University of Applied Sciences
HOCHSCHULE
EMDEN · LEER

Mathematik 1 (Inf.)

Anwendungen der Differentialrechnung

Jens Hüppmeier

Anwendungen der Differentialrechnung

Eigenschaften von Funktionen

Mit Hilfe der Ableitung lassen sich weitere Eigenschaften von Funktionen angeben:

- Differenzierbarkeit
- Monotonie und Krümmung
- Grenzwerte
- Charakteristische Kurvenpunkte
    - Extrempunkte
    - Wendepunkte
    - Sattelpunkte

University of Applied Sciences
HOCHSCHULE
EMDEN • LEER

Anwendungen der Differentialrechnung

Differenzierbarkeit

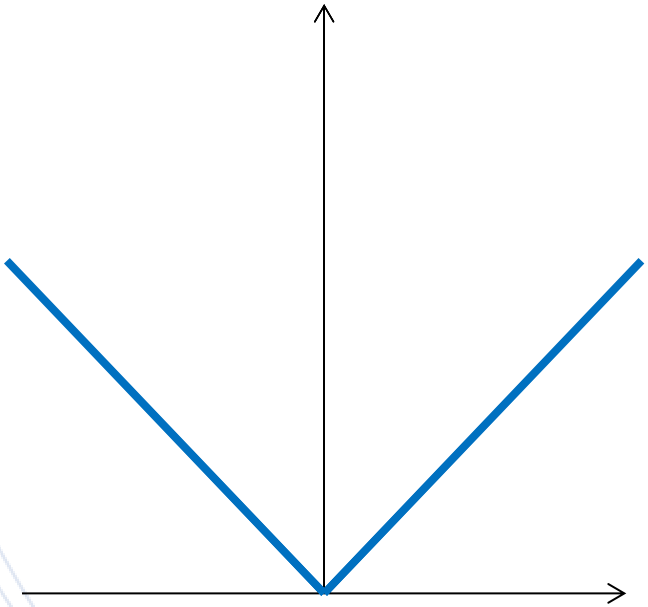
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt an der Stelle x_0 **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert.

Anwendungen der Differentialrechnung

Beispiel: Betragsfunktion $f(x) = |x|$



$x_0 = 0$

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = 1$$

Linksseitiger Grenzwert:

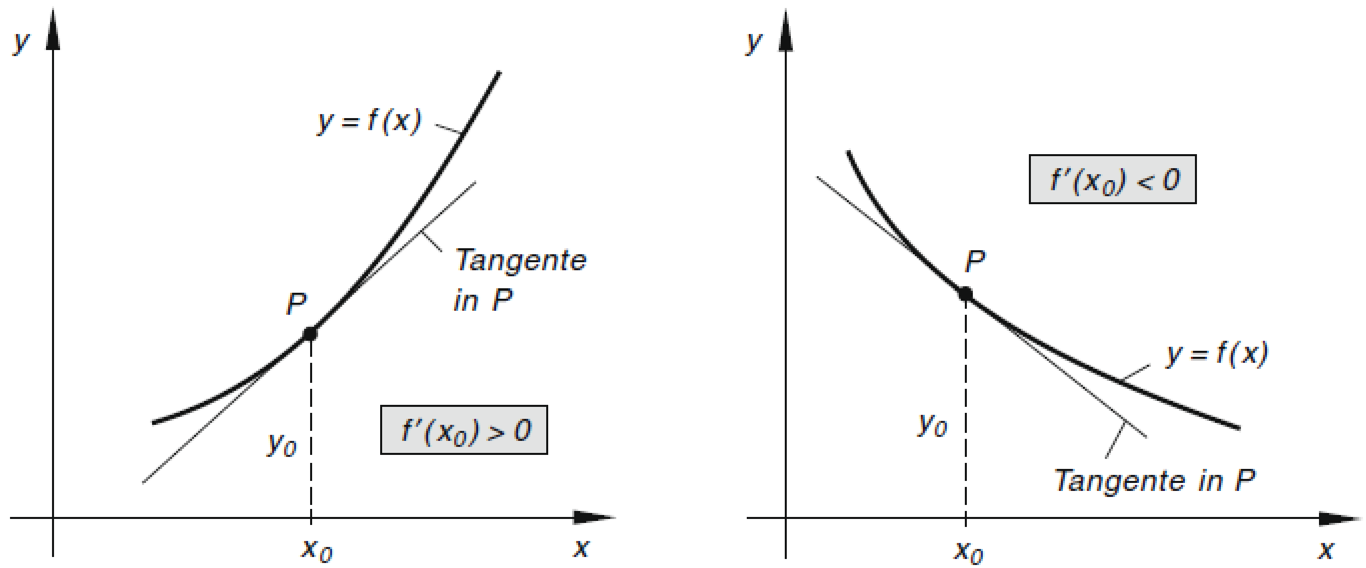
$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = -1$$

An der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar

Anwendungen der Differentialrechnung

Monotonie und Krümmung

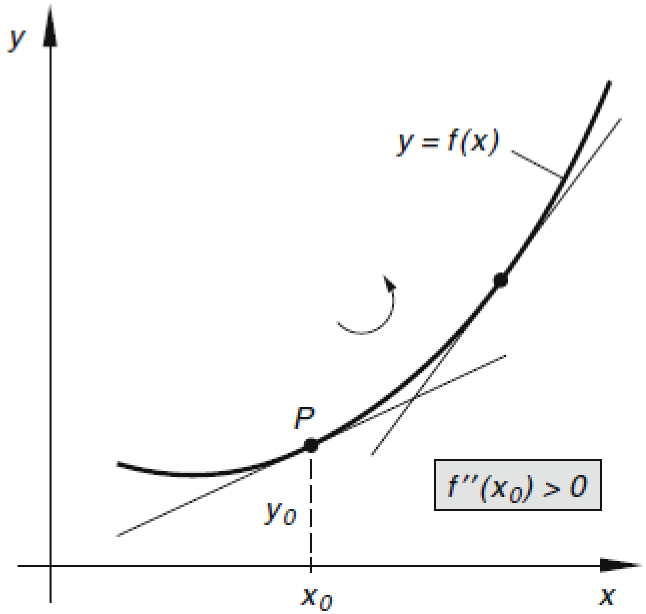
Die **erste Ableitung** einer Funktion $y = f(x)$ an einer Stelle x gibt die Steigung der Tangenten in x wieder beschreibt dadurch auch das **Monotonieverhalten** der Kurve:

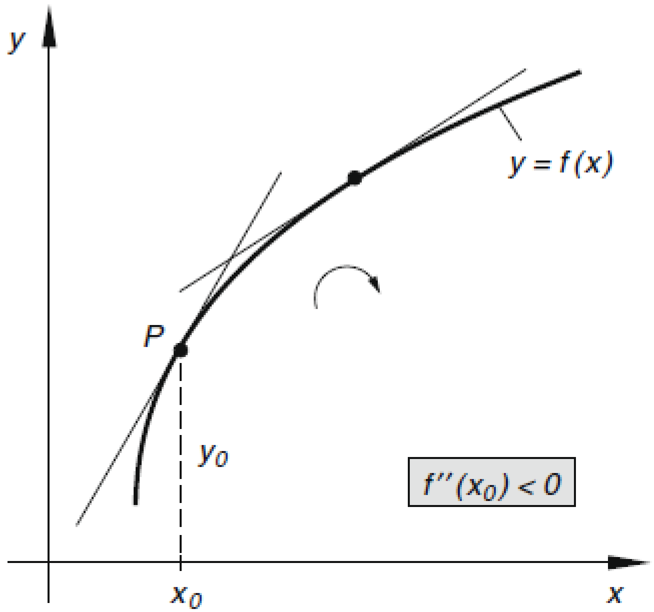


Anwendungen der Differentialrechnung

Monotonie und Krümmung

Die **zweite Ableitung** einer Funktion $y = f(x)$ an einer Stelle x gibt die Steigungsänderung der Tangenten in x wieder beschreibt dadurch auch das **Krümmungsverhalten** der Kurve:





University of Applied Sciences
HOCHSCHULE EMDEN•LEER

Anwendungen der Differentialrechnung

Monotonie:

$y' = f'(x) > 0 \longrightarrow$ Streng monoton wachsend

$y' = f'(x) < 0 \longrightarrow$ Streng monoton fallend

Krümmung:

$y'' = f''(x) > 0 \longrightarrow$ Linkskrümmung

$y'' = f''(x) < 0 \longrightarrow$ Rechtskrümmung

Anwendungen der Differentialrechnung

Grenzwerte nach Bernoulli-de l'Hospital

Bei vielen Grenzwertberechnungen tauchen unbestimmte Ausdrücke auf:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Elementare Umformungen sind manchmal umständlich oder unmöglich.

Anwendungen der Differentialrechnung

Grenzwerte nach Bernoulli-de l‘Hospital

Bei einigen Grenzwerten auch möglich:

„Zähler wächst *schneller* (oder *langsamer*) als Nenner“

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

„Schnelles“ oder „langsames“ Wachstum können wir über die erste Ableitung definieren.

University of Applied Sciences
HOCHSCHULE
EMDEN•LEER

Anwendungen der Differentialrechnung

Grenzwerte nach Bernoulli-de l‘Hospital

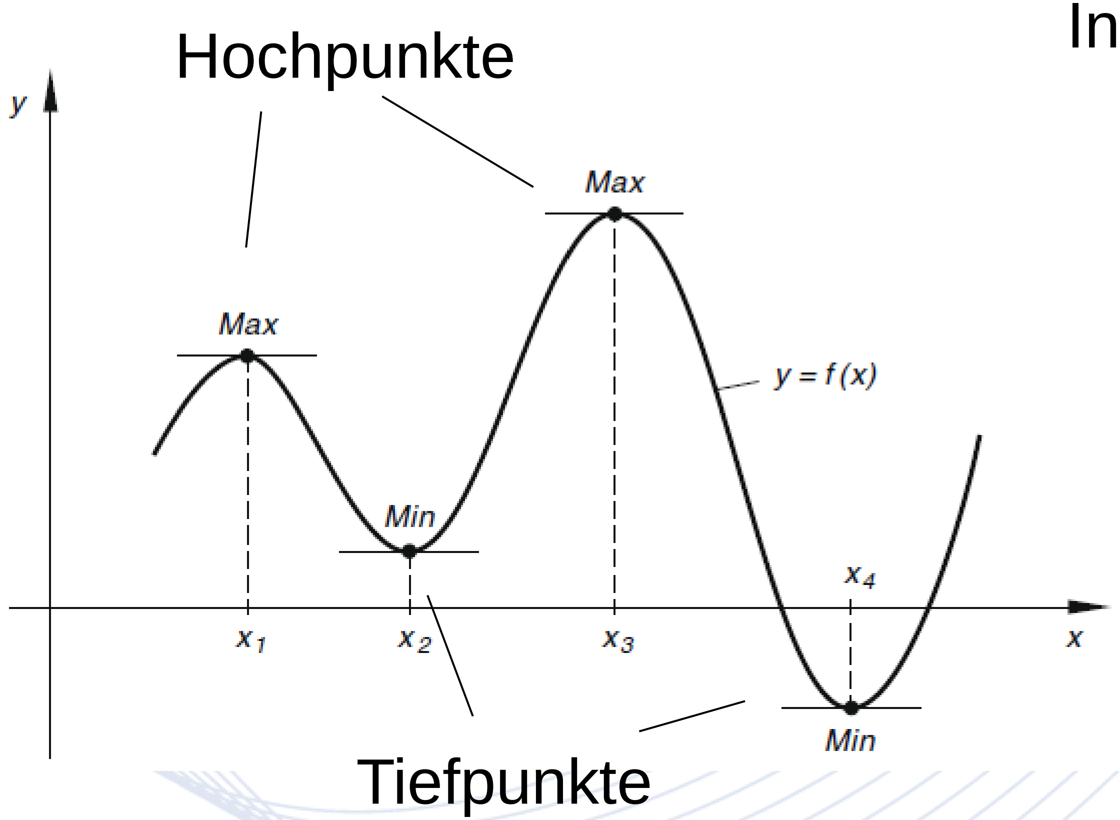
Für Grenzwerte, dien auf einen unbestimmten Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ führen, gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Formale Herleitung über Taylor-Reihe.
- Gilt nur für entsprechende Ausdrücke, andere Ausdrücke müssen zunächst umgeformt werden.
- Manchmal ist mehrfaches Anwenden der Regel erforderlich

Anwendungen der Differentialrechnung

Lokale Extremwerte



In einem Bereich um x_0:

$$f(x_0) > f(x)$$

Lokales Maximum

$$f(x_0) < f(x)$$

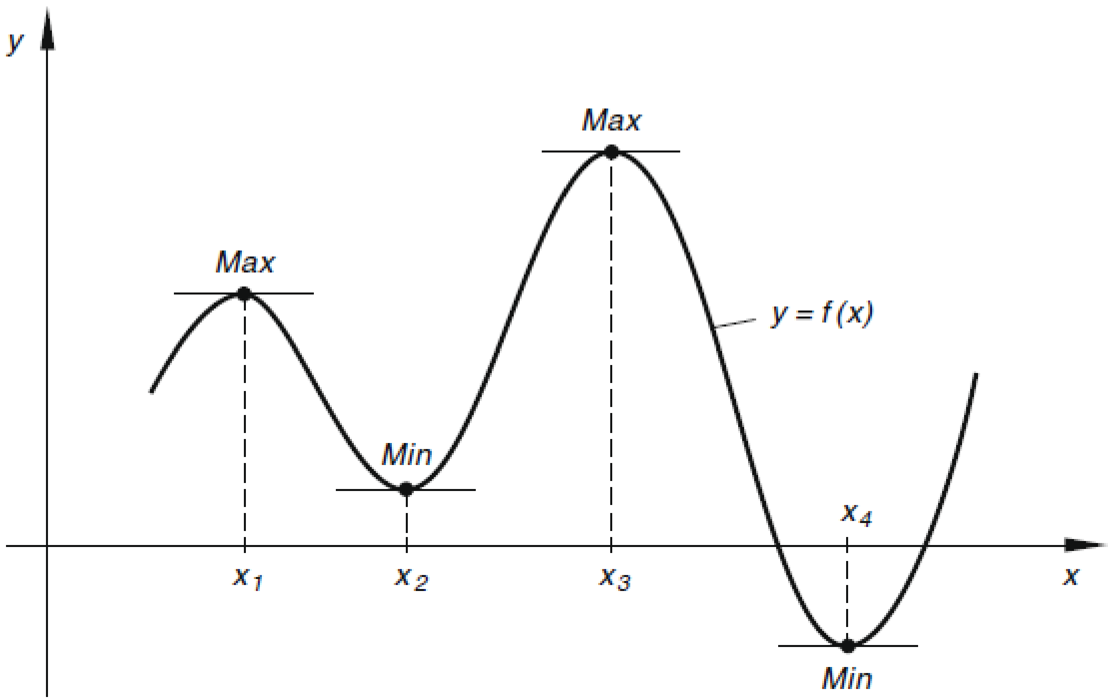
Lokales Minimum

Anwendungen der Differentialrechnung

Notwendige Bedingung für lokale Extremwerte

Die Tangenten an die Funktion $y = f(x)$ verlaufen in lokalen Extrempunkten $x = x_E$ stets waagerecht:

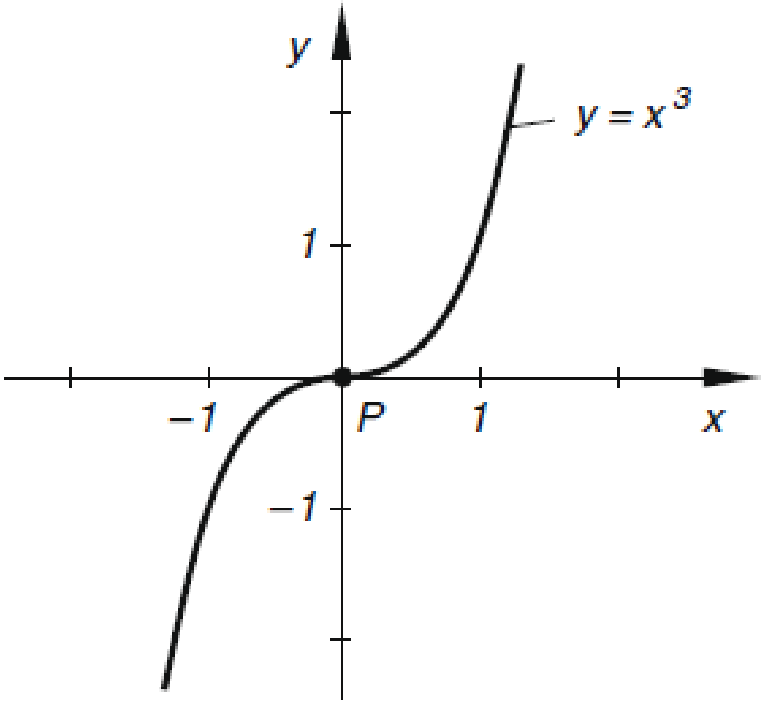
$$f'(x_E) = 0$$



Achtung: Die Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend!

Anwendungen der Differentialrechnung

Beispiel: $y = x^3$



Anwendungen der Differentialrechnung

Hinreichende Bedingung für lokale Extremwerte

Verläuft die Tangente an der Stelle $x = x_E$ an die Funktion $y = f(x)$ waagerecht und die Kurve weist an dieser Stelle eine Rechts- bzw Linkskrümmung auf, liegt ein relativer Extrempunkt vor.

$f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$

$f''(x_E) > 0$ Relatives Minimum

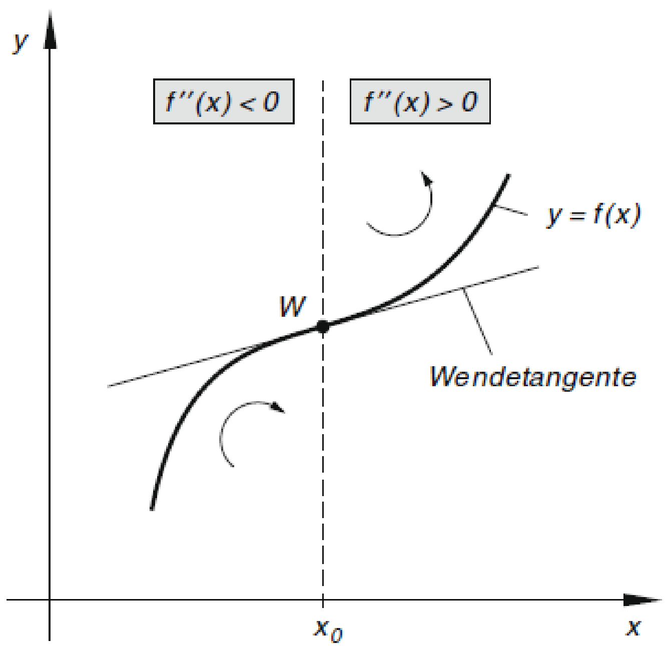
$f''(x_E) < 0$ Relatives Maximum

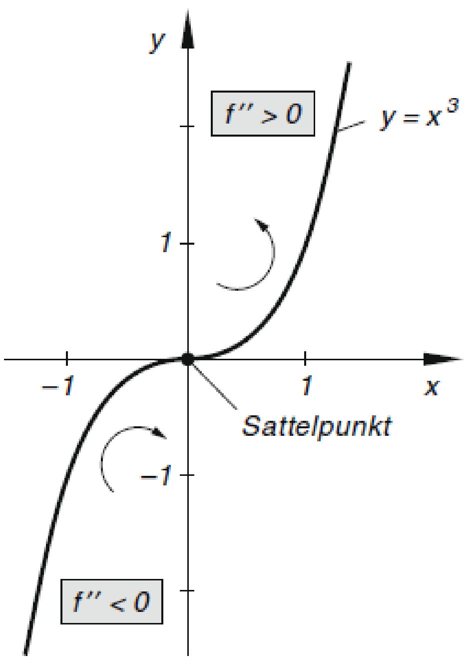
University of Applied Sciences
HOCHSCHULE EMDEN • LEER

Anwendungen der Differentialrechnung

Wendepunkte und Sattelpunkte

- Kurvenpunkte an denen sich der Drehsinn ändert, heißen **Wendepunkte**
- Wendepunkte mit waagerechter Tangente heißen **Sattelpunkte**





Anwendungen der Differentialrechnung

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte

Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle $x = x_W$ einen Wendepunkt, wenn die folgenden Beziehungen erfüllt sind:

$$f''(x_W) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'''(x_W) \neq 0$$

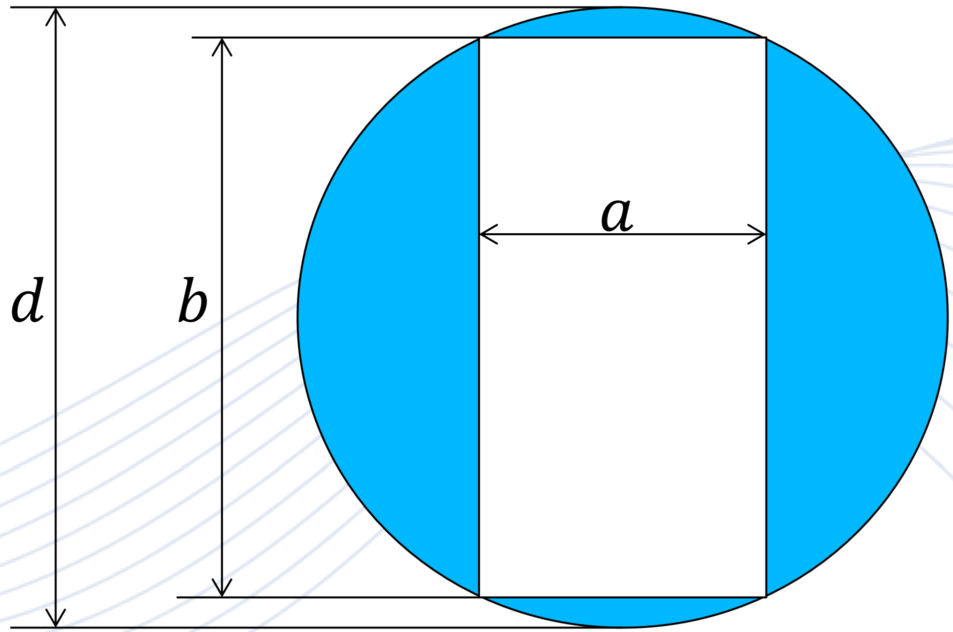
Ein Sattelpunkt liegt vor, wenn zusätzlich die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$f'(x_W) = 0$$

Anwendungen der Differentialrechnung

Extremwertaufgaben

Beispiel: Aus dem kreisförmigen Blech soll ein Rechteck mit möglichst großer Fläche ausgestanzt werden.



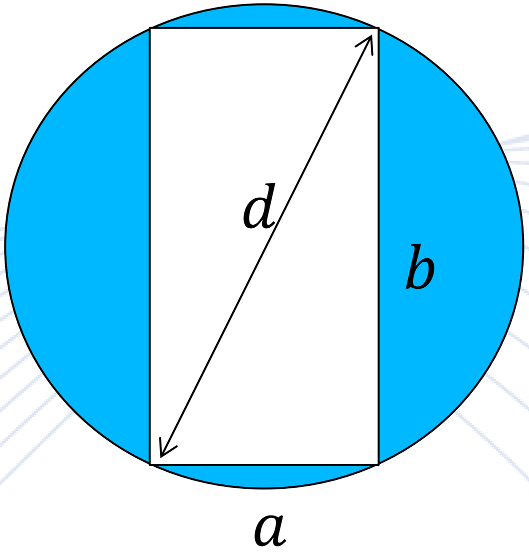
Anwendungen der Differentialrechnung

Extremwertaufgaben

Beispiel: Aus dem kreisförmigen Blech soll ein Rechteck mit möglichst großer Fläche ausgestanzt werden.

Zielfunktion:

$A = a \cdot b$ soll maximal werden.



Nebenbedingung:

$a^2 + b^2 \leq d^2$ (bzw. $a^2 + b^2 = d^2$)

$\rightarrow \quad a = \pm\sqrt{d^2 - b^2}$

$$\rightarrow \quad A(b) = b \cdot \sqrt{d^2 - b^2}$$

Anwendungen der Differentialrechnung

Extremwertaufgaben

Beispiel: Aus dem kreisförmigen Blech soll ein Rechteck mit möglichst großer Fläche ausgestanzt werden.

$$A(b) = b \cdot \sqrt{d^2 - b^2}$$

Bedingung für Extrempunkt: $\frac{dA(b)}{db} = 0$

$$\frac{dA(b)}{db} = \sqrt{d^2 - b^2} + b \cdot \frac{-2b}{2\sqrt{d^2 - b^2}} = \frac{d^2 - 2b^2}{\sqrt{d^2 - b^2}}$$

$$d^2 - 2b^2 = 0 \qquad b = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

Anwendungen der Differentialrechnung

Extremwertaufgaben

Beispiel: Aus dem kreisförmigen Blech soll ein Rechteck mit möglichst großer Fläche ausgestanzt werden.

Die zweite Länge a berechnet sich zu:

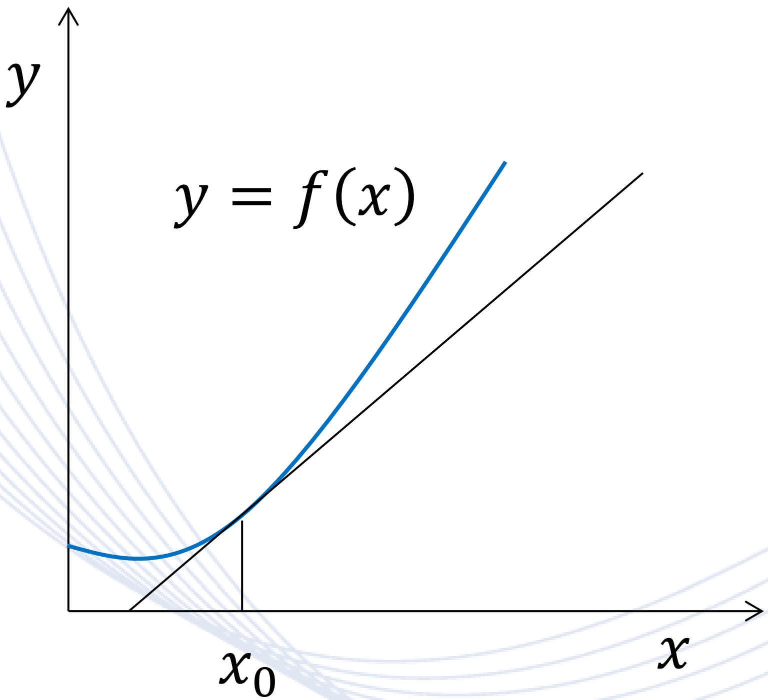
$$a = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}} = b$$

Die maximale Fläche ergibt sich also bei quadratischer Form:

$$A(b) = \frac{d^2}{2}$$

Anwendungen der Differentialrechnung

Lineare Approximation



$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Lineare Gleichung zur Berechnung von Δy