Alessio Caminata
Francesco Strazzanti

Algebra per Informatica

Foglio di esercizi 6

Esercizio 1. Sia $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e sia $R \subseteq A \times A$ la seguente relazione:

$$R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 1), (1, 0), (2, 3), (3, 3)\}.$$

Stabilire se R è una relazione d'equivalenza oppure no.

Esercizio 2. Sia dato l'insieme $A = \{1, 2, 3\}$. Esibire un esempio di una relazione R su A tale che:

1. R è riflessiva e transitiva, ma non simmetrica;
2. R è simmetrica e transitiva, ma non riflessiva

Esercizio 3. Determinare se le seguenti sono relazioni d'equivalenza nell'insieme A:

1. $A = \mathbb{R}$, $x \sim y \iff x < y$;
2. $A = \mathbb{R}$, $x \sim y \iff x \leq y$;
3. $A = \mathbb{R}^2$, $(x, y) \sim (u, v) \iff xu > 0$ oppure $xu = 0$;
4. $A = \mathbb{Z}$, $x \sim y \iff$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x = y^n$.

Esercizio 4. In $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ poniamo $z \sim w \iff \dfrac{z}{w} \in \{+1, -1\}$.

1. Provare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
2. Determinare gli elementi della classe $[-i]$.

Esercizio 5. In $\mathbb{C}$ poniamo $z \sim w \iff z^4 = w^4$.

1. Provare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
2. Determinare la classe di 3.
3. Determinare se l'assegnazione $\varphi : \mathbb{C}/\sim \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $\varphi([x]) = x^2$ definisce una funzione.
4. Determinare se l'assegnazione $\psi : \mathbb{C}/\sim \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $\psi([x]) = x^8$ definisce una funzione.

Esercizio 6. Sia data la relazione d'equivalenza in $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \sim (u, v) \iff x = u$.

1. Determinare le classi $[(0, 0)]$, $[(-1, -2)]$.

2. Stabilire se $f : \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f([x, y]) = 2x^2$ è una funzione.
3. Stabilire se $g : \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $g([x, y]) = x^2 - y^2$ è una funzione.
4. Trovare una funzione bigettiva $\varphi : \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow \mathbb{R}$.

Esercizio 7. Sia data in $\mathbb{Z}$ la relazione d'equivalenza $x \sim y \iff |x| = |y|$. Provare che il quoziente $\mathbb{Z}/\sim$ è in corrispondenza biunivoca[1] con $\mathbb{N}$.

Esercizio 8. Sia data in $A = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ la relazione d'equivalenza

$$(x, y) \sim (a, b) \iff x = a \text{ e } y - b \text{ è pari.}$$

Provare che il quoziente $A/\sim$ è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$. E con $\mathbb{N}$?

[1] Due insiemi A e B si dicono in corrispondenza biunivoca se esiste una funzione bigettiva $f : A \to B$.