University of Applied Sciences
HOCHSCHULE
EMDEN·LEER

Theoretische Informatik
Reguläre Sprachen

Prof. Dr. Juho Mäkiö
24.10. 2018

REGULÄRE SPRACHEN

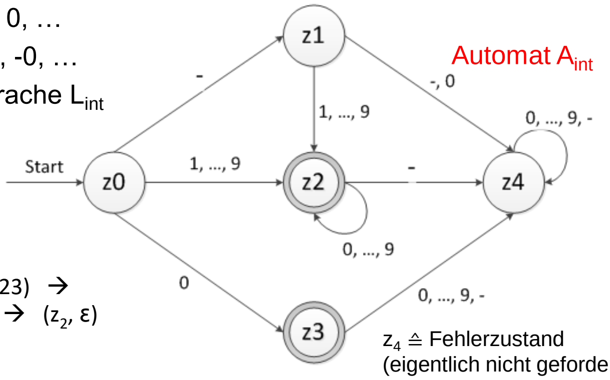
Definition

$L \subset \Sigma^*$ heißt regulär, falls es einen DEA *A* gibt, der L akzeptiert, also $L = L(A)$

→ Damit hat man für eine einfache Sprachklasse einen Automaten gefunden, der diese Sprachen akzeptiert.

Beispiel

- Ganze Dezimalzahlen:
- korrekt: 14, -7, 150, 0, …
- nicht korrekt: 5-, --7, -0, …
- $\Sigma = \{-, 0, \dots, 9\}$, Sprache L_{int}



Automat A_{int}

z_4 ≙ Fehlerzustand (eigentlich nicht gefordert)

Test: -123

$(z_0, -123) \rightarrow (z_1, 123) \rightarrow$

$(z_2, 23) \rightarrow (z_2, 3) \rightarrow (z_2, \varepsilon)$

also $-123 \in L(A_{int})$

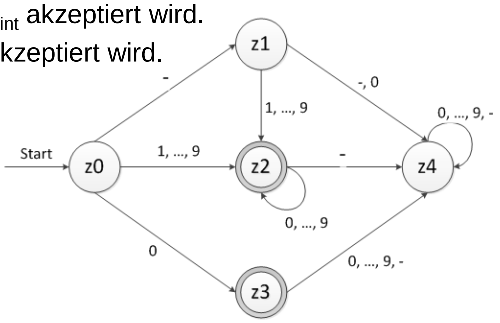
Damit gilt:

$L_{int} = L(A_{int})$

L_{int} ist eine reguläre Sprache

Aufgaben

- Geben Sie für diesen Automaten die Automatentabelle an.
- Geben Sie $A_{int} = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ an.
- Zeigen Sie, dass 1679 von A_{int} akzeptiert wird.
- Zeigen Sie, dass -1-4 nicht akzeptiert wird.



Aufgabe

Konstruieren Sie jeweils einen Automaten, der folgende Sprachen über $\Sigma = \{0, 1\}$ akzeptiert:

$L_1 = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \text{ beginnt mit } 1\}$

$L_1 = \{1\omega \mid \omega \in \Sigma^*\}$

$L_2 = \{\omega \in \Sigma^* \mid |\omega|_1 \geq 1\}$

$L_3 = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \text{ enthält nicht } 11\}$

Wozu das ganze?

Sprache mit Syntax

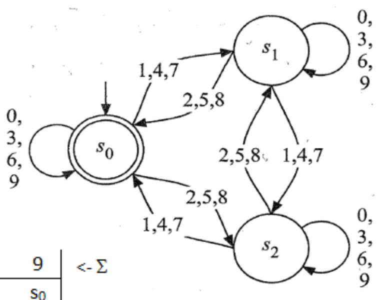
z.B. $\omega \in L_1$ beginnt mit 1

Automat/Maschine, der/die genau solche Wörter erkennt bzw. akzeptiert

Beispiel

- Gegeben ist der folgende Automat A über $\Sigma = \{0, \dots, 9\}$:

$A = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit
$Z = \{s_0, s_1, s_2\}$
$\Sigma = \{0, \dots, 9\}$
δ : s. Tabelle
$z_0 = s_0$
$E = \{s_0\}$



Eingabe

Zustand	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s_0	s_0	s_1	s_2	s_0	s_1	s_2	s_0	s_1	s_2	s_0
s_1	s_1	s_2	s_0	s_1	s_2	s_0	s_1	s_2	s_0	s_1
s_2	s_2	s_0	s_1	s_2	s_0	s_1	s_2	s_0	s_1	s_2

<- Σ

Beispiel

Wird $\omega = 126$ erkannt?

126 $s_0 \rightarrow s_1$ $\delta(s_0, 1) = s_1$
↑

126 $s_1 \rightarrow s_0$ $\delta(s_1, 2) = s_0$
↑

126 $s_0 \rightarrow s_0$ Endzustand: $\delta(s_0, 6) = s_0$
↑

$126 \in L(A)$

über Konfigurationen:

$(s_0, 126) \rightarrow (s_1, 26) \rightarrow (s_0, 6) \rightarrow (s_0, \varepsilon)$

d.h. $(s_0, 126) \rightarrow^* (s_0, \varepsilon) \in E$

also $126 \in L(A)$ ~ reguläre Sprache

Beispiel Fortführung

Wird $\omega = 293$ erkannt?

$(s_0, 293)$ -> $(s_2, 93)$ -> $(s_2, 3)$ -> (s_2, ε)

also $293 \notin L(A)$

Frage: Welche Struktur hat ein $\omega \in L(A)$?

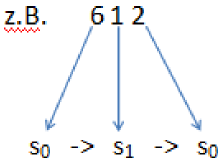
$18 \in L(A)$; $25 \notin L(A)$; $111 \in L(A)$; $217 \notin L(A)$

Der Automat verarbeitet Zahlen, die aus Ziffern $\in \{0, \ldots, 9\}$ bestehen.

„Quersumme“ durch 3 teilbar:

Rest : 0 → s_0
Rest : 1 → s_1
Rest : 2 → s_2

Damit $L(A) = \{z \in \Sigma^* \mid z \text{ ganzzahlig durch 3 teilbar}\}$

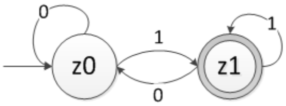


Weitere Begriffe

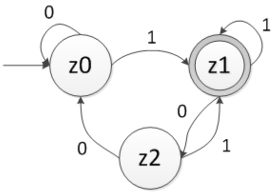
- äquivalente Automaten
- erreichbare Zustände
- Fehlerzustände

Beispiel

$\Sigma = \{0, 1\}$



A_1: $L(A_1) = \{\omega 1 \mid \omega \in \Sigma^*\}$



A_2: $L(A_2) = \{\omega 1 \mid \omega \in \Sigma^*\}$

Also: Es gibt verschiedene Automaten für dieselbe Sprache

Äquivalente Automaten

- Zwei Automaten A_1 und A_2 heißen äquivalent, falls es gilt: $L(A_1) = L(A_2)$

Wie zeigt man diese Äquivalenz?

$$L(A_1) \subset L(A_2) \wedge L(A_2) \subset L(A_1)$$

Ein Wort, das A_1 erkennt, wird auch von A_2 erkannt.

und

Ein Wort, das A_2 erkennt, wird auch von A_1 erkannt

Erreichbare Zustände

$z' \in Z$ heißt vom Zustand $z \in \Sigma$ erreichbar, falls es $\omega \in \Sigma^*$ gibt mit

$$(z, \omega) \rightarrow^* (z', \varepsilon)$$

$[z]^* \subset Z$ ist die Menge aller von z aus erreichbaren Zustände.

Fehlerzustände

Ein Fehlerzustand ist ein Zustand $z \in Z$, von dem aus kein Endzustand erreichbar ist:

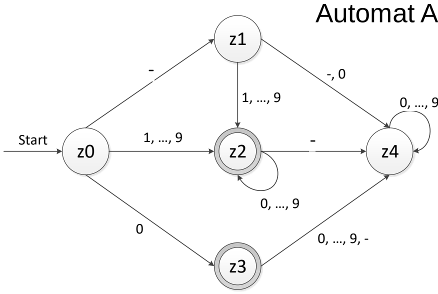
$$[z]^* \cap E = \emptyset$$

<u>Also:</u>Gelangt man bei der Abarbeitung eines Wortes ω in einem Fehlerzustand, so gilt $\omega \notin L(A)$

Beispiel

$[z_0]^* = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}$
$[z_1]^* = \{z_1, z_2, z_4\}$
$[z_2]^* = \{z_2, z_4\}$
$[z_3]^* = \{z_3, z_4\}$
$[z_4]^* = \{z_4\}$

Automat A_{int}



(überflüssig)

z_4 ist Fehlerzustand ~ falsche/ungültige Zahl

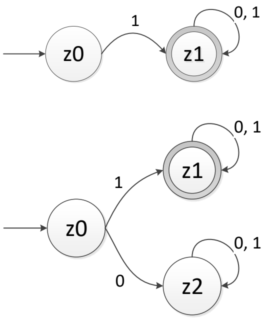
z.B. $(z_0, 091)$ -> $(z_3, 91)$ -> $(z_4, 1)$ -> $(z_4, ε)$ ungültige Zahl

---

Beispiel

$L_1 = \{ω ∈ Σ^* \mid ω \text{ beginnt mit } 1\}$ $Σ = \{0, 1\}$

Varianten:



z.B.: 1001: $z_0 \xrightarrow{1} z_1 \xrightarrow{0} z_1 \xrightarrow{0} z_1 \xrightarrow{1} z_1$

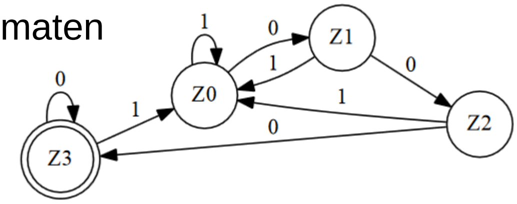
z.B.: 01: $z_0 \xrightarrow{0} z_2 \xrightarrow{1} z_2$

$[z_0]^* = \{z_0, z_1, z_2\}$
$[z_1]^* = \{z_1\}$
$[z_2]^* = \{z_2\}$

Fehlerzustand: z2

Aufgaben

Geben Sie für den Automaten Übergangstabelle an.

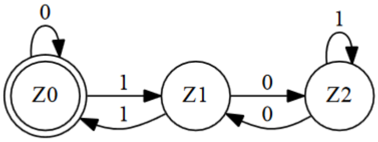


Zustand	Eingabe	Folgezustand
Z0	0	Z1
Z0	1	Z0
Z1	0	Z2
Z1	1	Z0
Z2	0	Z3
Z2	1	Z0
Z3	0	Z3
Z3	1	Z0

Zustand / Eingabe	0	1
Z0	Z1	Z0
Z1	Z2	Z0
Z2	Z3	Z0
Z3	Z3	Z0

Aufgaben

Beim dargestellten Automaten ist Z0 gleichzeitig Start- und Endzustand



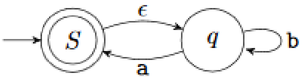
Prüfe, welche der Zahlen vom Automaten akzeptiert werden.

Prüfe, ob 10101 vom Automaten akzeptiert wird.

Wort	Dezimalzahl	akzeptiert?	Wort	Dezimalzahl	akzeptiert?
0			1000		
1			1001		
10			1010		
11			1011		
100			1100		
101			1101		
110			1110		
111			1111		

Aufgaben

- Welche Sprache (über dem Alphabet {a, b}) akzeptiert der folgende nicht-deterministische endliche Automat?



Lösung: $\{\epsilon\} \cup \{w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \mid w \textit{ endet auf } \mathtt{a}\}$

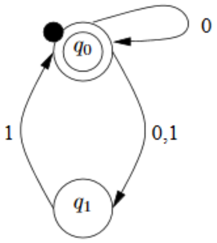
- Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, der die Sprache L((aa U aaa)*) akzeptiert.

Lösung: *Die Sprache* $L((\mathtt{aa} \cup \mathtt{aaa})^*)$ *besteht aus allen Wörtern* $\mathtt{a}^k$ *außer* a. *Dies wird vom folgenden Automat akzeptiert:*

Aufgaben

Betrachten Sie den Automaten zum Eingabealphabet Σ={0,1}

Beschreiben Sie den Automaten
A formal durch die Angaben
A=(Σ,Q,δ,q_0,F).



δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_0\}$

Aufgaben

Sei $L := \{\omega \in \{0,1\}^{*}$ | das zweitletzt Symbol von ω ist eine 0 $\}$

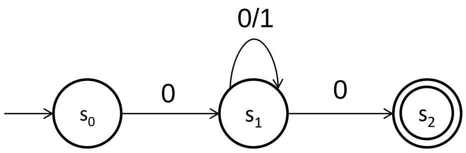
- Geben Sie zu L einen nichtdeterministischen endlichen Automaten A mit L(A)= L an. Beschreiben Sie den Automaten A sowohl durch einen Übergangsgraphen als auch formal als 5-Tupel.

Aufgabe

- Gegeben sei die Sprache L mit

  $= \{w \in \{0, 1\}? | \exists\ u \in \{0, 1\}^* : w = 0u0\}$.

  Geben Sie einen endlichen Automaten $A=(\Sigma,Q,\delta,q_0,F)$ an, welcher L erkennt. Geben Sie A vollständig an.



- Auf einem Parkplatz kostet das Parken 1,50 Euro. Ein Parkscheinautomat akzeptiert 50 Cent, 1 Euro und 2 Euro-Münzen. Nach Einwurf der korrekten Geldsumme liefert der Automat das Ticket und das Restgeld. Er besitzt keine Abbruchtaste. Erstellen Sie Automaten, die die Sprache des Parkscheinautomats akzeptiert.

Yes we can…