Alessio Caminata
Francesco Strazzanti

Algebra per Informatica

Foglio di esercizi 10

Esercizio 1. Sia $A = \{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$ e si consideri la seguente associazione

$$a * b = \text{resto della divisione di } ab \text{ per } 18.$$

Stabilire se $*$ è un'operazione binaria sull'insieme A.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $A = \{a, b, c\}$ dotato della seguente operazione:

$$\begin{aligned} &a * a = a, \quad a * b = b, \quad a * c = c, \\ &b * a = b, \quad b * b = b, \quad b * c = c, \\ &c * a = c, \quad c * b = b, \quad c * c = a. \end{aligned}$$

Si verifichi che $*$ è un'operazione non associativa e non commutativa, ma dotata di un elemento neutro. Si determini tale elemento.

Esercizio 3. Per ciascuna delle seguenti operazioni binarie sull'insieme A indicato, stabilire se è associativa, commutativa, se esiste un elemento neutro e in tal caso se ogni elemento di A ha inverso.

1. $A = \mathbb{Q}$, $x * y = x - y$;
2. $A = \mathbb{Z}$, $x * y = \max\{x, y\}$;
3. $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$;
4. $A = \mathbb{N}$, $x * y = x + y + xy$;
5. $A = \mathbb{Z}$, $x * y = x^2 + y^2$;
6. $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $(a, b) * (c, d) = (ac, bd)$;
7. $A = \mathbb{R}$, $x * y = x(x + y)$;
8. $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $X * Y = X \cap Y$;
9. $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $X * Y = X \cup Y \setminus X \cap Y = \{x \in X \cup Y |\ x \notin X \cap Y\}$.

Esercizio 4. Sia A un insieme di s elementi. Quante sono le operazioni binarie su A?

Alessio Caminata
Francesco Strazzanti

Esercizio 5. Si determini quali delle seguenti operazioni su $\mathbb{R}$ sono associative e quali commutative:

$$x * y = \min\{x, y\}; \qquad x * y = \frac{x+y}{|xy|+1}; \qquad x * y = e^{x+y}.$$

Esercizio 6. Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$ con la seguente operazione:

$$f * g = h, \text{ dove } h \text{ è definita da } h(n) = f(n) + g(n) \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

1. Si dimostri che $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, *)$ è un monoide commutativo.
2. Qual è l'elemento neutro?
3. Quali elementi di $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ hanno inverso? $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, *)$ è un gruppo?

Esercizio 7. Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$ con la seguente operazione:

$$f * g = h, \text{ dove } h \text{ è definita da } h(n) = f(n) \cdot g(n) \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

1. Si dimostri che $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, *)$ è un monoide commutativo.
2. Qual è l'elemento neutro?
3. Quali elementi di $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ hanno inverso? $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, *)$ è un gruppo?

Esercizio 8. Sia G un gruppo. Provare che $(aba^{-1})^n = ab^na^{-1} \ \forall\ a, b \in G, \forall\ n \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 9. Per ciascuno dei seguenti monoidi si determini, se esiste, l'inverso dell'elemento x assegnato:

1. $(\mathbb{N}, +, 0)$, $x = 2$;
2. $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $x = 2$;
3. $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$, $x = 2$;
4. $(\mathbb{Z}_{15}, +, \overline{0})$, $x = \overline{2}$;
5. $(\mathbb{Z}_{15}, \cdot, \overline{1})$, $x = \overline{2}$;
6. $(\mathbb{Z}_6, \cdot, \overline{1})$, $x = \overline{2}$;
7. $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, \circ, \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})$, $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $x(n) = 2 \ \forall n \in \mathbb{Z}$;
8. $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, \circ, \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})$, $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $x(n) = n + 2 \ \forall n \in \mathbb{Z}$;
9. $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, \circ, \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})$, $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $x(n) = 2n \ \forall n \in \mathbb{Z}$;