Digitaltechnik: Logikschaltungen

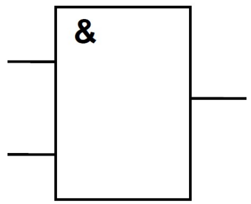
Anwendung: Berechnung von Ausgangsvektoren aus Eingangsvektoren, damit:

- Steuerung von endlichen Automaten (Zustandsübergangssteuerung: Ampel, Waschmaschine)
- Mathematische Operationen
- Speichern und Übertragen von Daten
- Allgemeine Datenverarbeitung

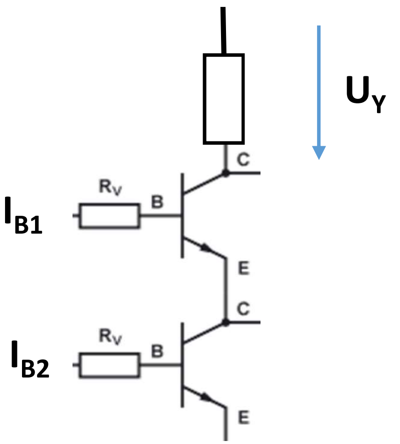
Eingangsvektor → **Logikgatter** → **Ausgangsvektor**

x1

x2



Y



Schaltbelegungstabelle:

x2	x1	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

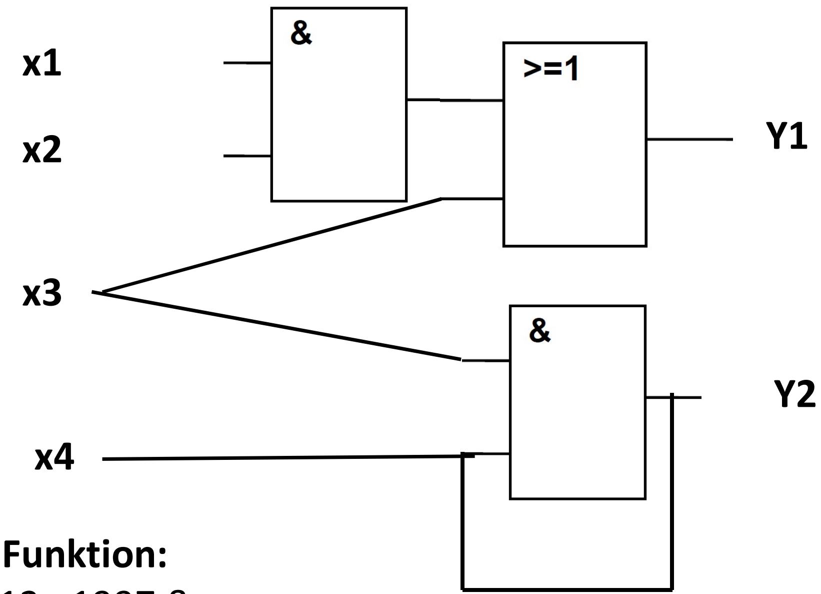
Oder:
Wahrheitstabelle
oder Wahrheitstafel

Integrierte Elektronikschaltungen in verschiedenen Technologien:
- TTL (Bipolar - TR)
- CMOS (Feldeffekt - TR)
- BiCMOS (Bipolar- und Feldeffekt- TR)

Pegel: Meist 3,3V und 5V. →Geringe Spannung = geringe Leistung aber störanfälliger...EMV. →Pegelwandler zur Adaption.

Digitaltechnik: Basislogikschaltungen sind kombinierbar

Eingangsvektor ➡ **Logikgatter** ➡ **Ausgangsvektor**



Genormte Funktion:
IEC 60617-12 : 1997 &
ANSI/IEEE Std 91/91a-1991

Problem:
Wuchernde Schaltungen mit gewaltigen Anzahlen von Transistoren, welche eventuell unnötig sind...
→Zusammenfassen um zu reduzieren.

x1	x2	x3	x4	Y1	Y2
0	0	0	0	?	
0	0	0	1		
0	0	1	0		
0	0	1	1		
0	1	0	0		
0	1	0	1		
0	1	1	0		
0	1	1	1		
1	0	0	0		
1	0	0	1		
1	0	1	0		
1	0	1	1		
1	1	0	0		
1	1	0	1		
1	1	1	0		
1	1	1	1		

Boolsche Algebra: Rechengesetze

Rechengesetze	konjunktive Form	disjunktive Form
Kommutativgesetz	$A*B=B*A$	$A+B=B+A$
Assoziativgesetz	$A*(B*C)=(A*B)*C$	$A+(B+C)=(A+B)+C$
Distributivgesetz Spezialfall: Absorptions-gesetz	$A*(B+C)=AB+AC$ $A*(A+B)=AA+AB = A$	$A+BC=(A+B)*(A+C)$ $A+AB=(A+A)*(A+B) = A$
Komplementgesetz	$A * \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
doppelte Negation	$\overline{\overline{A}} = A$	
Operationen mit binären Werten	$A * 0 = 0$ $A * 1 = A$	$A + 0 = A$ $A + 1 = 1$
Gesetz nach De Morgan	$\overline{A * B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} * \overline{B}$

Anwendung:
Vereinfachung von Schaltungen durch Zusammenfassen: **Schaltungsminimierung**

Reduktion von Transistoren innerhalb der integrierten Schaltungen.

Geringere Transistorzahl, reduziert:
- Den Platzbedarf
- Den Materialaufwand und das Gewicht
- Den elektrischen Leistungsbedarf

→Ziel: Optimierte, übersichtliche Schaltung.

Karnaugh – Veitch – Tafeln: Erstellen und Anwenden, Allgemein

Wahrheitstabelle:

A	B	Y	DNF	Y	KNF
0	0	1	$\bar{A} \wedge \bar{B}$	0	$A \vee B$
0	1	1	$\bar{A} \wedge B$	0	$A \vee \bar{B}$
1	0	1	$A \wedge \bar{B}$	0	$\bar{A} \vee B$
1	1	1	$A \wedge B$	0	$\bar{A} \vee \bar{B}$

Disjunktive Normalform

Konjunktive Normalform

KV – Tafeln:

Y	A	$\bar{A}$
B	$A \wedge B$ 1	$\bar{A} \wedge B$ 1
$\bar{B}$	$A \wedge \bar{B}$ 1	$\bar{A} \wedge \bar{B}$ 1

Vollkonjunktionen

Y	A	$\bar{A}$
B	$A \vee B$ 0	$\bar{A} \vee B$ 0
$\bar{B}$	$A \vee \bar{B}$ 0	$\bar{A} \vee \bar{B}$ 0

Volldisjunktionen

Aufbau der KV - Tafeln:

- Eingangssignale: Normal und negiert an den Rand schreiben, dürfen auch getauscht angeordnet sein.
- Für n – Eingänge müssen 2^n Felder vorgesehen werden.
- Für n > 4 ist keine Ebene Darstellung mehr möglich. Dann werden die KV – Tafeln nebeneinander gelegt...
- Der 1 – Wert ist der normale, nicht negierte, Wert der Variablen.

Anwendung:

Ist die **DNF** gesucht, so werden die Minterme mit den Feldwerten 1 betrachtet.
Die Variablen des 1 – Feldes werden „und" – verknüpft. Dies sind die Vollkonjunktionen.
Sie werden mit „oder" – verbunden.

Ist die **KNF** gesucht, so werden die Maxterme mit den Feldwerten 0 betrachtet.
Die Variablen des 0 – Feldes werden „oder" – verknüpft. Dies sind die Volldisjunktionen.
Sie werden mit „und" – verbunden.

→Beim Zusammenfassen werden hier Blöcke aus 1(DNF) oder 0(KNF) gebildet. Damit entfallen Eingänge. Später detailliert...

Funktionsgleichungen:

$$Y=(\bar{A}\cdot\bar{B})\vee(\bar{A}\cdot B)\vee(A\cdot\bar{B})\vee(A\cdot B)$$

$$Y=(A\vee B)\cdot(A\vee\bar{B})\cdot(\bar{A}\vee B)\cdot(\bar{A}\vee\bar{B})$$

Karnaugh – Veitch – Tafeln erstellen: n=3 - Eingänge

Wahrheitstabelle:

A	B	Y	Minterme	enthält
0	0	0	$\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
0	0	1	$\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C$	
0	1	0	$\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}$	$\overline{A} \wedge B$
0	1	1	$\overline{A} \wedge B \wedge C$	
1	0	0	$A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$	$A \wedge \overline{B}$
1	0	1	$A \wedge \overline{B} \wedge C$	
1	1	0	$A \wedge B \wedge \overline{C}$	$A \wedge B$
1	1	1	$A \wedge B \wedge C$	

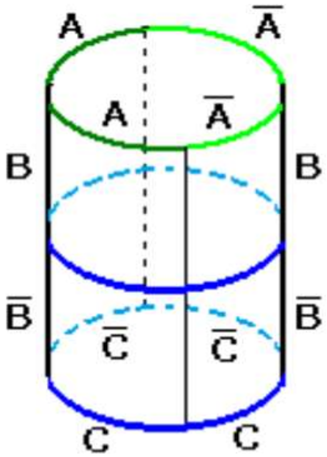
Aufbau der 3 - KV - Tafel:

- Analog n=2, und:
- Ungleiche Variablen müssen Schnittmengen bilden: A,B,C und nicht-A,-B,-C

KV-Diagramm für Vollkonjunktionen
und in Zylinderform

KV – Tafel:

Y	A	A	$\overline{A}$	$\overline{A}$
B	$A \wedge B \wedge \overline{C}$	$A \wedge B \wedge C$	$\overline{A} \wedge B \wedge C$	$\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}$
$\overline{B}$	$A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$	$A \wedge \overline{B} \wedge C$	$\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C$	$\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$
	$\overline{C}$	C	C	$\overline{C}$

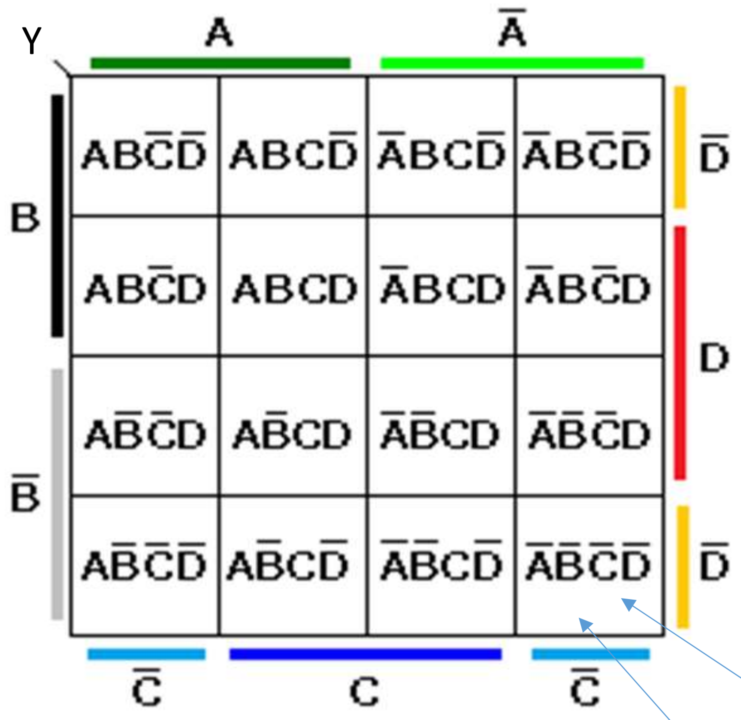


Z.B. disjunktive Normalform: Alle Minterme, die eine 1 ergeben.

Ein Feld ist immer eine Zeile in der Wahrheitstabelle.

Karnaugh – Veitch – Tafeln erstellen: n=4 - Eingänge

KV – Tafel:



KV-Diagramm für 4 Variable mit eingetragenen Vollkonjunktionen

Aufbau der 4 - KV - Tafel:

- Analog n=2, und:
- Ungleiche Variablen müssen Schnittmengen bilden: A,B,C,D und nicht-A,-B,-C,-D
- Die Variablen sind so am Rand zu verteilen, dass sich ungleiche Variablen nicht gegenseitig überschneiden und gleiche Variablennamen paarweise normal und negiert nebeneinander auftreten.
- n>=5 und mehr sind nicht mehr in der Ebene darstellbar: Überschneidungen... →2...m KV – Tafeln nebeneinander anordnen: Siehe Literatur...

Z.B. disjunktive Normalform: Alle Minterme, die eine 1 ergeben.

Ein Feld ist immer eine Zeile in der Wahrheitstabelle.

Karnaugh – Veitch – Tafeln: Anwenden, Allgemein

Optimierte DNF aus dem KV-Diagramm

- Es werden Blöcke mit Minterme, Feldwerte 1 gebildet.
- Alle im Block gemeinsam vorkommenden Variablen bilden durch UND verknüpft den Gleichungsterm.
- In der Funktionsgleichung sind alle Gleichungsterme disjunktiv durch ODER verknüpft.

Optimierte KNF aus dem KV-Diagramm

- Es werden Blöcke mit Maxterme, Feldwerte 0 gebildet.
- Alle Variablen, die im Block nicht vorkommen, bilden durch ODER verknüpft den Gleichungsterm.

  nicht vorkommen:
  Ergebnis sei: Y =0
- Alternativ können auch alle Variablen, die im Block vorkommen durch ODER verknüpft werden.

  vorkommen:
  Ergebnis sei: Y = 1

  Anschließend sind die Variablen dann noch zu negieren.
- In der Funktionsgleichung sind alle Gleichungsterme konjunktiv durch UND verknüpft.

Karnaugh – Veitch – Tafeln: Minimierung durch Blockbildung, allgemeine Regeln

Erstellen der Funktionsgleichung aus der KV - Tafel:

KV – Tafel

Direktes Ablesen als KNF oder DNF. →nicht Minimiert →Boolsche Algebra: Aufwendig.

Blockbildung →Ablesen als minimierte KNF oder DNF: Einfach und schnell.

Regeln zur Blockbildung:

- Blöcke können nur horizontal, vertikal oder quadratisch auftreten.
- Eine Blockbildung kann nur für Minterme oder Maxterme gebildet werden.
- Die Anzahl der Felder im Block entspricht einer 2-er Potenz, also 2, 4, 8, 16.
- Blöcke sollten so groß als möglich sein. Sie dürfen und sollen sich überschneiden.
- Hat man sich für Vollkonjunktionen (1-Werte) entschieden, so werden die 0-Werte nicht mehr berücksichtigt. Und umgekehrt.
- Blöcke dürfen über benachbarte Kanten gehen: Überlappen.
- Alle Min/Maxterme müssen mindestens ein Mal zu einem Block gehören.

Ablesen der Funktionsgleichung für die DNF:

- Eingangszustände in denen 1 – Werte bilden die Funktionsgleichung.
- Eingangszustände in denen 0 – Werte stehen werden nicht berücksichtigt.
- Ändert sich ein Eingangszustand im gefundenen Block von normal auf negiert und der Ausgang bleibt gleich, so hat er keinen Einfluss. →weglassen

Karnaugh – Veitch – Tafeln: Minimierung durch Blockbildung, Beispiele mit n=2 - Eingängen

Wahrheitstabelle und vollständige DNF

Blockbildung benachbarter Vollkonjunktionen

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$Y = \overline{A}B \vee AB = B(\overline{A} \vee A) = B$$

	A	$\overline{A}$
B	1	1
$\overline{B}$		

$Y = B$

Funktionsgleichung in DNF:

- Die 1 – Werte bilden die Funktionsgleichung.
- A und nicht-A sind 1 haben also keinen Einfluss bilden immer Y=1. →weglassen
- Nur B ändert Y.

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

$$Y = A\overline{B} \vee AB = A(\overline{B} \vee B) = A$$

	A	$\overline{A}$
B	1	
$\overline{B}$	1	

$Y = A$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$Y = \overline{A}B \vee A\overline{B} \vee AB = \overline{A}B \vee A(\overline{B} \vee B) = \overline{A}B \vee A = (\overline{A} \vee A) \wedge (B \vee A) = A \vee B$$

	A	$\overline{A}$
B	1	1
$\overline{B}$	1	

$Y = A \vee B$

DNF: 2 unabhängige Blöcke bilden Y=1

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$Y = \overline{A}\overline{B} \vee \overline{A}B \vee A\overline{B} \vee AB = \overline{A}(\overline{B} \vee B) \vee A(\overline{B} \vee B) = \overline{A} \vee A = 1$$

	A	$\overline{A}$
B	1	1
$\overline{B}$	1	1

$Y = 1$

DNF: 1 Block bildet Y=1

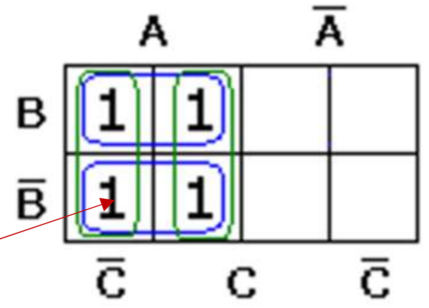
Karnaugh – Veitch – Tafeln: Minimierung durch Blockbildung, Beispiele mit n=3 - Eingängen

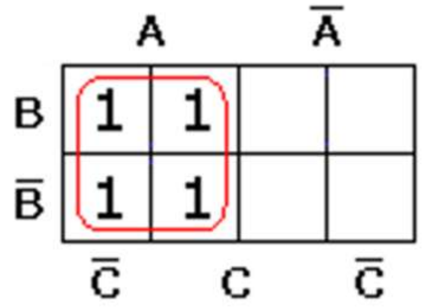
Beispiel 1: Als disjunktive Normalform (DNF)

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$
\begin{aligned}
Y &= A\bar{B}\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee AB\bar{C} \vee ABC \\
&= A\bar{B}(\bar{C} \vee C) \vee AB(\bar{C} \vee C) \\
&= A\bar{B} \vee AB \\
&= A(\bar{B} \vee B) \\
&= A
\end{aligned}
$$

Ein Feld ist immer eine Zeile in der Wahrheitstabelle.



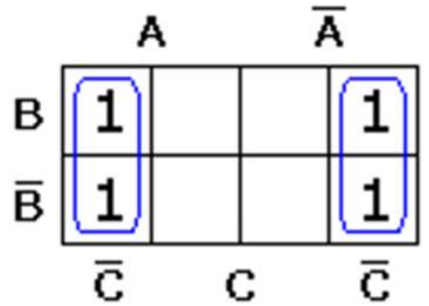


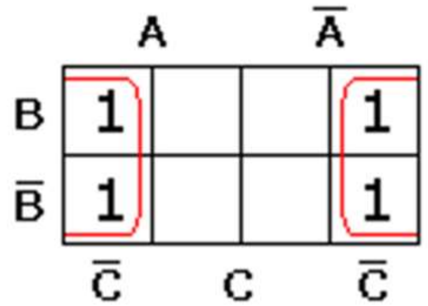
Immer größtmögliche Blöcke bilden: Y=A

Beispiel 2: Als disjunktive Normalform (DNF)

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$
\begin{aligned}
Y &= \bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}B\bar{C} \vee A\bar{B}\bar{C} \vee AB\bar{C} \\
&= \bar{B}\bar{C}(\bar{A} \vee A) \vee \bar{C}(\bar{A}B \vee AB) \\
&= \bar{B}\bar{C} \vee \bar{C}[B(\bar{A} \vee A)] \\
&= \bar{B}\bar{C} \vee B\bar{C} = \bar{C}(B \vee \bar{B}) \\
&= \bar{C}
\end{aligned}
$$





Mit überlappenden Rändern größtmögliche Blöcke bilden: $Y=\bar{C}$

Karnaugh – Veitch – Tafeln: Minimierung, DNF, KNF: Beispiele mit n=3 - Eingängen

Beispiel 3: Als disjunktive Normalform (DNF)

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}C \vee \overline{A}BC \vee A\overline{B}C \vee AB\overline{C} \vee ABC$$

$$= \overline{B}C(\overline{A} \vee A) \vee BC(\overline{A} \vee A) \vee AB\overline{C}$$

$$= \overline{B}C \vee BC \vee AB\overline{C}$$

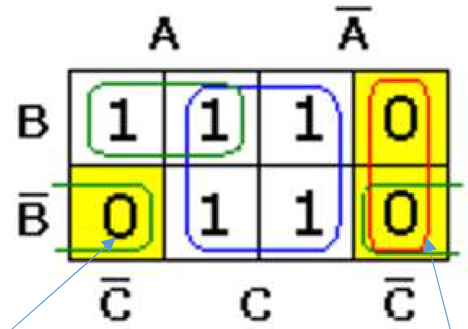
$$= C(\overline{B} \vee B) \vee AB\overline{C}$$

$$= C \vee AB\overline{C}$$

mit dem disjunktiven Distributivgesetz

$$= C \vee AB \wedge (C \vee \overline{C})$$

$$= C \vee AB$$



Beispiel 3: Als konjunktive Normalform (KNF)

Ergebnis sei: Y = 1 aus der KNF, dann die Eingänge zunächst auf 0 auslesen, danach nochmals negieren...

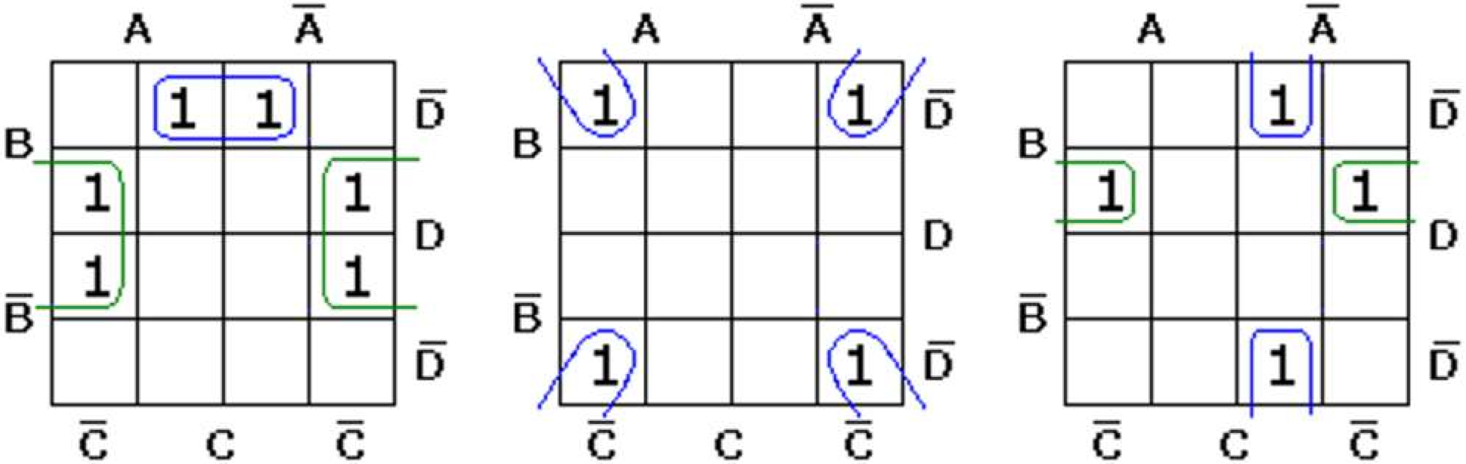
$$Y = (\overline{\overline{A}} \vee \overline{\overline{C}}) \wedge (\overline{\overline{B}} \vee \overline{\overline{C}}) = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$\boxed{Y = C \vee AB}$$

Somit: DNF und KNF haben dasselbe Ergebnis für: Y = 1

Karnaugh – Veitch – Tafeln: Minimierung durch Blockbildung, Beispiele mit n=4 - Eingängen

Beispiel 4,5,6: Als disjunktive Normalform (DNF)

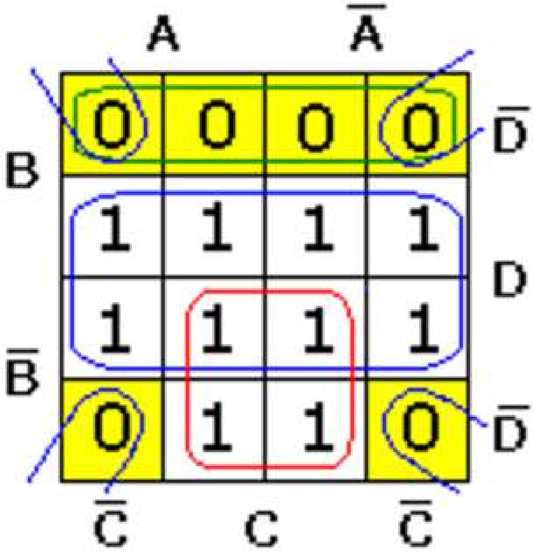


$Y = BC\overline{D} \vee \overline{C}D$

$Y = \overline{C}\,\overline{D}$

$Y = \overline{A}C\overline{D} \vee B\overline{C}D$

Karnaugh – Veitch – Tafeln: Minimierung durch Blockbildung, Beispiele mit n=4 - Eingängen



Beispiel 7: Als disjunktive Normalform (DNF)

Minterme

$\boxed{Y = D \vee C\overline{B}}$

die minimierte DNF ist äquivalent zur KNF

Maxterme

$$Y = (\overline{\overline{C}} \vee \overline{\overline{D}}) \wedge (\overline{B} \vee \overline{\overline{D}}) = (C \vee D) \wedge (\overline{B} \vee D)$$

$\boxed{Y = D \vee C\overline{B}}$

Beispiel 7: Als konjunktive Normalform (KNF)

Somit: DNF und KNF haben dasselbe Ergebnis für: Y = 1