Mathematik I
Klausur SS 2016 (Lösung)

Emden, 21.09.2016

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Hlfsmittel: Vorlesungsmitschriften (inkl. Übungen), Formelsammlungen, Integraltabellen, Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht graphikfähig, nicht algebrafähig)
Alle Rechenwege müssen nachvollziehbar sein!

1. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen durch Anwenden der Ketten-, Produkt- und/oder Quotientenregel:

   a) $y = e^{-x \cdot \cos x}$ *b)* $y = (x^3 + 1) \cdot \ln(x^3 + 1)$ *c)* $y = e^{-x} \cdot \cos x$

   20 Punkte

   Lösungen:

   a) Anwendung von Ketten- und Produktregel:

   $$y' = (-x \cdot \cos x)' \cdot e^{-x \cdot \cos x}$$
   $$y' = -(\cos x + x \cdot (-\sin x)) \cdot e^{-x \cdot \cos x}$$
   $$y' = (x \cdot \sin x - \cos x) \cdot e^{-x \cdot \cos x}$$

   b) Anwendung von Produkt-, Summen- und Kettenregel:

   $$y' = (x^3 + 1)' \cdot \ln(x^3 + 1) + (x^3 + 1) \cdot (\ln(x^3 + 1))'$$
   $$y' = 3x^2 \cdot \ln(x^3 + 1) + (x^3 + 1) \cdot (\ln(x^3 + 1))'$$
   $$y' = 3x^2 \cdot \ln(x^3 + 1) + (x^3 + 1) \cdot \frac{1}{x^3 + 1} \cdot 3x^2$$
   $$y' = 3x^2 \cdot (\ln(x^3 + 1) + 1)$$

   c) Anwendung von Produkt- und Kettenregel:

   $$y' = (e^{-x})' \cdot \cos x + e^{-x} \cdot (-\sin x)$$
   $$y' = -e^{-x} \cdot \cos x - e^{-x} \cdot \sin x$$
   $$y' = -e^{-x} \cdot (\cos x + \sin x)$$

2. Untersuchen Sie die Funktion $y = x^3 - 4x$ auf ihr Verhalten im Unendlichen (neg.+pos.), ihre Nullstellen sowie auf lokale Extremwerte, Wendepunkte und Sattelpunkte! Skizzieren Sie die Funktion!

   20 Punkte

   Lösung:
   Verhalten im Unendlichen:

   $$\lim_{x \to +\infty} \left(x^3 - 4x\right) \to +\infty$$
   $$\lim_{x \to -\infty} \left(x^3 - 4x\right) \to -\infty$$

Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
x^3 - 4x &= 0 \\
x(x^2 - 4) &= 0 \\
x_1 = 0 \lor x_{2/3}^2 - 4 &= 0 \\
x_{2/3}^2 &= 4 \\
x_{2/3} &= \pm 2 \\
x_2 = -2 &\lor x_3 = 2
\end{aligned}
$$

Die Nullstellen sind $N_1(-2;0)$, $N_2(0;0)$ und $N_3(2;0)$

Lokale Extremwerte:
Als notwendige Bedingung muss $y' = 0$ gelten:

$$
\begin{aligned}
y' = 3x^2 - 4 &= 0 \\
3x^2 &= 4 \\
x^2 &= \frac{4}{3} \\
x_{1/2} &= \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \\
x_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \approx -1,155 \lor x_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,155
\end{aligned}
$$

Die beiden möglichen Extremwerte werden mit Hilfe der zweiten Ableitung weiter untersucht:

$$
\begin{aligned}
y'' &= 6x \\
y''(-\frac{2}{\sqrt{3}}) &\approx -6,9 < 0 \qquad \text{Maximum} \\
y''(\frac{2}{\sqrt{3}}) &\approx 6,9 > 0 \qquad \text{Minimum}
\end{aligned}
$$

Die dazugehörigen y-Werte sind:

$$
\begin{aligned}
y(-\frac{2}{\sqrt{3}}) &= -\frac{8}{3} + \frac{8}{\sqrt{3}} \approx 3,079 \\
y(\frac{2}{\sqrt{3}}) &= \frac{8}{3} - \frac{8}{\sqrt{3}} \approx -3,079
\end{aligned}
$$

Damit liegt ein Hochpunkt bei $E_1(-1,155;3,079)$ und ein Tiefpunkt bei $E_2(1,155;-3,079)$ vor.

Wendepunkte und Sattelpunkte:
Für die Wendepunkte muss als notwendige Bedingung $y'' = 0$ gelten:

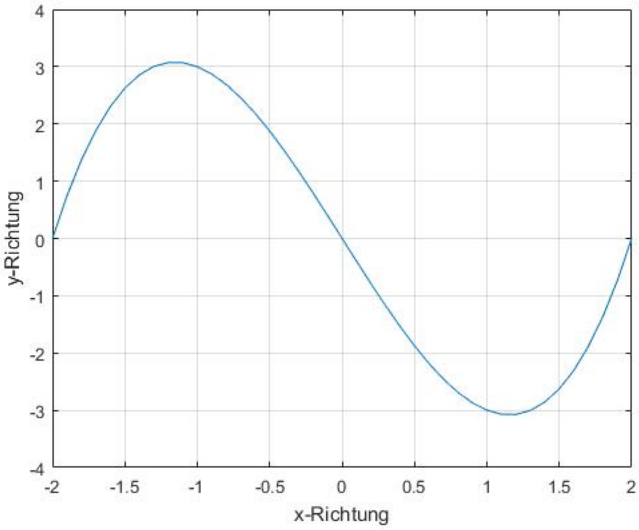
$$
y'' = 6x = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_W = 0
$$

An dieser Stelle liegt ein Wendepunkt vor, falls $y'''(x_W) \neq 0$ gilt:

$$
y''' = 6 \neq 0
$$

Der Wendepunkt ist gleichzeitig eine Nullstelle, damit ist auch der y-Wert an dieser Stelle bekannt. An $W(0;0)$ liegt also ein Wendepunkt vor.
Ein Sattelpunkt existiert nicht, da $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) = 0$ und $y'''(x_0) \neq 0$ für keine Stelle x_0 der Funktion (Polynom dritter Ordnung!) erfüllt ist.

Skizze:



3. Die beiden Parabeln $y_1 = 9 - 2x^2$ und $y_2 = 5 - x^2$ schließen eine Fläche in der x, y-Ebene ein. Berechnen Sie deren Flächeninhalt.

15 Punkte

Lösung: Zunächst berechnen wir die x-Werte der Schnittpunkte der beiden Funktionen durch Gleichsetzen der y-Werte:

$$\begin{aligned} 9 - 2x^2 &= 5 - x^2 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x_{1/2} &= \pm 2 \\ x_1 = -2 &\vee x_2 = 2 \end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche liegt im Bereich $-2 \le x \le 2$. Nun ermitteln wir, welche der Parabeln die obere ist. Dazu setzen wir einen beliebigen x-Wert aus dem Bereich $-2 < x < 2$ in beide Funktionen ein:

$$x = 0: \qquad 9 - 2 \cdot 0^2 = 9 > 5 - 0^2 = 5$$

Damit können wir den Flächeninhalt über die Integrale der beiden Funktionen bestimmen:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2} (9 - 2x^2)\,dx - \int_{-2}^{2} (5 - x^2)\,dx \\
&= \int_{-2}^{2} (9 - 2x^2 - 5 + x^2)\,dx \\
&= \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx \\
&= \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} \\
&= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} \\
&= \frac{32}{3} \approx \underline{\underline{10,667}}
\end{aligned}$$

4. Lösen Sie die folgenden unbestimmten Integrale (durch partielle Integration bzw. Integration durch Substitution):

$$a)\; I = \int x^2 \cdot \ln x\,dx \qquad b)\; I = \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

20 Punkte

Lösungen:

a) Das Integral kann durch partielle Integration gelöst werden:

$$\int u' \cdot v\,dx = u \cdot v - \int u \cdot v'\,dx$$

Substitutionen: $u' = x^2$, $u = \frac{1}{3}x^3$, $v = \ln x$ und $v' = \frac{1}{x}$
Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cdot \ln x\,dx &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C \\
&= \frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C
\end{aligned}$$

b) Das Integral kann mit Hilfe der Substitution $u = 1 + x^2$ gelöst werden:

$$u' = \frac{du}{dx} = 2x \qquad \rightarrow \qquad dx = \frac{du}{2x}$$

Im Integral eingesetzt:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{u^2} \cdot \frac{du}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{u} + C \\ &= -\frac{1}{2(1+x^2)} + C \end{aligned}$$

5. Die drei Kräfte $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ wirken auf einen Massepunkt. Wie lautet die resultierende Kraft $\vec{F}$ und welchen Winkel φ schließen die resultierende Kraft $\vec{F}$ und die Kraft $\vec{F}_1$ miteinander ein ($0° \leq \varphi \leq 180°$)?

15 Punkte

Lösung: Die resultierende Kraft $\vec{F}$ ergibt sich aus der formalen Vektoraddition der drei Kräfte:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}}$$

Der Winkel zwischen der resultierenden Kraft $\vec{F}$ und der Kraft $\vec{F}_1$ kann über die Definition des Skalarproduktes berechnet werden:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{F}_1 &= \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\varphi \\ \vec{F} \cdot \vec{F}_1 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 0 = 9 \\ \left|\vec{F}\right| &= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\ \left|\vec{F}_1\right| &= \sqrt{3^2 + 0^2} = 3 \\ \cos\varphi &= \frac{\vec{F} \cdot \vec{F}_1}{\left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{F}\right|} = \frac{9}{5 \cdot 3} = 0,6 \\ \varphi &= \arccos 0,6 \approx \underline{\underline{53,13°}} \end{aligned}$$

6. Bei der Planung einer Anlage zur Herstellung von Methanol aus Synthesegas sind die relativen Kosten (€/t Methanol) abhängig von der späteren Produktionsmenge. Dabei sinken die relativen Investitionskosten mit der Größe der Anlage (Produktionskapazität x in t Methanol) mit $K_{Inv} = 20/x$, während die relativen Betriebskosten mit x steigen: $K_{Bet} = 2x^2 + 100$.

   Bei welcher späteren Produktionsmenge werden die Gesamtkosten (Betriebskosten + Investitionskosten) minimal?

10 Punkte

Lösung: Die Gesamtkosten $K = K_{Inv} + K_{Bet}$ können durch die Funktion $K(x) = 2x^2 + 100 + 20/x$ beschrieben werden. Um die minimalen Gesamtkosten zu ermitteln, berechnen wir die lokalen Extremwerte dieser Funktion. Dazu muss als notwendige Bedingung $K' = 0$ gelten:

$$\begin{aligned} K' = 4x - \frac{20}{x^2} &= 0 \\ 4x^3 - 20 &= 0 \\ x^3 &= 5 \\ x &= \sqrt[3]{5} \approx 1,7 \end{aligned}$$

Wir untersuchen diesen möglichen Extrempunkt weiter:

$$K'' = 4 + \frac{40}{x^3}$$
$$K''(\sqrt[3]{5}) = 4 + \frac{40}{5} = 12 > 0 \qquad \rightarrow \qquad \text{Minimum}$$

Demnach sind also bei einer Produktionskapazität von 1,7 t Methanol die Gesamtkosten minimal. Diese betragen hierbei:

$$K_{Inv} = 20/1,7 \approx 11,8€/t$$
$$K_{Bet} = 2 \cdot (1,7)^2 + 100 \approx 105,8€/t$$
$$K \approx 117,6€/t$$

Viel Erfolg!