Московский физико-технический институт

Поиск максимального разреза

Проект по сложности вычислений

Автор:
Седова Анна

Contents

Chapter 1

$\mathcal{NP}$-полнота

Задача MAXCUT

Рассмотрим задачу MAXCUT = (G, k) | в неориентированном взвешенном графе G есть разрез размера не меньше k. Покажем, что она является $\mathcal{NP}$-полной.

MAXCUT $\in \mathcal{NP}$

Proof. В качестве сертификата рассмотрим номера вершин, входящие в разрез, а верификатор проверит, что размер этого разреза не меньше k. Так как для проверки размера разреза достаточно посчитать сумму весов ребер внутри разреза и сравнивать с k, то верификатор будет работать за полиномиальное время.

□

MAXCUT является $\mathcal{NP}$-трудной

Proof. **1) PARTITION**

PARTITION $= \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in Z^n |$существует разбиение на два множества S_1 S_2 : $\sum_{i \in S_1} c_i = \sum_{j \in S_2} c_j\}$

УТВ(б/д) PARTITION является $\mathcal{NP}$-полной задачей.

2) Покажем, что PARTITION $\leq_p$ MAXCUT

Построим полный граф на n вершинах, пусть вес ребра между i-й и j-й вершинами будет равен $c_i c_j$. Будем искать разрез размера не меньше $k = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} c_i^2$.

Обозначим вершины одной доли при таком разрезе S_1, а при втором S_2. Пусть такой разрез существует. Тогда его вес $\leq \sum_{i \in S_1, j \in S_2} c_i c_j = = \sum_{i \in S_1} c_i * \sum_{j \in S_2} c_j \leq (\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} c_i)^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} c_i^2$, то есть ровно $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} c_i^2$. Тогда в неравенстве $\sum_{i \in S_1} c_i * \sum_{j \in S_2} c_j \leq (\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} c_i)^2$ достигается равенство, то есть $\sum_{i \in S_1} c_i = \sum_{j \in S_2} c_j = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} c_i$, то есть разбиение существует.

Пусть такого разреза не существует. Покажем от противного, что и разбиения не существует. Если бы разбиение существовало, то существовал бы разрез мощности $\leq (\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} c_i)^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} c_i^2$, то есть разрез искомого размера. Противоречие, следовательно, разбиения не существует.

Так как PARTITION является $\mathcal{NP}$-трудной, то и MAXCUT является $\mathcal{NP}$-трудной.

□

Задача поиска

Так как задача является $\mathcal{NP}$-полной, то задача поиска будет иметь такую же сложность.

Chapter 2

Аппроксимационный алгоритмы для решения задачи

Так как MAXCUT - $\mathcal{NP}$-полная, то неизвестно, существует ли алгоритм, решающий задачу за полином. Поэтому здесь будет рассматриваться алгоритм, решающий задачу приближенно.

2.1 Наивный алгоритм

Рассмотрим самый простой аппроксимационный алгоритм.Случайно распределим вершины по долям. Оценим E(мощность разреза) $= \sum_{i=0,j=0}^{n,n} w_{i,j} * P(i$ и j в разных долях$) = \sum_{i=0,j=0}^{n,n} w_{i,j} *$ $0.5 \geq 0.5*$ мощность максимального разреза. Таким образом, наивный алгоритм дает аппроксимационный коэффицент 50

2.2 Алгоритм Геманса и Вильямсона. Описание алгоритма

На входе дается граф G = (V, E) размера n и с матрицей весов W. Хотим найти максимальный разрез с большой точностью.

Сведение к задаче оптимизации

Рассмотрим разрез W, при котором вершины поделены на множесва S_1 и S_2 Пусть $x_i = 1$, если $x_i \in S_1$ и $x_i = -1$, если $x_i \in S_2$ при $i = 1...n$. Тогда мощность этого разреза будет равна $|W| = \frac{1}{8} \sum_{i=0,j=0}^{n,n} w_{i,j} * (x_i - x_j)^2 = \frac{1}{8} \sum_{i=0,j=0}^{n,n} w_{i,j} * (x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j)$. Заметим, что $x_i^2 = 1$, то есть $|W| = \frac{1}{8} \sum_{i=0,j=0}^{n,n} w_{i,j} * (2 - 2x_i x_j) = \frac{1}{4} \sum_{i=0,j=0}^{n,n} w_{i,j} * (1 - x_i x_j)$ **(1)**

Таким образом, поиск максимального разреза сводится к следующей задаче оптимизации $max_{x_i \in Z}\ \frac{1}{4} \sum_{i=0,j=0}^{n,n} w_{i,j} * (1 - x_i x_j)$, где $x_i^2 = 1$, что эквивалентно $min_{x_i \in Z} \sum_{i=0,j=0}^{n,n} w_{i,j} * (x_i x_j)$ **(2)** , где $x_i^2 = 1$. Хотелось бы приблизить эту задачу оптимизации задачей, которая может быть решена за полиномиальное время. Сделаем это следующим образом.

Рассмотрим вместо x_i векторы $y_i \in R^n$ и запишем аналогичную задачу оптимизации: $min_{y_i \in R^n} \sum_{i=0,j=0}^{n,n} w_{i,j} * < y_i, y_j >$ **(3)**, где $< y_i, y_i >= 1$, что эквивалентно $min_{U \in S_n^+, U0}$ <W, U> , где $U_{i,i} = 1$ для всех i (S_n^+- обозначение для положительно полуопределенной матрицы), так как

(1) матрица Грама положительно полуопределена

(2) если $U \in S_n^+$, то $\exists X : U = X^T X$, то есть U-матрица скалярных произведений столбцов в X

Эта задача является задачей полуопределенного программирования и может быть решена за полиномиальное время. Притом заметим, что если все y_i имеют вид $(\pm 1, 0, ...0)$, то множество значений **(3)** совпадает с множеством значений **(2)**, поэтому минимум функции **(3)** <= **(2)**, то есть максимум функции **(1)** не больше аналогичной для y_i. **(4)**

Получение разбиения из решения задачи оптимизации

Сначала получим векторы назад из матрицы скалярных произведений, то есть найдем X : $X^T X = U$. Это разложение может быть найдено за полиномиальное время.

Теперь мы хотим восстановить из матрицы X разрез. Рассмотрим столбцы этой матрицы $y_1, ..., y_n$. Хотелось бы, чтобы алгоритм работал так, чтобы находящиеся "далеко" друг от друга векторы оказались в разных группах разреза. Для этого проведем через 0 случайную плоскость (выбранную из равномерного распределения плоскостей), и вершины, соответствующие номерам векторов в одной полуплоскости, отнесем при разрезе в первую долю, а остальные - во вторую.

Чтобы провести случайную плоскость, случайно и равномерно выберем $r \in S^{n-1}$ и построим плоскость, заданную уравнением $< r, x >= 0$. Тогда, если $< r, y_i >\geq 0$, то i-ю вершина в первой доле разреза, иначе во второй.

2.3 Алгоритм Геманса и Вильямсона. Оценка работы

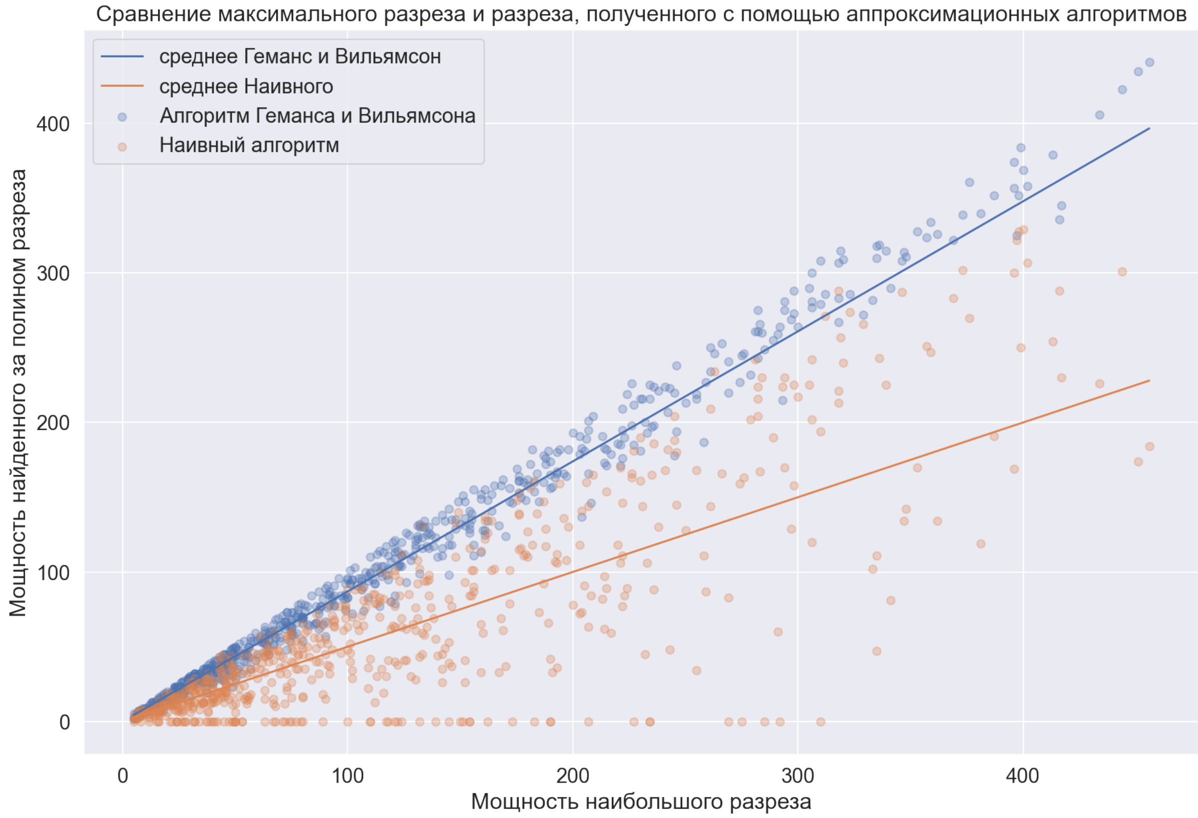
Лемма 1 Вероятность того, что случайная гиперплоскость $H :< r, x >= 0$ разделит вектора y_i и y_j $\frac{\theta_{ij}}{2\pi}$ where θ_{ij} - угол между векторами y_i и y_j.

Proof. Пусть $J_{i,j}$ = поверхность, образованная векторами y_i и y_j(плоскость или прямая). P(H разделит i и j) = P($< r, y_i >\geq 0$ и $< r, y_j >< 0$) + P($< r, y_j >\geq 0$ и $< r, y_i >< 0$) = $P(H \cup J_{i,j} \quad y_i \quad y_j) = \frac{\theta_{ij}}{2\pi}$ □

Лемма 2(б/д) $\frac{4}{\pi} \frac{\theta_{ij}}{(2sin(\theta_{ij}/2)^2} > \alpha \approx 0.87856r0 \leq \theta_{ij} \leq \pi$

E(мощность разреза) = $\sum_{i=0,j=0}^{n,n} w_{i,j} * P(i$ и j в разных долях$)$ = $\sum_{i=0,j=0}^{n,n} w_{i,j} * \frac{\theta_{ij}}{4\pi}$ = $\sum_{i=0,j=0}^{n,n} w_{i,j} * \quad * \frac{4}{\pi} \frac{\theta_{ij}}{(2sin(\theta_{ij}/2)^2} \frac{<y_i - y_j, y_i - y_j>}{8} \geq \alpha \sum_{i=0,j=0}^{n,n} w_{i,j} \frac{<y_i - y_j, y_i - y_j>}{8}$, что не меньше $\alpha *$ мощность максимального разреза (по соображению **(4)**). Таким образом, алгоритм Геманса и Вильямсона даёт аппроксимационный коэффициент около 87%

2.4 Сравнение наивного алгоритма и алгоритма Геманса и Вильямсона



Данный график визуализирует отношение ответа на задачу и реально полученного. На нем наглядно наблюдается, что аппроксимационный коэффицент 0,87 сильно лучше коэффицента 0,5. Так же на нем видно, что дисперсия алгоритма Геманса и Вильямсона достаточно маленькая, особенно по сравнению с наивным алгоритмом. Это говорит о том, что алгоритма Геманса и Вильямсона довольно точно приближает максимальный разрез.