МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«Харківський політехнічний інститут»

Ю. А. Плаксій, О. А. Татарінова

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Навчально-методичний посібник з курсів

«МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ»,
«МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ»

для студентів спеціальностей
«Прикладна математика» та «Комп'ютерні науки»

У двох частинах

Частина 1

**МЕТОДИ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ
ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ**

Харків
НТУ «ХПІ»
2017

УДК 519.85(075)
ББК 22.19я7
П37

Р е ц е н з е н т и :

К. В. Аврамов, д-р. техн. наук, проф., завідувач відділу надійності та динамічної міцності Інституту проблем машинобудування ім. А. Н.Підгорного НАН України;

Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф. каф. прикладної математики НТУ «ХПІ»

Плаксій Ю. А.

П37 Методи оптимізації функцій : навч.-метод. посіб. : у 2-х ч. – Ч. 1 : Методи мінімізації функцій однієї змінної / Ю. А. Плаксій, О. А. Татарінова. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – 80 с.

ISBN 978-

Розглядаються методи мінімізації функцій однієї змінної, що використовуються для розв'язання задач оптимізації технічних систем, а також питання реалізації відповідних алгоритмів на ПЕОМ. Викладення ілюструється чисельними прикладами розв'язання конкретних оптимізаційних задач. Наводяться завдання для лабораторних робіт.

Для студентів спеціальностей «Прикладна математика», «Комп'ютерні науки».

Іл. 21. Табл. 24. Бібліогр. 11 найм.

УДК 519.85(075)
ББК 22.19я7

ISBN

З М І С Т

ВСТУП

Теорія оптимізації базується на сукупності фундаментальних математичних результатів і чисельних методів, що орієнтовані на находження найкращих варіантів із множини альтернатив і дозволяють уникнути повного перебору і оцінювання можливих варіантів. Теорія оптимізації має ефективне застосування в багатьох напрямках інженерної діяльності, насамперед, в таких, як:

1) проектування систем і їх складових частин;
2) планування і аналіз функціонування існуючих систем;
3) інженерний аналіз і обробка інформації;
4) управління динамічними системами.

Оптимізація є основою всієї інженерної діяльності, бо класичні функції інженера полягають в тому, щоб, по-перше, проектувати нові, більш ефективні і найдешевші технічні системи, а, по-друге, розробляти методи підвищення якості функціонування вже існуючих систем.

Ефективність оптимізаційних методів тісно пов'язана з використанням досягнень в області обчислювальної математики, формалізованих в ітеративних обчислювальних схемах логічних процедур і алгоритмів, із застосуванням сучасної обчислювальної техніки.

Оскільки розмірність інженерних задач, як правило, достатньо велика, а розрахунки у відповідності з алгоритмами оптимізації часто потребують значних витрат часу, оптимізаційні методи орієнтовані головним чином на реалізацію за допомогою ПЕОМ.

Для використання математичних результатів і обчислювальних методів теорії оптимізації при розв'язанні конкретних інженерних задач необхідно встановити границі змінення параметрів інженерної системи, що має бути оптимізована, визначити кількісний критерій (показник якості функціонування системи), на основі якого можна здійснити аналіз варіантів з метою визначення «найкращого», здійснити вибір внутрішньосистемних змінних, і, нарешті, побудувати математичну модель, яка відображує взаємозв'язки між змінними. Ця послідовність дій складає зміст процесу *постановки задачі* інженерної оптимізації. Коректна постановка задачі є певною гарантією успіху подальшого оптимізаційного дослідження.

Незалежно від того, який критерій вибраний при оптимізації, «найкращому» варіанту завжди відповідає *мінімальне* або *максимальне* значення показника якості функціонування системи.

В цьому посібнику розглядається тільки один критерій для находження оптимуму. Таким чином розглядається спрощена реальна ситуація, оскільки на практиці може бути вельми бажано винайти розв'язок, який би був «найкращим» з позиції декількох різних критеріїв.

Методи оптимізації функцій однієї змінної часто застосовуються в інженерній практиці для знаходження коренів алгебраїчних, трансцендентних і інших рівнянь, що складають математичну модель системи, бо як буде показано, задача оптимізації *цільової функції* $f(x)$: $f(x) \to \min$ або $\min f(x)$ математично еквівалентна задачі розв'язання рівняння $f'(x) = 0$. Також методи одновимірної оптимізації часто використовуються при практичній реалізації методів багатовимірної оптимізації, наприклад, при визначенні довжини кроку в обраному напрямку пошуку, тобто в цьому сенсі мають допоміжне значення.

Звичайно задачу одновимірної оптимізації розглядають в умовах обмежень на x, коли $x \in [a_0, b_0]$, де $[a_0, b_0]$ – так званий початковий інтервал невизначеності точки оптимуму. Якщо метод не використовує інтервал невизначеності, то оптимум цільової функції цілком залежить від положення початкової точки пошуку x_0. Таким чином методи одновимірної оптимізації дозволяють гарантовано відшукати тільки локальний оптимум цільової функції.

Оскільки задача максимізації цільової функції $f(x)$ може бути інтерпретована, як задача мінімізації функції $-f(x)$, при подальшій подачі матеріалу будемо розглядати саме розв'язання задачі мінімізації.

Для повноцінного опанування методів теорії оптимізації необхідні певні знання з теорії матриць, лінійної алгебри, диференціального числення, математичного аналізу і методів обчислень.

1. МЕТОДИ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Задача оптимізації функцій однієї змінної $f(x)$ належить до найбільш простого типу оптимізаційних задач. Тим не менше аналіз задач такого типу займає центральне місце в оптимізаційних дослідженнях як теоретичної, так і практичної спрямованості. Це пов'язано не тільки з тим, що саме такі задачі звичайно розв'язуються в інженерній практиці, але й з тим, що одновимірні методи оптимізації часто використовуються для аналізу підзадач, які виникають при реалізації ітераційних процедур, орієнтованих на розв'язання багатовимірних задач оптимізації. Важливість теоретичних і прикладних оптимізаційних задач з однією змінною обумовила розробку великої кількості алгоритмів їх розв'язання. Класифікація методів розв'язання одновимірних задач по суті базується на різноманітних припущеннях відносно природи і властивостей функцій $f(x)$.

1.1. Властивості функцій однієї змінної. Унімодальні функції

Згідно найбільш простого визначення, функція $f(x)$ представляє собою правило, яке ставить кожному значенню x у відповідність єдине значення $y = f(x)$. В цьому випадку x має назву *незалежної змінної*, а y – *залежної змінної*. Розглянемо множину $D \subset R$, де R – множина всіх дійсних чисел. Якщо $x \in D$, то функція $y = f(x)$ називається скалярною функцією $f(x)$, що визначена на множині D.

Якщо множина $D = R$, ми маємо справу з *усюди визначеною функцією* однієї змінної. У випадку, коли D є деяка підмножина множини R, це означає, що функція $f(x)$ *визначена в обмеженій області*.

Наприклад, $y = x^2 - 2x + 3$ для всіх $x \in R$ є всюди визначена функція, тоді як функція $y = x^2 - 2x + 3$, де $x \in D = \{x \mid -4 \le x \le 4\}$, визначена в обмеженій області.

❖ ***Визначення***

❖ В теорії оптимізації $f(x)$ називається *цільовою функцією*, а множина D – *допустимою областю.*

Більшість фізичних процесів можна описати (побудувати математичні моделі цих процесів) за допомогою *неперервних функцій*, тобто функцій, що мають властивість неперервності в кожній точці області їх визначення: $x \in D$. Однак в інженерній практиці часто мають місце випадки використання *розривних функцій*. Прикладом розривної функції є релейна функція двохпозиційного закону регулювання (рис. 1.1).

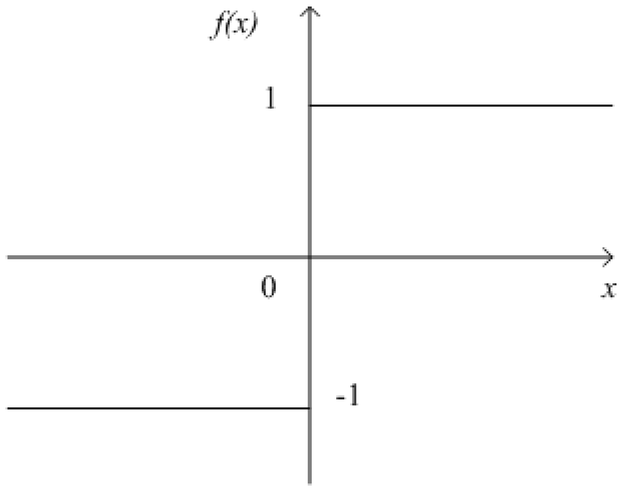


Рисунок 1.1 – Двохпозиційний закон регулювання

Інколи область допустимих значень незалежної змінної x містить не всі дійсні числа з заданого інтервалу, а тільки деякі *дискретні* значення. Тоді і функція $f(x)$ також приймає певні дискретні значення, а графік такої функції складається з відокремлених точок. На рис. 1.2 представлений графік функції вартості S одного погонного метра сталевої труби в залежності від діаметра d цієї труби.

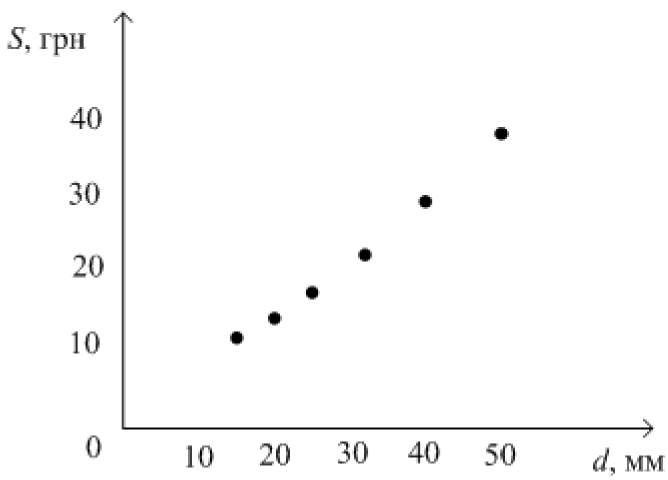


Рисунок 1.2 – Вартість погонного метра сталевої труби

В подальшому, якщо це не буде оговорено додатково, ми будемо вважати, що цільова функція $f(x)$ є *неперервною.*

Важливо мати на увазі, що неперервні функції мають наступні властивості:

1) сума або добуток неперервних функцій є також неперервною функцією;

2) відношення двох неперервних функцій є функцією, неперервною в усіх точках, крім тих, в яких знаменник перетворюється на нуль.

В залежності від того, є цільова функція неперервною чи розривною, а також від структури допустимої області для реалізації процедури пошуку точок оптимуму необхідно використовувати різні методи. Так, метод, ефективний для аналізу неперервних функцій, може бути неефективним при дослідженні розривних функцій.

Крім перелічених вище властивостей можна також класифікувати функції в залежності від їх форми, яка визначає топологічні властивості функцій в інтервалі, що розглядається.

❖ ***Визначення.***

❖ *Монотонні функції.* Функція $f(x)$ є монотонною, якщо для двох довільних точок x_1 і x_2 з області визначення функції, таких, що $x_1 \le x_2$ виконується одне з наступних нерівностей:

– $f(x_1) \le f(x_2)$ (монотонно зростаюча функція),

– $f(x_1) \ge f(x_2)$ (монотонно спадаюча функція).

На рис. 1.3 представлений графік монотонно зростаючої функції, а на рис. 1.4 – графік монотонно спадаючої функції. Зауважимо, що монотонна функція не завжди повинна бути неперервною.

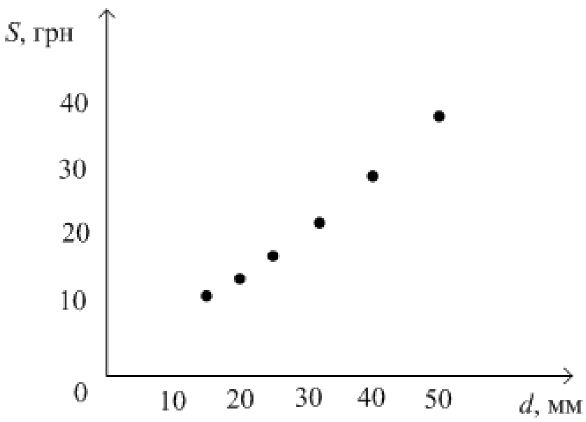


Рисунок 1.3 – Монотонно зростаюча функція

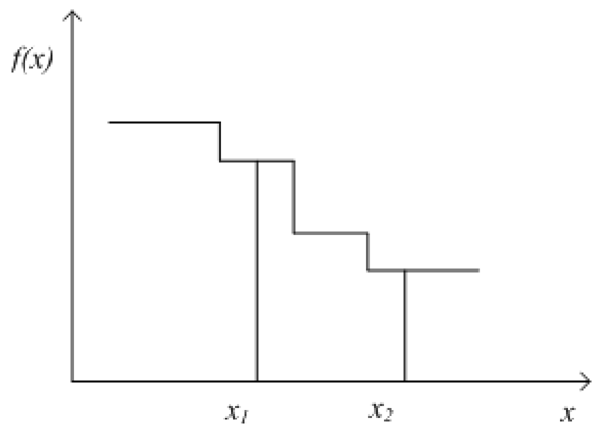
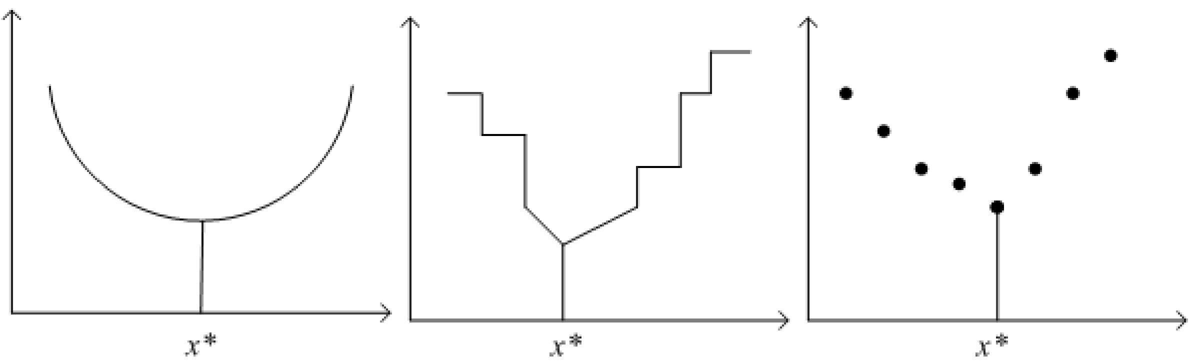


Рисунок 1.4 – Монотонно спадаюча функція

❖ ***Визначення***

❖ *Унімодальні функції.* Функція $f(x)$ є *унімодальною* на відрізку $a \le x \le b$, якщо вона монотонна по обидві сторони від єдиної на цьому інтервалі оптимальної точки x^*.

На рис. 1.5 представлені приклади унімодальних функцій.



а *б* *в*

Рисунок 1.5 – Унімодальні функції:
а – неперервна, *б* – розривна, *в* – дискретна

Унімодальність функцій є важливою властивістю, яка широко використовується в теорії оптимізації.

1.2. Критерії оптимальності

При дослідженні оптимізаційних задач завжди виникають два питання.

1. *Питання аналізу «в статиці».* Як визначити, чи є точка x^* оптимальним розв'язком задачі?

2. *Питання аналізу «в динаміці».* Якщо x^* не є точкою оптимуму, то яка послідовність дій призводить до отримання оптимального розв'язку?

В цьому розділі основна увага приділяється розв'язанню питання аналізу «в статиці», а саме формулюванню умов оптимальності, які дозволяють визначити, чи є даний розв'язок оптимальним.

❖ ***Визначення.***

❖ Функція $f(x)$, яка визначена на множині D, досягає свого *глобального мінімуму* в точці x^* тоді і тільки тоді, коли

$$f(x^*) \le f(x) \text{ для усіх } x \in D.$$

❖ Функція $f(x)$, яка визначена на множині D, досягає свого *локального мінімуму* в точці x^* тоді і тільки тоді, коли існує таке $\varepsilon > 0$, що для усіх x, які задовольняють умові $|x - x^*| < \varepsilon$, виконується нерівність $f(x^*) \le f(x)$.

Отримаємо необхідні і достатні умови існування локального мінімуму. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі (a,b) і n – кратно диференційована на цьому інтервалі. Якщо $x^* \in [a,b]$, то з формули Тейлора маємо:

$$f(x^* + \varepsilon) = f(x^*) + \varepsilon f'(x^*) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(x^*) + ... + \frac{\varepsilon^n}{n!} f^{(n)}(x^*) + ... \qquad (1.1)$$

Якщо x^* – локальний мінімум функції $f(x)$ на (a,b), то за визначенням повинна існувати ε – окіл точки x^*, такий, що для усіх точок з цього околу виконується нерівність

$$f(x) > f(x^*). \qquad (1.2)$$

З урахуванням нерівності (1.2) отримаємо з (1.1), що в точці x^* має місце умова:

$$\varepsilon f'(x^*) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''(x^*) + ... + \frac{\varepsilon^n}{n!} f^{(n)}(x^*) + ... \ge 0. \qquad (1.3)$$

Оскільки при малому ε перший доданок в (1.3) є найбільшим, а ε може бути як додатним, так і від'ємним, то умова (1.3) буде виконуватися тільки тоді, коли

$$f'(x^*) = 0. \qquad (1.4)$$

Точки, в яких виконується умова (1.4), називаються *стаціонарними.*
Поступаючи аналогічним чином, нескладно встановити, що нерівність (1.3) буде справедливою тоді і тільки тоді, коли

$$f''(x^*) \ge 0. \qquad (1.5)$$

Отриманий результат можна сформулювати у вигляді теореми.

☺ ***Теорема 1.1.***

Необхідні умови існування локального мінімуму в точці x^* функції $f(x)$, яка є двічі диференційована, наступні:

$$f'(x^*) = 0, \quad f''(x^*) \ge 0. \qquad (1.6)$$

Обговоримо положення теореми 1.1. Розглянемо у якості приклада функцію $f(x) = x^3$, графік якої представлений на рис. 1.6. Для цієї функції в точці $x = 0$ мають місце умови теореми 1.1., вона є стаціонарною точкою, але мінімум не спостерігається, бо точка $x = 0$ є точкою перегину (або сідловою точкою).

Щоб підкреслити відмінність між випадками, коли стаціонарна точка відповідає локальному мінімуму, або є точкою перегину, розглянемо достатні умови оптимальності.

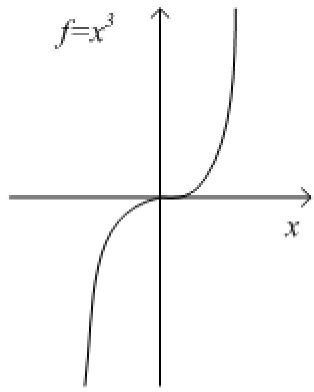


Рисунок 1.6 – Точка перегину

☺ ***Теорема 1.2.***

Нехай в точці x^* перші $(n-1)$ похідні функції $f(x)$ обертаються в нуль, а похідна *n*-го порядку відмінна від нуля. Тоді:

а) якщо *n* – парне, то x^* – точка перегину;

б) якщо *n* – непарне, то x^* – точка локального оптимуму. У випадку, коли $f^{(n)}(x^*) > 0$, точка x^* э точкою локального мінімуму.

Твердження теореми можна довести на основі розкладу (1.1), який перепишемо у вигляді:

$$f(x^* + \varepsilon) = f(x^*) + \frac{\varepsilon^n}{n!} f^{(n)}(x^*) + \ldots \quad (1.7)$$

Якщо *n* – непарне число, то різниця $f(x^* + \varepsilon) - f(x^*)$ може приймати як додатні, так і від'ємні значення в залежності від знака ε. Таким чином, функція $f(x)$ не досягає в точці x^* свого екстремуму, тобто x^* – точка перегину. У випадку парного *n* різниця $f(x^* + \varepsilon) - f(x^*)$ завжди додатна, тобто це відповідає умові існування локального мінімуму функції в точці x^*.

➢ ***Зауваження.***

1. Якщо цільова функція не є диференційованою у всіх точках області визначення, то навіть необхідні умови існування оптимуму, що дозволяють ідентифікувати стаціонарні точки, можуть не виконуватися в точці оптимуму. Для прикладу розглянемо кусково-лінійну функцію

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x, & \text{при } x \le 2, \\ x, & \text{при } x > 2. \end{cases} \quad (1.8)$$

Ця функція неперервна у всіх точках дійсної осі, але в точці $x = 2$ вона недиференційована. Функція має мінімум при $x = 2$, але точка $x = 2$ не є стаціонарною згідно з приведеним вище визначенням.

2. Зауважимо, що у випадку, коли функція досліджується на заданому інтервалі, в число точок, де може існувати оптимум функції, треба включити і граничні точки інтервалу.

1.3. Приклади оптимізаційних задач. Термінологія. Класифікація методів мінімізації функцій однієї змінної

Приклади оптимізаційних задач.

Приклад 1. У півколо радіусу R треба вписати прямокутник найбільшого периметра.

Позначимо через x довжину сторони прямокутника, що не лежить на діаметрі напівкола. Тоді цільова функція, яка підлягає максимізації, буде мати вигляд:

$$p(x) = 2x + 4\sqrt{R^2 - x^2} \to \max .$$

Приклад 2. Визначити розміри відкритого басейну об'ємом $V = 32\text{м}^3$, що має форму прямокутного паралелепіпеда, з квадратним дном, на облицювання стін і дна якого піде найменша кількість матеріалу.

Позначимо через x сторону квадратного дна. Тоді цільова функція, що описує площу повної поверхні басейну (площа дна і чотирьох стінок), має вигляд:

$$s(x) = x^2 + \frac{128}{x} \to \min .$$

Приклад 3. Відомо, що сума двох позитивних чисел дорівнює 12. Якими повинні бути ці числа, щоб добуток їх квадратів був максимальним?

Математична модель задачі може бути записана так:

$$p(x) = x^2 (12 - x)^2 \to \max ,$$

де позначено через x одне з чисел.

Приклад 4. Розглянемо задачу безумовної мінімізації функції багатьох змінних $f(x)$, де $x = \{x^1, x^2, ..., x^n\}$.

Припустимо, що задана початкова точка $x_0 = \{x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n\}$ і вибраний напрямок мінімізації $p_0 = \{p_0^1, p_0^2, ..., p_0^n\}$. Визначимо нове наближення $x_1 = \{x_1^1, x_1^2, ..., x_1^n\}$ до точки мінімуму x^* за правилом

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0 .$$

Тоді величина кроку α_0 в напрямку p_0 визначиться як розв'язок задачі

$$\min f(x_1 + \alpha p_0) = \min f(\alpha) = f(x_1 + \alpha_0 p_0),$$

яка представляє собою задачу одновимірної мінімізації.

Термінологія.

Дамо наступні визначення, якими ми будемо користуватися в подальшому викладенні.

❖ ***Визначення.***

❖ *Інтервалом невизначеності* $[a,b]$ називається інтервал локалізації точки мінімуму $x^* \in [a,b]$, при цьому конкретне положення точки x^* на інтервалі $[a,b]$ не визначено.

❖ *Пробною точкою* називається точка з інтервалу невизначеності $x \in [a,b]$, для якої обчислюється значення цільової функції $f(x)$.

❖ *Ітерацією* називається повторне застосування математичної операції (зі зміненими даними) при розв'язанні обчислювальних задач, яке дає можливість поступово наблизитися до правильного результату.

Як правило, методи оптимізації є ітераційними.

Класифікація методів мінімізації функцій однієї змінної. Всі методи мінімізації функцій однієї змінної можна класифікувати за різними критеріями. Так, за вимогами до гладкості та наявності похідних цільової функції їх можна розподілити на:

- *прямі* методи, що вимагають тільки обчислень значень цільової функції в пробних точках;
- методи *першого порядку*, що потребують обчислення перших похідних цільової функції;
- методи *другого порядку*, що потребують обчислення других похідних цільової функції.

За стратегією пошуку методи розподіляються на методи *пасивного пошуку* і методи *активного пошуку*.

За способом наближення до точки оптимуму методи можна розподілити на методи *виключення інтервалів* та методи *поліноміальної апроксимації.*

За характером оптимальної точки методи розподіляються на методи пошуку локального оптимуму і методи пошуку глобального оптимуму.

1.4. Визначення початкового інтервалу локалізації точки мінімуму

Практичне застосування багатьох методів одновимірної оптимізації припускає, що попередньо знайдений інтервал локалізації точки мінімуму цільової функції $x^* \in [a_0, b_0]$. Розглянемо один з евристичних методів пошуку початкового інтервалу невизначеності, запропонованого Свенном.

1.4.1. Алгоритм Свенна

Задамо довільно деяку початкову точку x_0 і параметр $\Delta_0 > 0$. Обчислимо значення функції в початковій точці $f_0 = f(x_0)$ і значення функції в точці $x_1 = x_0 + \Delta_0$, яке позначимо f_1. Якщо $f_1 < f_0$, то $\Delta = \Delta_0$ і нова точка x_{k+1} обчислюється за формулою:

$$x_{k+1} = x_k + 2^k \Delta, \quad (k = 1, 2, ...) \tag{2.10}$$

до тих пір, поки функція не перестане зменшуватись, тобто поки не стане:

$$f_k \le f_{k+1}. \tag{2.11}$$

Тоді згідно з припущенням унімодальності функції $f(x)$, точка мінімуму функції x^* гарантовано лежить між точками x_{k-1} і x_{k+1}, а початковий інтервал невизначеності є $[x_{k-1}, x_{k+1}]$, довжина якого $L_0 = x_{k+1} - x_{k-1}$, тобто

$$L_0 = 3 \cdot 2^{k-1} \Delta. \tag{2.12}$$

Наприклад, якщо $k = 2$, тобто $f_0 > f_1 > f_2 < f_3$, то $a_0 = x_1$, $b_0 = x_3$, а довжина початкового інтервалу $L_0 = 6\Delta$, тобто $[a_0, b_0] = [x_1, x_3]$ (рис. 1.7).

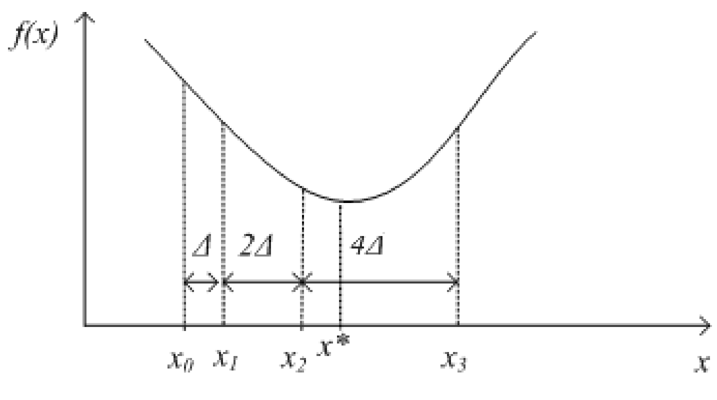


Рисунок 1.7 – До визначення початкового інтервалу невизначеності

У випадку, якщо $f_1 > f_0$, треба змінити знак величини кроку Δ в формулі (2.10), тобто покласти $\Delta = -\Delta_0$. Подальші обчислення точок x_{k+1}, де $k = 1,2,...$, проводяться згідно формули (2.10) до тих пір, поки не стане виконуватися умова (2.11). На відміну від попереднього випадку, точка x_{k+1} лежить ліворуч від точки x_{k-1}, тобто початковий інтервал невизначеності буде $[x_{k+1}, x_{k-1}]$, а довжина його буде $L_0 = x_{k-1} - x_{k+1}$.

➢ **Зауваження.**

1. Може статися, що точка x_0 випадково вибрана поблизу точки мінімуму x^*. Тоді, зробивши крок праворуч від точки x_0, отримаємо $f(x_0 + \Delta_0) > f(x_0)$. Аналогічно, зробивши крок ліворуч, також отримаємо $f(x_0 - \Delta_0) > f(x_0)$. В цьому випадку інтервал невизначеності буде мати вигляд $[x_0 - \Delta_0, x_0 + \Delta_0]$.

o *Приклад застосування метода Свенна.*

Знайдемо інтервал невизначеності для функції $f(x) = 2x^2 - 4x + 16/x$.

Задамо $x_0 = 1{,}5$; $\Delta_0 = 0{,}3$.

Обчислимо $f(x_0) = f(1{,}5) = 2 \cdot (1{,}5)^2 - 4 \cdot 1{,}5 + 16/1{,}5 = 9{,}17$.

Знайдемо $x_1 = x_0 + \Delta_0 = 1{,}5 + 0{,}3 = 1{,}8$.

Обчислимо $f(x_1) = f(1{,}8) = 2 \cdot (1{,}8)^2 - 4 \cdot 1{,}8 + 16/1{,}8 = 8{,}17$.

Оскільки $f(x_1) < f(x_0)$, то $\Delta = \Delta_0 = 0{,}5$.

Далі маємо $x_2 = x_1 + 2\Delta = 1{,}8 + 2 \cdot 0{,}3 = 2{,}4$.

Обчислимо $f(x_2) = f(2{,}4) = 2 \cdot (2{,}4)^2 - 4 \cdot 2{,}4 + 16/2{,}4 = 8{,}59$.

Оскільки $f(x_2) > f(x_1)$, то процес пошуку інтервалу невизначеності закінчений. Знайдений інтервал невизначеності дорівнює $[x_0, x_2] = [1{,}5; 2{,}4]$.

Результати пошуку початкового інтервалу невизначеності методом Свенна представлені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Результати пошуку початкового інтервалу невизначеності

№ ітерації, k	Δ_0	x_k	$f(x_k)$	$f(x_k) < f(x_{k-1})$?	$[a_0, b_0]$
0	0,3	1,5	9,17		
1	0,3	1,8	8,17	+	
2	0,3	2,4	8,59	-	$[1{,}5; 2{,}4]$

Контрольні питання і задачі

- Наведіть приклади неперервних і розривних функцій.
- Наведіть приклад дискретної функції.
- Дайте визначення монотонно зростаючої функції.
- Дайте визначення монотонно спадаючої функції.
- Дайте визначення унімодальної функції. Наведіть приклади.
- Що таке глобальний і локальний мінімум функції?
- Вкажіть необхідні і достатні умови існування локального мінімуму функції.
- Яка точка з області визначення функції називається стаціонарною?
- Що таке точка перегину? Наведіть приклад.
- Наведіть приклад оптимізаційної задачі.
- Який інтервал з області визначення функції називається інтервалом невизначеності?
- Яка точка називається пробною?
- Яка чисельна процедура називається ітераційною?
- Дайте класифікацію методів мінімізації функцій однієї змінної.
- Опишіть алгоритм Свенна.
- За допомогою алгоритму Свенна найдіть інтервал невизначеності для функції $f(x) = 2x^2 + 16/x$, $x_0 = 1$, $\Delta_0 = 2$.

2. МЕТОДИ БЕЗ ВИКОРИСТАННЯ ПОХІДНИХ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ

❖ ***Визначення***

❖ Методи мінімізації, які не використовують значення похідних цільової функції, називаються *прямими*.

Для відшукання точки мінімуму x^* унімодальної функції $f(x)$ використовують *пасивні* і *активні (послідовні) стратегії* пошуку. При пасивній стратегії послідовність пробних точок, в яких обчислюється значення цільової функції, визначена заздалегідь, і їх розташування на інтервалі невизначеності не залежить від самих значень функції в цих точках. При активній стратегії, яка є ітераційною процедурою, положення пробних точок на наступному інтервалі невизначеності залежить від значень функції в пробних точках на поточній ітерації. При цьому реалізується побудова послідовності інтервалів, які вкладені один в одного, кожний з яких містить точку мінімуму.

Порівняння стратегій і методів полягає в тому, що найкраща стратегія і найкращий метод дозволяють локалізувати точку мінімуму за меншу кількість обчислювань цільової функції.

2.1. Пасивний пошук

2.1.1. Метод пасивного пошуку. Оптимальна стратегія

Розглянемо варіанти пасивної стратегії. Метод рівномірного пошуку на заданому початковому інтервалі невизначеності $[a_0, b_0]$ довжини L_0 полягає в тому, що пробними точками $a_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < b_0$ він поділяється на $n+1$ інтервал довжини $L_0/(n+1)$. В цих точках обчислюються значення функції $f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2), ..., f_n = f(x_n)$ і знаходиться найменше значення функції в пробних точках $f_l = \min\limits_i f_i$, $i = \overline{1,n}$. Оскільки маємо, що $f_{l-1} > f_l$ і $f_{l+1} > f_l$, то гарантовано $x^* \in [x_{l-1}, x_{l+1}]$. Довжина інтервалу невизначеності $[x_{l-1}, x_{l+1}]$ дорівнює $L_n = 2L_0/(n+1)$. Таким чином після обчислень n значень цільової функції вдається зменшити інтервал невизначеності в $\dfrac{n+1}{2}$ разів. Визначимо, скільки пробних точок треба взяти, щоб зменшити початковий інтервал невизначеності в 100 разів. Маємо:

$$\frac{n+1}{2}=100, \qquad (2.1)$$

тобто $n=199$.

З формули (2.1) можна отримати, що для того, щоб у випадку рівномірного пошуку зменшити початковий інтервал невизначеності в 2 рази, необхідно взяти 3 пробні точки.

Якщо число пробних точок парне $n=2k$, то можна оптимізувати пасивну стратегію так, щоб максимально зменшити довжину інтервалу невизначеності L_n. Оскільки при $n=1$ не вдається зменшити початковий інтервал невизначеності, розглянемо випадок двох пробних точок $(n=2)$, який зображено на рис. 2.1.

Змінимо масштаб по осі x таким чином, щоб $a_0=0$, $b_0=1$. Обчислимо $f_1=f(x_1), f_2=f(x_2)$. Тоді у випадку, якщо $f_1>f_2$, отримаємо, що інтервал локалізації мінімуму буде $[x_1,b_0]$ і його довжина $L_2^{(1)}=1-x_1$. Інакше, якщо $f_1\le f_2$ інтервалом невизначеності буде $[0,x_2]$, довжина якого дорівнює $L_2^{(2)}=x_2$. Назвемо $L_2=\max(L_2^{(1)},\ L_2^{(2)})$ *гарантованим інтервалом невизначеності.* Оптимальна стратегія полягає в тому, щоб знайти таке розташування пробних точок на початковому інтервалі невизначеності, щоб досягти $\min L_2$. Таким чином, задача визначення оптимальної стратегії формулюється, як мінімаксна:

$$\min L_2=\min\,\max(1-x_1,\ x_2). \qquad (2.2)$$

Позначимо відстань між пробними точками як ε. В умовах експерименту для того, щоб пробні точки можна було розрізняти, мінімально можлива відстань між ними не повинна бути меншою, ніж задане $\varepsilon_0>0$, тобто граничне $\varepsilon\to\varepsilon_0$.

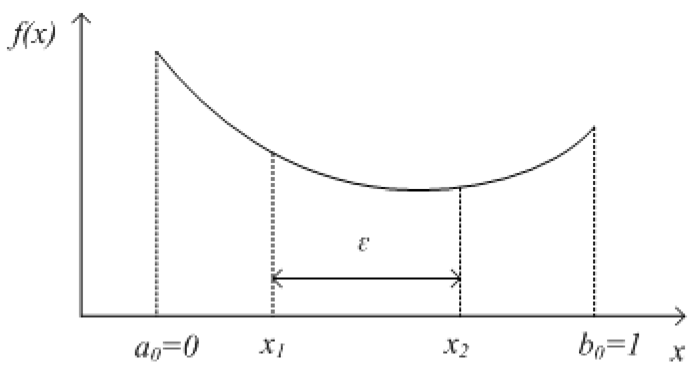


Рисунок 2.1 – Пасивна стратегія при *n* = 2

В цих умовах перепишемо (2.2) у вигляді:

$$\min L_2 = \min \max(1 - x_1,\ x_1 + \varepsilon). \tag{2.3}$$

Мінімаксна задача (2.3) в умовах, коли сума двох чисел $1 - x_1$ і $x_1 + \varepsilon$ є постійною, незалежною від x_1, має очевидний розв'язок

$$1 - x_1 = x_1 + \varepsilon, \tag{2.4}$$

тобто

$$x_1 = (1 - \varepsilon)/2. \tag{2.5}$$

Оскільки $b_0 - a_0 = 1$, то з формули (2.5) маємо, що

$$x_1 = \frac{b_0 - a_0}{2} - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.6}$$

При цьому $\min L_2 = x_1 + \varepsilon$ досягається при $\varepsilon \to \varepsilon_0$, отже

$$\min L_2 = L_0 + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.7}$$

Таким чином, оптимальна стратегія полягає в тому, що пробні точки x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ треба вибирати симетрично від кінців початкового інтервалу невизначеності на мінімально можливій відстані $\frac{\varepsilon_0}{2}$ від середини інтервалу.

Цей результат можна поширити на загальний випадок $n = 2k$: щоб отримати $\min L_{2k}$, треба початковий інтервал розбити на $k+1$ інтервали рівної довжини $\frac{L_0}{k+1}$ і вибрати пробні точки по обидві сторони від точок розбиття на відстані $\frac{\varepsilon_0}{2}$ (рис. 2.2). Очевидно, що тоді отримаємо:

$$L_{2k} = \frac{L_0}{k+1} + \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{2.8}$$

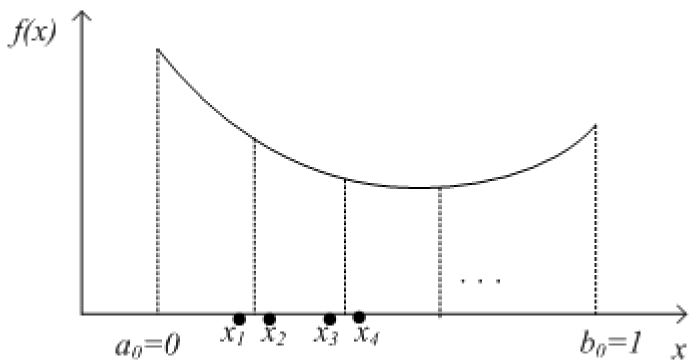


Рисунок 2.2 – Оптимальна пасивна стратегія при $n = 2k$

В умовах, коли ε_0 вибране достатньо малим, маємо, що для зменшення початкового інтервалу невизначеності в 100 разів, тобто $\frac{L_0}{L_{2k}} = 100$, треба взяти пробних точок у кількості:

$$n = \frac{2(99L_0 + 50\varepsilon_0)}{L_0 - 50\varepsilon_0}. \qquad (2.9)$$

При $\varepsilon_0 \to 0$ результат формули (2.9) практично співпадає з випадком рівномірного пошуку, бо в цьому випадку $n = 198$.

❖ **Визначення**

❖ Описану оптимальну стратегію зменшення інтервалу невизначеності називають *мінімаксною* стратегією пошуку.

З аналізу мінімаксної стратегії можна зробити наступний висновок: якщо пробних точок дві, їх слід розміщувати симетрично, *на однакових відстанях* від кінців інтервалу.

Контрольні питання і задачі

- В чому полягає пасивна стратегія пошуку мінімуму цільової функції?
- Яка стратегія пошуку називається активною?
- Опишіть метод рівномірного пошуку.
- Який інтервал називається гарантованим інтервалом невизначеності?
- В чому полягає оптимальна стратегія пасивного пошуку?
- Покажіть, як будуть розташовані 6 пробних точок при оптимальній стратегії?
- Підрахуйте, скільки пробних точок треба взяти при оптимальній стратегії пасивному пошуку, щоб зменшити початковий інтервал невизначеності в 200 разів?

2.2. Методи виключення інтервалів

В розділі 1.2 розглядалося питання аналізу «в статиці» при дослідженні оптимізаційних задач. Були сформульовані необхідні і достатні умови існування мінімуму неперервної диференційованої цільової функції, а також обговорені деякі практичні питання, пов’язані із ідентифікацією точки мінімуму недиференційованих функцій. Далі перейдемо до розглядання питання аналізу «в динаміці». Для цього розглянемо низку одномірних методів пошуку, орієнтованих на визначення точки мінімуму усередині заданого інтервалу. Такі методи використовують введене поняття унімодальної функції. Це дозволяє на основі порівняння значень функції $f(x)$ в двох різних точках заданого інтервалу (пробних точках) визначити, в якому з підінтервалів, що задані даними точками і кінцями інтервалу, оптимум відсутній. У разі застосування активної стратегії пошуку, такі методи утворюють групу методів виключення інтервалів.

2.2.1. Правило виключення інтервалів

Введене раніше поняття унімодальної функції є досить важливим в теорії оптимізації. Фактично всі методи одномірного пошуку основані на припущенні, що цільова функція в допустимій області принаймі є унімодальною. Ця властивість дозволяє на основі порівняння двох значень функції в двох пробних точках зробити висновок, де не може знаходитись точка мінімуму, тобто виключити відповідну частину інтервалу.

☺ ***Теорема 2.1.*** Розглянемо унімодальну на інтервалі $[a_{0,}b_0]$ функцію $f(x)$, мінімум якої досягається в точці $x^* \in [a_0, b_0]$. Візьмемо дві пробні точки x_1 і x_2 такі, що $a_0 < x_1 < x_2 < b_0$. Порівнюючи результати обчислень функції $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$, можна зробити наступні висновки:

1. якщо $f_1 > f_2$, то $x^* \notin [a_0, x_1]$ (рис. 2.3, *а*));
2. якщо $f_1 < f_2$, то $x^* \notin [x_2, b_0]$ (рис. 2.3, *б*));
3. якщо $f_1 = f_2$, то $x^* \notin [a_0, x_1]$ і $x^* \notin [x_2, b_0]$.

Доказ теореми оснований на властивостях монотонності функції $f(x)$ і пропонується читачеві для самостійного розгляду.

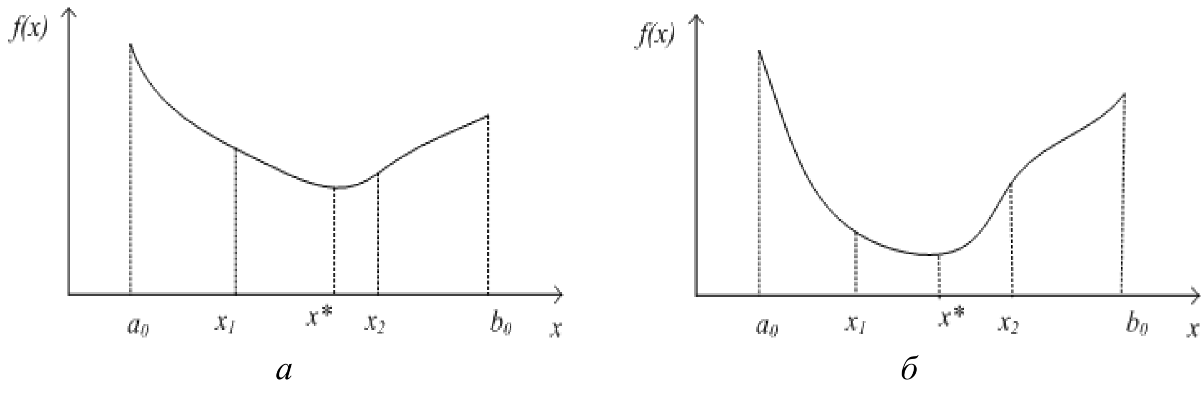


Рисунок 2.3 – Ілюстрації до теореми 2.1

Теорему 2.1 інакше називають *правилом виключення інтервалів*. Згідно до висновків цієї теореми, ітераційну процедуру пошуку мінімуму можна реалізувати шляхом послідовного виключення частин початкового інтервалу. Пошук завершується, коли довжина зменшеного інтервалу невизначеності не перебільшує задану точність σ. Таким чином реалізується активна (послідовна) стратегія пошуку точки мінімуму, при цьому пробні точки на кожній ітерації вибираються згідно оптимальної пасивної стратегії при $n = 2$.

Зазначимо, що методи виключення інтервалів використовують виключно значення цільової функції в пробних точках, при цьому вимоги до диференційованості функції на інтервалі пошуку відсутні.

Щоб реалізувати процедуру послідовного пошуку методами виключення інтервалів, необхідно мати початковий інтервал невизначеності $[a_0, b_0]$.

Таким чином, можна сформулювати алгоритм виключення інтервалів у наступній послідовності кроків.

1. Задати: початковий інтервал невизначеності $[a_n, b_n]$ $(n = 0)$, положення експериментальних точок $x_1 < x_2$, точність σ пошуку точки мінімуму x^*.

2. Обчислити значення цільової функції в пробних точках:

$f_1 = f(x_1)$ і $f_2 = f(x_2)$.

3. Якщо $f_1 < f_2$, то виключити інтервал (x_2, b_n), покласти $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = x_2$, якщо навпаки $f_1 > f_2$, то слід виключити інтервал (a_n, x_1), покласти $a_{n+1} = x_1$, $b_{n+1} = b_n$.

4. Обчислити довжину нового інтервалу: $L_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1}$.

5. Перевірка умови закінчення процесу пошуку:

якщо $L_{n+1} \le \sigma$, то процес пошуку мінімуму закінчено, і точка мінімуму знайдеться як середня точка останнього інтервалу невизначеності: $x^* = (a_{n+1} + b_{n+1})/2$;

якщо $L_{n+1} > \sigma$, то покласти $n = n + 1$ і йти до кроку *2*.

Аналізуючи наведений алгоритм виключення інтервалів, можна зробити наступні висновки:

а) очевидно, що достатньо великим числом ітерацій завжди можна забезпечити скільки завгодно велику точність визначення x^*;

б) кількість потрібних ітерацій не залежить від вигляду цільової функції, а залежить тільки від довжини початкового інтервалу невизначеності L_0 і точності σ;

в) всі методи виключення інтервалів відрізняються один від одного тільки способом завдання пробних точок x_1 і x_2.

2.2.2. Метод дихотомії

Метод дихотомії дозволяє виключити на кожній ітерації майже половину інтервалу невизначеності. Для цього в методі дихотомії на кожній k-й ітерації беруть дві пробні точки: $x_1 = (a_k + b_k)/2 - \varepsilon/2$ і $x_2 = (a_k + b_k)/2 + \varepsilon/2$, відстань між якими дорівнює ε.

Нижче приводиться опис основних кроків пошукової процедури, що орієнтована на знаходження мінімуму функції $f(x)$ на початковому інтервалі невизначеності $[a_0, b_0]$.

1. Задати: початковий інтервал невизначеності $[a_k, b_k]$ $(k = 0)$, точність σ та ε – мале позитивне число, значно менше ніж σ.

2. Покласти $x_1 = \dfrac{a_k + b_k}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2}$, $x_2 = x_1 + \varepsilon$. Обчислити значення функції в цих точках: $f_1 = f\left(x_1\right)$, $f_2 = f\left(x_2\right)$.

3. Порівняти f_1 та f_2:

а) якщо $f_1 < f_2$, то виключити інтервал (x_2, b_k), покласти $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_2$;

б) якщо $f_1 > f_2$, то виключити інтервал (a_k, x_1), покласти $a_{k+1} = x_1$, $b_{k+1} = b_k$;

в) якщо $f_1 = f_2$, то покласти $a_{k+1} = x_1$, $b_{k+1} = x_2$.

4. Обчислити $L_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1}$. Якщо виконується умова $L_{k+1} \le \sigma$, то $x^* = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$ і пошук завершений. Інакше покласти $k = k+1$ і перейти до кроку *2*.

Оцінимо ефективність метода дихотомії. На першій ітерації виключається майже половина початкового інтервалу невизначеності, а саме $L_0/2 - \varepsilon/2$, тобто $L_1 = L_0/2 + \varepsilon/2$. Далі маємо: $L_2 = L_1/2 + \varepsilon/2 = L_0/2^2 + \varepsilon\left(1/2 + 1/2^2\right)$, $L_3 = L_0/2^3 + \varepsilon\left(1/2 + 1/2^2 + 1/2^3\right)$, …,

$L_n = L_0/2^n + \varepsilon\left(1/2 + 1/2^2 + ... + 1/2^n\right) = L_0/2^n + \varepsilon\left(1 - 1/2^n\right)$. При $\varepsilon \to 0$ отримаємо, що $L_n \approx L_0/2^n$. Таким чином, маємо наближену формулу:

$$n = \log_2\left(L_0/L_n\right). \qquad (2.10)$$

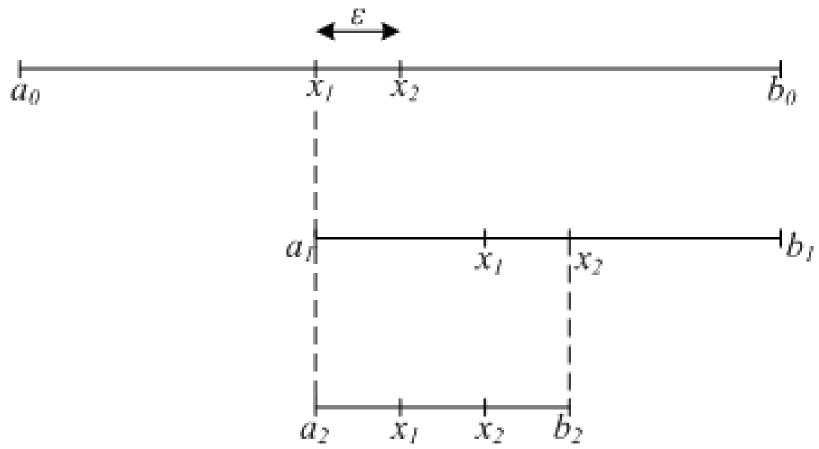


Рисунок 2.4 – Послідовність інтервалів невизначеності в методі дихотомії

Обчислимо, скільки ітерацій потрібно зробити методом дихотомії, щоб зменшити початковий інтервал невизначеності в 100 разів. З урахуванням того, що число ітерацій завжди ціле, з формули (2.10) отримаємо: $\log_2 100 = 6,64$, тобто $n = 7$. Оскільки на кожній ітерації обчислюється 2 значення цільової функції, то цільову функцію треба обчислити 14 разів. Це набагато менше, ніж у випадку розглянутого в п. 2.1.1 пасивного пошуку.

➢ **Зауваження**

1. На кожній ітерації алгоритма виключається майже половина інтервалу невизначеності.
2. На кожній ітерації метод потребує 2 обчислення значень функції.
3. Якщо проведено n обчислень значень функції, то довжина отриманого інтервалу невизначеності складає майже $\left(1/2\right)^{n/2}$ величини початкового інтервалу.

o *Приклад застосування метода дихотомії.*

Розглянемо цільову функцію $f(x) = 2x^2 - 4x + 16/x$, для якої методом Свенна знайдений інтервал невизначеності $[a_0, b_0] = [1,5; 2,4]$. Задамо точність $\sigma = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$.

1 ітерація. Визначимо пробні точки:

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1,5 + 2,4}{2} - \frac{0,01}{2} = 1,945;$$

$$x_2 = x_1 + \varepsilon = 1,945 + 0,01 = 1,955.$$

Обчислимо

$$f_1 = f(x_1) = f(1,945) = 8,012; \quad f_2 = f(x_2) = f(1,955) = 8,008.$$

Оскільки $f_1 > f_2$, покладемо $a_1 = x_1 = 1,945$; $b_1 = b_0 = 2,4$.

Обчислимо $L_1 = b_1 - a_1 = 2,4 - 1,945 = 0,455$. Оскільки $L_1 > \sigma$, пошук продовжуємо.

2 ітерація. Визначимо пробні точки:

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1,945 + 2,4}{2} - \frac{0,01}{2} = 2,168;$$

$$x_2 = x_1 + \varepsilon = 2,168 + 0,01 = 2,178.$$

Обчислимо

$$f_1 = f(x_1) = f(2,168) = 8,109; \quad f_2 = f(x_2) = f(2,178) = 8,122.$$

Оскільки $f_1 < f_2$, покладемо $a_2 = a_1 = 1,945$; $b_2 = x_2 = 2,178$.

Обчислимо $L_2 = b_2 - a_2 = 2,178 - 1,945 = 0,233$. Оскільки $L_2 > \sigma$, пошук продовжуємо.

3 ітерація. Визначимо пробні точки:

$$x_1 = \frac{a_2 + b_2}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1,945 + 2,178}{2} - \frac{0,01}{2} = 2,057;$$

$$x_2 = x_1 + \varepsilon = 2,057 + 0,01 = 2,067.$$

Обчислимо

$$f_1 = f(x_1) = f(2,057) = 8,013; \quad f_2 = f(x_2) = f(2,067) = 8,018.$$

Оскільки $f_1 < f_2$, покладемо $a_3 = a_2 = 1,945$; $b_3 = x_2 = 2,067$.

Обчислимо $L_3 = b_3 - a_3 = 2,067 - 1,945 = 0,122$. Оскільки $L_3 > \sigma$, пошук продовжуємо.

4 ітерація. Визначимо пробні точки:

$$x_1 = \frac{a_3 + b_3}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1,945 + 2,067}{2} - \frac{0,01}{2} = 2,001;$$

$$x_2 = x_1 + \varepsilon = 2,001 + 0,01 = 2,011.$$

Обчислимо

$$f_1 = f(x_1) = f(2,001) = 8,0000; \quad f_2 = f(x_2) = f(2,011) = 8,0005.$$

Оскільки $f_1 < f_2$, покладемо $a_4 = a_3 = 1,945$; $b_4 = x_2 = 2,011$.

Обчислимо $L_4 = b_4 - a_4 = 2,011 - 1,945 = 0,066$.

Оскільки $L_4 < \sigma$, пошук закінчено:

$$x^* = \frac{a_4 + b_4}{2} = \frac{1,945 + 2,011}{2} = 1,978.$$

Отримані результати представлені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Результати пошуку методом дихотомії

№ ітерації, k	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$[a_k, b_k]$	L_k
0					[1,5; 2,4]	0,9
1	1,945	1,955	8,012	8,008	[1,945; 2,4]	0,455
2	2,168	2,178	8,109	8,122	[1,945; 2,178]	0,233
3	2,057	2,067	8,013	8,018	[1,945; 2,067]	0,122
4	2,001	2,011	8,0000	8,0005	[1,945; 2,011]	0,066

2.2.3.Метод половинного ділення

Метод половинного ділення дозволяє виключити *в точності* половину інтервалу невизначеності на кожній ітерації. Іноді цей метод називають *трьохточковим методом пошуку на рівних інтервалах,* оскільки його реалізація основана на порівнянні значень цільової функції в трьох точках, що розташовані рівномірно на інтервалі пошуку. Нижче наводиться опис основних кроків пошукової процедури, що орієнтована на відшукання точки мінімуму цільової функції $f(x)$ на інтервалі $[a_0, b_0]$.

1. Задати: початковий інтервал невизначеності $[a_k, b_k]$ $(k = 0)$, точність σ.

2. Покласти $x_m = (a_k + b_k)/2$. Знайти $L_k = b_k - a_k$. Обчислити $f_m = f(x_m)$.

3. Покласти $x_1 = a_k + L_k/4$, $x_2 = b_k - L_k/4$. Отримати значення $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$.

4. Порівняти f_1 і f_m:

а) якщо $f_1 < f_m$, виключити інтервал (x_m, b_k). Покласти $b_{k+1} = x_m$, $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = b_k$, $x_m = x_1$, $f_m = f_1$. Перейти до кроку *6;*

б) якщо $f_1 \geq f_m$, перейти до кроку *5*.

5. Порівняти f_2 і f_m:

а) якщо $f_2 < f_m$, виключити інтервал (a_k, x_m). Покласти $a_{k+1} = x_m$, $x_m = x_2$, $f_m = f_2$. Перейти до кроку *6;*

б) якщо $f_2 \ge f_m$, виключити інтервали (a_k, x_1) і (x_2, b_k). Покласти $a_{k+1} = x_1$, $b_{k+1} = x_2$. Точка x_m залишається середньою точкою інтервалу $[a_{k+1}, b_{k+1}]$, тобто $f_m = f_m$. Перейти до кроку *6;*

6. Обчислити величину $L_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1}$. Якщо $L_{k+1} \le \sigma$, то $x^* = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$ і пошук завершений, інакше покласти $k = k+1$ і перейти до кроку *3*.

Оцінимо ефективність метода половинного ділення. Оскільки на кожній ітерації виключається рівно половина поточного інтервалу невизначеності, то для довжини інтервалу $[a_n, b_n]$ маємо формулу $L_n = L_0 / 2^n$, тобто як і в методі дихотомії $n = \log_2 \left(L_0 / L_n \right)$. Таким чином, для зменшення початкового інтервалу невизначеності в 100 разів треба виконати 7 ітерацій методом половинного ділення, що відповідає 15 обчислюванням цільової функції (на першій ітерації обчислюється три значення функції, на подальших ітераціях – два значення, бо одне береться з попередньої ітерації).

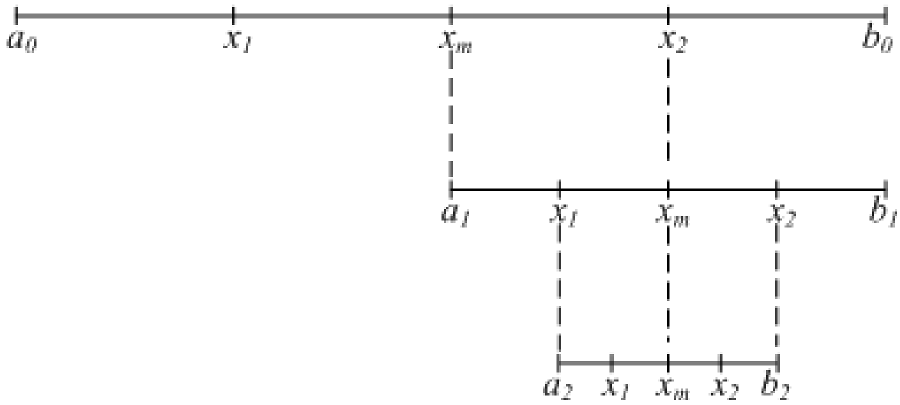


Рисунок 2.5 – Послідовність інтервалів невизначеності
в методі половинного ділення

➢ **Зауваження**

1. На кожній ітерації алгоритма виключається рівно половина інтервалу невизначеності.

2. Середня точка x_m послідовних інтервалів невизначеності завжди співпадає з однією з пробних точок x_1, x_2 або x_m, які знайдені на попередній ітерації. Отже на кожній ітерації (крім першої) потрібно обчислити два значення цільової функції.

3. Якщо проведено n обчислень значень функції, то довжина отриманого інтервалу невизначеності складає рівно $\left(1/2\right)^{n/2}$ величини початкового інтервалу.

4. В літературі показано, що серед усіх методів пошуку на рівних інтервалах саме трьохточковий пошук, або метод половинного ділення, є найбільш ефективним.

o *Приклад застосування метода половинного ділення.*

Розглянемо цільову функцію $f(x) = 2x^2 - 4x + 16/x$, для якої методом Свенна знайдений інтервал невизначеності $[a_0, b_0] = [1,5; 2,4]$. Задамо точність $\sigma = 0,1$.

1 ітерація. Знайдемо $L_0 = b_0 - a_0 = 2,4 - 1,5 = 0,9$.

Визначимо пробні точки:

$$x_m = (a_0 + b_0)/2 = (1,5 + 2,4)/2 = 1,95;$$

$$x_1 = a_0 + L_0/4 = 1,5 + 0,9/4 = 1,725, \; x_2 = b_0 - L_0/4 = 2,4 - 0,9/4 = 2,175.$$

Обчислимо $f_m = f(x_m) = f(1,95) = 8,010$.

Знайдемо $f_1 = f(x_1) = f(1,725) = 8,327$; $f_2 = f(x_2) = f(2,175) = 8,118$.

Оскільки одночасно $f_m < f_1$ і $f_m < f_2$, то покладемо: $a_1 = x_1 = 1,725$, $x_m = x_m = 1,95$, $(f_m = 8,010)$, $b_1 = x_2 = 2,175$.

Знайдемо $L_1 = b_1 - a_1 = 2,175 - 1,725 = 0,45$. Оскільки $L_1 > \sigma$, пошук продовжуємо.

2 ітерація. Визначимо пробні точки (точка x_m береться з попередньої ітерації: $x_m = 1,95$; $f_m = 8,010$):

$$x_1 = a_1 + L_1/4 = 1,725 + 0,45/4 = 1,8375;$$

$$x_2 = b_1 - L_1/4 = 2,175 - 0,45/4 = 2,0625.$$

Обчислимо $f_1 = f(x_1) = f(1,8375) = 8,110$; $f_2 = f(x_2) = f(2,063) = 8,016$.

Оскільки одночасно $f_m < f_1$ і $f_m < f_2$, то треба покласти: $a_2 = x_1 = 1,8375$, $x_m = x_m = 1,95$, $(f_m = 8,010)$, $b_2 = x_2 = 2,0625$.

Знайдемо $L_2 = b_2 - a_2 = 2,0625 - 1,8375 = 0,225$. Оскільки $L_2 > \sigma$, пошук продовжуємо.

3 ітерація. Визначимо пробні точки (точка x_m береться з попередньої ітерації: $x_m = 1,95$; $f_m = 8,010$):

$$x_1 = a_2 + L_2/4 = 1,8375 + 0,225/4 = 1,8938;$$

$$x_2 = b_2 - L_2/4 = 2,0625 - 0,225/4 = 2,0063.$$

Обчислимо

$f_1 = f(x_1) = f(1{,}8938) = 8{,}046$; $f_2 = f(x_2) = f(2{,}0063) = 8{,}000$.

Оскільки має місце $f_2 < f_m < f_1$, то треба покласти: $a_3 = x_m = 1{,}95$, $x_m = x_2 = 2{,}0063$, $(f_m = 8{,}000)$, $b_3 = b_2 = 2{,}0625$.

Знайдемо $L_3 = b_3 - a_3 = 2{,}0625 - 1{,}95 = 0{,}1125$. Оскільки $L_3 > \sigma$, пошук продовжуємо.

4 ітерація. Визначимо пробні точки (точка $x_m = x_2$ береться з попередньої ітерації: $x_m = 2{,}0063$; $f_m = 8{,}000$):

$x_1 = a_3 + L_3/4 = 1{,}95 + 0{,}1125/4 = 1{,}97813$;

$x_2 = b_3 - L_3/4 = 2{,}0625 - 0{,}1125/4 = 2{,}03438$.

Обчислимо

$f_1 = f(x_1) = f(1{,}97813) = 8{,}002$; $f_2 = f(x_2) = f(2{,}03438) = 8{,}005$.

Оскільки одночасно має місце $f_m < f_1$ і $f_m < f_2$, то треба покласти: $a_4 = x_1 = 1{,}97813$, $x_m = x_2 = 2{,}007$, $(f_m = 8{,}000)$, $b_4 = x_2 = 2{,}03438$.

Знайдемо $L_4 = b_4 - a_4 = 2{,}03438 - 1{,}97813 = 0{,}05625$.

Оскільки $L_4 < \sigma$, пошук закінчено:

$$x^* = \frac{a_4 + b_4}{2} = \frac{1{,}97813 + 2{,}03438}{2} = 2{,}0063.$$

Отримані результати представлені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2 – Результати пошуку методом половинного ділення

№ ітерації, k	x_1	x_m	x_2	$f(x_1)$	$f(x_m)$	$f(x_2)$	$[a_k, b_k]$	L_k
0							$[1{,}5; 2{,}4]$	0,9
1	1,725	1,95	2,175	8,327	8,010	8,118	$[1{,}725; 2{,}175]$	0,45
2	1,8375	1,95	2,0625	8,110	8,010	8,016	$[1{,}8375; 2{,}0625]$	0,225
3	1,8938	1,95	2,0063	8,046	8,010	8,000	$[1{,}95; 2{,}0625]$	0,1125
4	1,97813	2,007	2,03438	8,002	8,000	8,005	$[1{,}97813; 2{,}03438]$	0,05625

2.2.4. Методи з однократним обчисленням цільової функції

В процедурах методів оптимізації суттєві складності виникають у зв'язку саме з обчисленнями значень цільової функції, бо ці значення отримують в результаті того чи іншого експерименту, або якщо $f(x)$ задається в аналітичному вигляді достатньо складною для обчислень формулою. В цих умовах бажано зменшити кількість обчислень цільової функції на кожному кроці алгоритма оптимізації. Очевидно, що мінімальна кількість обчислень функції на кроці дорівнює одному, а друге значення, з яким порівнюється це значення, береться з попередньої ітерації. Тобто на кожній ітерації, починаючи з другої, вибирається тільки одна пробна точка.

Методи, які потребують лише одне обчислення цільової функції на кроці – це метод золотого перетину і метод Фібоначчі. Викладемо більш докладніше основи цих методів.

Розглянемо три послідовні інтервали невизначеності разом із відповідними експериментальними точками, які зображені на рис. 2.6. Довжини цих інтервалів відповідно L_0, L_1 і L_2. Згідно до оптимальної стратегії пробні точки x_1 і x_2 розташовуються симетрично відносно кінців інтервалів, тобто $b_0 - x_2 = x_1 - a_0$, $b_1 - x_2 = x_1 - a_1$, $b_2 - x_2 = x_1 - a_2$. Припустимо, що після першої ітерації правий кінець інтервалу $[a_0, b_0]$ залишається на місці $(b_1 = b_0)$, інтервал $[a_0, x_1]$ виключається, точка x_2 переходить в точку x_1, а нова точка x_2 переобчислюється: $x_2 = a_1 + b_1 - x_1$. Після другої ітерації лівий кінець інтервалу $[a_1, b_1]$ залишається на місці $(a_2 = a_1)$, інтервал $[b_1, x_2]$ виключається, точка $x1$ переходить в точку x_2, а нова точка x_1 переобчислюється: $x_1 = a_2 + b_2 - x_2$. Зауважимо, що рис. 2.6 охоплює всі можливі варіанти виключення інтервалів. Безпосередньо з рис. 2.6 видно, що

$$L_0 = L_1 + L_2. \qquad (2.12)$$

Рисунок 2.6 – Послідовність інтервалів невизначеності в методах з однократним обчисленням функції

Очевидно, що результат (2.12) можна поширити на будь-яку послідовність трьох інтервалів невизначеності:

$$L_n = L_{n+1} + L_{n+2}\,. \qquad (2.13)$$

Формула (2.13) є визначальною для методів з однократним обчисленням цільової функції.

Метод золотого перетину.

Позначимо $x_2 - a_0 = \nu L_0$. Нехай при цьому точка x_2 розбиває інтервал $[a_0, b_0]$ на два відрізка у відповідності до золотого перетину. Це означає, що:

$$(b_0 - a_0)/(x_2 - a_0) = (x_2 - a_0)/(b_0 - x_2)\,. \qquad (2.14)$$

Оскільки для інтервалу $[a_1, b_1]$ точка x_2 є також точкою золотого перерізу, то маємо: $x_2 - a_1 = \nu L_1$. Таким чином довжина інтервалу $[a_2, b_2]$ обчислюється як

$$b_2 - a_2 = \nu L_1 = \nu^2 L_0, \qquad (2.15)$$

тобто становить ν^2 частку від L_0.

Із співвідношень для довжин інтервалів L_0, L_1 і L_2 (2.12) отримаємо квадратне рівняння відносно параметра розбиття ν у вигляді:

$$\nu^2 + \nu - 1 = 0,$$

яке має один невід’ємний корінь

$$\nu = (\sqrt{5} - 1)/2\,. \qquad (2.16)$$

З формули (2.16) можна отримати наближене значення параметра розбиття: $\nu = 0{,}618$. Нижче наводиться опис основних кроків пошукової процедури метода золотого перетину, що орієнтована на відшукання точки мінімуму цільової функції $f(x)$ на інтервалі $[a_0, b_0]$.

1. Задати: початковий інтервал невизначеності $[a_k, b_k]$ $(k = 0)$, точність σ, параметр розбиття ν.

2. Покласти $x_2 = a_k + \nu L_0$, $x_1 = a_k + b_k - x_2$. Отримати значення $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$.

3. Порівняти f_1 і f_2:

а) якщо $f_1 < f_2$, виключити інтервал (x_2, b_k). Покласти $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_2$, $x_2 = x_1$, $f_2 = f_1$. Обчислити $x_1 = a_k + b_k - x_2$, $f_1 = f(x_1)$. Перейти до кроку *4;*

б) якщо $f_1 \ge f_2$, виключити інтервал (a_k, x_1). Покласти $a_{k+1} = x_1$, $b_{k+1} = b_k$, $x_1 = x_2$, $f_1 = f_2$. Обчислити $x_2 = a_k + b_k - x_1$, $f_2 = f(x_2)$. Перейти до кроку *4*.

4. Обчислити величину $L_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1}$. Якщо $L_{k+1} \le \sigma$, то пошук завершений, $x^* = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$, інакше покласти $k = k+1$ і перейти до кроку *3*.

Оцінимо *ефективність методу золотого перетину*. Оскільки на кожній ітерації виключається рівно $(1-\nu)$-частка поточного інтервалу невизначеності, отже довжина інтервалу $[a_n, b_n]$ складає $L_n = \nu^n L_0$. Кількість виконаних ітерацій при цьому оцінюється формулою

$$n = \log_\nu \left(L_n / L_0 \right), \tag{2.17}$$

При цьому, якщо результат формули (2.17) не є цілим числом, за n приймається найменше ціле число, яке більше ніж $\log_\nu \left(L_n / L_0 \right)$.

Обчислимо, скільки потрібно виконати ітерацій методом золотого перетину для зменшення початкового інтервалу невизначеності в 100 разів. З формули (2.17) маємо: $\log_\nu(1/100) = -\log_\nu 100 = -2/\lg\nu = 9{,}57$. Таким чином треба виконати 10 ітерацій. Оскільки на першій ітерації обчислюється два значення цільової функції то загальна кількість обчислень функції становить 11 обчислень. Очевидно, це менше, ніж потрібно для методу дихотомії.

➢ **Зауваження**

➢ 1. На кожній ітерації алгоритма виключається $(1-\nu)$-частка поточного інтервалу невизначеності.

2. На кожній ітерації (крім першої) потрібно обчислити одно значення цільової функції.

3. Якщо проведено $n+1$ обчислення значень функції, то довжина отриманого інтервалу невизначеності складає рівно ν^n величини початкового інтервалу.

o *Приклад застосування метода золотого перетину.*

Розглянемо цільову функцію $f(x) = 2x^2 - 4x + 16/x$, для якої методом Свенна знайдений інтервал невизначеності $[a_0, b_0] = [1{,}5; 2{,}4]$. Задамо точність $\sigma = 0{,}1$ і параметр розбиття $\nu = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0{,}618034$.

1 ітерація. Обчислимо $L_0 = 2,4 - 1,5 = 0,9$,

$x_2 = 1,5 + 0,618034 \cdot 0,9 = 2,056$, $x_1 = 1,5 + 2,4 - 2,056 = 1,844$.

Визначимо $f_1 = f(1,844) = 8,101$; $f_2 = f(2,056) = 8,012$.

Оскільки $f_2 < f_1$, то позначимо $a_1 = x_1 = 1,844$; $b_1 = b_0 = 2,4$.

Обчислимо $L_1 = b_1 - a_1 = 0,556$. Оскільки $L_1 > \sigma$, пошук продовжуємо.

2 ітерація. Перепишемо $x_1 = x_2 = 2,056$; $f_1 = f_2 = 8,012$. Обчислимо $x_2 = a_1 + b_1 - x_1 = 1,844 + 2,4 - 2,056 = 2,188$; $f_2 = f(2,188) = 8,135$.

Оскільки $f_1 < f_2$, то позначимо $a_2 = a_1 = 1,844$; $b_2 = x_2 = 2,188$.

Обчислимо $L_2 = b_2 - a_2 = 0,344$. Оскільки $L_2 > \sigma$, пошук продовжуємо.

3 ітерація. Перепишемо $x_2 = x_1 = 2,056$; $f_2 = f_1 = 8,012$. Обчислимо $x_1 = a_2 + b_2 - x_2 = 1,844 + 2,188 - 2,056 = 1,976$; $f_1 = f(1,976) = 8,002$.

Оскільки $f_1 < f_2$, то позначимо $a_3 = a_2 = 1,844$; $b_3 = x_2 = 2,056$.

Обчислимо $L_3 = b_3 - a_3 = 0,212$. Оскільки $L_3 > \sigma$, пошук продовжуємо.

4 ітерація. Перепишемо $x_2 = x_1 = 1,976$; $f_2 = f_1 = 8,002$. Обчислимо $x_1 = a_3 + b_3 - x_2 = 1,844 + 2,056 - 1,976 = 1,924$; $f_1 = f(1,924) = 8,024$.

Оскільки $f_1 > f_2$, то позначимо $a_4 = x_1 = 1,924$; $b_4 = b_3 = 2,056$.

Обчислимо $L_4 = b_4 - a_4 = 0,132$. Оскільки $L_4 > \sigma$, пошук продовжуємо.

5 ітерація. Перепишемо $x_1 = x_2 = 1,976$; $f_1 = f2_1 = 8,002$. Обчислимо $x_2 = a_4 + b_4 - x_1 = 1,924 + 2,056 - 1,976 = 2,004$; $f_2 = f(2,004) = 8,000$.

Оскільки $f_1 > f_2$, то позначимо $a_4 = x_1 = 1,924$; $b_4 = b_3 = 2,056$.

Обчислимо $L_5 = b_5 - a_5 = 0,08$.

Оскільки $L_5 < \sigma$, пошук закінчено: $x^* = \dfrac{a_5 + b_5}{2} = 1,992$.

Отримані результати представлені в табл. 2.3.

Таблиця 2.3 – Результати пошуку методом золотого перетину

№ ітерації, k	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$[a_k, b_k]$	L_k
0					$[1,5; 2,4]$	0,9
1	1,844	2,056	8,101	8,012	$[1,844; 2,4]$	0,556
2	2,056	2,188	8,012	8,135	$[1,844; 2,188]$	0,344
3	1,976	2,056	8,002	8,012	$[1,844; 2,056]$	0,212
4	1,924	1,976	8,024	8,002	$[1,924; 2,056]$	0,132
5	1,976	2,004	8,002	8,000	$[1,976; 2,056]$	0,08

Метод Фібоначчі.

Метод Фібоначчі є оптимальним методом пошуку серед методів виключення інтервалів у сенсі мінімальної довжини інтервалу $[a_n, b_n]$, яка містить точку x^*.

Припустимо, що довжина інтервалу невизначеності $[a_n, b_n]$ дорівнює σ, тобто точність пошуку мінімуму досягнута $(L_n = \sigma)$, і на цьому інтервалі значення цільової функції не обчислюються. Припустимо також, що точки x_1 і x_2 на інтервалі $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ утворюють ε-пару: $x_2 = x_1 + \varepsilon$ (рис. 2.7). Тоді для довжини інтервалу $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ маємо:

$$L_{n-1} = 2\sigma - \varepsilon. \qquad (2.18)$$

В умовах, коли $\varepsilon \to \varepsilon_0$, а ε_0 є величиною більш високого порядку малості ніж σ, з (2.18) виходить наближена формула:

$$L_{n-1} = 2\sigma. \qquad (2.19)$$

Використовуючи основну залежність (2.13), отримаємо

$L_{n-2} = L_{n-1} + L_n = 3\sigma$, $L_{n-3} = L_{n-2} + L_{n-1} = (3+2)\sigma = 5\sigma$,

$L_{n-4} = L_{n-3} + L_{n-2} = (5+3)\sigma = 8\sigma$ і т. д.

Очевидно, що довжини послідовних інтервалів невизначеності можна представити у вигляді:

$$L_n = F_1\sigma,\ L_{n-1} = F_2\sigma,\ L_{n-3} = F_4\sigma,\ \ldots,\ L_0 = F_{n+1}\sigma, \qquad (2.20)$$

де F_1, $F_2, \ldots$, F_{n+1} – числа Фібоначчі, які задовольняють співвідношенню

$$F_m = F_{m-1} + F_{m-2},\ m = 2,3,\ldots \qquad (2.21)$$

і умові $F_0 = F_1 = 1$.

Наведемо кілька перших чисел Фібоначчі:

$F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_5 = 8$, $F_6 = 13$, $F_7 = 21$,

$F_8 = 34$, $F_9 = 55$, $F_{10} = 89$, $F_{11} = 144$ і т. д.

Рисунок 2.7 – Послідовність інтервалів невизначеності в методі Фібоначчі

Формула (2.20) дозволяє зв'язати між собою довжину початкового інтервалу невизначеності L_0, задану точність σ та число Фібоначчі F_{n+1} і використати цей зв'язок для оцінки кількості потрібних ітерацій методом Фібоначчі, що гарантує отримання результату з ладанною точністю. Оскільки числа Фібоначчі займають на числовій осі конкретні позиції, то кількість ітерацій методом Фібоначчі визначається найменшим числом Фібоначчі, для якого виконується умова

$$F_{n+1} \geq L_0 / \sigma . \tag{2.22}$$

Визначимо параметр розбиття ν інтервалу невизначеності $[a_0,b_0]$ в методі Фібоначчі. Як і в методі золотого перетину маємо $L_1 = \nu L_0$. Оскільки з (2.20) виходить, що $L_0 = F_{n+1}\sigma$, $L_1 = F_n\sigma$, то

$$\nu = F_n / F_{n+1} . \tag{2.23}$$

Нижче наводяться основні кроки пошукової процедури метода Фібоначчі, що орієнтована на відшукання точки мінімуму цільової функції $f(x)$ на інтервалі $[a_0,b_0]$.

1. Задати: початковий інтервал невизначеності $[a_k,b_k]$ $(k=0)$, точність σ.

2. Обчислити $L_0 = b_0 - a_0$. Знайти найменше число Фібоначчі $F_m \geq L_0/\sigma$ і визначити число потрібних ітерацій $n = m-1$. Обчислити $\nu = F_n / F_{n+1}$.

3. Покласти $x_2 = a_0 + \nu L_0$, $x_1 = a_0 + b_0 - x_2$. Отримати значення $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$.

4. Перевірити умову закінчення: $k \geq n$. Якщо умова виконана, то пошук завершений, $x^* = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$. Інакше перейти до кроку *5*.

5. Порівняти f_1 і f_2:

а) якщо $f_1 < f_2$, виключити інтервал (x_2,b_k). Покласти $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_2$, $x_2 = x_1$, $f_2 = f_1$. Обчислити $x_1 = a_k + b_k - x_2$, $f_1 = f(x_1)$. Перейти до кроку *6;*

б) якщо $f_1 \geq f_2$, виключити інтервал (a_k,x_1). Покласти $a_{k+1} = x_1$, $b_{k+1} = b_k$, $x_1 = x_2$, $f_1 = f_2$. Обчислити $x_2 = a_k + b_k - x_1$, $f_2 = f(x_2)$. Перейти до кроку *6.*

6. Покласти $k = k+1$ і перейти до кроку *4.*

Оцінимо *ефективність методу Фібоначчі*. Підрахуємо кількість ітерацій, що забезпечує виконання умови $L_n \le \sigma$. З формули (2.22) отримаємо, що найменше число Фібоначчі $F_m \ge 100$ в цьому випадку це $F_{11} = 144$, тобто $n+1=11$ і $n=10$. Таким чином, число обчислень цільової функції дорівнює 11, бо на першій ітерації функція обчислюється два рази. Ця кількість обчислень цільової функції співпадає з отриманим результатом для методу золотого перетину.

Іноді на практиці комбінують обидва метода: перші кроки роблять методом золотого перетину, а коли мінімум достатньо близький, обчислюють число $m = n+1$ і переходять до методу Фібоначчі.

➢ **Зауваження**

1. На відміну від методу золотого перетину умова закінчення процесу пошуку в методі Фібоначчі інша. Число необхідних ітерацій n обчислюється заздалегідь на основі формули (2.22).

2. На кожній ітерації алгоритма виключається $(1-\nu)$-частка поточного інтервалу невизначеності, де $\nu = F_n / F_{n+1}$.

3. На кожній ітерації (крім першої) потрібно обчислити одно значення цільової функції.

4. Якщо проведено $n+1$ обчислення значень функції, то довжина отриманого інтервалу невизначеності складає рівно ν^n величини початкового інтервалу.

o *Приклад застосування методу Фібоначчі.*

Розглянемо цільову функцію $f(x) = 2x^2 - 4x + 16/x$, для якої раніше знайдений інтервал невизначеності $[a_0, b_0] = [1{,}5; 2{,}4]$. Задамо точність $\sigma = 0{,}1$.

Обчислимо $L_0 = 2{,}4 - 1{,}5 = 0{,}9$. Знайдемо $L_0 / \sigma = 0{,}9 / 0{,}1 = 9$. Найменше число Фібоначчі, яке більше 9, це $F_6 = 13$, тобто $m = 6$. Число потрібних ітерацій для досягнення заданої точності $k = 6 - 1 = 5$, $F_k = F_5 = 8$, $F_{k+1} = F_6 = 13$.

Обчислимо параметр розбиття $\nu = F_5 / F_6 = 8/13 = 0{,}61538$.

1 ітерація $(n=1)$. Визначимо розташування пробних точок:

$x_2 = a_0 + \nu L_0 = 1{,}5 + 0{,}61538 \cdot 0{,}9 = 2{,}054$;

$x_1 = a_0 + b_0 - x_2 = 1{,}5 + 2{,}4 - 2{,}054 = 1{,}846$.

Обчислимо

$f_1 = f(x_1) = f(1,846) = 8,099$; $f_2 = f(x_2) = f(2,054) = 8,012$.

Оскільки $f_1 > f_2$, покладемо $a_1 = x_1 = 1,846$; $b_1 = b_0 = 2,4$.

Оскільки $n < k$, пошук продовжуємо. Покладемо $n = n + 1 = 2$. Перейти до наступної ітерації.

2 ітерація $(n = 2)$. Перепозначимо $x_1 = x_2 = 2,054$; $f_1 = f_2 = 8,012$.

Обчислимо

$x_2 = a_1 + b_1 - x_1 = 1,846 + 2,4 - 2,054 = 2,192$; $f_2 = f(2,192) = 8,141$.

Оскільки $f_1 < f_2$, покладемо $a_2 = a_1 = 1,846$; $b_2 = x_2 = 2,192$.

Оскільки $n < k$, пошук продовжуємо. Покладемо $n = n + 1 = 3$. Перейти до наступної ітерації.

3 ітерація $(n = 3)$. Перепозначимо $x_2 = x_1 = 2,054$; $f_2 = f_1 = 8,012$.

Обчислимо

$x_1 = a_2 + b_2 - x_2 = 1,846 + 2,192 - 2,054 = 1,984$; $f_1 = f(1,984) = 8,001$.

Оскільки $f_1 < f_2$, покладемо $a_3 = a_2 = 1,846$; $b_3 = x_2 = 2,054$.

Оскільки $n < k$, пошук продовжуємо. Покладемо $n = n + 1 = 4$. Перейти до наступної ітерації.

4 ітерація $(n = 4)$. Перепозначимо $x_2 = x_1 = 1,984$; $f_2 = f_1 = 8,001$.

Обчислимо

$x_1 = a_3 + b_3 - x_2 = 1,846 + 2,054 - 1,984 = 1,916$; $f_1 = f(1,916) = 8,029$.

Оскільки $f_1 > f_2$, покладемо $a_4 = x_1 = 1,916$; $b_4 = b_3 = 2,054$.

Оскільки $n < k$, пошук продовжуємо. Покладемо $n = n + 1 = 5$. Перейти до наступної ітерації.

5 ітерація $(n = 5)$. Перепозначимо $x_1 = x_2 = 1,984$; $f_1 = f_2 = 8,001$.

Обчислимо

$x_2 = a_4 + b_4 - x_1 = 1,916 + 2,054 - 1,984 = 1,986$;

$f_2 = f(1,986) = 8,0008$.

Оскільки $f_1 > f_2$, покладемо $a_5 = x_1 = 1,984$; $b_5 = b_4 = 2,054$.

Оскільки $n = k$, пошук закінчено. Знайдемо

$$x^* = \frac{1,984 + 2,054}{2} = 2,019.$$

Отримані результати представлені в табл. 2.4.

Таблиця 2.4 – Результати пошуку методом Фібоначчі

№ ітерації, k	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$[a_k, b_k]$	L_k
0					$[1,5;2,4]$	0,9
1	1,846	2,054	8,099	8,012	$[1,846;2,4]$	0,554
2	2,054	2,192	8,012	8,141	$[1,846;2,192]$	0,346
3	1,984	2,054	8,001	8,012	$[1,846;2,054]$	0,208
4	1,916	1,984	8,029	8,001	$[1,916;2,054]$	0,138
5	1,984	1,986	8,0010	8,0008	$[1,984;2,054]$	0,07

2.2.5. Порівняння методів виключення інтервалів

В таблиці 2.5 наведені отримані раніше дані про кількість ітерацій і обчислень цільової функції при застосуванні різних методів виключення інтервалів, необхідних для того, щоб зменшити довжину початкового інтервалу невизначеності в 100 разів. Для кожного методу це число не залежить від вигляду цільової функції, а залежить від розташування пробних точок, довжини початкового інтервалу невизначеності і заданої точності визначення точки мінімуму x^*.

Таблиця 2.5 – Необхідна кількість ітерацій і кількість обчислень функції

Метод пошуку	Кількість ітерацій	Кількість обчислень значень функції
Метод дихотомії	7	14
Метод половинного ділення	7	15
Метод золотого перетину	10	11
Метод Фібоначчі	10	11

Підкреслимо, що методи золотого перетину і Фібоначчі є найбільш ефективними серед методів виключення інтервалів з точки зору кількості обчислень цільової функції.

Оцінимо ефективність методів виключення інтервалів шляхом порівняння часток початкового інтервалу невизначеності, що залишаються після обчислень N значень цільової функції. Для цього позначимо довжину початкового інтервалу невизначеності як одиницю. Тоді для методу дихотомії частка початкового інтервалу невизначеності, що залишиться після N обчислень цільової функції, задається формулою

$$r = 1/2^{(N/2)}. \qquad (2.24)$$

Метод половинного ділення характеризується приблизно такою ж ефективністю. Для цього методу розрахункова формула має вигляд

$$r = 1/2^{((N-1)/2)}. \tag{2.25}$$

Для методу золотого перетину маємо наступну формулу:

$$r = ((\sqrt{5}-1)/2)^{N-1}. \tag{2.26}$$

У випадку методу Фібоначчі отримаємо із співвідношень (2.20). Оскільки $L_n = F_1\sigma$, $L_0 = F_{n+1}\sigma$, то $L_n = F_1 / F_{n+1}$, звідкіля виходить, що

$$r = 1/F_N. \tag{2.27}$$

В табл. 2.6 представлені значення r для чотирьох методів виключення інтервалів, які відповідають різним значенням N.

Таблиця 2.6 – Частка початкового інтервалу невизначеності, що залишається

Метод пошуку	Кількість обчислень значень функції, N			
	6	10	14	20
Метод дихотомії	0,12500	0,03125	0,00781	0,00098
Метод половинного ділення	0,17678	0,04419	0,01105	0,00138
Метод золотого перетину	0,09017	0,01316	0,00192	0,00011
Метод Фібоначчі	0,07692	0,01124	0,00164	0,00009

Аналізуючи дані розрахунків, наведені в табл. 2.6, можна зробити висновок, що метод Фібоначчі забезпечує найкращий результат у сенсі зменшення довжини інтервалу невизначеності, коли число обчислень цільової функції є фіксованим.

Контрольні питання і задачі

- Сформулюйте правило виключення інтервалів.
- Сформулюйте загальний алгоритм виключення інтервалів.
- Як вибираються пробні точки в методі дихотомії?
- Що є вхідними даними в алгоритмі методу дихотомії?
- Сформулюйте умову закінчення пошуку в методі дихотомії.
- Обчисліть, скільки ітерацій потрібно зробити методом дихотомії, щоб зменшити початковий інтервал невизначеності в 200 разів.
- Доведіть, що кількість ітерацій в методі дихотомії не залежить від вигляду цільової функції.

- Знайдіть точку мінімуму функції $f(x)=2x^2-x+3$ методом дихотомії на інтервалі невизначеності [0; 1], $\sigma=0{,}01$, $\varepsilon=0{,}002$.
- Як зміниться довжина отриманого інтервалу невизначеності відносно величини початкового інтервалу в методі дихотомії, якщо проведено 10 обчислень цільової функції?
- Як вибираються пробні точки в методі половинного ділення?
- Що є вхідними даними в алгоритмі методу половинного ділення?
- Сформулюйте умову закінчення пошуку в методі половинного ділення.
- Обчисліть, скільки ітерацій потрібно зробити методом половинного ділення, щоб зменшити початковий інтервал невизначеності в 200 разів.
- Знайдіть точку мінімуму функції $f(x)=2x^2-x+3$ методом половинного ділення на інтервалі невизначеності [0; 1], $\sigma=0{,}01$.
- Як зміниться довжина отриманого інтервалу невизначеності відносно величини початкового інтервалу в методі половинного ділення, якщо проведено 10 обчислень цільової функції?
- Чому дорівнює параметр розбиття в методі золотого перетину?
- Як вибираються пробні точки в методі золотого перетину?
- Що є вхідними даними в алгоритмі методу золотого перетину?
- Сформулюйте умову закінчення пошуку в методі золотого перетину.
- Обчисліть, скільки ітерацій потрібно зробити методом золотого перетину, щоб зменшити початковий інтервал невизначеності в 200 разів.
- Знайдіть точку мінімуму функції $f(x)=2x^2-x+3$ методом золотого перетину на інтервалі невизначеності [0; 1], $\sigma=0{,}01$.
- Як зміниться довжина отриманого інтервалу невизначеності відносно величини початкового інтервалу в методі золотого перетину, якщо проведено 10 обчислень цільової функції?
- Що таке числа Фібоначчі? Наведіть перші числа з ряду Фібоначчі.
- Чому дорівнює параметр розбиття в методі Фібоначчі?
- Як вибираються пробні точки в методі Фібоначчі?
- Що є вхідними даними в алгоритмі методу Фібоначчі?
- Сформулюйте умову закінчення пошуку в методі Фібоначчі.

- Обчисліть, скільки ітерацій потрібно зробити методом Фібоначчі, щоб зменшити початковий інтервал невизначеності в 200 разів.
- Знайдіть точку мінімуму функції $f(x) = 2x^2 - x + 3$ методом Фібоначчі на інтервалі невизначеності $[0;\ 1]$, $\sigma = 0,01$.
- Як зміниться довжина отриманого інтервалу невизначеності відносно величини початкового інтервалу в методі Фібоначчі, якщо проведено 10 обчислень цільової функції?
- Який метод є кращим: золотого перетину чи Фібоначчі? Поясніть.

2.3. Поліноміальна апроксимація і методи точкового оцінювання

Розглянуті вище методи виключення інтервалів орієнтовані на пошук мінімуму унімодальних цільових функцій. Логічна структура цих методів основана на порівнянні значень функції в двох пробних точках на кожній ітерації. Оскільки положення експериментальних точок на поточному інтервалі невизначеності для конкретного методу задається одним і тим же правилом, то співвідношення довжин двох суміжних інтервалів невизначеності є фіксованою величиною. Зрештою це приводить до того, що кількість ітерацій, яка забезпечує досягнення заданої точності, не залежить від вигляду самої функції, а залежить тільки від розташування пробних точок. Суттєво, що при цьому не враховуються відносні зміни значень функції в пробних точках. В ряді випадків врахування величин різниць між значеннями функції, яка досліджується, може привести до більш ефективних процедур пошуку точки мінімуму, ніж це має місце в методах виключення інтервалів. Підвищення ефективності відбувається за рахунок введення додаткової вимоги до цільової функції, а саме – вона повинна бути достатньо гладкою.

Основна ідея пов’язана з апроксимацією достатньо гладкої цільової функції поліномом і подальшим використанням екстремальних властивостей апроксимуючого полінома для оцінювання точки мінімуму цільової функції. Ідея базується на теоремі Вейєрштрасса: неперервну функцію на деякому інтервалі можна з будь-якою мірою точності апроксимувати поліномом достатньо високого порядку. Якщо функція унімодальна і знайдений поліном, який достатньо точно її апроксимує, то положення точки мінімуму функції можна оцінити на основі обчислень точки мінімуму полінома. Згідно теореми Вейєрштрасса, якість оцінювання можна підвищити двома способами: побудувати поліном більш високого порядку або зменшити інтервал апроксимації. Останній спосіб є більш переважним, причому саме зменшення інтервалу апроксимації може бути покладено в основу критерія закінчення процесу пошуку.

2.3.1. Метод Пауелла

Найпростішим варіантом поліноміальної інтерполяції є квадратична. В методі Пауелла апроксимуючий квадратичний поліном $y(x)$ будується по трьом пробним точкам x_1, x_2, x_3 $\left(x_1 < x_2 < x_3\right)$ і трьом значенням цільової функції в цих точках $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$, $f_3 = f(x_3)$.

Задамо апроксимуючий поліном у вигляді

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_2)(x - x_3)\,, \qquad (2.28)$$

де невідомі коефіцієнти a_0, a_1, a_2 визначаються з умови співпадання в точках x_1, x_2, x_3 значень функції $f(x)$ і полінома $y(x)$, тобто з умови

$$f_1 = y(x_1)\,,\; f_2 = y(x_2)\,,\; f_3 = y(x_3)\,. \qquad (2.29)$$

Для $x = x_1$ з (2.28) отримаємо в умовах (2.29), що

$$a_0 = f_1\,.$$

Далі, оскільки для $x = x_2$ буде $f_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_1) = f_1 + a_1(x_2 - x_1)$, то

$$a_1 = (f_2 - f_1)/(x_2 - x_1)\,. \qquad (2.30)$$

Нарешті, при $x = x_3$ отримаємо з (2.28)

$$f_3 = f_1 + (f_2 - f_1)/(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + a_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\,.$$

Розв’язуючи останнє рівняння відносно a_2, маємо

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2}\left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}\right) = \frac{1}{x_3 - x_2}\left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - a_1\right). \qquad (2.31)$$

Таким чином, по трьом точкам знайдені коефіцієнти полінома (2.28).

Знайдемо вершину апроксимуючого полінома, як стаціонарну точку. Для цього продиференцюємо (2.28) і прирівняємо знайдену похідну до нуля:

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + a_2(x - x_1) + a_2(x - x_2) = 0\,.$$

В результаті координата вершини визначиться як

$$\tilde{x} = -\frac{a_1}{2a_2} + \frac{x_1 + x_2}{2}\,. \qquad (2.32)$$

Оскільки функція $f(x)$ на інтервалі $[x_1, x_3]$ є унімодальною, а квадратичний поліном (2.28) також володіє властивістю унімодальності, то можна очікувати, що величина $\tilde{x}$ може бути прийнятною оцінкою для точки мінімуму x^* (рис. 2.8).

Нижче приводяться основні кроки метода Пауелла відшукання точки мінімуму цільової функції $f(x)$, що оснований на послідовному застосуванні процедури оцінювання з використанням квадратичної апроксимації.

1. Задати: x_1 – початкова точка, Δx – вибраний шаг по координаті *x*, точність по координаті σ_x, точність по функції σ_f.

2. Покласти $x_2 = x_1 + \Delta x$, обчислити $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$.

3. Якщо $f_1 > f_2$, покласти $x_3 = x_1 + 2\Delta x$. Якщо $f_1 \le f_2$, покласти $x_3 = x_1 - \Delta x$. Обчислити $f_3 = f(x_3)$.

4. Визначити

$$f_{\min} = \min\{f_1, f_2, f_3\},\ x_{\min} = \arg f_{\min},$$

$$f_{\max} = \max\{f_1, f_2, f_3\},\ x_{\max} = \arg f_{\max}.$$

5. Обчислити

$$a_1 = (f_2 - f_1)/(x_2 - x_1),\ a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2}\left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - a_1\right).$$

6. Знайти

$$\tilde{x} = -\frac{a_1}{2a_2} + \frac{x_1 + x_2}{2},$$

обчислити $f(\tilde{x})$.

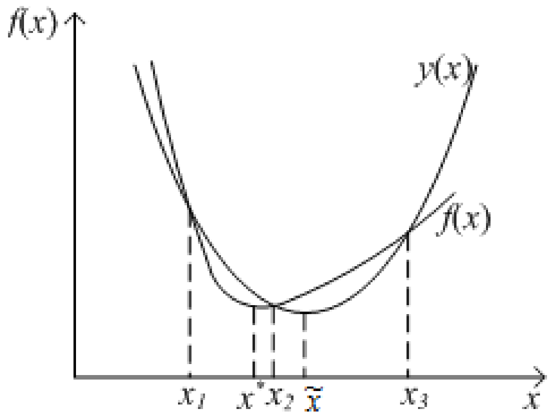


Рисунок 2.8 – Квадратична апроксимація цільової функції

7. Перевірити умови закінчення:

а) $\left|f_{\min} - f(\tilde{x})\right| \le \sigma_f$,

б) $\left|x_{\min} - \tilde{x}\right| \le \sigma_x$.

Якщо обидві умови виконуються, пошук закінчено і $x^* = \tilde{x}$. Інакше йти до кроку *8*.

8. Замість найгіршої точки $x_{\max}$ взяти точку $\tilde{x}$. Йти до кроку *4*.

➢ **Зауваження**

1. В методі Пауелла після n ітерацій кількість обчислень цільової функції буде складати $N = n + 3$.

2. Може статися, що знайдений коефіцієнт $a_2 < 0$. У цьому випадку апроксимуюча парабола некоректно наближує цільову функцію, оскільки спрямована гілками вниз, і її екстремальна точка є максимумом. У цьому випадку треба покласти

$$\tilde{x} = 2x_{\min} - x_{\max}.$$

3. Замість оцінювання відстаней $\left|f_{\min} - f(\tilde{x})\right|$ і $\left|x_{\min} - \tilde{x}\right|$ в якості критерія закінчення пошуку мінімуму можна оцінювати відносні відстані, наприклад:

$$\left|\frac{f_{\min} - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}\right| \le \sigma_f, \quad \left|\frac{x_{\min} - \tilde{x}}{\tilde{x}}\right| \le \sigma_x.$$

o *Приклад застосування метода Пауелла.*

Знайдемо мінімум цільової функції $f(x) = 2x^2 - 4x + 16/x$.

Задамо $x_1 = 1{,}5$; $\Delta x = 0{,}5$; $\sigma_x = 0{,}01$; $\sigma_f = 0{,}001$.

Обчислимо $f_1 = f(x_1) = f(1{,}5) = 9{,}167$.

Далі знайдемо $x_2 = x_1 + \Delta x = 1{,}5 + 0{,}5 = 2{,}0$.

Обчислимо $f_2 = f(x_2) = f(2{,}0) = 8{,}000$.

Оскільки $f_2 < f_1$, то $x_3 = x_1 + 2\Delta x = 1{,}5 + 2 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$.

Обчислимо $f_3 = f(x_3) = f(2{,}5) = 8{,}900$.

1 ітерація.

Визначимо

$f_{\min} = \min\{f_1, f_2, f_3\} = f_2 = 8{,}000$; $x_{\min} = \arg f_{\min} = x_2 = 2{,}00$.

$f_{\max} = \max\{f_1, f_2, f_3\} = f_1 = 9{,}167$; $x_{\max} = \arg f_{\max} = x_1 = 1{,}50$.

Обчислимо

$a_1 = (f_2 - f_1)/(x_2 - x_1) = (8,000 - 9,167)/(2,0 - 1,5) = -2,334$;

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2}\left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - a_1\right) = \frac{1}{2,5 - 2,0}\left(\frac{8,900 - 9,167}{2,5 - 1,5} + 2,334\right) = 3,6.$$

Визначимо

$$\tilde{x} = -\frac{a_1}{2a_2} + \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{-2,334}{2 \cdot 3,6} + \frac{1,5 + 2,0}{2} = 2,074;$$

$f(\tilde{x}) = f(2,074) = 8,022$.

Перевіримо умови закінчення:

а) $\left|f_{\min} - f(\tilde{x})\right| = \left|8,000 - 8,022\right| = 0,,022 > \sigma_f$, (умова не виконується);

б) $\left|x_{\min} - \tilde{x}\right| = \left|2,0 - 2,074\right| = 0,074 > \sigma_x$, (умова не виконується).

Треба продовжити пошук.

2 ітерація.

Перепозначимо точки: замість найгіршої точки x_1 візьмемо точку $\tilde{x}$.

Таким чином маємо точки:

$x_1 = \tilde{x} = 2,074$; $f_1 = f(\tilde{x}) = f(2,074) = 8,022$;

$x_2 = 2,0$; $f_2 = 8,000$;

$x_3 = 2,5$; $f_3 = 8,900$.

Визначимо

$f_{\min} = \min\{f_1, f_2, f_3\} = f_2 = 8,000$; $x_{\min} = \arg f_{\min} = x_2 = 2,00$.

$f_{\max} = \max\{f_1, f_2, f_3\} = f_3 = 8,900$; $x_{\max} = \arg f_{\max} = x_3 = 2,50$.

Обчислимо

$a_1 = (f_2 - f_1)/(x_2 - x_1) = (8,000 - 8,022)/(2,0 - 2,074) = 0,297$;

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2}\left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - a_1\right) = \frac{1}{2,5 - 2,0}\left(\frac{8,900 - 8,022}{2,5 - 1,5} - 0,297\right) = 3,53.$$

Визначимо

$$\tilde{x} = -\frac{a_1}{2a_2} + \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{0,297}{2 \cdot 3,53} + \frac{2,074 + 2,0}{2} = 1,995;$$

$f(\tilde{x}) = f(1,995) = 8,0001$.

Перевіримо умови закінчення:

а) $\left|f_{\min} - f(\tilde{x})\right| = \left|8,000 - 8,0001\right| = 0,0001 < \sigma_f$, (умова виконується);

б) $\left|x_{\min} - \tilde{x}\right| = \left|2,0 - 1,995\right| = 0,005 < \sigma_x$, (умова виконується).

Пошук закінчено: $x^* = \tilde{x} = 1{,}995$.

Отримані результати пошуку мінімуму методом Пауелла представлені в табл. 2.7.

Таблиця 2.7 – Результати пошуку методом Пауелла

№ ітерації, k	x_1	x_2	x_3	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\tilde{x}$	$f(\tilde{x})$
1	1,500	2,000	2,500	9,167	8,000	8,900	2,074	8,022
2	2,074	2,000	2,500	8,022	8,000	8,900	1,995	8,000

Контрольні питання і задачі

- Як вибираються пробні точки в методі Пауелла?
- Що полягається в основу оцінювання положення точки мінімуму цільової функції в методі Пауелла?
- Що є вхідними даними в алгоритмі методу Пауелла?
- Сформулюйте умову закінчення пошуку в методі Пауелла.
- Знайдіть точку мінімуму функції $f(x) = 2x^2 - x + 3$ методом Пауелла. Покласти $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $\sigma_x = 0{,}01$, $\sigma_f = 0{,}02$.

3. МЕТОДИ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОХІДНОЇ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ

Методи пошуку мінімуму, які розглянуті в попередніх розділах, основані на припущеннях про унімодальність та достатню гладкість цільової функції на заданому інтервалі. Підсилимо вимоги до функції, а саме будемо вимагати, щоб вона була двічі диференційована.

Теоремою 1.1 встановлена необхідна умова існування локального мінімуму функції $f(x)$ в точці x^*:

$$\varphi(x) = f'(x)\Big|_{x=x^*} = 0\,, \tag{3.1}$$

згідно якої x^* є стаціонарною точкою. Таким чином, задача $\min f(x)$ математично еквівалентна задачі відшукання стаціонарної точки цільової функції, тобто задачі відшукання кореня рівняння (3.1).

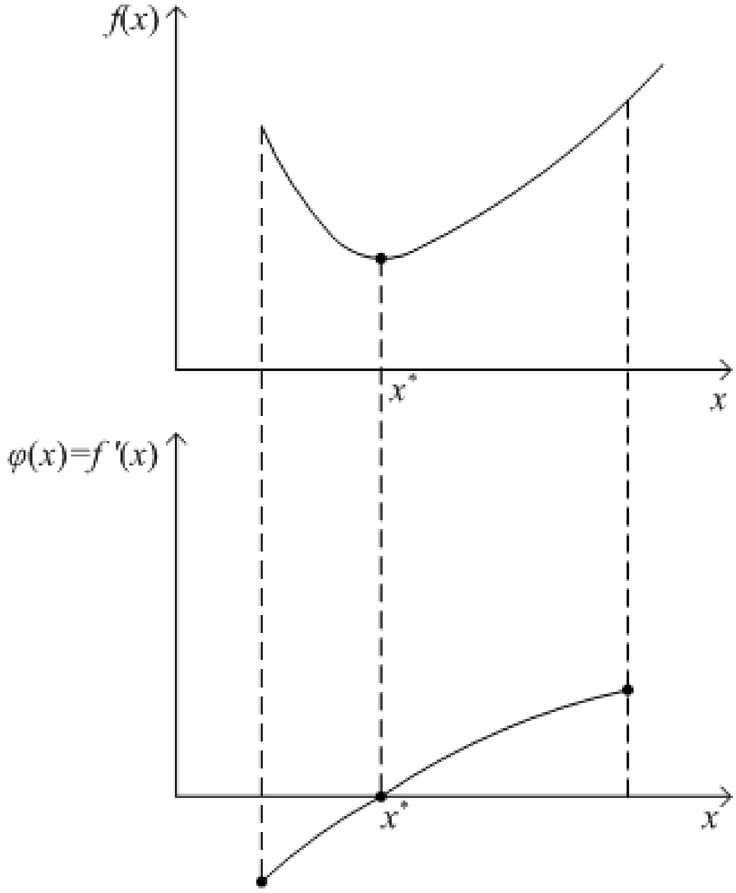


Рисунок 3.1 – До зв’язку задачі $\min f(x)$ і задачі відшукання кореня нелінійного рівняння $\varphi(x) = 0$

Для більшості випадків представлення функції $f(x)$ отримати аналітичний розв'язок задачі (3.1) не вбачається можливим. Для відшукання x^* застосовують наближені методи пошуку кореня нелінійного рівняння $\varphi(x) = 0$, де $\varphi(x) = f'(x)$.

Класична схема пошуку кореня нелінійного рівняння $\varphi(x) = 0$ була розроблена Ньютоном і пізніше уточнена Рафсоном.

3.1. Метод Ньютона

Застосування схеми Ньютона передбачає, що цільова функція є такою, що двічі диференціюється. Отримаємо основне співвідношення ітераційного методу Ньютона. Нехай точка x_k – деяке поточне наближення до розв'язку x^* рівняння $\varphi(x) = 0$. Розкладемо функцію $\varphi(x)$ в околі точки x_k в ряд Тейлора, зберігаючи лінійні члени розкладу. Маємо

$$\varphi(x_k + \Delta x) = \varphi(x_k) + \varphi'(x_k)\Delta x + \ldots \ . \tag{3.2}$$

З розкладення (3.2) отримаємо лінійну апроксимацію функції $\varphi(x)$ в точці x_k:

$$\varphi(x_k + \Delta x; x_k) = \varphi(x_k) + \varphi'(x_k)\Delta x ,$$

тобто для похідної цільової функції маємо наступну лінійну апроксимацію:

$$f'(x; x_k) = f'(x_k) + f''(x_k)(x - x_k) . \tag{3.3}$$

Прирівнюючи праву частину (3.3) до нуля, отримаємо наступне наближення до x^*:

$$x_{k+1} = x_k - f'(x_k) / f''(x_k) . \tag{3.4}$$

Формула (3.4) є робочою формулою ітераційного методу Ньютона. Дамо графічну інтерпретацію ітераційному процесу (3.4). Розглянемо початкове наближення x_0 (рис. 3.1). Проведемо дотичну $y(x)$ до функції $\varphi(x) = f'(x)$ в точці x_0:

$$y(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0)(x - x_0) . \tag{3.5}$$

Точку перетину дотичної з віссю абцисс позначимо як x_1. Тоді з (3.5) отримаємо

$$x_1 = x_0 - \varphi(x_k) / \varphi'(x_k) ,$$

що співпадає з результатом обчислення точки x_1 по методу Ньютона (3.4), тобто наступне наближення x_1 обчислюється як корінь дотичної до функції $\varphi(x) = f'(x)$. Таким чином, метод Ньютона побудови наближень розв’язку нелінійного рівняння графічно можна інтерпретувати як метод дотичних.

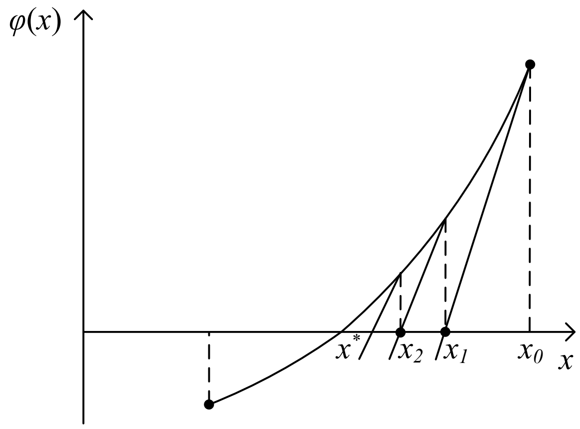


Рисунок 3.2 – Графічна інтерпретація метода Ньютона

Нижче приводяться основні кроки метода Ньютона відшукання точки мінімуму цільової функції $f(x)$.

1. Задати: x_k, $k = 0$ – початкова точка, точність σ.

2. Обчислити $f'(x_k)$, $f''(x_k)$.

3. Якщо $|f'(x_k)| \le \sigma$, то процес пошуку закінчено: $x^* = x_k$. Інакше йти до кроку *4*.

4. Обчислити $x_{k+1} = x_k - f'(x_k)/f''(x_k)$.

5. Покласти $k = k+1$, йти до кроку *2*.

o *Приклад застосування метода Ньютона.*

Знайдемо мінімум цільової функції $f(x) = 2x^2 - 4x + 16/x$. Задамо $x_0 = 1{,}5$; $\sigma = 0{,}001$.

Отримаємо вираз для похідної цільової функції: $f'(x) = 4x - 4 - 16/x^2$.

Для другої похідної маємо: $f''(x) = 4 + 32/x^3$.

1 ітерація. В початковій точці

$f(x_0) = f(1{,}5) = 2 \cdot 1{,}5^2 - 4 \cdot 1{,}5 + 16/1{,}5 = 9{,}167$

$f'(x_0) = f'(1{,}5) = 4 \cdot 1{,}5 - 4 - 16/(1{,}5)^2 = -5{,}111$;

$f''(x_0) = f''(1{,}5) = 4 + 32/(1{,}5)^{=3} = 13{,}481$.

Оскільки $|f'(1{,}5)| = 5{,}111 > \sigma$, то пошук треба продовжити.

Обчислимо

$x_1 = x_0 - f'(x_0)/f''(x_0) = 1,5 - (-5,111)/13,481 = 1,879$.

$f(x_1) = f(1,879) = 2 \cdot 1,879^2 - 4 \cdot 1,879 + 16/1,879 = 8,060$.

Знайдемо $f'(x_1) = 4x_1 - 4 - 16/x_1{}^2 = 4 \cdot 1,879 - 4 - 16/1,879^2 = -1.016$.

Оскільки $|f'(1,879)| = 1.016 > \sigma$, то пошук треба продовжити: $k = k + 1$.

2 ітерація. Отримаємо: $f''(x_1) = f''(1,879) = 4 + 32/(1,879)^3 = 8,824$.

Обчислимо

$x_2 = x_1 - f'(x_1)/f''(x_1) = 1,879 - (-1,016)/8,824 = 1,994$.

$f(x_2) = f(1,9945 = 2 \cdot 1,994^2 - 4 \cdot 1,994 + 16/1,004 = 8,0001$.

Знайдемо $f'(x_2) = 4x_2 - 4 - 16/x_2{}^2 = 4 \cdot 1,994 - 4 - 16/1,994^2 = -0.048$.

Оскільки $|f'(1,994)| = 0.048 > \sigma$, то пошук треба продовжити: $k = k + 1$.

3 ітерація. Отримаємо: $f''(x_2) = f''(1,994) = 4 + 32/(1,994)^3 = 8,036$.

Обчислимо

$x_3 = x_2 - f'(x_2)/f''(x_2) = 1,994 - (-0,048)/8,036 = 2,000$.

Знайдемо $f'(x_3) = 4x_3 - 4 - 16/x_3{}^2 = 4 \cdot 2,000 - 4 - 16/2,000^2 = 0.0$.

Оскільки $|f'(2,000)| = 0.0 < \sigma$, то пошук закінчено і $x^* = 2,000$.

Мінімальне значення цільової функції $f(x^*) = 8,000$

Отримані результати пошуку мінімуму методом Ньютона представлені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Результати пошуку методом Ньютона

№ ітерації, k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\lvert f'(x_k)\rvert$	$f''(x_k)$
0	1,500	9,167	–5,111	5,111	13,481
1	1,879	8,060	–1,016	1,016	8,824
2	1,994	8,0001	–0,048	0,048	8,036
3	2,000	8,000	0,000		

➢ **Зауваження**

1. В табл. 3.1 для наочності приведені значення цільової функції на кожній ітерації. Зауважимо, що сам алгоритм методу Ньютона не вимагає обчислень цільової функції.

2. В методі Ньютона обчислюються тільки значення першої та другої похідних цільової функції.

Розглянемо питання збіжності метода Ньютона. В залежності від вибору початкового наближення x_0 і вигляду цільової функції послідовність точок, побудована алгоритмом метода Ньютона, може як збігатися до точки x^*, так і розбігатися.

Розглянемо процес розбіжності методу Ньютона на прикладі мінімізації функції $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ з початковою точкою $x_0 = -1,6$. Задамо точність $\sigma = 0,01$.

Перша та друга похідна функції мають вигляд відповідно:

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x\,; \quad f''(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1 ітерація $(k=1)$. Обчислимо в початковій точці

$$f(x_0) = f(-1,6) = -1,6 \cdot \operatorname{arctg}(-1,6) - \frac{1}{2}\ln(1+(-1,6)^2) = 0,9846\,;$$

$$f'(x_0) = \operatorname{arctg}(-1,6) = -1,0122\,;$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{1+(-1,6)^2} = 0,2809\,.$$

Знайдемо $x_1 = x_0 - \dfrac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = -1,6 - \dfrac{-1,0122}{0,2809} = 2,003$.

$$f(x_1) = f(2,003) = 2,003 \cdot \operatorname{arctg}(2,003) - \frac{1}{2}\ln(1+(2,003)^2) = 1,4129\,;$$

$$f'(x_1) = \operatorname{arctg}(2,003) = 1,1077\,;$$

$$f''(x_1) = \frac{1}{1+(2,003)^2} = 0,1995\,.$$

Оскільки $\left| f'(x_1) > \sigma \right|$, то пошук треба продовжити: $k = k+1$.

2 ітерація $(k=2)$. Визначимо

$$x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = 2,003 - \frac{1,1077}{0,1995} = -3,549\,.$$

Знайдемо

$$f(x_2) = f(-3,549) = -3,549 \cdot \operatorname{arctg}(-3,549) - \frac{1}{2}\ln(1+(-3,549)^2) = 3,2952\,;$$

$$f'(x_2) = \operatorname{arctg}(-3,549) = -1,2961\,;$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{1+(-3,549)^2} = 0,0736\,.$$

Проаналізуємо отримані після двох ітерацій результати. Оскільки виконуються умови $f(x_0) < f(x_1) < f(x_2)$ і $|f'(x_0)| < |f'(x_1)| < |f'(x_2)|$, то процес пошуку точки мінімуму є розбіжним (рис. 3.3).

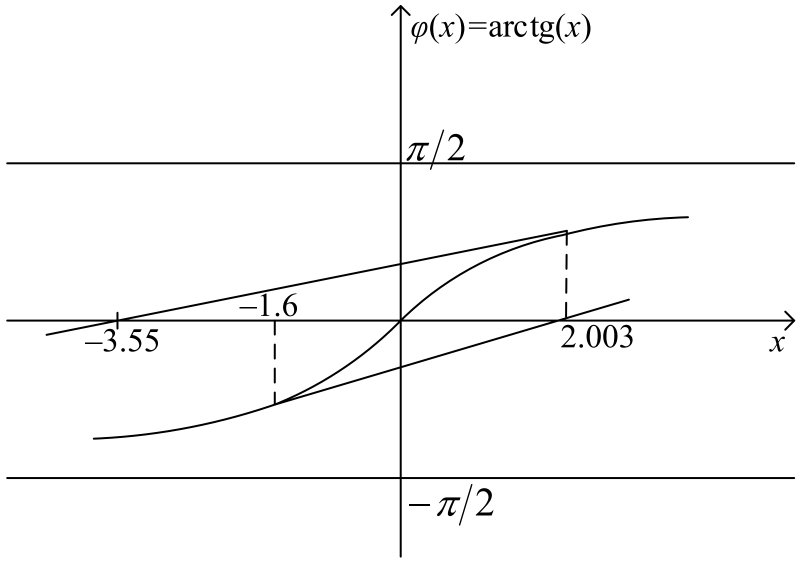


Рисунок 3.3 – Ілюстрація розбіжності методу Ньютона

➢ **Зауваження**

1. Збіжність метода Ньютона цілком залежить від вдалого вибору початкового наближення x_0. Якщо відстань $|x_0 - x^*|$ завелика, метод може розбігтися.

3.2. Модифікації метода Ньютона

3.2.1. Метод Ньютона-Рафсона з регулюванням кроку

Перепишемо робочу формулу метода Ньютона (3.4) у вигляді

$$x_{k+1} = x_k - \alpha f'(x_k) / f''(x_k), \tag{3.7}$$

де $0 < \alpha \le 1$ – параметр регулювання довжини кроку. Розбіжність метода Ньютона, зокрема, має місце, коли

$$|x_1 - x_0| < |x_2 - x_1| < |x_3 - x_2| < \ldots < |x_{k+1} - x_k|.$$

Щоб уникнути цієї ситуації, в формулі (3.7) введено корегуючий коефіцієнт α. Він дозволяє зменшити відстань $|x_{k+1} - x_k|$ в залежності від величини різниці $f(x_{k+1}) - f(x_k)$. Отримаємо умови зменшення параметра α.

Скористуємося розкладенням функції $f(x)$ в ряд Тейлора, обмежившись лінійним членом:

$$f(x_k + \Delta) \le f(x_k) + f'(x_k)\Delta . \qquad (3.8)$$

З урахуванням умови мінімізації $f(x_k + \Delta) < f(x_k)$ отримаємо з (3.8), що

$$f'(x_k)\Delta < 0 .$$

Далі, з урахуванням того, що $\Delta = x_{k+1} - x_k = -\alpha f'(x_k)/f''(x_k)$, маємо:

$$f(x_k + \Delta) - f(x_k) \le -\alpha f'^2(x_k)/f''(x_k) . \qquad (3.9)$$

З (3.9) отримаємо умову зменшення параметра α:

$$f(x_k + \Delta) - f(x_k) \le -\gamma\alpha f'^2(x_k)/f''(x_k) , \qquad (3.10)$$

де $0 < \gamma < 1$.

Якщо умова (3.10) не виконується, треба покласти $\alpha = \alpha/2$. Далі треба знайти $\tilde{x} = x_k + \Delta = x_k - \alpha f'(x_k)/f''(x_k)$, обчислити $f(\tilde{x}) = f(x_k + \Delta)$ і знову перевірити виконання умови (3.10).

Нижче приводяться основні кроки метода Ньютона-Рафсона з регулюванням кроку відшукання точки мінімуму цільової функції $f(x)$.

1. Задати: x_k, $k = 0$ – початкова точка, точність σ.

2. Обчислити $f'(x_0)$, $f''(x_0)$. Якщо $|f'(x_0)| \le \sigma$, то процес пошуку закінчено: $x^* = x_0$. Інакше йти до кроку *3*.

3. Покласти $\alpha = 1$.

4. Обчислити $\tilde{x} = x_k - \alpha f'(x_k)/f''(x_k)$.

5. Обчислити $f'(\tilde{x})$. Якщо $|f'(\tilde{x})| \le \sigma$, то процес пошуку закінчено: $x^* = \tilde{x}$. Інакше йти до кроку *6*.

6. Обчислити $f(\tilde{x})$.

7. Якщо $f(\tilde{x}) - f(x_k) \le -\gamma\alpha f'^2(x_k)/f''(x_k)$, то $x_{k+1} = \tilde{x}$, йти до кроку *8*. Інакше йти до кроку *10*.

8. Якщо $|f'(x_{k+1})| \le \sigma$, то процес пошуку закінчено: $x^* = x_{k+1}$. Інакше йти до кроку *9*.

9. Якщо $\alpha \le \sigma$, то $x^* = x_k$. Інакше йти до кроку *11*.

10. Покласти $\alpha = \alpha/2$. Йти до кроку *4*.

11. Обчислити $f''(x_{k+1})$.

12. Покласти $x_k = x_{k+1}$, $f'(x_k) = f'(x_{k+1})$, $f''(x_k) = f''(x_{k+1})$, йти до кроку *3*.

o *Приклад застосування метода Ньютона-Рафсона з регулюванням кроку.*

Розглянемо використання методу Ньютона-Рафсона зі змінним кроком на прикладі мінімізації функції $f(x) = x \cdot \mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, для якої Перша та друга похідна мають вигляд: $f'(x) = \mathrm{arctg}\, x$; $f''(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Задамо $x_0 = -1,6$, точність $\sigma = 0,01$, параметр $\gamma = 0,5$.

Обчислимо в початковій точці

$f(x_0) = f(-1,6) = -1,6 \cdot \mathrm{arctg}(-1,6) - \frac{1}{2}\ln(1+(-1,6)^2) = 0,9846$;

$f'(x_0) = \mathrm{arctg}(-1,6) = -1,0122$;

$f''(x_0) = \frac{1}{1+(-1,6)^2} = 0,2809$.

Оскільки $|f'(x_0) > \sigma|$, то пошук треба продовжити: $k = k+1$.

1 ітерація $(k = 1)$. Покладемо $\alpha = 1$.

Знайдемо $\tilde{x} = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = -1,6 - \frac{-1,0122}{0,2809} = 2,003$.

Обчислимо $f'(\tilde{x}) = f'(2,003) = \mathrm{arctg}(2,003) = 1,1077$.

Оскільки $|f'(\tilde{x}) > \sigma|$, то пошук треба продовжити.

$f(\tilde{x}) = f(2,003) = 2,003 \cdot \mathrm{arctg}(2,003) - \frac{1}{2}\ln(1+(2,003)^2) = 1,4129$;

$f(\tilde{x}) - f(x_0) = 1,4129 - 0,9846 = 0,4283$;

$-\gamma f'^2(x_0) / f''(x_0) = -0,5 \cdot (-1,0122)^2 / 0,2809 = -1,8237$.

Оскільки $0,4283 > -1,8237$, то треба покласти $\alpha = \alpha / 2 = 0,5$.

Знайдемо $\tilde{x} = x_0 - \alpha \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = -1,6 - 0,5 \frac{-1,0122}{0,2809} = 0,2017$.

Обчислимо $f'(\tilde{x}) = f'(0,2017) = \mathrm{arctg}(0,2017) = 0,1990$.

Оскільки $|f'(\tilde{x}) > \sigma|$, то пошук треба продовжити.

$f(\tilde{x}) = f(0,2017) = 0,2017 \cdot \mathrm{arctg}(0,2017) - \frac{1}{2}\ln(1+(0,2017)^2) = 0,0202$;

$f(\tilde{x}) - f(x_0) = 0,0202 - 0,9846 = -0,9644$;

$-\gamma \alpha f'^2(x_0) / f''(x_0) = -0,5 \cdot 0,5 \cdot (-1,0122)^2 / 0,2809 = -0,9118$.

Оскільки $-0,9644 < -0,9118$, то отримаємо $x_1 = \tilde{x} = 0,2017$.

Обчислимо $f'(x_1) = f'(\tilde{x}) = 0,1990$.

Оскільки $\left| f'(x_1) > \sigma \right|$, то пошук треба продовжити: $k = k + 1$.

2 ітерація $(k = 2)$.

Покладемо $\alpha = 1$.

Обчислимо $f''(x_1) = \dfrac{1}{1 + (0,2017)^2} = 0,9609$.

Знайдемо $\tilde{x} = x_1 - \dfrac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = 0,2017 - \dfrac{0,1990}{0,9609} = -0,005$.

Обчислимо $f'(\tilde{x}) = f'(-0,005) = arctg(-0,005) = -0,005$.

Оскільки $\left| f'(\tilde{x}) < \sigma \right|$, то пошук закінчено і $x^* = \tilde{x} = -0,005$.

Отримані результати пошуку мінімуму методом Ньютона–Рафсона з регулюванням кроку представлені в табл. 3.2.

Таблиця 3.2 – Результати пошуку методом Ньютона–Рафсона з регулюванням кроку

№ ітерації, k	x_k	α	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$f''(x_k)$	$\tilde{x}$	$f(\tilde{x})$	$f'(\tilde{x})$
0	–1,60		0,9846	–1,0122	0,2809			
1		1				2,003	1,4129	1,1077
1		0,5				0,2017	0,0202	0,1990
2	0,2017	1				–0,005		–0,005

Найбільш затратною в обчислювальному плані операцією метода Ньютона є отримання на кожній ітерації значення другої похідної цільової функції. Модифікації метода Ньютона, що наводяться нижче, пов'язані саме з виключенням із схеми метода процедури обчислювання другої похідної $f''(x_k)$ на поточній ітерації.

3.2.2. Перша модифікація метода Ньютона

Замінимо в робочій формулі методу Ньютона (3.4) $f''(x_k)$ на $f''(x_0)$, отримаємо:

$$x_{k+1} = x_k - f'(x_k) / f''(x_0). \tag{3.11}$$

Перепишемо (3.7) у вигляді

$$x_{k+1} = x_k - \varphi(x_k) / \varphi'(x_0). \tag{3.12}$$

Послідовність наближень до розв'язку нелінійного рівняння $f'(x) = \varphi(x) = 0$ графічно представлена на рис. 3.3. Аналізуючи розташування точок x_{k+1} $(k = 0,1,...,)$ на рис. 3.3. і порівнюючи його з розташуванням відповідних наближень на рис. 3.2, можна зробити наступні висновки:

- точки x_{k+1} $(k = 0,1,...,)$ на рис. 3.3 послідовно наближуються до x^*;
- швидкість збіжності наближень, що відповідають модифікації (3.8) дещо менша, ніж це має місце в методі Ньютона–Рафсона (3.4).

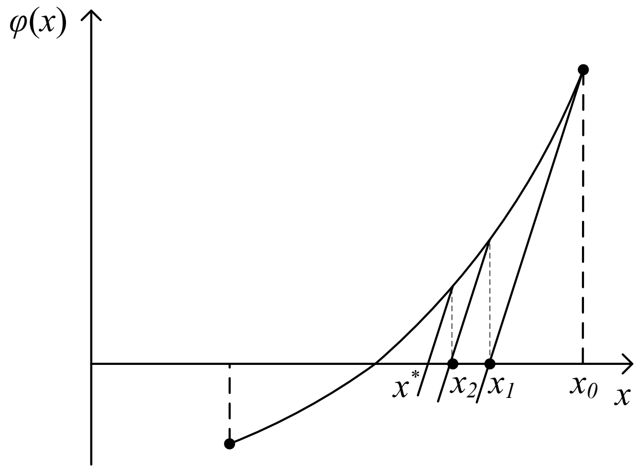


Рисунок 3.4 – Графічна інтерпретація першої модифікації метода Ньютона

Приведемо послідовність кроків першої модифікації метода Ньютона відшукання точки мінімуму цільової функції $f(x)$.

1. Задати: x_k, $k = 0$ – початкова точка, точність σ. Обчислити $f''(x_0)$.

2. Обчислити $f'(x_k)$.

3. Якщо $\left|f'(x_k)\right| \le \sigma$, то процес пошуку закінчено: $x^* = x_k$. Інакше йти до кроку *4*.

4. Обчислити $x_{k+1} = x_k - f'(x_k) / f''(x_0)$.

5. Покласти $k = k + 1$, йти до кроку *2*.

➢ **Зауваження**

1. Для покращення швидкості збіжності першої модифікації метода Ньютона, можна, зробивши *n* кроків, перепозначити $x_0 = x_{n+1}$ і переобчислити значення $f''(x_0)$.

2. Оскільки в процесі пошуку фактично використовується тільки одна дотична до графіку функції $f'(x)$ в точці x_0, ця модифікація іноді називається методом однієї дотичної.

o *Приклад застосування першої модифікації методу Ньютона.*

Знайдемо мінімум цільової функції $f(x) = 2x^2 - 4x + 16/x$. Задамо $x_0 = 1{,}5$; $\sigma = 0{,}001$.

Отримаємо вираз для похідної цільової функції: $f'(x) = 4x - 4 - 16/x^2$.

Для другої похідної маємо: $f''(x) = 4 + 32/x^3$.

1 ітерація. В початковій точці

$f'(x_0) = f'(1{,}5) = 4 \cdot 1{,}5 - 4 - 16/(1{,}5)^2 = -5{,}111$;

$f''(x_0) = f''(1{,}5) = 4 + 32/(1{,}5)^{=3} = 13{,}481$.

Оскільки $|f'(1{,}5)| = 5{,}111 > \sigma$, то пошук треба продовжити.

Обчислимо

$x_1 = x_0 - f'(x_0)/f''(x_0) = 1{,}5 - (-5{,}111)/13{,}481 = 1{,}879$.

Знайдемо $f'(x_1) = 4x_1 - 4 - 16/x_1{}^2 = 4 \cdot 1{,}879 - 4 - 16/1{,}879^2 = -1.016$.

Оскільки $|f'(1{,}879)| = 1.016 > \sigma$, то пошук треба продовжити: $k = k + 1$.

2 ітерація. Обчислимо

$x_2 = x_1 - f'(x_1)/f''(x_0) = 1{,}879 - (-1{,}016)/13{,}481 = 1{,}954$.

Знайдемо $f'(x_2) = 4x_2 - 4 - 16/x_2{}^2 = 4 \cdot 1{,}954 - 4 - 16/1{,}954^2 = -0.3745$.

Оскільки $|f'(1{,}954)| = 0.3745 > \sigma$, то пошук треба продовжити: $k = k + 1$.

3 ітерація. Обчислимо

$x_3 = x_2 - f'(x_2)/f''(x_0) = 1{,}954 - (-0{,}3745)/13{,}481 = 1{,}982$.

Знайдемо $f'(x_3) = 4x_3 - 4 - 16/x_3{}^2 = 4 \cdot 1{,}982 - 4 - 16/1{,}982^2 = -0.145$.

Оскільки $|f'(1{,}982)| = 0.145 > \sigma$, то пошук треба продовжити: $k = k + 1$.

4 ітерація. Обчислимо

$x_4 = x_3 - f'(x_3)/f''(x_0) = 1{,}982 - (-0{,}145)/13{,}481 = 1{,}993$.

Знайдемо $f'(x_4) = 4x_4 - 4 - 16/x_4{}^2 = 4 \cdot 1{,}993 - 4 - 16/1{,}993^2 = -0.056$.

Оскільки $|f'(1{,}993)| = 0.056 > \sigma$, то пошук треба продовжити: $k = k + 1$.

5 ітерація. Обчислимо

$x_5 = x_4 - f'(x_4)/f''(x_0) = 1,993 - (-0,056)/13,481 = 1,997$.

Знайдемо $f'(x_5) = 4x_5 - 4 - 16/x_5^2 = 4 \cdot 1,997 - 4 - 16/1,997^2 = -0.024$.

Оскільки $|f'(1,997)| = 0.024 > \sigma$, то пошук треба продовжити: $k = k + 1$.

6 ітерація. Обчислимо

$x_6 = x_5 - f'(x_5)/f''(x_0) = 1,997 - (-0,024)/13,481 = 1,999$.

Знайдемо

$f'(x_6) = 4x_6 - 4 - 16/x_6^2 = 4 \cdot 1,999 - 4 - 16/1,999^2 = -0.0008$.

Оскільки $|f'(1,999)| = 0.0008 < \sigma$, то пошук закінчено і $x^* = 1,999$.

Отримані результати пошуку мінімуму першою модифікацією методу Ньютона представлені в табл.. 3.3.

Таблиця 3.3 – Результати пошуку першою модифікацією методу Ньютона

№ ітерації, k	x_k	$f'(x_k)$
0	1,500	–5,111
1	1,879	–1,016
2	1,954	–0,3745
3	1,982	–0,145
4	1,993	–0,056
5	1,997	–0,024
6	1,999	–0,0008

➢ **Зауваження**

1. Як видно з табл. і 3.3, швидкість збігання першої модифікації методу Ньютона при наближенні до точки мінімуму дуже сповільнюється.

3.2.3. Друга модифікація метода Ньютона. Метод січних

Метод січних також є модифікацією метода Ньютона (3.4), в якій замість другої похідної $f''(x_k)$ застосовується її різницева апроксимація

$$f''(x_k) = \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}. \tag{3.13}$$

Підставляючи вираз для $f''(x_k)$ в формулу (3.4), отримаємо, що

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}. \tag{3.14}$$

Приведемо праву частину (3.8) до одного знаменника:

$$x_{k+1}=\frac{f'(x_k)x_k-f'(x_{k-1})x_k-f'(x_k)(x_k-x_{k-1})}{f'(x_k)-f'(x_{k-1})}=\frac{f'(x_k)x_{k-1}-f'(x_{k-1})x_k}{f'(x_k)-f'(x_{k-1})}. \quad (3.15)$$

Щоб отримати геометричну інтерпретацію формули (3.14), перепишемо формулу (3.15) у вигляді:

$$x_{k+1}=\frac{\varphi(x_k)x_{k-1}-\varphi(x_{k-1})x_k}{\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})}. \quad (3.16)$$

Оскільки розрахунок по формулі (3.16) потребує двох початкових точок x_{k-1} і x_k, в якості цих точок візьмемо кінці інтервалу невизначеності $[a_0, b_0]$, поклавши $x_{k-1}=a_0$, $x_k=b_0$. Очевидно, що в умовах мінімізації функції $f(x)$ для її похідної $\varphi(x)$ будемо мати:

$$\varphi(x_{k-1})<0,\ \varphi(x_k)>0.$$

З'єднаємо точки x_{k-1} і x_k відрізком прямої. Запишемо її рівняння:

$$\frac{y(x)-\varphi(x_{k-1})}{\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})}=\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}.$$

Знайдемо точку перетину цієї прямої з віссю абсцис x_{k+1}:

$$\frac{0-\varphi(x_{k-1})}{\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})}=\frac{x_{k+1}-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}. \quad (3.17)$$

Розв'язуючи рівняння (3.17) відносно x_{k+1}, отримаємо формулу, співпадаючу з (3.16). Отриманий результат пояснює назву цієї модифікації методу Ньютона.

Щоб коректно користатися робочою формулою (3.16), необхідно на кожній ітерації правильно перепозначати точки x_{k-1} і x_k. Для цього треба додатково обчислити знак $\varphi(x_{k+1})$. Якщо $\varphi(x_{k+1})<0$, то точку x_{k+1} треба перепозначити як x_{k-1}, в іншому випадку, коли $\varphi(x_{k+1})>0$ точку x_{k+1} треба перепозначити як x_k.

Нижче наводяться основні кроки метода січних відшукання точки мінімуму цільової функції $f(x)$.

1. Задати: x_{k-1}, x_k, $k=0$ – початкові точки (кінці інтервалу невизначеності), точність σ.

2. Обчислити $f'(x_{k-1})$, $f'(x_k)$.

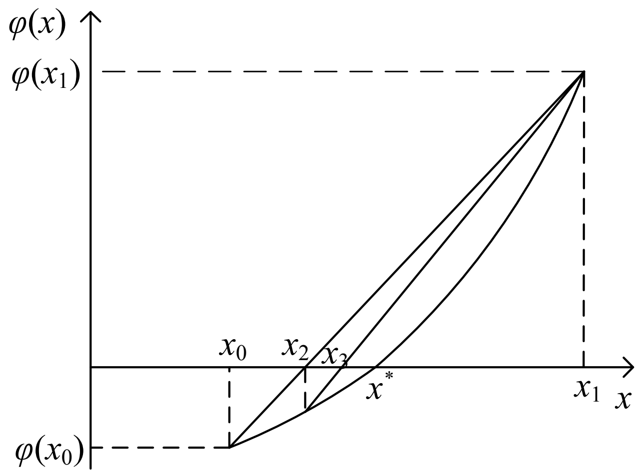


Рисунок 3.5 – Графічна інтерпретація метода січних

3. Обчислити $x_{k+1} = \dfrac{f'(x_k)x_{k-1} - f'(x_{k-1})x_k}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}$.

4. Обчислити $f'(x_{k+1})$. Якщо $\left|f'(x_{k+1})\right| \le \sigma$, то процес пошуку закінчено і $x^* = x_{k+1}$. Інакше йти до кроку *5.*

5. Якщо $f'(x_{k+1}) < 0$, покласти: $x_{k-1} = x_{k+1}$, $x_k = x_k$. Якщо $f'(x_{k+1}) > 0$, покласти: $x_k = x_{k+1}$, $x_{k-1} = x_{k-1}$. Йти до кроку *6.*

6. Покласти $k = k+1$, йти до кроку *3.*

➢ **Зауваження.**

1. Для початку пошуку методом січних необхідно мати дві початкові точки x_0 і x_1, такі що функція $f(x)$ на інтервалі $[x_0, x_1]$ є унімодальною. Це означає, що на цьому інтервалі похідна $f'(x)$ змінює знак, тобто має місце умова $\varphi(x_0)\cdot\varphi(x_1) < 0$. В цьому сенсі метод січних можна розглядати як комбінацію метода Ньютона і загальної схеми виключення інтервалів.

2. Метод січних в літературі ще називають методом хорд.

o *Приклад застосування метода січних.*

Знайдемо мінімум цільової функції $f(x) = 2x^2 - 4x + 16/x$. Задамо $x_0 = 1{,}5$; $x_1 = 2{,}4$; $\sigma = 0{,}001$.

Попередньо знайдемо похідну $f'(x) = 4x - 4 - 16/x^2$

1 ітерація $(k=1)$. Обчислимо

$f'(x_0)=f'(1{,}5)=4\cdot 1{,}5-4-16/(1{,}5)^2=-5{,}111$;

$f'(x_1)=f'(2{,}4)=4\cdot 2{,}4-4-16/(2{,}4)^2=2{,}822$;

$$x_2=\frac{f'(x_1)x_0-f'(x_0)x_1}{f'(x_1)-f'(x_0)}=\frac{2{,}822\cdot 1{,}5-(-5{,}111)\cdot 2{,}4}{2{,}822-(-5{,}111)}=2{,}080.$$

Знайдемо

$f'(x_2)=f'(2{,}080)=4\cdot 2{,}080-4-16/(2{,}080)^2=0{,}6218$.

Оскільки $|f'(x_2)|>\sigma$, пошук треба продовжити.

Маємо: $f(x_2)>0$, тоді перепозначимо точки: $x_1=1{,}5$, $x_2=2{,}080$.

Покладемо $k=k+1$.

2 ітерація $(k=2)$.Перепозначимо

$f'(x_1)=f'(1{,}5)=-5{,}111$.

Обчислимо

$f'(x_2)=f'(2{,}080)=0{,}6218$;

$$x_3=\frac{f'(x_2)x_1-f'(x_1)x_2}{f'(x_2)-f'(x_1)}=\frac{0{,}6218\cdot 1{,}5-(-5{,}111)\cdot 2{,}080}{0{,}6218-(-5{,}111)}=2{,}017.$$

Знайдемо

$f'(x_3)=f'(2{,}017)=4\cdot 2{,}017-4-16/(2{,}017)^2=0{,}1351$.

Оскільки $|f'(x_3)|>\sigma$, пошук треба продовжити.

Маємо: $f(x_3)>0$, тоді перепозначимо точки: $x_2=1{,}5$, $x_3=2{,}017$.

Покладемо $k=k+1$.

3 ітерація $(k=3)$. Перепозначимо

$f'(x_2)=f'(1{,}5)=-5{,}111$;

$f'(x_3)=f'(2{,}017)=0{,}1351$;

$$x_4=\frac{f'(x_3)x_2-f'(x_2)x_3}{f'(x_3)-f'(x_2)}=\frac{0{,}1351\cdot 1{,}5-(-5{,}111)\cdot 2{,}017}{0{,}1351-(-5{,}111)}=2{,}004.$$

Знайдемо

$f'(x_4)=f'(2{,}004)=4\cdot 2{,}004-4-16/(2{,}004)^2=0{,}0320$.

Оскільки $|f'(x_4)|>\sigma$, пошук треба продовжити.

Маємо: $f(x_4)>0$, тоді перепозначимо точки: $x_3=1{,}5$, $x_4=2{,}004$.

Покладемо $k=k+1$.

4 ітерація $(k=4)$. Перепозначимо

$f'(x_3) = f'(1{,}5) = -5{,}111$.

Обчислимо

$f'(x_4) = f'(2{,}004) == 0{,}0320$;

$$x_5 = \frac{f'(x_4)x_3 - f'(x_3)x_4}{f'(x_4) - f'(x_3)} = \frac{0{,}0320 \cdot 1{,}5 - (-5{,}111) \cdot 2{,}004}{0{,}0320 - (-5{,}111)} = 2{,}001.$$

Знайдемо

$f'(x_5) = f'(2{,}001) = 4 \cdot 2{,}001 - 4 - 16/(2{,}001)^2 = 0{,}008$.

Оскільки $|f'(x_5)| > \sigma$, пошук треба продовжити.

Маємо: $f(x_5) > 0$, тоді перепозначимо точки: $x_4 = 1{,}5$, $x_5 = 2{,}001$.

Покладемо $k = k + 1$.

5 ітерація $(k=5)$. Перепозначимо

$f'(x_4) = f'(1{,}5) = -5{,}111$.

Обчислимо

$f'(x_5) = f'(2{,}001) == 0{,}008$;

$$x_6 = \frac{f'(x_5)x_4 - f'(x_4)x_5}{f'(x_5) - f'(x_4)} = \frac{0{,}008 \cdot 1{,}5 - (-5{,}111) \cdot 2{,}001}{0{,}008 - (-5{,}111)} = 2{,}000;$$

Знайдемо

$f'(x_6) = f'(2{,}00) = 4 \cdot 2{,}00 - 4 - 16/(2{,}00)^2 = 0{,}000$.

Оскільки $|f'(x_6)| < \sigma$, пошук закінчено: $x^* = x_6 = 2{,}000$.

Отримані результати пошуку мінімуму методом січних представлені в табл. 3.5.

Таблиця 3.5 – Результати пошуку методом січних

№ ітерації, k	x_{k-1}	$f'(x_{k-1})$	x_k	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$f'(x_{k+1})$
1	1,5	–5,111	2,4	2,822	2,080	0,6218
2	1,5	–5,111	2,080	0,6218	2,017	0,1351
3	1,5	–5,111	2,017	0,1351	2,004	0,0320
4	1,5	–5,111	2,004	0,0320	2,001	0,008
5	1,5	–5,111	2,001	0,008	2,000	0,000

➢ **Зауваження**

1. На першій ітерації в методі січних обчислюється два значення цільової функції, на кожній подальшій ітерації – одне значення, таким чином після n ітерацій кількість обчислень цільової функції буде складати $n+1$.

Контрольні питання і задачі

- Доведіть, що задача $\min f(x)$ математично еквівалентна задачі відшукання кореня рівняння $f'(x)=0$.
- Які властивості повинна мати функція, щоб до неї можна б було застосувати метод Ньютона?
- Чи завжди збігається метод Ньютона? Вкажіть умови збіжності.
- Що є вхідними даними в алгоритмі метода Ньютона?
- Сформулюйте умову закінчення пошуку в методі Ньютона.
- Поясніть, чому метод Ньютона називають методом дотичних?
- Знайдіть точку мінімуму функції $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x-3\ln x$ методом Ньютона. Покласти $x_0=5$, $\sigma=0{,}01$.
- Як вибирається параметр α в методі Ньютона-Рафсона з регулюванням кроку?
- Чи завжди збігається метод Ньютона-Рафсона з регулюванням кроку?
- Що є вхідними даними в алгоритмі метода Ньютона-Рафсона з регулюванням кроку?
- Сформулюйте умову закінчення пошуку в методі Ньютона–Рафсона з регулюванням кроку.
- Знайдіть точку мінімуму функції $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x-3\ln x$ методом Ньютона-Рафсона з регулюванням кроку. Покласти $x_1=5$, $\sigma=0{,}01$. Параметр γ виберіть самостійно.
- Поясніть, чому першу модифікацію метода Ньютона називають методом однієї дотичної?
- Що є вхідними даними в алгоритмі першої модифікації метода Ньютона?

- Сформулюйте умову закінчення пошуку в алгоритмі першої модифікації метода Ньютона
- Знайдіть точку мінімуму функції $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-3\ln x$ алгоритмом першої модифікації метода Ньютона. Покласти $x_1=5$, $\sigma=0{,}01$.
- Порівняйте швидкість збігання метода дотичних і метода однієї дотичної.
- Поясніть, чому метод січних можна розглядати як комбінацію метода Ньютона і загальної схеми виключення інтервалів?
- Що є вхідними даними в алгоритмі метода січних?
- Сформулюйте умову закінчення пошуку в методі січних.
- Поясніть, чому другу модифікацію метода Ньютона називають методом січних?
- Знайдіть точку мінімуму функції $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-3\ln x$ методом січних. Покласти $x_0=1$, $x_1=5$, $\sigma=0{,}01$.
- Порівняйте швидкість збігання метода дотичних і метода січних. Результат поясніть.

4. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Мета даного лабораторного практикуму полягає у вивченні теоретичних основ методів мінімізації функції однієї змінної та в отриманні навичок практичної роботи з ними на прикладі чисельного розв'язання задачі мінімізації заданої цільової функції на ПЕОМ.

В лабораторному практикумі пропонується реалізувати наступні методи одновимірної мінімізації:

- методи виключення інтервалу:
  - метод дихотомії;
  - метод половинного ділення;
  - метод золотого перетину;
  - метод Фібоначчі;
- метод квадратичної апроксимації Пауелла;
- Метод Ньютона;
- Ньютона з регулюванням кроку;
- перша модифікація методу Ньютона;
- друга модифікація методу Ньютона – метод січних.

Постановка задачі: для заданої цільової функції однієї змінної $f(x)$ знайти з необхідною точністю σ точку локального мінімуму:

$$x^* = \arg f(x^*) = \arg \{\min_x f(x^*)\}.$$

Для цього необхідно попередньо треба визначити інтервал локалізації точки мінімуму (інтервал невизначеності $[a_0, b_0]$) за допомогою алгоритму Свенна. Вхідними даними для реалізації алгоритму Свенна є цільова функція $f(x)$ та початкова точку пошуку x_0, які необхідно взяти з *таблиці Б1* додатку Б у відповідності зі своїм номером варіанту.

Після того, як початковий інтервал невизначеності $[a_0, b_0]$ знайдений, цей інтервал є однаковим для реалізації всіх методів виключення інтервалів.

Для всіх методів мінімізації з лабораторного практикуму необхідно:

- скласти блок-схему алгоритму методу у відповідності з описом алгоритмів, наведених вище в підрозділах;
- розробити оригінальну розрахункову програму для реалізації конкретного методу мінімізації, яка виводить усі необхідні проміжні результати у файл;

- за результатами розрахунків провести аналіз ефективності як окремого методу, так і порівняльний аналіз ефективності вивчених методів щодо мінімізації конкретної цільової функції;
- оформити звіт про виконану роботу.

Блок-схему необхідно оформлювати, керуючись правилами, наведеними в ГОСТ 19.701-90. Приклад блок-схеми наведено в додатку А.

Вибір мови програмування обмежується наявністю відповідної середи розробки в комп'ютерній аудиторії. Програма повинна бути лаконічною та грамотно функціонально розбита на функції. Вихідний код відформатований.

Звіт про виконану роботу повинен містити:

- титульну сторінку;
- постановку задачі;
- блок-схеми алгоритмів кожного реалізованого методу оптимізації;
- результати розрахунків за кожним методом, виведені у вигляді таблиць, які містять усі необхідні проміжні результати;
- висновки про ефективність використаних методів одномірної мінімізації на основі зведеної таблиці, що містить значення локального мінімуму розглянутої задачі й кількість обчислень цільової функції, знайдених за допомогою запропонованих методів.

Приклад оформлення титульної сторінки наведено в додатку В.

Під ***оцінкою ефективності*** слід розуміти величину N_f – кількість обчислень цільової функції, необхідних для отримання результату із заданою точністю.

У висновках необхідно представити зведені в таблицю результати пошуку локального мінімуму функції за кожним розглянутим методом. В якості шаблону таблиці слід використати представлену форму табл. 4.1.

Для алгоритмів виключення інтервалів пропонуються загальні такі позначення:

- k – номер ітерації;
- $[a_k, b_k]$ – інтервал невизначеності на k-й ітерації;
- $L_k = b_k - a_k$ – довжина поточного інтервалу невизначеності;
- x_1, x_2 – пробні точки інтервалу $[a_k, b_k]$, упорядковані таким чином, що $a_k < x_1 < x_2 < b_k$;
- σ – задана точність;
- x^* – точка локального мінімуму.

Таблиця 4.1 – Зведена таблиця за лабораторними роботами

Метод	Значення локального мінімуму x^*	Кількість обчислень цільової функції N_f	Кількість ітерацій n
дихотомії			
половинного ділення			
золотого перетину			
Фібоначчі			
Пауелла			
Ньютона			
Ньютона-Рафсона з регулюванням кроку			
перша модифікація методу Ньютона			
січних			

➢ **Рекомендації**

1. Для всіх методів, окрім методу Пауелла, рекомендується вибрати $\sigma = 0{,}001$. Для методу Пауелла треба взяти $\sigma_f = 0{,}01$, $\sigma_x = 0{,}001$.

2. Параметр ε в методі дихотомії рекомендується вибрати $\varepsilon = 0{,}0001$.

Лабораторна робота 1
ВИЗНАЧЕННЯ ПОЧАТКОВОГО ІНТЕРВАЛУ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Мета роботи: застосувати алгоритм Свенна для визначення початкового інтервалу невизначеності $[a_0, b_0]$.

Вхідні дані: цільова функція $f(x)$, початкова точка x_0 та початковий позитивний крок Δ_0. Рекомендується вибрати $\Delta_0 = 1$.

Вихідні дані: інтервал невизначеності $[a_0, b_0]$.

Блок-схема описаного вище алгоритму у якості прикладу оформлення блок-схем наведена на рис. А.1 в додатку А.

Результати поітераціонного пошуку початкового інтервалу невизначеності необхідно представити у вигляді табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Результати пошуку початкового інтервалу невизначеності

№ ітерації, k	Δ_0	x_k	$f(x_k)$	$f(x_k) < f(x_{k-1})$?	$[a_0, b_0]$
0					
1					
2					

Лабораторна робота 2
МЕТОД ДИХОТОМІЇ

Мета роботи: Застосувати алгоритм методу дихотомії для пошуку точки мінімуму цільової функції $f(x)$.

Вхідні дані: цільова функція $f(x)$, початковий інтервал невизначеності $[a_0, b_0]$, точність σ, параметр ε.

Вихідні дані: проміжні результати пошуку, значення точки мінімуму x^*.

Проміжні результати пошуку мінімуму цільової функції необхідно представити у вигляді табл. 4.3.

Таблиця 4.3 – Результати пошуку мінімуму методом дихотомії

№ ітерації, k	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$[a_k, b_k]$	L_k
0						
. . .						
n						

Лабораторна робота 3
МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДІЛЕННЯ

Мета роботи: Застосувати алгоритм методу половинного ділення для пошуку точки мінімуму цільової функції $f(x)$.

Вхідні дані: цільова функція $f(x)$, початковий інтервал невизначеності $[a_0, b_0]$, точність σ.

Вихідні дані: проміжні результати пошуку, значення точки мінімуму x^*.

Проміжні результати пошуку мінімуму цільової функції необхідно представити у вигляді табл. 4.4.

Таблиця 4.4 – Результати пошуку методом половинного ділення

№ ітерації, k	x_1	x_m	x_2	$f(x_1)$	$f(x_m)$	$f(x_2)$	$[a_k, b_k]$	L_k
0								
1								
. . .								
n								

Лабораторна робота 4

МЕТОД ЗОЛОТОГО ПЕРЕТИНУ

Мета роботи: Застосувати алгоритм методу золотого преретину для пошуку точки мінімуму цільової функції $f(x)$.

Вхідні дані: цільова функція $f(x)$, початковий інтервал невизначеності $[a_0, b_0]$, точність σ, параметр розбиття ν.

Вихідні дані: проміжні результати пошуку, значення точки мінімуму x^*.

Проміжні результати пошуку мінімуму цільової функції необхідно представити у вигляді табл. 4.5.

Таблиця 4.5 – Результати пошуку методом золотого перетину

№ ітерації, k	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$[a_k, b_k]$	L_k
0						
1						
. . .						
n						

Лабораторна робота 5
МЕТОД ФІБОНАЧЧІ

Мета роботи: Застосувати алгоритм методу Фібоначчі для пошуку точки мінімуму цільової функції $f(x)$.

Вхідні дані: цільова функція $f(x)$, початковий інтервал невизначеності $[a_0, b_0]$, точність σ.

Вихідні дані: проміжні результати пошуку, значення точки мінімуму x^*.

Проміжні результати пошуку мінімуму цільової функції необхідно представити у вигляді таблиці 4.6.

Таблиця 4.6 – Результати пошуку методом Фібоначчі

№ ітерації, k	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$[a_k, b_k]$	L_k
0						
. . .						
n						

Лабораторна робота 6
МЕТОД ПАУЕЛЛА

Мета роботи: Застосувати алгоритм методу Фібоначчі для пошуку точки мінімуму цільової функції $f(x)$.

Вхідні дані: цільова функція $f(x)$, початкова точка x_0, параметр Δ_0 та задана точність σ_f, σ_x.

Вихідні дані: проміжні результати пошуку, значення точки мінімуму x^*.

o У якості початкової точки рекомендується брати точку $x_0 = a_0$, де a_0 – ліва границя початкового інтервалу невизначеності $[a_0, b_0]$, знайденого в лабораторній роботі 1.

Проміжні результати пошуку мінімуму цільової функції необхідно представити у вигляді табл. 4.7.

Таблиця 4.7 – Результати пошуку методом Пауелла

№ ітерації, k	x_1	x_2	x_3	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\tilde{x}$	$f(\tilde{x})$
1								
…								
n								

Лабораторна робота 7
МЕТОД НЬЮТОНА

Мета роботи: Застосувати алгоритм методу Ньютона для пошуку точки мінімуму цільової функції $f(x)$.

Вхідні дані: цільова функція $f(x)$, початкова точка x_0, точність σ.

Вихідні дані: проміжні результати пошуку, значення точки мінімуму x^*.

о У якості початкової точки рекомендується брати точку $x_0 = a_0$, де a_0 – ліва границя початкового інтервалу невизначеності $[a_0, b_0]$, знайденого в лабораторній роботі 1.

Проміжні результати пошуку мінімуму цільової функції необхідно представити у вигляді табл. 4.8.

Таблиця 4.8 – Результати пошуку методом Ньютона

№ ітерації, k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\lvert f'(x_k) \rvert$	$f''(x_k)$
0					
1					
. . .					
n					

Лабораторна робота 8
МЕТОД НЬЮТОНА-РАФСОНА З РЕГУЛЮВАННЯМ КРОКУ

Мета роботи: Застосувати алгоритм методу Ньютона-Рафсона з регулюванням кроку для пошуку точки мінімуму цільової функції $f(x)$.

Вхідні дані: цільова функція $f(x)$, початкова точка x_0, величина кроку α, параметр γ, точність σ.

Вихідні дані: проміжні результати пошуку, значення точки мінімуму x^*.

o У якості початкової точки рекомендується брати точку $x_0 = a_0$, де a_0 – ліва границя початкового інтервалу невизначеності $[a_0, b_0]$, знайденого в лабораторній роботі 1.

o Параметр γ, від якого суттєво залежить ефективність методу, необхідно вибрати самостійно з інтервалу (0, 1).

Проміжні результати пошуку мінімуму цільової функції необхідно представити у вигляді табл. 4.9.

Таблиця 4.9 – Результати пошуку методом Ньютона-Рафсона з регулюванням кроку

№ ітерації, k	x_k	α	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$f''(x_k)$	$\tilde{x}$	$f(\tilde{x})$	$f'(\tilde{x})$
0								
1								
…								
n								

Лабораторна робота 9
ПЕРША МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ НЬЮТОНА

Мета роботи: Застосувати алгоритм першої модифікації методу Ньютона для пошуку точки мінімуму цільової функції $f(x)$.

Вхідні дані: цільова функція $f(x)$, початкова точка x_0, точність σ.

Вихідні дані: проміжні результати пошуку, значення точки мінімуму x^*.

o У якості початкової точки рекомендується брати точку $x_0 = a_0$, де a_0 – ліва границя початкового інтервалу невизначеності $[a_0, b_0]$, знайденого в лабораторній роботі 1.

Проміжні результати пошуку мінімуму цільової функції необхідно представити у вигляді табл. 4.10.

Таблиця 4.10 – Результати пошуку першою модифікацією методу Ньютона

№ ітерації, k	x_k	$f'(x_k)$
0		
1		
…		
n		

Лабораторна робота 10
ДРУГА МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ НЬЮТОНА. МЕТОД СІЧНИХ

Мета роботи: Застосувати алгоритм другої модифікації методу Ньютона – методу січних для пошуку точки мінімуму цільової функції $f(x)$.

Вхідні дані: цільова функція $f(x)$, початкова точка x_0, точність σ.

Вихідні дані: проміжні результати пошуку, значення точки мінімуму x^*.

о У якості початкових точок рекомендується брати точки $x_0 = a_0$, $x_1 = b_0$, де a_0, b_0 – ліва та права границі початкового інтервалу невизначеності $[a_0, b_0]$, знайденого в лабораторній роботі 1.

Проміжні результати пошуку мінімуму цільової функції необхідно представити у вигляді табл. 4.11.

Таблиця 4.11 – Результати пошуку методом січних

№ ітерації, k	x_{k-1}	$f'(x_{k-1})$	x_k	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$f'(x_{k+1})$
1						
…						
n						

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Аттетков А.В. Методы оптимизации: учеб. для вузов / А.В Аттетков, С. В. Галкин, В.С. Зарубин; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 440 с.
2. Бейко И.В. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации / И.В. Бейко, Б.Н. Бублик, П.Н. Зинько. – К. : Вища школа, 1983. – 512 с.
3. ГОСТ 19.701-90. Единая система программной документации. Схемы алгоритмов, программ, данных и систем. Условные обозначения и правила выполнения. – Введ.01.01.1992.
4. Карманов В.Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1980. – 256 с.
5. Лесин В.В. Основы методов оптимизации : учебник / В.В. Лесин, Ю.П. Лисовец. – М. : Изд-во МАИ, 1995. – 341 с.
6. Моисеев Н.Н. Методы оптимизации / Н.Н. Моисеев, Ю.П. Иванилов, Е.М. Столярова. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
7. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учеб. пособ. / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М. : Высш. школа, 2003. – 544 с.
8. Пшеничный Б.Н. Численные методы в экстремальных задачах / Б.Н. Пшеничный, Ю.М. Данилин. – М. : Наука, 1975. – 320 с.
9. Реклейтис Г. Оптимизация в технике : в 2 кн. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел. – Кн. 1. – М. : Мир, 1986. – 349 с.
10. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / | Дж. Форсайт, М. Малькольм., К. Моулер. – М. : Мир, 1980. – 280 с.
11. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М. : Мир, 1975. – 536 с.

Д о д а т о к   А

ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ БЛОК-СХЕМИ АЛГОРИТМУ

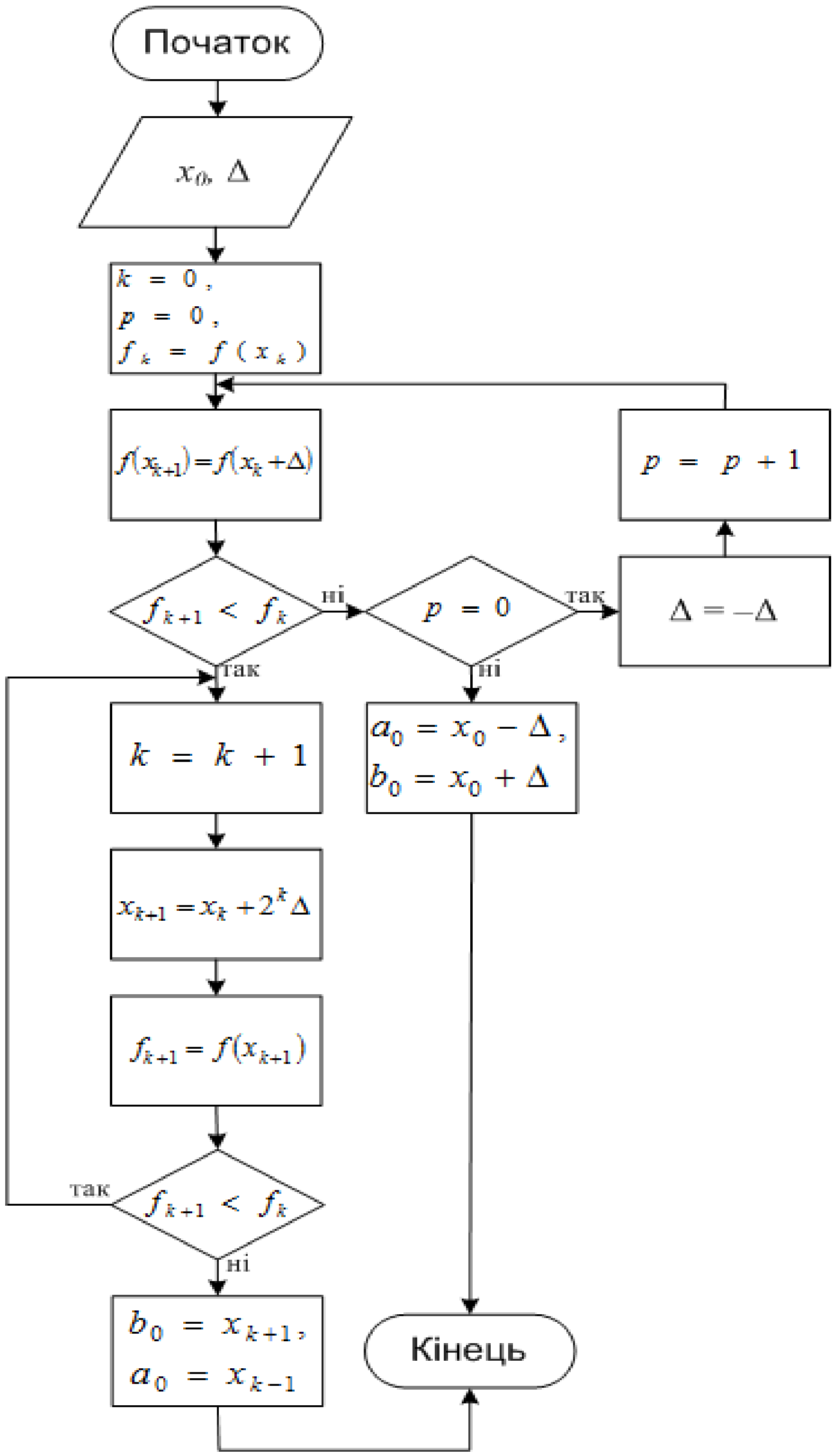


Рисунок А.1 – Блок-схема алгоритму Свенна

Додаток Б
ЦІЛЬОВІ ФУНКЦІЇ

Таблиця Б.1 – Цільові функції і початкові точки пошуку

№	Цільова функція $f(x)$	Початкова точка x_0
1	$\left(4x+\frac{1}{2}x^2\right)\ln x-\frac{1}{4}x^2-8x$	1.95
2	$(2x+1)(3x+2)\sqrt[3]{3x+2}$	–0.55
3	$1.5(x+3)(x+1.5)(x-1.1)^2+1.5$	–2.40
4	$-(4x+4)\,e^{-x}+\cos x+x$	–0.25
5	$\left(4x-\frac{1}{4}\right)\arctan x-\frac{x^3}{12}-\frac{3}{4}$	0.05
6	$\left(2-x^2\right)\sin(x+0.5)-\left(2\cos(x+0.5)+1\right)x$	1.45
7	$1.75(x+2.3)(x-1.05)(x-1.7)(x-3)+1$	–1.35
8	$x\ln x-2\sin\frac{x}{2}-x$	1.75
9	$\sqrt{x+2}+\frac{(3-x)^4}{(x+5)^2}$	1.60
10	$x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+(2-x)\ln(2-x)+x-2$	0.45
11	$(x-1)^2(x+1)^4(x-2)^3$	0.05
12	$e^{2-x}+x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$	1.90
13	$\left(x+\frac{x^3}{3}\right)\ln x-2x-\frac{x^3}{9}$	1.35
14	$-0.75\,x\,(x-1.5)(x-2.7)(x-3)+1$	1.95
15	$\left(1-e^x\cdot\sin(x)\right)^2$	0.75
16	$e^{x-1}-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$	3.20
17	$1.5(x+1.5)^2(x-1.1)(x-0.75)$	–1.55
18	$e^{1-x}+x\ln x-x$	1.65
19	$\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\arctan x-\frac{3}{2}x$	1.15

Закінчення таблиці Б.1

№	Цільова функція $f(x)$	Початкова точка x_0
20	$(x+1)^3(x+2.5)(x-3.3)+3.5$	2.35
21	$\arcsin^2\left(\ln\left(1+x^2\right)-1.5\right)$	1.85
22	$2(x-3)^2+e^{\frac{x^2}{2}}$	1.55
23	$e^{1-x}+x\arctan x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$	0.60
24	$-e^{\cos x}\sin^2 x$	5.10
25	$0.2x^2(x+0.5)(x-1.5)(x-3.5)+1.5$	2.85
26	$-2(x+1)e^{-x}-2\cos x-x$	6.75
27	$x\sqrt{4-x^2}+\arcsin\frac{x}{2}$	–1.55
28	$(x-1)^2(x+1.75)(x+0.3)-2$	–1.25
29	$(x^2-2x)\ln x-\frac{3}{2}x^2+4x$	2.70
30	$\frac{3}{2}x^2+5\cos x$	1.65
31	$\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}-6x$	2.40
32	$\left(1+x\sqrt[6]{x+3}\right)\ln(1-x)$	–2.65
33	$0.1x^3(x+0.5)(x-3.5)+1.5$	2.75
34	$(x-1)\arctan(x-1)-0.5\ln\left(1+(x-1)^2\right)$	1.05
35	$x\ln\left(\arctan\sqrt{1+x^2}\right)$	0.55
36	$x\ln x-\sin x-x$	1.25
37	$0.25(x-3.5)\,x\,(x+3.25)\,(x-4.5)-7.5$	–2.05
38	$\frac{2}{3}\arctan x-\frac{1}{6}\ln(x+1)$	–0.65
38	$e^{2-x}+\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+(x+5)^2$	–0.35
40	$\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln\left(1+x^2\right)-x$	1.05

Д о д а т о к В

ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ ТИТУЛЬНОЇ СТОРІНКИ ЗВІТУ

Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Кафедра комп’ютерного моделювання процесів і систем

ЗВІТ
з лабораторних робіт з курсу «Методи оптимізації»
на тему
«Методи мінімізації функцій однієї змінної»

Виконав(ла): студент(ка) групи _______ ________ _________________
(група) (підпис) (прізвище та ініціали)

Перевірив(ла): _______________________ ________ _________________
(посада, вчена ступінь) (підпис) (прізвище та ініціали)

Харків 2017

Навчальне видання

ПЛАКСІЙ Юрій Андрійович
ТАТАРІНОВА Оксана Андріївна

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Навчально-методичний посібник з курсів
«МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ», «МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ
ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ»
для студентів спеціальностей «Прикладна математика»,
«Комп'ютерні науки»

У двох частинах

Частина 1
МЕТОДИ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Відповідальний за випуск *В. Б. Успенський*
Роботу до видання рекомендував *Д. В. Бреславський*
В авторській редакції

Підп до друку 01.09.2017 р. Формат 60 × 84 / 16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 4,7. Наклад 300 пр., 1-й з-д 1–61.
Зам. № . Ціна договірна.

В и д а в е ц ь
ТОВ «Видавництво «Підручник НТУ «ХПІ»,
вул. Кирпичова, 2, м. Харків-2, 61002.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3656 від 24.12.2009 р.

В и г о т о в л ю в а ч
ТОВ «Л'еколь»,
вул. Командарма Уборевіча, 20, кв. 171, м. Харків-144, 61144.