

Algebra per Informatica

Foglio di esercizi 9

Esercizio 1. Si consideri \mathbb{Z}_{100} .

1. E' vero che se $\overline{7} \cdot \overline{x} = \overline{7} \cdot \overline{y}$ allora $\overline{x} = \overline{y}$?
2. E' vero che se $\overline{6} \cdot \overline{x} = \overline{6} \cdot \overline{y}$ allora $\overline{x} = \overline{y}$?

Esercizio 2. Si consideri \mathbb{Z}_{169} .

1. Determinare, se esiste, l'inverso di $\overline{15}$.
2. Determinare, se esistono, due elementi distinti $\overline{x}, \overline{y}$ tali che $\overline{12} \cdot \overline{x} = \overline{12} \cdot \overline{y}$.
3. Determinare, se esistono, due elementi distinti $\overline{x}, \overline{y}$ tali che $\overline{13} \cdot \overline{x} = \overline{13} \cdot \overline{y}$.

Esercizio 3. Calcolare la funzione di Eulero $\varphi(n)$ per $n = 26, 32, 69, 96, 343, 777$.

Esercizio 4. Calcolare $\overline{9}^{101}$ e $\overline{7}^{1000}$ in \mathbb{Z}_{26} .

Esercizio 5. Provare che l'equazione $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = \overline{3}$ non ha soluzioni in \mathbb{Z}_4 .

Esercizio 6. Provare che per ogni numero intero dispari n si ha $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

Esercizio 7. Calcolare le potenze ottave di tutti gli elementi invertibili di \mathbb{Z}_{15} .

Esercizio 8. Provare che $\overline{5}$ è invertibile in \mathbb{Z}_{48} e determinare il suo inverso.

Esercizio 9. Calcolare il resto della divisione di 13^{98} per 17.

Esercizio 10. Sia $f : \mathbb{Z}_{1000} \rightarrow \mathbb{Z}_{1000}$ la funzione definita da $f(\overline{x}) = \overline{7} \cdot \overline{x}$. Provare che f è surgettiva.