МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра МОЭВМ

ОТЧЕТ

по практической работе №2

по дисциплине «Теория принятия решений»

Тема: Бесконечные антагонистические игры

Вариант 10

Студентка гр. 8303	__________________	Самойлова А.С.
Преподаватель	__________________	Попова Е.В.

Санкт-Петербург

2022

Цель работы

Использование инструментальных средств для решения задач поддержки принятия решения, а также овладение навыками принятия решения на основе бесконечных антагонистических игр.

Основные теоретические положения

В данной работе рассматриваются антагонистические игры, которые отличаются от матричных тем, что в них один или оба игрока имеют бесконечное (счётное или континуум) множество стратегий. С теоретико-игровой точки зрения это отличие малосущественно, поскольку игра остаётся антагонистической и проблема состоит в использовании более сложного аналитического аппарата исследования (продолжить из презентации).

Одновременная игра преследования на плоскости

Пусть S1 и S2 – множества на плоскости. Игра Γ заключается в следующем. Игрок 1 выбирает некоторую точку $x \in S1$, а игрок 2 выбирает точку $y \in S2$. При совершении выбора игроки 1 и 2 не имеют информации о действиях противника, поэтому подобный выбор удобно интерпретировать как одновременный. В этом случае точки $x \in S1$, $y \in S2$ являются стратегиями игроков 1 и 2 соответственно. Таким образом, множества стратегий игроков совпадают с множествами S1 и S2 на плоскости.

Целью игрока 2 является минимизация расстояния между ним и игроком 1 (игрок 1 преследует противоположную цель). Поэтому под выигрышем H(x,y) игрока 1 в этой игре понимается евклидово расстояние ρ(x,y) между точками $x \in S1$ и $y \in S2$, т.е. H(x,y)=ρ(x,y). Выигрыш игрока 2 полагаем равным выигрышу игрока 1, взятому с обратным знаком, а именно [−ρ(x,y)] (игра антагонистическая). (продолжить из презентации).

Модель покера с одним кругом ставок и одним размером ставки

В начале партии каждый из двух игроков A и B ставит по единице. После того, как каждый из игроков получит карту, ходит игрок A: он может или поставить ещё *c* единиц или пасовать и потерять свою начальную ставку. (продолжить из презентации).

Постановка задачи

Используя инструментальные средства компьютерной алгебры решить задачи преследования и покера.

Порядок выполнения

1. Для задачи преследования отобразить фигуры на плоскости с помощью инструментального средства или вручную.

2. Рассмотреть два случая задачи: центр масс фигуры S1 принадлежит фигуре S2 и центр масс фигуры S1 не принадлежит фигуре S2.
3. Решить задачу аналитически и с помощью программы.
4. Решить задачу игры в покер аналитически и с помощью программы. Найти выигрыши и оптимальные стратегии для двух типов оптимальных стратегий.

Выполнение работы

1. Игра преследования на плоскости

1 случай: центр масс фигуры S_1 ***не принадлежит фигуре*** S_2

Графическое представление фигур на плоскости показано на рис. 1.

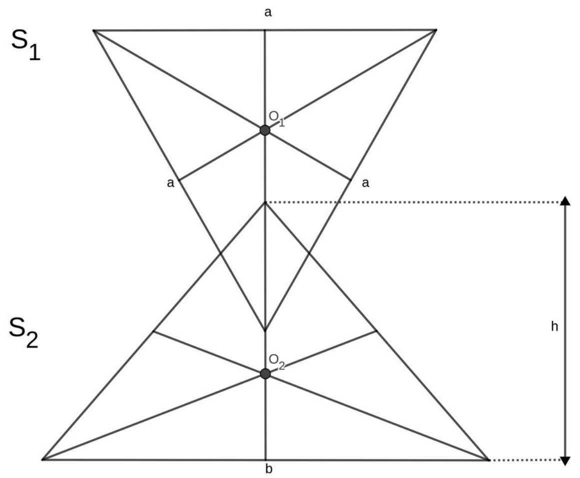

Рисунок 1 — представление фигур на плоскости для случая 1

Поиск нижней цены игры:

Для любой точки $x \in S_1$ и $x \notin S_2$ минимальное расстояние до S_2 равно перпендикуляру, опушенному на сторону треугольника S_2 (рис. 2).

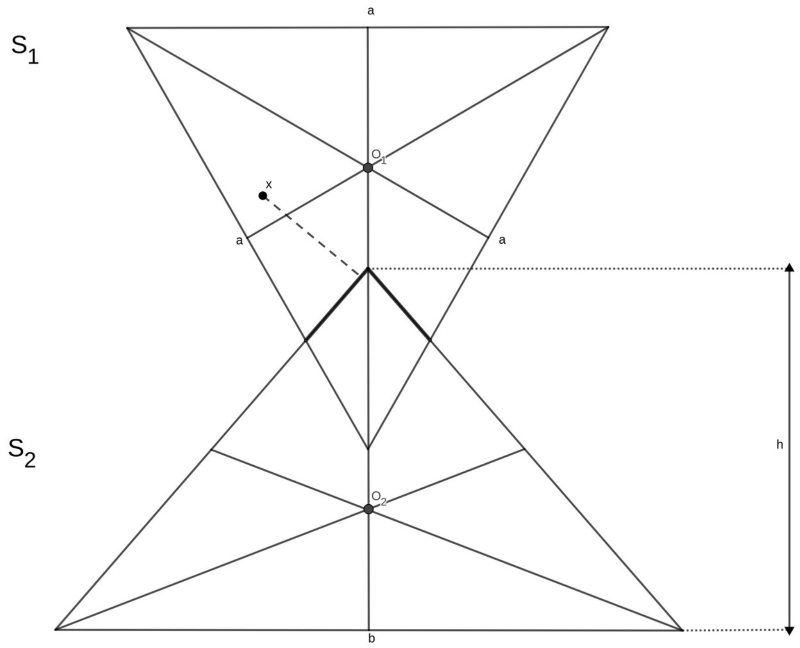

Рисунок 2 — минимальное расстояние от S_1 *до* S_2

Из возможных минимальных расстояний максимальным является от угла треугольника S_1 , как показано на рис. 3.

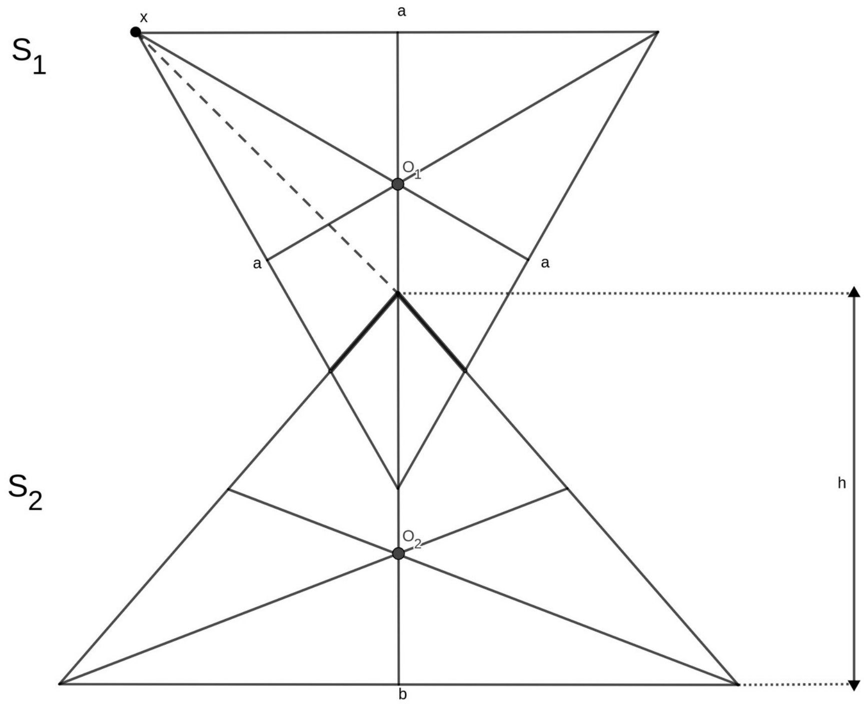

Рисунок 3 — максимальное минимальное расстояние от S_1 *до* S_2

Пусть $O_1(0,0)$, тогда:

$x\left(\frac{-a}{2}, r_1\right)$, где r_1 - радиус вписанной окружности S_1

Координаты вершины треугольника S_2 : $(0,-(|O_1,O_2|+r_2-h))$, где r_2 - радиус вписанной окружности S_2 .

Нижней границей игры является расстояние от точкии x до вершины треугольника S_2

$$\underline{v}=\sqrt{\left(0+\frac{a}{2}\right)^2+(-(|O_1,O_2|+r_2-h)-r_1)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+(-|O_1,O_2|-r_2+h-r_1)^2}$$

Поиск верхней цены игры:

Для любой точки $y\in S_2$ и $y\notin S_1$ максимальное расстояние до S_1 равно прямой соединяющей *y* с вершинами треугольника S_1 (рис. 4). Причем для точек находящихся правее высоты треугольника S_2 наибольшим будет расстояние до левой вершины треугольника S_1 , а для точек левее высоты треугольника S_2 - расстояние до правой вершины треугольника S_1 . Точки лежащие на высоте треугольника S_2 имеют одинаковое расстояние до обеих вершин.

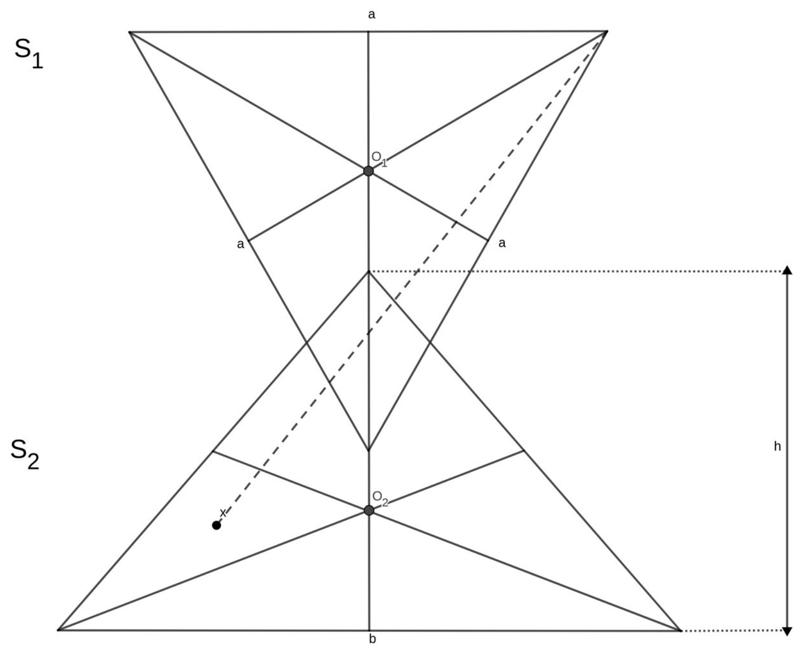

Рисунок 4 — максимальное расстояние от S_2 *до* S_1

Из возможных максимальных расстояний минимальным будет расстояние от вершины треугольника S_2 до любой из вершин треугольника S_1 (рис. 5).

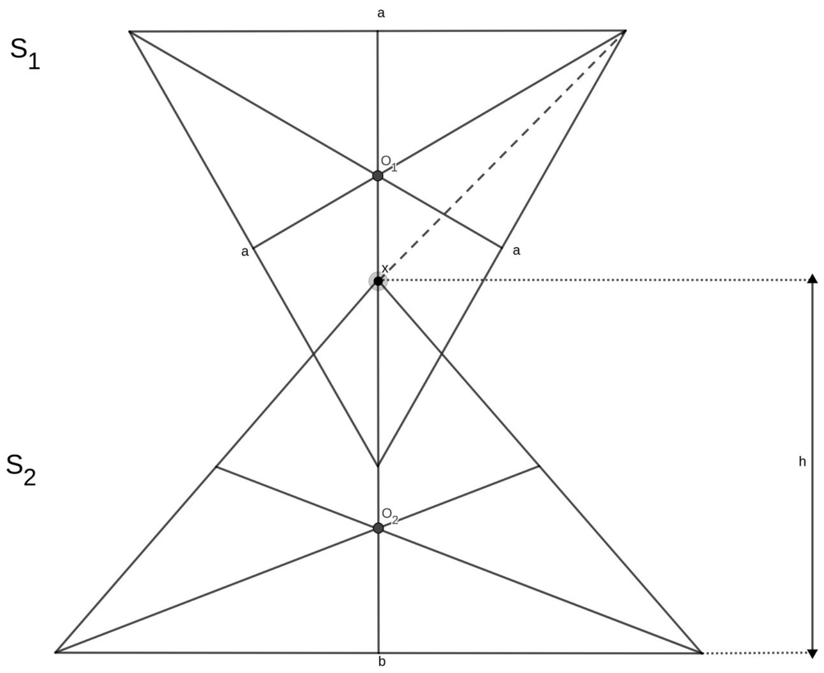

Рисунок 5 — минимальное максимальное расстояние от S_2 до S_1

Пусть $O_1(0{,}0)$, тогда:

Координаты вершины треугольника S_1 : $\left(\frac{a}{2}, r_1\right)$, где r_1 - радиус вписанной окружности S_1

$x\left(0, -\left(\left|O_1, O_2\right| + r_2 - h\right)\right)$, где r_2 - радиус вписанной окружности S_2 .

Верхней границей игры является расстояние от точкии x до вершины треугольника S_2 .

$$\bar{v} = \sqrt{\left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\left(\left|O_1, O_2\right| + r_2 - h\right) - r_1\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(-\left|O_1, O_2\right| - r_2 + h - r_1\right)^2}$$

При условии что центр масс фигуры S_1 не принадлежит фигуре S_2 верхняя и нижняя границы игры совпадают. Существует решение в чистых стратегиях.

2 случай: центр масс фигуры S_1 принадлежит фигуре S_2

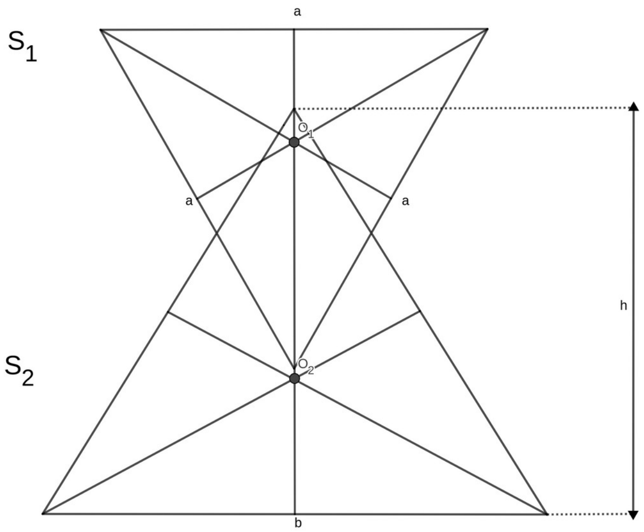

Рисунок 6 — представление фигур на плоскости для случая 2

Из возможных минимальных расстояний максимальным является перпендикуляр от вершины треугольника S_1 до стороны треугольника S_2 (рис. 7)

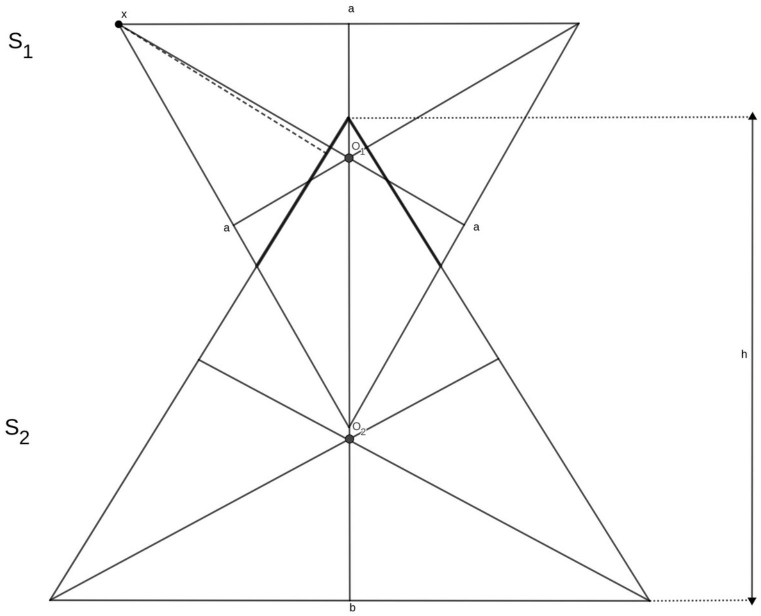

Рисунок 7 — максимальное минимальное расстояние от S_1 до S_2

Пусть $O_1(0,0)$, тогда:

$$x\left(\frac{-a}{2}, r_1\right)$$, где r_1 - радиус вписанной окружности S_1

Поиск расстояния от точки до прямой (рис. 8):

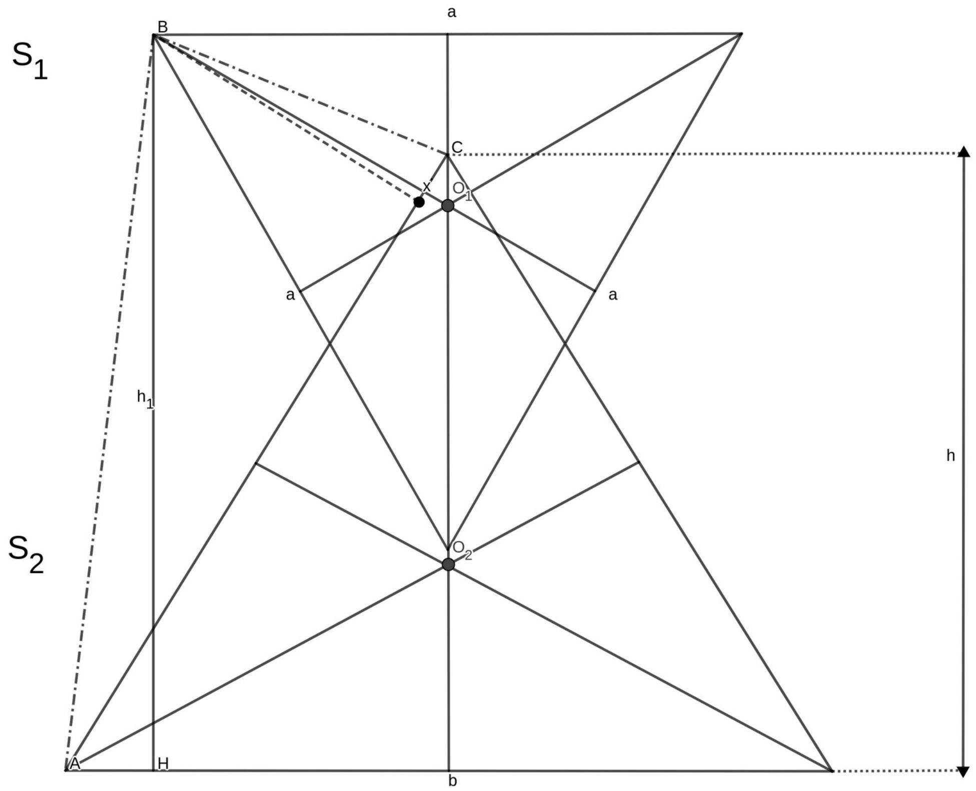

Рисунок 8 — поиск расстояния от точки до прямой

$h_1 = |O_1, O_2| + r_1 + r_2$, где r_1 - радиус вписанной окружности S_1 , де r_2 - радиус вписанной окружности S_2

$$AB = \sqrt{h_1^2 + AH^2}$$

$$BC = \sqrt{\frac{a^2}{4} + (h_1 - h)^2}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)}$$, где $$p = \frac{AB + BC + AC}{2}$$

$\underline{v} = BX = \frac{S_{ABC}}{AC}$ *- нижняя граница игры*

Из возможных максимальных расстояний минимальным будет перпендикуляр от вершины треугольника S_1 до стороны треугольника S_2 (рис. 9).

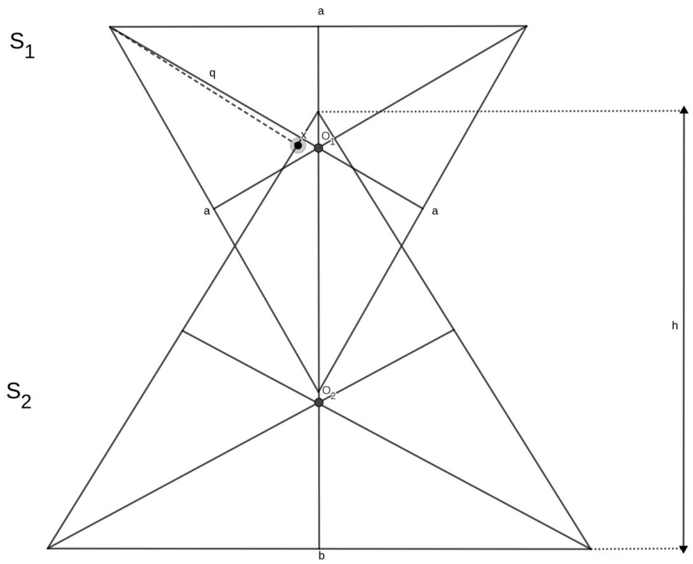

Рисунок 9 — минимальное максимальное расстояние от S_2 *до* S_1

Верхняя граница игры:

Пусть $O_1(0{,}0)$, тогда:

Координаты вершины треугольника S_1 : $\left(\frac{-a}{2}, r_1\right)$, где r_1 - радиус вписанной окружности S_1 .

Поиск расстояния от точки до прямой (рис. 10):

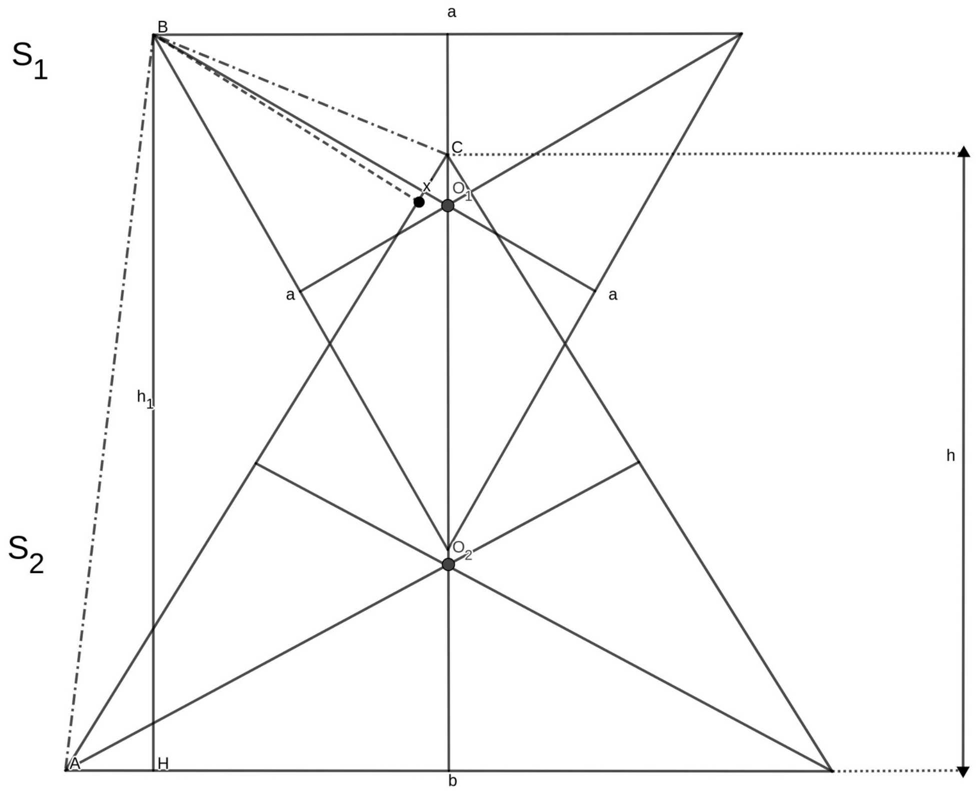

Рисунок 10 — поиск расстояния от точки до прямой

$h_1 = |O_1, O_2| + r_1 + r_2$, где r_1 - радиус вписанной окружности S_1 , де r_2 - радиус вписанной окружности S_2

$AB = \sqrt{h_1^2 + AH^2}$

$BC = \sqrt{\frac{a^2}{4} + (h_1 - h)^2}$

$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)}$, где $p = \frac{AB + BC + AC}{2}$

$\bar{v} = BX = \frac{S_{ABC}}{AC}$ - *верхняя граница игры*

При условии что центр масс фигуры S_1 принадлежит фигуре S_2 верхняя и нижняя границы игры совпадают. Существует решение в чистых стратегиях.

2. Задача игры в покер с одним кругом ставок

Первый игрок максимизирует выигрыш, а второй минимизирует.

$$H(\alpha,\beta)=\int_0^1\int_0^1 -\bar{\alpha}(x)+\alpha(x)\bar{\beta}(y)+(c+1)\,sgn(x-y)\,\alpha(x)\beta(y)\,dx\,dy$$

$$H(\alpha,\beta)=\int_0^1 \alpha(x)[1+\int_0^1 (\bar{\beta}(y)+(c+1)\,sgn(x-y)\beta(y))\,dy]\,dx-1$$

$$H(\alpha,\beta)=(c+1)b^2-b(a(c+2)+c)+ac \quad , \quad b=\frac{1}{2(c+1)}(a(c+2)+c)$$

$$H(\alpha,\beta)=H(\alpha)=\frac{(c+2)^2}{4(c+1)}\left(-a^2+2a\frac{c^2}{(c+2)^2}-\frac{c^2}{(c+2)^2}\right)$$

a– стратегия А, максимизирующая минимальный проигрыш В:

$$a=\left(\frac{c}{c+2}\right)^2 \qquad a=\left(\frac{11}{11+2}\right)^2=\frac{121}{169}\approx 0{,}7159763$$

b — стратегия В, минимизирующая максимальный выигрыш А:

$$b=\frac{c}{c+2} \qquad b=\frac{11}{11+2}=\frac{11}{13}\approx 0{,}8461538$$

Выигрыш в зависимости от ставки *c*:

$$H(\alpha,\beta)=\frac{(c+2)^2}{4(c+1)}\left(-\left(\frac{c}{c+2}\right)^4+2\left(\frac{c}{c+2}\right)^4-\frac{c^2}{(c+2)^2}\right)=\frac{(c+2)^2}{4(c+1)}\left(\left(\frac{c}{c+2}\right)^4-\frac{c^2}{(c+2)^2}\right)=$$

$$=\frac{(c+2)^2}{4(c+1)}\left(\frac{c^4}{(c+2)^4}-\frac{c^2}{(c+2)^2}\right)=\frac{(c+2)^2}{4(c+1)}\left(\frac{c^2(-4c-4)}{(c+2)^4}\right)=\frac{-c^2}{(c+2)^2}$$

$$H(\alpha,\beta)=\frac{(11+2)^2}{4(11+1)}\left(\left(\frac{11}{11+2}\right)^4-\frac{11^2}{(11+2)^2}\right)=-0.7159763$$

Игрок В находится в более выигрышном положении, его порог выше. Выигрыш первого игрока отрицательный.

Если $x<a$, *то* $\alpha(x)=0$

Если $x\geq a$, *то* $\alpha(x)=1$

Если $y<b$, *то* $\beta(y)=0$

Если $y\geq b$, *то* $\beta(y)=1$

Другая стратегия

При использовании оптимальной стратегии *α(x)* игроком *A*, наилучший ответ *B* — использование *β(x)* с порогом *b*.

Q(x) для данного *B*:

$$x\leq b \qquad Q(x)=1+\int_0^b dy-\int_b^1 (c+1)\,dy=1+b-(c+1)(1-b)=0$$

$H(\alpha,\beta)=-1$

$x>b \qquad Q(x)=1+b\int_b^x (c+1)dy-\int_x^1 (c+1)dy=2(c+1)x-c(b+1)>0$

$H(\alpha,\beta)=\int_b^1 \alpha(x)(2(c+1)x-c(b+1))dx-1=2(c+1)\int_b^1 xdx-c(b+1)\int_b^1 dx-1=1-b^2-1=b^2$

$H(\alpha,\beta)=-\frac{121}{169}$

Если

$x\geq b$, игрок А делает ставку

$x<b$, игрок А с вероятностью $p=\frac{c}{c+2}=\frac{11}{13}$ пасует, а с вероятностью

$p=1-\frac{c}{c+2}=\frac{2}{c+2}=\frac{2}{13}$ — блефует.