Mathematik I
Klausur WS 2016/17 (Lösung)

Emden, 03.03.2017

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

- Hlfsmittel: Vorlesungsmitschriften (inkl. Übungen), Formelsammlungen, Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht graphikfähig, nicht algebrafähig)
- In allen Aufgaben gelten die Rechenregeln für reelle Zahlen!
- **Alle Rechenwege müssen nachvollziehbar sein!**

Aufgaben:

1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}.$$

Untersuchen Sie diese Funktion hinsichtlich folgender Eigenschaften:

a) Nullstellen, Polstellen und behebbare Lücken
Lösung: Zur Bestimmung müssen die Nullstellen des Zählers sowie des Nenners berechnet werden:
Zähler:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{4-3} \\ x_1 = 1 &\vee x_2 = 3 \end{aligned}$$

Nenner:

$$\begin{aligned} x - 2 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Es existieren keine gemeinsamen Nullstellen im Zähler und im Nenner, deshalb gibt es keine behebbare Lücke. Die Nullstellen der Funktion sind die Nullstellen des Nenners $N_1(1;0)$ und $N_2(3;0)$. Außerdem gibt es einen Pol an der Stelle $x = 2$.

b) Ableitungen (bis 3. Ordnung)
Lösung: Die Ableitungen lassen sich über die Quotientenregel berechnen:

$$f'(x) = \frac{(2x-4)\cdot(x-2)-(x^2-4x+3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+5}{(x-2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x+5)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{-2}{(x-2)^3}$$
$$f'''(x) = \frac{6(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{6}{(x-2)^4}$$

c) Extrempunkte und Wendepunkte
Lösung: Für die Berechnung der lokalen Extrempunkte muss als notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ gelten:

$$\frac{x^2-4x+5}{(x-2)^2} = 0$$
$$x^2-4x+5 = 0$$
$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm \sqrt{-1}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel, die Diskriminante, ist kleiner Null, daher hat diese Gleichung keine reelle Lösung und somit existieren keine lokalen Extrempunkte.
Für die Wendepunkte muss als notwendige Bedingung $f''(x) = 0$ gelten. Da der Zähler der zweiten Ableitung immer kleiner Null ist, existieren für diese Funktion auch keine Wendepunkte.

d) Verhalten im Unendlichen (mit Angabe der Asymptote, falls vorhanden)
Lösung: Um das Verhalten im Unendlichen bewerten zu können, muss die unecht gebrochene Funktion zunächst aufgeteilt werden in ein Polynom und einen echt gebrochenen Rest. Dies kann mit Hilfe der Polynomdivision erfolgen:

$$(x^2-4x+3) : (x-2) = x-2-\frac{1}{x-2}$$

Bei der Fortschreibung im positiven oder negativen Unendlichen wird der Rest $\frac{1}{x-2}$ jeweils zu Null. Die gesamte Funktion nähert sich als asymptotisch dem Polynom $p(x) = x-2$ an.

e) Verhalten bei Annäherung an die Polstellen (falls vorhanden)
Lösung: Der Funktionswert strebt bei Annäherung an die Polstelle $x = 2$ definitionsgemäß ins Unendliche. Ob negativ oder positiv, lässt sich durch Probieren herausfinden:

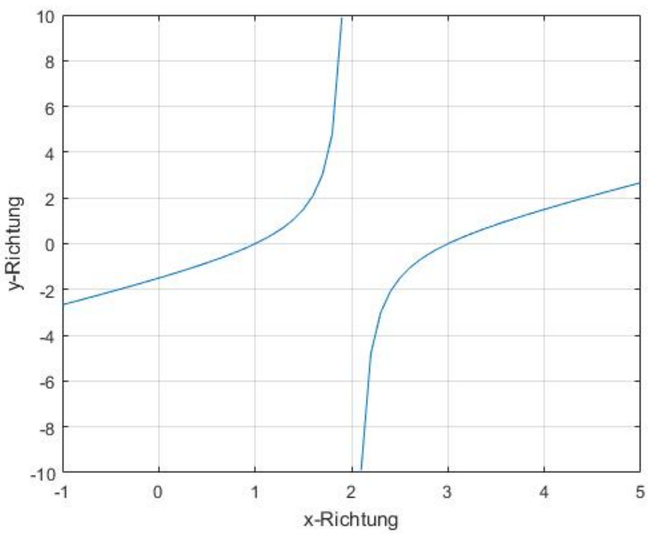
$$f(1,9) = 9,9 > 0$$
$$f(2,1) = -9,9 < 0$$

Damit ergibt sich ein Pol mit Vorzeichenwechsel von pos. nach neg.:

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ (x<2)}} f(x) \to +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ (x>2)}} f(x) \to -\infty$$

f) Skizzieren Sie die Funktion
Lösung: Skizze



30 Punkte

2. Bilden Sie jeweils die erste Ableitung $y' = \frac{dy}{dx}$ der folgenden Funktionen:

a) $$y = \frac{e^{\cos x}}{\sin x}$$

b) $$y = (\sin x)^{\cos x}$$

25 Punkte

Lösungen:

a) Anwendung von Quotienten- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(e^{\cos x})' \sin x - e^{\cos x} \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin x \cdot e^{\cos x} \sin x - e^{\cos x} \cos x}{\sin^2 x} \\ &= -e^{\cos x} \left(1 + \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) \end{aligned}$$

b) Anwendung des logarithmischen Differenzierens:

$$\begin{aligned}
y &= (\sin x)^{\cos x} \\
\ln y &= \cos x \ln \sin x \\
\frac{y'}{y} &= -\sin x \ln \sin x + \cos x \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \\
y' &= \left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x\right] \cdot (\sin x)^{\cos x}
\end{aligned}$$

3. Zeigen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass $f'(x) = 4x^3$ die Ableitung der Funktion $f(x) = x^4$ ist!

10 Punkte

Lösung: Der Differenzenquotient wird durch

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

mit $f(x) = x^4$ und $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^4$ gebildet:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} \\
&= \frac{x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4 - x^4}{\Delta x} \\
&= \frac{4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4}{\Delta x} \\
&= 4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x\Delta x^2 + \Delta x^3
\end{aligned}$$

Für die Ableitung muss nun der Grenzübergang $\Delta x \to 0$ durchgeführt werden:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x\Delta x^2 + \Delta x^3) = 4x^3 = f'(x)$$

4. Lösen Sie das folgende bestimmte Integral durch eine geeignete Substitution:

$$I = \int_3^5 \frac{3x^3 - 13x^2 + 20x - 11}{x^2 - 3x + 2} dx$$

(Hinweise: Vereinfachen Sie den Integranden durch Polynomdivision zunächst so weit wie möglich! Falls Sie keine geeignete Substitution finden, kann alternativ auch die Integration durch Partialbruchzerlegung angewandt werden!)

25 Punkte

Lösung: Der Integrand ist eine unecht gebrochene rationale Funktion und kann zur Vereinfachung durch Polynomdivision zerlegt werden:

$$(3x^3 - 13x^2 + 20x - 11) : (x^2 - 3x + 2) = 3x - 4 + \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

Das Integral kann somit in zwei Teile zerlegt werden:

$$I = I_1 + I_2 = \int_3^5 (3x - 4)\, dx + \int_3^5 \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}\, dx$$

Wir lösen das erste Integral:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_3^5 (3x - 4)\, dx \\ &= \left[\frac{3}{2}x^2 - 4x\right]_3^5 \\ &= \frac{3}{2} \cdot 25 - 4 \cdot 5 \\ &= \underline{37{,}5} \end{aligned}$$

Um das zweite Integral zu lösen, kann die Substitution $u = x^2 - 3x + 2$ verwendet werden:

$$u' = \frac{du}{dx} = 2x - 3 \qquad \rightarrow \qquad dx = \frac{du}{2x - 3}$$

Eingesetzt in das Integral:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_3^5 \frac{2x - 3}{u} \cdot \frac{du}{2x - 3} \\ &= \int_3^5 \frac{du}{u} \\ &= [\ln u]_{x=3}^5 \end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[\ln\left|x^2 - 3x + 2\right|\right]_{x=3}^5 \\ &= \ln \frac{12}{2} \\ &= \ln 6 \\ &\approx \underline{1{,}792} \end{aligned}$$

Das gesamte Integral ergibt sich dann aus

$$I = I_1 + I_2 = \underline{\underline{39,292}}$$

5. Lösen Sie das folgende unbestimmte Integral: (Rechenweg!)

$$I = \int x^2 \cdot \ln x \, dx$$

10 Punkte

Lösung: Das Integral kann durch partielle Integration gelöst werden:

$$\int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx$$

Substitutionen: $u' = x^2$, $u = \frac{1}{3}x^3$, $v = \ln x$ und $v' = \frac{1}{x}$
Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \ln x \, dx &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 \, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C \\ &= \frac{1}{3}x^3 \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C \end{aligned}$$

Viel Erfolg!