University of Applied Sciences
HOCHSCHULE
EMDEN · LEER

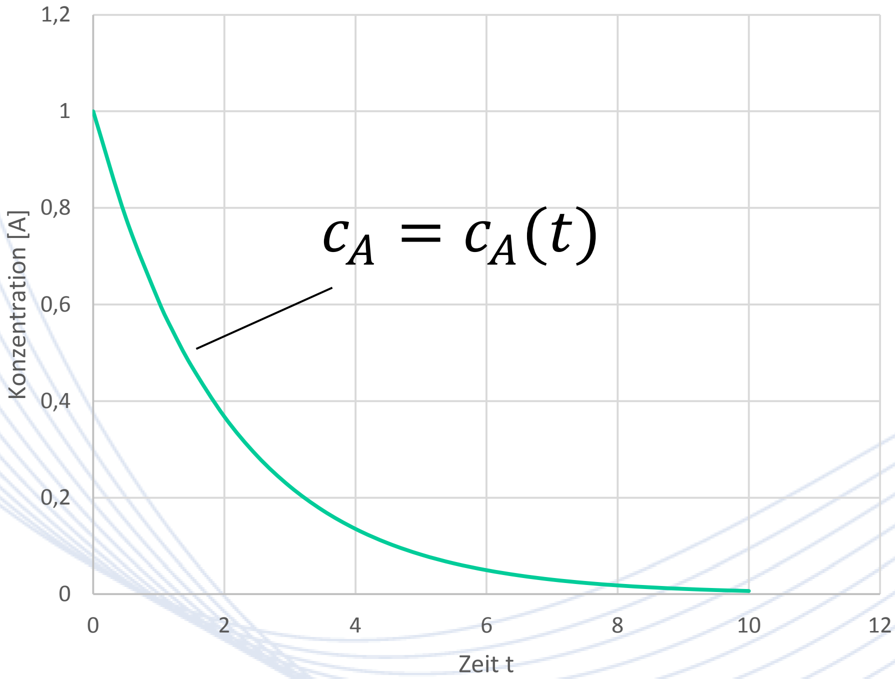
Mathematik 1 (Inf.)

Differentialrechnung

Jens Hüppmeier

Einführung

Reaktion $\mathbf{A \rightarrow B}$

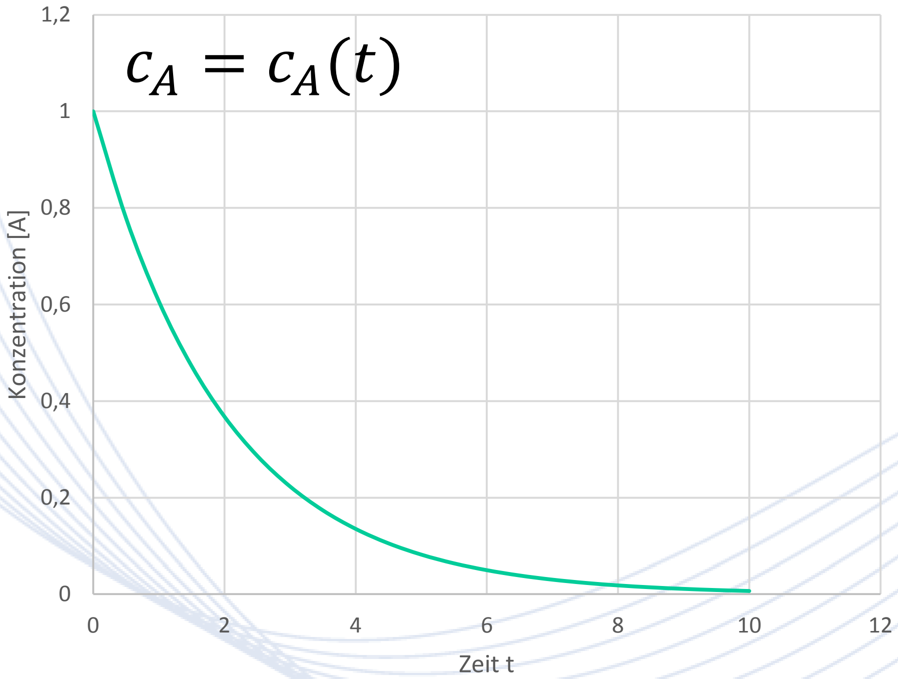


Verlauf der Konzentration der Komponente A mit der Zeit.

Wie groß ist die Reaktionsgeschwindigkeit?

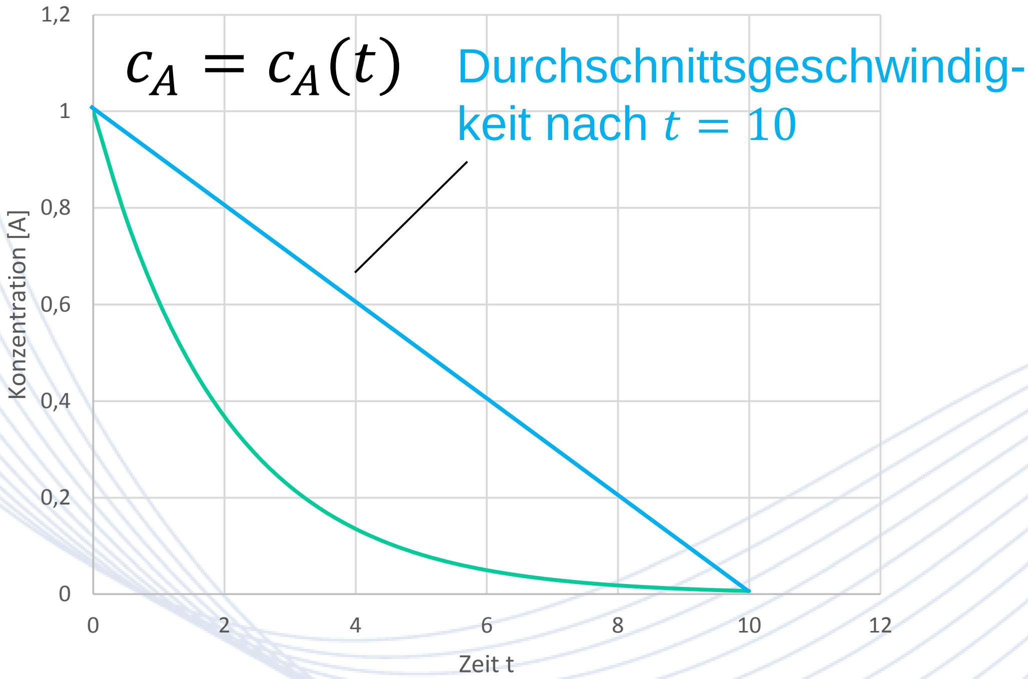
Einführung

$$\text{Reationsgeschwindigkeit} = \frac{\text{Änderung der Konzentration}}{\text{Änderung der Zeit}}$$



Einführung

$$\text{Reationsgeschwindigkeit} = \frac{\text{Änderung der Konzentration}}{\text{Änderung der Zeit}}$$



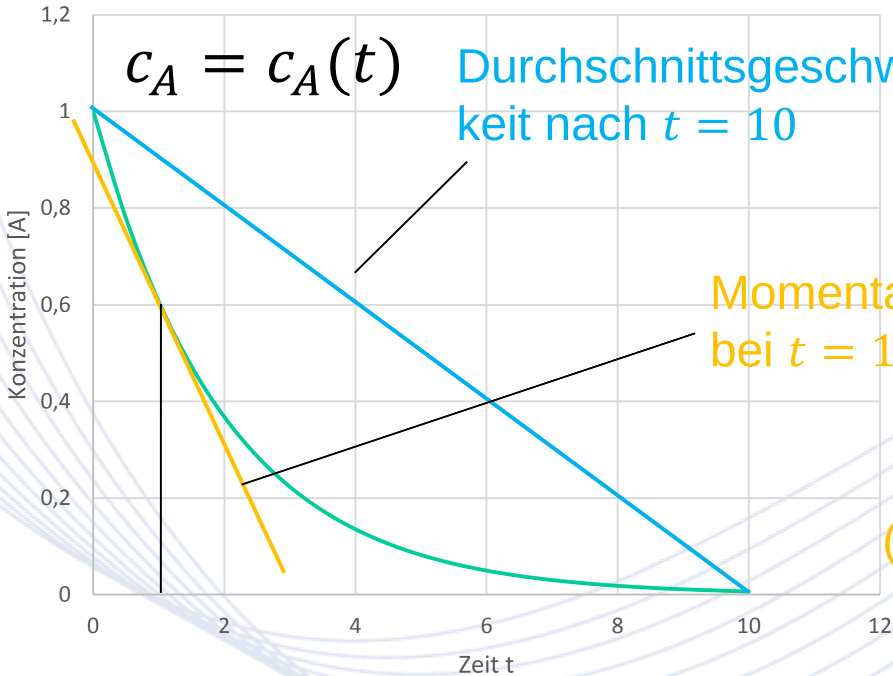
$$\bar{r} = \frac{c_A(10) - c_A(0)}{10}$$

(Steigung der Sekante)

Einführung

$$\text{Reationsgeschwindigkeit} = \frac{\text{Änderung der Konzentration}}{\text{Änderung der Zeit}}$$

$$c_A = c_A(t)$$



Durchschnittsgeschwindigkeit nach $t = 10$

$$\bar{r} = \frac{c_A(10) - c_A(0)}{10}$$

(Steigung der Sekante)

Momentangeschwindigkeit bei $t = 1$

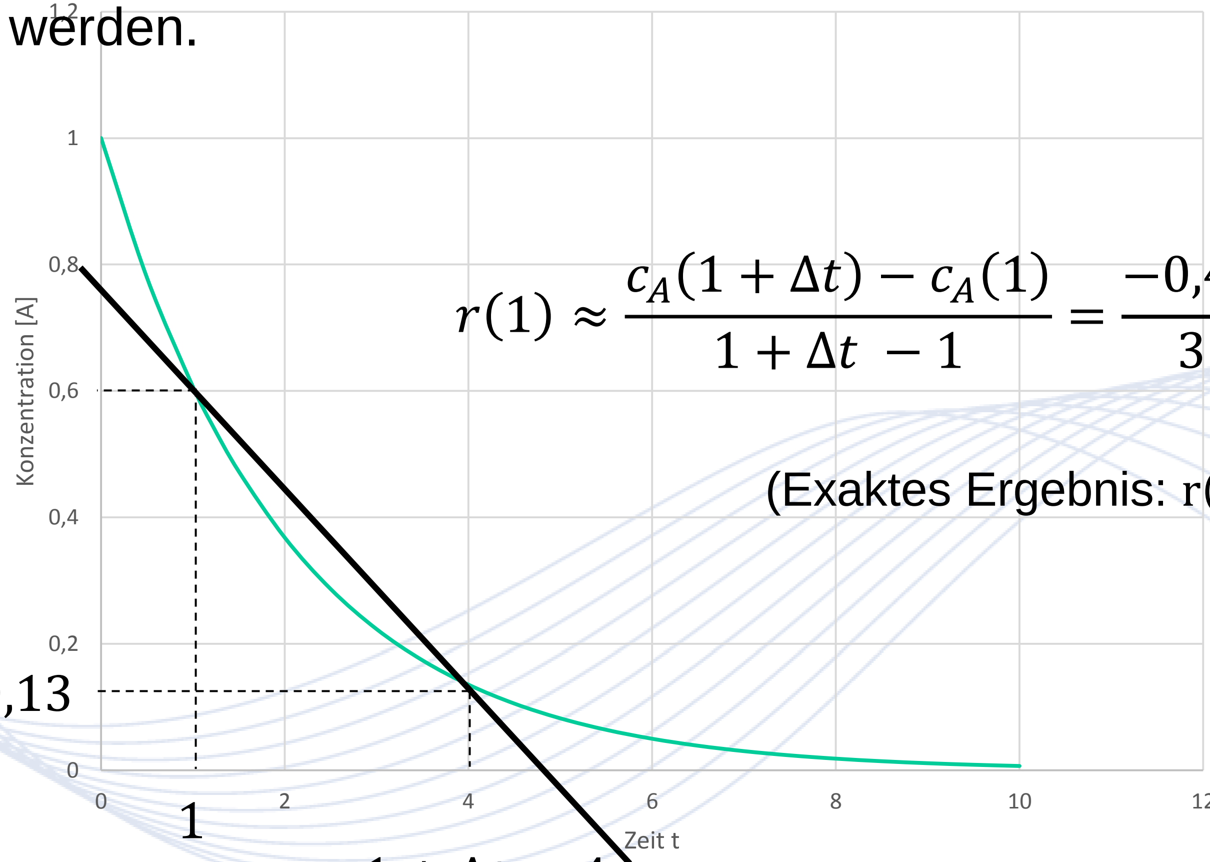
$$r(1) = \frac{dc_A(1)}{dt}$$

(Steigung der Tangente)

Einführung

Reaktionsgeschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt ($t = 1$)

Die Steigung der Tangente kann durch die Steigung einer Sekanten angenähert werden.



$c_A(1) = 0{,}6$

$c_A(1 + \Delta t) = 0{,}13$

1

$1 + \Delta t = 4$

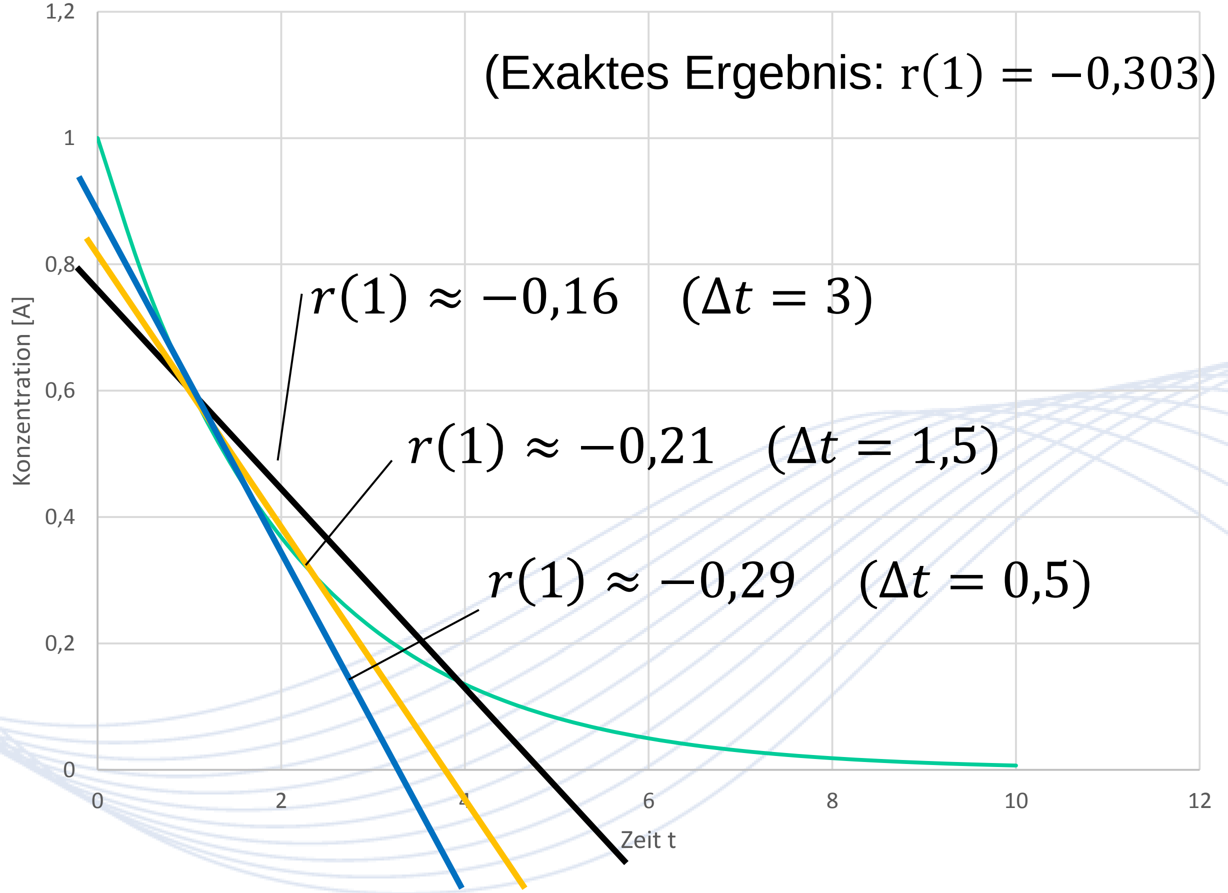
$$r(1) \approx \frac{c_A(1 + \Delta t) - c_A(1)}{1 + \Delta t - 1} = \frac{-0{,}47}{3} = -0{,}16$$

(Exaktes Ergebnis: $\mathrm{r}(1) = -0{,}303$)

Einführung

Reaktionsgeschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt ($t = 1$)

Je kleiner Δt gewählt wird, desto genauer wird das Ergebnis



Definition der Ableitung

Allgemein:

Die Steigung einer Tangenten an die Funktion $y = f(x)$ im Punkt $P = (x_0; y_0 = f(x_0))$ kann man dadurch erhalten, dass man die Steigung einer Sekanten durch den gleichen Punkt P und einen weiteren benachbarten Punkt $Q = (x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ auf $f(x)$ bildet

$$m_S = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Und dann den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ durchführt:

$$m_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definition der Ableitung

Umgekehrt heißt eine Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x = x_0}$$

existiert. Der Grenzwert heißt **erste Ableitung** von $y = f(x)$ an der Stelle x_0.

Definition der Ableitung

Ableitung an der Stelle $x = x_0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Differenzenquotient

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Differentialquotient

Andere Schreibweisen: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = y'(x_0) = f'(x_0)$

Definition der Ableitung

Ableitung an einer beliebigen Stelle x

Bildet man die Ableitung an einer beliebigen Stelle x, erhält man die Ableitungsfunktion $y'(x) = f'(x)$, oder kurz die Ableitung der Funktion $y = f(x)$.

Der Vorgang des Ableitens wird auch als **Differenzieren** bezeichnet und kann durch den **Differentialoperator** $\frac{d}{dx}$ beschrieben werden:

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}[f(x)] = f'(x)$$

Definition der Ableitung

Beispiel: $\boldsymbol{y = f(x) = x^2}$

Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Erste Ableitung:

$$\frac{dy}{\mathrm{dx}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{y' = f'(x) = 2x}$$

Ableitungsregeln

Ableitungsregeln für elementare Funktionen

- Konstante Funktion $y = f(x) = c$
- Potenzfunktion $y = f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{R})$
- Wurzelfunktion $y = f(x) = \sqrt{x}$
- Trigonometrische Funktionen $y = f(x) = \sin x\,; y = f(x) = \cos x\,;\ y = f(x) = \tan x\,; y = f(x) = \cot x$
- Exponentialfunktion $y = f(x) = a^x$
- Logarithmusfunktion $y = f(x) = \log_a x$

Ableitungsregeln

Ableitung der konstanten Funktion $y = f(x) = c$

$$\frac{dy}{\mathrm{dx}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

Ableitungsregeln

Ableitung der Potenzfunktion $y = f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{R})$

$$\frac{dy}{\mathrm{dx}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot (\Delta x)^k - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} \mathrm{x}^{\mathrm{n}-1} \Delta x + \binom{n}{2} \mathrm{x}^{\mathrm{n}-2} \Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\binom{n}{1} \mathrm{x}^{\mathrm{n}-1} + \binom{n}{2} \mathrm{x}^{\mathrm{n}-2} \Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1} \right)$$

$$= \binom{n}{1} \mathrm{x}^{\mathrm{n}-1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} \mathrm{x}^{\mathrm{n}-1} = \mathrm{n} \cdot x^{n-1}$$

Ableitungsregeln

Ableitung der Wurzelfunktion $y = f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{dy}{\mathrm{dx}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ableitungsregeln

Ableitung der Sinusfunktion $y = f(x) = \sin x$

$$\frac{dy}{\mathrm{dx}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x) \cdot \cos(\Delta x) + \cos(x) \cdot \sin(\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x) \cdot (\cos(\Delta x) - 1) + \cos(x) \cdot \sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x) \cdot (\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x) \cdot \sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \sin(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x} + \cos(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

Ableitungsregeln

Ableitung der Sinusfunktion $y = f(x) = \sin x$

$$\frac{dy}{\mathrm{dx}} = \sin(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x} + \cos(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x} = 0$$ Ohne Beweis

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1$$ Ohne Beweis

$$\frac{dy}{\mathrm{dx}} = \cos(x)$$

Ableitungsregeln

Ableitung der Exponentialfunktion $y = f(x) = a^x$

$$\frac{dy}{\mathrm{dx}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(a^{\Delta x} - 1\right) \cdot a^x}{\Delta x} = a^{\mathrm{x}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x}$$

$$= a^{\mathrm{x}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = c \cdot a^x$$

$f(x)$

Grenzwert c, falls existent

Für den Fall $x = 1$ entspricht der Grenzwert der Ableitung

$$y'(0) = c \cdot a^0 = c$$

University of Applied Sciences
HOCHSCHULE EMDEN•LEER

Ableitungsregeln

Ableitung der e-funktion $y = f(x) = e^x$

$$\frac{dy}{\mathrm{dx}} = c \cdot e^x = 1 \cdot e^x = e^x = f(x)$$

Die Ableitung der e-Funktion (Exponentialfunktion mit Eulerscher Zahl als Exponent) an einer Stelle x entspricht seinem Funktionswert!

Die Berechnung der Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion erfolgt später.

Ableitungsregeln

Ableitung des natürlichen Logarithmus $y = f(x) = ln\, x$

$$\frac{dy}{\mathrm{dx}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln(x + \Delta x) - ln\, x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\Delta x} \cdot ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{x}{x} \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{x}{\Delta x} \cdot ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left(ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot ln\left(\lim_{\Delta x \to 0} \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)\right)$$

Ableitungsregeln

Ableitung des natürlichen Logarithmus $y = f(x) = ln\, x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{\Delta x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\Delta x} = \lim_{n \to \infty} n \qquad \left(n = \frac{x}{\Delta x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot ln\left(\lim_{\Delta x \to 0}\left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)\right) = \frac{1}{x} \cdot ln\,\underbrace{\left(\lim_{\mathrm{n} \to \infty}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right)\right)}_{= e}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x}$$

Ableitungsregeln

Zusammenfassung elementarer Ableitungsregeln

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Ableitungsregeln

Ableitungsregeln für Funktionen

Voraussetzung: die abzuleitende Funktion muss im betrachteten Intervall differenzierbar sein

Strategie: komplexe Funktionen werden in eine Form gebracht, in der nur noch Ableitungen elementarer Funktionen gebildet werden müssen

- Faktorregel
- Summenregel
- Produktregel
- Quotientenregel
- Kettenregel

Ableitungsregeln

Faktorregel ($\boldsymbol{y = g(x) = C \cdot f(x)}$)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C \cdot f(x+\Delta x) - C \cdot f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} C \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = C \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= C \cdot f'(x)$$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten

Ableitungsregeln

Summenregel ($\boldsymbol{y = f(x) = f_1(x) + f_2(x)}$)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x + \Delta x) + f_2(x + \Delta x) - f_1(x) - f_2(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f_1(x + \Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} + \frac{f_2(x + \Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f_1(x + \Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f_2(x + \Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} \right)$$

Ableitungsregeln

Summenregel ($\boldsymbol{y = f(x) = f_1(x) + f_2(x)}$)

$$y' = f_1'(x) + f_2'(x)$$

Summen von Funktionen dürfen einzeln differenziert werden

$$y = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

$$y' = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + \cdots$$

Mit der Faktor- und der Summenregel sind auch Kombinationen wie Linearkombinationen differenzierbar:

$$y = a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) + a_3 \cdot f_3(x) + \cdots$$

$$y' = a_1 \cdot f_1'(x) + a_2 \cdot f_2'(x) + a_3 \cdot f_3'(x) + \cdots$$

Ableitungsregeln

Produktregel ($\boldsymbol{y = f(x) = u(x) \cdot v(x)}$)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(u(x + \Delta x) - u(x)\big) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot \big(v(x + \Delta x) - v(x)\big)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\big(u(x + \Delta x) - u(x)\big)}{\Delta x} \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot \frac{\big(v(x + \Delta x) - v(x)\big)}{\Delta x} \right)$$

Ableitungsregeln

Produktregel ($\boldsymbol{y = f(x) = u(x) \cdot v(x)}$)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$u'(x) \qquad\qquad v(x) \qquad\qquad u(x) \qquad\qquad v'(x)$$

$$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Ableitungsregeln

Produktregel für mehr als zwei Faktoren

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x) = \big(u(x) \cdot v(x)\big) \cdot w(x)$$

$$y' = (u(x) \cdot v(x))' \cdot w(x) + \big(u(x) \cdot v(x)\big) \cdot w'(x)$$

$$= (u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x)$$

$$= u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x)$$

Ableitungsregeln

Quotientenregel ($\boldsymbol{y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}}$)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - v(x+\Delta x)\cdot u(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - v(x+\Delta x)\cdot u(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - v(x+\Delta x)\cdot u(x) + u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$$

Ableitungsregeln

Quotientenregel ($y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(u(x+\Delta x) + u(x)\big) \cdot v(x) - \big(v(x+\Delta x) + v(x)\big) \cdot u(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{v(x+\Delta x) \cdot v(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) + u(x)}{\Delta x} \cdot v(x) - \frac{v(x+\Delta x) + v(x)}{\Delta x} \cdot u(x) \right) \cdot \frac{1}{v(x+\Delta x) \cdot v(x)}$$

$$= (u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)) \cdot \frac{1}{v(x) \cdot v(x)}$$

$$= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\big(v(x)\big)^2}$$

Ableitungsregeln

Zusammenfassung:

Regel	$f(x)$	$f'(x)$
Faktorregel	$C \cdot g(x)$	$C \cdot g'(x)$
Summenregel	$f_1(x) + f_2(x)$	$f_1'(x) + f_2'(x)$
Produktregel	$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel	$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

Ableitungsregeln

Kettenregel

Ineinander verkettete Funktionen

$$y(x) = e^{ax+b}$$

$$y(t) = \sin(\omega t + \varphi)$$

$$y(x) = (3x^2 - 3)^6$$

$$y(x) = 10 \cdot \ln|x^2 - 3|$$

Mit den bisherigen Regeln nicht oder sehr aufwendig zu lösen.

Ableitungsregeln

Kettenregel

Ineinander verkettete Funktionen lassen sich mit geeigneten **Substitutionen** lösen. Diese sollten so gewählt werden, dass die Ableitung einfacher (bzw. überhaupt durchführbar) wird.

$$y = f(x) = F\big(u(x)\big)$$

Die Ableitung kann dann schrittweise durchgeführt werden:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = F'(u) \cdot u'(x)$$

Ableitung du nach dx (innere Ableitung)

Ableitung dy nach du (äußere Ableitung)

Ableitungsregeln

Differenzieren nach Logarithmieren

Funktionen der Form $y(x) = [u(x)]^{v(x)}$ lassen sich nicht direkt mit der Kettenregel oder einer anderen elementaren Ableitungsregel differenzieren.

Hier hilft es, die Funktion zunächst zu logarithmieren:

$$\ln y(x) = \ln[u(x)]^{v(x)} = v(x) \cdot \ln u(x)$$

Ableitungsregeln

Differenzieren nach Logarithmieren

Und dann zu differenzieren:

$$\ln y(x) = v(x) \cdot \ln u(x)$$

$$(v(x) \cdot \ln u(x))' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot (\ln u(x))'$$

$$(\ln y(x))' = \frac{y'(x)}{y(x)}$$

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Beispiele

Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion

$$y = a^x$$

Logarithmieren

$$\ln y = \ln a^x = x \cdot \ln a$$

Differenzieren

$$\frac{y'}{y} = \ln a$$

Umstellen nach y‘

$$y' = (\ln a) \cdot y = (\ln a) \cdot a^{\mathrm{x}}$$

Beispiele

Beispiel: Ableitung der Umkehrfunktion

Ist die Funktion $y = f(x)$ in einem Teilbereich umkehrbar, lässt sich ihre Umkehrfunktion bilden:

$$x = f^{-1}(y) = g(y)$$

Die ursprüngliche Funktion lässt sich dann auch so darstellen:

$$y = f(x) = f\big(g(y)\big)$$

Hierauf lässt sich die Kettenregel für die **Ableitung nach der Variablen y** anwenden:

$$1 = f'(x) \cdot g'(y) \longrightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

University of Applied Sciences
HOCHSCHULE EMDEN•LEER

Beispiele

Beispiel: Ableitung der allgemeinen Logarithmusfunktion als Umkehrung der Exponentialfunktion

$$y = f(x) = a^x$$

$$y' = f'(x) = (\ln a) \cdot \mathrm{a}^{\mathrm{x}}$$

Originalfunktion und ihre Ableitung

Umkehrfunktion

$$x = g(y) = \log_a y$$

Die Ableitung der Umkehrfunktion kann dann gebildet werden durch

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(\ln a) \cdot a^x} = \frac{1}{(\ln a) \cdot y}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(\ln a) \cdot x}$$

University of Applied Sciences
HOCHSCHULE EMDEN•LEER

Ableitungsregeln

Implizite Differentiation

Lässt sich die abzuleitende Funktion nicht in expliziter Form angeben, liegt aber in impliziter Form vor, lässt sich diese formal unter Anwendung der Kettenregel differenzieren.

$$F(x;y) = 0$$

Beispiel:

$$F(x;y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$F'(x;y) = 2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

University of Applied Sciences
HOCHSCHULE EMDEN·LEER

Ableitungsregeln

Höhere Ableitungen

Durch Ableiten der Funktion $y = f(x)$ erhält man ihre **erste Ableitung** bzw. die Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$.

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{Differenzieren}} y' = f'(x)$$

Durch Ableiten der Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$ erhält man dann die **zweite Ableitung** $y'' = f''(x)$ usw.

$$y' = f'(x) \xrightarrow{\text{Differenzieren}} y'' = f''(x)$$