。

1.1-1.2 n 阶行列式 作业

P5:3 当x取何值时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0.$

P10:3 在六阶行列式$\left|a_{ij}\right|$中，下列各元素乘积应取什么符号？

(1)$a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$

(2)$a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$

(3)$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$

P10:4 用行列式的定义计算下列行列式

$$(1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

1. 3 行列式的性质 作业

P16:2(1)

$$(1)\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

P26:4(4)

$$(4)\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

P26 :5 用行列式的性质证明：

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

1.4 行列式按行(列)展开 作业

P21

2. 已知四阶行列式 D 中第3列元素依次为-1，2，0，1，它们的余子式一次为5，3，-7，4，求D.

P22:5 用降阶数法计算下列行列式

（3）$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

1.5 克莱姆法则 作业

P25:4 判断齐次线性方程组是否仅有零解.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

第二章 矩阵

教学内容：

1．矩阵的概念以及一些特殊矩阵，如单位矩阵、对角矩阵、三角矩阵、共轭矩阵及它们的性质。

2．矩阵的线性运算、乘法运算、转置运算，以及它们的运算规律，方阵的幂、方阵的行列式。

3．逆矩阵的概念、性质以及矩阵可逆的充要条件，伴随矩阵的概念。

4．分块矩阵及其运算。

5．矩阵的初等变换，初等矩阵的性质和矩阵等价的概念。

6．矩阵的秩的概念，矩阵的初等变换求矩阵的秩和逆矩阵。

要求学生：

1．理解矩阵的概念，了解单位矩阵、对角矩阵、三角矩阵、共轭矩阵及它们的性质。

2．掌握矩阵的线性运算、乘法运算、转置运算，以及它们的运算规律，了解方阵的幂，掌握方阵的行列式的概念及性质。

3．理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质，以及矩阵可逆的充要条件，会用伴随矩阵求逆矩阵。

4．了解分块矩阵及其运算。

5．掌握矩阵的初等变换，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念。

6．理解矩阵的秩的概念，重点掌握用矩阵的初等变换求矩阵的秩和逆矩阵。

重点：矩阵的线性运算、乘法、转置及其运算规则，用矩阵的初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法。

难点：用矩阵的初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法，分块矩阵及其运算。

2.2 矩阵的运算作业

P44：4.设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 4\\ 0 & 5 & 1\end{bmatrix}$,求$3AB-2A$及$A^TB$.

P44：8.解矩阵方程，求出未知矩阵 X.

（1） $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

P45：9.设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,求所有与 A 可交换的矩阵.

P45：10(3).计算矩阵 $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^3$.

P45：14.设矩阵 A 为三阶矩阵，且已知 $|A|=m$, 求 $|-mA|$.

2.3 逆矩阵 作业

P51 使用伴随矩阵法求下列矩阵的逆矩阵 1(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

P51 （1）设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, AB=A+2B,$ 使用伴随矩阵法求 B.

2.5 矩阵的初等变换 作业

P68 1.选择题

（1）设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}, P_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中 A 可逆，则 $B^{-1}=(\quad)$.

(A) $A^{-1}P_1P_2$; (B) $P_1A^{-1}P_2$; (C) $P_1P_2A^{-1}$; (D) $P_2A^{-1}P_1$.

必须阐述理由：

（2）设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{bmatrix}, P_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{则必有}(\quad).$$

(A) $AP_1P_2=B$; (B) $AP_2P_1=B$; (C) $P_1P_2A=B$; (D) $P_2P_1A=B$.

必须阐述理由：

2.设 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$，求 A.（提示：从课本P61定理2的角度分析）

P69 4 用初等变换法判定下列矩阵是否可逆，如果可逆，求其逆矩阵。

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$；

(4) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$；

P69 5 解下列矩阵方程：（要求使用初等变换法）

（1） 设 $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$, 求 X 使 $AX=B$.

（2）设 $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ -3 & 3 & -4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}$, 求 X 使 $XA=B$.

2.6 矩阵的秩 作业

P77 31.设三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$**, 试求矩阵** A **的秩.**

P77 32.设 A **为** 5×4 **矩阵，** $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$**，且** A **的秩为 3，求** k **.**

第三章 线性方程组

教学内容：

1．线性方程组有解的判定定理，初等行变换求线性方程组通解的方法。

2．向量组的线性相关与线性无关概念与判定。

3．向量组的秩及最大线性无关组的概念，矩阵的秩和向量组的秩之间的关系，求向量组的秩和最大线性无关组。

4．齐次线性方程组解的性质、基础解系、通解、解的结构以及解空间的概念。

5．非齐次线性方程组解的性质，通解的概念以及解的结构。

要求学生：

1．掌握线性方程组有解的判定定理，掌握用初等行变换求线性方程组通解的方法。

2．理解向量组的线性相关与线性无关概念，掌握判断向量组线性相关性的常用法。

3．理解向量组的秩及最大线性无关组，理解矩阵的秩和向量组的秩之间的关系，会用矩阵的初等变换求向量组的秩和最大线性无关组。

4．理解齐次线性方程组解的性质、基础解系、通解、解的结构以及解空间的概念。

5．理解非齐次线性方程组解的性质，通解的概念以及解的结构。

重点：用行初等变换求线性方程组的通解，向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法，求向量组的极大线性无关组及秩。

难点：向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法，求向量组的极大线性无关组及秩，非齐次线性方程组解的结构及通解，用初等行变换求线性方程组的通解。

3.1 消元法 作业：P86:4(3),7(1)

4、用消元法解下列非齐次线性方程组

（3）$\begin{cases} 2x+y-z+w=1 \\ 4x+2y-2z+w=2 \\ 2x+y-z-w=1 \end{cases}$

7、λ取何值时，下列非齐次线性方程组有唯一解、无解或有无穷多解？
并在有无穷多解时求出其解.

（1）$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$

3.2 向量组的线性组合 作业：P93

5.设有向量

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{bmatrix},\ \beta=\begin{bmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{bmatrix}.$$

试问当λ取何值时，

（1）β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表达式唯一？

（2）β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表达式不唯一？

（3）β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？

3.3 向量组的线性相关性 作业 P98

2. a取何值时，下列向量组线性相关：

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\a\\-1\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\a\end{bmatrix},$$

P127

5. 已知向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\-4\\-8\\k\end{bmatrix}$，线性相关，求k.

3.4 向量组的秩 作业 P102:3(2)

3. 求下列向量组的一个极大线性无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示.

（2）$\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\7\\10\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}3\\1\\-1\\-2\end{bmatrix}$，$\alpha_4=\begin{bmatrix}8\\5\\9\\11\end{bmatrix}$.

3.6 线性方程组解的结构 作业

4. $(p116)$求下列非齐次线性方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系.

（2）$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -6 \end{cases}$.

第四章 矩阵的特征值

教学内容：

1．矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，求特征值和特征向量。

2．相似矩阵的概念、性质及矩阵相似、对角化的充分必要条件。用相似变换化矩阵为对角矩阵的方法。

要求学生：

1．理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，会求特征值和特征向量。

2．了解相似矩阵的概念、性质及矩阵相似、对角化的充分必要条件，掌握用相似变换化矩阵为对角矩阵的方法。

重点：求矩阵的特征值与特征向量，矩阵对角化的方法。

难点：矩阵对角化的方法。

4.2 矩阵的特征值与特征向量 作业

P142

5. 求下列矩阵的特征值及特征向量

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

6. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 $1,-2,3$，求：(1) $2A$ 的特征值；(2) A^{-1} 的特征值.

10. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 $1,2,3$，求 $\left|A^3-5A^2+7A\right|$.

P156

13. 已知可逆矩阵 A 的特征值为 $1,2,-2$，则 A^* 的三个特征值为？$|A|$ 的代数余子式 $A_{11}+A_{22}+A_{33}$ 之和为？（需要写清答题过程，写清理由）

4.3 相似矩阵 作业

P147

3. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 可相似对角化，求 x.