University of Applied Sciences
HOCHSCHULE EMDEN · LEER

Mathematik I (Inf.)

Funktionen (Teil 1)

Jens Hüppmeier

Zum Dozenten…

Jens Hüppmeier
Raum T1008
Tel.: +49 (0) 4921 807-1574
E-Mail: jens.hueppmeier@hs-emden-leer.de

Vorlesungen:

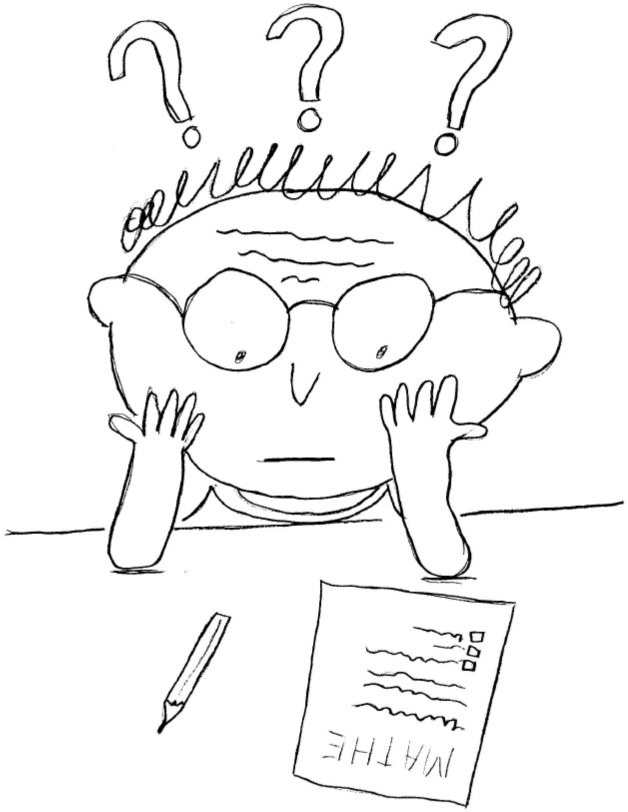
- Mathematik 1/2/3
- Reaktionstechnik
- Apparate und Werkstoffe
- Petrochemische Prozesse

Organisatorisches

- Vorlesungen:
  - Mo. 08:00 – 09:30 Uhr in T 149
  - Fr. 08:00 – 09:30 Uhr in T 151
- Übungen:
  - Mo. 11:45 - 13:15 Uhr in S 202 (Leune)
  - Mi. 11:45 - 13:15 Uhr in S 211 (Heuermann)
  - Do. 15:45 - 17:15 Uhr in S 309 (Leune)
  - Fr. 11:45 - 13:15 Uhr in S 309 (Heuermann)
  - Anmeldung über Moodle

Organisatorisches

Test Mathematik 0 am Dienstag, den 09.10.18 um 14:00 Uhr im CORAM und T-Foyer



Literaturhinweise

- G. Teschl u. S. Teschl, Mathematik für Informatiker Band 1, Springer Vieweg
- G. Teschl u. S. Teschl, Mathematik für Informatiker Band 2, Springer Vieweg

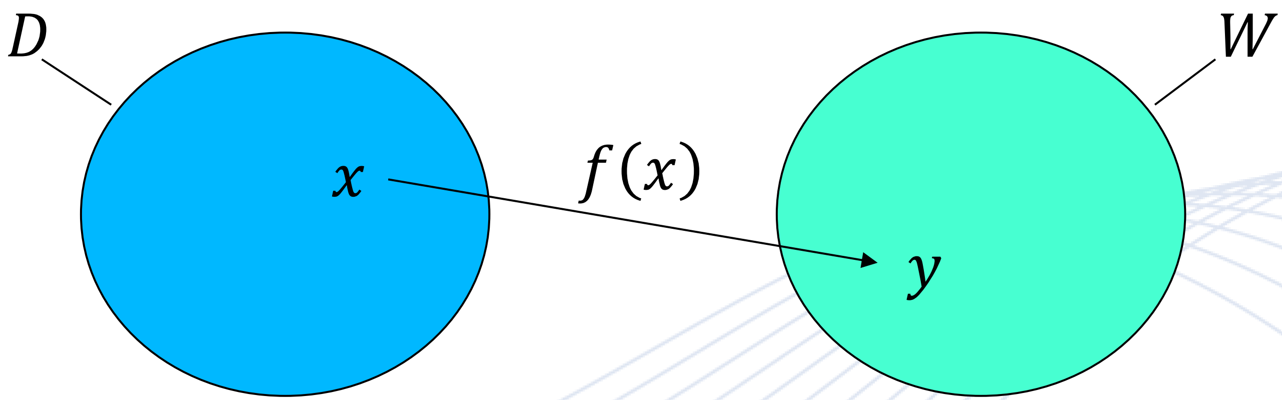
- Papula, Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Springer Vieweg
- Bronstein, Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik
- Bartsch, Taschenbuch mathematischer Formeln

Inhalt

1. Analysis
   - Funktionen und Kurven
   - Tangenten und Ableitungen
   - Anwendungen der Differentialrechnung
2. Algebra
   - Mengenlehre und Logik
   - Matrizen und Determinanten
   - Lineare Gleichungssysteme

Funktionen und Kurven

Eine Funktion ist eine Vorschrift, die jedem Element x aus einer Menge D genau ein Element y aus einer Menge W zuordnet.



$$y = f(x) \qquad (x \in D)$$

Funktionen und Kurven

$$y = f(x) \qquad (x \in D)$$

Abhängige Variable

Unabhängige Variable

Definitionsbereich

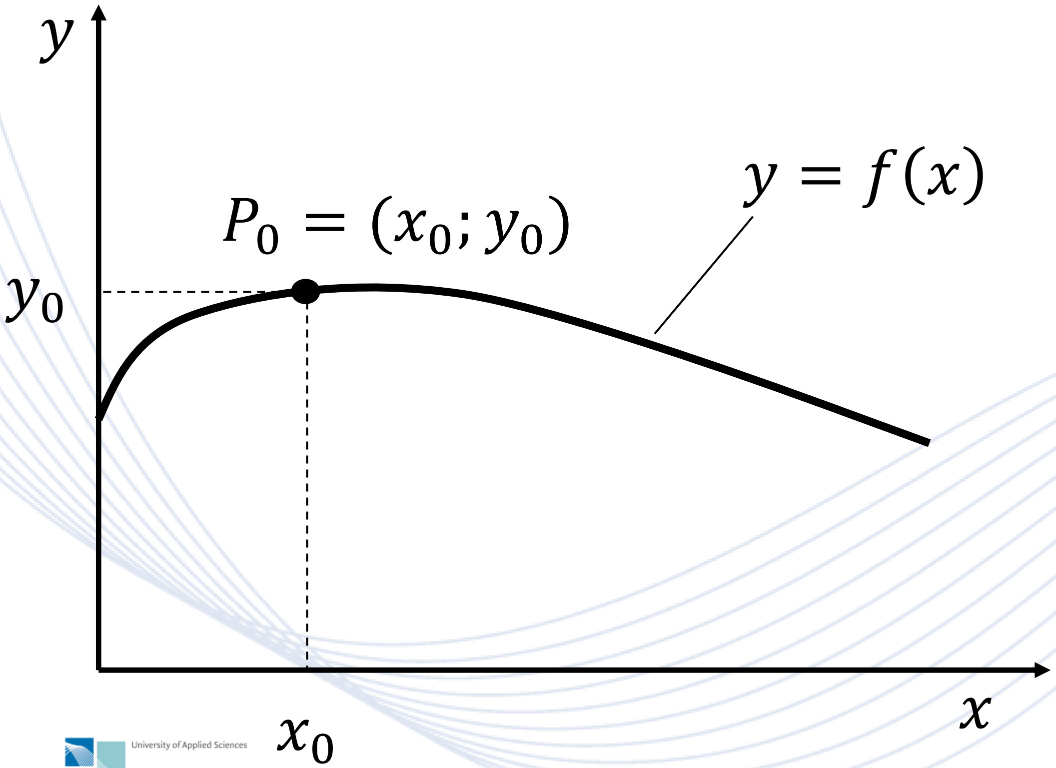
$(y \in W)$ Wertebereich

$y = f(x)$ Explizite Darstellung

$F(x; y) = 0$ Implizite Darstellung

Funktionen und Kurven

Funktionen können als Kurven (Graphen) in einem Diagramm graphisch dargestellt werden:



Die Zuordnung eines Funktionswertes $y_0 = f(x_0)$ zu einem Wert x_0 kann dann durch einen Punkt P_0 dargestellt werden.

Funktionen und Kurven

Eigenschaften von Funktionen

- Nullstellen
- Symmetrie
- Monotonie
- Umkehrbarkeit
- Verhalten im Unendlichen
- Stetigkeit

Funktionen und Kurven

Nullstellen

Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_N eine Nullstelle, wenn der Funktionswert an dieser Stelle gleich Null ist:

$$y_N = f(x_N) = 0$$

Das Berechnen der Nullstellen ist dann gleichbedeutend mit dem Lösen einer Gleichung mit der Unbekannten x_N.

Funktionen und Kurven

Beispiel zu Nullstellen

Funktion: $y = f(x) = 3x - x^2$

Für die Nullstellen soll gelten: $y_N = f(x_N) = 0$

Damit: $y_N = 3x_N - x_N^2 = 0 \qquad |x_N$ ausklammern

$$\Leftrightarrow \qquad x_N(3 - x_N) = 0$$

$$x_{N1} = 0 \qquad \vee \qquad 3 - x_{N2} = 0$$

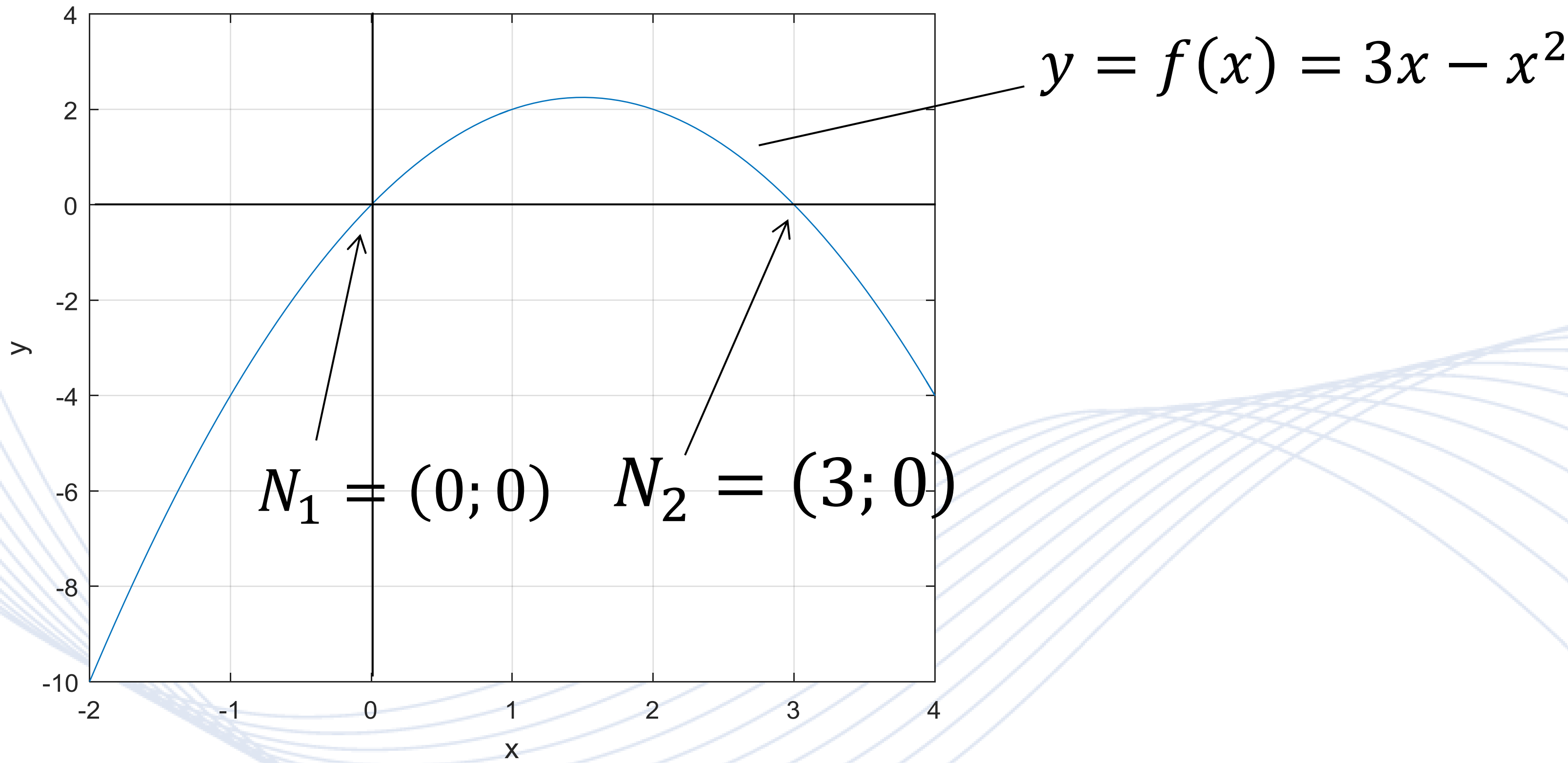
$$x_{N2} = 3$$

Nullstellen: $N_1 = (0; 0) \qquad N_2 = (3; 0)$

University of Applied Sciences
HOCHSCHULE EMDEN • LEER

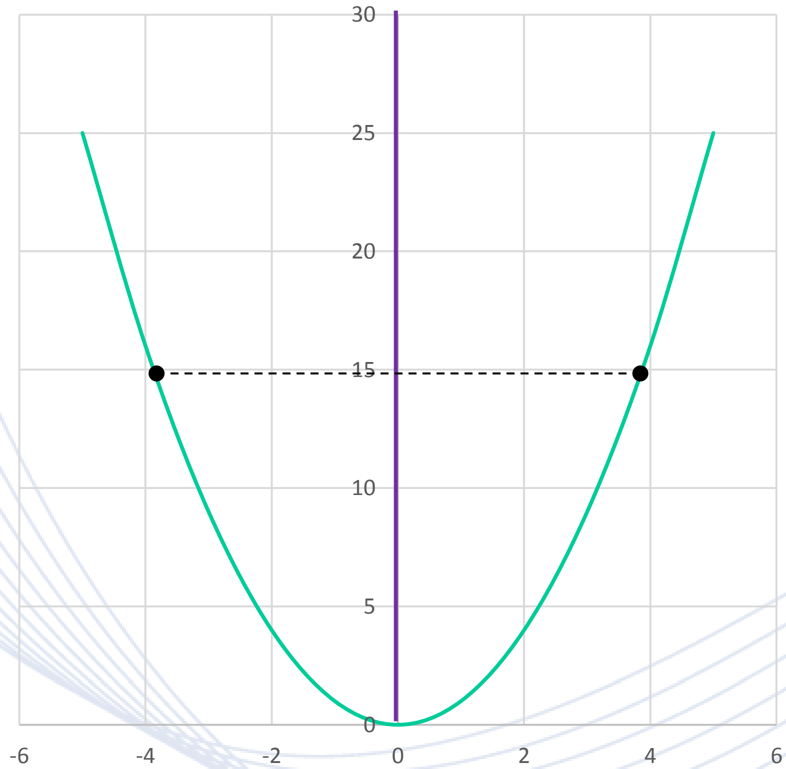
Funktionen und Kurven

Beispiel zu Nullstellen

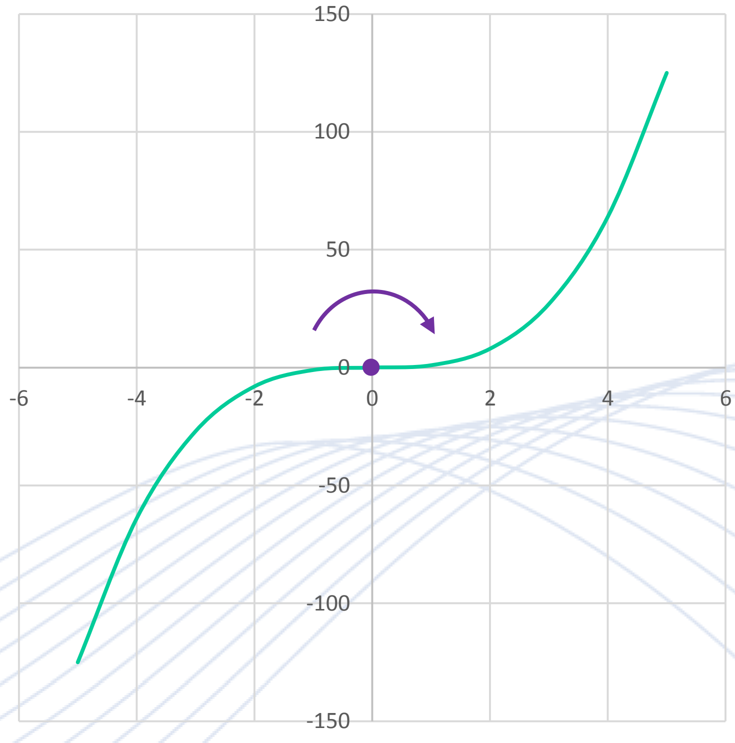


Funktionen und Kurven

Symmetrie



$y = x^2$



$y = x^3$

Funktionen und Kurven

Symmetrie

Eine Funktion mit einem zum Nullpunkt symmetrischen Definitionsbereich D heißt

- **gerade**, wenn für jedes $x \in D$ gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

- **ungerade**, wenn für jedes $x \in D$ gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

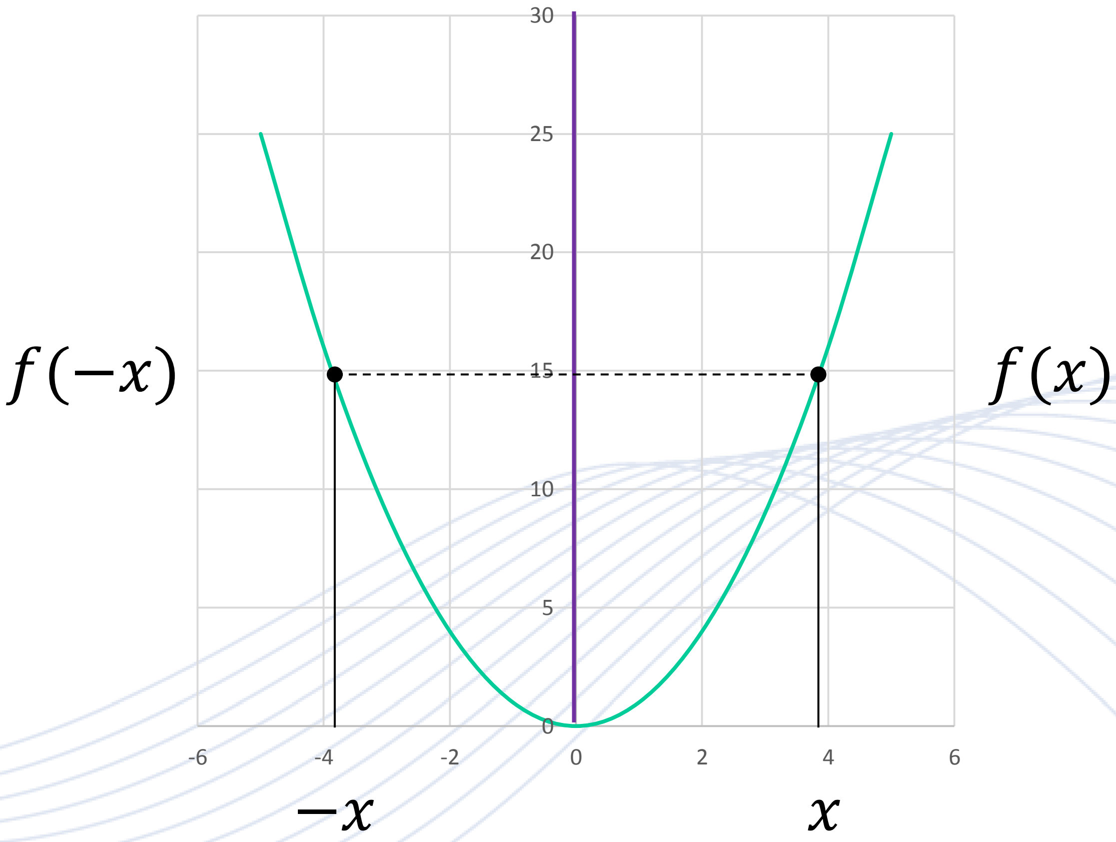
Funktionen und Kurven

Gerade Funktion (spiegelsymmetrisch zur y-Achse)

$$y = x^2$$

$$f(-x) = f(x)$$

$$(-x)^2 = x^2$$



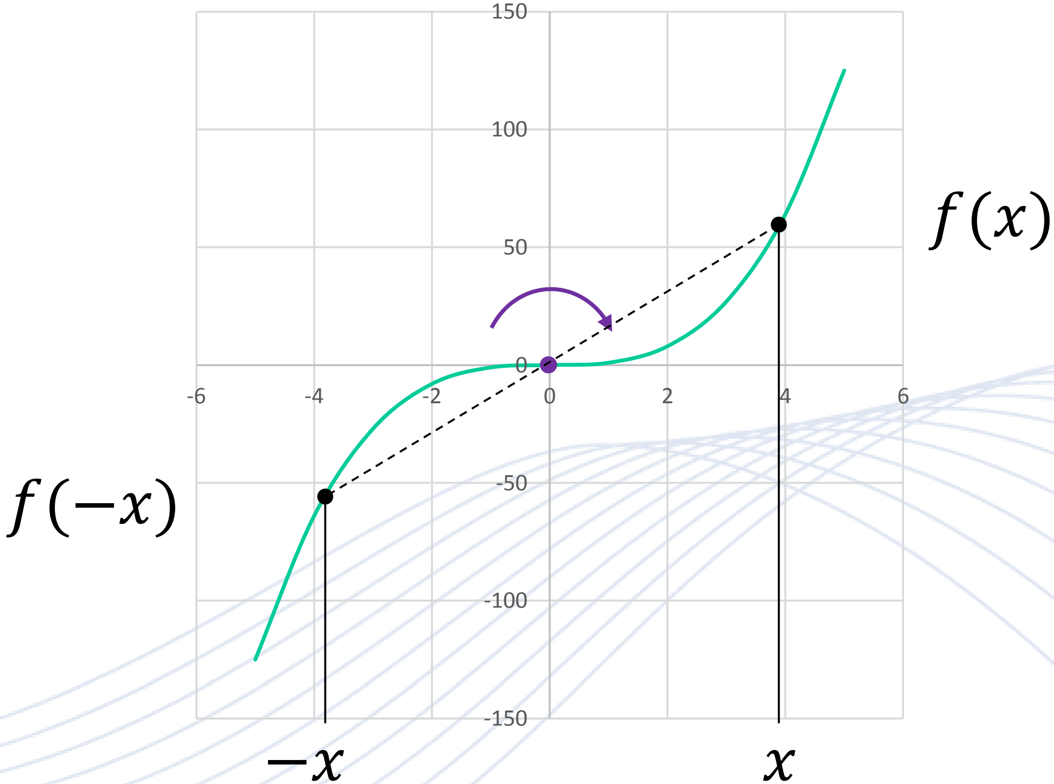
Funktionen und Kurven

Ungerade Funktion (punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung)

$$y = x^3$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$$(-x)^3 = -x^3$$



Funktionen und Kurven

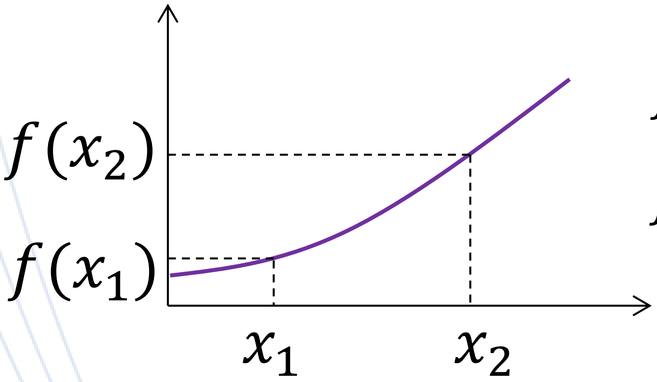
Monotonie

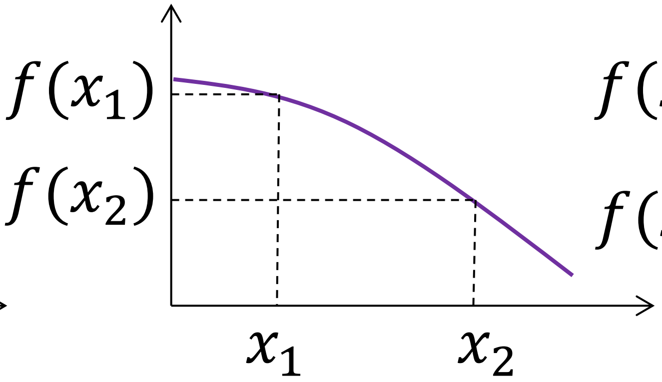
Für zwei beliebige Werte x_1 und x_2 aus dem Definitionsbereich D einer Funktion $y = f(x)$ soll $x_1 < x_2$ gelten. Dann heißt die Funktion

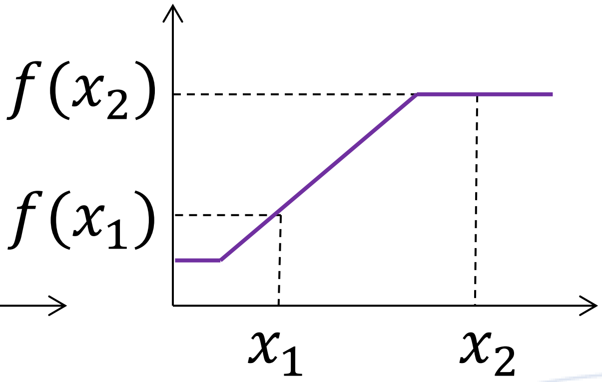
- **monoton wachsend**, falls gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$
- **streng monoton wachsend**, falls gilt: $f(x_1) < f(x_2)$
- **monoton fallend**, falls gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$
- **streng monoton fallend**, falls gilt: $f(x_1) > f(x_2)$

Funktionen und Kurven

Monotonie







$f(x_1) < f(x_2)$ — streng monoton wachsend

$f(x_1) > f(x_2)$ — streng monoton fallend

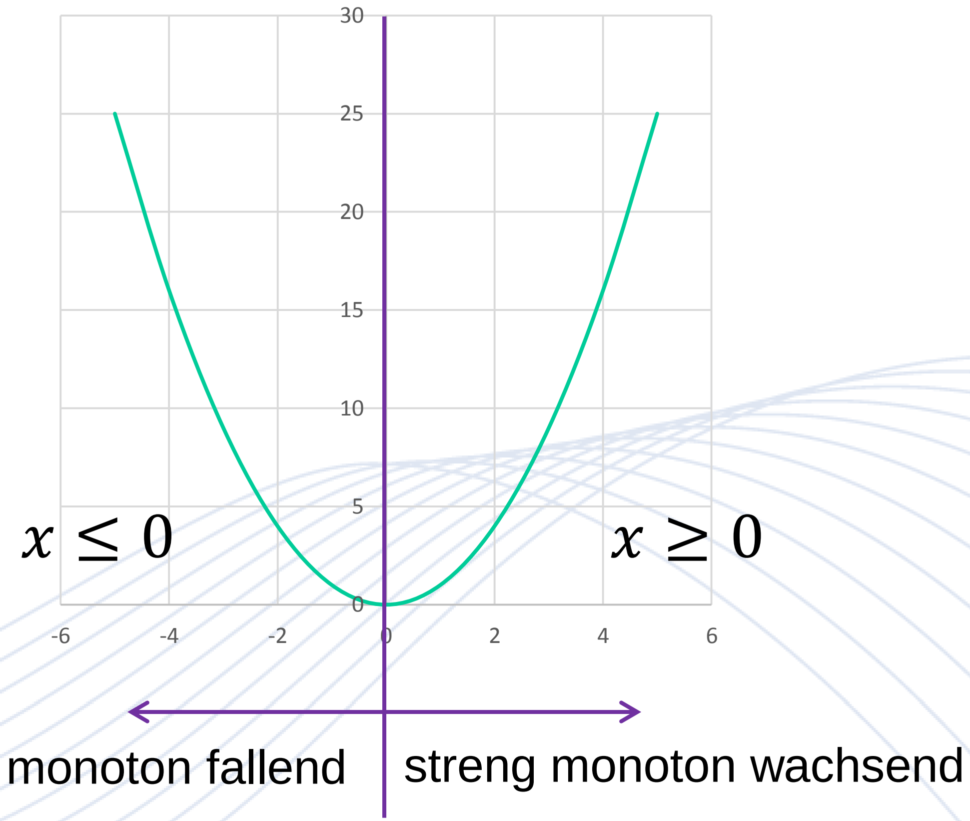
$f(x_1) \leq f(x_2)$ — monoton wachsend

Funktionen und Kurven

Monotonie

Häufig sind Funktionen nur in Teilbereichen (streng) monoton wachsend bzw. fallend.

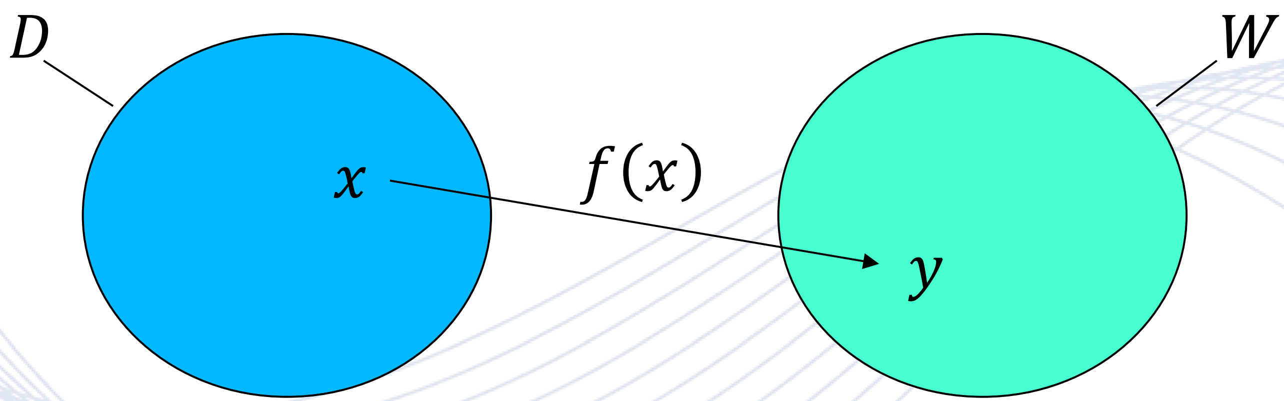
$$y = x^2$$



Funktionen und Kurven

Umkehrfunktion

(**Funktion:** Jedem Wert x aus $x \in D$ wird genau ein Wert y aus $y \in W$ mit der Vorschrift $y = f(x)$ zugeordnet.)



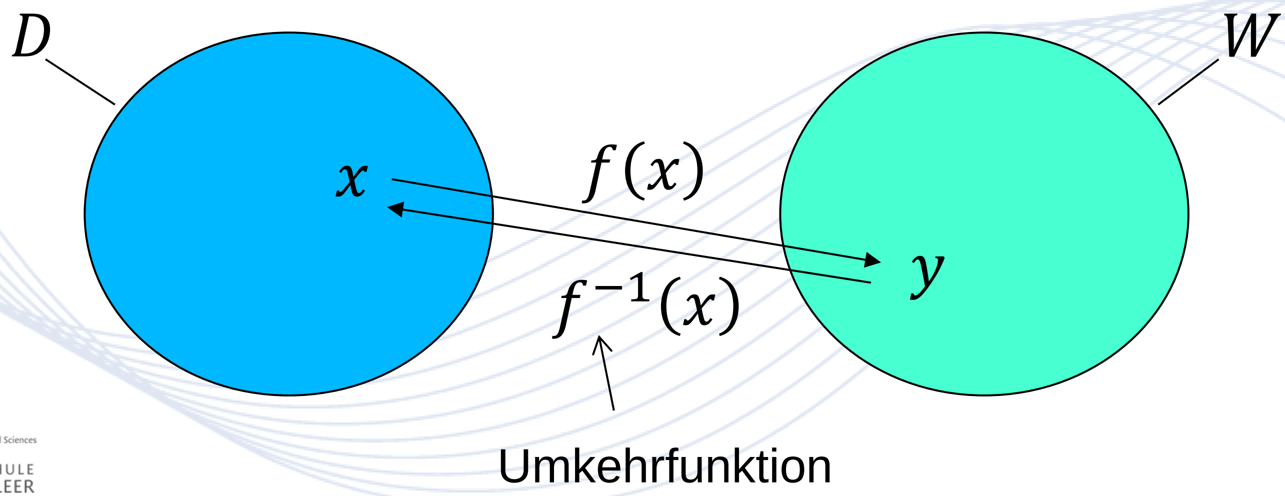
Funktionen und Kurven

Umkehrfunktion

(**Funktion:** Jedem Wert x aus $x \in D$ wird genau ein Wert y aus $y \in W$ mit der Vorschrift $y = f(x)$ zugeordnet.)

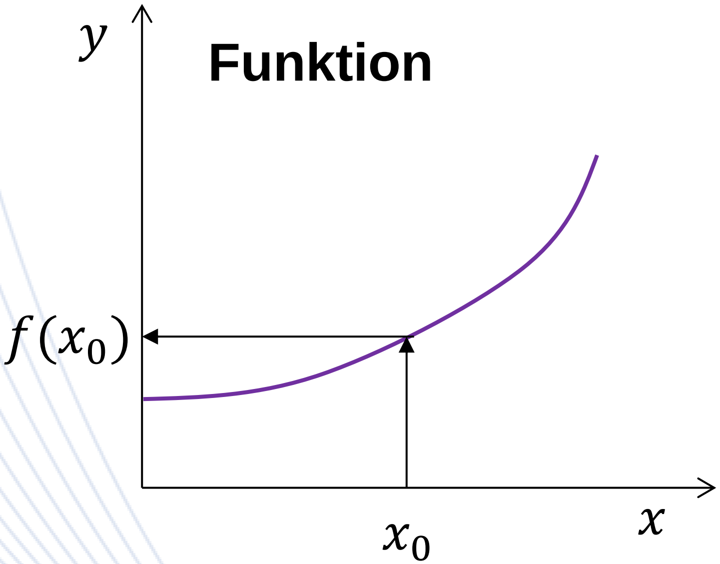
Für die Umkehrfunktion muss auch die Umkehrung gelten:

Jedem Wert y aus $y \in W$ wird genau ein Wert x aus $x \in D$ mit einer Vorschrift $x = f^{-1}(y)$ zugeordnet.

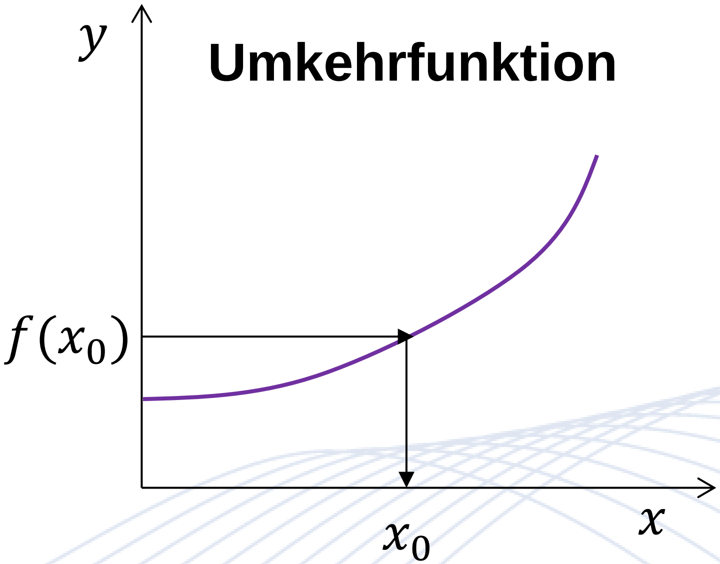


Funktionen und Kurven

Umkehrfunktion



Ermitteln des Funktionswertes $f(x_0)$ an der Stelle x_0



Ermitteln des x-Wertes für den Funktionswert $f(x_0)$

University of Applied Sciences
HOCHSCHULE EMDEN•LEER

Funktionen und Kurven

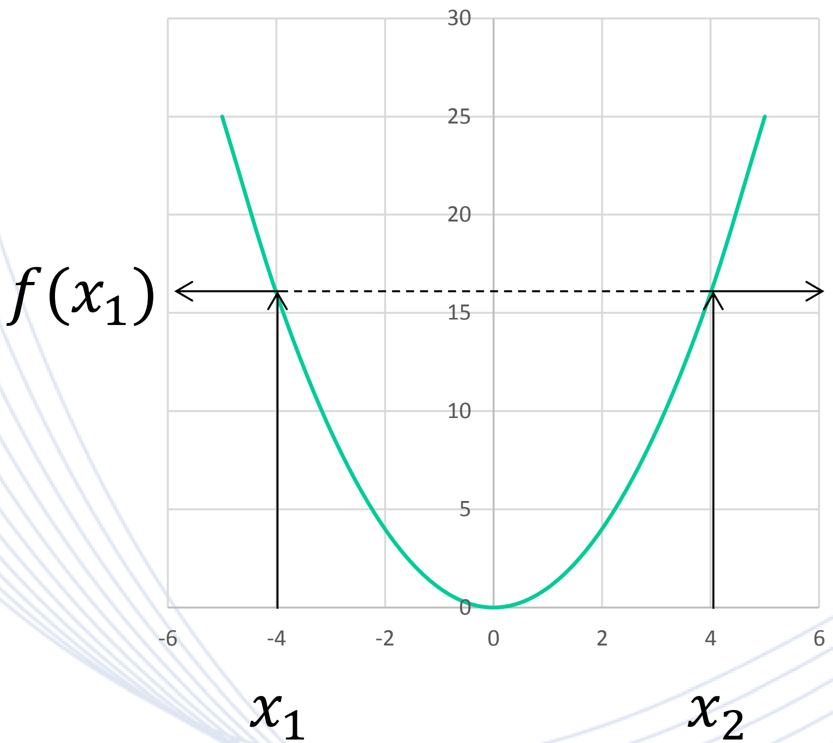
Umkehrfunktion

Voraussetzung für die Existenz einer Umkehrfunktion ist, dass die Zuordnung der x-Werte zu den Funktionswerten eindeutig ist:

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt **umkehrbar**, wenn aus $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt.

Funktionen und Kurven

Beispiel für eine nicht umkehrbare Funktion



$$y = x^2$$

$$x_1 \neq x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

University of Applied Sciences
HOCHSCHULE EMDEN • LEER

Funktionen und Kurven

Bestimmung der Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion erhält man durch Auflösen der Funktions-gleichung nach x:

$$y = f(x) \longrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Beispiel:

$$y = 5x + 2 \qquad |-2$$

$$\Leftrightarrow \quad y - 2 = 5x \qquad |:5$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{5}y - \frac{2}{5} = x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{5}y - \frac{2}{5} = f^{-1}(y)$$

Funktionen und Kurven

Anmerkungen zur Umkehrfunktion:

- Häufig wird die Umkehrfunktion wieder in der Form $y = f(x)$ dargestellt. Dazu müssen nur die Variablen x und y formal vertauscht (umbenannt) werden.
- Mit der Vertauschung werden auch Wertebereich und Definitionsbereich miteinander vertauscht.
- Jede streng monoton wachsende bzw. fallende Funktion ist umkehrbar
- Die Umkehrung einer Funktion erhält man auch graphisch durch die Spiegelung an der Geraden $y = x$.

Funktionen und Kurven

Verhalten im Unendlichen

Die Darstellung von Funktionen mit Hilfe von Kurven oder Tabellen gibt einen guten Überblick über wichtige Eigenschaften von Funktionen, jedoch nur jeweils für Ausschnitte dieser Funktion.

Interessant ist bei Funktionen häufig das Verhalten bei sehr großen (oder sehr kleinen) Werten für x bzw. das Verhalten, wenn x unendlich groß (oder unendlich klein) wird.

Funktionen und Kurven

Verhalten im Unendlichen

Speziell geht es bei der Betrachtung um die Frage, ob die Funktion $f(x)$ einem festen Wert g zustrebt, wenn $x \in D$ immer größer (oder kleiner wird).

„Limes“

Grenzwert

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = g$$

„x gegen (minus) unendlich“

University of Applied Sciences
HOCHSCHULE
EMDEN·LEER

Funktionen und Kurven

Berechnen von Grenzwerten

Strategie: Durch elementare Umformungen werden die Funktionsgleichungen in Ausdrücke zerlegt, die ein bekanntes Verhalten im Unendlichen besitzen.

Funktionen mit bekanntem Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} x = \pm\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} c = c \qquad \lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

University of Applied Sciences
HOCHSCHULE EMDEN·LEER

Funktionen und Kurven

Berechnen von Grenzwerten

Beispiele:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{x} \right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2 - 0 = 2$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(\frac{x}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{-\infty}{1 + 0} = -\infty$$

Funktionen und Kurven

Grenzwerte

Mit der Hilfe von Grenzwerten lassen sich Funktionen auch an Stellen untersuche, für welche diese nicht definiert sind.

Beispiel:

Die Funktion ist für $x = 0$ nicht definiert (Division durch Null ist mit reellen Zahlen nicht erlaubt).

$$y = f(x) = \frac{1}{x}$$

Wir können $x = 0$ nicht direkt einsetzen, aber wir können uns der Zahl beliebig nahe aus beiden Richtungen annähern:

Von links: $x = -0{,}1;\ -0{,}001;\ -0{,}0001;\ usw.$ $\longrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ (x<0)}} \left(\frac{1}{x}\right)$

Von rechts: $x = 0{,}1;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ usw.$ $\longrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} \left(\frac{1}{x}\right)$

Funktionen und Kurven

Grenzwerte

Strebt die Funktion $f(x)$ bei der Annäherung $x \longrightarrow x_0$ von rechts bzw. links einem festen Wert zu, dann ist

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x > x_0)}} f(x) = g_r$$ der rechtsseitige

bzw. $$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x < x_0)}} f(x) = g_l$$ der linksseitige

Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0.

Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 genau dann einen Grenzwert, wenn gilt:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x > x_0)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x < x_0)}} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

Funktionen und Kurven

Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} [C \cdot f(x)] = C \cdot \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)$$

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

Funktionen und Kurven

Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)}$$

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} [f(x)]^n = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^n$$

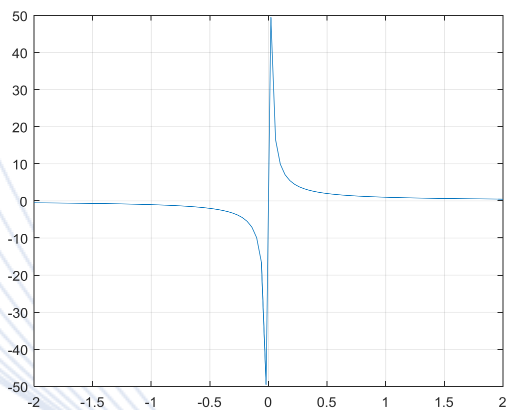
$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \left(a^{f(x)}\right) = a^{\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)}$$

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} (\log_a f(x)) = \log_a\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)$$

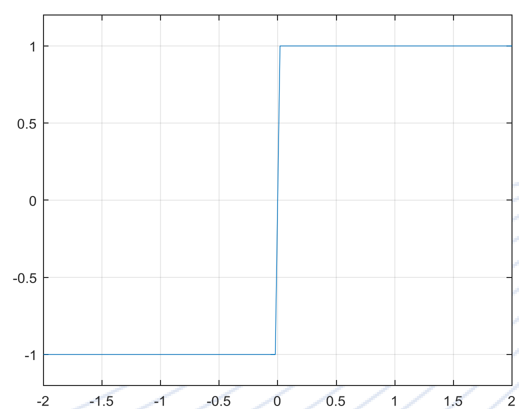
Funktionen und Kurven

Stetigkeit einer Funktion

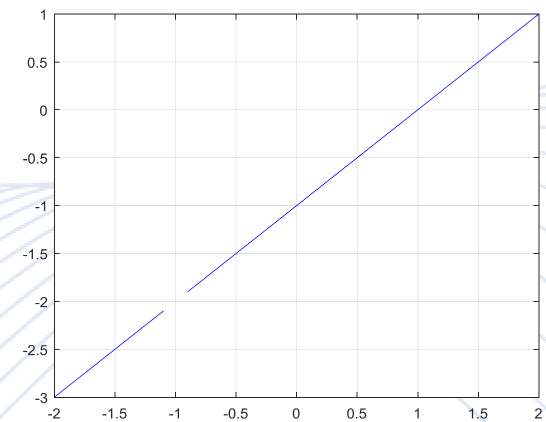
Einige Funktionen besitzen Stellen, für die Funktionswerte nicht definiert sind, die Lücken aufweisen in denen Sprünge auftreten. Diese Stellen werden **Unstetigkeitsstellen** genannt.



$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

University of Applied Sciences
HOCHSCHULE EMDEN • LEER

Funktionen und Kurven

Stetigkeit einer Funktion

Eine Funktion $f(x)$ ist dann an einer Stelle x_0 **stetig**, wenn der Grenzwert an dieser Stelle mit dem Funktionswert an dieser Stelle übereinstimmt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$