

## 23-24 秋冬数分期末参考答案

silvermilight

2024 年 1 月 27 日

答案仅供参考, 不保证完全正确, 也不一定是最优解, 欢迎指出错误或提出更好的解法. —rzm

一 (10 points) 叙述数列收敛的柯西收敛准则; 并用该准则证明: 数列  $\left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2024}} \right\}$  收敛.

**Solution** Cauchy 收敛准则: 若  $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, m > N$  都有  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ , 则数列  $\{a_n\}$  收敛.

设数列  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2024}}$ , 不妨设  $m < n$ , 则

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2024}} \right| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^{2024}} < \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} \\ &< \sum_{k=m+1}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} \end{aligned}$$

因此, 只需令  $\frac{1}{m} < \varepsilon$ , 故取  $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ , 则  $\forall n > N, m > N$  都有  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ , 据 Cauchy 收敛定理知原命题成立.

二 (35 points)

1. 求极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$ .

**Solution** 设  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 则  $f(x) \in C[0, 1]$ , 故  $f(x)$  可积且有原函数  $\arctan x$ .

由于  $\frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = f\left(\frac{k}{n}\right)$ , 故

$$\text{原式} = \int_0^1 f(x) dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

2. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$ .

**Solution** 令  $t = x - 1$  , 则  $t \rightarrow 0$  , 用两次 L'Hospital 法则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+1)^{t+1} - t - 1}{-t + \ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 + \ln(t+1))(t+1)^{t+1} - 1}{-1 + \frac{1}{t+1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{((1 + \ln(t+1))^2 + \frac{1}{t+1})(t+1)^{t+1}}{-\frac{1}{(t+1)^2}} \\ &= -2 \end{aligned}$$

3. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t^2 e^{\sin t} dx}{\ln(1+x^6)}$ .

**Solution** 设  $f(x) = \int_0^{x^2} t^2 e^{\sin t} dx$  , 由于被积函数在  $\mathbb{R}$  上连续, 知  $f(x) \in D(\mathbb{R})$  , 且  $f'(x) = 2x^5 e^{\sin x^2}$

当  $x \rightarrow 0$  时, 分子和分母都趋向 0, 可以使用 L'Hospital 法则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5 e^{\sin x^2}}{\frac{6x^5}{1+x^6}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^6)e^{\sin x^2}}{3} = \frac{1}{3}$$

4. 求  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$ .

**Solution**

$$\begin{aligned} \text{原式} &= - \int_1^{+\infty} \arctan x d\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= - \left( \frac{\arctan x}{x} \right) \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx^2 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx^2 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{x^2}{1+x^2} \right) \Big|_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

5. 求双纽线  $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$  所围平面图形的面积.

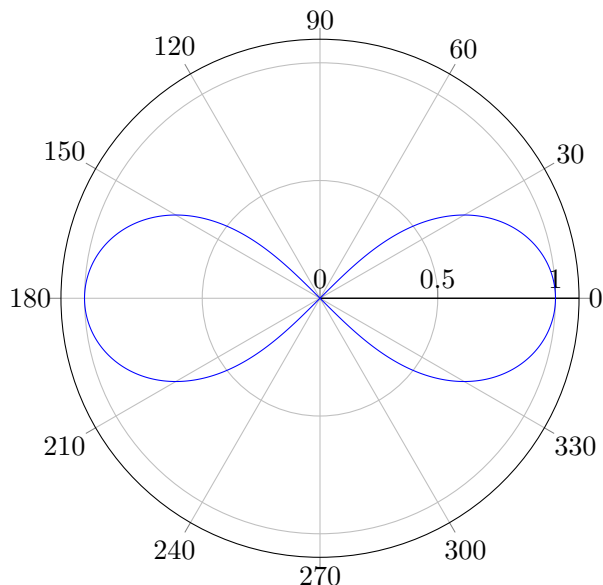


图 1: 双纽线

**Solution** 图 1 表明双纽线关于  $x$  轴与  $y$  轴对称, 故我们可以只计算位于第一象限的部分面积.

$$\text{原式} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cos(2\theta) d\theta = \sin(2\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

三 (10 points) 证明 Cantor 定理: 若  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上一致连续.

**Solution** 设  $E = \{t \in (a, b) \mid f(x) \text{ 在 } [a, t] \text{ 上一致连续}\}$ .

由  $f(x) \in C[0, 1]$ , 据 Cauchy 收敛定理知  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in [0, \delta), |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ , 故  $f(x)$  在  $[0, \delta)$  上一致连续, 所以  $\frac{\delta}{2} \in E$ .

$E \neq \emptyset$  且有上界 1, 由确界原理知  $E$  有上确界, 记  $\sup E = \alpha$ .

下证  $\alpha = 1$ .

假设  $\alpha \in (0, 1)$ , 则  $\forall \varepsilon > 0$ ,

由  $f(x) \in C[0, 1]$ , 据 Cauchy 收敛定理, 取  $\varepsilon_0 = \varepsilon$ , 则  $\exists \delta_0 > 0, \forall x_1, x_2 \in (\alpha - \delta_0, \alpha + \delta_0), |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_0$ .

由  $\alpha$  为  $E$  的上确界,  $\exists \beta > \alpha - \frac{\delta_0}{2}, \beta \in E$ , 即  $f(x)$  在  $[0, \beta]$  上一致连续. 取  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ , 则  $\exists \delta_1 > 0, \forall x_1, x_2 \in [0, \beta]$  且  $|x_1 - x_2| < \delta_1, |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_1$ .

取  $\delta = \min\{\frac{\delta_0}{2}, \delta_1\}$ , 则  $\forall x_1, x_2 \in [0, \beta]$  且  $|x_1 - x_2| < \delta$ ,  $x_1$  与  $x_2$  必定同时落在  $[0, \beta]$  内或  $(\alpha - \delta_0, \alpha + \delta_0)$  内. 故  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ . 因此  $f(x)$  在  $[0, \alpha + \frac{\delta_0}{2}]$  上一致连续.

由此可知  $\alpha + \frac{\delta_0}{2} \in E$ , 与  $\alpha = \sup E$  矛盾. 故  $\alpha = 1$ ,  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上一致连续.

四 (10 points) 求函数  $f(x) = \int_{-1}^1 |x - t| e^{t^2} dt$  在  $\mathbb{R}$  上的最小值.

**Solution** 分以下三种情况讨论:

1.  $x \geq 1$ , 则

$$f(x) = x \int_{-1}^1 e^{t^2} dt - \int_{-1}^1 te^{t^2} dt = x \int_{-1}^1 e^{t^2} dt - \frac{1}{2} e^{t^2} \Big|_{-1}^1 \geq \int_{-1}^1 e^{t^2} dt$$

2.  $x \leq -1$ , 则

$$f(x) = \int_{-1}^1 te^{t^2} dt - x \int_{-1}^1 e^{t^2} dt = \frac{1}{2} e^{t^2} \Big|_{-1}^1 - x \int_{-1}^1 e^{t^2} dt \geq \int_{-1}^1 e^{t^2} dt$$

3.  $-1 < x < 1$ , 则

$$\begin{aligned} f(x) &= x \int_{-1}^x e^{t^2} dt - \int_{-1}^x te^{t^2} dt + \int_x^1 te^{t^2} dt - x \int_x^1 e^{t^2} dt \\ &= x \left( \int_{-1}^x e^{t^2} dt - \int_x^1 e^{t^2} dt \right) + e - e^{x^2} \end{aligned}$$

求导可得  $f'(x) = \int_{-1}^x e^{t^2} dt - \int_x^1 e^{t^2} dt$ ,  $f''(x) = 2e^{x^2} > 0$ , 故  $f(x)$  单调递增.

由  $y = e^{x^2}$  为偶函数, 知  $f'(0) = 0$ , 故  $f(x)$  在  $[-1, 0]$  上单调递减, 在  $[0, 1]$  上单调递增, 在  $x = 0$  处取得最小值  $e - 1$ .

由于  $\int_{-1}^1 e^{t^2} dt = 2 \int_0^1 e^{t^2} dt > 2 \int_0^1 te^{t^2} dt = e - 1$ , 故  $e - 1$  为  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上的最小值.

**五 (10 points)** 证明导函数极限定理: 若函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上可导, 且  $f'(0) < a < f'(1)$ , 则存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = a$ .

**Solution** 设  $g(x) = f(x) - ax$ , 则只需证明  $\exists \xi \in (0, 1), g'(\xi) = 0$ .

$g(x) = f(x) - ax \in C[0, 1]$ , 由闭区间上连续函数的最值定理可知  $g(x)$  在  $[0, 1]$  上有最小值.

$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} < 0$ , 由局部保号性可知  $\exists \delta_1 > 0, \forall x \in (0, \delta_1), g(x) < g(0)$ .

$g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x} > 0$ , 由局部保号性可知  $\exists \delta_2 > 0, \forall x \in (1 - \delta_2, 1), g(x) < g(0)$ .

所以  $g(0)$  和  $g(1)$  都不是  $g(x)$  在  $[0, 1]$  上的最小值, 故最小值在  $(0, 1)$  上的某个点  $\xi$  处取得,  $\xi$  同时也是极小值.

又因为  $g(x) \in D[0, 1]$ , 由 Fermat 引理可知  $g'(\xi) = 0$ , 得证.

**六 (10 points)** 设函数  $f(x) \in R[0, 1]$ , 且  $f$  在  $x = 0$  处右连续. 证明: 函数  $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 在  $x = 0$  处的右导数等于  $f(0)$ .

**Solution**  $f(x)$  在  $x = 0$  处右连续, 故  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (0, \delta), |f(x) - f(0)| < \varepsilon$ , 即  $f(0) - \varepsilon < f(x) < f(0) + \varepsilon$ .

由定积分保序性, 可知  $\forall x \in (0, \delta), (f(0) - \varepsilon)x < \varphi(x) < (f(0) + \varepsilon)x$ .

所以  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (0, \delta), f(0) - \varepsilon < \frac{\varphi(x)}{x} < f(0) + \varepsilon$

所以  $\varphi'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\varphi(x)}{x} = f(0)$ .

七 (10 points) 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有连续的导函数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \right] = \frac{f(1) - f(0)}{2}$$

**Solution** 由条件知  $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ , 据 Lagrange 中值定理, 有

$$\sum_{k=1}^n \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \right] = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f'(\xi_k)$$

且有  $\xi_k \in \left(\frac{2k-1}{2n}, \frac{k}{n}\right) \subset \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$

取分割  $\Delta: x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_k = \frac{k}{n}, \dots, x_n = 1$  与介点组  $\{\xi_k\}$ , 由  $f'(x) \in C[0, 1]$ , 知  $f'(x)$  黎曼可积且有原函数  $f(x)$ . 故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \right] = \frac{1}{2} \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f'(\xi_k) \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = \frac{f(1) - f(0)}{2}$$

八 (5 points) 设函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有二阶连续的导函数, 且存在常数  $C > 0$ , 使得

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (|x|^2 |f(x)| + |f''(x)|) \leq C$$

证明: 存在常数  $M > 0$ , 使得  $\sup_{x \in \mathbb{R}} (|xf'(x)|) \leq M$ .

**Solution** 由上确界定义可知  $\forall x \in \mathbb{R}, |x|^2 |f(x)| \leq C, |f''(x)| \leq C$ .

1.  $|x| \leq 1$

$f(x)$  有二阶连续导数, 故  $f'(x) \in C[-1, 1]$ , 进而  $xf'(x) \in C[-1, 1]$ , 由有界性定理可知  $\exists M_1 > 0, \forall x \in [-1, 1], |xf'(x)| \leq M_1$ .

2.  $|x| > 1$

$f(x)$  有二阶连续导数,  $\forall |x_0| > 1$ ,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 \quad (1)$$

代入  $x = x_0 + \frac{1}{x_0}$ , 有

$$f\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{x_0} + \frac{f''(\xi)}{2x_0^2} \quad (2)$$

两边同乘  $x_0^2$ , 移项得

$$x_0 f'(x_0) = x_0^2 f\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) - x_0^2 f(x_0) - \frac{f''(\xi)}{2} \quad (3)$$

等式右边第二项与第三项都是有界量, 故只需证明第一项也为有界量, 考虑利用有界量  $(x_0 + \frac{1}{x_0})^2 f(x_0 + \frac{1}{x_0})$  进行估计:

$$\begin{aligned}
 \left| x_0^2 f(x_0 + \frac{1}{x_0}) \right| &= \left| (x_0 + \frac{1}{x_0})^2 f(x_0 + \frac{1}{x_0}) - 2f(x_0 + \frac{1}{x_0}) - \frac{f(x_0 + \frac{1}{x_0})}{x_0^2} \right| \\
 &\leq \left| (x_0 + \frac{1}{x_0})^2 f(x_0 + \frac{1}{x_0}) \right| + \left| 2f(x_0 + \frac{1}{x_0}) \right| + \left| \frac{f(x_0 + \frac{1}{x_0})}{x_0^2} \right| \\
 &< \left| (x_0 + \frac{1}{x_0})^2 f(x_0 + \frac{1}{x_0}) \right| + 3 \left| x_0^2 f(x_0 + \frac{1}{x_0}) \right| \\
 &\leq 4C
 \end{aligned} \tag{4}$$

将 (3) 式取绝对值, 再将 (4) 式代入, 得

$$\begin{aligned}
 |x_0 f'(x_0)| &\leq \left| x_0^2 f(x_0 + \frac{1}{x_0}) \right| + |x_0^2 f(x_0)| + \frac{|f''(\xi)|}{2} \\
 &\leq 4C + C + \frac{C}{2} \\
 &= \frac{11C}{2}
 \end{aligned}$$

综上, 取  $M = \max \{M_1, \frac{11C}{2}\}$ , 则  $\forall x \in \mathbb{R}, |xf'(x)| \leq M$ , 故  $M$  为  $|xf'(x)|$  的一个上界, 必然不大于其上确界, 因此  $\sup_{x \in \mathbb{R}} (|xf'(x)|) \leq M$ .