

Algebra per Informatica

Foglio di esercizi 8

Esercizio 1. Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$(a, b) \triangleleft (c, d) \iff (a < c) \text{ OR } (a = c \text{ AND } b \leq d).$$

Stabilire se si tratta di una relazione d'ordine. In caso affermativo, \triangleleft coincide con qualche relazione d'ordine nota?

Esercizio 2. Si consideri la seguente relazione sull'insieme \mathbb{Z} :

$$m \triangleleft n \iff m + n \in 2\mathbb{Z}.$$

Stabilire se si tratta di una relazione d'ordine. In caso affermativo, \triangleleft coincide con qualche relazione d'ordine nota?

Esercizio 3. Si consideri la seguente relazione sull'insieme $A = \{a, b, c, d\}$:

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (c, a), (a, d), (c, d), (b, c), (b, d), (b, a)\}.$$

Stabilire se si tratta di una relazione d'ordine e in caso affermativo se è una relazione d'ordine totale.

Esercizio 4. Si consideri la seguente relazione sull'insieme \mathbb{N} :

$$a \triangleleft b \iff b = 2^k a \text{ per un qualche } k \in \mathbb{N}.$$

Stabilire se si tratta di una relazione d'ordine e in caso affermativo se è una relazione d'ordine totale. Determinare, se esistono, elementi minimali e massimali, minimo e massimo.

Esercizio 5. Sia $A = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ funzione}\}$ dotato della relazione:

$$f \triangleleft g \iff f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{N}.$$

Provare che \triangleleft è una relazione d'ordine su A . Si tratta di una relazione d'ordine totale? Determinare, se esistono, elementi minimali e massimali, minimo e massimo.

Esercizio 6. Si consideri l'insieme

$$A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\},$$

con la relazione d'ordine parziale \subseteq .

- (1) Trovare gli elementi massimali.
- (2) Trovare gli elementi minimali.
- (3) Esiste un massimo?
- (4) Esiste un minimo?
- (5) Trovare tutti i maggioranti dell'insieme $B = \{\{2\}, \{4\}\}$.
- (6) Trovare l'estremo superiore dell'insieme $B = \{\{2\}, \{4\}\}$, se esiste.
- (7) Trovare tutti i minoranti dell'insieme $C = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$.
- (8) Trovare l'estremo inferiore dell'insieme $C = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$, se esiste.

Esercizio 7. Si consideri il poset $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq \times \leq)$ e il sottoinsieme $A = \{(2, 2), (2, 3), (2, 6), (4, 3)\}$.

- (1) Trovare gli elementi massimali e minimali di A .
- (2) Trovare, se esistono, massimo e minimo di A .
- (3) Trovare tutti i maggioranti e i minoranti di A .
- (4) Trovare, se esistono, estremo inferiore e superiore di A .
- (5) Si consideri A come sottoinsieme del poset $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \text{LEX})$ e si risponda alle domande dei punti (1) – (4) in questo caso.

Esercizio 8. Si consideri il poset (\mathbb{R}, \leq) e si determinino, se esistono, massimo e minimo, estremo inferiore e superiore dei seguenti insiemi:

$$A = (0, 1), \quad B = (0, 1], \quad C = (0, 2] \setminus \{1\}, \quad D = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad E = \mathbb{Q},$$
$$F = \mathbb{N}, \quad G = D \cup \{-2\}, \quad H = \{\pi\}, \quad I = (-1, 0) \cup (1, 2), \quad J = (-1, 0] \cup [1, 2).$$

Esercizio 9. Si consideri il poset $(\mathbb{R}^2, \text{LEX})$ e i sottoinsiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2\} \quad \text{e} \quad B = [1, 2] \times [1, 3].$$

- (1) Trovare, se esistono, massimo e minimo di A e B .
- (2) Trovare tutti i maggioranti e i minoranti di A e B .
- (3) Trovare, se esistono, estremo inferiore e superiore di A e B .