

**Mathematik 1**  
**Übung 8 (Logik und Beweisverfahren)**

1. Verneinen Sie folgende Aussagen und stellen Sie diese in positiver Form dar (ohne Verneinung):
  - a) „Alle Ampeln zeigen ein rotes Signal!“
  - b) „Es gibt einen Fisch, der nicht im Wasser schwimmt.“
2. Stellen Sie folgende Umschreibungen durch mathematische Ausdrücke dar:
  - a) „Bei der Addition zweier natürlicher Zahlen entsteht wiederum eine natürliche Zahl.“
  - b) „Es gibt eine reelle Zahl, bei der die Addition mit sich selbst gleich der Multiplikation mit sich selbst ist.“
  - c) „Wenn eine natürliche Zahl gerade ist, folgt daraus, dass auch das Quadrat dieser Zahl gerade ist.“
3. Gegeben sind Aussage  $a : 4^2 = 2^4$  und Aussage  $b : 3^5 > 5^3$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr:
  - a)  $a \vee b$     b)  $a \wedge b$     c)  $a \text{ xor } b$     d)  $\bar{a}$     e)  $a \vee (\bar{a} \wedge b)$
4. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Bool'schen Algebra:
  - a)  $a \cdot (\bar{a} + b)$     b)  $(a \cdot \bar{b}) + b$     c)  $a \cdot b + a \cdot \bar{b}$
5. Zeigen Sie mittels direktem Beweis, dass für zwei reelle Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $a \geq 0$  und  $b \geq 0$  gilt:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

6. Zeigen Sie durch Kontraposition (indirekter Beweis), dass  $\sqrt{2}$  eine irrationale Zahl ist. (Hinweis: Die Zahl  $\sqrt{2}$  lässt sich also nicht durch einen Bruch von zwei natürlichen Zahlen darstellen, die außerdem teilerfremd sind.)
7. Zeigen Sie, dass die Aussage  $\forall x \in \mathbb{N}_0 : 3x + 7 < 12$  falsch ist.
8. Zeigen Sie durch vollständige Induktion:
  - a)  $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$
  - b)  $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n 2^{i-1} = 2^n - 1$
  - c)  $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$

*Viel Spaß beim Üben!*