

Mathematik 1

Übung 9 (Modulare Arithmetik und Zahlentheorie)

1. Welcher Unterschied besteht zwischen den beiden mathematischen Strukturen *Körper* und *Ring*?
2. Überprüfen Sie folgende Strukturen:
 - a) Ist $(\mathbb{Q}, +)$ eine kommutative Gruppe?
 - b) Ist $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe?
 - c) Ist $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein Körper oder ein Ring?
3. Berechnen Sie:
 - a) $-3 \bmod 4$
 - b) $23 \bmod 7$
 - c) $-34 \bmod 9$
 - d) $-11 \bmod 10$
4. Welche der folgenden Zahlen sind untereinander kongruent modulo 7?
 $-49; -13, -11, -10, -1, 3, 14, 19, 32, 33, 51, 71, 86, 90$
5. Geben Sie alle Elemente der Mengen \mathbb{Z}_4 , \mathbb{Z}_2 und \mathbb{Z}_{12} an.
6. Erklären Sie die Addition und die Multiplikation im \mathbb{Z}_6 anhand von Additions- und Multiplikationstabellen.
7. Berechnen Sie
 - a) $34 \cdot 234 \pmod{4}$
 - b) $15 - 11 \pmod{3}$
 - c) $32 \cdot (46 + 18) \pmod{6}$
8. Bilden Sie jeweils das additive Inverse von
 - a) 3 in \mathbb{Z}_6
 - b) 12 in \mathbb{Z}_{17}
 - c) 0 in \mathbb{Z}_7
 - d) 1 in \mathbb{Z}_2
9. Geben Sie alle möglichen multiplikativen Inverse der Mengen \mathbb{Z}_3 , \mathbb{Z}_6 und \mathbb{Z}_7 an.
10. Verschlüsseln Sie das Wort *LEBENSLAUF* mit Hilfe der Vorschrift $y = 4 \cdot x + 2 \pmod{26}$. (Die Zahlen in \mathbb{Z}_{26} entsprechen dabei den Buchstaben des Alphabets, also $A = 0, B = 1, C = 2$ usw.)

Viel Spaß beim Üben!