Alessio Caminata
Francesco Strazzanti

Algebra per Informatica

Foglio di esercizi 7

Esercizio 1. Siano A e B due insiemi non vuoti e $f : A \to B$ una funzione. Consideriamo il grafico di f, cioè $\Gamma_f = \{(x, y) \in A \times B : \; y = f(x)\}$. Provare che A e Γ_f sono equipotenti.

Esercizio 2. Provare che l'insieme $\mathbb{Z} \setminus (5\mathbb{Z})$ è numerabile, dove $5\mathbb{Z} = \{5k : \; k \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 3. Siano $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} : \; |x| \leq 2\}$. Determinare la cardinalità degli insiemi seguenti:

$$\mathcal{P}(A),\; B \cap C,\; B \cup C,\; A \cup (B \cap C),\; A \times B,\; B \times A,\; \mathcal{P}(A \times B),\; \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B),$$
$$A^A = \{f : A \to A \text{ funzione}\},\; D = \{f : A \to A \text{ funzione bigettiva}\}$$
$$\mathcal{P}(A)^B = \{f : B \to \mathcal{P}(A) \text{ funzione}\},\; B^{\mathcal{P}(A)} = \{f : \mathcal{P}(A) \to B \text{ funzione}\}.$$

Esercizio 4. Stabilire se l'insieme $\{n^2 : \; n \in \mathbb{Z}\}$ è numerabile oppure no.

Esercizio 5. Siano A e B due insiemi numerabili. E' vero che $A \times B$ è numerabile?

Esercizio 6. Si considerino gli insiemi $A = \big\{f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c\}$ funzione tale che $f(1) = a\big\}$ e $B = \big\{f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c\}$ funzione tale che $f(3) = f(4) = b\big\}$. Determinare la cardinalità degli insiemi $A \cap B$, $A \cup B$, A^B, B^A.

Esercizio 7. Determinare, se possibile, un'applicazione bigettiva $f : A \to B$ tra le seguenti coppie di insiemi:

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\text{nord, sud, ovest, est}\}$;
2. $A = 2\mathbb{Z}$, $B = 9\mathbb{Z}$;
3. $A = \{1\}$, $B = \{\{42\}\}$;
4. $A = \{a, b, c\}$, $B = \mathcal{P}(\{1, 2\})$;
5. $A = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{R}^2$;
6. $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$;
7. $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \; x + 2y = 3\}$, $B = \{n^3 : \; n \in \mathbb{Z}\}$;

Alessio Caminata
Francesco Strazzanti

8. $A = \mathcal{P}(C)$, $B = D^3$, dove $C = \{\text{Chiesa}, \text{Immobile}, \text{Insigne}\}$ e $D = \{\triangle, \bigtriangledown\}$

Esercizio 8. Determinare la cardinalità dell'insieme quoziente $A/\sim$ per gli insiemi e le relazioni di equivalenza seguenti:

1. $A = \mathbb{Z}$ con $x \sim y \iff |x| = |y|$;
2. $A = \mathbb{Z}$ con $x \sim y \iff x - y = 12k,\ k \in \mathbb{Z}$;
3. $A = \mathbb{Z}$ con $x \sim y \iff x - y = k,\ k \in \mathbb{Z}$;
4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con la relazione d'equivalenza diagonale, cioè $x \sim y \iff x = y$;
5. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con $x \sim y \iff x - y = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$;
6. $A = \mathbb{Z}$ con $x \sim y \iff x - y = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$;
7. $A = \mathbb{N}$ con $x \sim y \iff x - y = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 9. Determinare il coefficiente di x^3 nello sviluppo del polinomio $(x + 2)^8$.

Esercizio 10. Determinare quante sono le combinazioni al superenalotto (cioè le sestine composte da 6 numeri distinti tra 1 e 90) che contengono esattamente tre numeri pari.

Esercizio 11. Si dimostri la seguente identità:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \text{per } k, n \in \mathbb{N},\ n \geq k \geq 1$$

Esercizio 12. Si dimostri la seguente *identità del bastone da hockey*:

$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1} \text{ per } r, n \in \mathbb{N},\ n \geq r.$$