University of Applied Sciences
HOCHSCHULE
EMDEN · LEER

Mathematik I (Inf.)

Funktionen (Teil 2)

Jens Hüppmeier

Eigenschaften von Funktionen

Eigenschaften

- Nullstellen
- Symmetrie
- Monotonie
- Umkehrbarkeit
- Verhalten im Unendlichen
- Stetigkeit

Funktionen

- Polynomfunktionen
- Gebrochenrationale Funktionen
- Potenz- und Wurzelfunktionen
- Trigonometrische Funktionen und deren Umkehrung
- Exponential- und Logarithmusfunktionen

Polynomfunktionen

Allgemeine Form einer Polynomfunktion

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

$y = f(x) = a_0$	Konstante Funktion
$y = f(x) = a_0 + a_1 x$	Lineare Funktion
$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$	Quadratische Funktion
$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$	Kubische Funktion

Polynomfunktionen

Nullstellen einer Polynomfunktion

Das Aufsuchen von Nullstellen einer Polynomfunktion bis zum Grad $n \leq 2$ erfolgt nach einfachen Methoden (z.B. p,q-Formel).

Für Polynome höheren Grades hilft das Zerlegen in **Linearfaktoren** (Produkte):

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

$$= a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Die Funktion $f(x)$ ist gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist.

Polynomfunktionen

Beispiel quadratische Gleichung:

$$y = f(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x-1)(x+2)$$

Linearfaktor-
zerlegung

p,q-Formel

$$f(x_N) = 3(x_N - 1)(x_N + 2) = 0$$

$$x_{N1} - 1 = 0 \quad \vee \quad x_{N2} + 2 = 0$$

$$x_{N1} = 1 \quad \vee \quad x_{N2} = -2$$

$$f(x_N) = 3x_N^2 + 3x_N - 6 = 0$$

$$x_N^2 + x_N - 2 = 0$$

$$x_{N1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2}$$

$$x_{N1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_{N1} = 1 \quad \vee \quad x_{N2} = -2$$

Polynomfunktionen

Nullstellen von Polynomfunktionen höherer Ordnung:

Lässt sich eine Nullstelle der Polynomfunktion (z.B. durch Probieren) ermitteln, kann diese als Linearfaktor vom Polynom abgespalten werden.

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

$$= (x - x_1) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1})$$

Linearfaktor

Das Restpolynom ist dann vom Grad n-1

Die Koeffizienten $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ können durch **Polynomdivision** oder mit Hilfe des **Horner-Schemas** bestimmt werden.

Polynomfunktionen

Polynomdivision:

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0) : (x - x_1) = a_n x^{n-1} + (a_{n-1} + x_1 a_n) x^{n-2} + \cdots$$

$$-(a_n x^n - x_1 a_n x^{n-1})$$

$$(a_{n-1} + x_1 a_n) x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2}$$

$$-\left((a_{n-1} + x_1 a_n) x^{n-1} - x_1 (a_{n-1} + x_1 a_n) x^{n-2}\right)$$

…

University of Applied Sciences
HOCHSCHULE EMDEN • LEER

Polynomfunktionen

Horner-Schema:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_0
x_1		$a_n x_1$	$(a_{n-1} + a_n x_1) x_1$		$(a_1 + a_2 x_1 + \cdots + a_n x_1^{n-1}) x_1$
	a_n	$a_{n-1} + a_n x_1$	$a_{n-2} + a_{n-1} x_1 + a_n x_1^2$		$a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n$

$$f(x_0) = a_0 + a_1\, x_1 + \cdots + a_n\, x_1^n$$

$$f(x_0) = 0$$

Nullstelle

$$b_{n-2} = a_{n-2} + a_{n-1} x_1 + a_n x_1^2$$

$$b_{n-1} = a_{n-1} + a_n x_1$$

$$b_n = a_n$$

Gebrochenrationale Funktionen

Gebrochenrationale Funktionen

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

$g(x)$: Zählerpolynom vom Grad m
$h(x)$: Nennerpolynom vom Grad n

$n > m$: Echt gebrochenrationale Funktion
$n \leq m$: Unecht gebrochenrationale Funktion

Gebrochenrationale Funktionen

Nullstellen einer gebrochenrationalen Funktion

Die Nullstellen des Zählerpolynoms $g(x)$ sind gleichzeitig die Nullstellen der Funktion $f(x)$, wenn das Nennerpolynom $h(x)$ an diesen Stellen von Null verschieden ist.

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

$$\begin{matrix} g(x_N) = 0 \\ h(x_N) \neq 0 \end{matrix} \longrightarrow f(x_N) = 0$$

Gebrochenrationale Funktionen

Polstellen einer gebrochenrationalen Funktion

Die Nullstellen des Nennerpolynoms $h(x)$ sind gleichzeitig die Polstellen (Unendlichkeitsstellen) der Funktion $f(x)$, wenn das Zählerpolynom $g(x)$ an diesen Stellen von Null verschieden ist.

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

$$\begin{matrix} g(x_P) \neq 0 \\ h(x_P) = 0 \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \lim_{x \to x_P} f(x_P) = \pm\infty$$

Gebrochenrationale Funktionen

Beispiel

$$y = f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

Nullstellen:

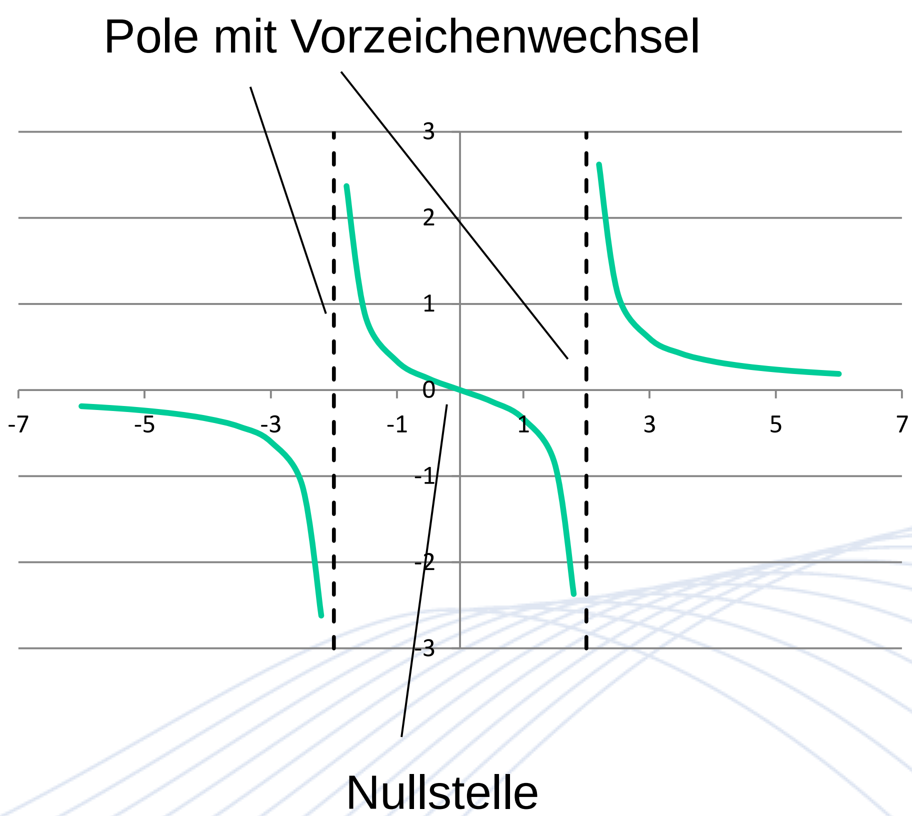
$$x_N = 0$$

Polstellen:

$$x_P^2 - 4 = 0$$

$$x_{P1/2} = \pm\sqrt{4}$$

$$x_{P1} = 2 \qquad x_{P2} = -2$$



Gebrochenrationale Funktionen

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Nullstellen

$$\begin{matrix} g(x_N) = 0 \\ h(x_N) \neq 0 \end{matrix} \longrightarrow f(x_N) = 0$$

Polstellen

$$\begin{matrix} g(x_P) \neq 0 \\ h(x_P) = 0 \end{matrix} \longrightarrow \lim_{x \to x_P} f(x_P) = \pm\infty$$

Was ist, wenn $g(x_0) = h(x_0) = 0$?

Gebrochenrationale Funktionen

Was ist, wenn $g(x_0) = h(x_0) = 0$?

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Abspaltung der Nullstelle als Linearfaktor im Zähler und Nenner:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{(x - x_0) \cdot g_r(x)}{(x - x_0) \cdot h_r(x)}$$

Kürzen des Linearfaktors:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g_r(x)}{h_r(x)}$$

Die Funktion $f(x)$ besitzt an der Stelle $x = x_0$ eine **behebbare Lücke**!

Gebrochenrationale Funktionen

Verhalten im Unendlichen

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Für **echt** gebrochen rationale Funktionen ($n > m$):

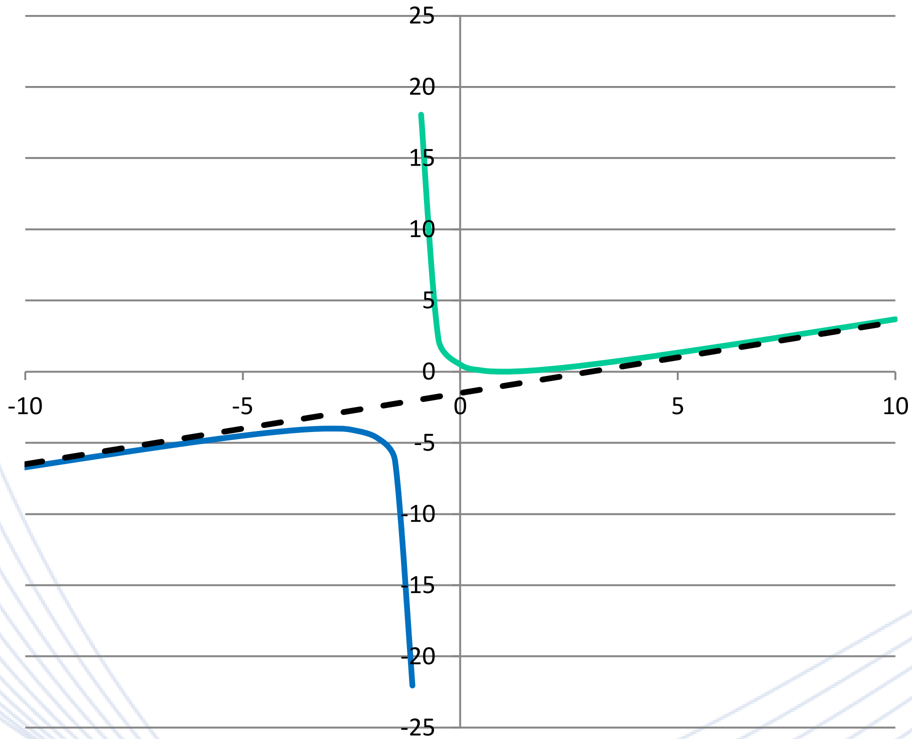
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$$

Nenner wächst schneller als Zähler!

Die Funktion nähert sich im Unendlichen asymptotisch der x-Achse ($y = 0$).

Gebrochenrationale Funktionen

Beispiel: Unecht gebrochen rationale Funktion



$$f(x) = \frac{0{,}5x^3 - 1{,}5x + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Verlauf der Funktion nähert sich einer Geraden an.
Lässt sich diese berechnen?

Gebrochenrationale Funktionen

Verhalten im Unendlichen

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Für **unecht** gebrochen rationale Funktionen ($n \leq m$) lassen sich die Asymptoten als Gleichung (Polynom $p(x)$) angeben. Dazu wird die Funktion aufgeteilt in einen Polynomanteil und einen echt gebrochenen Rest (durch Polynomdivision.

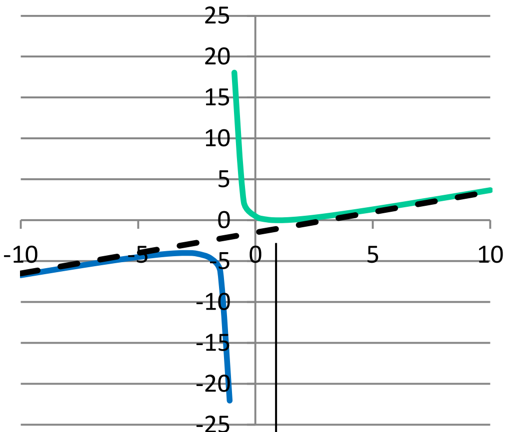
$$f(x) = p(x) + r(x)$$

Polynomfunktion

Echt gebrochener Anteil
(geht gegen Null)

Gebrochenrationale Funktionen

Beispiel: Unecht gebrochen rationale Funktion



$$f(x) = \frac{0{,}5x^2 - x + 0{,}5}{x+1}$$

$$(0{,}5x^2 - x + 0{,}5) : (x+1) = 0{,}5x - 1{,}5 + \frac{2}{x+1}$$

$$\begin{array}{r} -(0{,}5x^2 + 0{,}5x) \\ \hline -1{,}5x + 0{,}5 \\ -(-1{,}5x - 1{,}5) \\ \hline 2 \end{array}$$

Gleichung der Asymptoten im Unendlichen

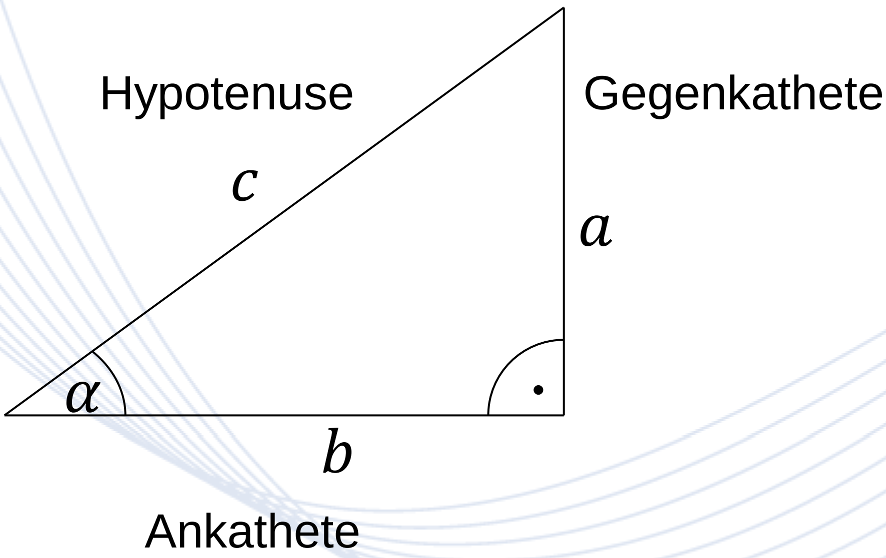
$$f(x) = \overbrace{0{,}5x - 1{,}5} + \frac{2}{x+1}$$

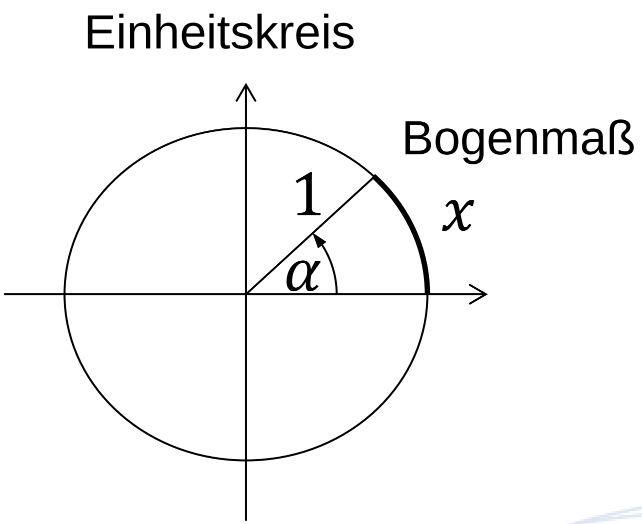
Geht gegen Null

Trigonometrische Funktionen

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$



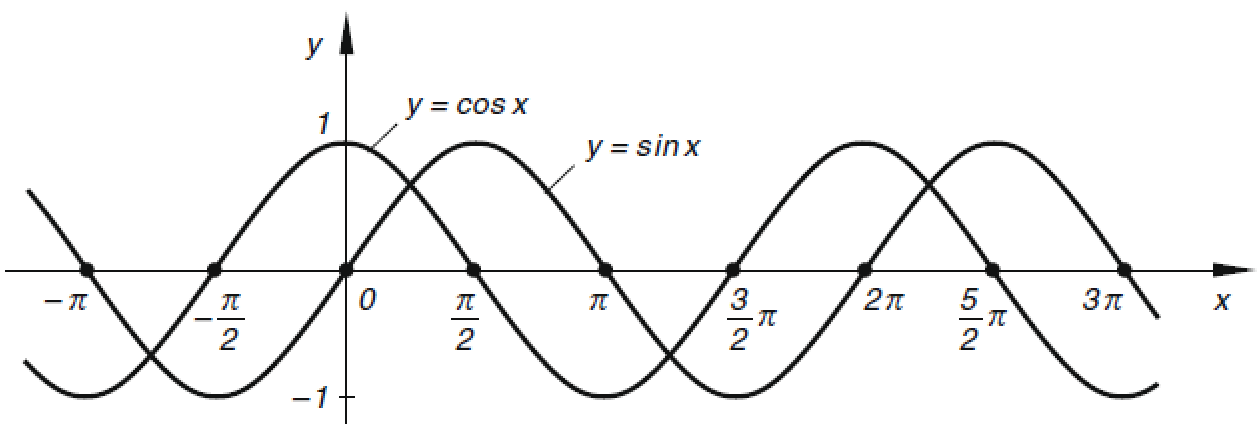


$$x = \frac{2\pi}{360°}\alpha$$

$$\alpha = \frac{360°}{2\pi}x$$

Trigonometrische Funktionen

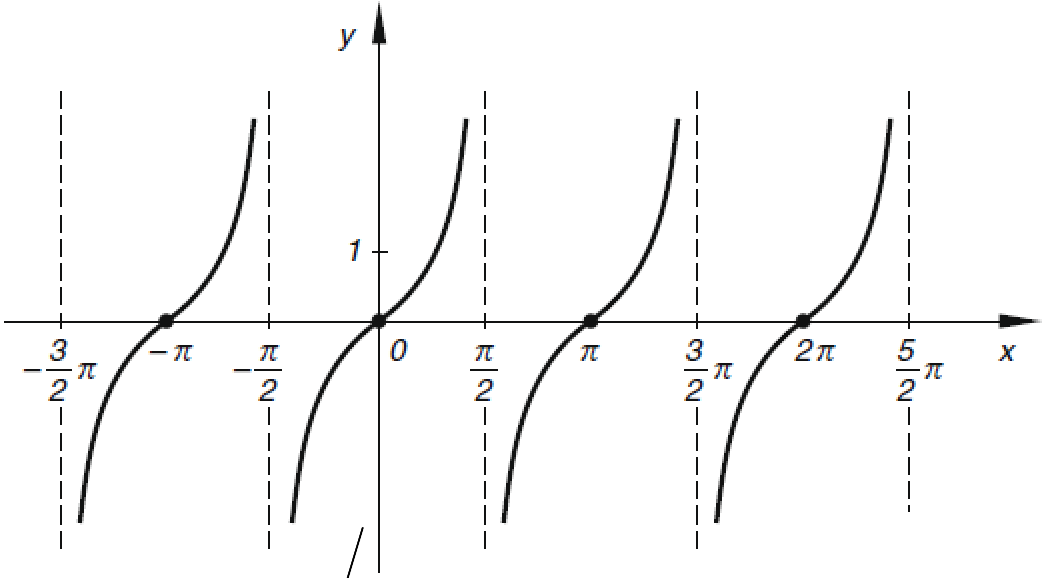
	$y = \sin x$	$y = \cos x$
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$
Wertebereich	$-1 \leq y \leq 1$	$-1 \leq y \leq 1$
Periode (primitive)	2π	2π
Symmetrie	ungerade	gerade
Nullstellen	$x_k = k \cdot \pi$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$



Trigonometrische Funktionen

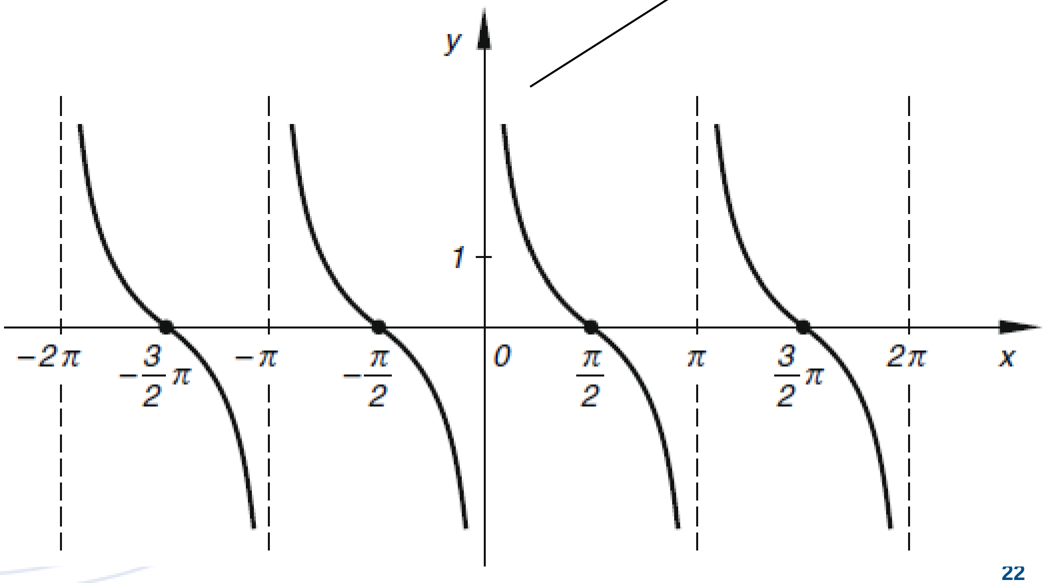
	$y = \tan x$	$y = \cot x$
Definitionsbereich	$x \in \mathbb{R}$ mit Ausnahme der Stellen $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$	$x \in \mathbb{R}$ mit Ausnahme der Stellen $x_k = k \cdot \pi$
Wertebereich	$-\infty < y < \infty$	$-\infty < y < \infty$
Periode (primitive)	π	π
Symmetrie	ungerade	ungerade
Nullstellen	$x_k = k \cdot \pi$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$
Pole	$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$	$x_k = k \cdot \pi$
Senkrechte Asymptoten	$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$	$x = k \cdot \pi$

Trigonometrische Funktionen



Tangensfunktion

Kotangensfunktion



Trigonometrische Funktionen

Rechenregeln und Beziehungen

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Trigonometrischer Pythagoras

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2$$

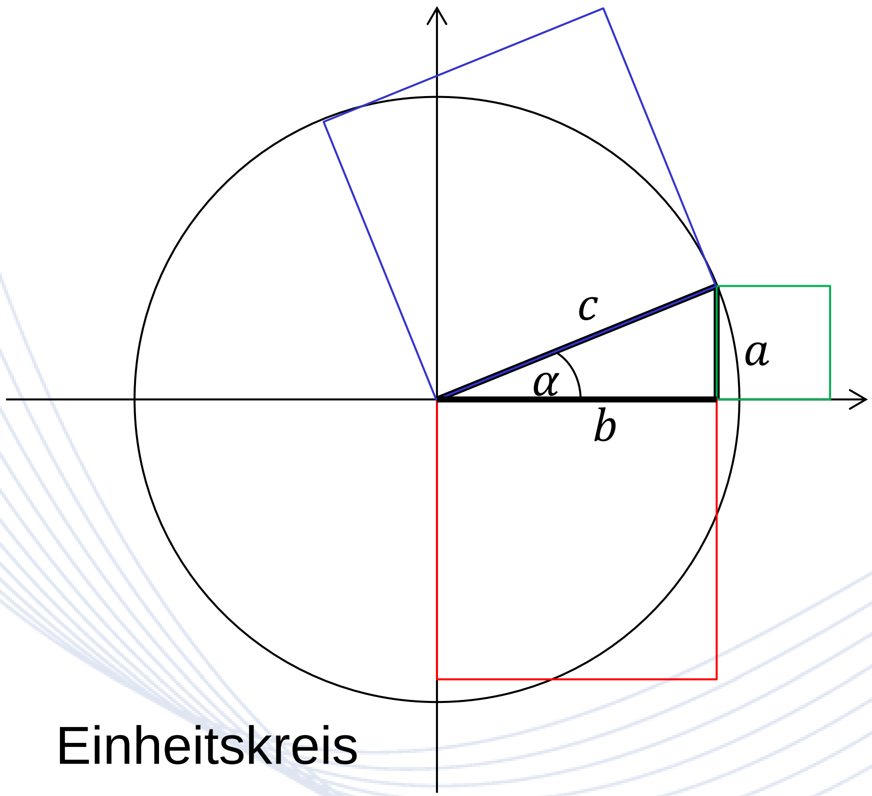
$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2$$

$$\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \cdot \tan x_2}$$

Additionstheoreme

Trigonometrische Funktionen

Trigonometrischer Pythagoras



Einheitskreis

$$c = 1$$

$$\rightarrow \sin(\alpha) = \frac{a}{c} = a$$

$$\rightarrow \cos(\alpha) = \frac{b}{c} = b$$

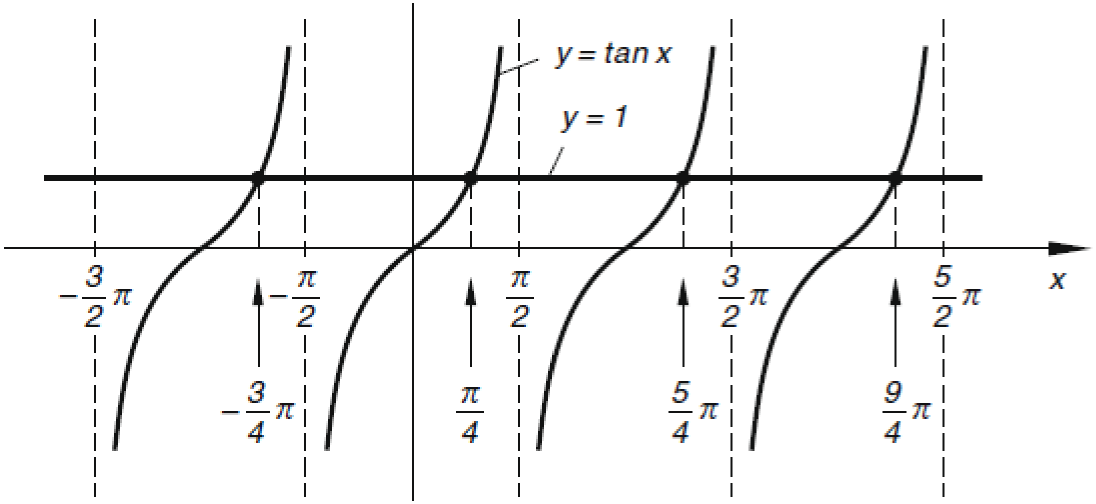
Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\boxed{\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1}$$

Arkusfunktionen

Umkehrung der trigonometrischen Funktionen
Ähnlich wie bei den Quadratfunktionen ist auch hier zwar jedem x-Wert ein y-Wert eindeutig zugeordnet, für die Umkehrung gibt es aber mehrere (hier unendlich viele) Möglichkeiten.



Arkusfunktionen

Umkehrung der trigonometrischen Funktionen
Für die Umkehrung beschränkt man sich auf ein Intervall, in dem Monotonie gegeben ist.

$y = \sin x$	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	$y = \arcsin x$
$y = \cos x$	$0 \leq x \leq \pi$	$y = \arccos x$
$y = \tan x$	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	$y = \arctan x$
$y = \cot x$	$0 \leq x \leq \pi$	$y = \mathrm{arccot}\, x$

Exponentialfunktionen

Bsp.: Bakterienwachstum

Vermehrung durch Zellteilung (aus einer Zelle werden in der nächsten Generation wie Zellen)

0. Generation (Eltern)	$N_0 = 1$
1. Generation	$N_1 = 2 \cdot N_0 = 2$
2. Generation	$N_2 = 2 \cdot N_1 = 2 \cdot 2 \cdot N_0 = 4$
3. Generation	$N_3 = 2 \cdot N_2 = 2 \cdot 2 \cdot N_1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot N_0 = 8$
x. Generation	$N_x = 2 \cdot N_{x-1} = 2 \cdot 2 \cdot N_{x-2} = 2^x \cdot N_0$

Exponentialfunktionen

Exponentielles Wachstum

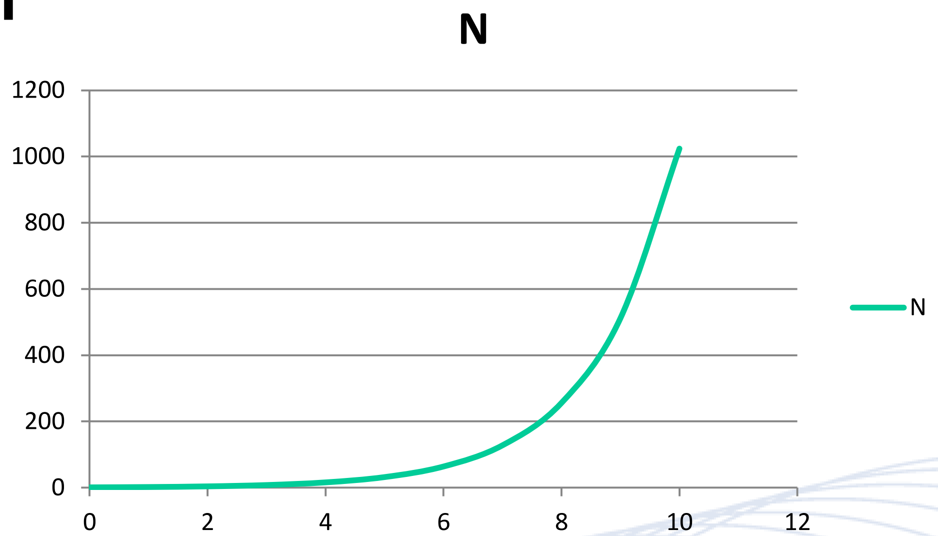
$$N = N_0 \cdot 2^x$$

Exponentialfunktion

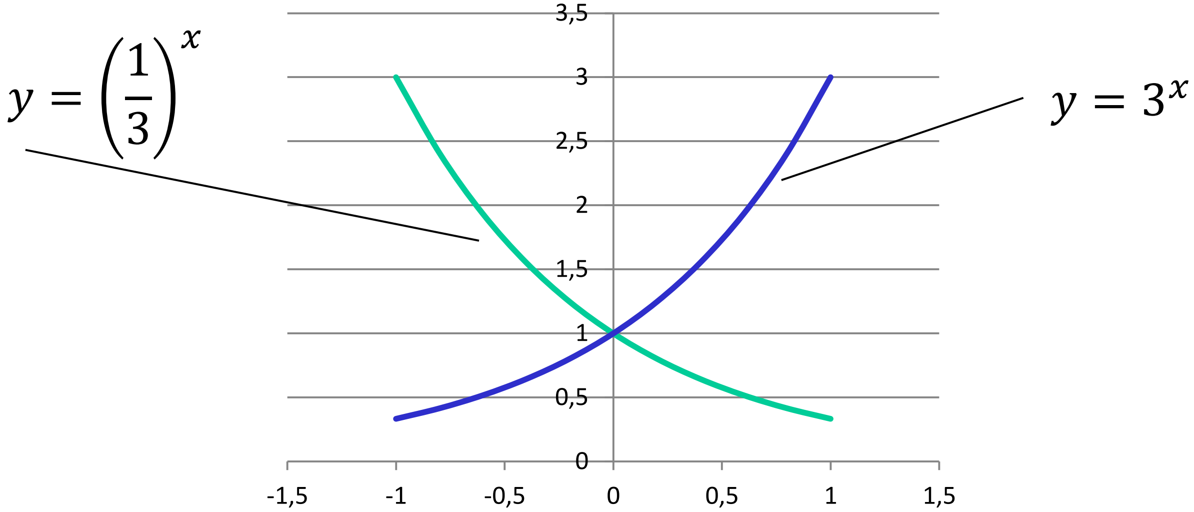
$$y = f(x) = a^x$$

Exponent

Basis $(a > 0;\ a \neq 1)$



Exponentialfunktionen



	$y = a^x \quad (0 < a < 1)$	$y = a^x \quad (a > 1)$
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$
Wertebereich	$0 < y < \infty$	$0 < y < \infty$
Monotonie	streng monoton fallend	streng monoton wachsend
Asymptoten	$y = 0 \quad (\text{für } x \to \infty)$	$y = 0 \quad (\text{für } x \to -\infty)$

Exponentialfunktionen

e-Funktion
Viele Vorgänge in der Natur und in den Ingenieurs-wissenschaften lassen sich durch Exponentialfunktionen mit der Eulerschen Zahl e als Basis darstellen.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots \qquad y = e^x \qquad y = e^{-x}$$

Beispiele:
- Abklingfunktionen (radioaktiver Zerfall usw.) → $y = a \cdot e^{-\lambda \cdot t}$
- Sättigungsfunktionen → $y = a \cdot \left(1 - e^{-\lambda \cdot t}\right)$
- Wachstumsfunktionen → $y = n_0 \cdot e^{\alpha \cdot x}$
- Gedämpfte Schwingungen → $y = A \cdot e^{-x} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)$

Logarithmusfunktionen

Logarithmusfunktionen können als Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen angesehen werden:

$$y = a^x \quad \rightarrow \quad x = \log_a y$$

„Logarithmus von y zur Basis a“

Für die Basis a gilt weiterhin $a > 0$ und $a \neq 1$
Damit gilt auch $y > 0$!!!

Für Logarithmen gelten die gleichen Rechenregeln wie für Exponenten!
Inbesondere:

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a(u^n) = n \cdot \log_a u$$

Logarithmusfunktionen

Logarithmusfunktionen können als Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen angesehen werden:

$$y = a^x \quad \rightarrow \quad x = \log_a y$$

„Logarithmus von y zur Basis a“

Für die Basis a gilt weiterhin $a > 0$ und $a \neq 1$
Damit gilt auch $y > 0$!!!

Für Logarithmen gelten die gleichen Rechenregeln wie für Exponenten!
Inbesondere:

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a(u^n) = n \cdot \log_a u$$

Logarithmusfunktionen

	$y = \mathrm{a}^x$	$y = \log_{\mathrm{a}} x$
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$0 < x < \infty$
Wertebereich	$0 < y < \infty$	$-\infty < y < \infty$
Nullstellen	——	$x_0 = 1$
Monotonie	$0 < \mathrm{a} < 1$: streng monoton *fallend* $\mathrm{a} > 1$: streng monoton *wachsend*	
Asymptoten	$y = 0$ (x-Achse)	$x = 0$ (y-Achse)

University of Applied Sciences
HOCHSCHULE EMDEN • LEER

Logarithmusfunktionen

Natürlicher Logarithmus
Ähnlich wie bei der e-Funktion hat auch ihre Umkehrfunktion eine besondere Bedeutung in den Natur- und Ingenieurswissenschaften:

$$y = \log_e x = \ln x$$

University of Applied Sciences
HOCHSCHULE EMDEN·LEER